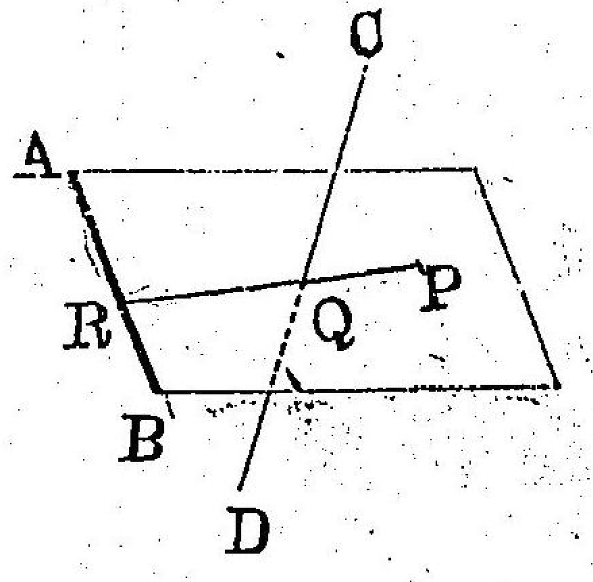


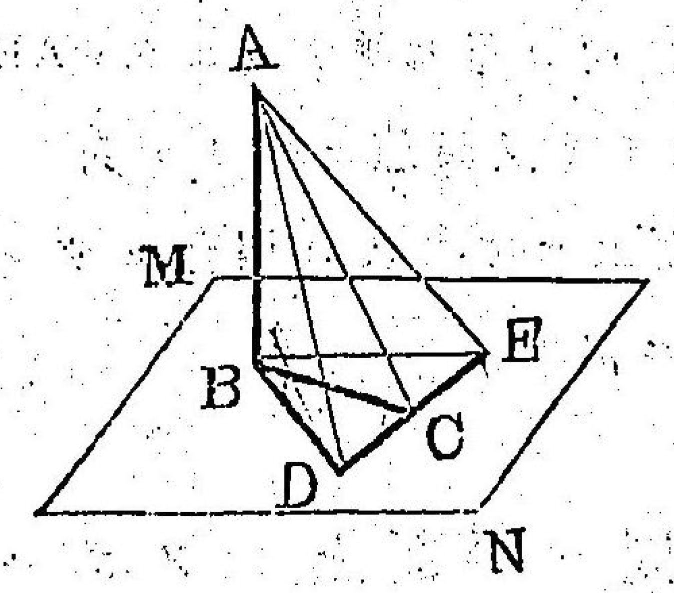
壹定點Pヲ通過シテ同シ平面上ニアラサル貳定直線AB, CDニ會スヘキ直線ヲ作ルコヲ求ム

〔作法〕ABヲ含ミテPヲ通過スル平面ヲ作リCDニ交ル所ヲQトセハP及ヒQヲ通過スル直線ハ所求ノモノナリ

〔證明〕直線AB及ヒ貳點P, Qハ今作リシ平面上ニアル故ニP, Qヲ通過スル直線ハABニ會スヘシ

〔附言〕直線PQガABニ平行スル場合及ヒ今畫キシ平面ガCDニ交ラサル片ハ不能ナリ

3. 平面MNノ外ニアル壹點Aヨリ此平面ニ引ケル垂線ヲABトシ其垂足Bヨリ此平面上ニアル任意ノ直線DEニ引ケル垂線ヲBCトシACヲ結ヘハDEニ垂線ナルコヲ證セヨ



〔證明〕CD, CEヲ等長ニ截リテBD, BEヲ結ヘハ兩三角形BCD, BCEニ於テ $\angle BCD=\angle BCE=R\llcorner$, $CD=CE$, BCハ共通

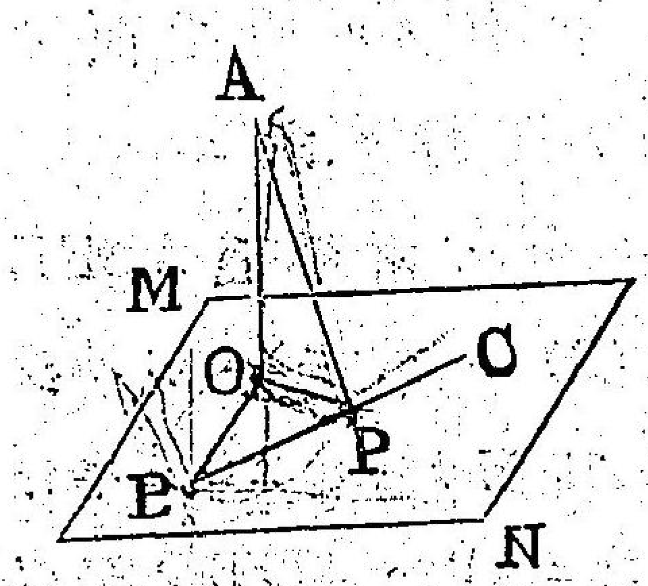
$\therefore$ $\triangle BCD \equiv \triangle BCE$ $\therefore$ $BD=BE$,

由テ又兩三角形ABD, ABEニ於テ $BD=BE$, $\angle ABD=\angle ABE=R\llcorner$, ABハ共通

$\therefore$ $\triangle ABD \equiv \triangle ABE$ $\therefore$ $AD=AE$ 即チ三角形ADEハ貳等邊ニシテCハ其底邊DEノ中點ナルガ故ニACハDEニ垂線ナルコ明カナリ

(附言) 本題ハ三垂線ノ定理ト稱スルモノニシテ立體幾何ニ於テ其用最モ多シ

4. 平面外ノ壹定點ヨリ此平面上ノ壹定點ヲ通過シテ此平面上ニ引ケル諸直線ニ下ス垂線ノ足ノ軌跡ヲ求ム

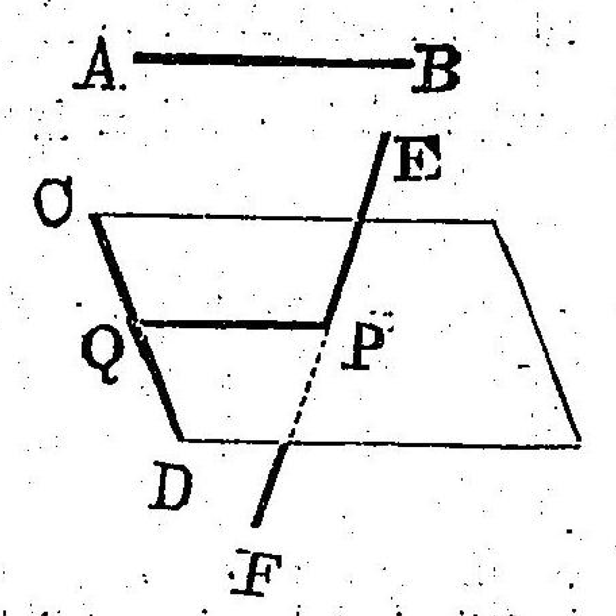


平面MNノ外ニアル壹定點ヲAトシ此平面上ノ壹定點ヲBトシBヲ通過シテ此平面上ニ引ク任意ノ直線BCヘ垂線APヲ引ク片Pノ軌跡ヲ求ム

先ツ平面MNニ垂線AOヲ下シOPヲ結ヘハOPハBCノ垂線ナルヘシ(三垂線ノ定理)故ニP點ノ軌跡ハBOヲ直徑トスル圓周ナルコ明カナリ.

5. 壹直線ニ平行ナル直線ヲ引キテ他ノ同シ平面上ニアラサル貳直線ニ交ラシムル法如何

壹直線ABニ平行ナル直線ヲ引キテ他ノ同シ平面上ニアラサル貳直線CD, EFニ交ラシムル法ヲ求ム



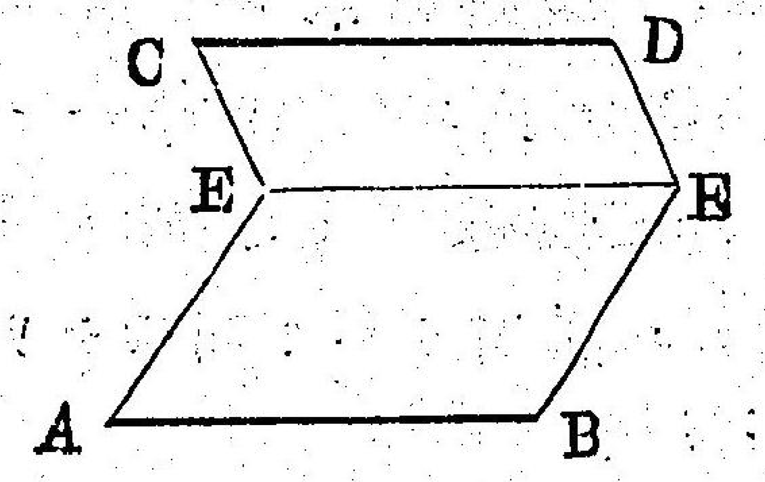
〔作法〕CD ヲ含ミテ AB ニ平行ナル平面 CDP ヲ畫キ P ニ於テ EF ヲ截ルトセハ P ヨリ BA ニ平行シテ直線 PQ ヲ引ケハ之レ所求ノモノナリ

〔證明〕平面 CDP ハ直線 AB ニ平行ナル故ニ之レニ平行ナル直線 PQ ハ平面 CDP 上ニアリ故ニ必ス CD ニ出會フ.

6. 平行貳直線ノ夫々ヲ含有スル兩平面ノ交線ハ前ノ貳直線ニ平行ナリ此證ヲ求ム

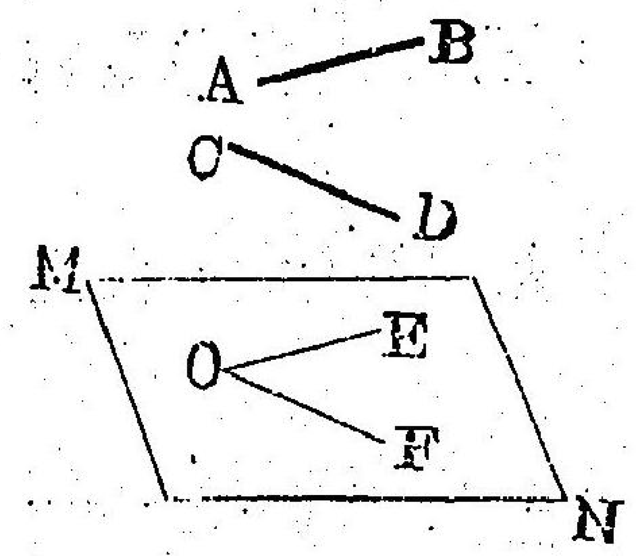
平行貳直線 AB, CD ノ夫々ヲ含ム兩平面 ABFE 及ヒ CDFE ノ交線 EF ハ AB, CD ニ平行ナルヘシ

〔證明〕直線 CD ハ平面 ABFE 上ニアル所ノ直線 AB ニ平行ナル故ニ CD ハ ABFE ノ平面ニ平行ス(定理)故ニ CD ハ平面 ABFE ニ出會ハズ從テ交線 EF ニモ出會ハズ而ノ CD, EF ハ壹個ノ平面 CDFE 上ニアル故ニ平行ナリ.



7. 壹定點ヲ通過シテ他ノ同シ平面上ニアラサル貳直線ニ平行ナル平面ヲ作ル法如何

壹定點 O ヲ通過シテ他ノ同シ平面上ニアラサル貳直線 AB, CD ニ平行ナル平面ヲ作ル法ヲ



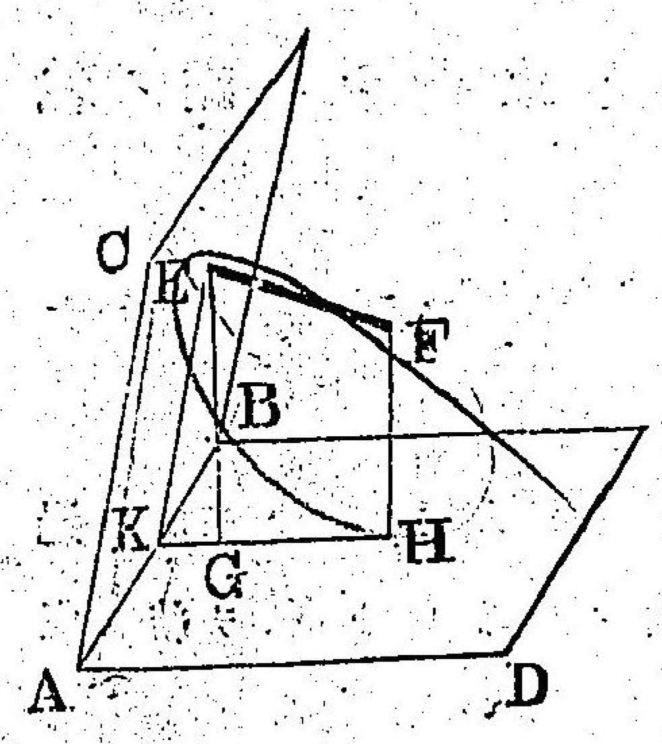
求ム

〔作法〕AB, CD ニ平行シテ O ヨリ OE, OF ヲ出シ此貳直線ヲ含ム平面 MN ヲ作レハ之レ所求ノモノナリ

〔證明〕平面外ノ直線ガ此平面内ノ直線ニ平行ナル𬼀前ノ直線ハ此平面ニ平行ナリト云フ定理ニ依リテ AB, CD ハ平面 MN 上ニアル貳直線 OE, OF ニ平行ナル故ニ AB, CD ハ平面 MN ニ平行ナ.

8. 相交ル貳平面アリ其壹ニ垂線ナル直線ガ他ノ上ニ投スル正射影ハ此貳平面ノ交線ニ垂線ナリ此證ヲ求ム

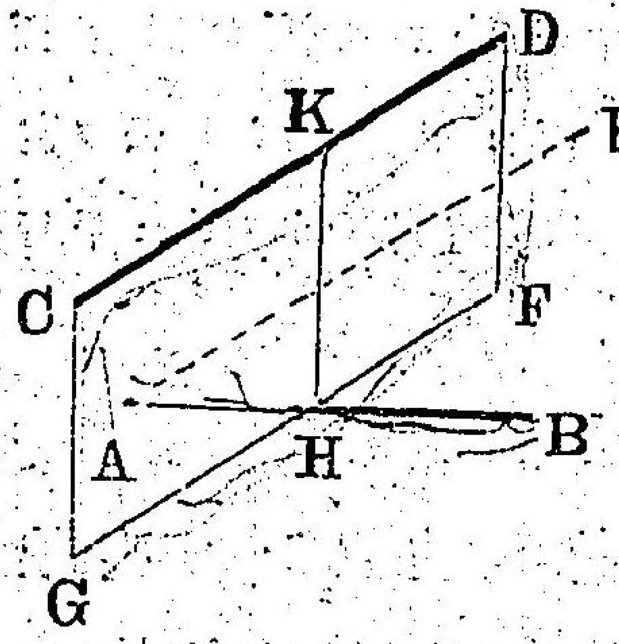
AB ニ於テ相交ル貳平面ヲ ABC, ABD トシ其壹ナル平面 ABC ニ垂線ナル直線 EF ガ他ノ平面 ABD 上ニ投スル正射影 HG ハ K ニ於テ AB ニ直交スヘシ



〔證明〕平面 EKHF ハ兩平面 ABC, ABD ノ垂線 EF, FH ヲ含ム故ニ此兩平面ニ垂直ニシテ言換フレハ兩平面 ABC, ABD ハ平面 EKHF ニ直立ス故ニ其交線ナル直線 AB モ此平面ニ直立ス之ニ由テ角 BKH ハ直角ニシテ 即チ HGK ハ AB ニ垂線ナリ.

9. 同シ平面上ニアラサル貳直線ニ共通垂線ヲ作ル法如何

同シ平面上ニアラサル貳直線 AB, CD ニ共通ノ垂線ヲ作ル法ヲ求ム



〔作法〕先ツ CD ニ平行シテ AE ヲ引キテ AB, AE ヲ含ム平面ニ垂線 DF ヲ引キ次ニ CD 及ヒ DF ヲ含ム平面 CDFG ヲ作リ前ノ平面トノ交線 FH ガ AB ニ交ル點ヲ H トシ FD ニ平行シテ HK ヲ引ケハ之レ所求ノ共通垂線ナリ

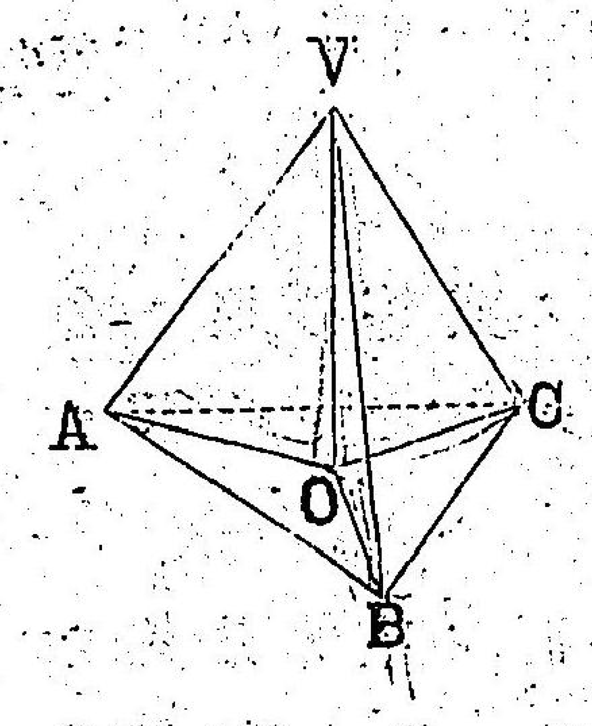
〔證明〕作法ニ依リテ HK ハ平面 BAE ニ垂線ナルヲ以テ AB ニモ垂線ナルヿ明カナリ又 AE ハ CD ニ平行ナル故ニ CD ハ平面 BAE ニ平行ス從テ HF ニモ平行ナリ而ソ HK ハ HF ニ垂線ナル故ニ CD ニモ垂線ナリ之ニ由テ HK ハ所求ノ共通垂線ナリ

10. 三面角ノ各稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ム.

三面角 V ノ各稜 VA, VB, VC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求ム

〔解〕先ツ VA, VB, VC ヲ等長ニ截リテ A, B, C ノ三點ヲ過キル平面ヲ作リテ此三點ヲ過ギル圓ノ中心 O ト V ヲ結フ直線 VO ハ所求ノ軌跡ナリ

〔證明〕OA, OB, OC ヲ結フヘシ然ルヰ三ツノ三角形 AOV,



BOV, COV ニ於テ

VA＝VB＝VC, OA＝OB＝OC,

OV ハ共通故ニ此三ツノ三角形ハ全等形ニシテ

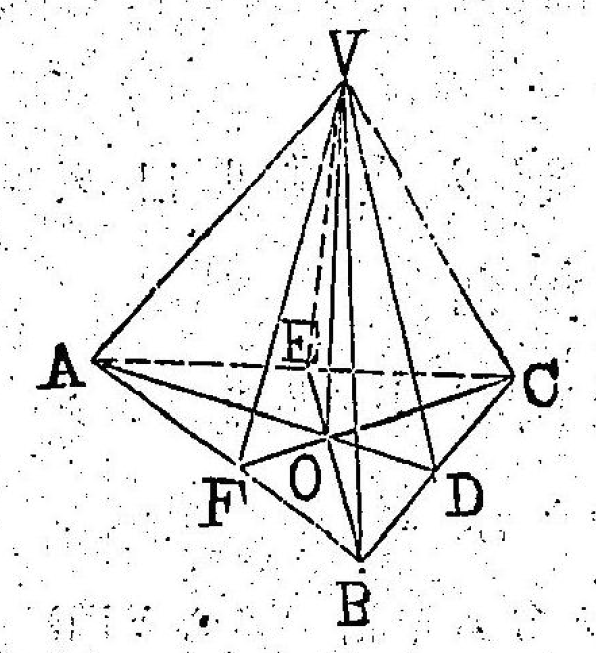
∠AVO＝∠BVO＝∠CVO ナリ

故ニ VO ハ各稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナリ.

11. 三面角ノ各稜ヲ含ミテ對面ニ垂面ヲ作レハ此三平面ハ同壹直線ニ於テ相交ハル此證ヲ求ム

三面角 VABC ノ各稜 VA, VB, VC ヲ含ミ之レニ對スル面ニ作ル三垂面ハ同壹直線ニ於テ交ルベシ

〔證明〕先ツ VA ヲ含ミテ對面 VBC ニ垂面ナル VAD ト VB ヲ含ミテ對面 VAC ニ垂面ナル VBE トノ交線 VO 上ノ壹點 O



ニ於テ之レニ垂直ナル平面 ABC ヲ作レハ平面 VAD ハ平面 ABC ノ垂線 VO ヲ含ム故ニ平面 ABC ニモ垂線ナリ之レニ由テ兩平面 VBC 及ヒ ABC ハ平面 VAD ニ垂直ナル故ニ其交線ナル BC モ此平面ニ垂直ナリ故ニ AD ハ BC ニ垂線ナルヘシ同理ニテ BE ハ AC ニ垂線ナルヘシ之ニ由テ VC 及ヒ VO ヲ含ム平面 VCF ヲ作レハ CF ハ AB ニ垂線ナルベキガ故ニ VF モ AB ニ垂線ナルベシ

(三垂線ノ定理ニヨル)之ニ由テ平面 VCF ハ平面 VAB ニ垂面ナリ之レ本題ヲ證明シタルモノナリ.

12. 三面角ノ各稜ト對面ノ貳等分線ヲ含ム三ツノ平面ハ同壹直線ニ於テ相交ル此證ヲ求ム

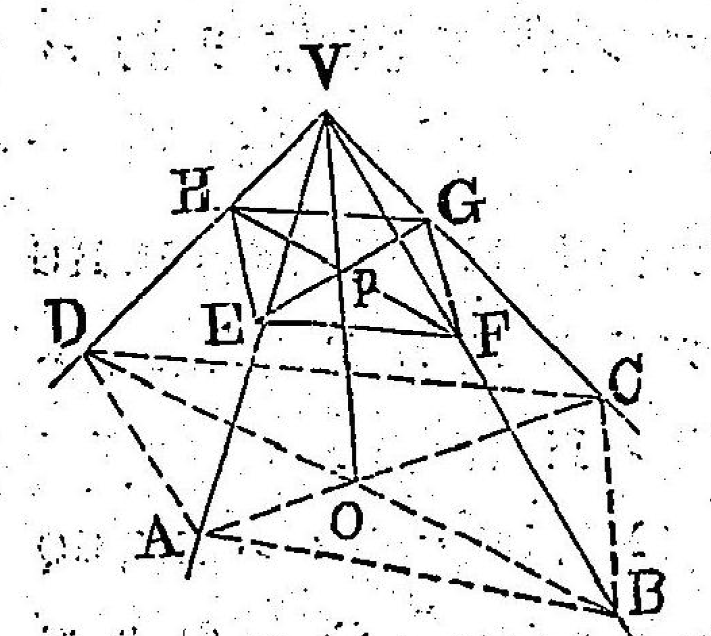
前題ノ圖ニ於テ三面角ノ各面ノ貳等分線ヲ VD, VE, VF トスレハ三ツノ平面 VAD, VBE, VCF ハ同壹直線ニ於テ相交ルヘシ

〔證明〕先ツ各稜 VA, VB, VC ヲ等長ニ截リテ平面 ABC ヲ作レハ VBC ハ貳等邊三角形ニシテ VD ハ其頂角ノ貳等分線ナルか故ニ D ハ BC ノ中點ナルヘシ同理ニテ E ハ AC ノ中點ニシテ F ハ AB ノ中點ナリ故ニ平面幾何ニヨレハ AD, BE, CF ハ壹點ニ於テ相交ルヘシ今其交點ヲ O トスレハ O ハ三ツノ平面 VAD VBE, VCF ノ會點ナリ又此三ツノ平面ハ V ニ於テ相會スルコト明カナリ而シテ平面ト平面ノ交リハ直線ナルか故ニ此三ツノ平面ハ VO ナル壹直線ニ於テ相交ルナリ.

13. 四面角ヲ壹平面ニテ截リ其截リ口ヲシテ平行四邊形ナラシムル法如何

四面角 VABCD ヲ壹平面ニテ截リ其截リ口ヲシテ平行四邊形ナラシムルコトヲ求ム

〔作法〕兩對稜 VA, VC 及ヒ VB, VD ヲ含ム平面 VAC, VBD ヲ作リ其交線 VO 上ノ壹點 P ヲ通過シテ貳直線 EPG, FPH ヲ引キ E 及ヒ G ニ於テ VA, 及ヒ VC ニ會セシメ F 及ヒ H ニ於テ



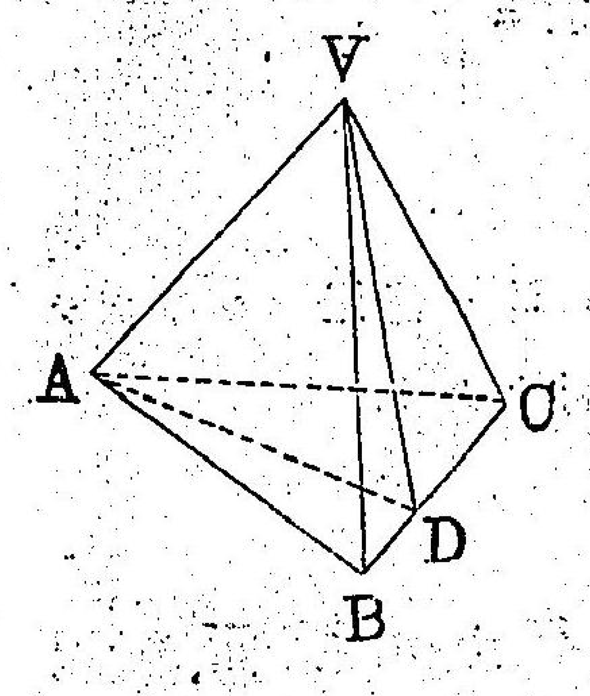
VB 及ヒ VD ニ會セシメ且ツ此二直線ヲシテ P ニテ貳等分ナラシメ而シテ此貳直線ヲ含ム平面ニテ截レハ其截リ口 EFGH ハ平行四邊形トナル

〔證明〕四邊形 EFGH ノ兩對角線 EG, FH ハ互ニ中點ニ於テ交ル故ニ本形ハ平行四邊形ナリ.

14. 三面角ノ大ナル面ニ對スル貳面角ハ小ナル面ニ對スル貳面角ヨリ大ナリ此證ヲ求ム

三面角 VABC ニ於テ角 AVB か角 BVC ヨリ大ナレハ貳面角 AVCB ハ貳面角 BVAC ヨリ大ナルヘシ

〔證明〕若シ貳面角 AVCB か貳面角 BVAC ヨリ大ナラズトセハ等シキカ或ハ小ナルヘシ然ルニ角 AVB ハ角 BVC ニ等シカラサル故ニ之レニ對スル貳面角ハ等シキコト能ハス由テ今貳面角 AVCB か貳面角 BVAC ヨリ小ナリトセハ貳面角 AVCB ニ等シキ貳面角 DVAC ヲ作ルヘシ然ルト



$\angle AVD=\angle CVD$ ナルヘシ又定理ニ依テ $\angle AVB<\angle AVD+\angle BVD$

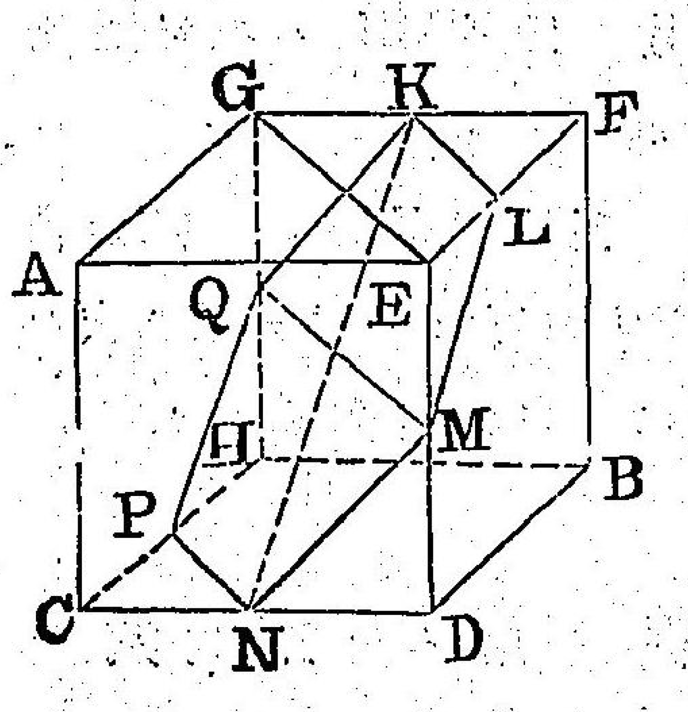
$\therefore\ \angle AVB<\angle CVD+\angle BVD$

即チ $\angle AVB<\angle BVC$ 之レ設想ニ背ク

故ニ貳面角 AVCB ハ貳面角 BVAC ヨリ小ナルコトナシ故ニ大ナリ.

15. 立方體ヲ壹平面ニテ截リ其截リ口ニ正六角形ヲ現ハス法如何

〔作法〕 A, B ヲ通過セサル他ノ六稜 GF, FE, ED, DC, CH, HG ノ中點ヲ K, L, M, N, P, Q トスレハ KLMNPQ ハ正六角形ナリ



〔證明〕 MQ, EG ヲ引ケハ EM, GQ ハ相等シク平行ナル故ニ四角形 EMQG ハ平行四邊形ナリ

∴ MQ ∥ EG 又 KL ∥ EG 由テ MQ ∥ LK 故ニ KLMQ ハ壹平面ナリ同理ニテ PNMQ モ壹平面ナルヲ知ル又 KN ヲ引ケハ LM ニ平行スル故ニ KN ハ平面 KLMQ 上ニアリ故ニ MQ ニ交ルコ明カナリ故ニ KN ハ平面 PNMQ 上ニモアリ之レニ由テ KLMNPQ ハ壹平面ナルヲ知ル

又三角形 KFL, LEM, MDN, NCP…………ハ貳邊ト夾角ガ相等シキ故ニ全等形ニシテ KL=LM=MN=……ナリ

又 KLMQ, LMNK…………ハ等斜梯形ナル故ニ

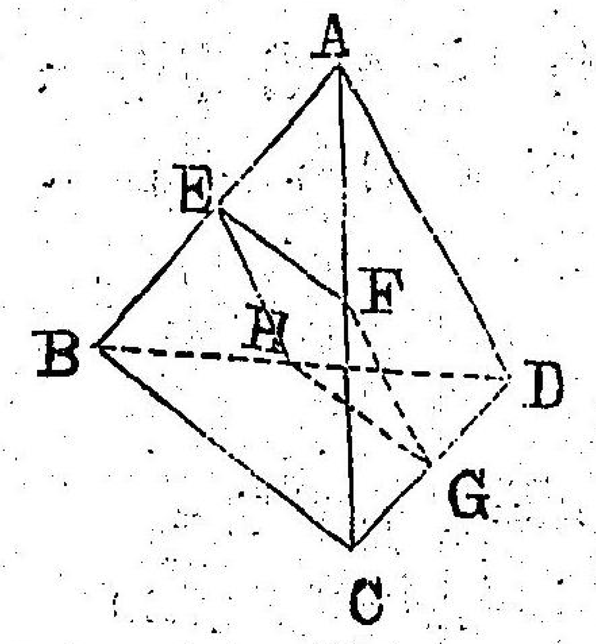
∠QKL=∠KLM=∠LMN=…………ナリ

之ニ由テ KLMNPQ ハ正六故形ナリ

之ニ由テ觀ルニ GF, FE, ED ノ中點 K, L, M ヲ通過スル平面ヲ以テ截レハ其截リ口ハ正六角形ナルコ明カナリ.

16. 四面體ノ兩對稜ニ平行ナル平面ヲ以テ本體ヲ截レハ截リ口ハ平行四邊形ナルコトヲ證シ且ツ此平行四邊形ノ面積ガ最大ナルトキノ位置ヲ求ム

四面體 ABCD ノ兩對稜 BC, AD ニ平行ナル平面ヲ以テ截リタル截リ口ヲ EFGH トスレハ之レ平行四邊形ナルヘシ



〔證明〕 EFGH ナル截リ口ハ BC ニ平行ナル故ニ EF, HG ハ BC ニ平行ナルヘシ由テ EF, GH ハ相平行ス同理ニテ EH, FG ハ相平行スル故ニ EFGH ハ平行四邊形ナリ

又兩對稜 BC, AD ニ平行ナル平面ニテ截リタル總テノ截リ口ハ夫々相等シキ角ヲ有スル平行四邊形ヲ生スルコ容易ニ知リ得ヘシ而ソ相等シキ角ヲ有スル平行四邊形ノ面積ノ比ハ相隣レル貳邊ノ相乘此比ニ等キカ故ニ本体ノ截リ口ナル平行四邊形ノ面積ノ最大ナルハ相隣レル貳邊ノ相乘積ノ最大ナルトキニアリ故ニ

$AF : AC = EF : BC \quad \therefore \quad EF = \frac{BC}{AC} \times AF$ ……………… (1)

$CF : AC = FG : AD \quad \therefore \quad FG = \frac{AD}{AC} \times CF$ ……………… (2)

(1), (2) ヲ相乘スレバ $EF \times FG = \frac{BC \times AD}{\overline{AC}^2} \times AF \times CF$

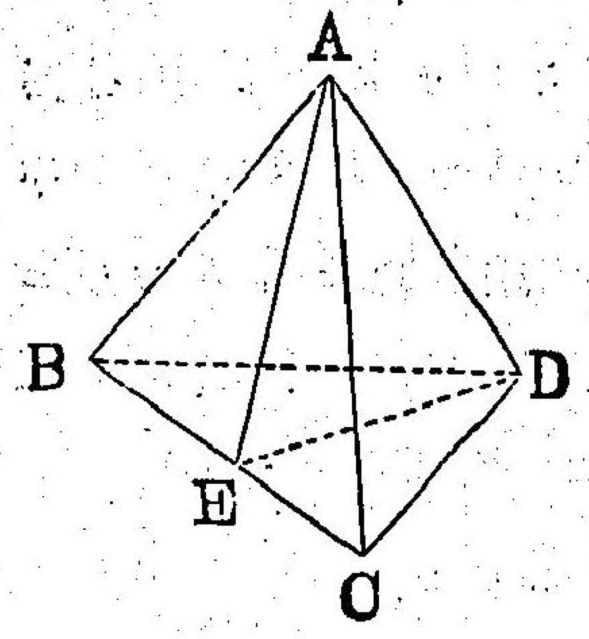
截面 EFGH ヲ最大ナラシムルニハ EF×FG ヲ最大ナラシムルニアリ由テ又 $\frac{BC \times AD}{\overline{AC}^2} \times AF \times CF$ ヲ最大ナラシムルニアリ然ルニ $\frac{BC \times AD}{\overline{AC}^2}$ ハ常數ナル故ニ AF×CF ヲ最大ナラシムレハ可ナリ而ソ平面幾何ニヨレハ定長ノ直線ヲ貳ツニ分チ其兩部分シテ有ツ矩形ノ最大ナルハ此直線ヲ貳等分スル時ニアリト云フ故ニ

AF×CF ヲ最大ナラシムルニハ F ハ AC ノ中點ナルヲ要ス故ニ AC ノ中點 F ヲ通過シ兩對稜 BC, AD ニ平行ナル平面ニテ截リタル截面 EFGH ハ面積最大ル平行四邊形ナリ.

17. 四面體 ABCD ノ貳閒角 AD ヲ貳等分スル平面 ADE ヲ作リ BC ヲ截ル所ヲ E トスレハ次ノ比例アルコヲ證セヨ

$$\triangle ABD : \triangle ACD = BE : CE$$

〔證明〕 等高ノ四面体ノ比ハ其底面ノ比ニ等シキ故ニ



$A-BED : A-CED = \triangle BED : \triangle CED$

又等高ノ三角形ノ比ハ其底邊ノ比ニ等キ故ニ $\triangle BED : \triangle CED = BE : CE$

$\therefore\ A-BED : A-CED = BE : CE$

又平面 ADE ハ兩平面 ADB, ADC ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡ナル故ニ E ハ此兩平面ヨリ等距離ニアリ

$\therefore\ E-ABD : E-ADC = \triangle ADB : \triangle ADC$ 而ソ $A-BED = E-ABD$

$A-CED = E-ADC$ ナル故ニ $\triangle ADB : \triangle ADC = BE : CE$.

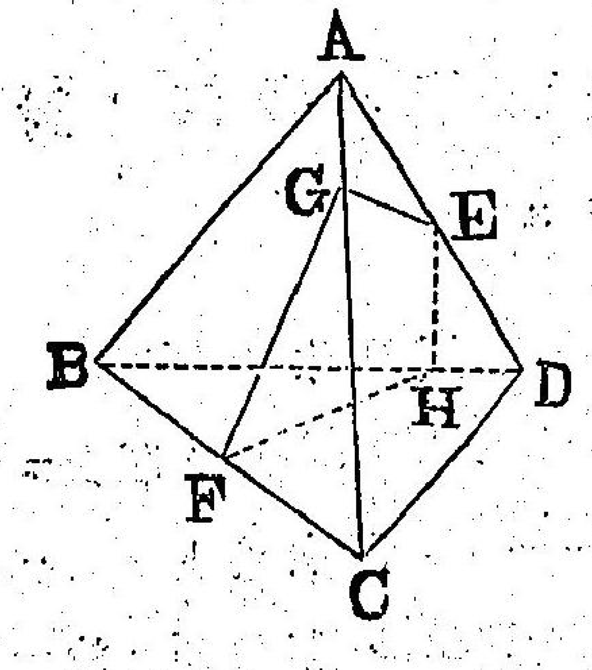
(附言) 此證明中 A-BED ハ A ヲ頂點トシ BED ヲ底面トスル四面体ヲ表ハス記號トス以下之ニ倣フ

18. 四面體ノ壹双ノ對稜ノ中點ヲ通過スル平面ハ他ノ壹双ノ對稜ヲ比例分ニ分ツ此證ヲ求ム

四面體 ABCD ノ壹双ノ對稜 AD, BC ノ中點 E, F

ヲ通過スル平面 EHFG ガ他ノ壹双ノ對稜 AC, BD ニ交ル所ヲ G, H トスレハ AG : GC=DH : HB ナルヘシ

〔證明〕 E ハ AD ノ中點ナル故ニ平面 EHFG ヘ A 及ヒ D ヨリ引ケル垂線ハ相等シカルヘシ今此兩垂線ノ長ヲ各 m トシ又 F ハ BC ノ中點ナル故ニ平面 EHFG ヘ B 及ヒ C ヨリ引ケル兩垂線ハ相等シカルヘシ今此兩垂線ノ長ヲ各 n トスヘシ然ル片



$AG : GC = m : n$ 及ヒ $DH : HB = m : n$ ナルコヲ容易ニ知リ得ヘシ故ニ

$AG : GC = DH : HB$ ナリ

19. 前題ノ截面 EHGE ハ四面體 ABCD ヲ貳等分スルコヲ證セヨ

〔證明〕 AF, AH, DF, DG ヲ作レハ兩錐体 A-EHFG, D-EHFG ハ同底等高ナル故ニ相等シ之ニ由テ今截面ノ兩側ニ於テ殘ル所ノ兩四面体 ABFH, GCFD ノ等積ナルコヲ證明スレハ可ナリ今 AF, DF ヲ引ケハ

$F-ABD : F-ABH = \triangle ABD : \triangle ABH = BD : BH$ 及ヒ

$F-ACD : F-GCD = \triangle ACD : \triangle GCD = AC : GC$

然ルニ前題ニヨレハ $DH : HB = AG : GC$

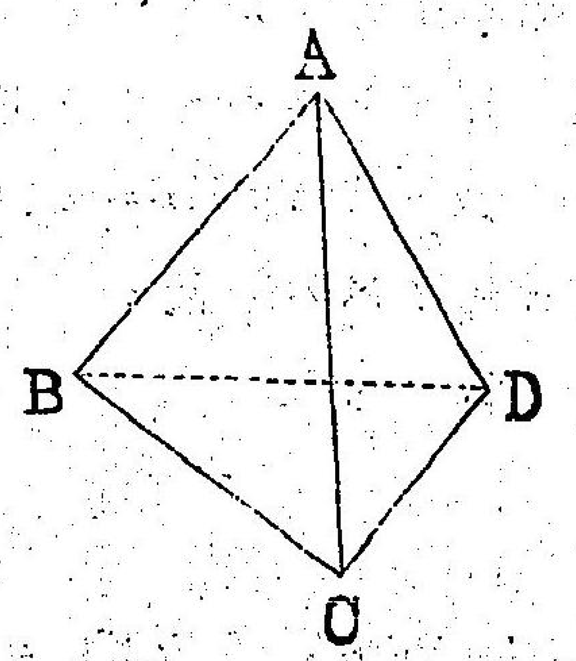
$\therefore\ DH + HB : HB = AG + GC : GC$

即チ $BD : HB = AC : GC$

$\therefore\ F-ABD : F-ABH = F-ACD : F-GCD$

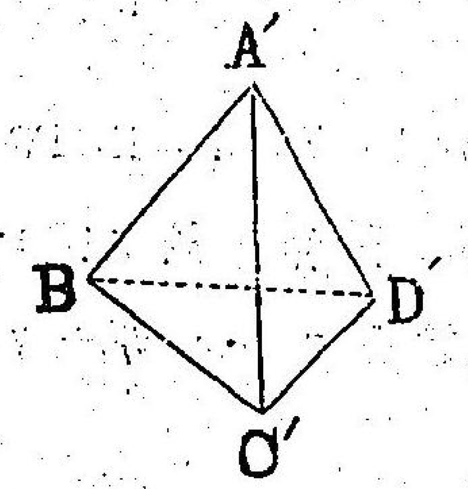
即チ A−BDF : F−ABH＝A−CDF : F−GCD
然ルニ兩錐体 A−BDF, A−CDF ハ等底同高ナル故ニ等積ナリ由テ他ノ兩錐体 F−ABH, F−GCD モ等積ナルヿ明カニシテ本題ヲ證明シタルモノナリ

20. 貳ツノ相似錐體ノ表面積ハ壹双ノ對應稜ノ平方ニ比例ス此證ヲ求ム



〔證明〕貳ツノ相似錐体ヲ ABCD, A′B′C′D′ トシ AB, BC, CA ……ヲ順次ニ A′B′, B′C′, C′A′……ノ對應稜トスレハ兩三角形 ABC, A′B′C′ ハ相似ナル故ニ平面幾何ニ依リテ

$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$ 同理ニテ



$$\frac{\triangle BCD}{\triangle B'C'D'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2},$$

$$\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2},$$

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle A'B'D'}=\frac{\overline{BD}^2}{\overline{B'D'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}$$

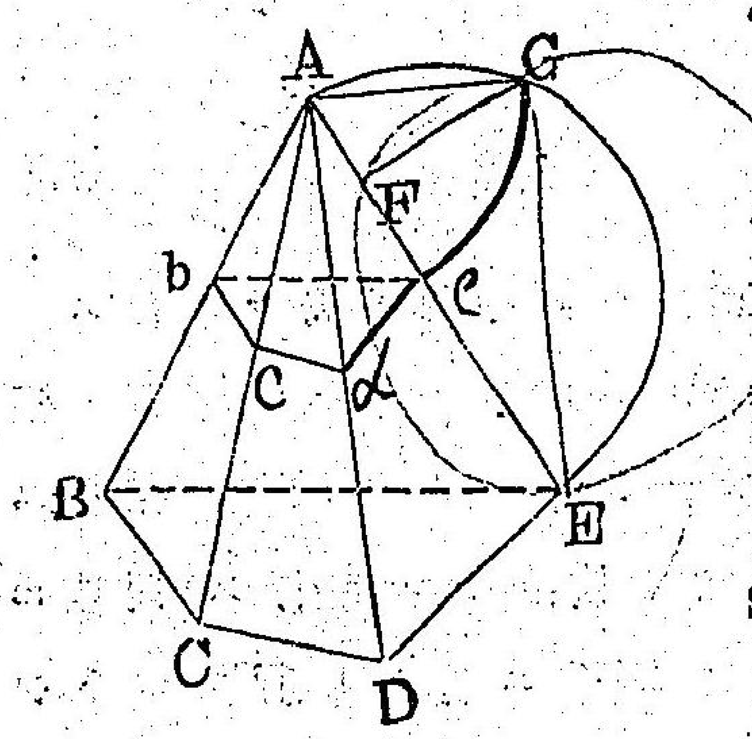
$$\therefore \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\triangle BCD}{\triangle B'C'D'}=\frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'}=\frac{\triangle ABD}{\triangle A'B'D'}$$

$$=\frac{\triangle ABC+\triangle BCD+\triangle ACD+\triangle ABD}{\triangle A'B'C'+\triangle B'C'D'+\triangle A'C'D'+\triangle A'B'D'}.$$

21. 錐體ヲ其底ニ平行スル平面ニテ截リ

以テ成レル錐體ノ表面積ト原錐體ノ表面積トノ比ヲ定比 $m : n$ ニ等シクスル法如何

〔作法〕錐体 ABCDE ニ於テ側稜 AE ヲ F ニ於テ兩分シテ AF : AE＝m : n トシ AE ニ垂直ニ FG ヲ出シ AE ヲ直徑トスル半圓周ト G ニ於テ會セシメ AG ヲ結ビ AE 上ニ於テ AG ニ等シク Ae ヲ截リ e ヲ通過シテ底面 BCDE ニ平行ナル平面 bcde ニテ截ルベシ

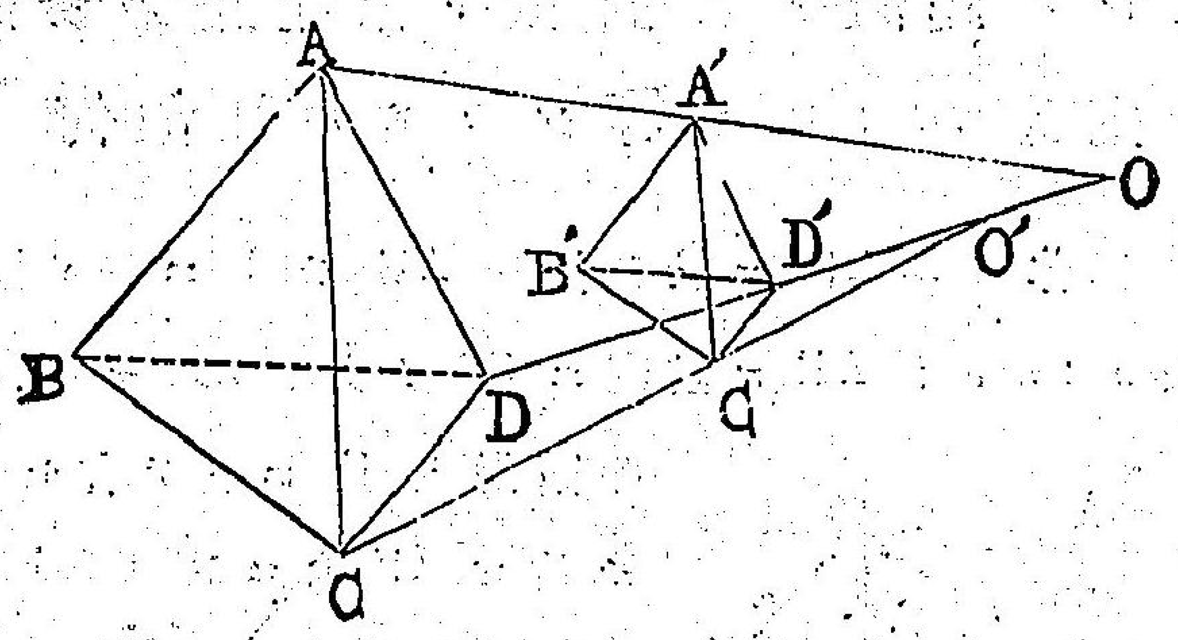


〔證明〕錐体 Abcde ノ表面積ヲ S トシ原錐体ノ表面積ヲ S′ トスレハ前題ノ理ニヨリテ

$$S : S'=\overline{Ae}^2 : \overline{AE}^2=\overline{AG}^2 : \overline{AE}^2=AE\times AF : \overline{AE}^2$$
$$=AF : AE=m : n.$$

22. 貳ツノ相似錐體ノ各對應面ガ平行ニ置カレタルトキ各對應頂點ヲ結ブ直線ハ同壹點ニ會スルヿヲ證セヨ

貳ツノ相似錐体 ABCD, A′B′C′D′ ノ各對應面 ABC, ACD, ADB……及ヒ A′B′C′, A′C′D′, A′D′B′……ガ夫々順次ニ平行ニ置カレタルトキ對應點 A, A′ 及ヒ B, B′ 及ヒ C, C′ 等ヲ結ブ直線 AA′, BB′, CC′ 等ハ同壹點ニ會スヘシ



〔證明〕相交ル兩平面ガ他ノ相交ル兩平面ト夫々平行スル𪜈其交線モ相平行スヘキガ故ニ AD, A′D′ 及ヒ CD, C′D′ 等ハ相平行スヘシ故ニ ADD′A′ ハ壹平面ナリ由テ AA′ 及 DD′ ハ相會スヘシ(但シ兩錐体ガ全ク相等シキ𪜈ノ塲合ニハ平行ス)同理ニテ DD′, CC′ モ相會スヘシ今 AA′ ガ DD′ ニ會スル所ヲ O トシ若シ CC′ ガ O ニ於テ DD′ ニ會セサルモノトスレハ O′ ニ於テ會スルモノト假定スヘシ然ル𪜈ハ

AD : A′D′ = DO : D′O 及ヒ CD : C′D′ = DO′ : D′O′

然ルニ AD : A′D′ = CD : C′D′ ∴ DO : D′O = DO′ : D′O′

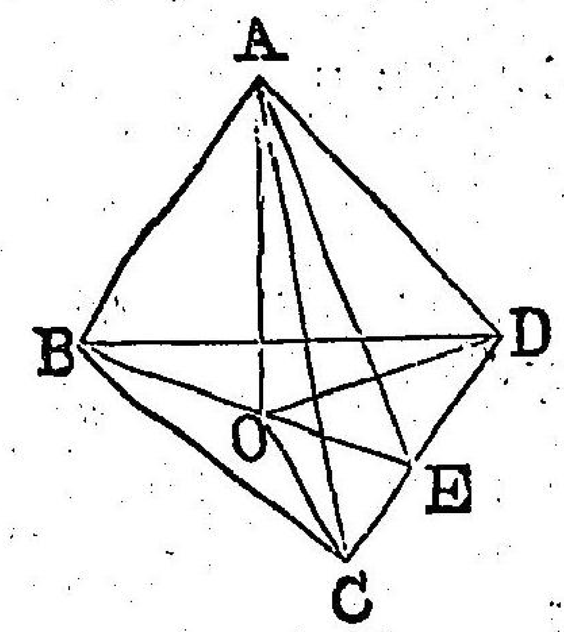
∴ DO − D′O : D′O = DO′ − D′O′ : D′O′

即チ DD′ : D′O = DD′ : D′O′ ∴ D′O = D′O′

之ニ由テ O′ ハ O ニ合スルヲ知ル同理ニテ BB′ モ O 點ニ於テ會スルヲ知ル.

23. 正四面體ノ壹稜ノ長サヲ a トスレハ此體ノ高サハ $a\sqrt{\frac{2}{3}}$ ナルコ全面積ハ $a^2\sqrt{3}$ ナルコ體積ハ $\frac{a^3}{12}\sqrt{2}$ ナルコヲ證セヨ

〔解〕正四面体 ABCD ノ高サヲ AO トシ OB, OC 及ヒ OD ヲ引ケハ三ツノ三角形 AOB, AOC, AOD ニ於テ AB=AC=AD, ∠AOB=∠AOC=∠AOD,



又 AO ハ共通邊ナル故ニ此三ツノ三角形ハ全等形ニシテ即チ OB=OC=OD ナリ故ニ O ハ底面 BCD ノ外接圓ノ中心ナリ而ソ三角形 BCD ハ正三角形ナル故ニ O ハ此三角形ノ垂心ニモ相當シ又三中央線ノ交點ニモ相當スヘシ之ニ由テ BO ヲ引長スレハ E ニ於テ CD ヲ直角ニ貳分ス

$$\therefore\ BE=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CE}^2}=\sqrt{a^2-\frac{1}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

$$\therefore\ OE=\frac{1}{3}BE=\frac{a}{6}\sqrt{3}$$ 又 AE=BE

$$\therefore\ AO=\sqrt{\overline{AE}^2-\overline{OE}^2}=\sqrt{\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{12}a^2}=a\sqrt{\frac{2}{3}}$$ 之レ正四面体ノ高サナリ

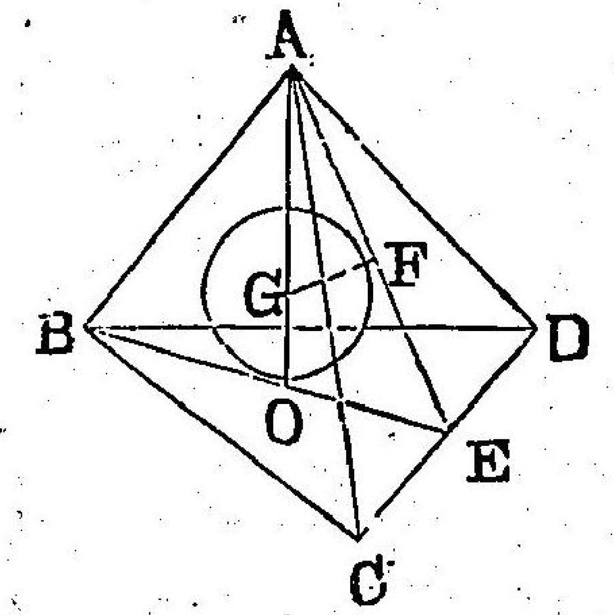
又 全面積$=4\times\triangle BCD=4\times BE\times CE=4\times\frac{a}{2}\sqrt{3}\times\frac{a}{2}\sqrt{3}\times\frac{a}{2}$

$=a^2\sqrt{3},$

体積$=\frac{1}{3}\times AO\times\triangle BCD=\frac{1}{3}\times a\sqrt{\frac{2}{3}}\times\frac{a}{2}\sqrt{3}\times\frac{a}{2}$

$=\frac{a^3}{12}\sqrt{2}.$

24. 稜ノ長サ a ナル所ノ正四面體ニ內切スル球ノ半徑ハ如何



〔解〕 正四面体ABCDノ高サAOハ三ツノ側面ヨリ等距離ニアルガ故ニ内接球ノ中心GハAO上ニアルヘシ今GヨリAODニ垂線GFヲ引ケハ前題ノ解ニヨリテ

$AO=a\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$AF=BO=\frac{2}{3}BE=\frac{2}{3}\times\frac{a}{2}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}a$, $OE=\frac{a}{6}\sqrt{3}$,

而シテ相似三角形AOE, AFGニ於テ

$AO:OE=AF:GF$ 即 $a\sqrt{\frac{2}{3}}:\frac{a}{6}\sqrt{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}a:GF$

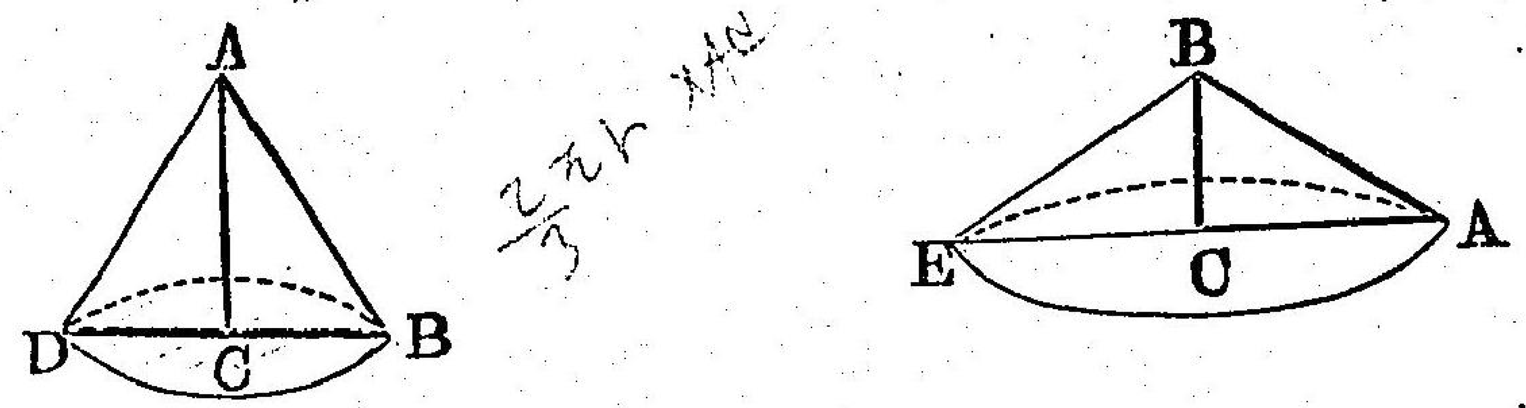
$\therefore$ $GF=\frac{a}{12}\sqrt{6}$ 之レ内接球ノ半徑ノ長サナリ

25 立方體ノ壹角頂Sヨリ各稜上ニ於テ$SA=a$, $SB=b$, $SC=c$ナル長サヲ截リ平面ABCヲ作ルトキハ三角錐體SABCノ體積ハ如何

〔解〕 三角錐体SABCニ於テSABヲ底面トスレハSCハ其高サニ相當ス而シテ $\triangle SAB=\frac{1}{2}ab$, $SC=c$

$\therefore$ 三角錐体$SABC=\frac{1}{3}\times SC\times\triangle SAB=\frac{1}{6}abc$.

26. 直角三角形ヲ直角ノ各邊上ニ於テ旋轉スルトキハ之ニ因テ生スル所ノ二ツノ圓錐體ハ其各高ト反比例ヲナス此證ヲ求ム

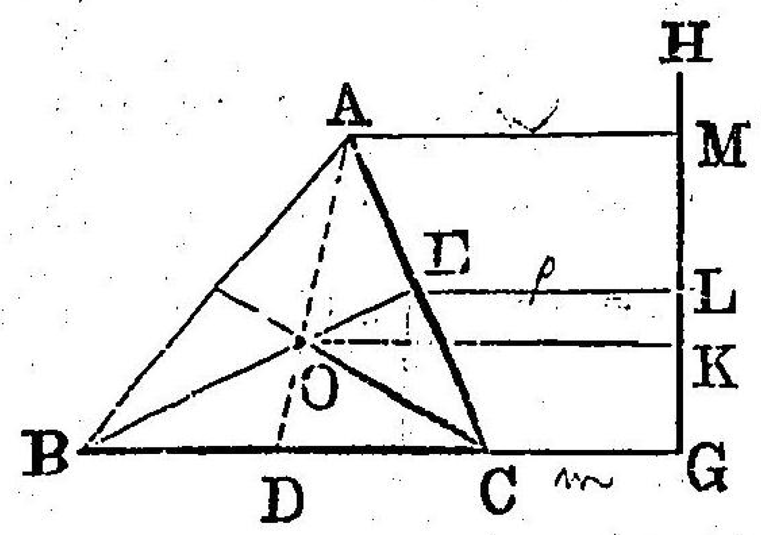


Cヲ直角トスル直角三角形ニ於テACヲ軸トシ旋轉シテ成ル圓錐体ヲPトシBCヲ軸トシ旋轉シテ成ル圓錐体ヲQトスレハ$P:Q=BC:AC$ナルヘシ

〔證明〕 $P=\frac{1}{3}\pi\overline{BC}^2\times AC$, $Q=\frac{1}{3}\pi\overline{AC}^2\times BC$

$\therefore$ $\frac{P}{Q}=\frac{BC}{AC}$ 即 $P:Q=BC:AC$.

27. 三角形ABCノ中央線AD, BE, CFノ交點OヨリBCノ引長線ニ直交スル直線HGニ垂線OKヲ下シ今OKノ長サヲaトシ此三角形ノ面積ヲFトセハ此三角形ヲHGノ周ニ旋轉シテ生スル體ノ體積ハ$2\pi aF$ナリ此證ヲ求ム



〔證明〕 GHニ垂線AM, ELヲ引キ $AM=n$, $EL=p$, $CG=m$, $GM=h$ トスレハ

梯形ABGMノ旋轉体

$=\frac{1}{3}\pi h\{(BC+m)^2+n^2+n(BC+m)\}$

梯形ACGMノ旋轉体$=\frac{1}{3}\pi h(m^2+n^2+mn)$

∴　三角形 ABC ノ旋轉体 $=\frac{1}{3}\pi h\{(\mathrm{BC}+m)^2+n^2+n(\mathrm{BC}+m)\}$

$$-\frac{1}{3}\pi h(m^2+n^2+mn)$$

$$=\frac{1}{3}\pi h(\overline{\mathrm{BC}}^2+2m.\mathrm{BC}+n.\mathrm{BC})$$

$$=\frac{1}{3}\pi h.\mathrm{BC}(\mathrm{BC}+2m+n)$$

$$=\frac{1}{3}\pi h.\mathrm{BC}(\mathrm{BC}+m+2p)$$

$$=\frac{1}{3}\pi h.\mathrm{BC}(\mathrm{BG}+2p)$$

$$=\frac{1}{3}\pi h.\mathrm{BC}(3a)$$

$$=\pi h.\mathrm{BC}.a$$

$$=\pi(2\mathrm{F})a$$

$$=2\pi a\mathrm{F}.$$

28. 直圓柱體ノ側面積ヲ其底ニ平行セル平面ニテ貳部分ニ分チ其底ノ面積ヲシテ此貳部分ノ比例中項ナラシムル法如何

〔解〕 底ノ半徑ヲ r トシ高サヲ h トシ截面ト下底面トノ距離ヲ x トスレハ截面ト上底面トノ距離ハ $h-x$ ナルヘシ故ニ貳部分ノ面積ハ $2\pi rx$ 及ヒ $2\pi r(h-x)$ ニシテ底面積ハ πr^2 ナリ故ニ題意ニ依テ

$2\pi rx\times2\pi r(h-x)=(\pi r^2)^2$ 之ヲ化スレハ

$4x^2-4hx+r^2=0$　　∴ $x=\frac{h\pm\sqrt{h^2-r^2}}{2}$

故ニ下底面ヨリ截面ニ至ル距離ヲ $\frac{h+\sqrt{h^2-r^2}}{2}$ 或ハ $\frac{h-\sqrt{h^2-r^2}}{2}$ トスレハ可ナリ.

〔附言〕 此結果ニヨリ此圓柱体ノ高ト底半徑トガ相等シキ時截面ハ高サノ中央ニアリ又高サガ底半徑ヨリ小ナレハ此問題ハ成立セズ

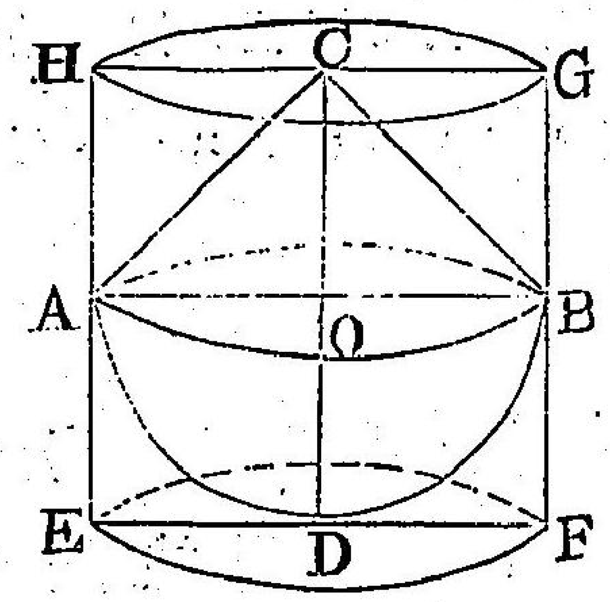
29. 半徑 r ナル圓ヲ共通ノ底トシ其兩側ニ半球及ヒ直圓錐體アリ圓錐ノ頂角ハ直角ナリ今之レニ直圓柱體ヲ外接スル時ハ圓柱ノ體積ハ前ノ兩體ノ和ヨリ大ナルコ幾何ナルヤ

答　πr^3.

〔解〕 圓錐ノ頂角 ACB ハ直角ナル故ニ $\mathrm{OC}=\mathrm{OA}=r$,

∴ 圓錐 ABC ノ体積 $=\frac{1}{3}\pi r^2\times r=\frac{1}{3}\pi r^3$,

半球 ADB ノ体積 $=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{2}{3}\pi r^3$;



圓柱 EFGH ノ体積 $=\pi r^2\times2r=2\pi r^3$.

∴ $2\pi r^3-\left(\frac{1}{3}\pi r^3+\frac{2}{3}\pi r^3\right)$

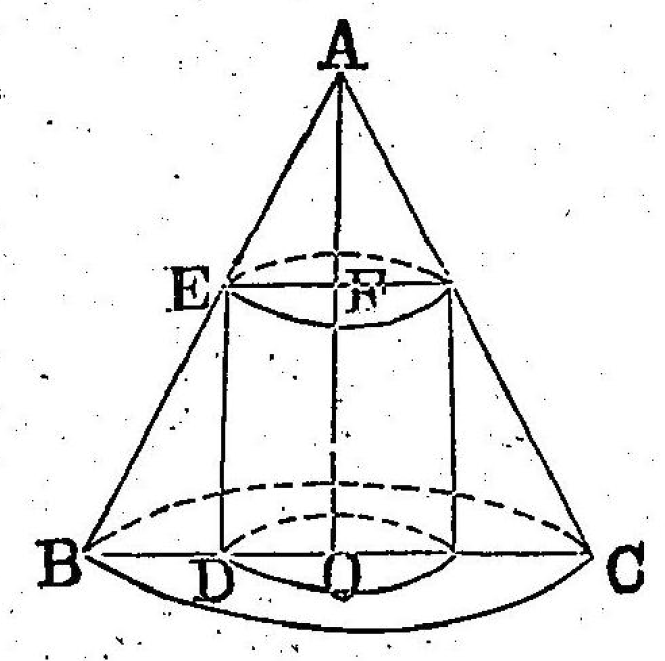
$=2\pi r^3-\pi r^3=\pi r^3$

即チ圓柱ハ圓錐ト半球ノ和ヨリ大ナルコ πr^3 ニシテ之レ圓柱 AEFB ノ体積ナリ

30. 直圓錐體ニ內接シテ直圓柱體ヲ作リ其側面積最大ナルヲ要ス如何ナル高ノ圓柱ヲ

容ルヘキキヤ

〔解〕 圓錐ノ高サ AO ヲ h トシ其底ノ半徑 O3 ヲ r トシ圓柱ノ高サ OF ヲ x トスレハ AF ハ $h-x$ ナルヘシ故ニ



$$h : h-x = r : \mathrm{FE}$$

$$\therefore \quad \mathrm{FE} = \frac{r}{h}(h-x)$$

$\therefore$ 圓柱ノ側面 $=2\pi\mathrm{FE}\times\mathrm{OF}$

$$=\frac{2\pi r}{h}(h-x)x$$

今圓柱ノ側面積ヲ最大ナラシムルニハ $(h-x)x$ ヲ最大ナラシムルヲ要ス而シテ $(h-x)x=\frac{1}{4}h^2-(x^2-hx+\frac{1}{4}h^2)$

$$=\frac{1}{4}h^2-\left(x-\frac{1}{2}h\right)^2$$

此結果ヲシテ最大ナラシムルニハ $\left(x-\frac{1}{2}h\right)^2$ ノ最小ナルヲ要ス然レ圧平方數ナル故ニ最小ハ零ヨリ下ラス

$\therefore \quad \left(x-\frac{1}{2}h\right)^2=0 \quad \therefore \quad x=\frac{1}{2}h$ 之ニ由テ內接圓柱ノ側面積ヲ最大ナラシメンニハ其高ヲ圓柱ノ高ノ半ニ等シクスレハ可ナリ.

31. 定長ノ直線ヲ貳部ニ分チ其壹部ヲ高サトシ他ノ壹部ヲ底面ノ半徑トシテ直圓柱體ヲ作リ其側面積ヲシテ半徑 r ナル圓ト等積ナラシムル法如何

〔解〕 直線ノ長サヲ a トシ其壹部ノ長サヲ x トスレハ他ノ

ノ壹部ノ長サハ $a-x$ ナルヘシ今 x ヲ高サトシテ $a-x$ ヲ底面ノ半徑トスル直圓柱体ノ側面積ハ $2\pi(\iota-x)x$ ニシテ r 半徑トスル圓ノ面積ハ πr^3 ナルガ故ニ題意ニ從テ $2\pi(a-x)x=\pi r^2$ ヲ得貳次方程式ノ解法ニ依テ x ノ値ヲ求ムレハ次ノ如シ

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2-2r^2}^2}{2} \quad 或ハ \quad \frac{a-\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$$

故ニ $\frac{a+\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$ ヲ圓柱ノ高トスレハ $a-\frac{a+\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$

即チ $\frac{a-\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$ ハ其底ノ半徑ナルヘシ

又 $\frac{a-\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$ ヲ高トスレハ $a-\frac{a-\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$ 即チ

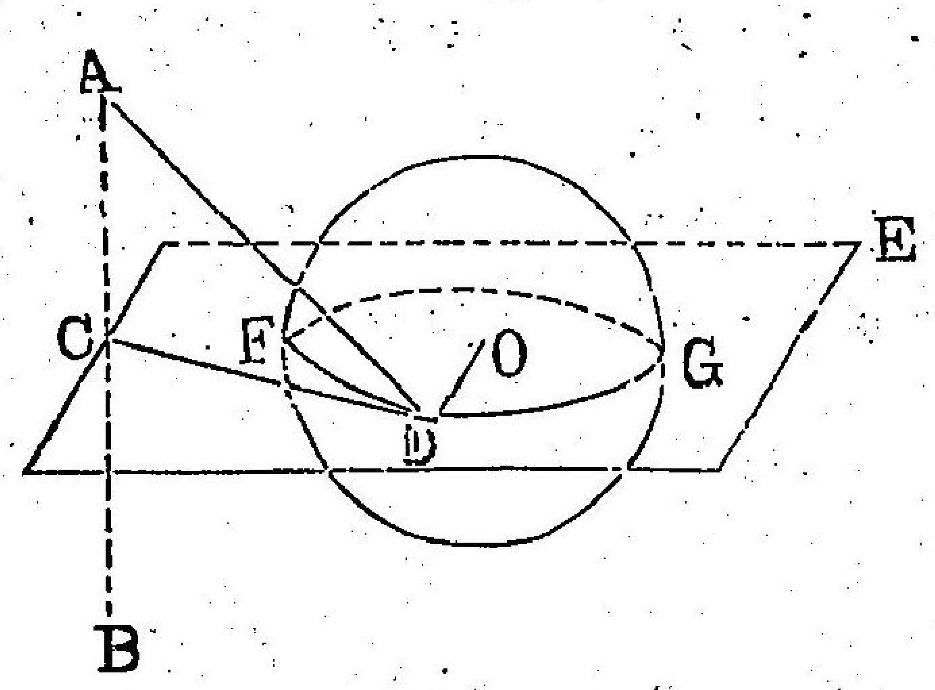
$a+\frac{\sqrt{a^2-2r^2}}{2}$ ハ其底ノ半徑ナルヘシ而シテ其何レノ場合ニ於テモ側面積ハ r ヲ半徑トスル圓ト等積ナルコ勿論ナリ

(附言) 若シ $a^2-2r^2=o$ 即チ $a=r\sqrt{2}$ ニシテ即チ r ガ a ヲ對角線トスル正方形ノ壹邊ノ長サニ等シケレハ $x=\frac{1}{2}a$ トナル故ニ a ナル直線ヲ貳等分スヘキヲ知ル若シ又 $a<r\sqrt{2}$ ナル片ハ x ハ虛量トナル故ニ此問題ハ成立セズ

32. 定直線 AB ヲ含有シテ O ヲ中心トスル定球ニ切平面ヲ作ル法如何

〔作法〕 C ニ於テ AB ニ直交シ球心 O ヲ通過スル平面 CDE ヲ作リテ球体ヲ截リ其截リ口ナル圓周 FDG ニ切線 CD ヲ引キ而シテ AC, CD ヲ含ム平面 ACD ヲ作レハ之レ所求ノ切平面ナリ

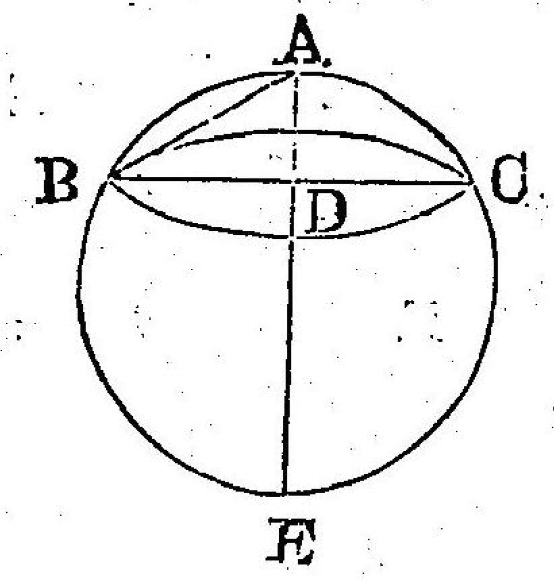
〔證明〕 CD ハ截リ口ナル圓周 FDG ノ切線ナル故ニ半徑 OD



ニ垂線ナリ又ACハ平面CDEノ垂線ナル故ニ(作法)ADモODニ垂線ナリ(三垂線ノ定理)故ニODハ平面ACDニ垂線ニシテ即チ平面ACDハDニ於テ球ノ半徑ODニ垂直ナル故ニ切平面ナリ.

33. 欠球ノ曲面積ハ此欠球ヲ生スル弧ノ弦ヲ半徑トスル圓ト等積ナルヿヲ證セヨ

欠球BACノ曲面積ハ此欠球ヲ生スル弧ABノ弦ABヲ半徑トスル圓ト等積ナルヘシ

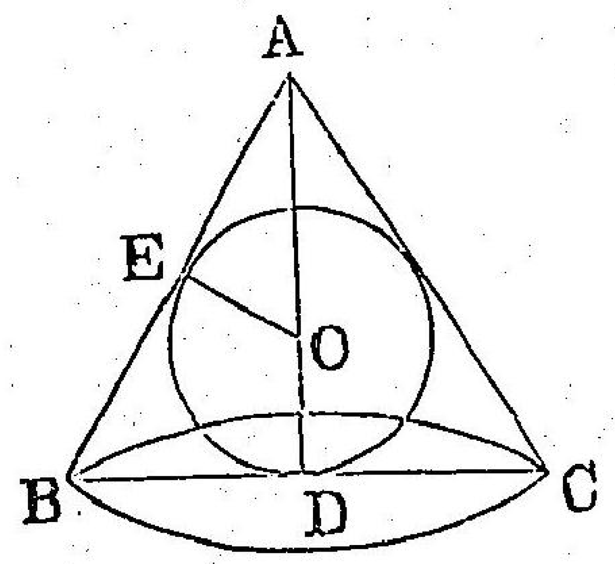


〔證明〕球ノ半徑ヲRトスレハ欠球ノ曲面積ハ定理ニ依リテ$2\pi R \times AD$ナリ而シテ$\overline{AB}^2 = AE \times AD = 2R \times AD$

故ニ欠球ノ曲面積$= 2\pi R \times AD = \pi\overline{AB}^2$ 之レABヲ半徑トスル圓ノ積ニ等シ.

34. 半徑Rナル球ニ外切スル直圓錐體ヲ作リ其側面積ヲシテ底面積ノ貳倍ナラシメンドス然ルトキ其高サ及ヒ底ノ半徑如何

〔解〕Oヲ球心トシ$OD = OE = R$, $AD = x$トスレハ$AO = x - R$ナルヘシ



$$\therefore \quad AE = \sqrt{(x-R)^2 - R^2} = \sqrt{x^2 - 2Rx}$$

又 $AE : OE = AD : DB$

即チ $\sqrt{x^2 - 2Rx} : R = x : DB$

$$\therefore \quad DB = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}},$$

又BEハDBニ等シキガ故ニ

$$BE = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}},$$

$$\therefore \quad AB = AE + BE = \sqrt{x^2 - 2Rx} + \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{x^2 - Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}}$$

$$\therefore \quad 側面積 = \pi DB \times AB = \frac{\pi Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} \times \frac{x^2 - Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{\pi Rx(x-R)}{x - 2R}$$

$$底面積 = \pi\overline{DB}^2 = \frac{\pi R^2 x}{x - 2R}$$

題意ニ從テ $\dfrac{\pi Rx(x-R)}{x-2R} = \dfrac{2\pi R^2 x}{x-2R}$ $\quad\therefore\quad x = 3R$

之レ所求ノ直圓錐ノ高サナリ又底面ノ半徑ハ次ノ如シ

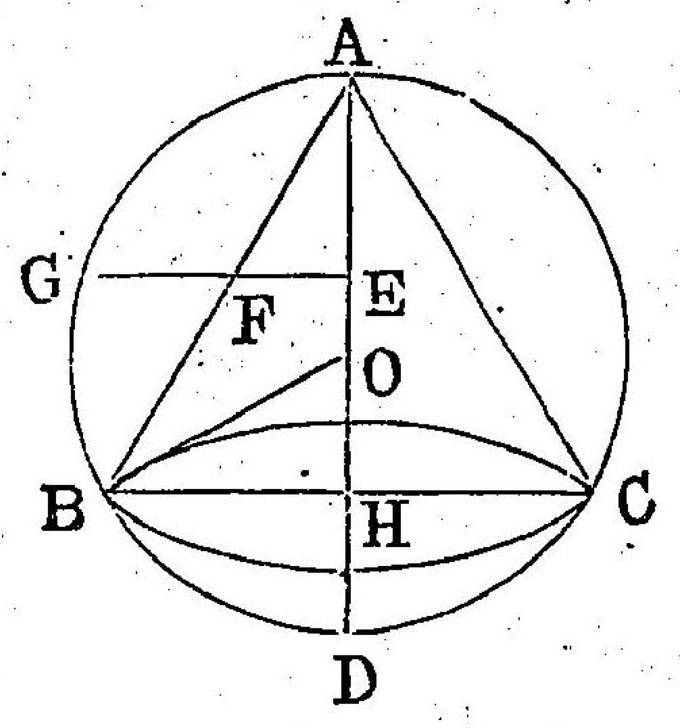
$$DB = \frac{Rx}{\sqrt{x^2 - 2Rx}} = \frac{3R^2}{\sqrt{9R^2 - 6R^2}} = R\sqrt{3}$$

之ニ由テ所求ノ圓錐体ハ等邊圓錐体ナルヲ知ル.

35. 球體ニ內接スル等邊直圓錐體アリ今此圓錐ノ底面ニ平行スル平面ヲ以テ此兩體ヲ

截ルヰ其貳ツノ截リ口ノ面積ノ差ノ界限ヲ問フ

ABC ヲ O ヲ中心トスル球体ニ內接スル等邊直圓錐体トシ EG, EF ヲ此圓錐ノ底ニ平行スル平面ニテ截リタル球及ヒ圓錐ノ截リ口ノ半徑トシ球ノ半徑 OB ヲ R トシ AE ヲ x トス而シ



ABC ハ等邊圓錐体ナルガ故ニ底面ガ半徑 OD ニ交ル點 H ハ OD ノ中點ニアリ

$$\therefore\quad BH=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OH}^2}$$
$$=\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2}$$
$$=\frac{R}{2}\sqrt{3}$$

又 $EG=\sqrt{AE\times ED}=\sqrt{x(2R-x)}$

又 $AH:HB=AE:EF$

即チ $\frac{3}{2}R:\frac{R}{2}\sqrt{3}=x:EF\qquad\therefore\quad EF=\frac{x}{\sqrt{3}}$

今球ノ截リ口ノ面積ヲ S トシ圓錐ノ截リ口ノ面積ヲ S′ トスレハ

$$S=\pi\overline{EG}^2=\pi x(2R-x)$$
$$S'=\pi\overline{EF}^2=\frac{\pi x^2}{3}$$

$$\therefore\quad S-S'=\pi x(2R-x)-\frac{\pi x^2}{3}=\frac{\pi}{3}(6Rx-4x^2)$$
$$=\frac{\pi}{3}\left\{\frac{9}{4}R^2-\left(\frac{3}{2}R-2x\right)^2\right\}$$
$$=\frac{3}{4}\pi R^2-\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{2}R-2x\right)^2$$

今 $\frac{3}{4}\pi R^2-\frac{\pi}{3}\left(\frac{3}{2}R-2x\right)^2=0$ トシテ x ヲ求ムレハ $x=0$ 或 $\frac{3}{2}R$

ヲ得テ此場合ニハ何レモ S−S′=0 即チ圓錐ノ頂點ヨリ截面マテノ距離ガ 0 或ハ $\frac{3}{2}$R ナル故ニ截面ハ頂點ヲ通過スルカ又ハ底面ニ合スル時ニシテ S−S′=0 ナルコ勿論ナリ

又 S−S′ ヲ最大ナラシムルニハ $\left(\frac{3}{2}R-2x\right)^2$ ノ最小ナルヲ要ス然レモ平方數ナル故ニ最小ハ零ヨリ下ラズ故ニ $\left(\frac{3}{2}R-2x\right)^2=0$ トスレハ兩截面ノ差ハ最大ニシテ此場合ニハ $S-S'=\frac{3}{4}\pi R^2$ 即チ兩截リ口ノ面積ノ差ハ球ノ大圓ノ積ノ $\frac{3}{4}$ ヨリ大ナラズ而シ此時ノ截面ノ位置ハ $\left(\frac{3}{2}R-2x\right)^2=0$ ヨリ $x=\frac{3}{4}R$ ヲ得ル故ニ頂點ヨリ球ノ半徑ノ $\frac{3}{4}$ ノ所ニアリ。

（立體幾何終）

三　角　法

1. $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A-\sin^2B$

$$=\cos^2B-\cos^2A$$

此證ヲ問フ

〔證明〕 $\sin(A+B)\sin(A-B)=(\sin A\cos B+\cos A\sin B)$

$$\times(\sin A\cos B-\cos A\sin B)$$

$$=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$$

$$=\sin^2A-\sin^2A\sin^2B-\sin^2B+\sin^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A-\sin^2B$$

又 $\sin^2A-\sin^2B=1-\cos^2A-1+\cos^2B$

$$=\cos^2B-\cos^2A$$

2. $\tan A=\dfrac{b\cdot\sin B}{a+b\cdot\cos B}$ ナル時 $\tan(B-A)$

$=\dfrac{a\cdot\sin B}{b+a\cdot\cos B}$ ナルコヲ證明セヨ

〔證明〕 $\tan(B-A)=\dfrac{\tan B-\tan \overset{A}{B}}{1+\tan B\cdot\tan A}=\dfrac{\dfrac{\sin B}{\cos B}-\dfrac{b\cdot\sin B}{a+b\cos B}}{1+\dfrac{\sin B}{\cos B}\cdot\dfrac{b\cdot\sin B}{a+b\cos B}}$

$$=\frac{a\sin B+b\cdot\sin B\cos B-b\cdot\sin B\cos B}{a\cos B+b(\cos^2B+\sin^2B)}=\frac{a\sin B}{b+a\cos B}$$

3. $\sin A=\sqrt{2}\cdot\sin B$. $\tan A=\sqrt{3}\cdot\tan B$. 此兩式

ヨリA及ヒBヲ求ム但シ最小正角ヲ要ス

〔解〕 $\sin A=\sqrt{2}.\sin B$ ……………(1)　　$\tan A=\sqrt{3}\tan B$……………(2)

(2)ヨリ　$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sqrt{3}.\sin B}{\cos B}$　∴ $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}.\cos A}{\cos B}$

又(1)ヨリ　$\frac{\sin A}{\sin B}=\sqrt{2}$　∴ $\frac{\sqrt{3}.\cos A}{\cos B}=\sqrt{2}$

∴ $3\cos^2A-2\cos^2B=0$　∴ $3(1-\sin^2A)-2(1-\sin^2B)=0$

∴ $3\sin^2A-2\sin B=1$ ……………………………………(3)

又(1)ヨリ　$\sin^2A-2\sin^2B=0$ ……………………………………(4)

(3)ヨリ(4)ヲ減シ2除シテ平方ニ開ケハ　$\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ $A=45°$

又 $\sin A=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ヲ(1)ニ代入シテ $\sin B$ ヲ求ムレハ

$\sin B=\frac{1}{2}$　∴ $B=30°$

4. $\tan A+\sin A=m$,　$\tan A-\sin A=n$ ナルトキハ　$m^2-n^2=4\sqrt{mn}$ ナルコトヲ證セヨ

〔證明〕原兩式ノ平方ノ差ヲ求ムレハ

$4\tan A.\sin A=m^2-n^2$ ……………………………………(1)

又相乘積ヲ求ムレハ　$\tan^2A-\sin^2A=mn$

然ルニ　$\tan^2A-\sin^2A=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}-\sin^2A=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}(1-\cos^2A)$

$=\tan^2A\sin^2A$　∴ $\tan A\sin A=\sqrt{mn}$ ……………………………(2)

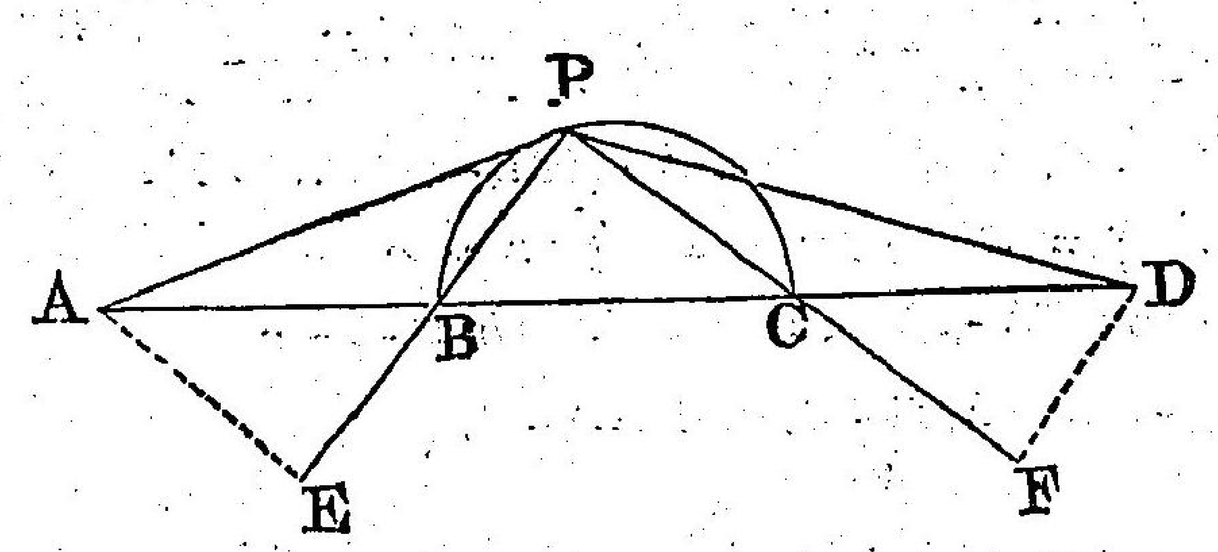
(1), (2)ヨリ　$m^2-n^2=4\sqrt{mn}$ ヲ得.

5. A, B, C, D ハ壹直線上ニ此順ニアリテB, C ハ AD ヲ三等分スルモノトシ BC ヲ直徑トシ

ヲ書キタル半圓周上ノ壹點ヲPトスレハ $\tan APB.\tan CPD$ ハ壹定不易ナルコトヲ證セヨ

〔證明〕PBノ引長線ヘ垂線AEヲ作リ又PCノ引長線ヘ垂線DFヲ作レハ三ツノ三角形 ABE PBC, CDF ハ全等形ナルコト容易ニ知リ得ヘシ

∴ $AE=PC=CF=m$ ト名ケ $BE=PB=DF=n$ ト名クレハ



$\tan APB=\frac{EA}{PE}=\frac{m}{2n}$,　$\tan CPD=\frac{FD}{PF}=\frac{n}{2m}$

∴ $\tan APB.\tan CPD=\frac{1}{4}$ ヲ得テ證トス.

6. $\left(\frac{1}{\tan\varphi}\right)^2=\left(\frac{\cos\theta}{\tan\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\tan\beta}\right)^2$ ナルトキ $\left(\frac{1}{\sin\varphi}\right)^2=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\sin\beta}\right)^2$ ナルコトヲ證セヨ

〔證明〕原方程式ヨリ　$\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}=\frac{\cos^2\alpha\cos^2\theta}{\sin^2\alpha}+\frac{\cos^2\beta\sin^2\theta}{\sin^2\beta}$

∴ $1+\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}=\cos^2\theta+\frac{\cos^2\alpha\cos^2\theta}{\sin^2\alpha}+\sin^2\theta+\frac{\cos^2\beta\sin^2\theta}{\sin^2\beta}$

(但シ $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta$ ナレハナリ)之ヲ化スレハ

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)\cos^2\theta}{\sin^2\alpha}+\frac{(\sin^2\beta+\cos^2\beta)\sin^2\theta}{\sin^2\beta}$$

∴ $\left(\frac{1}{\sin\varphi}\right)^2=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\frac{\sin\theta}{\sin\beta}\right)^2$

7. $a.\tan A = b.\tan B$, $a^2x^2 = a^2 - b^2$ ナルトキ

$(1-x^2.\sin^2 B)(1-x^2.\cos^2 A)=1-x^2$ ナルコトヲ證セヨ

〔證明〕所設ノ第壹式ヨリ $a^2.\tan^2 A = b^2.\tan^2 B$ ....(1)

所設ノ第貳式ヨリ $a^2(1-x^2)=b^2$ ....(2)

(2)式ヲ以テ(1)式ヲ除スレハ $\frac{\tan^2 A}{1-x^2}=\tan^2 B$ ヲ得化シテ

$$\frac{\sin^2 A}{(1-x^2)\cos^2 A}=\frac{\sin^2 B}{\cos^2 B} \quad \therefore \frac{1-\cos^2 A}{(1-x^2)\cos^2 A}=\frac{\sin^2 B}{1-\sin^2 B}$$

分母ヲ掃ヒ化スレハ $\cos^2 A+\sin^2 B - x^2\cos^2 A\sin^2 B = 1$

ヲ得此双方ニ x^2 ヲ乘シ1ヨリ減スレハ

$$1-x^2\cos^2 A - x^2\sin^2 B + x^4\cos^2 A\sin^2 B = 1-x^2$$

$$\therefore \quad (1-x^2.\cos^2 A)(1-x^2.\sin^2 B)=1-x^2.$$

8. $$\frac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\frac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$$

此證ヲ求ム

〔證明〕公式 $\sec^2 A-\tan^2 A=1$ ヨリ

$$\frac{\sec A-\tan A}{1}=\frac{1}{\sec A+\tan A}$$

$$\therefore \quad \frac{1-(\sec A-\tan A)}{1+(\sec A-\tan A)}=\frac{(\sec A+\tan A)-1}{(\sec A+\tan A)+1}$$

即チ $$\frac{1-\sec A+\tan A}{1+\sec A-\tan A}=\frac{\sec A+\tan A-1}{\sec A+\tan A+1}$$

9. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

〔證明〕 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}$

$=2\sin C\{2\sin A\sin B\}$

$=4\sin A\sin B\sin C.$

10. $A+B+C=180^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ

$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A.\tan B.\tan C.$

〔證明〕 $\tan A+\tan B+\tan C$

$$=\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\sin C\left(\frac{1}{\cos A\cos B}+\frac{1}{\cos C}\right)$$

$$=\sin C\left(\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}\right)$$

$$=\sin C\left\{\frac{-\cos(A+B)+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}\right\}$$

$$=\sin C\left(\frac{-\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}\right)$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}=\tan A\tan B\tan C.$$

11. $A+B+C=90^\circ$ ナルトキ次式ヲ證セヨ

$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\cos B\cos C.$

〔證明〕 $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$=2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$=2\cos C\cos(A-B)+2\sin C\cos C$

$$=2\cos C\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}$$
$$=2\cos C\{2\cos A\cos B\}$$
$$=4\cos A\cos B\cos C.$$

12. $A+B+C=90°$ ナルトキ次式ヲ證セヨ

$$\tan A\tan B+\tan A\tan C+\tan B\tan C=1$$

〔證明〕左邊$=\tan A(\tan B+\tan C)+\tan B\tan C$

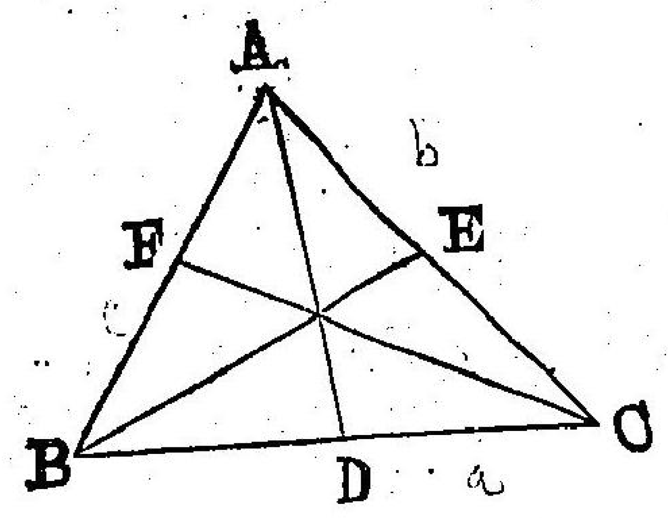
$$=\frac{\sin A}{\cos A}\left(\frac{\sin B}{\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}\right)+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$
$$=\frac{\sin A}{\cos A}\left(\frac{\sin B\cos C+\cos B\sin C}{\cos B\cos C}\right)+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$
$$=\frac{\sin A\sin(B+C)}{\cos A\cos B\cos C}+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$
$$=\frac{\sin A}{\cos B\cos C}+\frac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$
$$=\frac{\cos(B+C)+\sin B\sin C}{\cos B\cos C}$$
$$=\frac{\cos B\cos C}{\cos B\cos C}=1.$$

13. 三角形ABCニ於テAD, BE, CFヲ三中央線トスレハ次式ノ理アルコトヲ證セヨ

$$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$$

〔證明〕$BC=a,\ AC=b,\ AB=c$　又角ADBヲθトスレハ角ADCハ$180°-\theta$ナル故ニ

三角形ABDニ於テ



$$c^2=\overline{AD}^2+\frac{1}{4}a^2-a.AD\cos\theta$$

又三角形ACDニ於テ

$$b^2=\overline{AD}^2+\frac{1}{4}a^2-a.AD\cos(180°-\theta)$$
$$=\overline{AD}^2+\frac{1}{4}a^2+a.AD\cos\theta$$

此兩方程式ヲ相加フレハ

$$b^2+c^2=2\overline{AD}^2+\frac{1}{2}a^2$$

∴　$\overline{AD}^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$

同理ニテ　$\overline{BE}^2=\frac{1}{4}(2c^2+2a^2-b^2)$

$\overline{CF}^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$

此三式ヲ相加フレハ

$$\overline{AD}^2+\overline{BE}^2+\overline{CF}^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

14. $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$ ナルトキ此三角形ハ貳等邊三角形ナルカ或ハ直角三角形ナルコトヲ證セヨ

〔證明〕原方程式ヨリ　$\frac{\sin A\cos B}{\cos A\sin B}=\frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$

∴　$\frac{\sin A}{\sin B}\left(\frac{\cos B}{\cos A}-\frac{\sin A}{\sin B}\right)=0$

然ルニ公式ニ依テ　$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$　ナル故ニ　$\frac{\cos B}{\cos A}=\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}$

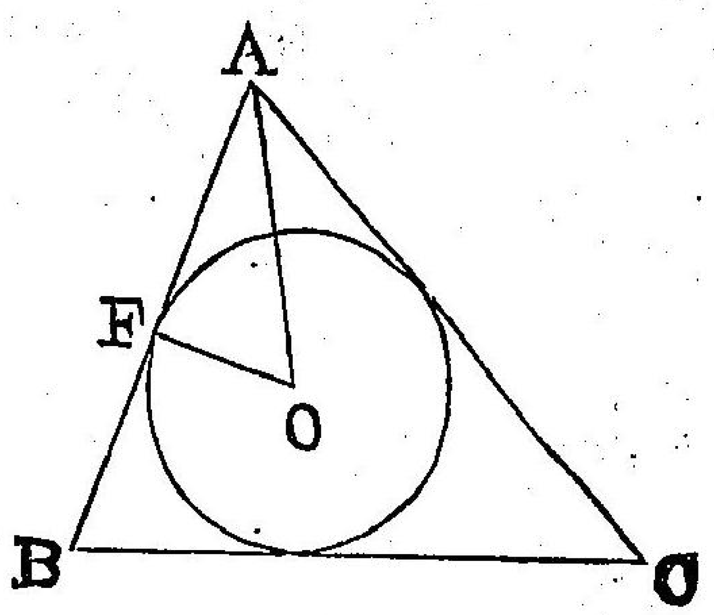
又 $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{a}{b}$ ナル故ニ之レヲチ上ノ方程式ニ代入スレハ

$$\frac{a}{b}\left\{\frac{b(a^2+c^2-b^2)}{a(b^2+c^2-a^2)}-\frac{a}{b}=\right\}0$$ 之ヲ化スレハ

$(a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)=0$ ∴ $a=b$ 或ハ $a^2+b^2=c^2$

之ニ由テ此三角形ハ貳等邊三角形ナルカ或ハ直角三角形ナリ

15. 三角形 ABC ニ内切スル圓ノ中心ヨリ頂點 A マテノ距離ハ次ノ如シ其證ヲ求ム



$$\frac{2bc}{a+b+c}\cos\frac{A}{2}$$

〔證明〕 内切圓ノ半徑OFヲ r トスレハ

$\sin\frac{A}{2}=\frac{r}{OA}$ ∴ $OA=\frac{r}{\sin 2A}$

又三角形 ABC ノ面積ヲ S トシ三邊 a,b,c ノ和ノ半ヲ s トスレハ $S=\frac{1}{2}bc.\sin A$ ニシテ

$r=\frac{S}{s}$ ナリ ∴ $s=\frac{\frac{1}{2}bc.\sin A}{\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{bc.\sin A}{a+b+c}$

之ニ由テ $OA=\frac{bc.\sin A}{(a+b+c)\sin\frac{1}{2}A}=\frac{bc.2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}{(a+b+c)\sin\frac{1}{2}A}$

$$=\frac{2bc}{a+b+c}\cos\frac{1}{2}A.$$

16. 三角形 ABC ノ貳邊ノ比ハ 3:4 ニシテ其對角ノ餘弦ノ比ハ 3 : 2 ナルトキ此貳邊ノ間角

ノ餘弦ヲ求ム

〔證明〕 $\frac{a}{b}=\frac{3}{4}$ ……………(1) $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{3}{2}$ ……………(2)

然ルニ $\frac{\cos A}{\cos B}=\frac{a(b^2+c^2-a^2)}{b(a^2+c^2-b^2)}$ 〔14 題ノ解ヲ見ヨ〕

之ヲ(2) ニ代入シ $\frac{a}{b}$ ヲ $\frac{3}{4}$ トスレハ $\frac{3(b^2+c^2-a^2)}{4(a^2+c^2-b^2)}=\frac{3}{2}$

之ヲ化シテ $3b^2-c^2-3a^2=0$ ∴ $3-\frac{c^2}{b^2}-\frac{3a^2}{b^2}=0$

∴ $3-\frac{c^2}{b^2}-\frac{27}{16}=0$ ∴ $\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{21}}{4}$ ……………(3)

(1) ト (3) ニヨリテ $a:b:c$ ハ $3:4:\sqrt{21}$ ニ等シキヲ知ル

∴ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9+16-21}{2\times3\times4}=\frac{1}{6}.$

17. 三角形 ABC ノ面積ヲ S トスレハ次式ノ理アルコトヲ證セヨ

$$S=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}$$

〔證明〕 $S=\frac{1}{2}bc.\sin A=\frac{1}{2}.\frac{a.\sin B}{\sin A}.\frac{a.\sin C}{\sin A}.\sin A$

$$=\frac{1}{2}.\frac{a^2\sin B\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{a^2\sin B.\sin C}{2\sin(B+C)}$$

$$=\frac{a^2\sin B\sin C}{2(\sin B\cos C+\cos B\sin C)}$$

$$=\frac{a^2}{2(\cot C+\cot B)}$$

同理ニテ $S=\frac{b^2}{2(\cot A+\cot C)}$, $S=\frac{c^2}{2(\cot B+\cot A)}$

$$\therefore \quad S=\frac{a^2}{2(\cot C+\cot B)}=\frac{b^2}{2(\cot A+\cot C)}=\frac{c^2}{2(\cot B+\cot A)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(\cot C+\cot B)+2(\cot A+\cot C)+2(\cot B+\cot A)}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4(\cot A+\cot B+\cot C)}$$

18. 外切スル兩圓アリ大圓ノ半徑ヲ a トシ小圓ノ半徑ヲ b トシ兩外公切線ノ交角ヲ θ トスレハ次式ノ理アルコトヲ證セヨ

$$\sin\theta=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$$

〔證明〕大圓ノ中心ヲ O トシ小圓ノ中心ヲ O′ トシ兩外公切線ノ壹ツガ大圓ニ切スル點ヲ A トシ小圓ニ切スル點ヲ B トシ BA ニ平行シテ O′C ヲ引キ C ニ於テ OA ニ會セシムレハ平面幾何ニ依リテ

$O'C=AB=2\sqrt{ab}$ 又 $OO'=a+b,\quad OC=a-b$

$\angle OO'C=\frac{1}{2}\theta$ ナル故ニ直角三角形 OO′C ニ於テ

$$\sin\frac{1}{2}\theta=\frac{a-b}{a+b},\qquad \cos\frac{1}{2}\theta=\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$$

$$\therefore \quad \sin\theta=2\sin\frac{1}{2}\theta\cdot\cos\frac{1}{2}\theta=\frac{4(a-b)\sqrt{ab}}{(a+b)^2}.$$

19. 三角形 ABC ノ角 C ノ貳等分線ガ對邊 AB ニ會スル點ヲ D トスレハ次式ノ理アルコトヲ證セヨ

$$\tan ADC=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C$$

〔證明〕 $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$ $\therefore$ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}$

$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)}{2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)}=\tan\frac{1}{2}(A+B)\cot\frac{1}{2}(A-B)$$

$$=\cot\frac{1}{2}C\cdot\tan\left\{90^\circ-\frac{1}{2}(A-B)\right\}$$

$$\therefore \quad \tan\left\{90^\circ-\frac{1}{2}(A-B)\right\}=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C$$

今 C ヨリ邊 AB ニ垂線 CE ヲ引クハ平面幾何ニ依リテ

$\angle DCE=\frac{1}{2}(A-B)$ $\therefore$ $\angle ADC=90^\circ-\frac{1}{2}(A-B)$

之ニ由テ $\tan ADC=\frac{a+b}{a-b}\tan\frac{1}{2}C.$

20. 三角形 ABC ニ於テ貳角頂 A 及ヒ B ヨリ對邊ニ引ケル垂線ヲ AD 及ヒ BE トシ DE ヲ結ヘハ次式ノ理アルコトヲ證セヨ

$$DE=c\cdot\cos C.$$

〔證明〕公式 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ ニ倣テ

$$\overline{DE}^2=\overline{CD}^2+\overline{CE}^2-2CD\times CE\cos C$$

然ルニ $CD=b\cos C,\quad CE=a\cos C$ ナル故ニ之ヲ上ノ式ニ代入スレハ

$$\overline{DE}^2=b^2\cos^2C+a^2\cos^2C-2ab\cos^3C$$

$$=(b^2+a^2-2ab\cos C)\cos^2C$$

$$=c^2\cos^2C \qquad \therefore \quad DE=c\cdot\cos C.$$

21. $xy+yz+zx=1$ ナルキ三角法ニ依リテ次

式ヲ證セヨ

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

〔證明〕 $x=\tan A,\quad y=\tan B,\quad z=\tan C$ トスレバ

$\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$ ナル故ニ12問題ニ依レバ $A+B+C=90^\circ$ ナルベシ

又 $$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{\tan A}{1-\tan^2 A}+\frac{\tan B}{1-\tan^2 B}+\frac{\tan C}{1-\tan^2 C}$$

$$=\frac{1}{2}(\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C)$$

又 $2A+2B+2C=180^\circ$ ナル故ニ10問題ニ依レバ

$$\tan 2A+\tan 2B+\tan 2C=\tan 2A\,.\,\tan 2B\,.\,\tan 2C$$

$$=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\cdot\frac{2\tan B}{1-\tan^2 B}\cdot\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}$$

$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}$$

$$=\frac{8xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

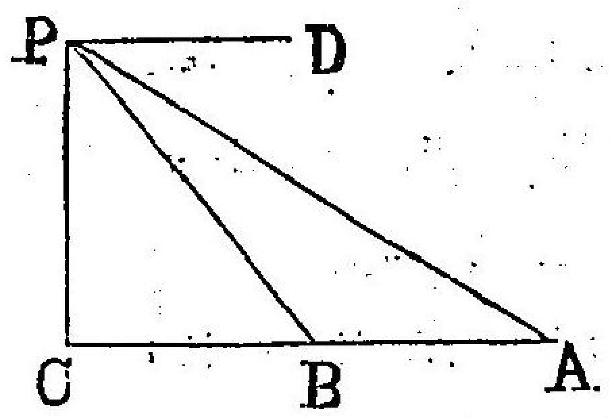
之ニ由テ $$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}.$$

22. 高サhナル塔頂Pヨリ塔底ノ地平上ニアル貳物A,Bノ俯角ヲ測リテ$45^\circ-\alpha$及ビ$45^\circ+\alpha$ヲ得タリ然ル時AB距離ハ$2h\tan 2\alpha$ナリト云フ其證如何

但シP, A, Bハ共ニ同シ垂直平面上ニアルモノトス

〔證明〕 $\angle CAP=\angle APD=45^\circ-\alpha$

$\angle CBP=\angle BPD=45^\circ+\alpha,$



$CP=h$ ナル故ニ

$$\cot(45^\circ-\alpha)=\frac{AC}{h}$$

$$\cot(45^\circ+\alpha)=\frac{BC}{h}$$

$$\therefore\ \cot(45^\circ-\alpha)-\cot(45^\circ+\alpha)=\frac{AB}{h}$$

然ルニ $$\cot(45^\circ-\alpha)-\cot(45^\circ+\alpha)=\frac{\cos(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ-\alpha)}-\frac{\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)}$$

$$=\frac{\sin(45^\circ+\alpha)\cos(45^\circ-\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha).\sin(45^\circ-\alpha)}$$

$$=\frac{2\sin\{(45^\circ+\alpha)-(45^\circ-\alpha)\}}{2\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ-\alpha)}$$

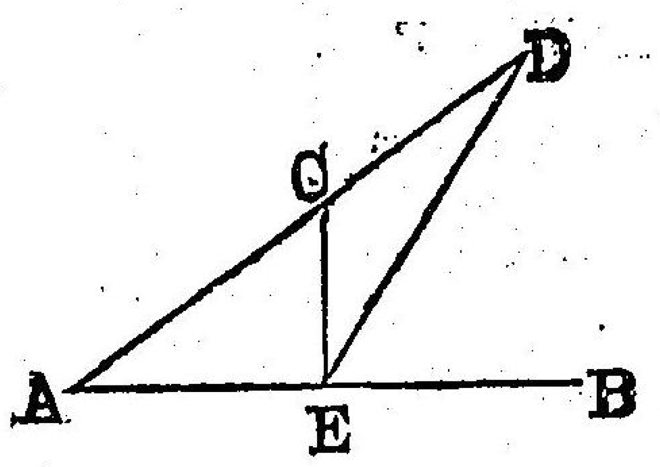
$$=\frac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 90^\circ}=2\tan 2\alpha$$

之ニ由テ $\frac{AB}{h}=2\tan 2\alpha\qquad\therefore\ AB=2h\tan 2\alpha.$

23. 或人壹ノ直道ヲ歩行セシ時遠近貳塔ヲ恰モ壹直線ノ方向ニ望見シタリ而シテ此方向ハ直道ノ方向トβ角ヲナセリ夫レヨリ更ニc尺進行シタル時近塔ハ直道ト直角ノ方向ニ當リ又遠近貳塔ヲ望見セシ方向ハα角ヲナセリト云フ然ル時此貳塔間ノ距離ハ次ノ如クナルコトヲ證セヨ

$$\frac{c\cdot\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}-\frac{c}{\cos\beta}$$

〔證明〕 ABヲ直道トシC, Dヲ貳塔トシ又或人ノ最初ノ位置



ナハトシ後ノ位置ヲEトスレハ

$\angle BAD=\beta,\quad \angle CED=\alpha,$

$\angle AEC=90^\circ,\quad AE=c$

$\therefore\quad \angle ACE=90^\circ-\beta$

$\therefore\quad \angle ADE=\angle ACE-\angle CED$

$=90^\circ-(\alpha+\beta)$

$$\therefore\quad \frac{AD}{c}=\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin\{90^\circ-(\alpha+\beta)\}}=\frac{\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}\qquad \therefore\quad AD=\frac{c.\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}$$

又 $\cos\beta=\dfrac{c}{AC}\qquad \therefore\quad AC=\dfrac{c}{\cos\beta}$

$$\therefore\quad CD=AD-AC=\frac{c.\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)}-\frac{c}{\cos\beta}.$$

24. 相交ル甲乙貳直道アリ甲道ニ於テ壹高塔ノ高サヲ測リ最大仰角 α ヲ得タリ又乙道ニ於テ同塔ノ最大仰角 β ヲ測レリ又此貳道ノ交點ヨリ各觀測所迄ノ距離ハ甲道ニ於テ a ニシテ乙道ニ於テハ b ナリ然ル片ハ塔ノ高サハ次ノ如クナルヿヲ證セヨ

$$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}$$

〔證明〕 貳直道ノ交點ヲOトシ甲道ニ於テノ測所ヲAトシ乙道ニ於テノ測所ヲBトスレハ此A, Bハ各道ノ中ニ於テ塔ニ最近ノ所ナリ何トナレハ最大仰角ヲ測リ得タル所ナレハナリ故ニ今塔脚ヲCトシ塔頂ヲDトスレハ角CAO及ヒ角CBOハ直角ニシテ角CADハ α ニ等シク角CBDハ β ニ等シ而シテCD

ヲ x トスレハ

$\therefore\quad AC=x\cot\alpha,\quad BC=x\cot\beta$

$\therefore\quad a^2+x^2\cot^2\alpha=b^2+x^2\cot^2\beta$

$$\therefore\quad x=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}.$$

25. 平地上ニ直立スル塔アリ測士其正北ノ某所ニ於テ塔ノ仰角 α ヲ測リ得タリ夫レヨリ此仰角 α ヲ終始保續シテ c 尺進行シタル片塔ハ恰モ南西ノ方向ニ當テ見ヘタリト云フ因テ塔ノ高サヲ求ム

答 $\dfrac{4c}{\pi\cot\alpha}$

〔證明〕 塔脚ヲCトシ塔頂ヲDトシ最初ノ測所ヲAトシ後ノ測所ヲBトスレハ角ACBハ45°ニシテ進行セシ道程 c ハCAヲ半徑トシCヲ中心トシテ45°廻轉シタル弧ノ長サナル故ニ

$c=\dfrac{2\pi AC}{8}\qquad \therefore\quad AC=\dfrac{4c}{\pi}\qquad$ 又 $AC=CD\cot\alpha$

ナル故ニ $CD\cot\alpha=\dfrac{4c}{\pi}\qquad \therefore\quad CD=\dfrac{4c}{\pi\cot\alpha}.$

〔附錄終〕

6/35
5/36

明治三十五年二月十三日印刷
明治三十五年二月十七日發行

數學雜問詳解奥附

定價金四十錢

不許複製

著作者　白井義督

發行者　大阪市東區安土町四丁目三十八番邸　石田忠兵衛

印刷者　東京市麴町區有樂町三丁目一番地　大西錬三郎

發行所　大阪市東區安土町四丁目　積善館本店

發賣所　福岡市博多中島町　積善館第一支店

發賣所　廣島縣廣島市鍛屋町　積善館第二支店

印刷所　東京市京橋區弓町二十四番地　三協合資會社

88
245

053149-000-1

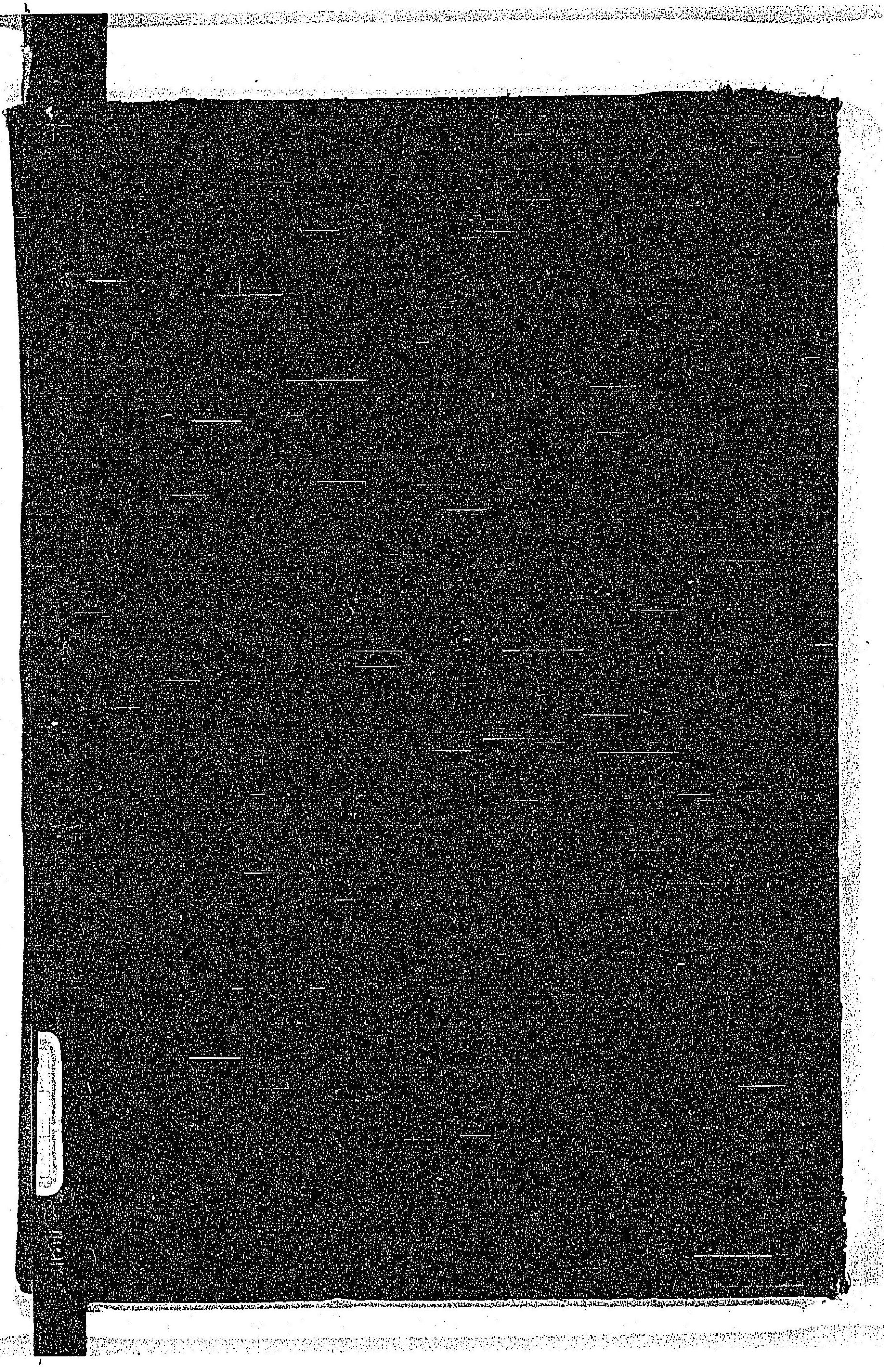
88-245

数学難問詳解

白井　義督／著

M35

CAB-0294



88
245