Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

Aufgabe 12.2. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und π um die x-Achse gedreht wird.

Aufgabe 12.3.*

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die t-Achse rotieren lässt.

Aufgabe 12.4. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die y-Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu $y = h$ „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von $h \geq 0$.

Aufgabe 12.5.*

Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 12.6. Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.

Aufgabe 12.7. Beweise Satz 12.3 für stetige Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ direkt über Treppenfunktionen und Überpflasterungen des Rotationskörpers.

Aufgabe 12.8.*

Häuptling Winnetou möchte sich ein neues Tipi über einer quadratischen Grundfläche von 3×3 Metern errichten. Er verwendet dafür vier Stangen mit einer Länge von 5 Metern, die in den Eckpunkten der Grundfläche stehen und sich in der Zeltspitze treffen sollen.

a) Wie viel Quadratmeter Büffelhaut wird für das Zeltdach gebraucht?

b) Wie viel Kubikmeter Rauminhalt hat das neue Zelt?

Aufgabe 12.9.*

Ein Eimer steht im Garten, gestern abend war er leer. Der Eimer ist 30 cm hoch, er hat am Boden einen Durchmesser von 20 cm und oben am Rand einen Durchmesser von 25 cm. Über Nacht hat es 5 cm geregnet. Wie hoch ist der Wasserstand im Eimer am Morgen?

Aufgabe 12.10. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man aus dem Einheitszylinder, dessen Grundfläche eine Einheitskreisscheibe ist und der die Höhe 1 besitzt, den (offenen) Kegel herausnimmt, der den oberen Zylinderdeckel als Grundfläche und den unteren Kreismittelpunkt als Spitze besitzt.

Aufgabe 12.11. Es sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus $\mathbb{R}$). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

$$M = \{(x, f(x)\cos\alpha, f(x)\sin\alpha) \mid x \in [a,b],\, \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3\,,$$

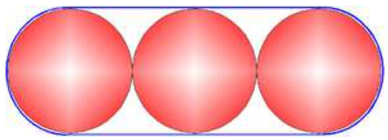
das Volumen 0 besitzt.

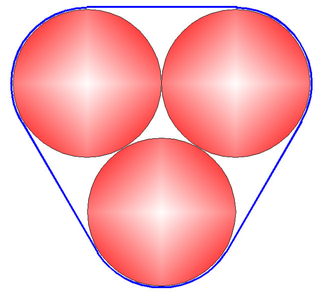
Aufgabe 12.12.*

Es sollen drei Kugeln mit Radius 1 straff in eine Folie eingepackt werden. Berechne das Volumen des Gesamtpakets, wenn

a) die Kugeln linear und anliegend angeordnet werden,

b) die Kugeln als Dreieck anliegend angeordnet werden.





Aufgabe 12.13. Wo liegt der Fehler in Beispiel 12.7?

Für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir bisher nur das n-dimensionale Volumen $\lambda^n(T)$ zur Verfügung. Viele „niedrigerdimensionale" Teilmengen wie die Kugeloberfläche besitzen dabei das Volumen 0, denen man aber gerne auch einen passenden „niedrigerdimensionalen" Inhalt zuordnen möchte. Für Kurven haben wir in Analysis II einen adäquaten Längenbegriff entwickelt, siehe Satz 38.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), für d-dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten wird eine entsprechende Theorie in der Differentialgeometrie entwickelt. Hier werden wir an einigen Beispielen die Idee verfolgen, durch Verdickungen von T und einen geeigneten Limesprozess zu einem niedrigerdimensionalen Inhalt zu gelangen. Zu $\epsilon > 0$ nennen wir

$$T(\epsilon) := \bigcup_{P \in T} U(P, \epsilon)$$

die ϵ-*Verdickung* von T.

Aufgabe 12.14. Wir betrachten die lineare Verbindungsstrecke S zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Zeige, dass

$$\frac{\lambda^n(S(\epsilon))}{\epsilon^{n-1}\beta_{n-1}}$$

für $\epsilon \to 0$ gegen die Länge von S konvergiert.

Aufgabe 12.15. Es sei

$$\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$n \geq 2$, eine stetig differenzierbare Kurve mit dem Bild $S = \gamma([a, b])$. Zeige, dass

$$\frac{\lambda^n(S(\epsilon))}{\epsilon^{n-1}\beta_{n-1}}$$

für $\epsilon \to 0$ gegen die Kurvenlänge konvergiert.

Aufgabe 12.16. Die Ableitung des Flächeninhaltes πr^2 des Kreises mit Radius r ist $2\pi r$, also der Umfang des Kreises. Die Ableitung des Volumens $\frac{4}{3}\pi r^3$ der Kugel mit Radius r ist $4\pi r^2$, also der Flächeninhalt der Kugeloberfläche. Es sei $T(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ die Kugeloberfläche der allgemeinen Kugel $B(r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Zeige (für $0 < \epsilon < r$)
$$(T(r))(\epsilon) = U(0, r+\epsilon) \setminus B(0, r-\epsilon)\,.$$
(2) Zeige, dass
$$\frac{\lambda^n((T(r))(\epsilon))}{2\epsilon}$$
für $\epsilon \to 0$ gegen die Ableitung der Formel für die allgemeine n-dimensionale Kugel mit Radius r konvergiert.
(3)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.17. (5 Punkte)

Es sei K die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in $(0, R)$ und dem Radius $0 < r < R$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich K um die x-Achse dreht.

Aufgabe 12.18. (6 Punkte)

Es sei V der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in $(1, 0)$, dem Radius 1 und den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man V um die y-Achse dreht.

Aufgabe 12.19. (5 Punkte)

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(3, 4)$, $(5, 5)$ und $(4, 6)$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man D um die x-Achse dreht.

Aufgabe 12.20. (2 Punkte)

Zeige
$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\operatorname{Fak}(n/2)}$$
durch Induktion über n unter Verwendung von Beispiel 12.4 und Satz 32.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Abbildungsverzeichnis