4 Sistemi di numerazione

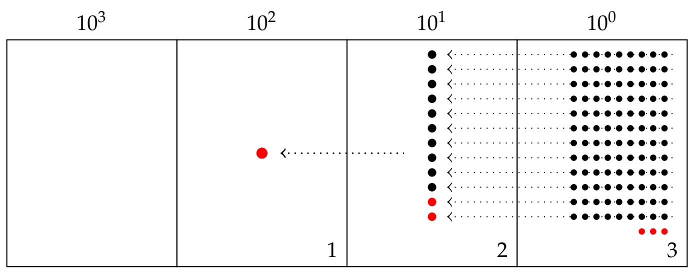
4.1 La scrittura in base 10

Il nostro sistema di numerazione è il sistema *decimale*. Ciò ha probabilmente origine dal fatto che abbiamo 10 dita. Forse se fossimo nati ragni avremmo contato fino ad otto ed useremo un sistema di numerazione *ottale*, se fossimo nati gatti avremmo contato fino a 4 e useremo un sistema *quattrale*, millepiedi fino a mille.

Come conta un computer? Un computer ragiona sulla base di soli due stati, passa corrente (acceso) o non passa corrente (spento): è come se avesse due dita. Tutti i sistemi che oggi usiamo nell'informatica utilizzano una logica a due stati: i circuiti elettrici possono trovarsi nello stato di acceso o di spento, i dischi magnetici dell'hard disk sono composti da microscopici magneti ognuno dei quali può essere magnetizzato in un verso o nel verso opposto, i dischi ottici come i CD-ROM e i DVD memorizzano le informazioni al loro interno come se contenessero tanti microscopici specchi ognuno dei quali riflette la luce oppure no.

Nell'antichità si usava uno strumento chiamato abaco. Gli abachi erano tavolette suddivise in colonne su cui si spalmavano cera o sabbia e si incidevano segni o si mettevano sassolini.

Per contare un certo numero di oggetti e ricordarci quanti sono, utilizziamo un abaco:



Cominciamo a contare con le mani: per ogni raggruppamento di 10 segniamo un'unità di ordine superiore, fino a contare tutti gli elementi del nostro insieme. Le unità che rimangono, perché non riescono a formare un raggruppamento di 10, vengono segnate con la cifra che le rappresenta: nel nostro caso 3.

Passiamo all'unità di ordine superiore: le decine. Anche con queste formiamo raggruppamenti di 10, se ci riusciamo. Ogni raggruppamento forma un'unità di ordine superiore, se rimangono elementi che non si raggruppano essi rappresentano le decine. Se non rimane alcuna unità scriviamo 0. Nel nostro caso, ci sono 12 decine, 10 formano un'unità di ordine superiore (centinaia) e 2 restano decine.

Il procedimento continua finché non abbiamo finito di contare tutti gli elementi. Nel nostro esempio finiamo dopo aver formato un'unità di ordine superiore, le centinaia. Il nostro numero è 123. Ovviamente i numeri 123 e 312 sono due numeri diversi anche se composti dalle stesse cifre, sono diversi perché la posizione delle cifre che li compongono è differente. Ad esempio, la cifra 1, che in 123 è nella posizione più a sinistra, si trova al centro del numero 312.

Dunque, in generale, il valore attribuito alle varie cifre non dipende soltanto dalla specifica cifra considerata ma anche dalla posizione che essa occupa all'interno del numero. Il sistema di numerazione che solitamente usiamo è dunque un *sistema posizionale*. È chiamato *decimale* o *a base dieci* perché dieci unità di un determinato ordine sono rappresentate da un'unità di ordine superiore.

Definizione 4.1. Si definisce *base* di un sistema di numerazione il numero di simboli, *cifre*, usati per rappresentare i valori. La potenza della base indica il *peso* (la posizione) che i simboli hanno all'interno della scrittura del numero.

Riassumendo, abbiamo una serie di dieci simboli: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9 che rappresentano il numero delle unità di un determinato ordine. Il significato dei simboli dipende anche dalla posizione che assumono nella "parola" che rappresenta un numero.

Ad esempio: $1\,846 = 1 \cdot (1\,000) + 8 \cdot (100) + 4 \cdot (10) + 6 \cdot (1)$, che scritto con le potenze di 10 diventa: $1\,846 = 1 \cdot (10)^3 + 8 \cdot (10)^2 + 4 \cdot (10)^1 + 6 \cdot (10)^0$.

L'esponente del peso attribuito ad ogni cifra che compone la scrittura di un numero rappresenta la posizione della cifra a partire da quella più a destra (0) cioè la meno significativa, quindi ne denota l'ordine di importanza.

Definizione 4.2. La scrittura di un numero come somma delle cifre moltiplicate per le potenze della base si chiama *notazione polinomiale*.

Una volta compreso il meccanismo su cui si basa il sistema di numerazione decimale, cioè a base 10, il procedimento si può estendere ad una base qualunque.

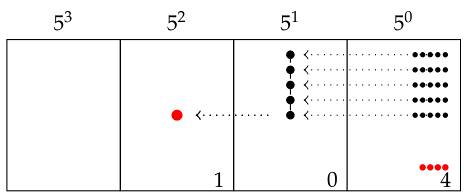
Se B è la base di un sistema di numerazione, B unità di un certo ordine vengono rappresentate da un'unità dell'ordine immediatamente superiore. In questo modo si può costruire un sistema di numerazione con qualsiasi base maggiore di 1.

4.2 Scrittura di un numero in una base qualsiasi

Il procedimento usato per scrivere un numero in base 10 può essere usato per scrivere un numero in una base qualsiasi.

Esempio 4.1. Contare 29 oggetti in base 5.

Utilizziamo un abaco, ma anziché contare per dieci contiamo per cinque. Invece di raggruppare per unità, decine, decine di decine (centinaia) e così via, conteremo raggruppando per unità, per cinquine, per cinquine di cinquine (venticinquine) e così via.



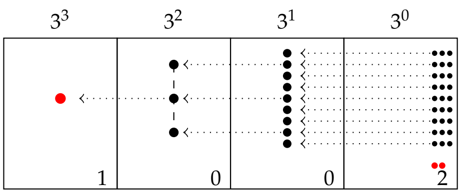
Il numero rappresentato nell'abaco si scrive $(104)_5$ e si legge "uno-zero-quattro in base cinque" per distinguerlo da centoquattro scritto in base 10, che sarebbe 104 ovvero $(104)_{10}$.

Per ottenere il numero decimale che corrisponde al numero scritto in base 5 occorre sviluppare il numero in base 5 nella sua scrittura polinomiale: $(104)_5 = 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 25 + 0 + 4 = (29)_{10}$.

Esempio 4.2. Contare 29 oggetti in base 3.

Questa volta contiamo per tre. Il numero ottenuto si scrive $(1002)_3$ e si legge “uno-zero-zero-due in base tre” per distinguerlo da milledue scritto in base 10.

Per ottenere il numero decimale corrispondente, occorre sviluppare il numero in base 3 nella sua scrittura polinomiale.



$$(1002)_3 = 1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 5^0 = 27 + 0 + 0 + 2 = (29)_{10}.$$

In accordo con la definizione 4.1, negli esempi abbiamo visto che i simboli che occorrono per scrivere un numero in base 10 sono dieci $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, quelli necessari per scrivere un numero in base 5 sono cinque $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, quelli necessari per scrivere un numero in base 3 sono tre $\{0, 1, 2\}$. Analogamente, i simboli che serviranno per scrivere un numero in base 2 sono due $\{0, 1\}$.

Possiamo scrivere i numeri anche in una base superiore a 10. Una base molto usata in informatica, insieme alla base 2, è la base *esadecimale*, cioè la base 16. In questo caso, per contare devo fare raggruppamenti di 16; sono perciò necessari 16 simboli per indicare questi raggruppamenti, che rappresentano i valori da 0 a 15. Pertanto occorrono dei simboli in più rispetto a quelli utilizzati dal sistema di numerazione decimale, che servono per rappresentare i valori 10, 11, 12, 13, 14, 15. Convenzionalmente si usano i simboli seguenti:

$$(A)_{16} = (10)_{10} \quad (B)_{16} = (11)_{10} \quad (C)_{16} = (12)_{10}$$
$$(D)_{16} = (13)_{10} \quad (E)_{16} = (14)_{10} \quad (F)_{16} = (15)_{10}.$$

Quindi i numeri esadecimali, in ordine crescente, sono: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F, 10, 11, 12, 13, 14 ,15, ...

4.2.1 Convertire un numero da una base diversa da 10 a base 10

Per scrivere un numero da una base diversa da 10 a base 10 bisogna svilupparlo nella sua forma polinomiale.

Se $(x)_B$ è un numero qualsiasi scritto nella base B e se $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ sono le cifre che compongono la sua rappresentazione, da quella più significativa (con peso B^n) a quella meno significativa (con peso $B^0 = 1$), avremo:

$$(x)_{10} = a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_2 \cdot B^2 + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0.$$

✍ *Esercizi proposti:* 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5

4.2.2 Convertire un numero da base 10 a una base diversa da 10

Abbiamo visto che per contare e scrivere un numero in una base diversa da dieci, per esempio $(29)_{10}$ in base 3, dobbiamo raggruppare per 3. Raggruppare per 3 ha lo stesso significato che dividere per 3. Nella prima divisione per tre il quoziente indica quante terzine otteniamo, mentre il resto indica quante unità (di ordine 0) verranno considerate.

Nel nostro esempio si ottengono $29/3 = 9$ terzine, mentre rimangono 2 unità (di ordine 0). Il 2 sarà il primo numero a destra che verrà considerato. Con 9 terzine si ottengono $9/3 = 3$ terzine di terzine (novine) con resto 0. Questo 0 diventa la cifra che scriviamo a sinistra del 2. Con 3 terzine di terzine otteniamo una terzina di terzina di terzina (ventisettina), mentre rimangono 0 terzine di terzine. Questo 0 diventa il numero che scriviamo a sinistra dello 0 precedente. Ora, $1 : 3$ dà come quoziente 0 (terzine di quarto ordine) con resto 1. Qui ci fermiamo e scriviamo 1 a sinistra dello 0 trovato precedentemente.

Successive *divisioni* per 3	*Quozienti* delle successive divisioni per 3	*Resti* delle successive divisioni per 3
29 : 3	9	2
9 : 3	3	0
3 : 3	1	0
1 : 3	0	1

Il numero si compone da sinistra verso destra con le cifre dei vari resti nell'ordine opposto a quello nel quale sono stati ottenuti. Si ha così $(29)_{10} = (1002)_3$.

Controlliamo con la notazione polinomiale: $1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0 = 27 + 2 = 29$.

Esempio 4.3. Convertire nel sistema binario (in base 2) il numero 59.

Dividiamo successivamente 59 per 2 fino a che non otteniamo zero come quoziente e prendiamo come risultato della conversione la successione dei resti partendo dall'ultimo ottenuto. Il numero 59 scritto in base 2 sarà pertanto $(111011)_2$.

Verifichiamo con la scrittura polinomiale: $1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 32 + 16 + 8 + 2 + 1 = 59$.

Successive *divisioni* per 2	*Quozienti* delle successive divisioni per 2	*Resti* delle successive divisioni per 2
59 : 2	29	1
29 : 2	14	1
14 : 2	7	0
7 : 2	3	1
3 : 2	1	1
1 : 2	0	1

Esempio 4.4. Trasforma 315 da base 10 a base 3, 4 e 5.

base 3

$315_{10} = 102200_3$

```
3 1 5 | 3
3 1 5   1 0 5 | 3
    0   1 0 5   3 5 | 3
            0   3 3   1 1 | 3
                  2     9   3 | 3
                        2   3   1
                            0
```

base 4

$315_{10} = 10323_4$

```
3 1 5 | 4
3 1 2   7 8 | 4
    3   7 6   1 9 | 4
          2   1 6   4 | 4
                3   4   1
                    0
```

base 5

$315_{10} = 2230_5$

```
3 1 5 | 5
3 1 5   6 3 | 5
    0   6 0   1 2 | 5
          3   1 0   2
                2
```

Un altro metodo per trasformare un numero decimale in un numero binario

Per trasformare i numeri da base 10 a base 2 basta scrivere il numero come somma delle potenze del 2:

a) si parte dalla potenza del 2 più vicina, per difetto, al numero da convertire;

b) si vede se la potenza precedente di ordine inferiore può fare parte della sequenza, cioè se la somma tra le potenze non diventa più grande del numero. Se può farne parte allora si scrive 1, altrimenti 0;
c) si prosegue in questo modo fino ad arrivare a 2^0;
d) la sequenza di 1 e 0 nell'ordine ottenute sono le cifre che, da sinistra verso destra, rappresentano il numero binario corrispondente.

Esempio 4.5. Consideriamo ancora il numero 59 e convertiamolo in base 2:

- ➡ qual è la potenza del 2 più vicina, per difetto, al numero 59? È 32, cioè 2^5. Quindi 2^5 fa parte del numero binario. Scrivo 1 come primo numero della sequenza;
- ➡ vediamo ora $2^4 = 16$. Anche 16 può far parte del numero binario perché $32 + 16 = 48$ che è minore di 59. Segno 1 come secondo numero della sequenza;
- ➡ per lo stesso ragionamento anche $2^3 = 8$ fa parte del numero binario. Infatti $32+16+8 = 56$ è minore di 59. Segno ancora 1 come terzo numero della sequenza;
- ➡ invece $2^2 = 4$ non può farne parte perché $32 + 16 + 8 + 4 = 60$ è maggiore di 59. Segno 0 come quarto numero della sequenza;
- ➡ $2^1 = 2$ e $2^0 = 1$ vanno bene e si arriva al totale voluto 59. Segno 1 come quinto e 1 come sesto numero della sequenza.

Riassumendo: $59 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (111011)_2$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14

4.3 Conversione di un numero da una base diversa da 10 a un'altra base diversa da 10

Esempio 4.6. Scrivere il numero $(1023)_4$ in base 7.

Per scrivere un numero da una base B a una base K entrambe diverse da 10 occorre:

a) trasformare il numero in base B in un numero decimale attraverso la sua scrittura polinomiale;
$(1023)_4 = 1 \cdot 4^3 + 0 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 = 64 + 0 + 8 + 3 = (75)_{10}$;
b) trasformare il numero decimale nella base K attraverso i resti delle divisioni successive per K presi nell'ordine opposto a quello nel quale sono stati ottenuti.

Successive *divisioni* per 7	*Quozienti* delle successive divisioni per 7	*Resti* delle successive divisioni per 7
75 : 7	10	5
10 : 7	1	3
1 : 7	0	1

Le trasformazioni eseguite sono quindi: $(1023)_4 \to (75)_{10} \to (135)_7$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.15, 4.16, 4.17

4.3.1 Conversione tra base 4, base 8, base 16 e base 2

Consideriamo il numero scritto in base 2 $(11010011100101)_2$. Vogliamo scriverlo in base 4, in base 8, in base 16 senza passare dalla sua scrittura in base 10. Notiamo che gruppi di due cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 4, gruppi di 3 cifre in base 2 rappresentano tutte le cifre della base 8 e gruppi di 4 cifre nella base 2 rappresentano tutte le cifre della base 16, come indicato nella seguente tabella.

Base 10	Base 2	Base 4	Base 8	Base 16
0	0	$00 = 0$	$000 = 0$	$0000 = 0$
1	1	$01 = 1$	$001 = 1$	$0001 = 1$
2		$10 = 2$	$010 = 2$	$0010 = 2$
3		$11 = 3$	$011 = 3$	$0011 = 3$
4			$100 = 4$	$0100 = 4$
5			$101 = 5$	$0101 = 5$
6			$110 = 6$	$0110 = 6$
7			$111 = 7$	$0111 = 7$
8				$1000 = 8$
9				$1001 = 9$
10				$1010 = A$
11				$1011 = B$
12				$1100 = C$
13				$1101 = D$
14				$1110 = E$
15				$1111 = F$

Da base 2 a base 4 Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di due cifre, partendo da destra, e tradurre il valore di ogni singolo gruppo con la corrispondente cifra in base 4.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1	0 0	1 1	1 0	0 1	0 1
Numero scritto in base 4	3	1	0	3	2	1	1

$$(11010011100101)_2 = (3103211)_4.$$

Da base 2 a base 8 Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di tre cifre, partendo da destra, e tradurre il valore di ogni singolo gruppo con la corrispondente cifra in base 8.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0	0 1 1	1 0 0	1 0 1
Numero scritto in base 8	3	2	3	4	5

$$(11010011100101)_2 = (32345)_8.$$

Da base 2 a base 16 Dobbiamo raggruppare il numero scritto in base 2 in gruppi di quattro cifre, partendo da destra, e tradurre il valore di ogni singolo gruppo con la corrispondente cifra in base 16.

Numero scritto in base 2	1 1	0 1 0 0	1 1 1 0	0 1 0 1
Numero scritto in base 16	3	4	E	5

$$(11010011100101)_2 = (34E5)_{16}.$$

✍ *Esercizi proposti:* 4.18, 4.19

Perché è importante la base 2?

Tutti gli strumenti elettronici che utilizziamo hanno bisogno di tradurre le informazioni che inseriamo in stati fisici della macchina. Dal punto di vista tecnico oggi usiamo dispositivi elettrici, magnetici, ottici che sono bistabili, ossia assumono due stati fisici differenti e il metodo più semplice e più efficiente per tradurre in "linguaggio macchina" le nostre informazioni è utilizzare la base 2: composta solo dai simboli 0 e 1. La base due è quindi l'alfabeto a disposizione delle macchine per comprendere e rispondere alle nostre richieste. Se si utilizzasse la base 10 dovremo far riconoscere dall'apparato dieci differenti simboli che dovrebbero essere tradotti in altrettanti stati differenti di dispositivi fisici.

A partire da questa informazione elementare detta *bit* (compressione dall'inglese di *bi*nary digi*t*) è possibile costruire informazioni più complesse sotto forma di sequenze finite di zero e di uno. Attraverso la codifica binaria si è in grado di rappresentare caratteri, numeri, istruzioni di programmi ma anche immagini, suoni e video. Tutte le informazioni gestite da un computer sono quindi numeri in forma binaria.

Il primo multiplo del bit è il *byte* che è formato da una sequenza di 8 bit:

0	1	0	1	0	0	0	0

Con una sequenza di 8 bit possiamo codificare, per mezzo del codice ASCII[1], fino a 256 caratteri. Quando digitiamo un carattere sulla tastiera del calcolatore inviamo in realtà una sequenza di 8 bit. Vediamo alcuni esempi della codifica binaria dei caratteri (codice ASCII).

Carattere	In base 2	Numero decimale
A	0 1 0 0 0 0 0 1	65
a	0 1 1 0 0 0 0 1	97
M	0 1 0 0 1 1 0 1	77
m	0 1 1 0 1 1 0 1	109
0	0 0 1 1 0 0 0 0	48
1	0 0 1 1 0 0 0 1	49
à	1 0 1 0 0 0 0 0	160
ò	1 0 1 0 0 0 1 0	162

[1]Acronimo di *American Standard Code for Information Interchange*. Si tratta di un codice standard utilizzato dalla maggior parte dei sistemi elettronici per associare ogni lettera alfanumerica a un valore numerico.

Anche il byte ha i suoi multipli. Eccone alcuni indicati nelle seguenti tabelle.

Sistema internazionale			
Nome	Simbolo	Potenza di 10	Valore decimale rispetto al byte
byte	B	10^0	1
kilobyte	kB	10^3	1 000
megabyte	MB	10^6	1 000 000
gigabyte	GB	10^9	1 000 000 000
terabyte	TB	10^{12}	1 000 000 000 000
petabyte	PB	10^{15}	1 000 000 000 000 000
exabyte	EB	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
zettabyte	ZB	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000
yottabyte	YB	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000

Utilizzo in informatica			
Nome	Simbolo	Potenza di 2	Valore decimale rispetto al byte
byte	B	2^0	1
kibibyte	KiB	2^{10}	1 024
mebibyte	MiB	2^{20}	1 048 576
gibibyte	GiB	2^{30}	1 073 741 824
tebibyte	TiB	2^{40}	1 099 511 627 776
pebibyte	PiB	2^{50}	1 125 899 906 842 624
exbibyte	EiB	2^{60}	1 152 921 504 606 846 976
zebibyte	ZiB	2^{70}	1 180 591 620 717 411 303 424
yobibyte	YiB	2^{80}	1 208 925 819 614 629 174 706 176

❑ **Osservazione** È noto che i prefissi *kilo-*, *mega-* e *giga-* corrispondono a 1 000, 1 000 000 (un milione) e 1 000 000 000 (un miliardo), mentre nell'informatica vengono impropriamente usati per indicare particolari potenze di 2 (*kibi-*, *mebi-* e *gibi-*). Tutto questo genera confusione e i produttori giocano su questa differenza, facendo i conti con i multipli decimali, "imbrogliando". Un PC che viene dichiarato, ad esempio, con un hard disk da 160GB ha a disposizione $160 \cdot 10^9$ byte che risultano essere $160 \cdot (10^9/2^{30}) = 160 \cdot 0{,}931\,322\,575 \simeq 149$GiB. Ma il PC gestisce i multipli binari, ovvero i GiB, e quindi mostra all'utente un disco da 149GiB. Ecco che ci siamo "persi" circa $160 - 149 = 11$GiB.

✍ *Esercizio proposto:* 4.20

4.4 Operazioni in base diversa da dieci

Le quattro operazioni con i numeri in base diversa da dieci possono effettuarsi con gli stessi algoritmi utilizzati per i numeri naturali.

4.4.1 Addizione

Esempio 4.7. Eseguire l'addizione in base 2 tra 101011_2 e 10011_2.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola di addizione in base due che riportiamo a lato. La tavola, o tabellina, è piuttosto semplice, bisogna solo fare attenzione che in base due si ha $1+1=10$, perché in base due il 2 si scrive appunto 10.

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=0$, scrivo 0 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore troviamo $(1+1)+1=10+1=11$, scrivo 1 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore troviamo $1+0+0=1$, scrivo 1 senza riportare alcunché. Continuo in questo modo fino ad esaurire tutte le cifre da addizionare.

+	0	1
0	0	1
1	1	10

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{Riporti} & & & & & 1 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & + \\ & & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \end{array}$$

Facciamo la verifica nel sistema decimale:

in base 2	$101011_2 + 10011_2$	$= 111110_2$
in base 10	$43 + 19$	$= 62$

Esempio 4.8. Eseguire la somma in base 5 tra 34231_5 e 4341_5.

Costruiamo la tavola di addizione in base cinque: ricordiamo che $4+1=10$, $4+2=11$, $4+3=12$ ecc.

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo ad addizionare a partire dalle unità: $1+1=2$, scrivo 2 senza riporto. Nella colonna di ordine superiore troviamo $3+4=12$. Scrivo 2 e riporto 1. Nella colonna di ordine superiore troviamo $(1+2)+3=3+3=11$ scrivo 1 e riporto 1. Procedendo verso sinistra ora troviamo $(1+4)+4=10+4=14$ scrivo 4 e riporto 1. Infine $1+3=4$. L'addizione è terminata.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Riporti} & 1 & 1 & 1 & & & \\ & 3 & 4 & 2 & 3 & 1 & + \\ & & 4 & 3 & 4 & 1 & \\ \hline & 4 & 4 & 1 & 2 & 2 & \end{array}$$

Verifica nel sistema decimale:

in base 5	$34231_5 + 4341_5$	$= 44122_5$
in base 10	$2\,441 + 596$	$= 3\,037$

✍ *Esercizi proposti:* 4.21, 4.22, 4.23

4.4.2 Sottrazione

Per la sottrazione ci possiamo servire delle stesse tabelle dell'addizione.

Esempio 4.9. $101011_2 - 11111_2$.

Mettiamo i numeri in colonna e cominciamo a sottrarre partendo dalle unità: $1-1=0$ scrivo 0. Nella colonna di ordine superiore troviamo di nuovo $1-1=0$ scrivo 0. Procedendo verso sinistra troviamo $0-1$ devo quindi prendere in prestito un unità di ordine superiore che messa davanti a 0 diviene $10-1=1$. Scrivo 1 e riporto -1. Mi sposto ancora a sinistra e trovo $(-1+1)-1=0-1$. Occorre prendere in prestito un'unità di ordine superiore $10-1=1$. Scrivo 1 e riporto -1. Nella colonna a sinistra ho 0 del minuendo, -1 del riporto e -1 del sottraendo. Occorre prendere a prestito un'unità di ordine superiore quindi $10-1=1$ a cui devo togliere 1 del sottraendo: $1-1=0$. Infine nella unità di ordine superiore devo addizionare il riporto -1 a 1 e scrivo ancora 0. Il risultato della sottrazione è: 1100_2

Riporti	-1	-1	-1				
	1	0	1	0	1	1	−
		1	1	1	1	1	
	0	0	1	1	0	0	

Verifica nel sistema decimale:

in base 2	$101011_2 - 11111_2$	$= 1100_2$
in base 10	$43 - 31$	$= 12$

Esempio 4.10. $34231_5 - 4341_5$.

Ci serviamo della tavola di addizione in base cinque.

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Riporti	-1	-1	-1			
	3	4	2	3	1	−
		4	3	4	1	
	2	4	3	4	0	

Verifica nel sistema decimale:

in base 5	$34231_5 - 4341_5$	$= 24340_5$
in base 10	$2\,441 + 596$	$= 1\,845$

✍ *Esercizi proposti:* 4.24, 4.25, 4.26

4.4.3 Moltiplicazione

Adoperiamo lo stesso algoritmo usato per moltiplicare due numeri decimali utilizzando la tabella della moltiplicazione.

Esempio 4.11. $101011_2 \cdot 101_2$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci. Abbiamo perciò bisogno di costruire la tavola della moltiplicazione in base due.

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$$\begin{array}{cccccccc} & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \cdot \\ & & & & & 1 & 0 & 1 \\ \hline & & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Verifica nel sistema decimale:

in base 2	$101011_2 \cdot 101_2$	$= 11010111_2$
in base 10	$43 \cdot 5$	$= 215$

Esempio 4.12. 2315×245.

In questo caso abbiamo bisogno di costruire la tavola della moltiplicazione in base cinque.

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\begin{array}{ccccc} & & 2 & 3 & 1 \cdot \\ & & & 2 & 4 \\ \hline & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & - \\ \hline 1 & 2 & 1 & 4 & 4 \end{array}$$

Verifica nel sistema decimale:

in base 5	$231_5 \cdot 24_5$	$= 12144_5$
in base 10	$66 \cdot 14$	$= 924$

✍ *Esercizi proposti:* 4.27, 4.28, 4.29

4.4.4 Divisione

Anche per la divisione il procedimento è del tutto analogo a quello usato nel sistema decimale, la tavola da utilizzare è quella della moltiplicazione.

Esempio 4.13. $11101_2 : 101_2$.

Dobbiamo tradurre in base due quello che facciamo in base dieci.

La cifra di ordine più alto si ottiene dalla divisione di 111 con 101. Il quoziente è 1, il resto si ottiene dalla differenza tra il dividendo e il prodotto del quoziente per il divisore. In questo caso il resto è 10.

Si abbassa lo 0 e otteniamo 100. Si ha $100 : 101 = 0$. La seconda cifra del divisore è 0.

La moltiplicazione di 0 per il divisore dà 0. Il nuovo resto è 100.

Si abbassa l'1 e otteniamo 1001 che viene diviso per 101. Il quoziente è 1 ed il resto è uguale a 100.

```
  1 1 1 0 1 | 1 0 1
− 1 0 1     | 1 0 1
    1 0 0
    0 0 0
    1 0 0 1
  −   1 0 1
      1 0 0
```

Dai calcoli risulta quindi: $11101_2 : 101_2 = (101)_2$ con resto $(100)_2$.

Verifica nel sistema decimale:

in base 2	$11101_2 : 101_2$	$= 101_2$	con Resto $= 100_2$
in base 10	$29 : 5$	$= 5$	con Resto $= 4$

Eseguiamo la riprova della divisione in base 2:

$$\textit{dividendo} = \textit{quoziente} \cdot \textit{divisore} + \textit{resto}.$$

Il quoziente 101_2 moltiplicato per il divisore 101_2 è uguale a 11001_2. Se a questo risultato aggiungiamo il resto 100_2 otteniamo il dividendo 11101_2. Quindi i calcoli effettuati sono corretti.

```
        1 0 1 ·
        1 0 1
        -----
        1 0 1
      0 0 0 −
    1 0 1 −
    ---------
    1 1 0 0 1

    1 1 0 0 1 +
        1 0 0
    ---------
    1 1 1 0 1
```

Esempio 4.14. $3402_5 : 42_5$.

Dobbiamo tradurre in base cinque quello che facciamo in base dieci.

Il 42_5 nel 34_5 non ci sta. Prendiamo allora tre cifre 340_5. Il 4_5 nel 34_5 ci sta 4_5 volte, quindi 4_5 è la cifra di ordine più alto del quoziente. Dobbiamo trovare il resto. Il resto si ottiene sottraendo il risultato della moltiplicazione tra 4_5 e 42_5 che è 323_5. Il resto è uguale 12_5. Si abbassa il 2_5 e otteniamo 122_5. Il 4_5 nel 12_5 ci sta una sola volta, infatti $4_5 \cdot 2_5 = 13_5$. La seconda cifra del divisore è 1_5. La moltiplicazione di 1_5 per il divisore dà 42_5. Sottraendo 42_5 da 122_5 si ottiene 30_5. Dato che 30_5 è minore di 42_5 la divisione intera è terminata.

```
3 4 0 2 | 4 2
3 2 3   | 4 1
-----
  1 2 2
    4 2
    ---
    3 0
```

Dunque $3402_5 : 42_5 = 41_5$ con resto 30_5.

Verifica nel sistema decimale:

in base 5	$3402_5 : 42_5$	$= 41_5$	con Resto $= 30_5$
in base 10	$477 : 22$	$= 21$	con Resto $= 15$

✍ *Esercizi proposti:* 4.30, 4.31