於テ9去法ト稱スルモノヲ包含ス.

111. r ヲ根トセル紀數法ニテ顯ハセル整數ヲ $r+1$ ニテ除シ,次ニ其整數ノ奇數位(第壹位,第三位,第五位等)ニアル總テノ數ノ和ト偶數位(第貳位,第四位,第六位等)ニアル總ベテノ數ノ和トノ差ヲ $r+1$ ニテ除スルキハ其貳ツノ剩餘ハ相ヒ等シキカ又ハ其貳ツノ剩餘ノ和ハ $r+1$ ニ等シカルベシ.

前ト同シ記號ヲ用ユルキハ

$$\mathrm{N}=d_0+d_1r+d_2r^2+\cdots\cdots+d_{n-1}r^{n-1}+d_nr^n$$
$$=d_0-d_1+d_2-d_3+\cdots\cdots+(-1)^nd_n$$
$$+d_1(r+1)+d_2(r^2-1)+d_3(r^3+1)+\cdots\cdots+d_n\{r^n-(-1)^n\}$$

故ニ此式ノ兩節ヲ $r+1$ ニテ除スルキハ

$$\frac{\mathrm{N}}{r+1}=\frac{d_0-d_1+d_2-d_3+\cdots\cdots+(-1)^nd_n}{r+1}$$
$$+d_1+d_2(r+1)+d_3(r^2-r+1)+\cdots\cdots+d_n\cdot\frac{r^n-(-1)^n}{r+1}$$

今 $\frac{r^2-1}{r+1},\ \frac{r^3+1}{r+1},\ \frac{r^4-1}{r+1},\cdots\cdots,\frac{r^n-(-1)^n}{r+1}$ ハ總テ整數ナリ,因リテ

$$\frac{\mathrm{N}}{r+1}=\text{整數}+\frac{d_0-d_1+d_2-d_3+\cdots\cdots+(-1)^nd_n}{r+1}$$

此式ノ右節ノ第貳項ノ分子ナル $d_0-d_1+d_2-d_3+\cdots\cdots+(-1)^nd_n$ ハNノ奇數位ニアル總テノ數ノ和ト偶數位ニアル總テノ數ノ和トノ差ニ等シ今此差ガ正量ニシテ $+\mathrm{D}$ ニ等シトセバ

$$\frac{\mathrm{N}}{r+1}=\text{整數}+\frac{\mathrm{D}}{r+1}$$

仍テNヲ $r+1$ ニテ除セルキノ剩餘ハDヲ $r+1$ ニテ除セルキノ剩餘ニ等シ.

次ニ $d_0-d_1+d_2-d_3+\cdots\cdots+(-1)^nd_n$ ガ若シ負量ニシテ $-\mathrm{D}$ ニ等シキキハ

$$\frac{\mathrm{N}}{r+1}=\text{整數}-\frac{\mathrm{D}}{r+1}$$

トナル故ニ

$$\frac{\mathrm{N}}{r+1}+\frac{\mathrm{D}}{r+1}=\text{整數}$$

仍テN,Dヲ $r+1$ ニテ除セバ其剩餘ハ貳ツナガラ0トナルカ又ハ其剩餘ハ相加ヘテ $r+1$ ニ等シカラザルヲ得ズ何ントナレバN,Dガ貳ツナガラ $r+1$ ニテ割リ切レルカ又ハN,Dヲ $r+1$ ニテ除セルキノ剩餘ヲ相加ヘテ $r+1$ トナルニアラザレバ

$$\frac{\mathrm{N}}{r+1}+\frac{\mathrm{D}}{r+1}$$

ハ決シテ整數トナルヿ能ハザレバナリ.

貳ツノ剩餘ガ合セテ $r+1$ ニ等シクナル場合ニ於テハ壹ツノ剩餘ヲ $r+1$ ヨリ減セバ其差ハ他ノ剩餘ニ等シカルベシ.

通常紀數法ノ場合ニ於テハ $r=10$ ナリ故ニ此場合ニ於テハ本欵ノ定則ハ次ノ如クナルベシ.

或ル整數ノ奇數位ノ總テノ數ノ和ト偶數位ノ總テノ數ノ和トノ差ヲ11ニテ除スルキハ其剩餘ハ本數ヲ11ニテ除スルキノ剩餘ニ等シキカ又ハ此貳ツノ剩餘ノ和ハ11ニ等シカルベシ.

例ヘバ5182619ヲ11ニテ除スルキハ其剩餘ハ2トナル又此數ノ奇數位ノ總テノ數ノ和9+6+8+5ヨリ偶數位ノ總テノ數ノ和1+2+1ヲ減シ其差24ヲ11ニテ除スルキハ其剩餘モ又タ2トナリテ前ニ得タル剩餘ニ同シ.

827391ヲ11ニテ除スルキハ其剩餘ハ4トナル又此數ノ奇數位ノ總テノ數ノ和1+3+2ト其偶數位ノ總テノ數ノ和9+7+8ト相ヒ減ズルキハ18トナル之ヲ11ニテ除スルキハ其剩餘ハ7トナル而シテ此剩餘7ト前ノ剩餘4ト相加フルキハ11トナル,此例ノ如ク奇數位ノ數ノ和ノ方ガ偶數位ノ數ノ和ヨリ小ナルキハ常ニ其差ヲ11ニテ除セルキノ剩餘ヲ11ヨリ減セバ本數ヲ11ニテ除セルキノ剩餘ト同シキモノトナルベシ.

此定則ハ算術ニ於テ通常11去法ト稱セルモノナリ.

問題

(1) 拾進法ノ 1357531 ヲ 5 進法ニテ顯ハセ。

(2) 拾進法ノ 333310 ヲ 11 進法ニテ顯ハセ。

(3) 5 進法ノ 4444 ヲ通常ノ數ニ化セヨ.

(4) 拾進法ノ 1845·3125 ヲ 12 進法ニテ顯ハセ.

(5) 9 進法ニテ 17832126÷4685 ノ運算ヲナシ其商ヲ算出セヨ。

(6) 6 進法ニテ 33224 ノ平方根ヲ算出セヨ.

(7) 2 進法ノ 11000000100001 ノ平方根ヲ算出セヨ.

(8) 通常ノ數 95 ハ幾進法ニテ顯ハス𪜈 137 トナルカ.

(9) r ヲ根トセル組數法ニテ顯ハセル三位ノ數ノ平方ト其數ヲ逆書セル數ノ平方トノ差ハ r^2-1 ニテ割リ切ルヿヲ得ベシ其證ヲ求ム。

(10) 7 進法ニテ顯ハセル三位ノ數アリ之ヲ 11 進法ニテ顯ハス𪜈ハ其數字ノ順序顚例スト云フ其數如何.

(11) 5 進法ニテ顯ハセル數 $4\cdot4\dot{4}\dot{0}$ ヲ如何ナル組數法ニテ顯ハシナバ $4\cdot5\dot{4}$ トナルベキヤ.

(12) n 個ノ物体アリ其重サハ 1 斤, 2 斤, 4 斤, 8 斤,……2^n斤ナリ此物体ヲ如何ニ組ミ合セナバ 1719 斤トナルカ.

(13) 1155 ニテ顯ハセル數ガ 12 ニテ顯ハセル數ヲ以テ割リ切レルハ幾進法ニ於テ繙ルヤ.

(14) r ヲ根トセル組數法ニ於テハ

$$\frac{1}{(r-1)^2}=\cdot\dot{0}123\cdots\cdots(r-3)(r-\dot{1})$$

トナリテ其右節ノ循環小數中ニハ $r-2$ ノ外ノ總テノ數ハ現出スルヿヲ證セヨ。

問題解答

(1)

$$\begin{array}{r|rl}
5 & 1357531 & \\ \hline
5 & 271506 & \cdots\cdots 1 \\ \hline
5 & 54301 & \cdots\cdots 1 \\ \hline
5 & 10860 & \cdots\cdots 1 \\ \hline
5 & 2172 & \cdots\cdots 0 \\ \hline
5 & 434 & \cdots\cdots 2 \\ \hline
5 & 86 & \cdots\cdots 4 \\ \hline
5 & 17 & \cdots\cdots 1 \\ \hline
 & 3 & \cdots\cdots 2
\end{array}$$

仍テ所要ノ答數ハ 321420111 ナリ.

(2)

$$\begin{array}{r|rl}
11 & 333310 & \\ \hline
11 & 30300 & \cdots\cdots 10 \\ \hline
11 & 2754 & \cdots\cdots 6 \\ \hline
11 & 250 & \cdots\cdots 4 \\ \hline
11 & 22 & \cdots\cdots 8 \\ \hline
 & 2 & \cdots\cdots 0
\end{array}$$

仍テ所要ノ答數ハ 20846t ナリ。

(3) 5 進法ノ 4444 ハ $4\times5^3+4\times5^2+4\times5+4$ ニ等シ是ヲ算出スル𪜈ハ $500+100+20+4$ トナル故ニ所要ノ答數ハ 624 ナリ.

又之ヲ次ノ如ク算スルモ可ナリ

$$4\times5+4=24,\quad 24\times5+4=124,\quad 124\times5+4=624.$$

(4) 整數部ト小數部トヲ別々ニ運算スル𪜈ハ次ノ如シ

$$\begin{array}{r|rl}
12 & 1845 & \\ \hline
12 & 153 & \cdots\cdots 9 \\ \hline
12 & 12 & \cdots\cdots 9 \\ \hline
 & 1 & \cdots\cdots 0
\end{array}$$

$\cdot3125\times12=3\cdot75$

$\cdot75\times12=9.$

仍テ所要ノ答數ハ 1099·39 ナリ.

(5) 9 進法ニ於テハ 9 ニ滿ツル毎ニ之ヲ上位ニ進ムガ故ニ

$1\times2=2,\quad 1\times3=3,\quad 1\times4=4,\quad 1\times5=5,\quad 1\times6=6,\quad 1\times7=7,\quad 1\times8=8,$

$2\times2=4,\quad 2\times3=6,\quad 2\times4=8,\quad 2\times5=11,\quad 2\times6=13\quad 2\times7=15,\quad 2\times8=17,$

$3\times3=10,\quad 3\times4=13,\quad 3\times5=16,\quad 3\times6=20,\quad 3\times7=23,\quad 3\times8=26,\quad 4\times4=17,$

$4\times5=22,\quad 4\times6=26,\quad 4\times7=31,\quad 4\times8=35,\quad 5\times5=27,\quad 5\times6=33,\quad 5\times7=38,$

$5\times8=44,\quad 6\times6=40,\quad 6\times7=46,\quad 6\times8=53,\quad 7\times7=54,\quad 7\times8=62,\quad 8\times8=71,$

此單位數ノ積ヲ應用シ通常ノ乘算法ニ倣テ運算ヲナス𪜈ハ次ノ如シ.

```
          3483
4685 /17832126
      15276
       25451
       21072
        43682
        42154
         15276
         15276
             0
```

仍テ所要ノ答數ハ 3483 ナリ.

解. 4685 ヲ以テ 17832 ヲ除シ商ノ第壹數トシテ 3 ヲ得,是ヲ 4685 ニ乘シテ 17832 ヨリ減ズ儲テ 4685 ニ 3 ヲ乘センタメ先ヅ 5 ニ 3 ヲ乘ズル𪜈ハ 3×5=16 ナルニヨリ積ノ第壹位ノ數トシテ 6 ヲ得テ 1 ヲ上位ニ進ム次ニ被乘數ノ第貳位ノ 8 ニ 3 ヲ乘ズルトキハ 3×8=26 トナル之ニ下位ヨリ送リ來レル 1 ヲ加ヘテ 7 ヲ積ノ第貳位ノ數トシ 2 ヲ上位ニ進ム,次ニ被乘數ノ第三位ノ 6 ニ 3 ヲ乘ズル𪜈ハ 3×6=20 トナル之ニ下位ヨリ送リ來レル 2 ヲ加ヘテ 2 ヲ積ノ第三位ノ數トス,次ニ被乘數ノ首位ノ數 4 ニ 3 ヲ乘ズル𪜈ハ 3×4=13 トナル之ニ下位ヨリ送リ來レル 2 ヲ加ヘ 15 トナルヲ第四位,第五位ニ記スル𪜈ハ 4685 ト 3 トノ積トシテ 15276 ヲ得,之ヲ 17832 ヨリ減ズルニハ被減數ノ第壹位ノ 2 ヨリ減數ノ第壹位ノ數 6 ヲ減クヿ能ハザルヲ以テ上位ヨリ上數ノ 1 單位即チ 9 ヲ借リ來リテ之ヲ 2 ニ加ヘ其内 6 ヲ減シテ 5 トナス其他ノ位ニ於テモ此ノ如クスル𪜈ハ剩餘トシテ 2545 ヲ得ベシ餘ハ皆ナ之ニ準ジテ知ルベシ.

(6) 6 進法ノ 33224 ヲ通常ノ數ニ化シ終ル後ヲ其平方根ヲ算出シ其數ヲ復タ 6 進法ニテ顯ハス𪜈ハ所要ノ答數ヲ得ベシ次ノ算式ノ如シ

$$3\times6+3=21,\quad 21\times6+2=128,\quad 128\times6+2=770,\quad 770\times6+4=4624,$$

```
  6      √46,24=68.      6)68
  6       36             6)11 ··········2
 ---     ----              1 ··········5
 128     1024
   8     1024
         ----
```

仍テ所要ノ平方根ハ 152 ナリ.

(7) 前問題解ノ如クスル𪜈ハ次ノ如シ

$$11000000100001=1\times2^{13}+1\times2^{12}+1\times2\ +1$$
$$=8192+4096+32+1$$
$$=12321$$

```
  1       √1,23,21=111     2)111
  1        1               2) 55 ··········1
 ---      ---              2) 27 ··········1
 21        23              2) 13 ··········1
  1        21              2)  6 ··········1
 ---      ----             2)  3 ··········0
 221       221                 1 ··········1
   1       221
          ----
```

仍テ所要ノ平方根ハ 1101111 ナリ.

(8) r ヲ所要ノ記數法ノ根トスル𪜈ハ其記數法ノ 137 ハ r^2+3r+7 ニ等シ故ニ題意ニヨリテ

$$r^2+3r+7=95$$

項ヲ移シテ $\quad r^2+3r-88=0$

是ヨリ $\quad r=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+4\times88}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{361}}{2}$

$$=\frac{-3\pm19}{2}=8 \text{ 又ハ } -11.$$

−11 ハ題意ニ適セズ.

仍テ所要ノ記數法ハ 8 進法ナリ.

(9) 一數ヲ ar^2+br+c トスル𪜈ハ他ノ一數ハ cr^2+br+a ナリ故ニ此兩數ノ平方ノ差ハ次ノ如シ

$$(ar^2+br+c)^2-(cr^2+br+a)^2$$
$$=a^2r^4+2abr^3+(b^2+2ac)r^2+2bcr+c^2$$
$$-\{c^2r^4+2bcr^3+(b^2+2ac)r^2+2abr+a^2\}$$
$$=a^2(r^4-1)+2abr(r^2-1)-2bcr(r^2-1)-c^2(r^4-1)$$
$$=(r^2-1)\{(a^2-c^2)(r^2+1)+2b(a-c)r\}$$

此式ノ右節ヲ見ル𪜈ハ $(ar^2+br+c)^2$ 及ビ $(cr^2+br+a)^2$ ノ差ハ r^2-1 ニテ割リ切レルヿヲ知ルベシ之ヲ所要ノ證トス.

(10) 7 進法ニテ顯ハセル三位ノ數ヲ $7^2x+7y+z$ トセバ 11 進法ニテ之

ヲ顯ハスヰハ $11^2z+11y+x$ トナラザルベカラズ故ニ

$$7^2x+7y+z=11^2z+11y+x$$

是ヨリ　$48x-4y-120z=0$

故ニ　$12x-y-30z=0$

仍テ　$y=6(2x-5z)$

此式ニヨリテ觀ルヰハ y ハ 6 ノ倍數トナルカ又ハ 0 ナラザルベカラズ然ルニ 7 進法ニ於テハ其或位ノ數ニハ 6 ヨリ大ナル數アルベキ筈ナシ故ニ y ハ 6 カ又ハ 0 ナラザルベカラズ.

y ヲ 6 トスルヰハ上式ヨリ $2x-5z=1$ ヲ得, 仍テ $2x-1=5z$ トナル故ニ $2x-1$ ハ 5 ノ倍數ナラザルヲ得ズ然ルニ x ハ 6 ヨリ大ナルヿヲ得ザルガ故ニ x ノ適當ナル値ハ $x=3$ ノ場合アルノミ今 $x=3$ トナスヰハ $2x-1=5z$ ヨリ $z=1$ ヲ得, 仍テ所要ノ答數ハ 361 ナリ.

次ニ y ヲ 0 トスルヰハ $2x=5z$ ナリ然ルニ x ハ 6 ヨリ大ナルヿ能ハザルヲ以テ x ノ適當ナル値ハ $x=5$ ノ場合アルノミ而シテ此場合ニ於テハ $z=2$ ナリ仍テ所要ノ答數ハ 502 ナリ.

故ニ所要ノ答數ハ 361 及ビ 502 ナリ.

(11) 整數部ハ貳ツノ數ニ於テ相ヒ同シ故ニ唯其小數部ノミヲ調プレバ可ナリ今 $\cdot\dot{4}4\dot{0}$ ヲ假リニ F トスルヰハ 5 進法ノ計算ニ於テハ次ノ如シ

$$1000F=440\cdot\dot{4}\dot{0}.$$

$$10F=4\cdot\dot{4}\dot{0}.$$

此兩式相減シテ

$$(1000-10)F=440\cdot\dot{4}\dot{0}-4\cdot\dot{4}\dot{0}.$$

則チ　$440F=440-4=431.$

故ニ　$F=\dfrac{431}{440}.$

此分數ノ分子, 分母ヲ通常ノ數ニ化スルヰハ次ノ如シ

$$4\times5+3=23,\qquad 23\times5+1=116;$$

$$4\times5+4=24,\qquad 24\times5+0=120$$

故ニ 5 進法ノ $\dfrac{431}{440}$ ハ通常ノ分數 $\dfrac{116}{120}$ 即チ $\dfrac{29}{30}$ ニ等シ.

又 r 進法ノ $\cdot5\dot{4}$ ヲ假リニ F′ トスルヰハ r 進法ノ計算ニ於テ

$$r^2F'=54\;,\qquad rF'=5\cdot\dot{4}$$

故ニ　$(r^2-r)F'=54\cdot\dot{4}-5\cdot\dot{4}=54-5$

仍テ　$F'=\dfrac{5r+4-5}{r^2-r}=\dfrac{5r-1}{r^2-r}$

是ヨリ題意ニヨリテ

$$\frac{29}{30}=\frac{5r-1}{r^2-r}$$

分母ヲ去リテ　$29r^2-29r=150r-30$

項ヲ移シテ　$29r^2-179r+30=0$

即チ　$(r-6)(29r-5)=0$

故ニ　$r=6$ 又ハ $\dfrac{5}{29}$

$\dfrac{5}{29}$ ハ明カニ題意ニ適セズ.

仍テ所要ノ紀數法ハ 6 進法ナリ.

(12)

$$\begin{array}{r|l} 2 & 1719 \\ \hline 2 & 859 \cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 429 \cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 214 \cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 107 \cdots\cdots 0 \\ \hline & 53 \cdots\cdots 1 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 2 & 53 \\ \hline 2 & 26 \cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 13 \cdots\cdots 0 \\ \hline 2 & 6 \cdots\cdots 1 \\ \hline 2 & 3 \cdots\cdots 0 \\ \hline & 1 \cdots\cdots 1 \end{array}$$

故ニ　$1719=2^{10}+2^9+2^7+2^5+2^4+2^2+2+1.$

仍テ 1 斤, 2 斤, 2^2 斤, 2^4 斤, 2^5 斤, 2^7 斤, 2^9 斤, 2^{10} 斤ノ物体ヲ組ミ合セバ可ナリ.

(13) r ヲ所要ノ紀數法ノ根トスルヰハ 1155 ハ r^3+r^2+5r+5 ニシテ 12 ハ $r+2$ ナリ今前式ヲ後式ニテ除スルヰハ商トシテ r^2-r+7, 剩餘トシテ -9 ヲ得, 故ニ

$$r^3+r^2+5r+5=(r+2)(r^2-r+7)-9$$

ナリ仍テ r^3+r^2+5r+5 ガ $r+2$ ニテ整除シ得ラレン爲メニハ 9 ガ $r+2$ ニテ整除シ得ラレザルベカラズ故ニ $r+2=9$ 又ハ $r+2=3$ ナリ仍テ r ノ値ハ 7 又ハ 1 ナリ然ル 1 ハ題意ニ適セズ.

是ニ由テ所要ノ紀數法ハ 7 進法ナリ.

(14)　假リニ

$$F=\cdot\dot{0}123\cdots\cdots\cdots(r-4)(r-3)(r-\dot{1}).$$

トスル𪜈ハ r 進法ノ計算ニ於テ

$$rF=\cdot\dot{1}234\cdots\cdots\cdots(r-3)(r-1)\dot{0}.$$

トリ今此兩式相減スル𪜈ハ

$$(r-1)F=\cdot11111\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{r-1}$$

故ニ　$$F=\frac{1}{(r-1)^2}$$

是ヲ所要ノ數トス。

第五編

秩列及ビ配合

秩列

112. 秩列　n 個ノ物アリ之ヲ r 個宛出來得ル限リ種々ノ順序ニ列ブル𪜈ハ總テノ列ベ方ヲ n 個ノ物ヲ r 個宛組ミ合セタル秩列ト云フ.

秩列ノ算法ハ初學者ノ多ク困難ヲ感ズルモノナリ依テ詳密ニ之ヲ解示スベシ.

貳個ノ物 a, b ヲ壹ツ宛列ブルトキハ明カニ a, b ノ貳種アルノミ.

貳個ノ物 a, b ヲ貳ツ宛列ブル𪜈ハ ab, ba ノ貳種アリ而〆此二個宛ノ列ベ方ヲ作ルニハ先ヅ貳個ノ物 a, b ヲ壹ツ宛列ベタルモノナル b, a ノ前ニ夫々 a, b ヲ附記セバ可ナリ.

三個ノ物 a, b, c ヲ壹ツ宛列ブル𪜈ハ a, b, c ノ三種アリ.

三個ノ物 a, b, c ヲ貳ツ宛列ブル𪜈ハ

$$ab,\ ac;\ ba,\ bc;\ ca,\ cb$$

ノ六種アリ而〆此六種ノ列ベ方ヲ作ルニハ先ヅ a, b, c ノ a ヲ書キ去リタル殘リノ字母 b, c ノ前ニ a ヲ附記シテ ab, ac ヲ作リ, 次ニ b ヲ書キ去リタル殘リノ字母 a, c ノ前ニ b ヲ附記シテ ba, bc ヲ作リ, 終リニ c ヲ書キ去リタル殘リノ字母 a, b ノ前ニ c ヲ附記シテ ca, cb ヲ作レバ可ナリ此ノ如クスル𪜈ハ明カニ三個ノ物ヲ貳ツ宛列ベタル總テノ列ベ方ヲ得ベシ何ントナレバ ab, ac ハ a ナル物ガ第壹ニ列スル總テノ列ベ方ヲ盡シ ba, bc ハ b ガ第壹ニ列スル總テノ列ベ方ヲ盡シ同理ニヨリ, ca, cb ハ c ガ第壹ニ列スル總テノ列ベ方ヲ盡セバナリ.

此作リ方ヨリ三個ノ物ヲ貳ツ宛列ベタル總テノ列ベ方ノ數ハ 3×2 ニ等シキヿ明カナリ.

三個ノ物 a, b, c ヲ三ツ宛列ブル𪜈ハ

$$abc,\ acb;\ \ bac,\ bca;\ \ cab,\ cba$$

ノ六種アリ而シテ此列ベ方ハ第壹,a ヲ省キ去リタル殘リノ字母 b, c ヲ出來得ル限リ貳ツ宛列ベテ bc, cb ヲ作リ其前ニ a ヲ附記シテ abc, acb ヲ得
第貳,b ヲ省キ去リタル殘リノ字母 a, c ヲ出來得ル限リ貳ツ宛列ベテ ac, ac ヲ作リ其前ニ b ヲ附記シテ bac, bca ヲ得,
第三,c ヲ省キ去リタル殘リノ字母 a, b ヲ出來得ル限リ貳ツ宛列ベテ ab, ba ヲ作リ其前ニ c ヲ附記シテ cab, cba ヲ得タルナリ.

此秩列ノ作リ方ヨリ三個ノ物ヲ三個宛列ベタル總テノ列ベ方ハ此三個ノ物ヨリ壹ツヲ省キ去リ殘リノ貳個ノ物ヲ貳ツ宛列ベタル秩列ノ數ノ3倍ニ等シ仍テ三個ノ物ヲ三個宛列ブル片ノ秩列ノ數ハ 3×2 ナリ.

四個ノ物 a, b, c, d ヲ壹ツ宛列ブル片ハ a, b, c, d ノ四種アリ.

四個ノ物 a, b, c, d ヲ貳ツ宛列ブル片ハ

$$ab,\ ac,\ ad;\ \ ba,\ bc,\ bd;\ \ ca,\ cb,\ cd;\ \ da,\ db,\ dc$$

ノ12種アリ而シテ此12種ノ列ベ方ハ第壹,a ヲ省キ去リタル殘リノ字母 b, c, d ヲ壹ツ宛列ベ其前ニ a ヲ置キテ ab, ac, ad ヲ得;第貳,b ヲ省キ去リタル殘リノ字母 a, c, d ヲ壹ツ宛列ベ其前ニ b ヲ置キテ ba, bc, bd ヲ得;第三,c ヲ省キ去リタル殘リノ字母 a, b, d ヲ壹ツ宛列ベ其前ニ c ヲ置キテ ca, cb, cd ヲ得;第四,d ヲ省キ去リタル殘リノ字母 a, b, c ヲ壹ツ宛列ベ其前ニ d ヲ置キテ da, db, dc ヲ得タルナリ.

此列ベ方ヲ見ル片ハ四個ノ物ノ內ヲ壹個宛ヲ取リ置キ殘リノ物三個ヲ出來得ル限リ壹ツ宛列ベ其各ノ前ニ其取リ置キタル物ヲ置ク片ハ四個ノ物ヲ貳個宛列ベタル片ノ總テノ列ベ方ヲ得ベキヿヲ知ル,然ルニ三個ノ物ヲ壹ツ宛取ル片ハ其列ベ方ハ3種アリ故ニ四個ノ物ヲ貳個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ3ノ4倍即チ 4×3 ナリ.

四個ノ物 a, b, c, d ヲ三個宛列ブル片ハ

$$abc,\ abd,\ acb,\ acd,\ adb,\ adc;$$
$$bac,\ bad,\ bca,\ bcd,\ bda,\ bdc;$$
$$cab,\ cad,\ cba,\ cbd,\ cda,\ cdb;$$
$$dab,\ dac,\ dba,\ dbc,\ dca,\ dcb$$

ノ24種アリ而シテ此列ベ方ハ;第壹,a ヲ省キ去リタル殘リノ三個ノ字母 b, c, d ヲ出來得ル限リ貳ツ宛列ベタル秩列

$$bc,\ bd,\ cb,\ cd,\ db,\ dc$$

ヲ作リ其各ノ前ニ a ヲ置ク然ル片ハ a ガ第壹ニ列スル總テノ秩列ヲ得同理ニヨリ夫々 b, c, d ノ第壹ニ列スルモノヲ作ル片ハ上ノ第貳行第三行及ビ第四行ノ列字母ヲ得ベシ,偖テ三ツノ物ヲ貳ツ宛列ベタル片ノ秩列ノ數ハ 3×2 ナリ故ニ4個ノ物ヲ三ツ宛列ブル片ハ a, b, c, d ノ各字母ガ夫々第壹ニ列スルモノガ何レモ 3×2 宛アリ仍テ其秩列ノ數ハ 3×2 ノ4倍即チ $4\times3\times2$ ナリ.

四個ノ物 a, b, c, d ヲ四個宛列ブル片ハ

$$abcd,\ abdc,\ acbd,\ acdb,\ adbc,\ adcb$$
$$bacd,\ badc,\ bcad,\ bcda,\ bdac,\ bdca;$$
$$cabd,\ cadb,\ cbad,\ cbda,\ cdab,\ cdba;$$
$$dabc,\ dacb,\ dbac,\ dbca,\ dcab,\ dcba$$

ノ24種アリ而シテ其列ベ方ハ四個ノ物 a, b, c, d ノ內ヲ先ヅ其壹個ヲ取リ除キ置キ殘リノ三個ヲ以テ其三個ヲ出來得ル限リ列シ其前ニ取リ除キタルモノヲ附記セルナリ即チ b, c, d 三個ノ物ヲ三個宛列ベタル秩列

$$bcd,\ bdc,\ cbd,\ cdb,\ dbc,\ dcb$$

ノ前ニ a ヲ置キテ第壹行ノ

$$abcd,\ abdc,\ acbd,\ acdb,\ adbc,\ adcb$$

ヲ得,次ニ a, c, d ヲ三個宛列ベタル秩列

$$acd,\ adc,\ cad,\ cda,\ dac,\ dca$$

ノ前ニ b ヲ置キテ第貳行ノ

$$bacd,\ badc,\ bcad,\ bcda,\ bdac,\ bdca$$

ヲ得, 第三行第四行ニ於テモ亦タ然リ.

此秩列ノ作リ方ニヨリテ見ル片ハ四個ノ物ヲ四個宛列ベタル總テノ列ベ方ノ數ハ三個ノ物ヲ三個宛列ベタル秩列ノ數ノ4倍ニ等シ,然ルニ三個ノ物ヲ三個宛列ベタル秩列ノ數ハ 3×2 ナリ,故ニ四個ノ物ヲ四個宛組ミ合セタル秩列ノ總數ハ $4\times3\times2$ ナリ.

五個ノ物 a, b, c, d, e ヲ壹ツ宛取リタル秩列ノ數ハ明カニ 5 種ナリ.

五個ノ物 a, b, c, d, e ヲ貳ツ宛列ブルニハ先ヅ a ヲ殘リノ四個ノ物 b, c, d, e ノ前ニ置キ,次ニ b ヲ殘リノ四個ノ物 a, c, d, e ノ前ニ置キ,次ニ c ヲ殘リノ四個ノ物 a, b, d, e ノ前ニ置キ逐次此ノ如クナス片ハ 5 個ノ物ヲ貳ツ宛取レル總テノ列ベ方ヲ得ベシ故ニ 5 個ノ物ヲ 2 個宛列シタル秩列ノ數ハ 5×4 ナリ.

五個ノ物 a, b, c, d, e ヲ三ツ宛列ブルニハ先ヅ a ヲ取リ除キ置キ殘リノ四個ノ物 b, c, d, e ヲ以テ貳ツ宛出來得ル限リノ總テノ列ベ方ヲ作リ其前ニ夫々 a ヲ置クベシ然ル片ハ a ガ第壹ニ列スル總テノ列ベ方ヲ得ベシ,然ルニ四個ノ物ヲ貳個宛取リタル秩列ノ數ハ 4×3 ナリ故ニ五個ノ物 a, b, c, d, e ヲ三ツ宛列ブル片ハ a ガ第壹ニ列スルモノハ 4×3 個アリ同理ニヨリ b, c, d, e ノ各ガ第壹ニ列スルモノハ何レモ 4×3 個宛アリ仍テ 5 個ノ物ヲ 3 個宛組ミ合セタル總テノ列ベ方ノ數ハ $5\times4\times3$ ナリ.

五個ノ物 a, b, c, d, e ヲ四ツ宛列ブルニハ先ヅ a ヲ取リ除キ置キ殘リノ四個ノ物 b, c, d, e ヲ三個宛出來得ル限リ列ベ其前ニ夫々 a ヲ置クベシ然ル片ハ a ガ第壹ニ列スル總テノ列ベ方ヲ得ベシ然ルニ四個ノ物ヲ三個宛列スル片ハ其秩列ノ數ハ $4\times3\times2$ ナリ故ニ a ノ第壹ニ列スルモノハ $4\times3\times2$ 個アリ同理ニヨリ b, c, d, e ノ第壹ニ列スルモノハ何レモ $4\times3\times2$ 個宛アリ仍テ 5 個ノ物ヲ 4 個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ $5\times4\times3\times2$ ナリ.

五個ノ物 a, b, c, d, e ヲ五個宛列ブルニハ先ヅ a ヲ取リ除キ置キ殘リノ四個ノ物 b, c, d, e ヲ四個宛出來得ル限リ列ベ其前ニ夫々 a ヲ置クベシ然ル片ハ a ガ第壹ニ列スル總テノ列ベ方ヲ得ベシ然ルニ四個ノ物ヲ四個宛列ブル片ハ其秩列ノ數ハ $4\times3\times2$ ナリ故ニ a ノ第壹ニ列スルモノハ $4\times3\times2$ 個アリ同理ニヨリ b, c, d, e ノ第壹ニ列スルモノハ何レモ $4\times3\times2$ 個宛アリ仍テ 5 個ノ物ヲ 5 個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ $5\times4\times3\times2$ ナリ.

同理ニヨリテ壹般ニ次ノ如シ:

n 個ノ物ヲ壹個宛列ブル片ハ其列ベ方ハ n 種アリ.

n 個ノ物ヲ貳個宛列ブルニハ先ヅ其内ヲ壹個ヲ取リ除キ置キ殘リノ $n-1$ 個ノ物ヲ壹ツ宛列ベ其前ニ夫々取リ除ケ置キタルモノヲ置ケバ可ナリ仍テ n 個ノ物ヲ 2 個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ $n(n-1)$ ナリ.

n 個ノ物ヲ三個宛列ブルニハ其内ヲ壹個宛取リ除ケ置キ殘リノ $n-1$ 個ノ物ヲ出來得ル限リ貳個宛列ベ其總テノ列ベ方ノ前ニ取リ除ケ置キタル物ヲ置ケバ可ナリ然ルニ $n-1$ 個ノ物ヲ貳個宛列ブル片ハ $(n-1)(n-2)$ 個ノ秩列アリ故ニ n 個ノ物ノ各ガ第壹ニ列スルモノハ何レモ $(n-1)(n-2)$ 個宛アリ仍テ n 個ノ物ヲ 3 個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ $n(n-1)(n-2)$ ナリ.

n 個ノ物ヲ四個宛列ブルニハ其内ヲ壹個宛取リ除ケ置キ殘リノ $n-1$ 個ノ物ヲ出來得ル限リ三個宛列ベ其總テノ列ベ方ノ前ニ取リ除ケ置キタル物ヲ置ケバ可ナリ然ルニ $n-1$ 個ノ物ヲ三個宛列ブル片ハ $(n-1)(n-2)(n-3)$ 個ノ秩列アリ故ニ n 個ノ物ノ各ガ第壹ニ列スルモノハ何レモ $(n-1)(n-2)(n-3)$ 個宛アリ仍テ n 個ノ物ヲ 4 個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ $n(n-1)(n-2)(n-3)$ ナリ.

逐次此ノ如ク歩ヲ推ス片ハ壹般ニ n 個ノ物ヲ r 個宛組ミ合セタル秩列ノ數ハ

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\{n-(r-1)\}$$

ナルコ明カナリ.

113. n 個ノ物ヲ r 個宛組ミ合セテ作リタル秩列ノ數ヲ顯ハスニ ${}_nP_r$ ナル記號ヲ用ユ仍テ前款ニヨリテ

$${}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\{n-(r-1)\}$$

ナリ.

又 1 ヨリ n ニ至ルマデノ自然數ノ積ヲ顯ハスニ $n!$ 又ハ $\underline{|n}$ ナル記號ヲ以テス例ヘバ $4!$ 又ハ $\underline{|4}$ ト記セルハ $4\cdot3\cdot2\cdot1$ 即チ 1 ヨリ 4 マデノ總テノ整數ノ積ナリ,是ニ由テ

$${}_nP_n=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots3.2.1=n!$$

ナリ.

114. n 個ノ物ノ内相同ジキモノヲ混ズル片ハ其 n 個ノ物ヲ壹度ニ

悉ク列シタル秩列ノ數ヲ算スルヿ.

n個ノ物ヲ字母ヲ以テ示ストキ其中p個ハa, q個ハb, r個ハc等ナリトス.

今所要ノ秩列ヲ P トスルトキハ此秩列中ノ或ル任意ノ壹秩列ニ於テp個ノ同シ字母aヲ悉ク變シテ互ニ相異ナルモノトシ且ツ他ノ各字母トモ異ナラシム是ニ於テ他ノ字母ニハ少シモ列ベ變ヘヲ施スヿナク單ニ前ニaナル字母ガ占メシ位置ノ字母ノミヲ列ベ變ユルトキハ前ニaガp個ナガラ同ジカリシトキ壹秩列ナリシモノハ變シテ$p!$種ノ秩列トナルベシ. 故ニp個ノ同字母aヲ悉ク相異ナリテ又他ノ字母トモ異ナルp個ノ新字母ニ變ヘb, c等ハ前ノ如ク据ヘ置クトキハ $P\times p!$ 個ノ秩列ヲ得ベシ.

同理ニヨリ此$P\times p!$個ノ秩列中ニ於テ其任意ノ壹秩列中q個ノ同字母ヲ互ニ相異リテ且ツ他ノ字母トモ異ナルq個ノ新字母ニ更ムルトキハ他ノ字母ハ其儘据ヘ置キテ此新字母ノミヲ列ベ變ユルヿニヨリテ此壹秩列ハ$q!$個ノ異ナル秩列トナルベシ此ニ由テ今ヤ秩列ノ總數ハ$P\times p!$ノ$q!$倍即チ$P\times p!\times q!$トナレリ.

逐次此ノ如クシ總テノ字母ヲシテ相異ナラシムルニ至ルトキハ其秩列ノ總數ハ

$$P\times p!\times q!\times r!\times\cdots\cdots\cdots$$

トナルベシ然ルニ此秩列ハn個ノ相ヒ異ナル物ヲn個取リテ組ミ合セタル秩列ニ異ナラズ仍テ其秩列ノ總數ハ前款ニヨリテ$n!$ニ等シ.

仍テ　$$P\times p!\times q!\times r!\times\cdots\cdots=n!$$

故ニ　$$P=\frac{n!}{p!q!r!\cdots\cdots}$$

ナリ.

問　　題

(1)　童子6人ヲ壹ト列ビニ立タシムルトキハ幾種ノ列ビ方アリヤ.

(2)　英語 *success* 及ビ *mississippi* ヲ組成スル字母ヲ列ベ代ユルトキハ各幾

種ノ變化アリヤ.

(3)　${}_{2n}P_3=100\times{}_nP_2$ ナルトキnノ値如何.

(4)　${}_{2n}P_3=2\times{}_nP_4$ ナルトキnノ値如何.

(5)　8人ニテ圓形ノ卓子ヲ圍ムトキ其列ビ方ニ幾種ノ變化アリヤ又8個ノ異ナル珠玉ヲ頸環ニ貫クトキハ幾通リニ其玉ノ位置ノ順序ヲ置キ代ヘ得ベキヤ.

(6)　書籍n册ヲ書籍棚ニ壹列ニ列ブルトキ貳册ノ特別ナル書籍ヲ相ヒ隣ラシメザル列ベ方ハ$(n-2)\times(n-1)!$アルヿヲ證セヨ.

(7)　紳士四人,貴婦人四人ニテ圓形ノ卓子ヲ圍ムニ男女交互ニ列セシメントス其列ビ方幾通リアリヤ.

問 題 解 答

(1)　童子6人ヲa, b, c, d, e,　ヲ以テ示ストキハ此六人ノ童子ヲ六人ナガラ壹ト列ビニ列ベタルトキ出來得ベキ列ベ方ハ此六個ノ字母ヲ六ツナガラ悉ク列ベタル秩列ニ外ナラズ故ニ所要ノ秩列ノ數ハ${}_6P_6$ナリ然ルニ

$${}_6P_6=6\times5\times4\times3\times2\times1=720$$

仍テ720種ノ列ビ方アリ.

(2)　*success* ハ7字母ヨリ成ル而シテ其内チsハ三個, cハ貳個アリ故ニ其秩列ノ數ハ

$$\frac{7!}{3!2!}=\frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{3\times2\times1\times2\times1}=420$$

ナリ又 *mississippi* ハ11字ヨリ成ル而シテ其内チiハ4個, sハ4個, pハ2個アリ故ニ其秩列ノ數ハ

$$\frac{11!}{4!4!2!}=\frac{11\times10\times9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1\times4\times3\times2\times1\times2\times1}$$

$$=34650$$

ナリ仍テ所要ノ答數ハ夫々420種及ビ34650種ナリ.

(3) **112 款及ビ 113 款ニヨリテ**

$${}_{2n}P_3=2n(2n-1)(2n-2),\quad {}_nP_2=n(n-1)$$

ナリ故ニ題意ニヨリテ

$$2n(2n-1)(2n-2)=100n(n-1)$$

即チ $$8n^3-12n^2+4n=100n^2-100n$$

項ヲ移シテ $$8n^3-112n^2+104n=0$$

即チ $$8n(n^2-14n+13)=0$$

即チ $$8n(n-1)(n-13)=0$$

是ヨリ $$n=0,\ 1,\ \text{又ハ}\ 13$$

然ルニ $n=0$ 及ビ $n=1$ ハ明カニ題意ニ適セズ,

仍テ所要ノ答數ハ 13 ナリ。

(4) ${}_{2n}P_3=2n(2n-1)(2n-2)$, ${}_nP_4=n(n-1)(n-2)(n-3)$ ナリ。故ニ題意ニヨリテ

$$2n(2n-1)(2n-2)=2\times n(n-1)(n-2)(n-3)$$

即チ $$4n(n-1)(2n-1)=2n(n-1)(n-2)(n-3)$$

項ヲ移シテ之ヲ括ル𪜈ハ

$$2n(n-1)\{(n-2)(n-3)-2(2n-1)\}=0$$

即チ $$2n(n-1)(n^2-9n+8)=0$$

即チ $$2n(n-1)^2(n-8)=0$$

是ヨリ $n=0,1$ 又ハ 8 ナリ然ルニ $n=0$ 及ビ $n=1$ ハ明カニ題意ニ適セズ

仍テ所要ノ答數ハ 8 ナリ。

(5) 8 人ニテ圓形ノ卓子ヲ圍ム𪜈各人ノ列ビ方ノ順序ノ變化ノ數ハ其内ヲ壹人ノ位置ヲ變更スルヿナクシテ殘リノ 7 人ノ順序ヲ出來得ル限リ變更シタル𪜈ノ秩列ノ數ニ等シ仍テ所要ノ變化ノ數ハ ${}_7P_7$ ナリ今此數ヲ算出スル𪜈ハ次ノ如シ

$${}_7P_7=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040.$$

仍テ 8 人ニテ圓形ノ卓子ヲ圍ム𪜈ハ其列ビ方ノ順序ニハ 5040 種ノ變化アリ。

次ニ 8 個ノ珠玉ヲ糸ニテ貫キ圓形ヲ作ル𪜈ハ上ト同ジ理ニテ 5040 種ノ變化アリ然ルニ頸環ニハ表裏ノ區別ナキニヨリテ其變化ノ數ハ

5040 種ノ半即チ 2520 種ナリ,但シ珠玉ニハ表裏ナキモノトナセルナリ

(6) n 冊ノ書籍ヲ壹列ニ列ブル𪜈ハ其秩列ノ數ハ $n!$ ナリ又特別ノ貳冊ノ書籍ヲ相隣ナラシムル𪜈ハ其貳冊ヲ壹冊ト見做シテ可ナリ而シテ $n-1$ 冊ノ書籍ヲ相隣ラシメテ列スル𪜈ハ $(n-1)!$ ノ列ベ方アリ然ルニ此特別ノ貳冊ハ貳樣ニ相隣ラシメテ置クヿヲ得ベキガ故ニ特別ノ貳冊ノ相ヒ隣リ居ル秩列ノ數ハ $2\times(n-1)!$ ナリ之ヲ $n!$ ヨリ減ズル𪜈ハ特別ノ貳冊ガ相ヒ隣ラザル秩列ノ數ヲ得ベシ故ニ其秩列ノ數ハ

$$n!-2\times(n-1)!\ \text{即チ}\ (n-2)\times(n-1)$$

ナリ。

(7) 先ヅ紳士 4 人ヲ座ニ就カシムル𪜈ハ問題(5)ノ解ニ詳說セル理ニヨリテ 3! 即チ 6 通リノ列ビ方アリ今此 4 人ノ紳士ノ間ニ貴婦人 4 人ヲ容ルヽ𪜈ハ其間ニハ 4! 種ノ異ナレル列ビ方アリ故ニ紳士 4 人ノ相異ナレル壹ト列ビ毎ニ貴婦人ノ相異ナレル 4! 種ヲ配合スル𪜈ハ其列ビ方ハ總テ 3! ノ 4! 倍アルヿ明カナリ故ニ所要ノ列ビ方ノ數ハ

$$3!\,4!\ \text{即チ}\ 6\times24\ \text{即チ}\ 144$$

ナリ仍テ 144 通リノ列ビ方アリ。

配　　合

115. 配合 n 個ノ物ヲ r 個宛組ミ合ス𪜈其組ミ合セ方ヲ n 個ノ物ノ r 個宛ノ配合ト云フ。

配合ハ秩列ノ如ク組ミ合セタルタルモノノ順序ニ關スルモノニハアラズ唯其組ミ合セノミニ止マルモノトス。

例ヘバ四個ノ物 a, b, c, d ヲ壹ツ宛取ル𪜈ハ其配合ハ明カニ

$$a,\ b,\ c,\ d$$

ノ四種アルノミ。

四個ノ物 a, b, c, d ヲ貳ツ宛組ミ合ス𪜈ハ其配合ハ

$$ab,\ ac,\ ad,\ bc,\ bd,\ cd$$

ノ 6 種アリ而シテ此 6 種ノ配合ニ於テ其各組ミ合セノ中ノ各字母ノ順

序ヲ變化シテ出來得ベキ變化ヲ盡ストキハ四個ノ物ヲ貳ツ宛組ミ合セタル總テノ秩列ヲ得ルヤ明カナリ.

四個ノ物 a, b, c, d ヲ三ツ宛組ミ合ストキハ其合配ハ

$$abc,\quad abd,\quad acd,\quad bcd$$

ノ4種アリ此ノ4種ノ配合ノ各組ミ合セノ中ニ於テ其各字母ノ順序ヲ變化シテ出來得ベキ變化ヲ盡ストキハ四個ノ物ヲ三個宛組ミ合セタル總テノ秩列ヲ得ルヤ明カナリ.

四個ノ物 a, b, c, d ヲ四ツ宛組ミ合ストキハ其配合ハ

$$abcd$$

ノ壹種アルノミ而ノ此配合中ノ各字母ノ順序ヲ出來ベキ限リ變化シ以テ秩列ヲ作ルトキハ明カニ4個ノ物ヲ4個宛組ミ合セタル總テノ秩列ヲ得ベシ.

116. 相ヒ異ナル n 個ノ物ノ r 個宛ノ配合ヲ算スルヿ.

n 個ノ相ヒ異ナル物ヲ r 個宛組ミ合セタルトキノ配合ノ數ヲ ${}_nC_r$ ト略記ス今此 r 個宛ノ配合ノ壹ハ何レモ其配合中ノ r 個ノ物ノ順次ノ變更ニヨリテ $r!$ 個宛ノ秩列ヲ生スベシ而シテ各配合ヲ殘ラズ此ノ如クナストキハ n 個ノ物ヲ r 個宛組ミ合セタルトキノ總テノ秩列ヲ得ベシ故ニ

$${}_nC_r\times r!={}_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots\cdots\cdots(n-r+1).$$

仍テ
$${}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{1.2.3.\cdots\cdots r}. \qquad (1)$$

又此式ノ分子分母ニ $(n-r)!$ 即チ $(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1.$ ヲ乘ズルトキハ分子ハ

$$n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1$$

即チ
$$n!$$

トナルベシ故ニ上式ハ次ノ如クナルベシ

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!\,(n-r)!} \qquad (2)$$

是レ記載スルニ便利ナル式ナリトス

(2) 式ガ $r=n$ ナルトキニモ通ズル爲メニハ $0!=1$ ナリトセザルベカラズ何ントナレバ ${}_nC_n=1$ ナル故ニ上式ハ

$$1=\frac{n!}{0!\,n!}$$

トナレバナリ.

117. ${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$ ナルヿヲ證ス.

$(n+1)$ 個ノ物ノ r 個宛ノ配合 ${}_{n+1}C_r$ ハ其 $(n+1)$ 個ノ物ノ中ナノ或ル特別ナル物ヲ含有スルモノト其物ヲ含有セザルモノトノ貳群ニ分ツヿヲ得ベシ而ノ其物ヲ含有セザル配合ハ明カニ n 個ノ物ノ r 個宛ノ配合ニ等シ故ニ其配合ノ數ハ ${}_nC_r$ ナリ,又其物ヲ含有スル配合ノ數ハ其物ヲ取リ除キタル殘リノ n 個ノ物ヲ $r-1$ 個宛組ミ合セタル配合ノ數 ${}_nC_{r-1}$ ニ同ジ故ニ

$${}_nC_r+{}_nC_{r-1}={}_{n+1}C_r$$

ナリ.

此結果ハ復タ次ノ如ク証スルヿヲ得ベシ.

第116欵ニヨリテ

$${}_nC_r+{}_nC_{r-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1.2\cdots r}+\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1.2\cdots(r-1)}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1.2\cdots\cdots r}\{n-r+1+r\}$$

$$=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1.2\cdots\cdots r}$$

此式ノ右節ハ明カニ ${}_{n+1}C_r$ ニ等シ.

118. ${}_nC_r$ ノ最大價ヲ求ム,但シ n ハ與ヘラレタル數トス.

第116欵ニヨリテ

$${}_nC_r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1.2\cdots\cdots r},$$

$${}_nC_{r-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1.2\cdots(r-1)}$$

故ニ
$${}_nC_r={}_nC_{r-1}\times\frac{n-r+1}{r}$$

此ニ由テ ${}_nC_r \gtreqless {}_nC_{r-1}$ ナルトキハ $n-r+1 \gtreqless r$ ナリ故ニ

$$ {}_nC_r \gtreqless {}_nC_{r-1} \text{ ナル廾ハ } r \lesseqgtr \tfrac{1}{2}(n+1) $$

ナリ故ニ ${}_nC_r$ ハ r ガ $\frac{1}{2}(n+1)$ ヨリ小ナル間ハ次第ニ增加スベシ，是ニ由テ次ノ結果アリ.

n ガ偶數ナルトキハ ${}_nC_r$ ハ $r=\frac{n}{2}$ ナル廾最大ナリ.

n ガ奇數ナル廾ハ $r \lessgtr \frac{1}{2}(n+1)$ ナルニ從テ ${}_nC_r \gtrless {}_nC_{r-1}$ ナリ又 $r=\frac{1}{2}(n+1)$ ナル廾ハ ${}_nC_r={}_nC_{r-1}$ ナリ此ニ由テ n ガ奇數ナル廾ハ ${}_nC_{\frac{1}{2}(n-1)}={}_nC_{\frac{1}{2}(n+1)}$ トナル而シテ是レ ${}_nC_r$ ノ最大價ナリ.

問　　題

(1)　${}_{10}C_4$, ${}_{12}C_9$ 及ビ ${}_{20}C_{17}$ ヲ算出セヨ.

(2)　${}_nC_5={}_nC_6$ ナル廾 n ノ値如何.

(3)　$3\times{}_nC_4=5\times{}_{n-1}C_5$ ナル廾 n ノ値如何.

(4)　${}_nP_r=272$, ${}_nC_r=136$ ナル廾 n 及ビ r ノ値如何.

(5)　$2n$ 個ノ相ヒ異ナル物ノ n 個宛ノ配合中ニ於テハ或ル特別ナルモノヲ含有スルモノヽ數ハ其物ヲ含有セザルモノヽ數ニ等シ其證如何.

(6)　六個ノ子音ノ字母及ビ四個ノ母音ノ字母アリ今此子音字母三個ト母音字母二個ヲ組ミ合セナバ幾種ノ語ヲ作リ得ベキヤ.

(7)　1, 2, 3, 4, 5 ナル五數字ヲ總テ出來得ル限リ個ブル廾ハ其內ナノ幾個ガ 23000 ヨリ小ナルカ.

(8)　mn 個ノ相ヒ異ナル物品ヲ n 人ニ m 個宛配分スル廾ハ其配分ノ方法幾種アリヤ.

(9)　壹平面中ニ n 個ノ直線アリ而シテ其直線中相ヒ平行スルモノナク又同壹點ヲ貫ク三直線ナシ然ル廾ハ此 n 個ノ直線ハ平面ヲ幾個ノ部分トナスヤ.

(10)　壹平面中ニ n 個ノ點アリ其內ナノ m 個ハ壹直線中ニアリテ其他

ハ何レノ三點ヲ取ルモ壹直線中ニアラズト云フ然ラバ此等ノ諸點ヲ直線ニテ結ビ付クル廾幾個ノ三角形ヲ得ベキヤ.

(11)　n 個ノ名宛ヲ異ニセル書狀アリ之ヲ既ニ名宛ヲ記載セル n 個ノ封筒ニ入レントス然ル廾ハ此書狀ヲ名宛違ヰノ封筒ニ誤マリ容ルヽ場合幾通リアリヤ.

問　題　解　答

(1)　第 116 欵ニヨリテ

$$ {}_{10}C_4=\frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}=210. $$

$$ {}_{12}C_9=\frac{12!}{9!\,3!}=\frac{12\times11\times10\times9!}{9!\,3!}=\frac{12\times11\times10}{1\times2\times3}=220. $$

$$ {}_{20}C_{17}=\frac{20!}{17!\,3!}=\frac{20\times19\times18\times17!}{17!\,3!}=\frac{20\times19\times18}{1\times2\times3}=1140. $$

仍テ所要ノ答數ハ夫々 210, 220, 1140 ナリ.

(2)　第 116 欵ニヨリテ ${}_nC_6=\frac{n-5}{6}\times{}_nC_5$ ナリ然ルニ題意ニヨレバ ${}_nC_6={}_nC_5$ ナリ故ニ

$$ \frac{n-5}{6}=1 $$

是ヨリ，　$n=5+6=11$

仍テ所要ノ答數ハ 11 ナリ.

(3　第 116 欵ト題意トニヨリテ

$$ \frac{3n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times2\times3\times4}=\frac{5(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\times2\times3\times4\times5} $$

是ヨリ　$3n(n-1)(n-2)(n-3)=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$

項ヲ移シテ之ヲ括ル廾ハ

$$ (n-1)(n-2)(n-3)\{(n-4)(n-5)-3n\}=0 $$

即チ

$$ (n-1)(n-2)^2(n-3)(n-10)=0 $$

是ヨリ $n=1, 2, 3,$ 又ハ 10 ナリ然ルニ n ノ値トシテ 1, 2, 3 ハ題意ニ適セズ

仍テ所要ノ答數ハ 10 ナリ.

(4)　第 116 款ニヨリテ

$${}_nC_r\times r! = {}_nP_r$$

然ルニ題意ニヨリテ ${}_nC_r=136,\ {}_nP_r=272$ ナリ故ニ

$$136\times r! = 272$$

是ヨリ　$r!=2=2\times 1$

故ニ $r=2$ ナリ是ヲ ${}_nP_r=272$ ニ入レ代ユル片ハ

$$n(n-1)=272$$

項ヲ移シテ　$n^2-n-272=0$

即チ　$(n-17)(n+16)=0$

故ニ　$n=17$ 又ハ -16

然ルニ $n=-16$ ハ題意ニ適セズ仍テ所要ノ答數ハ 17 ナリ.

(5)　$2n$ 個ノ物ノ n 個宛ノ配合中或ル特別ナル物ヲ含有スル配合ノ數ハ ${}_{2n-1}C_{n-1}$ ニ等シ又其物ヲ含有セザル配合ノ數ハ ${}_{2n-1}C_n$ ニ等シ然ルニ第 116 款ニヨリテ

$${}_{2n-1}C_{n-1}=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!n!},\qquad {}_{2n-1}C_n=\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}$$

ナリ故ニ　${}_{2n-1}C_{n-1}={}_{2n-1}C_n.$

是ヲ所要ノ證トス.

(6)　6 個ノ子音字母中ヨリ 3 個宛ヲ取ル片ハ其組ミ合セノ數ハ ${}_6C_3$ 個アリ又 4 個ノ母音字母中ヨリ 2 個宛ヲ取ル片ハ其組ミ合セノ數ハ ${}_4C_2$ 個アリ故ニ子音字母ノ三字宛ノ組ミ合セノ各々ニ母音字母ノ貳字宛ノ組ミ合セヲ配スル片ハ總計 ${}_6C_3\times{}_4C_2$ 個ノ組ミ合セアリ而メ其各組ミ合セノ字數ハ 5 個ヨリ成ルヲ以テ其 5 個ノ字母ノ順序ヲ諸種ニ變ズル片ハ每組ミ合セニ ${}_5P_5$ 個宛ノ變化アルベシ是ニ由テ所要ノ語數ハ ${}_6C_3\times{}_4C_2\times{}_5P_5$ ナリ今

$${}_6C_3=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=20,\qquad {}_4C_2=\frac{4\times3}{1\times2}=6$$

$${}_5P_5=5\times4\times3\times2\times1=120.$$

故ニ　${}_6C_3\times{}_4C_2\times{}_5P_5=20\times6\times120=14400.$

仍テ所要ノ答數ハ 14400 種ナリ.

(7)　1 ガ第壹ニ列スル秩列ノ數ハ 4! 即チ 24 種アリ而メ 1 ガ第壹ニ列スル數ハ明カニ 23000 ヨリ小ナリ,次ニ初メノ貳數字ガ 21 トナルモノハ 3! 即チ 6 種アリ之ヲ前ノ 24 種ト合ハスル片ハ 30 種トナル是レ 23000 ヨリ小ナルモノヽ數ナリ.

仍テ所要ノ答數ハ 30 個ナリ.

(8)　mn 個ノ異ナル物ノ内ヲヨリ第壹人ニ m 個ノ物ヲ與フル方法ハ ${}_{mn}C_m$ 個アリ而シテ第壹人ニ m 個ノ物ヲ如何樣ニ撰ンデ與フルトスルモ第貳人ニ m 個ノ物ヲ與フル方法ハ ${}_{mn-m}C_m$ 個アリ之ト同理ニヨリ第壹,第貳ノ人ニ如何樣ニ m 個宛與フルトスルモ殘リノ物ヨリ m 個ノ物ヲ第三人ニ與フル方法ハ ${}_{mn-2m}C_m$ 個アリ逐次此ノ如シ是ニ由テ所要ノ答數ハ

$${}_{mn}C_m\times{}_{m(n-1)}C_m\times{}_{m(n-2)}C_m\times\cdots\cdots\times{}_{2m}C_m\times{}_mC_m$$

ニ等シ之ヲ算出スル片ハ次ノ如シ

$$\frac{mn!}{m!\,m(n-1)!}\times\frac{m(n-1)!}{m!\,m(n-2)!}\times\frac{m(n-2)!}{m!\,m(n-3)!}\times\cdots\cdots\times\frac{2m!}{m!\,m!}\times\frac{m!}{m!}$$

$$=\frac{mn!}{(m!)^n}$$

仍テ所要ノ方法ハ $\frac{mn!}{(m!)^n}$ 種アリ.

(9)　第 n 番目ノ直線ハ殘リノ $n-1$ 個ノ直線ト相ヒ交リテ n 個ノ部分ニ分タルベシ而シテ此 n 番目ノ直線ノ n 個ノ部分ノ兩側ニ於テ前ニ平面ノ壹部ナリシモノハ貳部分トナリテ顯起スベシ故ニ $n-1$ 個ノ直線ノ爲メ平面ノ分レタル部分ノ數ハ此 n 番目ノ壹線ノ爲メ n 個增加スベシ

是ニ由テ假リニ $F(x)$ ヲ以テ x 個ノ直線ノ爲メ平面ノ分レタル部分ノ數ヲ表ハス片ハ

$$F(n)=F(n-1)+n.$$

ナリ同理ニヨリ

$$F(n-1)=F(n-2)+(n-1).$$

$$F(n-2)=F(n-3)+(n-2).$$

逐次此ノ如クシテ

$$F(3)=F(2)+3,$$
$$F(2)=F(1)+2$$

而シテ壹個ノ直線ハ明カニ平面ヲ兩部ニ分ツベシ故ニ $F(1)=2$ ナリ是ニ於テ上ノ諸式ヲ相加ヘ左節及ビ右節ヨリ兩節ニ共通ナル諸項ヲ省キ去ル𪜈ハ

$$\begin{aligned}F(n)&=2+2+3+4+5+\cdots\cdots+n\\&=1+(1+2+3+4+5+\cdots\cdots+n)\\&=1+\tfrac{1}{2}n(n+1)\end{aligned}$$

仍テ n 個ノ直線ハ平面ヲ $1+\frac{1}{2}n(n+1)$ 部ニ分ツベシ.

(10) 壹平面中ニアル n 個ノ點中何レノ三點モ壹直線中ニアラザル𪜈ハ此 n 點ヲ三ツ宛取リテ其三點ヲ角頂トセル三角形ヲ作ル𪜈ハ其三角形ノ數ハ

$${}_nC_3 \text{ 即チ } \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

ナルベシ然ルニ m 個ノ點ハ壹直線中ニアルヲ以テ三角形ノ數ハ此 m 個ノ點ヨリ其中ヲ何レノ三點モ壹直線中ニアラサルノ假定ヲ以テ作リ得ラルヽ三角形ノ數ナル

$${}_mC_3 \text{ 即チ } \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

ダケ減小スベシ.

是ニ仍テ所要ノ答數ハ $\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}-\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$ ナリ.

(11) 書狀ヲ $a, b, c, \cdots\cdots$ ニテ表ハシ其當サニ容ルベキ封筒ヲ $a', b', c', \cdots\cdots$ トシ所要ノ數ヲ $F(n)$ トス.

今 a ヲ名宛違ヰノ封筒ニ入ルヽハ之ヲ $n-1$ 個ノ封筒 $b', c', \cdots\cdots$ ノ壹ニ容ルヽ𪜈ニアリ假リニ之ヲ k' ニ入レタルモノトス然ル𪜈ハ k' ナル封筒ニ入ルベキ書狀 k ガ a ノ入ルベキ封筒 a' ニ誤リ入ルヿアルベシ此場合ニ於テハ殘リノ書狀ヲ悉ク誤リ入ルベキ場合ハ $F(n-2)$ 通リアリ,又

a ヲ k' ニ入レタル場合ニ於テ k ヲ a' ニ容レズ b ヲ b' ニ容レズ c ヲ c' ニ容レザル等ノ場合ハ $F(n-1)$ 通リアリ.

是ニ由テ a ヲ k' ナル封筒ニ誤リ入レタル𪜈悉ク書狀ヲ名宛違ヰノ封筒ニ容ルヽ場合ハ $F(n-1)+F(n-2)$ 通リアリ而シ此理ハ a ヲ b', c', 等ノ何レニ容レタル場合ニ於テモ然リトス故ニ

$$F(n)=(n-1)\{F(n-1)+F(n-2)\}$$

是ヨリ $\quad F(n)-nF(n-1)=-\{F(n-1)-(n-1)F(n-2)\}$

同理ニヨリ $\quad F(n-1)-(n-1)F(n-2)=-\{F(n-2)-(n-2)F(n-3)\}$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$F(3)-3F(2)=-\{F(2)-2F(1)\}$$

而シ明カニ $\quad F(2)=1,\ F(1)=0$ ナリ故ニ上ノ諸式ヲ相乘シテ

$$F(n)-nF(n-1)=(-1)^n$$

ヲ得,仍テ $\quad \frac{F(n)}{n!}-\frac{F(n-1)}{(n-1)!}=(-1)^n\frac{1}{n!}$

同理ニヨリ $\quad \frac{F(n-1)}{(n-1)!}-\frac{F(n-2)}{(n-2)!}=(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$

逐テ此ノ如シ而シ此等ノ諸式ヲ加フル𪜈ハ所要ノ答數ハ

$$n!\left\{\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right\}.$$

第六編

貳項定則

119. 第壹學級ニ於テ乘算ニヨリ

$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,\quad (x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$$

ナルコトヲ述ベタリ次款ニ於テハ壹般ニ n ガ正ノ整數ナル片 $(x+a)^n$ ニ等シキ壹式ヲ誘出スコトヲ目的トス.

120. $x+a$ ノ形チノ貳項式ノ諸因子ノ積ヲ乘算ニヨリテ算出スル片ハ次ノ如シ

$$(x+a_1)(x+a_2)=x^2+(a_1+a_2)x+a_1a_2,$$

$$(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)=x^3+(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1)x+a_1a_2a_3.$$

$$\begin{aligned}(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)=x^4&+(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4\\&+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4\\&+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)(x+a_5)\\&=x^5+(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)x^4+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_1a_5+a_2a_3\\&\quad+a_2a_4+a_2a_5+a_3a_4+a_3a_5+a_4a_5)x^3+(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_2a_5\\&\quad+a_1a_3a_4+a_1a_3a_5+a_1a_4a_5+a_2a_3a_4+a_2a_3a_5+a_2a_4a_5+a_3a_4a_5)x^2\\&\quad+(a_1a_2a_3a_4+a_1a_2a_3a_5+a_1a_2a_4a_5+a_1a_3a_4a_5+a_2a_3a_4a_5)x+a_1a_2a_3a_4a_5\end{aligned}$$

逐テ此ノ如シ.

是等ノ諸式ヲ調ブル片ハ次ノ如キ關係アルヲ見ル.

第壹. 第壹項 x ノ指數ハ相乘セル因子ノ數ニ等シク以下次第ニ x ノ方乘羃ノ指數ハ 1 宛減ジテ終ニ x ヲ帶ビザル項ニ至リテ止ム.

第貳. x ノ方乘羃ノ係數ハ第壹項ニ於テハ 1, 第貳項ニ於テハ因子ノ第貳項 a_1, a_2, a_3 等ノ和ニ等シク, 第三項ニ於テハ a_1, a_2, a_3 等ヲ貳ツ宛組ミ合セタル積ノ和ニ等シク, 第四項ニ於テハ a_1, a_2, a_3 等ヲ三ツ宛組ミ合

欠

MISSING

(5) $c_0-2c_1+3c_2-\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)c_n=0$ ナルヿヲ證セヨ.

(6) $c_2+2c_3+3c_4+\cdots\cdots+(n-1)c_n=1+(n-2)2^{n-1}$ ナルヿヲ證セヨ。

(7) $c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c^n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$ ナルヿヲ證セヨ。

(8) $\frac{c_1}{1}-\frac{c_2}{2}+\frac{c^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{c_n}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}$ ナルヿヲ證セヨ。

(9) $c_0c_r+c_1c_{r+1}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n=\frac{(2n)!}{(n+r)!\,(n-r)!}$ ナルヿヲ證セヨ。

問題解答

(1) $(a+5)^{15}$ ノ展開式ノ第三項ハ

$$\frac{15(15-1)}{1.2}a^{13}5^2 \quad 即チ \quad 2625a^{13}.$$

仍テ所要ノ答式ハ $2625a^{13}$ ナリ.

(2) $n=4$ ナル時ハ

$$\frac{n(n-1)}{1.2}=\frac{4.3}{1.2}=6, \qquad \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}=\frac{4.3.2}{1.2.3}=4,$$

故ニ $(5-4x)^4=5^4+4\times5^3\times(-4x)+6\times5^2\times(-4x)^2+4\times5\times(-4x)^3+(-4x)^4$

$$=625-2000x+2400x^2-1280x^3+256x^4.$$

仍テ所要ノ答式ハ $625-2000x+2400x^2-1280x^3+256x^4$ ナリ。

(3) $(2a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{3}{2}})^{10}$ ノ展開式ニ於テ

$$第5項=\frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}(2a^{\frac{1}{2}})^6(b^{\frac{3}{2}})^4=13440a^3b^6,$$

$$第6項=-\frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}(2a^{\frac{1}{2}})^5(b^{\frac{3}{2}})^5=-8064a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{15}{2}}.$$

仍テ所要ノ答式ハ $13440a^3b^6$ 及ビ $-8064a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{15}{2}}$ ナリ。

(4) $(1+x)^{2n}$ ノ第 $(n+1)$ 項ハ

$$=\frac{(2n)!}{n!\,n!}x^n.$$

$$=\frac{1.2.3.4.5.6\cdots\cdots(2n-2)(2n-1)2n}{(n!)^2}x^n$$

$$=\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)\,2.4.6.\cdots\cdots 2n}{(n\,!)^2}x^n$$

$$=\frac{1.3.5\cdots\cdots(2n-1).n!}{(n!)^2}2^nx^n$$

$$=\frac{1.3.5.\cdots\cdots(2n-1)}{n!}2^nx^n$$

是ヲ所要ノ證トス.

(5) $c_0-2c_1+3c_2-\cdots\cdots+(-1)^n(n+1)c_n$

$$=1-2n+3.\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^n(n+1).1$$

$$=1-n+\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^n.1-\Big\{n-2\frac{n(n-1)}{1.2}+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$$

$$-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}.n\Big\}$$

$$=(1-1)^n-n\Big\{1-(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\Big\}$$

$$=(1-1)^n-n(1-1)^{n-1}=0$$

是ヲ所要ノ證トス.

(6) 123款,第壹ニヨリテ

$$1+n+\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots+1=2^n,$$

及ビ $1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}+\cdots\cdots+1=2^{n-1}.$

ナリ此第貳式ニnヲ乘シ其內第壹式ヲ減ズル時ハ

$$-1+n(n-1)-\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots+n-1$$

$$=n.2^{n-1}-2^n;$$

即チ $-1+\frac{n(n-1)}{1.2}+2.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\cdots\cdots+(n-1).1=n2^{n-1}-2^n$

左節ノ第壹項ヲ右節ニ移ス時ハ

$$c_2+2c_3+\cdots\cdots+(n-1)c_n=1+(n-2)2^{n-1}$$

是ヲ所要ノ證トス.

(7) $c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}$

$$=1-\frac{1}{2}n+\frac{1}{3}.\frac{n(n-1)}{1.2}-\cdots\cdots+(-1)^n\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\Big\{n+1-\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}-\cdots\cdots+(-1)^n\Big\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\Big\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\Big\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

是ヲ所要ノ證トス.

(8) $F_n=\frac{n}{1}-\frac{1}{2}.\frac{n(n-1)}{1.2}+\frac{1}{3}.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

トナス時ハ

$$F_{n+1}=\frac{n+1}{1}-\frac{1}{2}\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{1}{3}.\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}.\frac{n+1}{1}+(-1)^n\frac{1}{n+1}.$$

ナリ故ニ

$$F_{n+1}-F_n=\frac{1}{1}-\frac{n}{1.2}+\frac{n(n-1)}{1.2.3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}.1+(-1)^n\frac{1}{n+1}.$$

即チ $F_{n+1}-F_n=-\frac{1}{n+1}\Big\{1-\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1.2}-\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\cdots\cdots$

$$+(-1)^n\frac{n+1}{1}+(-1)^{n+1}.1-1\Big\}$$

$$=-\frac{1}{n+1}\Big\{(1-1)^{n+1}-1\Big\}$$

$$=\frac{1}{n+1}$$

而シテ $F_1=1$ ナルヿ明カナリ故ニ

$$F_2=F_1+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2},\qquad F_3=F_2+\frac{1}{3}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3},$$

$$F_4=F_3+\frac{1}{4}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}.$$

等,逐テ斯ノ如シ故ニ $F_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}.$ 即チ

$$\frac{c_1}{1}-\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{c_n}{n}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}.$$

是ヲ所要ノ證トス.

(9) 123款,第三ノ理ニヨリテ

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots\cdots+c_{n-r}x^{n-r}+\cdots\cdots+c^nx^n,$$

$$(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\cdots\cdots+c_rx^{n-r}+\cdots\cdots+c_0x^n$$

此貳式ノ右節ノ相乘積ノ x^{n-r} ノ係數ハ明カニ

$$c_0c_r+c_1c_{r+1}+c_2c_{n+2}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n$$

ナリ,又左節ノ相乘積即チ $(1+x)^{2n}$ ノ x^{n-r} ノ係數ハ明カニ

$$\frac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}$$

ナリ,依テ $c_0c_r+c_1c_{r+1}+c_2c_{r+2}+\cdots\cdots+c_{n-r}c_n=\dfrac{(2n)!}{(n-r)!\,(n+r)!}$.

是ヲ所要ノ證トス.

貳項定則(任意指數)

124. n ガ正ノ整數ナル時

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\cdots\cdots$$

トナルコハ上來論セルガ如シ今此關係式ハ n ガ分數ナル時モ又負數ナル時モ成立スルコヲ證スヘシ.

m 及ビ n ヲ正ノ整數トナス時ハ其數ノ如何ニ拘ハラズ

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

ナリ然ルニ $(1+x)^m\times(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$ ナリ而シテ

$$(1+x)^{m+n}=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

ナリ故ニ

$$\left\{1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$\times\left\{1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots \quad (1)$$

此(1)式ハ m 及ビ n ガ正ノ整數ナル時ハ其數ノ如何ニ拘ハラズ成立ス故ニ左節ノ相乘積ヲ作ル時ハ其 x ノ各方乘冪ノ係數ハ右節ノ x ノ各方乘冪ノ係數ト全等ナラザルベカラズ即チ左右兩節ノ x ノ同方乘冪ノ係數ハ恒同式ナリ. 既ニ兩節ノ x ノ同方乘冪ノ係數ガ恒同式タル以上ハ m,n ノ分數タリ負數タルニ關セズ(1)式ハ成立セザルベカラズ今假リニ $f(m)$ ヲ以テ

$$1+mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

ヲ表ハス時ハ $f(n)$ ハ

$$1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

トナリ $(m+n)$ ハ

$$1+(m+n)x+\frac{(m+n)(m+n-1)}{1.2}x^2+\frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2)}{1.2.3}x^2+\cdots\cdots$$

トナルベシ而シテ $f(0)$ ハ明カニ1ニ等シ故ニ m,n ノ正ノ整數タリ,分數タリ,負數タルニ拘ハラズ(1)ヨリ

$$f(m+n)=f(m)f(n) \quad (2)$$

ヲ得. 此(2)式ノ疊用ニヨリテ

$$f(m+n+p)=f(m+n)f(p)$$
$$=f(m)f(n)f(p).$$
$$f(m+n+p+q)=f(m+n+p)f(q)$$
$$=f(m)f(n)f(p)f(q).$$

逐次此ノ如ク一般ニ

$$f(m+n+p+q+\cdots\cdots)=f(m)f(n)f(p)f(q)\cdots\cdots \quad (3)$$

此式中ノ m,n,p,q 等ハ任意ノ數ナリトス.

今 $m=n=p=q=\cdots\cdots=\frac{s}{r}$ トス但シ s, r ハ正ノ整數トス然ルヰハ(3)式ノ左節ノ括弧內ノ項數ヲ r トセバ(3)式ハ變シテ次ノ如シ

$$f\left(r\times\frac{s}{r}\right)=\left\{f\left(\frac{s}{r}\right)\right\}^r$$

即チ $$(s)=\left\{f\left(\frac{s}{r}\right)\right\}^r$$

是ヨリ $$\left\{f(s)\right\}^{\frac{1}{r}}=f\left(\frac{s}{r}\right)\qquad(5)$$

ヲ得,然ルニ s ハ正ノ整數ナルガ故ニ $f(s)=(1+x)^s$ ナリ故ニ

$$\left\{(s)\right\}^{\frac{1}{r}}=\left\{(1+x)^s\right\}^{\frac{1}{r}}=(1+x)^{\frac{s}{r}};$$

仍テ(4)ヨリ

$$(1+x)^{\frac{s}{r}}=f\left(\frac{s}{r}\right)=1+\frac{s}{r}x+\frac{\frac{s}{r}\left(\frac{s}{r}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{s}{r}\left(\frac{s}{r}-1\right)\left(\frac{s}{r}-2\right)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

是ニテ n ガ正量ナルヰハ常ニ

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots\cdots$$

ナルコヲ證シ得タリ。

次ニ(2)式ニ於テ m ニ代フルニ $-n$ ヲ以テスルヰハ

$$f(-n)+f(n)=f(-n+n)=f(0)=1$$

ヲ得,仍テ

$$f(-n)=\frac{1}{f(n)}$$

然ルニ n ガ正量ナルヰハ $f(n)=(1+x)^n$ ナリ故ニ上式ヨリ

$$\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{(1+x)}=f(-n);$$

然ルニ $\frac{1}{(1+x)^n}$ ハ $(1+x)^{-n}$ ナリ仍テ次式ヲ得

$$(1+x)^{-n}=1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{1.2}x^2+\frac{(-n)-(n-1)(-n-2)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

是ニテ指數ガ負量ナル場合ヲ證シ得タリ。

125. 前款ニ述ベタル貳項定則ノ證明法ハ「オイレル」(Euler)氏ノ法

トス然レ𪜈上ノ如クニテハ證明トシテ尚ホ不充分ノ点瞼シトセズ但シ x ガ1ヨリ小ナルヰハ貳項定則ハ n ノ如何ニ拘ハラズ成立スルモノトス。

貳項定則ノ例二三ヲ下ニ揭ゲ.

例壹. $(1+x)^{\frac{1}{2}}$ ヲ展開セヨ。

貳項定則ニヨリテ

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\cdots\cdots\cdots$$

仍テ所要ノ展開式ハ $1+\frac{1}{2}x-\frac{1.1}{2.4}x^2+\frac{1.1.3}{2.4.6}x^3-\cdots\cdots\cdots$ ナリ。

例貳. $(a^3-3a^2x)^{\frac{5}{3}}$ ヲ展開セヨ。

$$(a^3-3a^2x)^{\frac{5}{3}}=\left\{a^3\left(1-\frac{3x}{a}\right)\right\}^{\frac{5}{3}}=a^5\left(1-\frac{3x}{a}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$$=a^5\left\{1+\frac{5}{3}\left(-\frac{3x}{a}\right)+\frac{\frac{5}{3}\left(\frac{5}{3}-1\right)}{1.2}\left(-\frac{3x}{a}\right)^2+\frac{\frac{5}{3}\left(\frac{5}{3}-1\right)\left(\frac{5}{3}-2\right)}{1.2.3}\left(-\frac{3x}{a}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{\frac{5}{3}\left(\frac{5}{3}-1\right)\left(\frac{5}{3}-2\right)\cdots\left(\frac{5}{3}-r+1\right)}{r!}\left(-\frac{3x}{a}\right)^r+\cdots\right\}$$

$$=a^5\left\{1-\frac{5}{1!}\cdot\frac{x}{a}+\frac{5.2}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\frac{5.2.1}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots+\frac{5.2.1.4.7.\cdots\cdots(3r-8)}{r!}\left(\frac{x}{a}\right)^r+\cdots\cdots\cdots\right\}$$

此式ノ右節ノ展開式ハ所要ノ答式ナリ。

問　　題

(1) $(1+x)^{\frac{1}{4}}$, 及ビ $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ ノ展開式ヲ求ム。

(2) $\sqrt{(a^2-x^2)}$ 及ビ $\sqrt[3]{(a^3-x^3)}$ ノ展開式ヲ求ム。

(3) $\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}$ 及ビ $\frac{1}{\sqrt[3]{(1-x)}}$ ノ展開式ヲ求ム。

(4) 貳項定則ヲ應用シテ$\sqrt{24}$及ビ$\sqrt[5]{31}$ノ近値ヲ算出セヨ.

(5) $(1+x^2)^3(1-x^3)^{-2}$ノ展開式ニ於テx^{3n}ノ係數ハ$2n$ナルコヲ證セヨ.

問題解答

(1) $$(1+x)^{\frac{1}{4}}=1+\tfrac{1}{4}x+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{4}-2\right)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\tfrac{1}{4}x-\frac{1.3}{4.8}x^2+\frac{1.3.7}{4.8.12}x^3-\cdots\cdots$$

$$(1+x)^{\frac{2}{3}}=1+\frac{2}{3}x+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{2}{3}x-\frac{2.1}{3.6}x^2+\frac{2.1.4}{3.6.9}x^3-\cdots\cdots$$

是ヲ所要ノ展開式トス.

(2) $$\sqrt{a^2-x^2}=\left\{a^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

故ニ $$\sqrt{a^2-x^2}=a\left\{1+\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}\left(-\frac{x^2}{a^2}\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=a\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{a^2}-\frac{1.1}{2.4}\,\frac{x^4}{a^4}-\frac{1.1.3}{2.4.6}\,\frac{x^6}{a^6}-\cdots\cdots\right\}$$

同理ニヨリテ

$$\sqrt[3]{a^3-x^3}=a\left(1-\frac{x^3}{a^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$=a\left\{1+\tfrac{1}{3}\left(-\frac{x^3}{a^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1.2}\left(-\frac{x^3}{a^3}\right)^2+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{1.2.3}\left(-\frac{x^3}{a^3}\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=a\left\{1-\frac{1}{3}\,\frac{x^3}{a^3}-\frac{1.2}{3.6}\,\frac{x^6}{a^6}-\frac{1.2.5}{3.6.9}\,\frac{x^9}{a^9}-\cdots\cdots\right\}$$

是ヲ所要ノ展開式トス.

(3) $$\frac{1}{\sqrt{(1+x)}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=1-\tfrac{1}{2}x+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{1.2}x^2+\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots$$

$$=1-\tfrac{1}{2}x+\frac{1.3}{2.4}x^2-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^3+\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{4}}$$

$$=1-\tfrac{1}{4}(-x)+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)}{1.2}(-x)^2+\frac{-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)}{1.2.3}(-x)^3+\cdots$$

$$=1+\tfrac{1}{4}x+\frac{1.5}{4.8}x^2-\frac{1.5.9}{4.8.12}x^3+\cdots\cdots$$

是ヲ所要ノ展開式トス.

(4) $$\sqrt{24}=\sqrt{25-1}=\left\{25\left(1-\frac{1}{25}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}=5\left(1-\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{2}}$$

故ニ $$\sqrt{24}=5\left\{1-\frac{1}{2}\,\frac{1}{25}-\frac{1.1}{2.4}\left(\frac{1}{25}\right)^2-\frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{1}{25}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

即チ $$\sqrt{24}=5(1-{\cdot}02-{\cdot}0002-{\cdot}000004-\cdots\cdots)$$

$$=5\times{\cdot}979796\cdots\cdots\qquad=4{\cdot}89898\pm$$

又 $$\sqrt[5]{31}=\sqrt[5]{32-1}=2\left(1-\frac{1}{32}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=2\left\{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}-\frac{1.4}{5.10}\left(\frac{1}{32}\right)^2-\frac{1.4.9}{5.10.15}\left(\frac{1}{32}\right)^3-\cdots\cdots\right\}$$

$$=2(1-{\cdot}00625-{\cdot}0000781-{\cdot}0000015-\cdots\cdots)$$

$$=1{\cdot}98734$$

仍テ所要ノ答數ハ4.89898及ビ1·98734ナリ.

(5) $(1+x^2)^3(1-x^3)^{-2}$ヲ展開スル井ハ次ノ如シ

$$(1+x^2)^3(1-x^3)^{-2}=(1+3x^2+3x^4+x^6)(1-x^3)^{-2}$$

$$=(1+3x^2+3x^4+x^6)\left\{1-2(-x^3)+\frac{-2(-2-1)}{1.2}(-x^3)^2\right.$$

$$\left.+\frac{-2(-2-1)(-2-2)}{1.2.3}(-x^3)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=(1+3x^2+3x^4+x^6)\{1+2x^3+3x^6+4x^9+\cdots\cdots$$
$$+(n-1)x^{3n-6}+nx^{3n-3}+(n+1)x^{3n}+\cdots\cdots\}$$

是ニ於テ右節ノ相乘積ヲ作ルトキハ x^{3n} ノ係數ハ $(n+1)+(n-1)$ 即チ $2n$ ナリ；是ヲ所要ノ證トス．

第七編

指數定理．對數

126. $\frac{1}{n}$ ガ1ヨリ小ナルトキハ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ ハ貳項定則ニヨリテ展開スルヿヲ得ベシ其展開式ハ次ノ如シ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+nx.\frac{1}{n}+\frac{nx(nx-1)}{1.2}\frac{1}{n^2}+\frac{nx(nx-1)(nx-2)}{1.2.3}\frac{1}{n^3}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{nx(nx-1)\cdots\cdots(nx-r+1)}{r!}\frac{1}{n^r}+\cdots\cdots$$

是ヲ次ノ如ク書クヿヲ得．

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=1+x+\frac{1}{1.2}.\frac{nx}{n}.\frac{nx-1}{n}+\frac{1}{1.2.3}\frac{nx}{n}.\frac{nx-1}{n}.\frac{nx-2}{n}$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}.\frac{nx}{n}.\frac{nx-1}{n}\cdots\cdots\frac{nx-(r-1)}{n}+\cdots\cdots$$
$$=1+x+\frac{1}{1.2}x\left(x-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)+\cdots\cdots$$

此式ニ於テ $x=1$ トナストキハ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)+\cdots\cdots$$

然ルニ $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}^{x}$ ナリ故ニ上式ヨリ之ヲ次ノ如ク記スヿヲ得．

$$1+x+\frac{1}{1.2}x\left(x-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)$$
$$+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}x\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(x-\frac{r-1}{n}\right)+\cdots\cdots$$

$$=\left\{1+1+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1.2.3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\right.$$
$$\left.+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)+\cdots\cdots\cdots\right\}^x$$

此式ハnノ如何ニ拘ハラズ成立ス故ニnヲ極メテ大ナラシムルヿヲ得今nヲ至大ナラシムルトキハ

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\cdots\cdots\frac{r-1}{n},\cdots\cdots\cdots$$

等ハ極メテ小ナル數トナルベシ依テ此等ノ數ヲ省略スルトキハ

$$1+x+\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{1.2.3}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}x^r+\cdots\cdots\cdots$$
$$=\left\{1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots\cdots\right\}^x$$

此右節ノ括弧内ノ級數ヲeニテ表ハストキハ上式ハ

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots\cdots\cdots$$

トナル,之ヲ指數定理ト云フ.

127. eハ數學上極メテ要用ナル數ナリ而シテ此數ハ2ヨリ大ニシテ3ヨリ小ナリ何トナレバ

$$1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots$$

ハ明カニ2ヨリ大ニシテ

$$1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^r}+\cdots\cdots$$

ヨリハ小ナリ,然ルニ幾何級數 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^r}+\cdots\cdots$ ノ總和ハ $\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ 即チ1ニ等シ,是ニヨリテeハ3ヨリ小ナリ.

今eノ値ヲ算出スルトキハ次ノ如シ

$$e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}+\frac{1}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6}$$
$$+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}+\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10}+\cdots\cdots\cdots$$
$$=1+1+{\cdot}5+{\cdot}1666667+{\cdot}0416667+{\cdot}0083333+{\cdot}0013889$$

$$+{\cdot}0001984+{\cdot}0000248+{\cdot}0000027+{\cdot}0000003+\cdots\cdots\cdots$$
$$=2{\cdot}7182818\cdots\cdots\cdots$$

即チeノ近値ハ2·7182818ナリ.

對　數

128. 壹數ノ幾方乘冪ガ他ノ壹數ニ等シキカノ間ニ於テ其方乘指數ヲ前數ヲ底トナストキノ後數ノ對數(*logarithm*)ト稱ス例ヘバa^xガmニ等シキトキハxハaヲ底トナストキノmノ對數ナリ而シ此事實ヲ $\log_a m=x$ ナル記法ニテ示ス. $4^3=64$ ニ於テ3ハ4ヲ底トナストキノ64ノ對數ニシテ $\log_4 64=3$ ナリ,又 $10^2=100$ ニ於テ2ハ10ヲ底トナストキノ100ノ對數ニシテ $\log_{10}100=2$ ナリ.

129. 對數ノ重要ナル性質ヲ次ニ揭ゲ.

第壹. aハ如何ナル數ナルモ $a^0=1$ ナリ是ニ由テ
底ノ如何ニ拘ハラズ1ノ對數ハ0ナリ.

第貳. $x=1$ ナルトキハ $a^x=a$ ナリ是ニ由テ
底自身ノ對數ハ1ナリ.

第三. $\log_a m=x$, $\log_a n=y$, $\log_a p=z$,$\cdots\cdots$ 等ナルトキハ

$$a^x=m,\quad a^y=n,\quad a^z=p$$

等ナリ故ニ　$a^x.a^y.a^z.\cdots\cdots\cdots=mnp\cdots\cdots\cdots$

即チ　$a^{x+y+z+\cdots\cdots\cdots}=mnp\cdots\cdots\cdots$

故ニ　$\log_a(mnp\cdots\cdots)=x+y+z+\cdots\cdots\cdots$

即チ　$\log_a(mnp\cdots\cdots)=\log_a m+\log_a n+\log_a p+\cdots\cdots\cdots$

是ニ由テ;
諸數ノ積ノ對數ハ其諸數ノ對數ノ和ニ等シ.

第四. $\log_a m=x$, $\log_a n=y$ ナルトキハ

$$a^x=m,\quad a^y=n$$

ナリ故ニ　$\frac{a^x}{a^y}=\frac{m}{n}$　即チ　$a^{x-y}=\frac{m}{n}$

故ニ $$\log_a\frac{m}{n}=x-y$$

即チ $$\log_a\frac{m}{n}=\log_a m-\log_a n$$

是ニ由テ；

貳數ノ商ノ對數ハ實數ノ對數ト法數ノ對數トノ差ニ等シ.

第五. $m=a^x$ ナル𪜈ハ $m^n=a^{nx}$ ナリ故ニ

$$\log_a m^n=nx=n\log_a m$$

ナリ是ニ由テ；

壹數ノ任意ノ方乘冪ノ對數ハ其數ノ對數ニ方乘指數ヲ乘セルモノニ等シ.

第六. $\log_a m=x,\ \log_b m=y$ ナル𪜈ハ $m=a^x=b^y$ ナリ；

故ニ $$a=b^{\frac{y}{x}},\quad b=a^{\frac{x}{y}}$$

即チ $$\frac{y}{x}=\log_b a,\quad \frac{x}{y}=\log_a b$$

ナリ故ニ $$\log_a b\times\log_b a=\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}=1$$

ナリ又 $\frac{y}{x}=\log_b a$ ヨリ $y=x\log_b a$ 即チ $\log_b m=\log_a m\times\log_b a$ ナリ.

然ルニ $\log_a b\times\log_b a=1$ ヨリ $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ ヲ得故ニ

$$\log_b m=\log_a m\times\log_b a=\log_a m\times\frac{1}{\log_a b}$$

是ニ由テ；

b ヲ底トナス𪜈ノ或數ノ對數ハ a ヲ底トナス𪜈ノ其數ノ對數ニ常數 $\log_b a$ 又ハ $\frac{1}{\log_a b}$ ヲ乘ジタルモノニ等シ.

此定則ニヨリ或ル壹數ヲ底トナセル𪜈ノ諸數ノ對數ヲ化シテ他ノ壹數ヲ底トナセル對數ヲ若出スヿヲ得ベシ.

130. 對數級數　$a=e^k$ ナル𪜈ハ $k=\log_e a$ ナリ但シ e ハ **127** 款ニ算出シタル 2·7182818 ナル數ヲ示スモノトス然ル𪜈ハ

$$a^x=e^{xk}=e^{x\log_e a}$$

ナリ故ニ **126** 款ニヨリテ

$$a^x=e^{(x\log_e a)}=1+x(\log_e a)+\frac{(x\log_e a)^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{(x\log_e a)^r}{r!}+\cdots\cdots$$

今此式ニ於テ $a=1+y$ ト替キ代フル𪜈ハ

$$(1+y)^x=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{2!}\{x\log_e(1+y)\}^2+\frac{1}{3!}\{x\log_e(1+y)\}^3+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+\frac{1}{r!}\{x\log_e(1+y)\}^r+\cdots\cdots$$

y ガ若シ 1 ヨリ小ナル𪜈ハ $(1+y)^x$ ハ貳項定則ニヨリテ展開スルヿヲ得ベシ故ニ $(1+y)^x$ ニ代フルニ其展開式ヲ以テスル𪜈ハ上式ハ次ノ如シ

$$1+xy+\frac{x(x-1)}{1.2}y^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}y^3+\cdots\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-r+1)}{r!}y^r+\cdots\cdots$$

$$=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{1.2}\{x\log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots$$

左節ノ各節ノ分子ヲ相乘シ終ル後ヲ之ヲ x ノ方乘冪ノ順ニ列ブル𪜈ハ次ノ如シ

$$1+x\left\{y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots\right\}+x^2\text{ 以上ヲ含ム項.}$$

$$=1+x\log_e(1+y)+\frac{1}{1.2}\{x\log_e(1+y)\}^2+\cdots\cdots$$

此式ノ左右兩節ニ於テ x ノ係數ハ相ヒ等シカラザルヲ得ズ故ニ

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\cdots\cdots+(-1)^{r-1}\frac{y^r}{r}+\cdots\cdots$$

是ヲ對數級數ト稱ス而ノ此式ハ y ガ 1 ヨリ小ナル𪜈ハ常ニ成立ス.

131. 前款ニ得タル對數級數ハ y ガ 1 ニ近キ數ナル𪜈ハ計算ニ適セズ依テ計算ニ便ナル級數ヲ作ルヿ次ノ如シ

$$\log_e(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}+\cdots\cdots \tag{1}$$

ニ於テ y ノ記號ヲ變ズル𪜈ハ

$$\log_e(1-y)=-y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}-\cdots\cdots \tag{2}$$

此兩式相ヒ減ズル𪜈ハ

$$log_e(1+y)-log_e(1-y)=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

然ルニ **129** 款第四ニヨツテ

$$log_e(1+y)-log_e(1-y)=log_e\frac{1+y}{1-y}$$

ナリ故ニ

$$log_e\frac{1+y}{1-y}=2\left(y+\frac{y^3}{3}+\frac{y^5}{5}+\cdots\cdots\right)$$

今 $\frac{1+y}{1-y}=\frac{m}{n}$ トスル片ハ $y=\frac{m-n}{m+n}$ トナル故ニ上式ハ變シテ次ノ如シ

$$log_e\frac{m}{n}=2\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\cdots\right\} \quad (3)$$

此式ヲ用井 e ヲ底トナセル片ノ任意整數ノ對數ヲ容易ニ算出シ得ベシ例ヘバ $m=2,\ n=1$ トナス片ハ

$$log_e2=2\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\cdots\cdots\right\} \quad (4)$$

是ヨリ容易ニ log_e2 ヲ算出シ得ベシ次ニ $m=5,\ n=4$ トナス片ハ

$$log_e\frac{5}{4}=log_e5-log_e4=2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

然ルニ $log_e4=log_e2^2=2log_e2$ (**129** 款第五)

故ニ

$$log_e5=2log_e2+2\left\{\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\cdots\right\} \quad (5)$$

是ヨリ容易ニ log_e5 ヲ算出シ得ベシ今 (4), (5) 兩式ノ運算ヲナス片ハ次ノ如シ.

3) 1·00000000				
9) ·33333333	$=\frac{1}{3}$	…………	$\frac{1}{3}$	= ·33333333
9) ·03703704	$=\left(\frac{1}{3}\right)^3$	…………	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3$	= ·01234568
9) ·00411523	$=\left(\frac{1}{3}\right)^5$	…………	$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5$	= ·00082305
9) ·00045725	$=\left(\frac{1}{3}\right)^7$	…………	$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7$	= ·00006532
9) ·00005081	$=\left(\frac{1}{3}\right)^9$	…………	$\frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^9$	= ·00000565
9) ·00000565	$=\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$	…………	$\frac{1}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^{11}$	= ·00000051
9) ·00000063	$=\left(\frac{1}{3}\right)^{13}$	…………	$\frac{1}{13}\left(\frac{1}{3}\right)^{13}$	= ·00000005
·00000007	$=\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$	…………	$\frac{1}{15}\left(\frac{1}{3}\right)^{15}$	= ·00000000
				= ·34657359
				2
			log_e2	= ·69314718

又 $log_e4=2log_e2=2\times·69314718=1·38629436.$

9) 1·00000000				
9) ·11111111	$=\frac{1}{9}$	…………	$\frac{1}{9}$	= ·11111111
9) ·01234568				
9) ·00137174	$=\left(\frac{1}{9}\right)^3$	…………	$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3$	= ·00045725
9) ·00015242				
9) ·00001694	$=\left(\frac{1}{9}\right)^5$	…………	$\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5$	= ·00000339
9) ·00000188				
·00000021	$=\left(\frac{1}{9}\right)^7$	…………	$\frac{1}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7$	= ·00000003
				·11157178
				2
				·22314356

故ニ $log_e5=2log_e2+·22314356=1·38629436+·22314356$

$=1·60943792.$

又 $log_e10=log_e(2\times5)=log_e2+log_e5$

故ニ $log_e10=·6931478+1·60943792$

$=2·3025851.$

132. e ヲ底トセル對數ヲ納氏對數 (*Napierian logarithm*) ト稱ス.

計算ノ勞ヲ省カンタメニ對數ヲ用ユルニハ 10 ヲ底トナスモノヲ利アリトス是ヲ常對數 (*Common logarithm*) ト稱ス.

129 款第六ニヨリテ

$$log_{10}m=\frac{1}{log_e10}\times log_em$$

然ルニ前款ニヨリテ $log_e10=2·3025851$ ナリ故ニ

$$\frac{1}{log_e10}=\frac{1}{2·3025851}=·43429448$$

トナル依テ $log_{10}m=·43429448\times log_em.$

是ニ由テ前款 (3) 式ニヨリテ或數 m ノ納氏對數ヲ算出シ得ナバ之ニ .43429448 ヲ乘シテ其數ノ常對數ヲ得ベシ, 又ハ前款ノ (3) 式ノ兩邊ニ .43429448 ヲ乘シテ

$$·43429448log_em-·43429448log_en$$

$$=2\times·43429448\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right\}$$

即チ $$\log_{10}m-\log_{10}n={\cdot}86858896\left\{\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right\}$$

例ヘバ $\log_{10}240=2{\cdot}3802113$ ヲ與ヘ以テ $\log_{10}241$ ヲ算出セント要ム。

本例ニ於テハ $m=241,\ n=240$ ナリ故ニ

$$\log_{10}241=\log_{10}240+{\cdot}86858896\left\{\frac{1}{481}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{481}\right)^3+\cdots\right\}$$

即チ $$\log_{10}241=2{\cdot}3802113+{\cdot}0018058+{\cdot}0000000.$$
$$=2{\cdot}3820171.$$

仍テ 241 ノ常對數ハ $2{\cdot}3820171\pm$ ナリ。

133. $10^0=1,\ 10^1=10,\ 10^2=100,\ 10^3=1000,\ 10^4=10000$ 等ナリ故ニ

$$\log1=0,\ \log10=1,\ \log100=2,\ \log1000=3,\ \log10000=4$$

等ナリ但シ常對數ヲ表ハスニハ $\log_{10}$ ト記スベキモノナレ圧之ヲ單ニ $og.$ ト略記セリ。

是ニ由テ 1 ヨリ大ニシテ 10 ヨリ小ナル數ノ常對數ハ 0 ヨリ大ニシテ 1 ヨリ小ナリ, 又 10 ヨリ大ニシテ 100 ヨリ小ナル數ノ常對數ハ 1 ヨリ大ニシテ 2 ヨリ小ナリ逐テ此ノ如シ故ニ 1 ヨリ大, 10 ヨリ小ナル數即チ整數位 1 位ヲ有スルモノヽ常對數ハ小數ナリ; 10 ヨリ大ニシテ 100 ヨリ小ナル數即チ整數部 2 位ヲ有スル數ノ常對數ハ 1 ト小數トヨリ成リ立ツベシ同理ニヨリ整數部 3 位ヲ有スル數ノ常對數ハ 2 ト小數トヨリ成リ立ツベシ逐テ此ノ如シ尚ホ前款ニ得タル $\log241=2{\cdot}3820171\pm$ ニ就テ之ヲ示スベシ

$$\log241=2{\cdot}3820171$$

即チ整數 3 位ノ數ナル 241 ノ常對數ハ 2 ト小數 ${\cdot}3820171$ トヨリ成ル。

又 $$\log2410=\log(241\times10)=\log241+\log10$$
$$=2{\cdot}3820171+1=3{\cdot}3820171.$$

即チ整數 4 位ノ數ナル 2410 ノ常對數ハ 3 ト小數 ${\cdot}3820171$ トヨリ成ル而シテ此小數部ハ前ト異ナルコナシ。

又 $$\log24100=\log(241\times100)=\log241+\log100$$
$$=2{\cdot}3820171+2=4{\cdot}3820171$$

即チ整數 5 位ノ數ナル 24100 ノ常對數ハ 4 ト小數 ${\cdot}3820171$ トヨリ成ル而

シテ此小數部ハ前ト異ナルコナシ。

又 $$\log2{\cdot}41=\log(241\div10)=\log241-\log10$$
$$=2{\cdot}3820171-1=1{\cdot}3820171$$
$$\log2{\cdot}41=\log(241\div100)=\log241-\log100$$
$$=2{\cdot}3820171-2={\cdot}3820171$$

是ニ由テ次ノ定則アリ:

整數部 n 位ヲ有スル數ノ對數ハ $n-1$ ト小數トヨリ成ル而シテ數字ノ排列同ジキ片ハ其小數部ハ恒ニ相ヒ同ジ。

次ニ $$\log{\cdot}241=\log(2{\cdot}41\div10)=\log2{\cdot}41-\log10$$
$$={\cdot}3820171-1$$

ナリ今此數ヲ算出スル片ハ $-{\cdot}6179829$ トナル然レ圧又之ヲ

$$-1+{\cdot}3820171$$

ト記シ置クモ固ヨリ可ナリ之ヲ通常 $\bar{1}{\cdot}3820171$ ト記ス即チ $-1+{\cdot}3820171$ ヲ略記セルナリ。同理ニヨリテ

$$\log{\cdot}0241=\log(2{\cdot}41\div100)=\log2{\cdot}41-\log100$$
$$={\cdot}3820171-2$$
$$=\bar{2}{\cdot}3820171.$$
$$\log{\cdot}0241=\log(2{\cdot}41\div1000)=\log2{\cdot}41-\log1000$$
$$={\cdot}3820171-3$$
$$=\bar{3}{\cdot}3820171.$$

逐テ此ノ如シ, 茲ニ最トモ注意スベキコアリ乃ハチ $\bar{3}{\cdot}3820171$ ノ如ク記セルハ $-3{\cdot}3820171$ ノ意ニハアラズシテ $-3+{\cdot}3820171$ ヲ表ハセルコナリ故ニ此ノ如ク記セルモノヽ小數部ハ常ニ正量ナリト知ルベシ。

是ニ由テ次ノ定則アリ:

首位ノ數字ガ小數第 n 位ニ當ル小數ノ對數ハ $-n$ ト正ノ小數トヨリ成ル而シテ其數字ノ排列同ジキ片ハ其對數ノ小數部ハ常ニ相ヒ同ジ。

上ノ貳定則ニヨリテ觀ル片ハ數字ノ排列全ク同ジクシテ唯其位ノミ異ナル數ノ對數ノ小數部ハ常ニ相ヒ同ジクシテ唯其整數部ノミ相ヒ異ナルベシ。

對數ノ整數部ヲ指標ト稱シ小數部ヲ假數ト稱ス,而シテ小數ノ對數ノ指標ハ上ノ第二定則ニヨリ恒ニ負數ナリ.

134. 對數ノ媒助ニヨリ乘除,方乘,開方ノ運算ヲ夫々加,減,乘,除ニヨリテ容易ニ行フヿヲ得ベシ(129款,第三,第四,第五)而シテ對數表ノ引キ方及ビ對數ヲ用ヰテ此等ノ運算ヲナスノ方法ハ三角術ニ於テ講ズルヲ例トス長澤講師ノ三角術講義ニ就テ見ルベシ.

問題

(1) $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ ニ於テ n ガ無限大トナル片ハ其値ハ e^x トナルヿヲ証セヨ.

(2) $\frac{e^2+1}{e^2-1}=\left\{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+\cdots\right\}\div\left\{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\cdots\right\}$ ナルヿヲ証セヨ.

(3) $log_e x=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots\cdots$ ナルヿヲ証セヨ.

(4) $log_{10}60=1{\cdot}7781513$ ヲ與ヘ以テ $log_{10}61$ ヲ算出セヨ.

(5) $2log(1-x)=log(1-x)^2$ ナル恒同式ヨリ

$$2^n-n.2^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}+\cdots=2$$ ナルヿヲ證セヨ.

(6) $ax^2+bx+c=0$ ノ武根ヲ $m,\ n$ トスル片ハ

$$log_e(a-bx+cx^2)=log_e a+(m+n)x-\frac{m^2+n^2}{2}x^2+\cdots$$ ナルヿヲ證セヨ.

問題解答

(1) $n=mx$ トスル片ハ

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{mx}\right)^{mx}=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{mx}=\left\{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right\}^x$$

トナル今 n ヲ無限大トナス片ハ従テ m モ亦タ無限大トナルベシ故ニ $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ ハ126款ニヨリテ e トナル故ニ n ガ無限大トナル片ハ

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

トナル是ヲ所要ノ證トス.

(2) **126**款ニヨリテ

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\cdots \tag{1}$$

又 126款指數定理ニ於テ $x=-1$ トナス片ハ

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots\cdots \tag{2}$$

(1), (2) 両式相加ヘ及ビ相ヒ減ズル片ハ

$$e+e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)$$

$$e-e^{-1}=2\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)$$

故ニ

$$\frac{e+e^{-1}}{e-e^{-1}}=\frac{2\left(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots\right)}{2\left(1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\cdots\right)}$$

即チ
$$\frac{e^2+1}{e^2-1}=\frac{1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\cdots}{1+\frac{1}{3!}+\frac{1}{5}+\cdots}$$

是ヲ所要ノ證トス.

(3) $$log_e x=log_e\frac{x}{1}=log_e\frac{x+1-1}{x+1-x}=log_e\frac{1-\frac{1}{x+1}}{1-\frac{x}{x+1}}$$

$$=-log_e\left(1-\frac{x}{x+1}\right)+log_e\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$$

此右節ノ両項ヲ130款ノ對數級數ニ化スル片ハ

$$=\left\{\frac{x}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{x^3}{(x+1)^3}+\cdots\right\}$$

$$-\left\{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^3}+\cdots\right\}$$

$$=\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{x^2-1}{(x+1)^2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^3-1}{(x+1)^3}+\cdots\cdot$$

是ヲ所要ノ證トス.

(4) **132** 款ニ於テ $m=61,\ n=60$ トナス𪜈ハ

$$log61-log60={\cdot}86858896\left\{\frac{1}{121}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{121}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{121}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

故ニ $$log61=log60+{\cdot}86858896\left\{\frac{1}{121}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{121}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{121}\right)^5+\cdots\cdots\right\}$$

即チ $$\begin{aligned}log61&=1{\cdot}7781513+{\cdot}0071784+{\cdot}0000002+{\cdot}0000000\\&=1{\cdot}7853299\end{aligned}$$

仍テ所要ノ答數ハ 1·7853299 ナリ.

(5) $$2log_e(1-x)=log_e(1-x)^2=log_e(1-2x+x^2)$$

故ニ $$2log_e(1-x)=log_e\{1-x(2-x)\}$$

此式ノ兩節ヲ **130** 款ノ對數級數ニヨリテ展開スル𪜈ハ

$$-2x-\frac{2x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}-\cdots\cdots-\frac{2x^n}{n}-\cdots\cdots$$

$$=-x(2-x)-\frac{x^2(2-x)^2}{2}-\frac{x^3(2-x)^3}{3}-\cdots\cdots$$

$$-\frac{x^{n-2}(2-x)^{n-2}}{n-2}-\frac{x^{n-1}(2-x)^{n-1}}{n-1}-\frac{x^n(2-x)^n}{n}-\cdots\cdots$$

此兩節ヨリ x^n ノ係數ヲ求ムル𪜈ハ左節ニ於テハ明カニ $-\frac{2}{n}$ ナリ

又右節ノ x^n ノ係數ハ

$$-\frac{x^n(2-x)^n}{n}-\frac{x^{n-1}(2-x)^{n-1}}{n-1}-\frac{x^{n-2}(2-x)^{n-2}}{n-2}-\cdots\cdots$$

ノ各項ヲ式項定則ニヨリテ展開シ以テ之ヲ探ラサルベカラズ今此各項ヲ展開スル𪜈ハ次ノ如シ

$$-\frac{x^n}{n}(2^n-n2^{n-1}x+\cdots\cdot)-\frac{x^{n-1}}{n-1}\left\{2^{n-1}-(n-1)2^{n-2}x+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}2^{n-3}x^2-\cdots\cdot\right\}$$

$$-\frac{x^{n-2}}{n-2}\left\{2^{n-2}-(n-2)2^{n-3}x+\frac{(n-2)(n-3)}{1.2}2^{n-4}x^2-\cdots\cdots\right\}$$

$$-\frac{x^{n-3}}{n-3}\left\{2^{n-3}-(n-3)2^{n-4}x+\frac{(n-3)(n-4)}{1.2}2^{n-5}x^2-\frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}x^3\right.$$

$$\left.+\cdots\cdots\right\}-\cdots\cdots\cdots$$

是ヨリ x^n ノ係數ヲ求ムル𪜈ハ

$$-\frac{2^n}{n}+2^{n-2}-\frac{n-3}{1.2}2^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}-\cdots\cdots\cdots$$

ヲ得, 故ニ

$$-\frac{2}{n}=-\frac{2^n}{n}+2^{n-2}-\frac{n-3}{1.2}2^{n-4}+\frac{(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}-\cdots\cdots\cdots$$

仍テ $$2=2^n-n\,2^{n-2}+\frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-4}-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-6}+\cdots\cdots\cdots$$

是ヲ所要ノ證トス.

(6) 題意ニヨリテ $ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)$ ナリ今此式ニ於テ $x=-\frac{1}{y}$ トナス𪜈ハ $a-by+cy^2=a(1+my)(1+ny)$ トナル是ニ於テ y ヲ x ニ書キ換ル𪜈ハ

$$a-bx+cx^2=a(1+mx)(1+nx)$$

故ニ $$log_e(a-bx+cx^2)=log_ea+log_e(1+mx)+log_e(1+nx)$$

$$=log_ea+mx-\frac{m^2x^2}{2}+\frac{m^3x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots$$

$$+nx-\frac{n^2x^2}{2}+\frac{n^3x^3}{3}-\cdots\cdots\cdots$$

$$=log_ea+(m+n)x-\frac{m^2+n^2}{2}x^2+\frac{m^3+n^3}{3}x^3-\cdots\cdots\cdots$$

是ヲ所要ノ證トス.

代數學講義錄終

代数学講義

遠藤　政之助／述

〔刊年不明〕

代數學講義