Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SoSe 2025**

Lineare Algebra II

Vorlesung 38

Bilinearformen

Reelle Skalarprodukte sind positiv definite symmetrische Bilinearformen. Hier besprechen wir Bilinearformen allgemein. Neben Skalarprodukten sind die Hesse-Formen wichtig, die in der höherdimensionalen Analysis betrachten werden, um Extrema zu bestimmen und die Minkowski-Formen, mit denen man die spezielle Relativitätstheorie beschreiben kann (siehe Vorlesung 40).

Definition 38.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow K,\, (v,w) \longmapsto \langle v,w \rangle \, ,$$

heißt *Bilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\, w \longmapsto \langle v,w \rangle \, ,$$

und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle v,w \rangle \, ,$$

K-linear sind.

Bilinear bedeutet einfach multilinear in zwei Komponenten, diese Eigenschaft haben wir schon im Zusammenhang mit Determinanten kennengelernt. Ein extremes Beispiel ist die *Nullform*, die jedem Paar den Nullwert zuordnet. Es ist einfach, eine Vielzahl von Bilinearformen auf dem K^n anzugeben.

Beispiel 38.2. Es sei $V = K^n$ und seien $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i,j \leq n$ fixiert. Dann ist die Zuordnung

$$\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \longmapsto \Psi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

eine Bilinearform. Bei

$$a_{ij} = 0$$

für alle i,j ist dies die Nullform; bei

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ falls } i = j \, , \\ 0 \text{ sonst} \, , \end{cases}$$

liegt das Standardskalarprodukt vor (wobei der Ausdruck für jeden Körper einen Sinn ergibt, aber die Eigenschaft, positiv definit zu sein, gegenstandslos ist). Bei $n = 4$ und

$$\Psi(x_1, \ldots, x_4, y_1, \ldots, y_4) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 - x_4y_4$$

spricht man von einer *Minkowski-Form*. Bei $n = 2$ und

$$\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1y_2 - x_2y_1$$

handelt es sich um die Determinante im zweidimensionalen Fall.

Eine wichtige Eigenschaft von Bilinearformen, die Skalarprodukte erfüllen, wird in der nächsten Definition formuliert.

Definition 38.3. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow K,\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle\,,$$

heißt *nicht ausgeartet*, wenn für alle $v \in V$, $v \neq 0$, die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ w \longmapsto \langle v, w \rangle\,,$$

und für alle $w \in V$, $w \neq 0$, die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow K,\ v \longmapsto \langle v, w \rangle\,,$$

nicht die Nullabbildung sind.

Wir werden in Lemma 38.5 für Vektorräume, auf denen eine nicht-ausgeartete Bilinearform gegeben ist, eine bijektive Beziehung zwischen Vektoren und Linearformen beweisen. Dies gilt insbesondere für Skalarprodukte. Generell besteht eine enge Beziehung zwischen Bilinearformen und linearen Abbildungen in den Dualraum.

Lemma 38.4. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit dem Dualraum V^*. Es sei*

$$\Theta \colon V \longrightarrow V^*$$

eine lineare Abbildung. Dann ist durch

$$\Psi(u, v) = (\Theta(u))(v)$$

eine Bilinearform auf V gegeben.

Beweis. Da $\Theta(u) \in V^*$ ist, liefert die Auswertung an einem Vektor $v \in V$ ein Element des Grundkörpers. Die Linearität in der zweiten Komponenten beruht direkt darauf, dass $\Theta(u)$ zum Dualraum gehört, und die Linearität in der ersten Komponenten beruht auf der Linearität von Θ. $\square$

Der Gradient

Lemma 38.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum, der mit einer Bilinearform $\langle -,- \rangle$ versehen sei. Dann gelten folgende Aussagen*

(1) *Für jeden Vektor $u \in V$ sind die Zuordnungen*
$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle u,v \rangle\,,$$
und
$$V \longrightarrow K,\, v \longmapsto \langle v,u \rangle\,,$$
K-linear.

(2) *Die Zuordnung*
$$V \longrightarrow V^*,\, u \longmapsto \langle u,- \rangle\,,$$
ist K-linear.

(3) *Wenn $\langle -,- \rangle$ nicht ausgeartet ist, so ist die Zuordnung in (2) injektiv. Ist V zusätzlich endlichdimensional, so ist diese Zuordnung bijektiv.*

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus der Bilinearität. (2). Es seien $u_1, u_2 \in V$ und $a_1, a_2 \in K$. Dann ist für jeden Vektor $v \in V$
$$\langle a_1u_1 + a_2u_2, v \rangle \,=\, a_1 \langle u_1, v \rangle + a_2 \langle u_2, v \rangle\,,$$
und dies bedeutet gerade die Linearität der Zuordnung. (3). Da die Zuordnung nach (2) linear ist, müssen wir zeigen, dass der Kern davon trivial ist. Es sei also $u \in V$ derart, dass $\langle u,- \rangle$ die Nullabbildung ist. D.h. $\langle u,v \rangle = 0$ für alle $v \in V$. Dann muss aber nach der Definition von nicht ausgeartet $u = 0$ sein. Wenn V endliche Dimension hat, so liegt eine injektive lineare Abbildung zwischen Vektorräumen der gleichen Dimension vor, und eine solche ist nach Korollar 11.9 bijektiv. □

Wenn es also in einem endlichdimensionalen Vektorraum eine fixierte nichtausgeartete Bilinearform gibt, so gibt es zu jeder Linearform einen eindeutig bestimmten Vektor, mit dem diese Linearform beschrieben werden kann. Genauer: es gibt dann einen Vektor $y \in V$ mit
$$L(v) \,=\, \langle y,v \rangle$$
für alle $v \in V$ und einen Vektor $z \in V$ mit
$$L(v) \,=\, \langle v,z \rangle\,.$$

In dieser Situation heißt y der *Linksgradient* zu L bezüglich der Bilinearform und z der *Rechtsgradient*. Bei einem Skalarprodukt und generell bei einer nichtausgearteten symmetrischen Bilinearform (siehe weiter unten) fallen die beiden Begriffe zusammen, man spricht von dem *Gradienten*. Für euklidische Vektorräume formulieren wir diese Beziehung noch einmal explizit.

Korollar 38.6. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und*

$$f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $w \in V$ mit

$$f(v) = \langle w, v \rangle .$$

Wenn $u_1, \ldots, u_n$ eine Orthonormalbasis von V und $f(u_i) = a_i$ ist, so ist dieser Vektor gleich $w = \sum_{i=1}^n a_i u_i$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 38.5 (3). Der Zusatz ist klar wegen

$$\langle w, u_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n a_j u_j, u_i \right\rangle = a_i = f(u_i).$$

□

Die Gramsche Matrix

Definition 38.7. Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis.

In Beispiel 38.2 bildet $(a_{ij})_{ij}$ die Gramsche Matrix bezüglich der Standardbasis des K^n. Wenn die Gramsche Matrix zu einer Bilinearform $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben ist, so kann man daraus $\langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i c_j \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n c_j \langle v_i, w_j \rangle \right) \\ &= (b_1, \ldots, b_n) G \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Man erhält also den Wert der Bilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des zweiten Vektors anwendet und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle = v^{\text{tr}} G w.$$

Lemma 38.8. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelten die Beziehungen*

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{tr} G A.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
\langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ir} v_i, \sum_{k=1}^{n} a_{ks} v_k \right\rangle \\
&= \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{ir} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_{ks} \langle v_i, v_k \rangle \right) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq n} a_{ir} (G \circ A)_{is} \\
&= \left(A^{\text{tr}} \circ (G \circ A) \right)_{rs}.
\end{aligned}$$

□

Symmetrische Bilinearformen

Definition 38.9. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine Bilinearform auf V. Die Bilinearform heißt *symmetrisch*, wenn

$$\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$$

für alle $v, w \in V$ gilt.

Wie im Fall eines Skalarproduktes gilt wieder eine *Polarisationsformel*.

Lemma 38.10. *Es sei K ein Körper mit einer von 2 verschiedenen Charakteristik und sei $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf einem K-Vektorraum V. Dann gilt die Beziehung*

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{2} (\langle v + w, v + w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 38.15. □

Definition 38.11. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf V. Dann nennt man zu einer Linearform

$$L\colon V \longrightarrow K$$

den eindeutig bestimmten Vektor $z \in V$ mit

$$L(v) = \langle z, v \rangle = \langle v, z \rangle$$

den *Gradienten* zu L bezüglich der Bilinearform.

Definition 38.12. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen *orthogonal*, wenn

$$\langle v, w \rangle = 0$$

ist.

Definition 38.13. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Eine Basis v_i, $i \in I$, von V heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

für alle $i \neq j$ ist.

Für eine symmetrische Bilinearform ist es durchaus möglich, dass, anders als bei Skalarprodukten, ein von 0 verschiedener Vektor zu sich selbst orthogonal ist. Es kann auch, im ausgearteten Fall, von 0 verschiedene Vektoren geben, die orthogonal zu allen Vektoren sind. Wie im Fall eines Skalarproduktes gibt es Orthogonalbasen.

Definition 38.14. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Der Untervektorraum

$$\{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in V\}$$

heißt *Ausartungsraum* zur Bilinearform.

Der Ausartungsraum ist in der Tat ein Untervektorraum von V, siehe Aufgabe 38.13.

Satz 38.15. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ eine symmetrische Bilinearform auf V. Dann besitzt V eine Orthogonalbasis.*

Beweis. Siehe Aufgabe 38.18. □

Der Vektorraum der Bilinearformen

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien Ψ_1 und Ψ_2 Bilinearformen auf V. Dann erklärt man die Summe dieser beiden Bilinearformen punktweise als diejenige Bilinearform, die an der Stelle (u, v) den Summenwert erhält, also

$$(\Psi_1 + \Psi_2)(u, v) := \Psi_1(u, v) + \Psi_2(u, v).$$

Entsprechend definiert man für einen Skalar $c \in K$ die Form $c\Psi$ durch

$$(c\Psi)(u, v) = c\Psi(u, v).$$

Die entstehenden Funktionen sind wieder bilinear, siehe Aufgabe 38.23. Damit erhält man eine Vektorraumstruktur auf der Menge aller Bilinearformen auf V.

Definition 38.16. Es sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Die Menge aller Bilinearformen auf V, versehen mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation, heißt *Vektorraum der Bilinearformen*. Er wird mit $\operatorname{Bilin}(V)$ bezeichnet.

Lemma 38.17. *Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Zu einer jeden Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ ist die Abbildung*

$$\operatorname{Bilin}(V) \longrightarrow \operatorname{Mat}_n(K),\ \Psi \longmapsto G_{\mathfrak{v}}(\Psi),$$

die einer Bilinearform Ψ ihre Gramsche Matrix bezüglich der gegebenen Basis zuordnet, eine Isomorphie von Vektorräumen.

Beweis. Die Injektivität der Abbildung folgt aus Lemma 16.6, die Surjektivität daraus, dass man eine beliebige Matrix im Sinne von Beispiel 38.2 als Bilinearform interpretieren kann. Die Linearität folgt unmittelbar aus der punktweisen Definition der Vektorraumstruktur auf $\operatorname{Bilin}(V)$. □

Sesquilinearformen

Definition 38.18. Es seien V und W Vektorräume über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Eine Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

heißt *antilinear* (oder *semilinear*), wenn

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v)$$

für alle $u, v \in V$ und wenn

$$\varphi(\lambda v) = \overline{\lambda}\varphi(v)$$

für alle $v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Wenn man die komplexen Vektorräume als reelle Vektorräume auffasst, so handelt es sich insbesondere um reell-lineare Abbildungen. Dieser Eigenschaft sind wir schon bei komplexen Skalarprodukten begegnet.

Definition 38.19. Es sei V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{C},\ (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle ,$$

heißt *Sesquilinearform*, wenn für alle $v \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow \mathbb{C},\ w \longmapsto \langle v, w \rangle ,$$

$\mathbb{C}$-antilinear und für alle $w \in V$ die induzierten Abbildungen

$$V \longrightarrow \mathbb{C},\ v \longmapsto \langle v, w \rangle ,$$

$\mathbb{C}$-linear sind.

Wir fordern also die Linearität in der ersten und die Antilinearität in der zweiten Komponenten. Es gibt auch die andere Konvention.

Viele Begriffe und Aussagen übertragen sich mit leichten Abwandlungen von der reellen auf die komplexe Situation.

Definition 38.20. Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einer Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann heißt die $n \times n$-Matrix

$$\langle v_i, v_j \rangle_{1 \leq i,j \leq n}$$

die *Gramsche Matrix* von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basis.

Wenn die Gramsche Matrix zu einer Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$ bezüglich einer Basis $v_1, \ldots, v_n$ gegeben ist, so kann man daraus $\langle v, w \rangle$ für beliebige Vektoren berechnen. Man schreibt $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n c_i v_i$ und erhält mit dem allgemeinen Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n b_i v_i, \sum_{j=1}^n c_j v_j \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_i \overline{c_j} \langle v_i, w_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n b_i \left(\sum_{j=1}^n \overline{c_j} \langle v_i, w_j \rangle \right) \\ &= (b_1, \ldots, b_n) G \begin{pmatrix} \overline{c_1} \\ \vdots \\ \overline{c_n} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Man erhält also den Wert der Sesquilinearform an zwei Vektoren, indem man die Gramsche Matrix auf das Koordinatentupel des komplex-konjugierten zweiten Vektors anwendet und das Ergebnis (ein Spaltenvektor) mit dem Koordinatentupel des ersten Vektors als Zeilentupel von links multipliziert. Kurz und ungenau ist also

$$\langle v, w \rangle = v^{\text{tr}} G \overline{w}.$$

Lemma 38.21. *Es sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit einer Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$. Es seien $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_n$ Basen von V und es seien G bzw. H die Gramschen Matrizen von $\langle -, - \rangle$ bezüglich dieser Basen. Zwischen den Basiselementen gelte die Beziehungen*

$$w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i,$$

die wir durch die Übergangsmatrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ ausdrücken. Dann besteht zwischen den Gramschen Matrizen die Beziehung

$$H = A^{tr} G \overline{A}.$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \langle w_r, w_s \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_{rj} v_j, \sum_{k=1}^{n} a_{sk} v_k \right\rangle \\ &= \sum_{1 \leq j,k \leq n} a_{rj} \overline{a_{sk}} \langle v_j, v_k \rangle \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} a_{rj} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} \overline{a_{sk}} \langle v_j, v_k \rangle \right) \\ &= \left(A^{\text{tr}} \circ \left(G \circ \overline{A} \right) \right)_{rs}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 38.22. Die Menge der Sesquilinearformen auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V bilden einen $\mathbb{C}$-Vektorraum. Er wird mit $\operatorname{Sesq}(V)$ bezeichnet.

Hermitesche Formen

Definition 38.23. Eine Sesquilinearform $\langle -, - \rangle$ auf einem komplexen Vektorraum V heißt *hermitesch*, wenn

$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$$

für alle $u, v \in V$ ist.

Definition 38.24. Eine quadratische komplexe Matrix

$$M = (a_{ij})_{ij}$$

heißt *hermitesch*, wenn

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

für alle i, j gilt.

Abbildungsverzeichnis