3. $x^3+(4ab-b^2)x-(a-2b)(a^2+3b^2)$ ヲ $x-a+2b$. ニテ除セヨ、

4. 次ノ各式ノ因子ヲ求ム、

(i) $(2x+y-z)^2-(x+2y+4z)^2$. (ii) $x^2y^2-x^2-y^2+1$,

(iii) $x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$.

5. 次ノ各式ヲ簡約セヨ、

(i) $\dfrac{x^3+4x^2-8x+24}{8-8x+x^3-x^4}$.

(ii) $\dfrac{x-1}{(x-2)(x-3)}-2\dfrac{x-2}{(x-3)(x-1)}+\dfrac{x-3}{(x-1)(x-2)}$.

6. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{2}{x-b}=\dfrac{3}{x-c}$. (ii) $4x^2-25x-21=0$.

(iii) $x+y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{2}$.

7. $x^2-5x+7$ ハ決シテ $\frac{3}{4}$ ヨリ小ナラザルコトヲ證セヨ、

8. 二ツノ連續シタル整數アリ其立方ノ差ハ 919 ナリト云フ因テ各ヲ問フ、

## B.

1. $(x+3)^3-3(x+2)^3+3(x+1)^3-x^3$. ヲ簡約セヨ、

2. $(x-a)^2+(y-b)^2+(a^2+b^2-1)(x^2+y^2-1)=(ax+by-1)^2+(bx-ay)^2$. ヲ證セヨ、

3. $x^6-2a^3x^3+a^6$ ヲ $x^2-2ax+a^2$. ニテ除セヨ、

4. $8x^3+27, 16x^4+36x^2+81$ 及ビ $6x^2-5x-6$. ノ最低公倍數ヲ求メヨ、

5. 次ノ各式ヲ簡約セヨ、

(i) $\dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{x+3}{x^2+1}$. (ii) $\dfrac{\{(a+b)(a+b+c)+c^2\}\{(a+b)^2-c^2\}}{\{(a+b)^3-c^3\}(a+b+c)}$



6. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $(6-x)(1+2x)+3x(x+5)=(x+1)^2-x$. (ii) $5x^2+7x=160$.

(iii) $x^2+xy=10,\ y^2-xy=3$.

7. $x^2-5x+2=0$ ナル方程式ノ根ノ平方ノ和ハ 21 ナルコトヲ證セヨ、

8. 或合奏會ニ於テ特別席ト幷席ヨリ上リシ金高ハ各 £60 ナリ然シテ特別券ハ幷券ヨリ 3s. 高ク又幷券ノ賣レタル枚數ハ特券ノ數ヨリ 360 枚多シト云フ因テ此兩券ノ賣レタル總枚數ヲ問フ、

## C.

1. $12a-3\{b-2(a-3b)-2a\}$. ヲ簡約セヨ

2. $a^3+2a^2b-ab^2+2b^3$ ニ $a^3-2a^2b-ab^2-2b^3$. ヲ乘ゼヨ、

3. $24x^4-10x^3y-8x^2y^2+10xy^3-4y^4$ ヲ $2y^2-xy-4x^2$. ニテ除セヨ、

4. $9x^2+9x+2$, 及ビ $4(ab-cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$. ノ因子ヲ求ム、

5. $\dfrac{x+\dfrac{y-x}{1+xy}}{1-\dfrac{x(y-x)}{1+xy}}$ ヲ簡約シ且ツ $\dfrac{b-c}{a}+\dfrac{c-a}{b}+\dfrac{a-b}{c}+\dfrac{(b-c)(c-a)(a-b)}{abc}$ $=0$. ナルコトヲ證セヨ、

6. 次ノ各方程式ヲ解セヨ、

(i) $\dfrac{x-1}{3}-\dfrac{x-3}{5}=7+\dfrac{x+2}{6}$. (ii) $x+y=2a, x^2+y^2=2a^2$.

7. $x^2+6x+12$, ノ最低値及 $6x-x^2-4$. ノ最高値ヲ求ム、

8. 甲乙二人ニテ十八個ノ貨幣ヲ有ス但志及片ノミナリ而シテ甲ノ有スル志ノ數ハ片ニ三倍シ乙ノ志ノ數ハ片ノ數ニ等シク又甲ハ乙ヨリ九片多ク有ツト云フ因テ各ノ所持金ヲ問フ、

## D.

1. 次式ヲ證セヨ、

$$(b+c)^2-a^2+(c+a)^2-b^2+(a+b)^2-c^2=(a+b+c)^2.$$

2. $(1+x)^4+2(1-x+x)^2$ ヲ $x$ ノ遞昇自乘ニ列セヨ、

3. 連續シタル任意二整數ノ平方ノ差ハ小數ノ二倍ヨリ一多シ其證ヲ求ム、

4. 若シ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$. ナルトキ $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$. ナルコトヲ證セヨ、

5. $x^2-5x-14$, $x^2-4x-21$ 及ビ $x^3-3x^2-25x-21$ ノ最低公倍數ヲ求ム、

6. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{4}{x}-\frac{3}{y}+5=\frac{6}{x}+\frac{3}{y}=10.$　　(ii) $\frac{1}{x}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{x-a-b}.$

(iii) $x+y=3,\ 3x^2-11y^2=1.$

7. $ax^2+bx+c=0$, ノ二根ヲ $x_1\ x_2$ トスルトキハ次式ヲ證セヨ、

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{b^2-2ac}{ac}.$$

8. アルコール 60 ガロン含ム桶ヨリ若干ガロンヲ汲出シ水ヲ入レテ其虛ヲ充タス次ニ之レヨリ若干ガロンヲ汲出ス其量ハ前ヨリ 14 ガロン多シ而シテ又其代リニ水ヲ入レタリ然ルニ桶ニ殘ル處ノアルコールハ水ト全量ニナレリト云フ然レバ始メ汲出セシハ幾ガロンナリシヤ、

## E.

1. $x=4\frac{1}{3}$ ナルトキ次式ノ數値ヲ求ム、

$$\frac{x}{2}-\left\{\frac{2x-3}{3}-\frac{3x-1}{4}\right\}+\frac{x-1}{2}.$$

2. 次ノ二式ヲ證セヨ、





$(a+b)^4-(a^2-b^2)^2=4ab(a+b)^2$, 及ビ

$$2(a-b)(a-c)+2(b-c)(b-a)+2(c-a)(c-b)$$
$$=(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$

3. $(a+2b-3c+d)^2-(2a+b+3c-d)^2$ ヲ $a+b$. ニテ除セヨ、

4. $6x^2-5ax-6a^2$ 及 $4x^3-2ax^2-9a^3$. ノ最低公倍數ヲ求ム、

5. $\left(\frac{y^2}{x}+\frac{x^2}{y}\right)\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{x}{xy-y^2}-\frac{y}{x^2+xy}$. ヲ簡約セヨ、

6. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2.$　　(iii) $x+\frac{1}{y}=\frac{21}{10}$,　$y+\frac{1}{x}=\frac{7}{3}.$

(ii) $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=11.$

7. $x$ ノ如何ナル値ニ向テ $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$ 及ビ $\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$ ハ互ニ相等シキヤ、

8. 騎士アリ齊速ヲ以テ 180 マイルヲ馳ル今毎時ノ速力前ヨリ 3 マイル遲ク乘ルトキハ三時間遲ク着スト云フ仍テ毎時ノ速サヲ問フ、

## F.

1. $3a^3-4a^2b+2ab^2$, $3a^2b-4ab^2+2b^3$, $3ab^2-4b^3+2a^3$ 及ビ $3b^3-4a^3+2a^2b$. ヲ加ヘヨ、

2. $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2$. ナルコトヲ證セヨ、

3. $2+11x+11x^2+x^3-x^4$ ヲ $x^2+3x+2$. ニテ除セヨ、

4. $x^3-x^2-2x+2$ 及ビ $x^4-3x^3+2x^2+x-1$. ノ最高公因數ヲ求ム、又 $x$ ノ如何ナル値ニ以テ此兩式消失スルヤ、

5. 次ノ各式ヲ簡約セヨ、

(i) $\frac{2}{x(x-2)}+\frac{1}{x^2-5x+6}+\frac{3}{x(3-x)}$.　(ii) $\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-x}}}$

6. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{x+3}{5}-\frac{6-x}{10}=x-\frac{7}{10}$.　(ii) $\frac{x+y}{a+b}+\frac{x-y}{a-b}=2,\ ax+by=a^2+b^2$.

(iii) $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=2\frac{x+3}{x-3}$.

7. 次ノ方程式ノ根ノ平方ノ差ヲ求ム、

$$x^2-7x+9=0.$$

8. 某數アリ其數ハ其平方根ヨリ 156 多シト云フ本數如何、



# 第　拾　八　編

## 自乘及ビ根 (Powers and Roots.)

**第百五十六欵**　量ノ自乘ヲ求ムルノ方法ヲ乘方ト稱シ (*Involution*), 其反對ノ方法即チ量ノ根ヲ求ムルノ方法ヲ開方 (*Evolution*), ト稱ス、

本編ニ於テ乘方及ビ開方ノ或ル場合ヲ考究ス可シ、

**第百五十七欵**　第三十二欵ニ於テ證明セシ如クm及ビnノ任意正整數ナル片

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

此ノ如ク同ジ量ノ或ル二ツノ自乘ノ積ノ指數ハ各因數ノ指數ノ和ナリ、

此レト全ジ法則ヲ同ジ量ノ自乘ノ若干數ノ積ニ向テ適用スルコトヲ得可シ何トナレバ

$$a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n}\times a^p=a^{m+n+p},$$

因數如何ニ多クトモ亦此ノ如クナルベシ、

是故ニ　$a^m\times a^n\times a^p\ldots\ldots=a^{m+n+p+\ldots\ldots}$

故に同じ量の自乘の若干數の積の指數は其因數の指數の和なり、

**第百五十八欵**　指數定則ニ由テ

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}=a^m$$

是故ニ　$a^m\div a^n=a^{m-n}$

上ノ結果ハ亦次ノ如クニシテ求メ得ベシ、

$$a^m\div a^n=\frac{a\times a\times a\times a\ldots m\text{因數迄}}{a\times a\times a\times a\ldots n\text{因數迄}}$$

今$m$若シ$n$ヨリ大ナルトキハ分母ノ$n$因數ハ分子ノ$m$因數ト相消シ合フヲ得然シテ分子ニ於テ$m-n$因數ヲ殘スベシ、

是故ニ$m$若シ$n$ヨリ大ナルトキハ

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

然レドモ$n$若シ$m$ヨリ大ナルトキハ分子ノ$m$因數ハ分母ノ$n$因數ト相消シ合フヲ以テ分母ニ於テ$n-m$因數ヲ殘スベシ、

故ニ$m$若シ$n$ヨリ小ナルトキハ

$$a^m \div a^n = \frac{1}{a^{n-m}}$$

**第百五十九款** $m$及$n$ノ正整數ナルトキ$(a^m)^n$ヲ求ムルコト、

界說ニヨリ

$$(a^m)^n = a^m \times a^m \times a^m \times \ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ 因數迄}$$
$$= a^{m+m+m+}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n \text{ 因數迄}$$
$$= a^{mn}$$

是故ニ　$(a^m)^n = a^{mn}$

故に一の任意自乘を若干自乘せんと欲せば其原指數に自乘せんとする所の指數を乘せざるべからず、

**第百六十款** $(ab)^m$ヲ求ムルコト、

界說ニヨリ

$$(ab)^m = ab \times ab \times ab \ldots\ldots\ldots\ldots m \text{ 因數迄}$$
$$= (a\,a\,a \ldots m \text{ 因數迄}) \times (b\,b\,b \ldots\ldots m \text{ 因數迄})$$

[第三一款]

$$= a^m \times b^m$$

界說ニ依テ

是故ニ　$(ab)^m = a^m b^m.$

均シク



$$(abc)^m = abc \times abc \times abc \ldots\ldots\ldots\ldots m \text{ 因數迄}$$
$$= (a\,a\,a \ldots\ldots m \text{ 因數迄}) \times (b\,b\,b \ldots\ldots m \text{ 因數迄})$$
$$\times (c\,c\,c \ldots\ldots m \text{ 因數迄})$$
$$= a^m \times b^m \times c^m.$$

是故ニ　$(abc)^m = a^m b^m c^m,$

而シテ$m$自乘セント欲スル所ノ式ニ於テ其因數ノ數如何ニ多クトモ皆上ニ準ズ、

故に積の$m$自乘は其因數の$m$自乘の積なり、

**第百六十一款** 今單式ノ乘方ノ最モ一般ナル場合ヲ考究スベシ、

$(a^x b^y c^z \ldots\ldots)^m.$　ヲ求ムルコト

第百六十款ニ由テ

$$(a^x b^y c^z \ldots)^m$$
$$= (a^x)^m (b^y)^m (c^z)^m \ldots$$
$$= a^{xm} b^{ym} c^{zm} \ldots$$

[第一五九款]

此ノ如ク單式ノ任意自乘ハ其各因數ノ指數ニ其全式ヲ自乘セントスルノ指數ヲ乘ジテ以テ得ベシ、

**第百六十二款** 次ニ擧グル者ハ緊要ナル場合ナリ、

$\left(\frac{a}{b}\right)^m$　ヲ求ムルコト

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \ldots\ldots\ldots m$ 因數迄, 界說ニヨリ

$$= \frac{a \times a \times a \ldots m \text{ 因數迄}}{b \times b \times b \ldots m \text{ 因數迄}} \ldots\ldots\ldots\ldots$$

[第一三〇款]

$$= \frac{a^m}{b^m}$$

$$\therefore\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}$$

**第百六十三款**　正量ノ凡テノ自乘ハ正ニシテ負乘ノ逐次自乘ハ正負相間スルコトヲ注意スベシ、

是レ負號定則ヨリ直ニ推知シ得ベシ何トナレバ

$$(-a)^2=(-a)(-a)=+a^2,$$

$$(-a)^3=(-a)^2(-a)=(+a^2)(-a)=-a^3,$$

$$(-a)^4=(-a)^3(-a)=(-a^3)(-a)=+a^4,$$

餘ハ之レニ準ズ、

故ニ　$(-a)^{2n}=+a^{2n}$ 及ビ $(-a)^{2m+1}=-a^{2m+1}$,

上ノ論證ヨリ正量或ハ負量ノ凡テノ偶數自乘ハ正ニシテ任意ノ量ノ奇數自乘ハ原量ト同符號ナルコト明カナリ、

**第百六十四款**　吾人ハ既ニ二項式ノ乘方ノ次ノ場合ヲ證明セリ、

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,$$

及ビ　$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

若シ更ニ $a+b$ ヲ乘ズレバ即チ

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

此終リノ結果ニ $a+b$ ヲ乘ズレバ $(a+b)^5$ ヲ得ベク而シテ此方法ヲ連續スルトキハ $a+b$ ノ任意所要ノ自乘ヲ得ベシ然レドモ此方法ニ於テ任意高次自乘ヲ求ムルコト例ヘハ $(a+b)^{20}$ ヲ求ムルコトノ如キハ其勞ヲ費ス甚シキコト明ナリ、

后編ニ於テ二項式ノ任意自乘ヲ直ニ記下シ得ルヿヲ說ケル所ノ二項式定理ヲ證明ス可シ、

上ノ職式ハ $a$ 及ビ $b$ ノ凡テノ價ニ向テ正實ナルガ故ニ任意二項式ノ平方幷ニ立方ヲ記下シ得可シ例ヘバ、



$$(a^4-b^4)^2=(a^4)^2+2(a^4)(-b^4)+(-b^4)^2$$
$$=a^8\quad-2a^4b^4\quad+b^8,$$

及ビ　$$(5a^2-3b^2)^3=(5a^2)^3+3(5a^2)^2(-3b^2)$$
$$+3(5a^2)(-3b^2)^2+(-3b^2)^3$$
$$=125a^6-225a^4b^2+135a^2b^4-27b^6.$$

又　$$(a+b+c)^3=\{a+(b+c)\}^3$$
$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$$

**第百六十五款**　乘方ノ緊要ナル場合即チ多項式ノ平方ヲ求ムル所ノ方法ハ第六十七款ニ於テ考究セリ、

## 第　四　十　三　例　題

次ノ各式ノ價ヲ記スベシ

| | | |
|---|---|---|
| 1. $(a^3)^5$. | 2. $(a^5)^3$. | 3. $(-a^2)^3$. |
| 4. $(-a^3)^2$. | 5. $(-2a^5)^4$. | 6. $(-a^4)^5$ |
| 7. $(-\ b^2)^4$. | 8. $(a^3b^4)^5$. | 9. $(-ab^4)^7$. |
| 10. $(-3a^7b^5c)^3$. | 11. $(-ab^2c^5)^4$. | 12. $(-5a^2b^3c^4)^3$. |
| 13. $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^3$. | 14. $\left(-\frac{a^3}{bc^2}\right)^5$. | 15. $\left(-\frac{a}{b^2c^3}\right)^6$. |
| 16. $(2a^4+3b^3)^2$. | 17. $(a^5-2b^4)^2$. | 18. $(-ax^4+by^3)^2$. |
| 19. $(-a^2+2ab)^2$. | 20. $(a^2+b^2)^3$. | 21. $(a^3+b^3)^3$. |
| 22. $(2a^2-3b^2)^3$. | 23. $(3a^2-2b^2)^3$. | 24. $(a^2+b^2+c^2)^3$. |
| 25. $(a^3-2b^3+3c^3)^2$. | 26. $(a+2b+3c+4d)^2$. | 27. $(1+x+x^2+x^3)^2$. |

**第百六十六款**　今開方ノ或ル場合ヲ考究スベシ.

吾人ハ $a^2$ ノ二ツノ平方根 即チ $\pm a$ アルヿヲ知レリ而シテ又 $a^3$ ノ三立方根アリ即其一ハ $a$ ニシテ他ノ二ツハ虛量ナルヿヲ知レリ、[第百四十九款]

故ニ自乘ト根トノ間ニハ緊要ナル差異アリ何トナレハ與ヘラレタル或一式ノ第 $n$ 自乘ハ只一ツナレ圧其 $n$ 方根ハ一ツヨリ多クアル丁是レナリ、

一式ノ二平方根ハ只其符號ノミ異ナレリ而シテ其孰レニテモ該平方根ト稱スルナリ.

一式ノ立方根ト云ヘハ本編ニ於テハ只其實量ノミヲ意味セリ他ノ二ツノ虚量ヲ示サズ而シテ第三ヨリモ高キ方根ニ在リテモ亦然リ.

**第百六十七欵** 第 $n$ 自乘シタルトキニ與ヘタル一式ト相等トナレバ其式ハ與ヘタル式ノ第 $n$ 方根ト稱ス但シ $n$ ハ任意正整數ナリトス

積ノ第 $m$ 自乘ハ其各因數ノ第 $m$ 自乘ノ積ナルコトハ既ニ第百六十欵ニ於テ證シタリ是故ニ逆ニ積ノ第 $m$ 方根ハ其各因數ノ第 $m$ 方根ノ積ナリ即チ

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}.\sqrt{b}.\sqrt{c},$$

及ビ

$$\sqrt[m]{ab}=\sqrt[m]{a}\sqrt[m]{b},$$

又單式ノ第 $n$ 自乘ハ $n$ ヲ以テ其各因數ノ指數ニ乘スル丁ニヨリ求メ得ルコトハ既ニ第百六十一欵ノ示セル所ナリ.

故ニ逆ニ $n$ チ以テ與ヘタル式ノ各因數ノ指數ヲ除スル片ハ其式ノ第 $n$ 方根チ得ヘキ丁チ推知ス、何トナレハ各指數チ此ノ如ク除シテ得タル結果ノ第 $n$ 自乘チ取レバ則チ其原式チ得ザルベカラザル丁明ナルチ以テナリ、

即チ

$$\sqrt[2]{a^4}=a^2, \qquad \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}=\frac{a}{b},$$

$$\sqrt[2]{a^4c^2b^6}=\sqrt[2]{a^4}.\sqrt[2]{c^2}.\sqrt[2]{b^6}=a^2cb^3,$$

及ビ

$$\sqrt[n]{a^{np}\,b^{nq}}=a^p b^q.$$



完全平方ナラザル所ノ式ノ平方根又ハ完全立方ナラザル所ノ式ノ立方根チ要スルトキ其演算チ遂グル丁能ハザルナリ、例ヘハ $a$ ノ平方根ハ只 $\sqrt{a}$ ノ如ク記シ又 $a^2$ ノ立方根ノ如キモ只 $\sqrt[3]{a^2}$ ト記シ得ルノミ他ノ場合ニ於テモ均ク此ノ如シ、

## 平方根 (Square Root.)

**第百六十八欵** 吾人ハコレヨリ進シテ複式平方根ヲ考究セントス。

第九十五欵ニ於テ完全平方ナル所ノ任意三項式ノ平方根チ記下スル方法如何チ示セリ.

式ヲ或ル文字ノ遞昇或ハ遞降自乘ニ從ヒ列記スレハ全式ノ平方根ハ兩外項ノ平方根ヲ取リ而シテ其中項ノ符號ノ正若クハ負ナルカニ從ヒ全號或ハ異號チ置ク丁ニ由テ求メ得ルナリ、

例ヘハ $\qquad 4a^8-12a^4b^3+9b^6$

ノ平方根ナ求ムルニ

兩外項ノ平方根ハ

$$2a^4 \quad 及ビ \quad 3b^3 \quad ナリ、$$

故ニ今中項ハ負ナルヲ以テ所要ノ平方根ハ

$$2a^4-3y^3.$$

若シ兩平方根ヲ求ムル片ハ次ノ形ニ記ス、

$$\pm(2a^4-3b^3).$$

他ノ例トシテ

$$\sqrt{(49a^{10}+28a^5+4)}=7a^5+2,$$

$$\sqrt{(1+5xy^3+\tfrac{25}{4}x^2y^6)}=1+\tfrac{5}{2}xy^3,$$

及ビ $\qquad \sqrt{\{a^2+2a(b+c)+(b+c)^2\}}=a+b+c.$

**第百六十九欵**　一式中特別ナル字母ノ相異リタル自乘只二ツヲ含ムトキハ其字母ノ遞昇若クハ遞降自乘ニ從ヒ列記スレハ其式ハ只三項ノミ含ムベシ。　例へハ

$$a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab.$$

ナル式ハ $a$ 自乘ニ從ヒテ列記スルトキハ $a^2$ 及ビ $a$ ノ外他ノ自乘チ含マザル故

$$a^2+2a\,(b+c)+(b^2+c^2+2bc.)$$

此ノ如ク特別ナル字母ノ二ツノ相異リタル自乘只二ツチ含ム所ノ任式ハ三項式トシテ記スコトヲ得ベシ而シテ完全平方ナル所ノ任三項式ノ平方根チ直ニ記下スルコトヲ得ルガ故ニ完全平方ナル所ノ任式ニシテ若シ或ル特別ナル字母ノ相異リタル自乘只二ツチ含ムモノナレバ其平方根ハ容易ニ記下シ得ルコト推シテ知ルベシ。

例へハ　$a^2+b^2+c^2+2bc+2ac+2ab$　ノ平方根チ求ムベシ。

本式チ $a$ ノ遞降自乘ニ從テ列記スルトキハ

$$a^2+2a\,(b+c)+(b^2+2bc+c^2),$$

即チ　$$a^2+2a\,(b+c)+(b+c)^2,$$

即チ　$$\{a+(b+c)\}^2.$$

故ニ　$$\sqrt{(a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab)}=\pm(a+b+c).$$

又　$x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2-6x^2z^2-12y^2z^2$　ノ平方根チ求ム、

本式チ $x$ ノ遞降自乘ニ從テ列記スレバ

$$x^4+2x^2\,(2y^2-3z^2)+4y^4+9z^4-12y^2z^2,$$

即チ　$$x^4+2x^2\,(2y^2-3z^2)+(2y^2-3z^2)^2,$$

即チ　$$\{x^2+(2y^2-3z^2)\}^2.$$

故ニ　$$\sqrt{(x^4+4y^4+9z^4+4x^2y^2-6x^2z^2-12y^2z^2)}$$
$$=\pm(x^2+2y^2-3z^2).$$



又　$a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$　ノ平方根チ求ム、

本式チ $a$ ノ遞降自乘ニ從テ列記スレバ

$$a^2+2a(bx+cx^2)+b^2x^2+2bcx^3+c^2x^4,$$

即チ　$$a^2+2a(bx+cx^2)+(bx+cx^2)^2$$

即チ　$$\{a+(bx+cx^2)\}^2.$$

故ニ所要ノ平方根ハ

$$\pm(a+bx+cx^2).$$　ナリ、

又次ノ平方根ヲ求ムベシ、

$$x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2.$$

本式ハ只$y^2$及ビ$y$ノミチ含ムガ故ニ之チ$y$ノ自乘ニ從ヒテ列記スレバ

$$y^2+2y(x^3-x^2+x)+x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2.$$

今若シ本式ノ全体完全平方ナルトキハ三項以下ハ$y$ノ系數ノ半ノ平方ナラザル可カラズ而テ、

$$x^6-2x^5+3x^4-2x^3+x^2=(x^3-x^2+x)^2.$$

ナルコトチ證明スルコト容易ナルヲ以テ與ヘタル式ハ

$$y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^3-x^2+x)^2.$$　トナル、

故ニ所要ノ平方根ハ

$$y+x^3-x^2+x$$　ナリ、

上ノ諸例ヨリ考フルニ完全平方ナル式中ハ項數如何ニ拘ラズ若シ其式中或る特別なる文字の相異りたる自乘二つノミチ含ムトキ其平方根ハ視察によりて記下スルチ得可シ、

**第百七十欵**　任意代數式ノ平方根ヲ發見スルハ如何スベキヤチ示サンガ爲メ一式チ取リ而シテ其平方チ形作リ然ル后如何ニ方法チ還原スベキヤヲ示サン、

例へバ次式チ考フベシ、

$$x^2+2xy+3y^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(i)}$$

此平方ハ

$$x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4 \;\ldots\ldots \quad \text{(ii)}$$

兩式共ニ$x$ノ遞降自乘ニ從ヒテ列記シアルヲ以テ吾人ハ$x^2+2xy+3y^2$ノ平方ハ次ノ形ノ孰レカニ記スルコトヲ得ベシ、

$$\{x^2+(2xy+3y^2)\}^2=x^4+2x^2(2xy+3y^2)+(2xy+3y^2)^2 \;\ldots\ldots\ldots \quad \text{(iii)}$$

$$\{(x^2+2xy)+3y^2\}^2=(x^2+2xy)^2+2(x^2+2xy)3y^2+(3y^2)^2 \;\ldots\ldots \quad \text{(iv)}$$

今(ii)ノ第一項ハ(i)ノ第一項ノ平方ナルコト明ナリ　是故ニ(ii)ノ根ノ第一項ハ其第一項ノ平方根ヲ取ルコトニ由テ發見シ得ベシ、

又(iii)ヨリ$x^4$(根ノ第一項ノ平方)ヲ減ズルトキハ餘ニ於テ$x$ノ最高自乘ヲ含ム所ノ項ハ$2x^2\times 2xy$ナリコレ即チ根ノ第一項及ビ第二項ノ乘積ノ二倍ナリ、

是故ニ(ii)ヨリ根ノ第一項ノ平方ヲ減ジタル后第二項ハ餘リノ第一項ヲ根ノ第一項ノ二倍ヲ以テ除スルコトニ由テ之ヲ得可シ、

又(iv)ヨリ$(x^2+2xy)^2$,即チ既ニ求メ得タル根ノ部分ノ平方ヲ減ジタルトキ餘リニ於テ$x$ノ最高自乘ヲ含ム所ノ項ハ

$2x^2\times 3y^2$,即チ根ノ第一項及ビ第三項ノ乘積ノ二倍ナリ、

是故ニ(ii)ヨリ既ニ求メ得タル根ノ平方ヲ減ジタル後根ノ次項は餘りの第一項を根の第一項の二倍を以て除することニ由テ之ヲ得可シ

今若シ與ヘタル式ヨリ$x^2+2xy+3y^2$ノ平方ヲ減ズレバ一モ餘リナカル可シ是故ニ$x^2+2xy+3y^2$ハ所要ノ根ナリ、

吾人ハ今更ニ最モ一般ナル場合ヲ考究セントス、

今$(A+B)^2$ノ平方根ヲ見出スベキコトヽ假定ス但シ$A$ハ根ノ若干項ヲ表ハスモノトシ$B$ハ殘レル各項ヲ表ハスモノトス、

$A$及ヒ$B$ニ於ル各項ハ或ル字母ノ遞降(或ハ遞昇)自乘ニ從ヒテ列記セルモノトス即チ$A$ニ於ケル諸項ハ$B$ニ於ケル任意項ヨリ高次(或ハ低次)ナリトス、



又$A$ニ於ケル各項ハ既知ニシテ$B$ニ於ケル各項ヲ見出スベシ、

$(A+B)^2$ヨリ$A^2$ヲ減ズレバ其餘リハ$(2A+B)B$ナリ、

今排列ノ法ヨリ餘リニ於ケル最高(或ハ最低)次ノ項ハ$A$ニ於ケル第一項ト$B$ニ於ケル第一項トノ乘積二倍ナルヿ推シテ知ルベシ、

是故ニ所要ノ根ノ次項即チ$B$ノ最高(或ハ最低)項ヲ求メンニハ全式より既に求め得たる根の部分の平方を減じ而して其餘りの第一項を根の第一項の二倍にて除すべし、

根ノ第一項ハ與ヘタル式ノ第一項ノ平方根ナリ而シテ若シ根ノ第一項ヲ見出セルトキハ他ノ各項ハ上ニ示セル方法ヲ施シ逐次ニ見出スコトヲ得ルナリ、

代數式ノ平方根ヲ見出スコトノ方法ハ次ノ如ク記スルコトヲ得可シ、

$$\begin{array}{rl}
 & \underline{x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4}(x^2+2xy+3y^2 \\
(x^2)^2= & x^4 \\
(x^2+2xy)^2= & \overline{x^4+4x^3y+4x^2y^2} \\
(x^2+2xy+3y^2)^2= & \overline{\underline{x^4+4x^3y+10x^2y^2+12xy^3+9y^4}}
\end{array}$$

最初ニ與ヘラレタル式ノ第一項ノ平方根ヲ取ル、即チ所要ノ根ノ第一項$x^2$ヲ得、

今與ヘラレタル式ヨリ$x^2$ノ平方ヲ減ジ而シテ$2x^2$ヲ以テ餘リノ第一項ヲ除ス、即チ根ノ第二項$2xy$ヲ得、

今與ヘラレタル式ヨリ$x^2+2xy$ノ平方即チ

$$x^4+4x^3y+4x^2y^2,$$

ヲ減ジ而シテ$2x^2$ヲ以テ餘リノ第一項即チ$6x^2y^2$ヲ除ズ、即チ根ノ第三項$3y^2$ヲ得、

與ヘラレタル式ヨリ $x^2+2xy+3y^2$ ノ平方ヲ減ズルニ一ノ餘リナシ、

是故ニ $x^2+2xy+3y^2$ ハ所要ノ平方根ナリ、

$x^2$, $x^2+2xy$, 等ノ平方ヲ與ヘタル式ノ下ニ置キ同類項ヲ全ジ行ニ置クトキハ任平方ヲ減ジタル後其殘餘ヲ見ルコト明了ナルベシ、

(注) 各平方ヲ特別ニ見出スコトノ代リニ前ノ平方ヲ用ヰルトキハ多少ノ勞ヲ省クコトヲ得可シ例ヘハ上ノ例ニ於テ

$x^2+2xy+3y^2$ ノ平方ハ前ノ平方 $(x^2+2xy)^2$. ニ

$$2(x^2+2xy)(3y^2)+(3y^2)^2.$$

ヲ加ヘテ求メ得可シ、

然レ圧初學者ハ特別ニ平方ヲ作ルヲ宜シトスコレ容易ニ某式ノ平方ヲ記下スルコト甚要用ナレバナリ而シテ根ニ於テ數多ノ項アル時ハ或ハ前ニ述フルガ如クスルモ可ナリ、

任意代數式ノ立方根ヲ求ムル所ノ方法ハ後編ニ於テ示スベシ、

## 第四十四例題

次ノ各式ノ平方根ヲ記スベシ、

1. $9x^2-30xy^2+25y^4$.
2. $4x^{10}-12x^5y^3+9y^6$.
3. $x^8-6x^4y^6+9y^{12}$.
4. $\frac{1}{4}x^8-\frac{1}{3}x^4y^5+\frac{1}{9}y^{10}$.
5. $a^2+4b^2+9c^2+12bc+6ca+4ab$.
6. $4a^2+b^2+9c^2+6bc-12ca-4ab$.
7. $4a^4+b^4+c^4-2b^2c^2-4c^2a^2+4a^2b^2$.
8. $25a^4+9b^4+4c^4-12b^2c^2+20c^2a^2-30a^2b^2$.

次ノ各式ノ平方根ヲ求ム可シ、





9. $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.
10. $4x^4-8x^3+4x+1$.
11. $9x^4-36x^3+72x+36$.
12. $1-xy-\frac{15}{4}x^2y^2+2x^3y^3+4x^4y^4$.
13. $4x^4+4x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.
14. $x^4-2x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}$.
15. $x^4+2x^3y+3x^2y^2+2xy^3+y^4$.
16. $16-96x+216x^2-216x^3+81x^4$.
17. $1+4x+10x^2+12x^3+9x^4$.
18. $4x^4-4x^3+3x^2-x+\frac{1}{4}$.
19. $(1+2x^2)^2-4x(1-x)(1+2x)$.
20. $x^6-4x^5+6x^4-8x^3+9x^2-4x+4$.
21. $9x^6-12x^5+22x^4+x^2+12x+4$.
22. $x^6-22x^4+34x^3+121x^2-374x+289$.
23. $a^2-ax+\frac{1}{4}x^2+8a-4x+16$.
24. $x^4+2x^3(y+z)+x^2(y^2+z^2+4yz)+2xyz(y+z)+y^2z^2$.

# 第　十　九　編

## 指數 (Indices.)

**第百七十一款**　是迄指數ハ常ニ正整數ナリト假定セリ而シテ第十款ニ於テ與ヘタル $a^n$ ノ界說ヲ存セン限リハ必ズ然ラザルベカラズ何トナレバ其界說ニヨレバ $a^{\frac{3}{5}}$ ノ如キ式ハ如何ナル意味ヲモ有セザレバナリ、

然シナガラ $a^n$ ノ意義ヲ擴充シ $n$ ノ分數及ビ負數ノ價ヲ含ムガ如クスルノ便ナルヲ見ル、

**第百七十二款**　代數學上ノ記號ハ常ニ同ジ法則ニ從ハザルベカラザルコトハ甚タ緊要ナリトス、而シテ $a^n$ ナル記號ノ場合ニ於テ此結果ヲ確實ニスル爲メ $n$ ノ負數或ハ分數ナル時ニ於テモ $a^n$ ニ或ル特別ナル意義ヲ附セズ然レ𪜈初メニ $a^n$ の意義は基礎さる指數定則即チ

$$a^m\times a^n=a^{m+n}$$

ハ常に正實なるべしトノ制限ヲ置ク、而シテ此制限ハ $a^n$ ノ意義ヲ定ムルニ凡テノ場合ニ於テ充分ナルコトヲ知ル。

例ヘバ　$a^{\frac{1}{2}}$ ノ意義ヲ見出セ、

此意義ハ指數定則ト一致スベキガ故ニ

$$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1=a.$$

此ノ如ク $a^{\frac{1}{2}}$ ハ其平方ハ $a$ ナラザル可ラズ、即チ

$$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

次ニ、$a^{-1}$ ノ意義ヲ見出セ、

指數定則ニ依テ

$$a^{-1}\times a^2=a^{-1+2}=a^1=a$$



$$\therefore\ a^{-1}=a\div a^2=\frac{1}{a}$$

故ニ　$$a^{-1}=\frac{1}{a}.$$

是ヨリ最モ一般ナル場合ヲ考究スベシ、

**第百七十三款**　$a^{\frac{1}{n}}$ ノ意義ヲ見出セ、但シ $n$ ハ任意ノ正整數トス、

指數定則ニ依テ

$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\dots\dots\dots n\text{ 因數迄、}$$

$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{h}+\frac{1}{n}+\dots\dots\dots n\text{ 項迄}}=a^1=a.$$

是故ニ $a^{\frac{1}{n}}$ ハ其第 $n$ 自乘ハ $a$ ナラザルベカラズ、

則チ　$a^{\frac{1}{n}}$ は $a$ の第 $n$ 方根なり、

**第百七十四款**　$a^{\frac{m}{n}}$ ノ意義ヲ見出セ、但シ $m$ 及ビ $n$ ハ任意ノ正整數トス、

指數定則ニ依テ

$$a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\dots\dots\dots n\text{ 因數迄}$$

$$=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\dots\dots\dots n\text{ 項迄}}=a^m.$$

則チ　$a^{\frac{m}{n}}$ は $a^m$, の第 $n$ 方根に相等し、

又　$$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\dots\dots\dots m\text{ 因數迄}$$

$$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\dots\dots\dots m\text{ 項迄}}=a^{\frac{m}{n}}.$$

是故ニ$a^{\frac{m}{n}}$ハ$a^{\frac{1}{n}}$ノ第$m$自乘トシテ考フルコトヲ得ベシ而シテ第百七十三欵ニ由テ、

$a^{\frac{1}{n}}$ ハ $\sqrt[n]{a}$ ナリ、

此ノ如ク $a^{\frac{m}{n}}$ ハ$a$ノ第$m$自乘ノ第$n$方根或ハ$a$ノ第$n$方根ノ第$m$自乘ナリト考フコトヲ得ベシ之ヲ次ノ如ク表ハス、

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(a^m)}=(\sqrt[n]{a})^m$$

**第百七十五欵**　$a^0$ ノ意義ヲ見出セ、

指數定則ニ由テ

$$a^0\times a^m=a^{0+m}=a^m$$

$$\therefore\ a^0=a^m\div a^m=1.$$

即チ$a$ハ如何ナル數ナルモ　$a^0=1.$

**第百七十六欵**　$a^{-m}$ ノ意義ヲ見出セ、但シ$m$ハ任意ノ正值トス

指數定則ニ由テ

$$a^m\times a^{-m}=a^{m-m}=a^0.$$

而シテ前欵ニ由テ　$a^0=1.$

$$\therefore\ a^m\times a^{-m}=1$$

故ニ　$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ 及ビ $a^m=\frac{1}{a^{-m}}.$

是ニ由テ分數ノ任意ノ量ヲ指數ノ符號ヲ變ズレバ分子ヨリ分母ニ移シ或ハ分母ヨリ分子ニ移スコトヲ得ベシ、

例ヘバ、$\frac{a^3b^2}{x^3y}=a^3b^2x^{-3}y^{-1}=\frac{1}{a^{-3}b^{-2}x^3y}.$

**第百七十七欵**　$m$及ビ$n$ノ凡テノ值ニ就テ $(a^m)^n=a^{mn}$ ナルコトヲ證スルコト、



第一、　$n$ヲ正ノ整數トシ$m$ヲ任意ノ量トスレバ

$(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\times\ldots\ldots$ $n$因數迄

$=a^{m+m+m+\ldots\ldots}$ $n$項迄

$=a^{mn}.$

第二、　$n$ヲ正ノ分數 $\frac{p}{q}$ トスレバ(但シ$p$及ビ$q$ハ正ノ整數ナリ).

$(a^m)^n=(a^m)^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{\{(a^m)^p\}}$　[第一七四欵]

$=\sqrt[q]{\{a^{mp}\}}$　第一ニ由テ、

$=a^{\frac{mp}{q}}$　[第一七四欵]

$=a^{mn}$

第三、　$n$ヲ負數トシ而シテ $-p$ ニ等シトスレバ

$(a^m)^n=(a^m)^{-p}=\frac{1}{(a^m)^p}$　[第一七六欵]

$=\frac{1}{a^{mp}}$　第一及ビ第二ニ由テ

$=a^{-mp}$　[第一七六欵]

$=a^{m(-p)}=a^{mn}.$

是故ニ$m$及ビ$n$ノ凡テノ值ニ向テ $(a^m)^n=a^{mn}$ ナリ、

**第百七十八欵**　今分數及ビ負數ノ指數ヲ含ム處ノ或ル例ヲ與フベシ、

$$16^{-\frac{1}{4}}=\frac{1}{16^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{\sqrt[4]{16}}=\frac{1}{2}.$$

$$27^{\frac{4}{3}}=(\sqrt[3]{27})^4=3^4=81.$$

$$a^{\frac{2}{3}}\times a^{-\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{6}}.$$

$$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{6}}\times a^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{2}{3}}=a^{0}=1.$$

$$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^{6}=a^{-\frac{2}{3}\times 6}=a^{-4}=\frac{1}{a^{4}}.$$

$$a^{-2}\div a^{-3}=a^{-2-(-3)}=a^{-2+3}=a.$$

$$\sqrt{(a^{5}b^{-3}c^{-4})}=\sqrt{(a^{5})}\sqrt{(b^{-3})}.\sqrt{(c^{-4})}=a^{\frac{5}{2}}b^{-\frac{3}{2}}c^{-2}.$$

$a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}$ ヲ乗スベシ、

$$\begin{array}{l}
a^{\frac{1}{3}}+1+a^{-\frac{1}{3}} \\
\underline{a^{\frac{1}{3}}-1+a^{-\frac{1}{3}}} \\
a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}+1 \\
\quad -a^{\frac{1}{3}}-1-a^{-\frac{1}{3}} \\
\qquad \underline{+1+a^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}} \\
a^{\frac{2}{3}}+1+a^{-\frac{2}{3}}
\end{array}$$

## 第 四 十 四 例 題

次ノ諸値ヲ求ム、

1. $8^{\frac{2}{3}}$ 2. $4^{-\frac{3}{2}}$. 3. $16^{-\frac{1}{2}}$.

4. $(\frac{1}{25})^{\frac{1}{2}}$. 5. $(\frac{1}{10000})^{-\frac{3}{4}}$. 6. $(\frac{1}{125})^{-\frac{2}{3}}$

次ノ各式ヲ簡約スベシ、

7. $a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{4}}\times a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{3}{4}}$. 8. $\{a^{-\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{6}}\}^{\frac{3}{2}}$. 9. $(a^{-\frac{1}{2}}b^{-2})^{-4}$



10. $(a^{4}b^{\frac{2}{3}})^{-\frac{3}{2}}$.

次ノ各式ヲ分數指數ニテ表ハセ、

11. $\sqrt[3]{a}+\sqrt{x}+\sqrt[4]{y^{3}}$. 12. $\sqrt{a^{3}y}+\sqrt[3]{ay^{3}}$.

13. $\sqrt[3]{a^{2}b^{5}}+\sqrt{a^{3}y}$. 14. $\sqrt[5]{(ab^{2}c^{5})}\div\sqrt[3]{a^{2}c^{3}}$.

次ノ各量ヲ分數或ハ負數ノ指數ヲ用井ルコナクシテ之ヲ表ハスベシ、

15. $a^{\frac{1}{2}}-a^{-2}$. 16. $a^{-4}b^{-\frac{1}{4}}$.

17. $a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-a^{-\frac{2}{3}}b$. 18. $a^{-3}b^{-\frac{1}{2}}+3a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{2}{3}}$.

次ノ各兩式ヲ相乘セヨ、

19. $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}},\ x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}$. 20. $1+x^{\frac{1}{4}}+x^{\frac{1}{2}},\ 1-x^{\frac{1}{4}}$.

21. $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}},\ a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$. 22. $x^{\frac{5}{4}}-x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}-x^{-\frac{1}{4}},\ x^{\frac{3}{4}}+x^{\frac{1}{4}}$.

23. $x^{n}+x^{\frac{n}{2}}+1,\ x^{-n}+x^{-\frac{n}{2}}+1$.

24. $\frac{1}{8}a^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}ab^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{18}a^{\frac{1}{2}}b-\frac{1}{27}b^{\frac{3}{2}},\ \frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}b^{\frac{1}{2}}$.

次ノ各前式ヲ后式ニテ除セヨ、

25. $x^{3}-y^{3},\ x^{\frac{3}{2}}-y^{\frac{3}{2}}$ 26. $x^{\frac{3n}{2}}-y^{\frac{3n}{2}},\ x^{\frac{n}{2}}-y^{\frac{n}{2}}$.

27. $x^{2}+y^{2},\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}$. 28. $x+243y^{\frac{5}{3}},\ x^{\frac{1}{5}}+3y^{\frac{1}{3}}$.

29. $(ab^{-3}c^{5})^{\frac{1}{2}}\times(a^{7}b^{4}c^{-1})^{\frac{1}{3}}\times(a^{-5}bc^{2})^{\frac{1}{6}}$. ヲ簡約セヨ、

30. $(a-4b^{\frac{2}{3}})(a+2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})(a-2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}+4b^{\frac{2}{3}})$. ヲ簡約セヨ、

31. $1-\dfrac{a^{2}+b^{2}-a^{-2}-b^{-2}}{a^{2}b^{2}-a^{-2}b^{-2}}=\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$ ナルヲ證セヨ、

## 例　　題

32. 次ノ各式ノ平方根ヲ皆ケ、

(i) $x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1$,　　(ii) $4x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{2}}$,

(iii) $ax^{\frac{2}{3}}-2a^{\frac{5}{6}}x^{\frac{5}{6}}+a^{\frac{2}{3}}x$.

33. $4x^2a^{-2}-12xa^{-1}+25-24x^{-1}a+16x^{-2}a^2$.　ノ平方根ヲ求ム、

34. $x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{5}{6}}+4x+2x^{\frac{7}{6}}-4x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{5}{3}}$.　ノ平方根ヲ求ム、



# 第　二　十　編

## 不盡根數 (Surds.)

**第百七十九款**　本編ニ於テハ前二編ニ於テ決定シタル原理ヲ用ヒ不盡根數ノ性質ヲ考究ス可シ.

**第百八十款**　任意有理量ハ不盡根數ノ形ニテ記ルスコトヲ得可シ.

例ヘバ　$a=\sqrt[2]{a^2}=\sqrt[3]{a^3}=\sqrt[n]{a^n}$,

及ビ　$2=\sqrt[2]{4}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[n]{2^n}$.

又　$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$　ナルガ故ニ

$$3\sqrt{2}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{(3^2\times 2)}=\sqrt{18},$$

$$2\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2^3}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{(2^3\times 5)}=\sqrt[3]{40}.$$

及ビ　$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(a^nb)}$.

**第百八十一款**　不盡根數ハ間々有理因數及ビ無理因數ノ積トシテ記ルスコトニ由テ簡約スルコトヲ得ベシ.

何トナレバ

$\sqrt[n]{(ab)}=\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}$　ナリ.

故ニ　$\sqrt{12}=\sqrt{(4\times 3)}=\sqrt{4}\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$,

$$\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{(27\times 2)}=\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{2}=3\sqrt[3]{2},$$

$$\sqrt{75}-\sqrt{27}=\sqrt{(5^2\times 3)}-\sqrt{(3^2\times 3)}$$

$$=5\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2\sqrt{3},$$

及ビ　$\sqrt{a^3}+\sqrt{ab^2}=a\sqrt{a}+b\sqrt{a}=(a+b)\sqrt{a}$.

**第百八十二款**　同ジ根ヲ取ルベク要セラレタル不盡根數ハ之ヲ同次不盡根數ト云フ　例ヘバ　$\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{(a+x)}$ 及ビ $5^{\frac{2}{3}}$ ハ皆ナ第三次

不盡根數ナリ、

第二次不盡根數例ヘバ $\sqrt{2}$ ノ如キハ往々平方不盡根數ト稱ス、

**第百八十三款**　任意ノ二ノ不盡根數ヲ同次不盡根數ニ化スルコトヲ得ベシ、

$a^{\frac{m}{n}}$ 及ビ $b^{\frac{p}{q}}$ ヲ二ノ不盡根數トス今此等ノ指數ヲ同分母ヲ有スル所ノ同次不盡根數ニ化セントス、

即チ次ノ如ク二ノ不盡根數ヲ $nq$ 次ニ化スルコトヲ得、

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mq}{nq}}=\sqrt[nq]{a^{mq}}$$

及ビ

$$b^{\frac{p}{q}}=b^{\frac{pn}{qn}}=\sqrt[nq]{b^{pn}}$$

故ニ所要ノ不盡根數ハ $\sqrt[nq]{a^{mq}}$ 及ビ $\sqrt[nq]{b^{pn}}$ ナリ、

例一、　$\sqrt{2}$ 及ビ $\sqrt[3]{3}$ ヲ同次ノ不盡根數ニ化スベシ、

不盡根數 $2^{\frac{1}{2}}$ 及ビ $3^{\frac{1}{3}}$ ノ指數ノ分母ノ最低公倍數ハ 6 ナリ而シテ與ヘラレタル不盡根數ハ孰レモ第六次ニ化シ得ベシ、

即チ

$$2^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{3}{6}}=(2^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{8},$$

$$3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{2}{6}}=(3^2)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{9}.$$

故ニ所要ノ不盡根數ハ $\sqrt[6]{8}$ 及ビ $\sqrt[6]{9}$ ナリ、

例二、　$\sqrt[4]{3}$ 及ビ $\sqrt[6]{5}$ ヲ同次ノ不盡根數ニ化スベシ、

不盡根數 $3^{\frac{1}{4}}$ 及ビ $5^{\frac{1}{6}}$ ノ指數ノ分母ノ最低公倍數ハ 12 ナリ是故ニ

$$3^{\frac{1}{4}}=3^{\frac{3}{12}}=(3^3)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{27},$$

$$5^{\frac{1}{6}}=5^{\frac{2}{12}}=(5^2)^{\frac{1}{12}}=\sqrt[12]{25}.$$

故ニ $\sqrt[12]{27}$ 及ビ $\sqrt[12]{25}$ ハ所要ノ不盡根數ナリ、

例三、　$\sqrt[3]{14}$ ト $\sqrt{6}$ トハ孰レガ大ナリヤ、

此二ツノ不盡根數ヲ同次ニ化セザルベカラズ、　乃チ



$$14^{\frac{1}{3}}=14^{\frac{2}{6}}=(14^2)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{196},$$

及ビ

$$6^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{3}{6}}=(6^3)^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{216},$$

然ルニ　$\sqrt[6]{216}$ ハ $\sqrt[6]{196}$ ヨリ大ナリ、

$\therefore$ $\sqrt{6}$ ハ $\sqrt[3]{14}$ ヨリ大ナリ、

**第百八十四款**　同次ナル任意ノ二ノ不盡根數ノ積ハ範式

$$\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{(ab)}$$

ヨリ直チニ書キ下スコトヲ得ベシ、

不盡根數若シ異次ナルトキハ初メニ之ヲ同次不盡根數ニ化セザル可カラズ、　然ル后上ノ如ク其積ヲ見出スコトヲ得ルナリ、

例ヘバ、

$$\sqrt[3]{5}\times\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{(5\times20)}=\sqrt[3]{100}$$

及ビ

$$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}=\sqrt[6]{8}\times\sqrt[6]{9}=\sqrt[6]{(8\times9)}=\sqrt[6]{72}.$$

又

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}+2\sqrt{5})$$

$$=\sqrt{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{5}+2\sqrt{3}\sqrt{5}$$

$$=2+\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}.$$

**第百八十五款**　分數ノ分母中ニ現ハレタル不盡根數ヲ去リタルトキ此分數ハ有理數ニセラレタリト云フ.

次ノ諸例ハ此方法ヲ說明スルニ充分ナルベシ

$$\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{2}\sqrt{7}}{\sqrt{7}\sqrt{7}}=\frac{3}{7}\sqrt{14},$$

$$\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{(2+\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\frac{2\sqrt{5}+5+2+\sqrt{5}}{5-1}$$

$$=\tfrac{1}{4}(7+3\sqrt{5})$$

$$\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}=\frac{(a-\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}{(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})}=\frac{a^2-2a\sqrt{b}-b}{a^2-b}.$$

茲ニ $a\pm\sqrt{b}$ ハ $a\mp\sqrt{b}$ ヲ乘シ以テ有理數ト爲シ得ベク又 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ ハ $\sqrt{a}\mp\sqrt{b}$ ヲ乘シ以テ有理數ト爲シ得ベキコトヲ注意スルヲ緊要トス.

分數ノ分母ヲ有理數ニ化スルヰハ其數値ヲ見出スニ當テ稍々簡易ニ之ヲ得ベシ.

**第百八十六款** 次ニ擧グルハ緊要ナル命題ナリ.

若シ $a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$ ナルヰハ $a=\alpha$, 及ビ $b=\beta$ ナルベシ. 但シ $a$ 及ビ $\alpha$ ハ有理量ニシテ $\sqrt{b}$ 及ビ $\sqrt{\beta}$ ハ無理量トス.

何トナレバ $\qquad a-\alpha+\sqrt{b}=\sqrt{\beta}$

此兩邊ヲ自乘シ而シテ后置キ換ユレバ

$$2(a-\alpha)\sqrt{b}=\beta-b-(a-\alpha)^2$$

是故ニ $\sqrt{b}$ ノ係數ノ零ナルニアラザレバ無理量ト有理量トヲ互ニ相等シトセザルヲ得ズ然レ圧コレ不合理ナリ.

故ニ上ノ方程式ニ於テ $\sqrt{b}$ ノ係數ハ零ナラザルベカラズ則チ $a=\alpha$ ナリ而シテ $a=\alpha$ ナル時與ヘラレタル關係ヨリ $\sqrt{b}=\sqrt{\beta}$ 即チ $b=\beta$ ヲ得.

是ニ由テ有理量ト平方不盡根數トノ和(或ハ差)若シ他ノ有理量ト平方不盡根數トノ和(或ハ差)ニ等シキヰハ此二ツノ有理量ハ相等シク亦二ツノ無理量ハ相等シキナリ.

$a+\sqrt{b}=\alpha+\sqrt{\beta}$ ナルヰ $\sqrt{b}$ 及ビ $\sqrt{\beta}$ ノ眞ニ無理量ナル時ニ限リテ $a=\alpha$ 及ビ $b=\beta$ ナルベキヲ決定シ得ルコヲ注意セザル可カラズ. 例ヘバ $3+\sqrt{4}=2+\sqrt{9}$ ヨリ $3=2$ 及ビ $4=9$ ヲ決シ難キノ類ナリ.

**第百八十七款** 有理量及ビ平方不盡數ノ和ヨリ成ル所ノ二項式ノ平方根ハ時トシテハ簡單ナル形狀ヲ以テ見出スコトヲ得ベシ. 其方法下ノ如シ.

$\sqrt{(a+\sqrt{b})}$ ヲ見出スコト. 但シ $\sqrt{b}$ ハ不盡根數ナリ、

$$\sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta} \qquad \text{(i)}$$

兩邊ヲ自乘スレバ

$$a+\sqrt{b}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$



今 $\sqrt{b}$ ハ不盡根數ナルガ故ニ有理量無理量ノ各部ヲ相等セシムルヲ得即チ

$$\left.\begin{aligned}a&=\alpha+\beta\\ b&=4\alpha\beta\end{aligned}\right\} \qquad \text{(ii)}$$

故ニ $\alpha$ 及ビ $\beta$ ハ方程式 $x^2-ax+\frac{b}{4}=0.$ ノ根ナリ.

而シテ此等ノ根ハ

$$\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\} \text{ 及ビ } \left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\} \text{ ナリ.}$$

$$\text{故ニ}\quad \sqrt{(a+\sqrt{b})}=\sqrt{\left\{\frac{a+\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{a-\sqrt{(a^2-b)}}{2}\right\}} \qquad \text{(iii)}$$

$\sqrt{(a^2-b)}$ ハ有理ナルニ非ラザレバ (iii) ノ右邊ハ左邊ヨリモ尚ホ繁雜ナルコト明ラカナリ、故ニ上ノ方法ハ $a^2-b$ ノ平方數ナルニアラザレバ全ク益無カルベシ而シテ此要件ハ間々滿足セザルガ故ニ此方法ハ實地ニ於テ大ナル利益アルヲ見ズ.

(ii) ニヨリテ其和ハ $a$ ニシテ其積ハ $\frac{b}{4}$ ナル二數ヲ發見シ得ベキヲ知ルベシ而シテ若シ二ツノ有理數ニシテ此等ノ要件ニ適合スルトキハ即チ一般ニ視察ニ依テ直チニ之ヲ求メ得ベシ、

例一、 $\sqrt{(15+2\sqrt{56})}$ ヲ求ム.

$\sqrt{(15+2\sqrt{56})}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ トス.

此兩邊ヲ自乘スレバ

$$15+2\sqrt{56}=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$$

有理項及ビ無理項ヲ各々相等セシムレバ

$$\alpha+\beta=15$$
$$\alpha\beta=56.$$

此等ノ關係ヲ滿足スル處ノ二數ハ7及ビ8ナルコト明ナリ、

故ニ　　$\sqrt{(15+2\sqrt{56})}=\sqrt{7}+\sqrt{8}.$

例二、　$\sqrt{(6-\sqrt{35})}$　ヲ求ム、

$\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$　トス、

此兩邊ヲ自乘スレバ

$$6-\sqrt{35}=\alpha+\beta-2\sqrt{\alpha\beta}.$$

是ニ於テ有理項及ビ無理項ヲ各々相等セシムレバ

$$\alpha+\beta=6$$

$$\alpha\beta=\tfrac{35}{4}$$

故ニ　$\alpha=\tfrac{7}{2},\quad \beta=\tfrac{5}{2}.$

故ニ　$\sqrt{(6-\sqrt{35})}=\sqrt{\tfrac{7}{2}}-\sqrt{\tfrac{5}{2}}.$

## 第四十五例題

次ノ各式ヲ簡約セヨ、

1. $\sqrt{27}+\sqrt{48}.$　　2. $3\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{625}.$

3. $2\sqrt{180}-\sqrt{405}.$　　4. $\sqrt{512}-\sqrt{50}-\sqrt{98}.$

5. $\sqrt{147}-2\sqrt{27}-\sqrt{3}.$　　6. $\sqrt{15}\times\sqrt{60}.$

7. $\sqrt[3]{6}\times\sqrt[3]{36}.$　　8. $2\sqrt{\frac{2}{3}}\times3\sqrt{\frac{8}{2}}.$

9. $\sqrt{10}\times\sqrt[3]{200}.$　　10. $\sqrt[3]{4}\times\sqrt[2]{8}.$

次ノ各分數ノ分母ヲ有理數ニ化スベシ、

11. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}.$　　12. $\sqrt{\dfrac{2}{3}}.$

13. $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$　　14. $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}.$



15. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}.$　　16. $\dfrac{15+14\sqrt{3}}{15-2\sqrt{3}}.$

17. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$　　18. $\dfrac{3}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}.$

19. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}+1}.$　　20. $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}.$

21. $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$　ノ値ヲ小數第三位迄算出セヨ、

22. $\dfrac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}.$　ノ價ヲ小數第三位迄算出セヨ、

次ノ各式ノ平方根ヲ求ム、

23. $6+\sqrt{20}.$　　24. $16+6\sqrt{7}.$

25. $12-6\sqrt{3}.$　　26. $28-5\sqrt{12}.$

27. $101-28\sqrt{13}.$　　28. $117-36\sqrt{10}.$

29. $280+56\sqrt{21}.$　　30. $4\tfrac{1}{2}+2\sqrt{2}.$

31. $3\sqrt{5}-\sqrt{2}+\sqrt{(7+2\sqrt{10})}.$　　32. $6-4\sqrt{3}+\sqrt{(16-8\sqrt{3})}.$

33. $2a+2\sqrt{(a^2-x^2)}.$　　34. $3x-1+2\sqrt{(2x^2+x-6)}$

次ノ各式ヲ簡約セヨ、

35. $\dfrac{1}{\sqrt{(16+6\sqrt{7})}}.$　　36. $\dfrac{1}{\sqrt{(15+2\sqrt{56})}}.$

37. $\sqrt{(6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6})}.$

# 第二十一編

## 比、比例、齊變
(Ratio. Proportion. Variation.)

**第百八十八款**　二ツノ量ノ比較上ノ大サヲ其一量ヲ他量ノ中ニ含ム倍數ニテ度リタルモノ之ヲ其二量ノ比ト云フ、

異種類ノ名數ハ互ニ比ヲ有スル能ハザルナリ、例ヘバ里數ヲ斤數ト比シ或ハ圓數ヲ週數ト比スル能ハザルガ如シ、

$a$ ノ $b$ ニ於ケル比ヲ $a:b$ ナル記法ヲ以テ表ハス而シテ $a$ ヲ比ノ第一項ト稱シ $b$ ヲ比ノ第二項ト稱ス、

時トシテハ比ノ第一項ヲ前項(*Antecedent.*)ト稱シ第二項ヲ後項(*Consequent.*)ト稱ス、

**第百八十九款**　大サハ常ニ數ニ據リテ言ヒ顯ハサヾル可カラズ、又一數ノ他數中ニ含マル倍數ハ其初ノ數ヲ以テ後ノ數ヲ除スレバ之ヲ得ベシ、是故ニ

$$a:b \text{ハ} \frac{a}{b} \quad \text{ニ等シ、}$$

則チ比ハ分數ヲ以テ表ハスコトヲ得ルナリ、

**第百九十款**　分數ハ其分子及ビ分母ニ同數ヲ乘ズルモ其値變ズルヿナシ、

是故ニ亦比ノ兩項ニ同數ヲ乘ズルモ其値ヲ變ゼズ即チ、

$2:3$, $6:9$, 及ビ $2m:3m$. ナル比ハ皆相等シ、

又　$4:5$, $7:9$, 及ビ $11:15$ ナル比ハ各別ニ

$36:45$, $35:45$, 及ビ $33:45$, ニ等シ、

故ニ　$4:5$, $7:9$, 及ビ $11:15$ ナル比ハ其大サ遞降ノ順次ヲナ



スモノナリ、

**第百九十一款**　比ハ其第一項ノ第二項ヨリ大ナルカ又ハ第二項ニ等キカ或ハ第二項ヨリ小ナルカニ從ヒテ一ヨリ大又ハ一ニ等ク或ハ一ヨリ小ナルコト明カナリ、

一ヨリ大ナル比ヲ時トシテ優比 (*Ratio of Greater Inequality*) ト稱シ而シテ一ヨリ小ナル比ヲ均シク劣比 (*Ratio of Less Inequality.*) ト稱ス、

**第百九十二款**　比ハ同シ量ヲ其各項ニ加フルトキハ其値ヲ變ズ、例ヘバ　$4:5$　ナル比ノ各項ヘ 1,10 及ヒ 100 ヲ加フレバ其各比ハ次ノ如シ、

$5:6$　$14:15$　及ビ　$104:105$

而シテ此等ノ新比ハ與ヘラレタル比ト異ナリ且ツ相互ニ等シカラズ、

$$\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5},\quad \frac{14}{15}=1-\frac{1}{15} \quad \text{及ビ} \quad \frac{104}{105}=1-\frac{1}{105}.$$

ナルガ故ニ $4:5$ ナル比ノ各項ヘ同量ヲ加ヘテ得タル新比ハ其加ヘタル量ノ大トナルニ從ヒ次第ニ 1 ニ接近スルヲ見ル、

是レ次ノ一般ノ命題ノ特別ナル場合ナリ、

**第百九十三款**　凡ソ比ハ其兩項に同量を加ふる時は次第に一に接近せしむるを得るものなり、

$a:b$ ナル比ノ兩項ニ $x$ ヲ加フレバ $a+x:b+x$ ナル比ヲ得ベシ、

今 $\dfrac{a+x}{b+x}$ ハ $\dfrac{a}{b}$ ヨリモ尙ホ一ニ接近セルコトヲ證セントス、

今　$$\frac{a}{b}-1=\frac{a-b}{b}$$

又　$$\frac{a+x}{b+x}-1=\frac{a-b}{b+x}$$

而シテ $\frac{a-b}{b+x}$ ノ絕對値ハ $\frac{a-b}{b}$ ノ絕對値ヨリ小ナルコト明カナリコレ本命題ヲ證スルニ足ル、

$a$ 若シ $b$ ヨリ大ナル時ハ $\frac{a}{b}$ ハ1ヨリ大ナリ而シテ $\frac{a+x}{b+x}$ モ亦1ヨリ大ナリ然レ𪜈 $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリモ尙ホ一ニ接近セリ故ニ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ小ナリ、

故ニ一ヨリ大ナル比ハ其各項ニ同量ヲ加フルコトニ由テ減少ス、

又 $a$ 若シ $b$ ヨリ小ナレバ $\frac{a}{b}$ ハ1ヨリ小ナリ而シテ亦タ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ1ヨリ小ナリ然レ𪜈 $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリモ尙一ニ接近セリ故ニ $\frac{a+x}{b+x}$ ハ $\frac{a}{b}$ ヨリ大ナリ、

故ニ一ヨリ小ナル比ハ其各項ニ同量ヲ加フルコトニ由リテ增加ス、

又 $x$ 若シ甚大ナル時ハ $\frac{a-b}{b+x}$ ナル分數ハ甚小ナリ而シテ $\frac{a+x}{b+x}$ ト1トノ差ナル $\frac{a-b}{b+x}$ ハ $x$ ヲ充分大ナラシメバ如何程ニテモ小サクナシ得可シ、是ヲ $x$ ノ甚大ナル時 $\frac{a+x}{b+x}$ ノ極限ハ一ナリト云フ、

**第百九十四欵**　時トシテハ次ニ示ス諸ノ界說ヲ要スルコトアリ、

若干ノ比アリテ其第一項ノ積ノ第二項ノ積ニ於ケル比ヲ與ヘラレタル諸比ノ複比ト稱ス、

例ヘバ $ac:bd$ ハ $a:b$ 及ビ $c:d$ ナル兩比ノ複比ナリ、

$a^2:b^2$ ナル比ヲ $a:b$ ノ二乘比 (*Duplicate ratio*) ト稱ス、

$a^3:b^3$ ナル比ヲ $a:b$ ノ三乘比 (*Triplicate ratio*) ト稱ス、

$\sqrt{a}:\sqrt{b}$ ナル比ヲ $a:b$ ノ半乘比 (*Sub-duplicate ratio*) ト稱ス、

**第百九十五欵**　二ツノ量ノ比ハ必ズシモ二ツノ整數ノ比ヲ以テ表ハシ得ベキニ非ズ例ヘバ或ル平方形ノ對角線ノ其一邊ニ於ケル比ノ



如シ何トナレバ此比ハ $\sqrt{2}$ ニシテ $\sqrt{2}$ ト精密ニ相等シキ分數ヲ求ムル能ハザレバナリ、

二ツノ量ノ比ヲ精密ニ二ツノ整數ノ比ヲ以テ表ハシ能ハザル時之ヲ不盡量 (*Incommensurable quantities*) ト稱ス、

## 第四十六例題

1. $5:6$, $7:8$, $41:48$, 及ビ $31:36$ ナル諸比ヲ大サノ順次ニ列記セヨ、

2. $x$ ノ値幾何ナル時 $3+x:4+x$ ナル比ハ $5:6$ ニ等シキヤ、

3. $x$ ノ價幾許ナル時 $15+x:17+x$, 比ハ $\frac{1}{2}$ ニ等シキヤ.

4. $3:4$ ノ兩項ニ如何ナル數ヲ加フレバ $25:32$ ナル比ニ等クナルヤ.

5. 其比ハ $5:6$ ニシテ其和ハ 121 トナルベキ二數ノ價ヲ求ム.

6. 二數アリ其比ハ $3:8$ ニシテ其平方ノ和ハ 3577 ナリト云フ各數ノ價ヲ求ム.

7. 若シ $\frac{4x+5y}{3x-y}=2$ ナルトキハ $x$ ノ $y$ ニ於ケル比如何.

8. 若シ $4x^2+y^2=4xy$ ナル時ハ $x$ ノ $y$ ニ於ケル比如何.

9. $x^2+6y^2=5xy$ ヲ與ヘテ $x:y$ ヲ求ム.

10. 一比アリ若シ其兩項ニ 2 ヲ加フレバ $2:3$ ニ等シク而シテ若シ其兩項ヨリ 1 ヲ減ズレバ $1:2$ ニ等シト云フ其比如何.

11. 二數アリ其和. 其差及ビ其平方ノ和ハ $7:1:75$ ノ如シト云フ二數各如何.

12. $9:23$ ナル比ヲ $7:11$ ナル比ヨリ大ナラシメンガ爲ニ此兩項ニ加フベキ最小整數如何.

13. $2:3$ 及ビ $15:16$ ナル兩比ノ複比ヲ記シ又 $5:6$ 及ビ $18:25$ ナ

ル兩比ノ複比ヲ記スベシ.

14. $2x : 3y$ ノ二乘比ヲ記セ.

15. $x+1 : x+4$ ノ $3 : 5$ ノ二乘比トナル爲ニハ $x$ ノ價ヲ幾何トスベキヤ.

## 比例 (Proportion.)

**第百九十六款** 四ツノ量アリ其第一量ノ第二量ニ於ケル比第三量ノ第四量ニ於ケル比ト相等シキ時ハ此四ツノ量ハ比例ヲ爲スト云フ

例ヘバ若シ　$a : b = c : d$

ナル時ハ $a, b, c, d$ ハ比例ヲナスナリ.

コレヲ時トシテ次ノ記法ヲ以テ表ハス.

$$a : b :: c : d.$$

之ヲ "$a$ の $b$ に於けるは $c$ の $d$ に於けるが如し" ト讀ム.

比例ヲナセル四ツノ量ノ第一ト第四ヲ時トシテハ外項 (*Extremes*) ト稱シ其第二ト第三ヲ内項 (*Means*) ト稱ス.

**第百九十七款** 若シ四ツノ量 $a, b, c, d$ ガ比例ヲナス時ハ界說ニ由テ

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

此相等式ノ各ニ $bd$ ヲ乘ズル時ハ

$$ad = bc$$

故ニ外項の積は内項の積に等し.

逆ニ若シ $ad = bc$ ナル時ハ $a, b, c, d$ ハ比例ヲナスベシ.

何トナレバ若シ　$ad = bc$

ナラバ　$\dfrac{ad}{bd} = \dfrac{bc}{bd}$



$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

即チ　$a : b = c : d.$

故ニ若シ $a : b = c : d$ ナレバ $ad = bc$ ナリ

又若シ $ad = bc$ ナレバ $a : b = c : d$ ナリ.

**第百九十八款** 若シ $ad = bc$ ナル時ハ前款ヨリ次ノ四ツノ關係式ノ正實ナルヲ知ル.

$$a : b = c : d,$$

$$a : c = b : d$$

$$b : a = d : c,$$

及ビ　$b : d = a : c.$

是故ニ上ノ四ツノ比例式中ノ孰レカ一式若シ正實ナレバ此四式皆ナ正實ナリ.

**第百九十九款** 若シ $a : b = c : d$ ナレバ

$a+b : a-b = c+d : c-d$ ナリ

何トナレバ　$a+b : a-b = c+d : c-d$　ハ

$$(a+b)(c-d) = (a-b)(c+d)$$

即チ　$ac+bc-ad-bd = ac-bc+ad-bd$

即チ　$bc = ad$　ナル時

其然ルヲ知ル

然ルニ　$a : b = c : d$　ナル故ニ

此要件ハ滿足セリ.

上ノ命題ハ又次ノ如ク證明スルヲ得.

$$a : b = c : d$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\therefore\ \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$$

即チ $$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(i)}$$

又 $$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$$

即チ $$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\text{(ii)}$$

(i) 及ビ (ii) ヨリ除法ニ由テ $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

$$\therefore\ a+b:a-b=c+d:c-d.$$

**第二百款** 若干ノ量アリテ其第一ノ第二ニ於ケル比ト第二ノ第三ニ於ケル比ト第三ノ第四ニ於ケル比等逐次此ノ如ク取リタル比悉ク相等シキ時ハ此等ノ量ハ連比例 (*Continued proportion*) ヲナスト云フ.

例ヘバ若シ $a:b=b:c=c:d$, 等 即チ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=$ 等 ナル時ハ $a, b, c, d$, 等ハ連比例ヲナセルナリ.

若シ $a:b=b:c$ ナル時ハ $b$ ヲ $a$ ト $c$ トノ間ノ比例中項 (*Mean proportional*) ト称ス. 又 $c$ ヲ $a$ ト $b$ トノ第三比例項 (*Third proportional*) ト称ス.

**第二百一款** 若シ $a, b, c$ ハ連比例ヲナス時ハ

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$

$$\therefore\ b^2=ac\ \text{即チ}\ b=\sqrt{ac}.$$

故ニ與へられたる二つの間の比例中項ハ其積の平方根なり.

又 $$\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}=\frac{b}{c}\times\frac{b}{c}$$

即チ $$\frac{a}{c}=\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2}{b^2}$$

故ニ $$a:c=a^2:b^2.$$



故ニ若シ三つの量連比例をなすときは第一の第三に於ける比ハ第一の第二に於ける二乗比なり、

**第二百二款** 若シ $a:b=c:d=e:f$ ナル時ハ此各比ハ $a+c+e:b+d+f$ ニ等シカルベシ、

今 $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

而シテ此各分数ハ $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ ニ等シキコトヲ證スルヿヲ要ス.

$\frac{a}{b}=x$ トス. 然ル時ハ $\frac{c}{d}=x$ 又 $\frac{e}{f}=x$ ナルベシ.

$$\therefore\ a=bx,\ c=dx\ \text{及ビ}\ e=fx.$$

故ニ加法ニ由テ

$$a+c+e=bx+dx+fx$$
$$=(b+d+f)x$$
$$\therefore\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=x.$$

是ニ此命題ヲ證明セリ.

**第二百三款** $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ 若シ不等ナレバ $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ ハ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ノ三分数中ノ最小ナルモノヨリハ大ニシテ最大ナルモノヨリハ小ナリ、

何トナレバ $\frac{a}{b}$ ヲ最大トシ而シテ $\frac{a}{b}=x$ トス.

然ル時ハ $\frac{c}{d}$ ハ $x$ ヨリ小ニシテ $\frac{e}{f}$ 亦タ $x$ ヨリ小ナリ.

故ニ $$a=xb,$$
$$c<xd$$
及ビ $$e<xf$$
故ニ $$a+c+e<x(b+d+f)$$
$$\therefore\ \frac{a+c+e}{b+d+f}<x.$$

故ニ $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ ハ三分数ノ最大ナルモノヨリ小ナリ.

是ト同樣ニ $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ ハ三分數ノ最小ナルモノヨリ大ナルコトヲ證明シ得ベシ、

又同シ方法ニヨリテ

$$\frac{a+c+e+g+\cdots\cdots}{b+d+f+h+\cdots\cdots}$$

ハ $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}, \frac{g}{h}$……ナル數多ノ分數ノ中ニテ最小ナルモノヨリハ大ニシテ其最大ナルモノヨリハ小ナルコトヲ證明シ得、

**第二百四欵**　第二百二欵ノ如ク一字ヲ以テ比ヲ表ハスコトハ甚ダ便ナリトス次ニ一二ノ例ヲ附加ス、

例一.　若シ $a:b=c:d$ ナレバ

$$a^2+ab:c^2+cd=b^2-2ab:d^2-2cd.$$

$\frac{a}{b}=x$ トス　然ルトキハ $\frac{c}{d}=x.$

故ニ　　$a=bx$　及ヒ　$c=dx.$

$$\therefore\quad \frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2x^2+b^2x}{d^2x^2+d^2x}=\frac{b^2(x^2+x)}{d^2(x^2+x)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

又　$$\frac{b^2-2ab}{d^2-2ab}=\frac{b^2-2b^2x}{d^2-2d^2x}=\frac{b^2(1-2x)}{d^2(1-2x)}=\frac{b^2}{d^2}.$$

故ニ　$$\frac{a^2+ab}{c^2+cd}=\frac{b^2-2ab}{d^2-2cd},$$

即チ　$$a^2+ab\ :\ c^2+cd=b^2-2ab\ :\ d^2-2cd.$$

例二、　若シ $a:b=c:d=e:f$ ナレバ

$$a^3+c^3+e^3:\ b^3+d^3+f^3=ace:bdf.$$

ナルコトヲ證セヨ、

$\frac{a}{b}=x$ トス、然ルトキハ $\frac{c}{d}=x$ 及ビ $\frac{e}{f}=x.$

故ニ　$a=bx,\ c=dx$ 及ビ $e=fx;$

$$\therefore\quad \frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{b^3x^3+d^3x^3+f^3x^3}{b^3+a^3+f^3}=x^3.$$



又　$$\frac{ace}{bdf}=\frac{bx.dx.fx}{bdf}=x^3.$$

故ニ　$$\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}=\frac{ace}{bdf},$$

即チ　$$a^3+c^3+e^3\ :\ b^3+d^3+f^3=ace\ :\ bdf.$$

**第二百五欵**　ゆーくりッどノ幾何學ニ於テ比例ノ界說ハ次ノ如シ、　四ツノ量アリテ其第一量ト第三量トノ任意ノ等倍數ヲ作リ又第二量ト第四量トノ任意ノ等倍數ヲ作ルトキ第一量ノ倍數ノ第二量ノ倍數ヨリ大ナルカ、等シキカ、或ハ小ナルニ從テ常ニ第三量ノ倍數ハ第四量ノ倍數ヨリ大ナルカ、等シキカ、或ハ小ナレバ此四ツノ量ハ比例ヲナスモノナリ、

四ツノ量 $a, b, c, d,$ 若シ代數學上ノ比例ノ界說ニ適合スレバ

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d};$$　ナリ、

故ニ $m$ 及ヒ $n$ ノ凡ノ價ニ向テ

$$\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}.$$

是故ニ　$$ma \gtreqless nb.$$

ナルニ從テ　$$mc \gtreqless nd.$$

故ニ又ゆーくりッど幾何學ノ比例ノ界說ニ適合ス、

次ニ $a, b, c, d$ ハゆーくりッど幾何學ノ比例ノ界況ニ適合スルモノト假定ス、

$a$ 及ビ $b$ 若シ可盡數ナルトキハ $a:b=m:n$ 但シ $m, n$ ハ整數トス

然ルトキハ　$$\frac{a}{b}=\frac{m}{n};$$

$$\therefore\quad na=mb.$$

然ルニ界說ニ由リテ

$$na \gtreqless mb.$$

ナルニ從ヒ

$$nc \gtreqless md.$$

是故ニ　　　$nc=md.$

$$\therefore\ \frac{c}{d}=\frac{m}{n}=\frac{a}{b}.$$

故ニ $a, b, c, d$ ハ代數學上ノ界說ニ適合ス、

$a$ 及ビ $b$ 若シ不盡數ナル時ハ $a:b=m:n$ ノ如キ二ツノ整數 $m$ 及ビ $n$ ヲ求ムル能ハズ、然レモ若シ $a$ ノ任意ノ倍數 $na$ ヲ取ル時ハ此數 $b$ ノ連續兩倍數假令バ $mb$ ト $(m+1)b$ ノ間ニアラザルベカラズ故ニ

$$na>mb\ 及ビ\ na<(m+1)b.$$

是故ニ界說ニ由テ

$$nc>md\ 及ビ\ nc<(m+1)d;$$

$$\therefore\ \frac{c}{d}>\frac{m}{n}\ 及ビ\ \frac{c}{d}<\frac{m+1}{n}.$$

是故ニ $\frac{a}{b}$ 及ビ $\frac{c}{d}$ 共ニ

$$\frac{m}{n}\ 及ビ\ \frac{m+1}{n}\quad ノ間ニ在リ$$

則チ $\frac{a}{b}$ 及ビ $\frac{c}{d}$ ノ間ノ差ハ $\frac{1}{n}$ ヨリ小ナリ而シテ $n$ ハ如何ニ大ナルトモ

然ラサルヲ得ズ故ニ $\frac{a}{b}$ ハ $\frac{c}{d}$ ニ等カラズンバ非ズ、



## 第四十七例題

1. 若シ　$a:b::c:d,$　ナレバ次ノ各式ヲ證セヨ、

　(i)　$ac:bd::c^2:d^2.$

　(ii)　$ab:cd::a^2:c^2.$

　(iii)　$a^2:c^2::a^2-b^2:c^2-d^2.$

ナルコトヲ證セヨ、

2. 若シ　$a:b=c:d,$　ナレバ

$$2a+3c:3a+2c=2b+3d:3b+2d.\quad ナリ$$

ナルコトヲ證セヨ、

3. 若シ　$a:b::a+c:b+d,$　ナレバ

$$c:d::c+a:d+b.\quad ナリ$$

4. 若シ　$a:b=c:d,$　ナレバ

$$la+mb:pa+qb=lc+md:pc+qd.\quad ナリ$$

5. 若シ　$3a-5b:3c-5d=5a+3b:5c+3d,$　ナレバ

$$a:b=c:d.\quad ナリ$$

ナルコトヲ證セヨ、

6. $a^3b$ 及ビ $ab^3$ ノ比例中項ヲ求ム、

7. $(a+b)^2$ 及ビ $(a-b)^2$ ノ比例中項ヲ求ム、

8. $a$ 及ビ $a^2$ ノ第三比例項ヲ求ム、

又 $(a-b)^2$ 及ビ $a^2-b^2.$ ノ第三比例項ヲ求ム、

9. 若シ　$a:b::c:d,$ ナレバ $ab+cd$ ハ $a^2+c^2$ 及ビ $b^2+d^2.$ ノ間ノ比例中項ナルコトヲ證セヨ、

10. 若シ　$a:b::c:d,$　ナレバ次式ノ各ヲ證セヨ、

　(i)　$a:a+c::a+b:a+b+c+d.$

(ii) $a^2+ab+b^2 : a^2-ab+b^2 :: c^2+cd+d^2 : c^2-cd+d^2$

(iii) $a+b : c+d :: \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}$.

(iv) $\sqrt[3]{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2} :: \sqrt[3]{a^3+b^3} : \sqrt[3]{c^3+d^3}$.

(v) $a^2c+ac^2 : b^2d+bd^2 :: (a+c)^3 : (b+d)^3$.

(vi) $\sqrt[n]{a^n+b^n} : \sqrt[n]{c^n+d^n} :: \sqrt[r]{a^r-b^r} : \sqrt[r]{c^r-d^r}$、

11. 若シ $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, ナレバ $\frac{x+y}{a+b}=\frac{y+z}{b+c}=\frac{z+x}{c+a}$.

及ビ $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$ ナリ、

## 齊變 (Variation.)

**第二百六款**　或ル物品ヲ毎斤ノ定價若干ト定メ之ヲ賣ルニ其若干量ノ價ハ其斤量ニ關係スルモノナリ即チ其斤數ヲ二倍スレバ價モ亦二倍トナリ斤數ヲ二等分スレバ價モ亦二分ノ一トナルベシ餘ハ之ニ準ズ、偕二數ハ其各ヲ二倍トスルモ或ハ二分ノ一トスルモ同ジ比ヲ有スルモノナリ、是故ニ價ヲ表ハス所ノ數ハ常ニ重サヲ表ハス所ノ數ト同ジ比ヲ保ツベシ　此ノ如ク二量ノ相關係スル時ハ其一量ハ他ノ一量ノ如く變ずト云フナリ、

故ニ次ノ界說アリ、

二量アリ其關係ハ之ヲ度ル所ノ二數常數比ヲ有スルガ如タナル片ハ其一量ハ他ノ一量ノ如く變ずト云フ、

$\propto$ ナル記號ハ如く變ずト云フ語ノ代リニ之ヲ用ユ即ハチ $A\propto B$ ハ'$A$ ハ $B$ ノ如ク變ズ'(A varies as B) ト讀ム、

**第二百七款**　若シ $A\propto B$ ナレバ界說ニ由テ $A : B$ ハ常數ナリ故ニ若シ $m$ ヲ常數比トスレバ

$$\frac{A}{B}=m,\quad \text{即チ}\quad A=mB.$$



或ル場合ニ於テ常數 $m$ ヲ求ムルニハ $A$ ト $B$ ノ相應セル値ノ唯一對ヲ知ルヲ要ス、

例ヘバ　若シ $A\propto B$ ニシテ $B$ ノ $2$ ナル片 $A$ ハ $10$ ナリトセバ

$$A=mB$$

$$\therefore\ 10=m\times 2$$

即チ　$m=5$

是故ニ　$A=5B.$

**第二百八款**　二量アリ其一ハ他ノ一ノ反數ノ如ク變ズル片ハ第一量ハ第二量ノ如く反變すト云フ、例ヘバ、$A : \frac{1}{B}$ 若シ常數ナレバ $A$ ハ $B$ ノ如ク反變スト云フ、

$A : \frac{1}{B}$ 若シ常數ニシテ其常數比ヲ $m$ トスレバ

$$\frac{A}{\frac{1}{B}}=m,\quad \text{即チ}\quad A=\frac{m}{B}.$$

**第二百九款**　一量ノ他ノ二量ノ積ニ於ケル比若シ常數ナルトキハ其第一量ハ他ノ二量ト共に變すト云フ、

例ヘバ、$A : BC$ 若シ常數ナル片即チ $m$ ヲ常數トシテ $A=m, BC$ ナル片ハ $A$ ハ $B$ 及ビ $C$ ト共ニ變ズト云フ、

**第二百十款**　一量若シ第二量ト第三量ノ反數トノ積ニ對シ常數比ヲ有スル片ハ第一量ハ第二量の如く正變し第三量の如く反變すト云フ、

例ヘバ $A : B\times\frac{1}{c}$ 若シ常數ナル片即チ $m$ ヲ常數トシテ $A=m\frac{B}{C}$ ナル片 $A$ ハ $B$ ノ如ク正變シ、$C$ ノ如ク反變スト云フ、

**第二百十一款**　上ニ說キ明シタル變化ノ凡テノ相異ナレル場合ニ於テ常數ハ相應セル値ノ或ル一對ヲ知ル片ハ之ヲ決定スルコトヲ得ル

ナリ、

例ヘバ、$A$ 若シ $B$ ノ如ク正變シ $C$ ノ如ク反變スル時 $B$ ハ 2 ニシテ $C$ ハ 9 ナレバ $A$ ハ 6 ナリトセバ

$$A=m\frac{B}{C}$$

而シテ
$$6=m.\frac{2}{9}$$

$$\therefore\ m=27.$$

是故ニ
$$A=27\frac{B}{C}$$

**第二百十二款**　$C$ 若シ不變ナル時ハ $A\propto B$ ニシテ $B$ 若シ不變ナル時ハ $A\propto C$ ナレバ $B$ 及ビ $C$ 共ニ變ズルトキハ $A\propto BC$ ナルベシ、

$B$ 及ビ $C$ ノ變化ヲ順次ニ生ズルモノト假定ス、

然ルトキハ $C$ ヲ不變數トシ $B$ ノ $b$ ニ變ズルニ從ヒ $A$ ハ $a'$ トナルトス、

然ル時ハ假定ニ由テ

$$\frac{A}{B}=\frac{a'}{b}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{(i)}$$

今 $b$ ヲ不變數トシ $C$ ノ $c$ ニ變ズルニ從ヒ $a'$ ハ $a$ トナルトス、

然ルトキハ假定ニ由テ

$$\frac{a'}{C}=\frac{a}{c}\cdots\cdots\cdots\cdots\ \text{(ii)}$$

是故ニ (i) 及ビ (ii) ヨリ

$$\frac{A}{BC}=\frac{a}{bc}.$$

則チ本定理ヲ證明セリ、

次ニ本題ノ數例ヲ擧グ

肉若干量ノ價 [$C$] ハ重量 [$W$] ノ常數ナル時ハ一斤ノ價 [$P$] ノ如ク變ジ而シテ一斤ノ價ノ常數ナルトキハ重量ノ如ク變ズ重量及ビ一斤ノ價共ニ變ズル時ハ命題ニヨリ其價ハ重量及ビ一斤ノ價ノ積ノ如ク變ズ



ルナリ、

即チ若シ　$W$ ノ常數ナル時 $C\propto P$,

及ビ　$P$ ノ常數ナル時 $C\propto W$,

ナレバ然ル時ハ　$P$ 及ビ $W$ ノ變數ナル時 $C\propto PW$.　ナリ

又三角形ノ面積 [$A$] ハ高サ [$H$] ノ常數ナル時ハ底 [$B$] ノ如ク變ジ又底ノ常數ナルトキハ高サノ如ク變ズ是故ニ底及ビ高サト共ニ變ズル時ハ面積ハ底及ビ高サト共ニ變ズベシ

即チ若シ　$H$ ノ常數ナル時 $A\propto B$,

及ビ　$B$ ノ常數ナル時 $A\propto H$,

ナレバ然ルトキハ　$B$ 及ビ $H$ ノ變數ナル時 $A\propto BH$,

又瓦斯ノ壓力 [$P$] ハ絶對溫度 [$T$] ノ常數ナル時ハ比重 [$D$] ノ如ク變ジ又比重ノ常數ナル時ハ絶對溫度ノ如ク變ズ是故ニ比重及ビ溫度俱ニ變ズルトキハ壓力ハ比重ト溫度トノ積ノ如ク變ズベシ

即チ　$P\propto DT$

**第二百十三款**　例一、若シ $A\propto B$ ニシテ又 $A\propto C$ ナル時ハ $B\propto C$ ナルベシ

何トナレバ $A\propto C$ ナル故ニ $A=mB$ 但シ $m$ ハ或ル常數ナリ、

又 $A\propto C$ ナル故ニ $A=nC$ 但シ $n$ ハ或ル常數ナリ、

是故ニ $B=\frac{n}{m}C$ 但シ $\frac{n}{m}$ ハ或ル常數ナリ是ヲ以テ $B\propto C$、

例二、若シ $C\propto WP$ ナレバ $W\propto\frac{C}{P}$ ナルベシ

何トナレバ $C\propto WP$ ナルユヘ $C=m.WP$ 但シ $m$ ハ或ル常數トス、

是故ニ $W=\frac{1}{m}\frac{C}{P}$ 但シ $\frac{1}{m}$ ハ或ル常數ナリ故ニ $W\propto\frac{C}{P}$.

例三、瓦斯ノ壓力ハ其比重及ビ絶對溫度ト共ニ變ズ又比重 1 ニシテ溫度 300 ナレバ壓力ハ 15 ナリ比重 3 ニシテ溫度 320 ナルトキハ其壓力如何　$P\propto TD$

ナル故ニ　　$P=mTD$

但シ $m$ ハ或ル常數トス

又題意ニヨリ

$$15=m\times300\times1$$

$$\therefore\ m=\frac{1}{20}.$$

故ニ $D$ ハ 3 ニシテ $T$ ハ 320 ナル時ハ

$$P=\frac{1}{20}\times320\times3$$
$$=48.$$

## 第四十八例題

1. $A$ ハ $B$ ノ如ク變ズ而シテ $B$ ノ 3 ナル時ハ $A$ ハ 5 ナリト云フ $B$ ノ 5 ナルトキ $A$ ハ幾何ナルヤ、

2. $W$ ハ $P$ ニ反變ス而シ $P$ ノ 15 ナル時 $W$ ハ 4 ナリト云フ $P$ ノ 12 ナル時 $W$ ハ幾何ナリヤ、

3. 若シ $x\propto y$ ニシテ $y\propto z$ ナルトキハ $xz\propto y^2$.

4. 若シ $x^2\propto y$ ニシテ $z^2\propto y$ ナルトキハ $xz\propto y$.

5. 若シ $x\propto\frac{1}{y}$ ニシテ $y\propto\frac{1}{z}$ ナルトキハ $x\propto z$.

6. $A$ ハ $B$ 及ビ $C$ ト共ニ變ズ又 $B=2$ 及ビ $C=6$ ナルトキハ $A=4$ ナリ $B=2$ 及ビ $C=9$ ナル時 $A$ ノ價如何.

7. $A$ ハ $B$ ノ如ク變ジ又 $C$ ニ反變ス又 $B=3$ 及ビ $C=4$ ナル時 $A=2$ ナリ $A=6$ 及ビ $C=3$ ナル時 $B$ ノ價如何

8. 圓ノ面積ハ其半徑ノ平方ノ如ク變ズ而シテ半徑 10 英尺ナル圓ノ面積ハ 314.159 平方英尺ナリ然ルトキハ半徑 12 英尺ナル圓ノ面積ハ幾何ナルヤ、

9. 球ノ體積ハ其半徑ノ立方ノ如ク變ズ而シテ半徑 1 英尺ナル球ノ體積ハ 4.188 立方英尺ナリ然ルトキハ半徑 3 英尺ナル球ノ體積ハ幾何ナルヤ、



10. 墜體ノ速力ハ靜止ヨリ其墜落スル時間ノ如ク變ズ而シテ二秒時ノ終ニ於ケル速力ハ 64 ナリト云フ五秒時ノ終ニ於ケル速力如何、

11. 物體ノ靜止ヨリ墜落セル全距離ハ其墜落セシ時間ノ平方ノ如ク變ズ而シテ一物體三秒時間ニ 144 英尺墜落スト云フ二秒時ニ墜落スル距離ハ如何、

12. 圓ノ面積ハ其半徑ノ平方ノ如ク變ズルコトヲ既知シ半徑五英尺ノ圓ハ半徑三英尺ノ圓ト半徑四英尺ノ圓トノ和ニ等シキコトヲ證明スベシ、

13. 瓦斯ノ體積ハ其絕對溫度ノ如ク變ジ又其壓力ニ反變ス又壓力 15 ニシテ溫度 280 ナルトキハ體積 1 立方英尺ナリト云フ然ルトキハ壓力 20 ニシテ溫度 300 ナルトキハ其體積如何、

14. 若シ $a^2-b^2$ ハ $c^2$ ノ如ク變ジ而シテ若シ $a=5$ 及ビ $b=3$ ナル時ハ $c=2$ トスレバ $a,b$ 及ビ $c$ ノ間ノ方程式如何又 $b$ ハ $a-2c$ ト $a+2c$ ノ間ノ比例中項ナルコトヲ說明スベシ、

15. 直圓錐ノ體積ハ其ノ高サ及ビ其底ノ平方ト共ニ變ズ而シテ高サ 7 英尺底半徑 3 英尺ナル圓錐ノ體積ハ 66 立方英尺ナリト云フ高サ 9 英尺半徑 14 英尺ナル圓錐ノ體積ヲ求ム、

16. 球ノ體積ハ其ノ半徑ノ立方ノ如ク變ズ今若シ半徑 6, 8, 及ビ 10 英寸アル三球ヲ合鎔シテ一球ヲ作ルトキハ其半徑幾許ナルヤ、

17. 海上遠望ノ距離ハ海面上眼高ノ平方根ノ如ク變ズ而シ眼高 6 英尺ナル時距離 3 英里ナリト云フ眼高 50 ヤードノ時其距離幾許ナルヤ、

## 第五雜例題

### A.

1. 若シ $\frac{2a}{3}=\frac{3b}{4}=\frac{c}{2}=1$, ナル時ハ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$.

ノ數價ヲ求ム、

2. $9a^2b^3-12a^4b+3b^5+2a^3b^2+4a^5-11ab^4$ ヲ $3b^3+4a^3-2ab^2$. ヲ除スベシ、

3. $1-x-x^3+x^5$ 及ビ $1-x^4-x^6-x^7$. ノ最高公因數ヲ求ム、

4. $\dfrac{a^2-a^2b^{-2}-1+b^{-2}}{a+ab^{-1}+1+b^{-1}}$. ヲ簡約セヨ、

5. 或ル人鷲15羽ト鷓鴣12羽トヲ £5.5s. ニテ買ヘリ而シテ 18s. ニテ買ヒ得ベキ鷲ハ £1 ニテ買ヒ得ベキ鷓鴣ノ數ヨリ 2 羽多カルベシト云フ鷲一羽ノ價ハ幾許ナリシヤ、

6. $x^2-px+q=0$ ナル方程式ノ二根ノ差ハ

$x^2-3px+2p^2+q=0$. ナル方程式ノ二根ノ差ニ等シキコトヲ證明セヨ、

7. 3: 4 ナル比ヲ 19: 21 ナル比ヨリ大ナラシムルニ其兩項ニ加フベキ最小整數如何、

8. $a+b, b+c, c+a$ 若シ連比例ヲナストキハ

$b+c : c+a :: c-a : a-b$. ナルコトヲ證セヨ

## B.

1. $x=\frac{4}{5}$, $y=\frac{3}{5}$ ナルトキハ

$(xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})\div(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$, ノ價如何、

2. $x^2+(a-1)x+a+1$ ニ $(a-1)x-a^2-a-1$. ヲ乘セヨ、

3. 次ノ各式ノ因數如何

(i) $x^3-13x^2y+42xy^2$,

(ii) $(a+2b+3c)^2-4(a+b-c)^2$, 及ビ (iii) $x^2-4xy+4y^2-9$.

4. $\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{3x}{x+2y}+\dfrac{4xy}{4y^2-x^2}$. ヲ簡約セヨ、



5. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\dfrac{10}{x}-\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{10}{x+1}$.

(ii) $\left.\begin{array}{l} x+y+\sqrt{(x+y)}=12 \\ x^2-y^2=21 \end{array}\right\}$.

6. 若シ $x+\frac{1}{y}=1$ 及ビ $y+\frac{1}{z}=1$, ナレバ $z+\frac{1}{x}=1$, 及ビ $xyz+1=0$. ナルコヲ記セヨ、

7. $9x^6-12x^4y^2+30x^3y^3+4x^2y^4-20xy^5+25y^6$. ノ平方根ヲ求ム、

8. 二數アリ其和、其差、及ビ其平方ノ和ノ比ハ 3 : 1 : 15 ナリ各數ヲ求ム、

9. 若シ $a:b::c:d$ ナレバ

$la+mb : lc+md :: \sqrt{a^3+b^2d} : \sqrt{ac^2+d^3}$.

## C.

1. $3\{b+2(a-c)-5(a-b)\}$. ヨリ $a-2(b-c)$ ヲ減セヨ、

2. $a+b+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{a^2}{b}$ ニ $a-b+\dfrac{b^2}{a}-\dfrac{a^2}{b}$ ヲ乘セヨ、

3. $\dfrac{a^2+b^2}{9(a^2-b^2)}$ ニ $27(a-b)$, ヲ乘セヨ、

又 $\dfrac{9a^2-16b^2}{a+b}$ ヲ $\dfrac{3a-4b}{a^2-b^2}$. ニテ除セヨ、

4. 若シ $a=y+z$, $b=z+x$, $c=x+y$, ナル件ハ

$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$.

5. $a^{\frac{4}{3}}+4ay^{\frac{1}{3}}+10a^{\frac{2}{3}}y^{\frac{2}{3}}+12a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{3}}+9y^{\frac{4}{3}}$. ノ平方根ヲ求ム、

6. 若シ $x=2+\sqrt{2}$, ナルトキハ $(x-1)(x-2)=x$. ナルコトヲ證セヨ、

7. $A$ 及ビ $B$ 互ニ出會スベク同時ニ兩府ヲ出發セリ $A$ ハ $B$ ヨリ一時

間ニ2英里速ク而シ七時ノ後ニ相會セリ若シ$B$ハ毎時ノ速力ヲ1英里速カニシタハ其中ニ減ズルトキハ二人ハ出發後九時ニシテ相會シタルベシト云フ兩府ノ距離如何、

8. 若シ　$a(y+z)=b(z+x)=c(x+y)$;　ナルトキハ

$$\frac{y-z}{a(b-c)}=\frac{z-x}{b(c-a)}=\frac{x-y}{c(a-b)}.$$

## D.

1. $\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right)^2-\left(\frac{a^3+b^3}{a+b}\right)^2=4ab\,(a^2+b^2)$. ナルコトヲ證セヨ、

2. $x^4-2bx^3-(a^2-b^2)x^2+2a^2bx-a^2b^2$　ヲ　$x^2-(a+b)x+ab$. ニテ除セヨ、

3. $x^2-7x+12$, $3x^2-6x-9$　及ビ　$2x^3-6x^2-8x$.　ノ最低公倍數ヲ求ム、

4. 下式ヲ簡約セヨ、

$$\frac{\frac{y}{x}-\frac{y}{y+z}}{\frac{1}{xz}+\frac{1}{zy+z^2}}\left\{1+\frac{y^2+z^2-x^2}{2yz}\right\}.$$

5. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{5x+7}{2}-\frac{2x-7}{3}=3x+14$.

(ii) $\left.\begin{array}{l}3x^2-4xy=20\\2x^2-5xy=12\end{array}\right\}$.

6. 馬車アリ一英里ヲ旅行スルニ前輪ハ後輪ヨリ回轉ノ數64多ク而シテ10英里ノ旅行ニ於テ兩輪ノ回轉數ノ和ハ7040ナリ各輪ノ圓周何如、

7. $2x^{\frac{3}{2}}-17xy^{\frac{1}{2}}+17x^{\frac{1}{2}}y-15y^{\frac{3}{2}}$　ヲ　$2x^{\frac{1}{2}}-15y^{\frac{1}{2}}$.　ニテ除セヨ、



8. 若シ$a:\alpha$, $b:\beta$ 及ビ $c:\gamma$ ナル比凡テ相等シキトキハ各比ハ$a+b+c:\alpha+\beta+\gamma$.　ナル比ニ等キコトヲ證セヨ、

## E.

1. $2\{x-2a-\frac{2}{3}(x-a)+a\}-\frac{1}{3}\{(x-a)-(a-b)+y-b\}$.　ナル式ヲ簡約スベシ、

2. $2a^2x^2-2(3b-4c)(b-c)y^2+abxy$　ヲ　$ax+2(b-c)y$.　ニテ除セヨ、

3. 次ノ各式ノ因數ヲ求ム、

(i) $4a^2b^4-16a^4b^2$,

(ii) $x^2-26x-87$,

(iii) $3x^2-xy-10y^2$.

4. 次式ヲ證セヨ、

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}=\left(\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}+\frac{1}{x-y}\right)^2$$

5. 人アリ或物品若干ヲ £21 ニテ買ヘリ、若シ同ジ金額ニテ六個多ク得タランニハ其價一個ニ付 1s. 3d. 廉トナルト云フ此人ノ買シ物品ノ數ヲ問フ、

6. $\sqrt{(x-a)}+\sqrt{a}-\sqrt{x}$　ヲ　$\sqrt{(x-a)}-\sqrt{a}+\sqrt{x}$.　ヲ乘セヨ、

7. $x^2-\frac{1}{y^2}$ 及ビ $y^2-\frac{1}{x^2}$ ノ間ノ比例中項ハ $xy-\frac{1}{xy}$.　ナルコトヲ證セヨ、

8. 若シ　$a:b::c:d$,　ナレバ

$$a^2+b^2:c^2+d^2::(a+b)^2:(c+d)^2$$

及ビ　$a^2+b^2+c^2+d^2:(a+b)^2+(c+d)^2::(a+c)^2+(b+d)^2:(a+b+c+d)^2$.

ナルコトヲ證セヨ、

## 雜　　例　　題

### F.

1. $a-b+c-d$ ニ $a+b-c+d.$ ヲ乘セヨ、

2. $a^3+b^3+c^3+3(b+c)(c+a)(a+b)$ ヲ $a+b+c.$ ニテ除セヨ、

3. $x^3-19x+30$ 及ビ $5x^3-19x^2+36.$ ノ最高公因數ヲ求ム、又 $x$ ノ如何ナル價ノ時兩項ハ消失スルヤ、

4. $$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3=\frac{8ab(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2}.$$

5. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $$\frac{6x-7}{9x+6}-\frac{5(x-1)}{12x+8}=\frac{1}{2}.$$

(ii) $$\left.\begin{aligned}4x+6y&=3\\4x^2+9xy+9y^2&=11\end{aligned}\right\}.$$

6. $$\frac{2\sqrt{(\frac{1}{3})}+3\sqrt{(\frac{1}{2})}}{\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{3})}-\frac{1}{3}\sqrt{(\frac{1}{2})}}$$ ヲ簡約セヨ、

又 $x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}}\times\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{y}\right)\div\{x^{-\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{4}}\}.$

7. $x^{12}-6x^{10}+13x^8-14x^6+10x^4-4x^2+1$ ノ平方根ヲ求ム、

8. 若シ $a:b::c:d$ ナル時ハ次ノ比例アルヲ證セヨ、

$$a^3c^2:b^3d^2::a^5+c^5:b^5+d^5.$$

---



# 第　二　十　二　編

## 等　差　級　數

## (Arithmetical Progression.)

**第二百十四款**　級數アリ其各項ト其前項トノ差其級數ヲ通ジテ同一ナル時ハ之ヲ等差級數ト云フ、

例ヘバ　$b-a=c-b=d-c,$ 等

ナル時ハ $a, b, c, d,$ 等ハ等差級數ヲナスナリ、

等差級數ノ各項ト其前項トノ間ノ差ヲ公差(*Common difference*)ト稱ス、

次ニ等差級數ノ數例ヲ擧グ、

$1,\ 3,\ 5,\ 7,\cdots\cdots\cdots\cdots$

$2,\ 6,\ 10,\ 14,\cdots\cdots\cdots\cdots$

$9,\ 8,\ 7,\ 6,\cdots\cdots\cdots\cdots$

及ビ　$3,\ -1,\ -5,\ -9,\cdots\cdots\cdots\cdots$

此第一級數ニ於テハ公差 2 ナリ，第二級數ニ於テハ 4, 第三級數ニ於テハ $-1$, 第四級數ニ於テハ $-4$ ナリ.

**第二百十五款**　若シ等差級數ノ第一項ヲ $a$ トシ公差ヲ $d$ トスレバ

第二項ハ　$a+d$　ナルベシ

第三項ハ　$a+2d$　$\cdots\cdots\cdots$

第四項ハ　$a+3d$　$\cdots\cdots\cdots$

遂テ此ノ如ク $d$ ノ係數ハ常ニ級數ニ於ケル其項ノ位置ヲ示ス所ノ數ヨリ一少シ、

故ニ第 $n$ 項ハ　$a+(n-1)d$　ナリ。

此ニ由テ等差級數ノ第一項及ビ公差ノ知レタルトキハ其任意ノ項ヲ直チニ書キ下スヲ得ベシ、例ヘバ、等差級數ニ於テ第一項ハ 5 ニシテ公差ハ 3 ナルトキハ

第九項ハ $5+(9-1)3=29$ ナリ、

第廿七項ハ $5+(27-1)3=83$ ナリ、

**第二百十六款** 等差級數ノ何レカ二項ヲ知ルトキハ其第一項及ビ公差ヲ求ムルコトヲ得ベシ従テ級數ノ他ノ項ヲモ求ムルヿヲ得ベシ、

例ヘバ、等差級數ノ第十項ヲ 25 トシ第十五項ヲ 5 トスレバ下ノ如シ、

第一項ヲ $a$ トシ公差ヲ $d$ トス、

然ルトキハ第十項ハ $a+9d$ ニシテ第十五項ハ $a+14d$ ナリ、

故ニ $$a+9d=25$$

及ビ $$a+14d=5$$

減法ニ由テ $$5d=-20$$

$$\therefore\quad d=-4.$$

然ル時ハ $$a=25-9d=25-9(-4)=61.$$

即チ此級數ハ $61,\ 57,\ 53,\ \ldots\ldots$ ナリ、

**第二百十七款** 三ツノ量等差級數ヲナストキハ其中間ノ量ヲ他ノ二量ノ等差中項 (*Arithmetic mean*) ト稱ス、

例ヘバ、$a,\ b,\ c$ ノ三量、等差級數ヲナストキハ $b$ ハ $a$ ト $c$ ノ等差中項ナリ、

等差級數ノ界說ニ由テ

$$b-a=c-b$$

$$\therefore\quad b=\tfrac{1}{2}(a+c).$$

故ニ、任意ノ二ノ量ノ等差中項ハ其和ノ半ナリ、



**第二百十八款** 若干ノ量等差級數ヲナストキハ其中間ノ各項ヲ兩外項ノ等差內項ト稱ス、

二ツノ與ヘラレタル量ノ中間ニ等差內項ヲ幾個ニテモ插入スルヿヲ得ベシ、

例ヘバ、10 及ビ 25 ノ間ニ四ツノ等差內項ヲ插入スルコト、

今 10 及ビ 25 ノ間ニ四ツノ項ヲ有スル等差級數ヲ求メントスルガ故ニ 10 ハ其第一項ニシテ 25 ハ第六項ナルベシ、

$d$ ヲ公差トス、

然ラバ第六項ハ $10+5d$ ナリ、

故ニ $$10+5d=25$$

$$\therefore\quad d=3.$$

即チ此級數ハ $10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,$ ナリ、

而シテ 10 及ビ 25 ノ間ニ所要ノ等差內項ハ次ノ如シ

$$13,\ 16,\ 19,\ 22.$$

今最モ一般ナル場合即チ $a$ ト $b$ ノ間ニ $n$ 個ノ等差內項ヲ插入スルコトヲ考フベシ、

$a$ ト $b$ ノ間ニ $n$ 項ヲ有スル等差級數ヲ求メントスルガ故ニ $a$ ハ其第一項ニシテ $b$ ハ第 $n+2$ 項ナリ、

$d$ ヲ以テ公差トス

然ルトキハ第 $n+2$ 項ハ $a+(n+1)d$ ナリ、

$$\therefore\quad a+(n+1)d=b,$$

即チ $$(n+1)d=b-a;$$

$$\therefore\quad d=\frac{b-a}{n+1}.$$

即チ此級數ハ

$$a,\quad a+\frac{b-c}{n+1},\quad a+2\frac{b-c}{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots b,$$

ナリ而シテ所要ノ等差內項ハ次ノ如シ、

$$a+\frac{b-c}{n+1},\quad a+2\frac{b-c}{n+1},\quad a+3\frac{b-c}{n+1}\cdots\cdots\cdots\cdots$$

## 第四十九例題

1　次ノ各等差級數ノ第三十項ヲ求ム、

(i)　3, 5, 7, &c.

(ii)　1, 5, 9, &c.

(iii)　12, 9, 6, &c.

(iv)　$\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$, &c.

(v)　$a+b$, $a$, $a-b$, &c.

2. 等差級數ノ第一項ハ 7 ニシテ第三項ハ 13 ナル時ハ其第十項ハ如何、

3. 等差級數ノ第一項ハ 20ニシテ第六項ハ 10 ナル時ハ其第十二項ハ如何、

4. 等差級數ノ第三項ハ 10 ニシテ第十四項ハ 54 ナリ第二十項ヲ求ム、

5. 等差級數ノ第七項ハ 5 ニシテ第五項ハ七ナリ第十二項ハ如何、

6. 5, 8, 11,……ノ何レノ項ガ 65 トナルヤ、

7. $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}$, ……ノ何レノ項ガ 18 トナルヤ、

8. (i) 7 ト 13. (ii) 9 ト $-9$. (iii) $a+b$ ト $a-b$. ノ間ノ等差中項ヲ記下セヨ.

9. (i) 1 ト $\frac{1}{7}$. (ii) 3 ト 5. (iii) $a$ ト $3a$. ノ間ニ各五個ノ等差內項ヲ插入セヨ、

10. $5a-6b$ ト $5b-6a$ ノ間ニ十個ノ等差內項ヲ插入スベシ



11. $a-5b$ ト $b-5a$ ノ間ニ八個ノ等差內項ヲ插入セヨ、

12. $a, b, c, d$, 若シ等差級數ヲナス時ハ$a+d=b+c$ ナルコトヲ證セヨ、

13. 等差級數ノ第一項ト第四項ノ和ハ 19 ニシテ第三項及ビ第六項ノ和ハ 31 ナリ第一項ハ幾何ナルヤ、

14. 若シ同シ量ヲ等差級數ノ各項ニ加フレバ其和ハ尙ホ等差級數ヲナスモノナリ、

15. 若シ同量ヲ以テ等差級數ノ各項ニ乘ズレバ其各積ハ尙等差級數ヲナスモノナリ、

16. 等差級數ノ隔番ノ項ヲ取去レバ餘レル諸項ハ尙等差級數ヲナスベシ、

17. 等差級數ノ連續二項ノ間ニ其等差中項ヲ插入スル時ハ其全体ハ他ノ等差級數ヲ形成スベシ、

18. 四量若シ等差級數ヲナストキハ第一ト第四項ノ積ハ常ニ第二ト第三項ノ積ヨリ小ナリ、

**第二百十九款**　是ヨリ進ンデ等差級數ノ若干項ノ和ヲ求ムル方法如何ヲ示ス可シ、

$a$ ヲ第一項トシ $d$ ヲ公差トス, 又 $n$ ヲ和ヲ要スル所ノ項數トシ $l$ ヲ終項トス、

然ル時ハ $n$ ハ第 $n$ 項ナルユヘ

$$l=a+(n-1)d.$$

是故ニ若シ $s$ ヲ以テ所要ノ和トスレバ

$$s=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots\cdots+(l-2d)+(l-d)+l.$$

今之ヲ反對ノ順序ニ記スレバ

$$s=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots\cdots+(a+2d)+(a+d)+a.$$

是ニ由テ相應スル各項ヲ相加フレバ

$$2s=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots\cdots n \text{ 項迄}$$
$$=n(a+l);$$
$$\therefore\ s=\frac{n}{2}(a+l)\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{i})$$

然ルニ $a+l=a+a+(n-1)d=2a+(n-1)d$;

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{ii})$$

(i) 及ビ (ii) ナル範式ハ共ニ緊要ニシテ宜シク記臆スベキモノトス、

(ii) ナル範式ヨリ四量 $a, d, n$ 及ビ $s$ ノ中三ヲ知リテ他ノ一項ノ値ヲ得ベキコトヲ注意スベシ、

例一　$5+8+11+\cdots\cdots$ ナル級數ノ爲メノ二十項ノ和ヲ求ム、

茲ニ　$a=5,\quad d=3,\quad n=20;$

$$\therefore\ s=\frac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$
$$=\frac{20}{2}\{10+19\times3\}$$
$$=670.$$

例二　1ヲ以テ始マレル連續奇數ノ若干項ノ和ハ平方數ナルコトヲ證セヨ.

奇數級數ハ

$$1+3+5+7+\cdots\cdots\cdots\quad \text{ナリ}$$

茲ニ　$a=1$ 及ビ $d=2$; 故ニ $n$ 項ノ和ハ次ノ如シ、

$$S=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$$
$$=\tfrac{n}{2}\{2+(n-1)2\}$$
$$=\tfrac{n}{2}\times2n$$
$$=n^2.$$

則チ一ヲ以テ始マレル $n$ 個ノ連續奇數ノ和ハ $n^2$ ナリ、

例三、　等差級數ノ二十項ノ和ハ410ニシテ第一項ハ30ナリ公差



幾何ナリヤ、

茲ニ　$S=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$,

今　$S=410$　$a=30$ 及ビ $n=20$,

故ニ　$410=\tfrac{20}{2}\{60+19d\}$

コレヨリ $d=-1$ ヲ求メ得、

例四、　$11+12+13+\cdots\cdots$ ノ幾項ヲ取レバ其和410トナルベキヤ、

茲ニ　$S=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$,

今　$a=11.\quad d=1.$ 及ビ $S=410.$

是故ニ　$410=\tfrac{n}{2}\{22+(n-1)\}$;

$$\therefore\ n^2+21n-820=0,$$

即チ　$(n-20)(n+41)=0;$

$$\therefore\ n=20,\ \text{或ハ}\ n=-41$$

$a, S$ 及ビ $d$ ヲ前知スルトキ $n$ ハ二次方程式ヲ解クコトニ由リテ求メ得可シ而シテ方程式ノ一根ハ一般ニ不適當ノモノナリ、　何トナレバ正整數ニアラザル $n$ ノ式ノ値ハ意味無キモノナルヲ以テナリ、

此場合ニ於テ $-41$ ヲ取除キ $n$ ノ價ハ只 20 ノミナリ、

例五、　$24+21+18+\cdots\cdots$ ノ幾項ヲ取レバ其和105トナルヤ、

茲ニ　$S=\tfrac{n}{2}\{2a+(n-1)d\}$,

今　$a=24,\quad d=-3,$ 及ビ $S=105.$

故ニ　$105=\tfrac{n}{2}\{48+(n-1)(-3)\}$;

$$\therefore\ 210=n\{48-3n+3\};$$
$$\therefore\ n^2-17n+70=0.$$

是故ニ　$n=7,$ 或ハ $n=10.$

$n$ ノ兩値倶ニ正整數ナルユヱニ何レモ題意ニ合ス、

## 第五十例題

次ノ各級數ノ和ヲ求ム、

1. $2+4+6+$. . . . . . 二十項迄
2. $15+14\frac{1}{2}+14+$ . . . . . 十六項迄
3. $1+2\frac{1}{4}+3\frac{1}{2}$. . . . . . 十二項迄
4. $-5-1+3+$. . . . . . 二十項迄
5. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+$ . . . . . 七項迄
6. $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{11}{6}-$. . . . . . 六十項迄
7. $10+\frac{29}{3}+\frac{28}{3}+$. . . . . 七項迄
8. $\frac{7}{6}+1+\frac{5}{6}+$. . . . . . 十五項迄
9. $3\frac{1}{3}+2\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}+$. . . . . . $n$項迄
10. $1\frac{1}{7}+1\frac{17}{21}+2\frac{10}{21}+$ . . . . . $n$項迄
11. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+$. . . . 七項迄
12. $\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\frac{n-3}{n}+$. . . . . $n$項迄
13. $(a+b)^2+(a^2+b^2)+(a-b)^2+$ . . $n$項迄
14. 等差級數ノ第四項ハ 15 ニシテ第二十項ハ $23\frac{1}{3}$ ナリ初メノ二十項ノ和ヲ求ム、
15. 5 ト 50 ノ間ニ二十九ノ等差內項ヲ插入シ而シテ其和ヲ求ム、
16. 3, 5, 7,........ナル級數ヲ第七項ヨリ始メ第二十項ノ和ヲ求ム、
17. 第一項 2 ナル等差級數ノ十項ノ和ハ 155 ナリト云フ其公差如何、
18. 3, 8, 13, ナル級數ノ連續セル十項ノ和ハ 705 ナリト云フ其第一項ハ何數ナリヤ、
19. 第八項ノ 6 ナル等差級數ノ十五項ノ和ヲ求ム、



20. 若干量アリ其個數奇數ニシテ且ツ等差級數ヲナストキハ其第一項中項終項ノ三數亦等差級數ヲナスコトヲ證セヨ、
21. 若シ 8, 16, 24, ............ナル級數若干項ノ和ニ 1 ヲ加フルトキハ其結果ハ或ル奇數ノ平方ナルコトヲ證セヨ、
22. 100 ト 200 ノ間ノ凡テノ奇數ノ和ヲ求ム、
23. 101 ト 999 ノ間ノ凡テノ偶數ノ和ヲ求ム、
24. 100 ト 500 ノ間ニアリテ 3 ニテ精除シ得ベキ凡テノ數ノ和ヲ求ム、
25. $n-\frac{1}{n}, 3n-\frac{2}{n}, 5n-\frac{3}{n}$, ............ ナル級數ノ$n$項ノ和ヲ求ム、

# 第二十三編

## 等　比　級　數
## (Geometrical Progression.)

**第二百二十款**　級數アリ其任項ノ其前項ニ於ケル比級數ヲ通シテ相同ジキトキハ之ヲ等比級數ト曰フ

例ヘバ若シ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}$ &c. ナルトキハ $a, b, c, d,$ &c. 等比級數ヲナスナリ、

等比級數ノ各項ノ前項ニ於ケル比ヲ公比 (Common ratio) ト稱ス

次ニ等比級數ノ數例ヲ舉グ

$$1,\quad 3,\quad 9,\quad 27,\quad \&c.$$

$$4,\quad 2,\quad 1,\quad \tfrac{1}{2},\quad \&c.$$

及ビ　$\tfrac{2}{3},\quad -1,\quad \tfrac{3}{2},\quad -\tfrac{9}{4},\quad \&c.$

第一級數ニ於テハ公比 3 ナリ第二級數ニ於テハ $\frac{1}{2}$, 第三ニ於テハ $-\frac{3}{2}$ ナリ

**第二百二十一款**　等比級數ノ第一項ハ $a$ ニシテ公比 $r$ ナルトキハ

第二項ハ $ar$　ナルベク、

第三項ハ $ar^2$　ナルベク、

第四項ハ $ar^3$　……………、

逐テ此ノ如ク $r$ ノ指數ハ常ニ級數ニ於ケル其項ノ位置ヲ示ス所ノ數ヨリ一ダケ少シ

故ニ第 $n$ 項ハ $ar^{n-1}$ ナリ。

故ニ等比級數ノ第一項及ビ公比ノ與ヘラレタルトキハ其任意ノ項ヲ



計下スルヲ得ベシ。

例ヘハ等比級數ニ於テ第一項ハ 5 ニシテ其公比ハ 3 ナレバ

第四項ハ　$5\times3^3$　ナリ

又　　第十項ハ　$5\times3^9$　ナリ

**第二百二十二款**　等比級數ノ任意二項ヲ與ヘタルトキハ第一項及ビ公比ヲ求ムルコトヲ得故ニ級數ハ完全ニ決定スルコトヲ得ベシ

例ヘバ等比級數第五項ヲ $\frac{8}{9}$ トシ第七項ヲ $\frac{32}{81}$ トスレバ下ノ如シ

第一項ヲ $a$ トシ公比ヲ $r$ トス

然ルトキハ第五項及ビ第七項ハ夫々 $ar^4$ 及ビ $ar^6$ トナル

故ニ　　$ar^4=\frac{8}{9}$,

及ビ　　$ar^6=\frac{32}{81}$;

∴ 除法ニ由テ　　$r^2=\frac{4}{9}$;

$$\therefore\ r=\pm\tfrac{2}{3},$$

然ルニ　　$a\times\frac{16}{81}=\frac{8}{9}$

ナル故ニ　　$a=\frac{9}{2}$.

則チ本級數ハ　$\frac{9}{2}, \pm3, 2, \pm\frac{4}{3}$, &c. ナリ

**第二百二十三款**　三量若シ等比級數ヲナストキハ其中量ヲ他ノ二量ノ等比中項 (*Geometrical mean*) ト稱ス、

例ヘハ $a, b, c$, 若シ等比級數ヲナストキハ $b$ ハ $a$ 及ビ $c$ ノ等比中項ナリ、

等比級數ノ界説ニ由テ下ノ如シ

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b};$$

$$\therefore\ b^2=ac$$

$$\therefore\ b=\pm\sqrt{ac}.$$

故ニ任意二量の等比中項ハ其積の平方根なり

玆ニ等比級數ヲナス所ノ諸量ハ則チ連比例ヲナスコト并ニ二量ノ等比中項ハ其比例中項ト同一ナルコトヲ注意セザル可カラズ［第二百欵ヲ看ヨ］

**第二百二十四欵**　若干ノ量若シ等比級數ヲナストキハ中間ノ各項ヲ兩外項ノ等比中項ト稱スルヲ得ベシ

二個ノ與ヘタル量ノ間ニ等比中項ノ任意數ヲ挿入スルコトヲ得

例ヘバ $a$ 及ビ $b$ ノ間ニ $n$ 個ノ等比中項ヲ挿入セン

今 $a$ 及ビ $b$ ノ間ニ $n$ 項ヲ有スル等比級數ヲ求メントスルガ故ニ $a$ ハ其第一項ニシテ $b$ ハ其第 $n+2$ 項ナリ

$r$ ヲ以テ公比トス、

然ルトキハ第 $n+2$ 項ハ $ar^{n+1}$ ナリ

$$\therefore\ ar^{n+1}=b$$

$$\therefore\ r^{n+1}=\frac{b}{a}$$

$$\therefore\ r=\sqrt[n+1]{\frac{b}{a}}$$

是故ニ所要ノ中項ハ $ar,\ ar^2,\ ar^3,\ ar^4\cdots\cdots\cdots\cdots ar^n$ ナリ

但シ $r=\sqrt[n+1]{\dfrac{b}{a}}$

## 第五十一例題

1.　次ノ各等比級數ノ第六項ヲ求ム

(i)　9,　3,　1,...　　(ii)　2,　−3,　$\frac{9}{2}$...

(iii) $a^2$,　$ab$,　$b^2$,...

2.　第一項ハ 3 ニシテ第三項ハ 4 ナル等比級數ノ第五項ハ幾許ナルヤ



3.　等比級數ノ第三項ハ 1 ニシテ第六項ハ $-\frac{1}{8}$ ナリ其第十項ハ幾許ナルヤ、

4.　(i) 4 及ビ 9,　(ii) 7 及ビ 252,　(iii) $a^3b$ 及ビ $ab^3$ ノ等比中項ヲ記下セヨ、

5.　1 及ビ −8 ノ間ニ二個ノ等比中項ヲ挿入セヨ又 12 及ビ $\frac{3}{4}$ ノ間ニ三個. $\frac{2}{3}$ 及ビ $\frac{81}{16}$ ノ間ニ四個ノ等比中項ヲ挿入スベシ

6.　$a,\ b,\ c,\ d,$ 若シ等比級數ヲナセバ $ad=bc$ ナルコトヲ證セヨ、

7.　或ル等比級數ノ各項ニ同シ量ヲ以テ乘ズレバ其各積ハ尙ホ等比級數ヲナスベシ

8.　等比級數ノ各ノ反數ハ亦等比級數ヲナスコトヲ證セヨ

9.　或ル等比級數ノ各間隔項ヲ取去ルトキハ餘ノ各項尙等比級數ヲナスモノナリ

10.　等比級數ノ各兩連續項ノ間ニ等比中項ヲ挿入スルトキハ其全キモノハ他ノ等比級數ヲ形作ルベシ

11.　等比級數ノ第一項及ビ終項等シキ距離ニ當ル任意二項ノ積ハ第一項及ビ終項ノ積ニ等シキコトヲ證セヨ

**第二百二十五欵**　等比級數若干項ノ和ヲ求ムルコト

$a$ ヲ第一項トシ $r$ ヲ公比トス

又 $n$ ヲ和ヲ要スル所ノ項數トシ $l$ ヲ終項トス

然ルトキハ $l$ ハ第 $n$ 項ナル故ニ

$$l=ar^{n-1}$$

是故ニ若シ $s$ ヲ以テ所要ノ和トスレバ

$$s=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots+ar^{n-2}+ar^{n-1}$$

之ニ $r$ ヲ乘スレバ

$$sr=ar+ar^2+ar^3+\cdots\cdots\cdots+ar^{n-1}+ar^n$$

是故ニ減法ニ由テ

$$s - sr = a - ar^n$$

即チ

$$s(1-r)=a(1-r^n);$$

$$\therefore\ s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

上ノ範式ハ $l=ar^{n-1}$ ナル價チ代入シテ其形チ變シテ記スルコトヲ得

即チ

$$s=\frac{a-rl}{1-r}$$

例一　1, 2, 4, &c. ナル級數ノ 10 項ノ和チ求ム

茲ニ　$a=1,\ r=2,\ n=10.$

$$\therefore\ s=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$=\frac{1-2^{10}}{1-2}=2^{10}-1=1023$$

例二.　$2-3+\frac{9}{2}-\ldots\ldots$ ナル級數ノ 6 項ノ和チ求ム

茲ニ　$a=2,\ r=-\frac{3}{2}$, 及ビ $n=6$

$$\therefore\ s=a\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$=2\frac{1-(-\frac{3}{2})^6}{1-(-\frac{3}{2})}$$

$$=2\frac{1-\frac{3^6}{2^6}}{1+\frac{3}{2}}$$

$$=\tfrac{4}{5}\left(1-\frac{3^6}{2^6}\right)=-8\tfrac{5}{16}.$$

## 第二百二十六欵

前欵ヨリ

$$s=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}$$

今 $r$ 若眞分數ナレバ其正負ニ拘ハラズ $r^n$ ノ絶對量ハ $n$ ノ增加スルニ從ヒテ減少ス可シ

例ヘバ $r$ 若シ $\frac{1}{2}$ ナレハ其累次自乘ハ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$, &c ナルベシ



又 $n$ ノ價チ充分ニ增大シ以テ $r^n$ チ欲する丈け小くナスコトヲ得ベシ

故ニ $r$ 若シ一ヨリ小ナル數ナレバ其級數ノ和ハ $n$ ヲ甚大ニ取ルコトニヨリ欲スル丈ケ小ナル量ニ由テ $\frac{a}{1-r}$ ヨリ差フ樣ニナシ得ベシ

故ニ $r$ の價一より小なる等比級數 $a+ar+ar^2+\cdots\cdots$ ノ無究項數ノ和ハ $\frac{a}{1-r}$ ナリ

例一　次ノ級數ノ無究項數ノ和ヲ求ム

(i) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots$

(ii) $9-6+4-\cdots\cdots$

(i) ニ於テハ　$a=1,\quad r=\frac{1}{2}.$

$$\therefore\ s=\frac{a}{1-r}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

(ii) ニ於テハ　$a=9,\ r=\frac{-6}{9}=-\frac{2}{3}$

$$\therefore\ s=\frac{a}{1-r}=\frac{9}{1-(-\frac{2}{3})}=\frac{9}{\frac{5}{3}}=\frac{27}{5}.$$

例二　$.23\dot{4}$ ノ價ヲ求ム

$$.23\dot{4}=.23444\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\frac{4}{10^5}+\cdots\cdots$$

今　$\frac{4}{10^3}+\frac{4}{10^4}+\cdots\cdots$ 無究ニ至ル $=\dfrac{\frac{4}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}$

$$=\frac{10}{9}\times\frac{4}{10^3}=\frac{4}{900}.$$

是故ニ　$.23\dot{4}=\frac{2}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{900}=\frac{211}{900}.$

例三　無究項數ノ和ハ 18 ニシテ第二項ハ $-8$ ナル等比級數チ求ム

$a$ ヲ第一項トシ $r$ チ公差トス

然ルトキハ第二項ハ $ar$ ニシテ無究項ノ和ハ $\frac{a}{1-r}$ ナリ

故ニ　　　　$ar=-8,$

及ビ　　　　$\frac{a}{1-r}=18,$

是故ニ除法ニ由テ

$$r(1-r)=\frac{-8}{18},$$

$$\therefore\quad r^2-r=\frac{4}{9},$$

$$\therefore\quad r=-\frac{1}{3},\text{ 或ハ } r=\frac{4}{3}.$$

若シ　　$r=-\frac{1}{3}$ ナレバ $a=\frac{-8}{r}=24.$

故ニ級數ハ $24,\ -8,\ \frac{8}{3},\ldots\ldots$ ナリ

上ニ得タル $r=\frac{4}{3}$ ナル價ハ適當ナラズ何トナレバ此等比級數ノ和ハ$r$ ノ數價一ヨリ小ナル時ノ外ハ

$$S=\frac{a}{1-r}$$

ナル範式ヲ以テ與ヘラレザレバナリ

## 第五十二例題

次ノ各級數ノ和ヲ求ム、

1. $8+12+18+27+\ldots\ldots\ldots\ldots n$ 項迄
2. $12+9+6\frac{3}{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$ 項迄
3. $a+\frac{a}{r}+\frac{a}{r^2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$ 項迄
4. $1\frac{1}{2}+1\frac{1}{3}+1\frac{5}{27}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$ 項迄
5. $\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$ 項迄
6. $12-9+6\frac{3}{4}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 無究ニ至ル
7. $4+1{\cdot}2+{\cdot}36+{\cdot}108+\ \ldots\ldots$ 無究ニ至ル
8. $4+{\cdot}8+{\cdot}16+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 無究ニ至ル
9. $a^2+ab+b^2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n$ 項迄
10. $3-2+\frac{4}{3}-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 無究ニ至ル



11. 2 ヨリ 4096 ニ至ル 2 ノ順次自乘ノ和ヲ求ム、

12. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ ナル級數ノ無究項ノ和ヲ小數四位迄正シク算出セヨ、

13. $4x^2-12x+9$ 及ビ $9x^2+12x+4$ 等比中項ヲ求ム、

14. 等比級數ノ項數ヲ $n$ トシ而シテ任意奇數項ノ乘積ハ中央項第 $n$ 乘ニ等シキコトヲ證セヨ、

15. 無究項數ノ和ハ 4 ニシテ第二項ハ $\frac{8}{9}$ ナリ等比級數ヲ見出スベシ.

16. 無究項數ノ和ハ 9 ニシテ第二項ハ $-4$ ナル等比級數ヲ見出スベシ.

17. 或ル等比級數ノ初メノ 10 項ノ和ハ初メノ 5 項ノ和ノ 33 ニ倍等シ公比ハ幾何ナルヤ、

18. 等比級數無究項ノ和若シ第一項ノ $n$ 倍ナルトキハ其公比ハ $1-\frac{1}{n}$ ナルコトヲ證セヨ、

19. 等比級數ノ順次各項ノ公比 $\frac{1}{2}$ ヨリ小ナルトキハ其各項ハ之ニ次グ凡テノ項ノ和ヨリ大ナルヿヲ證セヨ、

**第二百二十七款**　時トシテハ級數ノ順次各項ノ相關係スル法式如何ヲ知ラザルヿアリ、

然レドモ項ノ若干數ヲ知ルトキハ其法式ハ簡單ナル場合ニ於テハ直ニ決定スルヲ得ベシ、

例ヘバ級數

$$3,\ 9,\ 15,\ldots$$

ヲ察スルニ $9-3=6$, 及ヒ $15-9=6$ ナリ、

故ニ此級數ハ公差 6 ナル所ノ等差級數ナルヲ知ル

又　　　　$3,\ 9,\ 27,\ldots\ldots$

ナル級數ニ於テハ $9-3=6$, 及ビ $27-9=18$ ナル故ニ此級數ハ等差級數ならず、

然ルドハ此級數ハ等比級數ナル可キ要件ヲ滿足スルヤ否ヲ考ルニ $\frac{9}{3}=\frac{27}{9}$ ナリ、

即チ是レ等比級數ナルヲ知ル而シテ其公比ハ3ナリ、

## 第三十五例題

次ノ各級數ノ和ヲ求ム、

1. $3,\ 2.7,\ 2.4,\ldots\ldots 21$ 項迄
2. $2,\ 18,\ 162,\ldots\ldots$ 7 項迄
3. $1,\ .2,\ .04,\ldots\ldots$ 無究ニ至ル
4. $a,\ b,\ \frac{b^2}{a},\ldots\ldots n$ 項迄
5. $.3,\ .03,\ .003,\ldots\ldots$ 無究ニ至ル
6. $3+4.3+5.6+\ldots\ldots$ 11 項迄
7. $a+\frac{4a+b}{3}+\frac{5a+2b}{3}+\ldots\ldots$ 19 項迄
8. $\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\frac{4}{9}-\ldots\ldots$ 8 項迄
9. $3\frac{1}{8}+1\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\ldots\ldots$ 無究ニ至ル
10. $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}+15\frac{5}{8}+$ 5 項迄
11. 次ノ各級數ヲ6迄加フベシ又無究ニ至ル和ヲ求ム(出來ルベキモノハ)

(i). $2\frac{1}{2}+6\frac{1}{4}+10+\ldots\ldots$

(ii). $9+5+1+\ldots\ldots$

(iii). $4-3+\frac{9}{4}\ldots\ldots$

(iv). $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\ldots\ldots$

(v). $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\ldots\ldots$



12. 量ノ或ル奇數若シ等比級數ヲナストキハ其第一項中央項及ビ終項亦等比級數ヲナスベキヿヲ證セヨ、

13. 等差級數ノ初メノ7項ノ和ハ49ニシテ次ノ8項ノ和ハ176ナリ其級數ヲ求ム、

14. 等比級數ノ第一項及ビ第三項ノ等差中項ハ第二項ノ五倍ナリ此公比如何、

15. 等差級數ノ第四項若シ第二及ビ第七項ノ等比中項ナルトキハ其六項ハ第二及ビ第十四項ノ等比中項ナルコトヲ證セヨ、

16. $P$ 若シ第一項ハ $a$ ニシテ終項ハ $l$ ナル等比級數ノ $n$ 項ノ連乘積トスレバ

$$P^2=(al)^n.$$

ナルコトヲ證セヨ、

17. 等比級數ニ於ケル三數ノ連乘積ハ216ニシテ各一雙ニ於ケル乘積ノ和ハ156ナリ各數如何、

18. 25ヲ等差級數トナルベキ五ツノ部分ニ分チ且ツ其最大數ト最小數トノ平方ノ和ヲシテ他ノ三數ノ平方ノ和ヨリ一個少カラシメンコトヲ求ム、

19. 6及ビ16ノ間ニ二様ノ數ヲ挿入セントス其初メノ三數ハ等差級數ヲナシ終リノ三數ハ等比級數ヲナスモノトス、

20. $a, b, c,$ ヲ等比級數ヲナスモノトシ而ソ $x, y$ 若シ夫々 $a, b,$ 及ビ $b, c,$ 間ノ等差中項ナラシムレバ

$$\frac{2}{b}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.\text{及ビ } 2=\frac{a}{x}+\frac{c}{y}.$$

ナルヿル證セヨ、

# 第　二　十　四　編

## 調和級數 (Harmonical Progression.)

**第二百二十八款**　級數アリ其任意連續三項ニ於テ第一及ビ第二ノ差ノ第二及ビ第三ノ差ニ於ルヰ第一ノ第三ニ於ル比ノ如クナルヰハ此ノ級數ヲ調和級數ト稱ス、

例ヘバ若シ

$$a-b:b-c::a:c$$

$$b-c:c-d::b:d$$

以下之ニ準ズ

上ノ如クナルトキハ $a, b, c, d,$ &c. ハ調和級數ヲナスナリ

**第二百二十九款**　$a, b, c,$ 若シ調和級數ヲナスヰハ界說ニ由テ

$$a-b:b-c::a:c$$

是故ニ　$c(a-b)=a(b-c)$

即チ　$ca-cb=ab-ac.$

$abc$ ヲ以テ之ヲ除セバ

$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b},$$

即チ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c},$$

ハ等差級數ナルコヲ證スルナリ、

故ニ諸量若し調和級數をなすときは其反數ハ等差級數をなすべし

調和級數ニ於ケル量間ノ上ノ關係ハ前款ニ與ヘタル所ノモノヨリハ之レヲ用ユルコ多シトス、



**第二百三十款**　三量若シ調和級數ヲナストキハ其中項ヲ他ノ二項ノ調和中項 (*Harmonic mean*) ト稱ス、

若シ $a, b, c,$ 調和級數ヲナストキハ

$$\frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}$$

ハ等差級數ヲナス

$$\therefore\ \frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b};$$

$$\therefore\ \frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c};$$

$$\therefore\ b=\frac{2ac}{a+c}$$

故ニ任意二量の調和中項ハ其乘積二倍を其和にて除したるものなり、

**第二百三十一款**　若シ $A, G, H,$ ヲ以テ夫々任意二量 $a$ 及ビ $b$ ノ等差中項, 等比中項, 及ビ調和中項トスレバ、

即チ　$A=\frac{1}{2}(a+b)$

$G=\sqrt{ab}$

及ビ　$H=\dfrac{2ab}{a+b}$

是ニ由テ

$$A\times H=\tfrac{1}{2}(a+b)\times\frac{2ab}{a+b}=ab$$

$$\therefore\ A.H=G^2$$

是故ニ $G$ ハ $A$ 及ビ $H$ ノ等比項中ナリ、

故ニ任意二量の等比中項は亦其等差中項及び調和中項の等比中項なり、

**第二百三十二款**　調和級數ニ於ケル量ニ關スル數多ノ問題

ハ調和級數ノ各項ノ反數ハ等差級數ヲナスニ由テ等差級數ノ考究ニヨリテ解スルヿヲ得可シ、

例ヘバ $a$ 及ビ $b$ ノ間ニ $n$ 個ノ調和中項ヲ挿入セント欲セバ先ヅ $\frac{1}{a}$ 及ビ $\frac{1}{b}$ ノ間ニ $n$ 個ノ等差中項ヲ挿入スレバ次ノ如シ

$$\frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\quad \frac{1}{a}+2\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\ \ldots\ldots$$

即チ

$$\frac{1}{a},\quad \frac{1}{a}+\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\quad \frac{1}{a}+2\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{n+1},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{b}$$

即チ　$\frac{1}{a},\ \frac{(n+1)b+(a-b)}{(n+1)ab},\ \frac{(n+1)b+2(a-b)}{(n+1)ab},\ldots\ldots\ldots,\frac{1}{b},$

ハ等差級數ヲナス

是故ニ此等ノ反數ハ調和級數ヲナス

即チ所要ノ各中項ハ $\frac{(n+1)ab}{(n+1)b+a-b},\quad \frac{(n+1)ab}{(n+1)b+2(a-b)},\ldots\ldots\ldots$

調和級數ニ於ケル若干項ノ和ヲ與フル所ノ範式ハ求ムベカラザルヿヲ注意セザルベカラズ

**第二百三十三款**　$a, b, c,$ ノ等差級數等比級數或ハ調和級數ニ於ケル要件ハ夫々次ノ如ク記シ得ベシ

$$a-b:b-c::a:a,$$

$$a-b:b-c::a:b,$$

$$a-b:b-c::a:c.$$

此ノ第一及ビ第三ハ等差級數及ビ調和級數ノ界説ヨリ推スベク又第二ハ乘法ニ由テ容易ニ證明シ得ベシ、

例一　調和級數ノ第二項ハ 2 ニシテ第四項ハ 6 ナリ其級數ヲ求ム、



相應セル等差級數ノ第二項ハ $\frac{1}{2}$ ニシテ第四項ハ $\frac{1}{6}$ ナリ、

是故ニ若シ $a$ ヲ第一項 $d$ ヲ公差トスレバ

$$a+d=\tfrac{1}{2},\ 及ビ\ a+3d=\tfrac{1}{6},$$

故ニ　$a=\frac{2}{3},$ 及ビ $d=-\frac{1}{6}.$

則チ等差級數ハ　$\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6},\ldots\ldots$ ナリ

是故ニ調和級數ハ

$$\tfrac{3}{2},\ 2,\ 3,\ 6,\ldots\ldots\ ナリ$$

例二　$a, b, c,$ 若シ等比級數ヲナストキハ $a+b$, $2b$ 及ビ $b+c$ ハ調和級數ヲナスヿヲ證明セヨ、

三量 $a+b$, $2b$, 及ビ $b+c$ ハ

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{2}{2b}\quad ナルトキ$$

即チ　$b(b+c)+b(a+b)=(a+b)(b+c)$　ナルトキ

即チ　$b^2+bc+ab+b^2=ab+b^2+ac+bc$　ナルトキ

即チ　$b^2=ac$　ナルトキハ

調和級數ヲナス

而シテコレ $a, b, c,$ ノ等比級數ヲナストキノ塲合ナリ、

## 第　五　十　四　例　題

1. 調和級數ノ各項若シ同量ニテ乘ゼラルヽトキハ其各乘積ハ調和級數ヲナスヿヲ證セヨ、

2. 1 及ビ 7 ノ間ニ 5 個ノ調和中項ヲ挿入スベシ、

3. $\frac{2}{3}$ 及ビ $\frac{2}{13}$ ノ間ニ 4 個ノ調和中項ヲ挿入スベシ、

4. 二量ノ等差中項若シ 1 ナルトキハ其調和中項ハ其等比中項ノ平方ナルベキヿヲ證セヨ、

5. $a^2, b^2, c^2$ 若シ等差級數ナルトキハ $b+c$, $c+a$ 及ビ $a+b$ ハ調和

級數ヲナスコトヲ證セヨ、

6. 若シ $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b-a}+\frac{1}{b-c}$ ナレバ

$b=a+c$ ナルカ或ハ $a, b, c$ ハ調和級數ヲナスコトヲ證セヨ、

7. $x, y, z$ 若シ調和級數ヲナストキハ

$$(y+z-x)^2,\ (z+x-y)^2,\ (x+y-z)^2$$

ハ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ、

8. $x, y, z$ 若シ調和級數ヲナストキハ $\frac{x}{y+z}, \frac{y}{z+x}, \frac{z}{x+y}$ 亦調和級數ヲナスコトヲ證セヨ、

9. $x, y, z$ 若シ調和級數ヲナストキハ

$$\frac{x}{y+z-x},\ \frac{y}{z+x-y},\ \frac{z}{x+y-z}$$

亦調和級數ヲナスコトヲ證セヨ、

## 第二百三十四款

三級數ノ外順次各項ノ簡單ナル法則ニ從セテ形作ラレタル所ノ多クノ他ノ級數アリ、

次ニ擧クル者ハ斯ノ如キ級數ノ例トス、

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots\cdots +n^2,$$

$$1.2+2.3+3.4+\cdots\cdots\cdots +n(n+1),$$

及ビ $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

茲ニ此等ノ簡單ナル級數ノ $n$ 項ノ和ヲ求ムルノ方法如何ヲ示シ以テ本編ノ結尾トス、

例一、 $\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots$

ナル $n$ 項ノ和ヲ求ム、

$$S_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n}+\frac{1}{n(n+1)}.$$



今 $\frac{1}{1.2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2.3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; &c.

是故ニ

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots\cdots\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right);$$

$$\therefore\ S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

是レ第一及ビ最終項ヲ除ク凡テノ項ハ互ニ消去スルヲ以テナリ、

$n$ 無究ノトキ $\frac{1}{n+1}$ ハ零ナリ

是故ニ $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\cdots\cdots$

ナル級數ノ項數無究ナルトキハ其和ハ1ナリ、

例二、 $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.4.5}+\cdots\cdots$

ナル級數ノ $n$ 項ノ和ヲ求ム、

$$S_n=\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\cdots\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)};$$

$$\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right);\ \frac{1}{2.3.4}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)\ \&c.$$

ナル故ニ

$$S_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2.3}-\frac{1}{3.4}\right)+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}.$$

是故ニ $S_n=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1.2}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}$.

是レ中間諸項ノ互ニ相消去スルガ故ナリ、

$n$ 無究大ナルトキハ $\frac{1}{n(n+1)}$ ハ零ナリ、

是故ニ $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\cdots\cdots\cdots$

ナル級數ノ項數無究ナルトキハ其和ハ$\frac{1}{2}$ナリ、

例三、　$1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots$

ナル級數$n$項ノ和ヲ求ム、

$$Sn=1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots\ldots+n(n+1).$$

今　$1.2=\frac{1}{3}(1.2.3)$; $2.3=\frac{1}{3}(2.3.4-1.2.3)$; &c.

故ニ　$Sn=\frac{1}{3}(1.2.3)+\frac{1}{3}(2.3.4-1.2.3)+\frac{1}{3}(3.4.5-2.3.4)+\ldots\ldots$

$+\frac{1}{3}(n-1)n(n+1)-(n-2)(n-1)n\}$

$+\frac{1}{3}\{n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)\}$

$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$

是レ他ノ諸項ハ消去スルガ故ナリ、

故ニ　$Sn=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

例四、　$1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots$

ナル級數$n$項ノ和ヲ求ム、

$$Sn=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots\ldots\ldots+n^2.$$

今　$n^2=n(n+1)-n$;

$\therefore$　$Sn=1.2+2.3+3.4+4.5+\ldots\ldots\ldots+n(n+1)$

$-1-2-3-4-\ldots\ldots\ldots-n.$

然ルニ　$1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

此ノ結果ハ[例三]ニ由ル、

又　$1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

故ニ　$Sn=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$

例五、　$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots$

ナル級數$n$項ノ和ヲ求ム、

$$Sn=1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3.$$





今　$4n^3=\{n(n+1)\}^2-\{(n-1)n\}^2$

$n$ ヲ $n-1$ ニ變スレバ

$4(n-1)^3=\{(n-1)n\}^2-\{(n-2)(n-1)\}^2$

均シク　$4(n-2)^3=\{(n-2)(n-1)\}^2-\{(n-3)(n-2)\}^2.$

. . . . . . . .

$4.2^3=(2.3)^2-(1.2)^2.$

$4.1^3=(1.2)^2-(0.1)^2.$

是故ニ加法ニ由テ

$4\{1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots\ldots+n^3\}=\{n(n+1)\}^2.$

故ニ　$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=\frac{1}{4}\{n(n+1)\}^2.$

此結果ハ他ノ形ヲ以テ表ハシ得ベシ何トナレバ

$1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$　ナル故ニ

$1^3+2^3+3^3+\ldots\ldots\ldots+n^3=(1+2+3+4+\ldots\ldots+n)^2$

故ニ初の$n$整數の立方の和は其諸數の和の平方に相等し、

例六、　$1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\ldots$

ナル級數 $n+1$ 項ノ和ヲ求ム、

$S=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\ldots+(n+1)x^n$ トス

然ルトキハ　$Sx=x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots\ldots\ldots+nx^n+(n+1)x^{n+1}$

是故ニ減法ニ由テ

$S(1-x)=1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots+x^n-(n+1)x^{n+1}$

然ルニ　$1+x+x^2+x^3+\ldots\ldots\ldots+x^n=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

故ニ　$S(1-x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}-(n+1)x^{n+1}$

$\therefore$　$S=\dfrac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}-(n+1)\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$

# 第五十五例題

次ノ各級數ノ $n$ 項ニ至ル和ヲ求ムベシ又出來得ルトハ無究ニ至ル和ヲモ求ムベシ、

1. $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+$ …………
2. $\frac{1}{2.4}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{6.8}+$ …………
3. $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+$…………
4. $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+$…………
5. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+$…………
6. $\frac{1}{(1+x)(1+2x)}+\frac{1}{(1+2x)(1+3x)}+\frac{1}{(1+3x)(1+4x)}+$…………
7. $2.4+4.6+6.8+$…………
8. $1.2.3+2.3.4+3.4.5.+$…………
9. $1.3+3.5+5.7+$…………
10. $1^2+3^2+5^2+$…………
11. $2^2+4^2+6^2+$…………
12. $a^2+(a+b)^2+(a+2b)^2+$…………
13. $a(a+b)+(a+b)(a+2b)+(a+2b)(a+3b)+$…………
14. 1, 3, 5, &c. ナル奇數ノ級數ニ於テ其第一ハ $1^3$ 次ノ二項ノ和ハ $2^3$ 又其次ノ三項ノ和ハ $3^3$ 等ナルコトヲ證スベシ、

# 第六雜例題

## A.

1. $(y+3)(y^2-1)-3(y+1)(y^2-9)+3(y-1)(y^2-9)-(y-3)(y^2-1)$.



ヲ簡約セヨ

2. $\frac{(2y-x)^3-(2x-y)^3}{3(y-x)}+\frac{(2y-x)^3+(2x-y)^3}{x+y}=10x^2-16xy+10y^2$.

ナルコヲ證セヨ

3. $3x^3-13x^2+23x-21$ 及ビ $6x^3+x^2-44x+21$. ノ最高公因子ヲ求ム　$x$ ノ價幾何ナレバ此兩式共ニ消失スルヤ、

4. 次ノ方程式ヲ解セヨ

   (i) $3x+\frac{2}{y}-1=12x+\frac{5}{y}+14=\frac{1}{y}-2x-14$.

   (ii) $x^2-(a+b+2c)x+(a+b+c)c=0$.

5. 或人 230 ぽんどヲ以テ牛九頭羊二十頭ヲ買ヘリ之ヲ賣ルニ牛ハ 25 ぱーせんとヲ利シ羊ハ 20 ぱーせんとヲ損シ都合 35 ぽんどノ利益トナレリ最初之レヲ買シ値各幾何ナリヤ、

6. $\alpha$ 及ビ $\beta$ 若シ方程式 $x^2+4x+3=0$ ノ兩根ナルトハ $\frac{\alpha+\beta}{\alpha}$ 及ビ $\frac{\alpha+\beta}{\beta}$ ヲ兩根トスル方程式ハ $3x^2-16x+16=0$ ナルコヲ證セヨ、

7. $a^{\frac{2}{3}}b^{-1}-2a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}+4-8a^{-\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{2}}+16a^{-\frac{2}{3}}b = a^{\frac{1}{3}}+2b^{\frac{1}{2}}$ ヲ乗セヨ、

8. $\frac{5+4\sqrt{3}}{5-4\sqrt{3}}$, ノ分母ヲ有理量トスベシ

又 $\sqrt{25+4\sqrt{34}}$. ヲ求ム、

9. $5-3\frac{3}{4}+2\frac{13}{16}-$&c. ナル級數ヲ 8 項迄加フベシ又此級數ノ無究ニ連續スルトハ其極限如何、

10. 100 及ビ 300 ノ間ニ 20 ノ等差中項ヲ挿入シ又其和ヲ求ム可シ

## B.

1. $3\{x-2(y-z)\}-[4y+2\{x-\overline{y-z}\}]$. ヲ簡約セヨ、

2. $mnx^2+m^2xy+n^2xy+mny^2$,

及ビ　$x^3-x^2y+xy^2-y^3$.　ノ因數ヲ求ム、

3. 二數ノ和若シ4ニ等シキ片ハ其差ハ其平方ノ差ノ四分ノ一ニ等シキヿヲ證セヨ、

4. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=1$.

(ii) $\sqrt{12x-3}+\sqrt{x+2}+\sqrt{7x-13}=0$.

5. $x^2-8x+22$　ハ決シテ6ヨリ小ナラザルヿヲ證スベシ、

6. $a^6+2a^3b^2-2a^3c+b^4-2b^2c+c^2$.　ノ平方根ヲ求ム、

7. 若シ $a:b::c:d$, ナル片ハ $a^2+b^2:c^2+d^2::(a+b)^2:(c+d)^2$. ナルヿヲ證セヨ、

8. 次ノ級數ノ和ヲ求ム、

(i) $5-1-7-$. . . . . . 二十項迄

(ii) $2\frac{1}{2}+1+\frac{2}{5}+$. . . . . . 無究迄

9. 1000ヨリ小ニシテ7ニテ正除シ得ベキ凡テノ數ノ和ヲ求ム、

10. 一時間ニ $37\frac{1}{2}$ まいるノ速力ニテ走ル一列車6秒間ニ鐵道ト平行ナル道路ヲ步ム人ヲ經過セリ又此人ト同シ速力ニテ反對ノ方向ヨリ來ル人ヲ4秒間ニ經過セリト云フ間フ此列車ノ長サ如何、

## C.

1. $x=0, y=1, z=1\frac{1}{3}$　ナル片

$\frac{\sqrt{(y^2+z)}}{\sqrt{(z+y)}}-\frac{z-x(y-z)}{x-z(y-x)}$,　ノ値ヲ求ム、

2. $4x^4-9x^2y^2+12xy^3-4y^4$　ヲ　$2x^2+3xy-2y^2$.　ニテ除セヨ、

3. 連續セル二數ノ和ノ平方ハ其乘積四倍ニ一ヲ加ヘタルモノニ等シキヿヲ證セヨ、





4. $x^2-6ax+9a^2$, $x^2-ax-6a^2$ 及ビ $3x^2-12a^2$.　ノ最低公倍數ヲ求ム、

5. $\frac{2}{a-2}+\frac{1}{1-a}+\frac{1}{a+1}-\frac{2}{a+2}$.　ヲ簡約セヨ

6. 或ル旅行ニ於テ列車ノ速力ヲ每時5まいる增加スル片ハ40分時減ズルヲ得ベク又每時ノ速力ヲ5まいる減スル片ハ一時間後ルベシト云フ列車ノ速力旅行ノ全距離各ヲ求ム、

7. $2+\sqrt{8}+\sqrt{2}-\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{(19+6\sqrt{2})}$. ヲ簡約セヨ、

8. 任意ノ比ノ兩項ニ同數ヲ加フル片ハ此比ハ一ニ接近スベキコトヲ證セヨ、又 $\frac{ma+nc}{mb+nd}$ ハ $\frac{a}{b}$ 及ビ $\frac{c}{d}$ ノ中間ニアルコトヲ證セヨ、

9. 次ノ級數ノ和ヲ求ム

(i) $21+15+9+$ ……………………………8項迄

(ii) $5+2+\cdot8+$ ……………………………無究ニ至ル

10. 二數ノ等差中項ハ17ニシテ等比中項ハ15ナリ各數幾何ナルヤ、

## D.

1. $\{x(x+a)-a(x-a)\}\{x(x-a)-a(a-x)\}$.　ヲ簡約セヨ、

2. $(n+1)^4-n^4=(2n+1)(2n^2+2n+1)$,

及ビ　$(a+b)^4-a^4-b^4=4ab(a+b)^2-2a^2b^2$.　ナルヿヲ證セヨ

3. $\left\{1-\frac{3x-20}{x^2-6x}\right\}\left\{1-\frac{8x-42}{x^2-5x}\right\}$ ヲ簡約セヨ、

4. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=21$, $\frac{5}{x}+\frac{7}{y}=-11$.

(ii) $3x^2-4xy+2y^2=33, x^2-y^2=16$.

5. 二位ノ數アリ其單位ノ數字ヲ大トス二數字ノ平方ノ差ハ其數ニ等

シク又若シ數字ノ位置ヲ交換スルトキハ其數ハ數字ノ和ノ7倍トナルト云フ原數如何、

6. $x^2-4x+2=0$ナル方程式ノ兩根ノ立方ヲ兩根トスル所ノ方程式ヲ見出スベシ

7. $x^6-2x^3+8+x^{-2}-8x^{-4}+16x^{-6}$. ノ平方根ヲ求ム

8. 若シ $a:b::c:d$, ナレバ $\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}=\left(\frac{a-b}{c-d}\right)^2$. ナルコヲ證セヨ、

9. 次ノ級數ノ和ヲ求ム、

(i) $\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\ldots$ 10 項迄

(ii) $9-6+4-\ldots$ 無究ニ至ル

10. 8, 16, 24, &c. ナル級數若干項ノ和ニ一ヲ加フルトキハ其結果ハ奇數ノ平方ナルベシ其證如何、

## E.

1. $x^2-2xy+y^2-(x^2+xy+y^2)-\{x(-2y+x)+y^2\}$. ヲ簡約セヨ

2. $6a^4+4b^4-a^3b+13ab^3+2a^2b^2$ ヲ $2a^2+4b^2-3ab$. ニテ除セヨ

3. $3a^3-3a^2b+ab^2-b^3$ 及ビ $4a^2-5ab+b^2$. ノ最高公約數及ビ最低公倍數ヲ求ム、

4. $\dfrac{\frac{4}{x-1}+\frac{x-1}{x}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$ ヲ簡約セヨ、

5. $\alpha$ 及ヒ $\beta$ 若シ $x^2+mx+n=0$ ノ根ナルトキハ $m$ 及 $n$ ナル項ヲ以テ $\alpha^3\beta+\beta^3\alpha$ ヲ求ムベシ

$x^2-3x-2=0$ ナル方程式ニ於テ其結果ヲ徵撿セヨ.



6. $3x^2+5x+3$ ノ最小値ヲ有スルトキ $x$ ノ値ハ如何又其最小値ハ$\frac{11}{12}$ナルコヲ證セヨ、

7. $a, b, c, d,$ 若シ連比例ヲナストハ、

$$\left(\frac{a-b}{b-c}\right)^3=\frac{a}{d}.$$

ナルコヲ證セヨ、

8. $4x^{\frac{4}{3}}-12xy^{\frac{1}{2}}-7x^{\frac{2}{3}}y+24x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{3}{2}}+16y^2$ ノ平方根ヲ求ム、

9. 次ノ級數ノ和ヲ求ム、

(i) $-3-2-1\ldots$ $n$ 項迄

(ii) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\ldots$ 無究ニ至ル

10. 長サ 72 やーど アル一列車平行セル鐵道ヲ反對ノ方向ニ走ル所ノ長サ 60 やーど ノ列車ヲ 4 秒間ニ經過セリ若シ初メニ記載セル列車ノ速力以前ノ二倍トスルトキハ 3 秒間ニ經過セシナルベシ緣時各列車ノ速力幾まいるナルヤ、

## F.

1. $(x+y+z)^2-(-x+y+z)^2+(x-y+z)^2-(x+y-z)^2$. ヲ簡約セヨ、

2. $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3-c^3$ ヲ $a-b-c$. ニテ除スベシ

3. 若シ $x=a+d,\ y=b+d,\ z=c+d,$ ナルトキハ

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$$

ナルコヲ證セヨ、

4. $\frac{1}{a-2x}+\frac{2a}{4x^2-a^2}-\frac{1}{a+2x}$. ヲ簡約セヨ、

5. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $\left.\begin{array}{r} 2x+4y-3z=22 \\ 4x-2y+5z=18 \\ 5x+\ \ y-2z=14 \end{array}\right\}.$

(ii) $$\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-5}{x-6}-\frac{x-6}{x-7}.$$

(iii) $$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}\\ x^2+y^2=90\end{array}\right\}.$$

6. $$x^6-4x^5+14x^4-32x^3+49x^2-60x+36,$$

ナル式ニ於テ $x$ ノ代リニ任意整數ヲ置ク片ハ其結果ハ一平方數トナルベキヿヲ證セヨ、

7. $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}$ ヲ其數値ヲ算用スルニ最便ナル形ニ化スベシ又小數四位迄其値ヲ求ムベ

8. $a-x:a+x$ ナル比ハ $x:a$ ノ一ヨリ大或ハ小ナルニ從テ $a^2-x^2:a^2+x^2$ ナル比ヨリ大或ハ小ナルヿヲ證セヨ

9. $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 若シ $x+y$ ノ如ク反變スル片ハ $x^2+y^2$ ハ $xy$ ノ如ク變ズベシ、

10. $a$, $b$ 及ビ $c$ 若シ夫々或ル等比級數ノ $n$, $2n$ 及ビ $3n$ 項ノ和ナルトキハ $a^2+b^2=a(b+c)$ ナルベシ





# 第二十五編

## 順列及ビ組合

## (Permutations and Combinations.)

**第二百三十五款**　若干ノ物ヲ一度ニ若干宛ヲ取リ而シテ種々ノ順序ニ排列スル方法ヲ順列ト稱ス、

例ヘバ、$a, b, c$ ナル三字ヲ以テ表ハセル三個ノ物アリト假定セヨ、

若シ此三物ヲ一度ニ一個宛取ル片ハ三ツノ順列 $a, b, c$ ヲ得ベシ、

又若シ一度ニ二個宛取ル片ハ六ツノ順列 $ab, ba, ac, ca, bc, cb,$ ヲ得ベシ、

又若シ一度ニ悉ク取ル片ハ亦六ツノ順列ヲ得ベシ即ハチ $abc, acb, bca, bac, cab$ 及ビ $cba$ トス、

**第二百三十六款**　$n$ 個ノ物ヲ一度ニ $r$ 個宛取レル順列ノ數ヲ示スニ $_nP_r$ ナル記號ヲ用ユ、

**第二百三十七款**　相異ふれる $n$ 個の物を一度に $r$ 個宛取れる順列の數を求むること、　但し $r$ ハ $n$ より大ふらざる任意の整數とす、

相異ナレル物ヲ $a, b, c,$……… ノ文字ヲ以テ表ハサシム、

今 $a$ ヲ除キ $n-1$ 字アリ而シテ此等ノ $n-1$ 字ヲ一度ニ $r-1$ 字宛取レル順列ノ數ハ $_{n-1}P_{r-1}$ ナリ、　今若シ此等ノ順序ノ各ノ前ニ $a$ ヲ置ク片ハ $n$ 個ノ文字ヲ一度ニ $r$ 個宛取リ而シテ其各ノ首ニ $a$ ヲ有スル順列ノ凡テヲ得ベシ而シテ斯ノ如キ順列ノ數ハ $_{n-1}P_{r-1}$ ナリ、

同ジ理ニ由リテ $b$ ヲ首ニ有スル $n$ 個ノ文字ヲ一度ニ $r$ 個宛取レル順列ノ數モ $_{n-1}P_{r-1}$ ナリ而シテ $c, d,$ 等ニ於テモ亦此ノ如シ、

是故ニ $n$ 個ノ物ヲ一度ニ $r$ 個宛取レル順列ノ總數ハ $n-1$ 個ノ物ヲ

一度ニ$r-1$個宛取レル順列ノ數ノ$n$倍ナリ、　即チ

$${}_{n}P_{r}={}_{n-1}P_{r-1}\times n.$$

上ノ關係ハ$n$及ビ$r$ノ凡テノ價ニ向テ眞ナルガ故ニ$n$ヲ$n-1$ニ$r$ヲ$r-1$ニ變ズルコトヲ得ベシ然ルヰハ

$${}_{n-1}P_{r-1}={}_{n-2}P_{r-2}\times(n-1).$$

此$n$ヲ$n-1$ニ$r$ヲ$r-1$ニ變ズルコトヲ反覆シ以テ順次ニ下ノ結果ヲ得、

$${}_{n-2}P_{r-2}={}_{n-3}P_{r-3}\times(n-2).$$

$${}_{n-3}P_{r-3}={}_{n-4}P_{r-4}\times(n-3).$$

$$\ldots\ldots=\ldots\ldots$$

$${}_{n-r+2}P_{2}={}_{n-r+1}P_{1}\times(n-r+2).$$

今若干個ノ物ヲ一度ニ一個宛取レル順列ノ數ハ其物數ニ等シキコトハ明ナリ、　即チ

$${}_{n-r+1}P_{1}=n-r+1.$$

上ノ相等式ノ左右兩節ヲ夫々相乘ジ且ツ公因數ヲ消去スレバ

$${}_{n}P_{r}=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{(i)}$$

故ニ　　**相異りたる$n$個の物を一度に$r$個宛取れる順列の數は$n$を最大させる$r$個の順次整數の連乘積なり、**

若シ$n$個ノ物ヲ悉ク一度ニ取ルヰハ$r$ハ$n$ニ等シ故ニ

$${}_{n}P_{n}=n(n-1)(n-2)\ldots\ldots2.1\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \text{(ii)}$$

例ヘバ、　${}_{6}P_{4}=6.5.4.3=360,$

及ビ　　${}_{6}P_{6}=6.5.4.3.2.1=720.$

$n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3.2.1$ナル連乘積ヲ示スニ$|\underline{n}$ナル記號ヲ用ユ、此記號$|\underline{n}$ヲ'楷乘$n$'(*Factorial n*)ト讀ム、　時トシテハ又$n!$ヲ$|\underline{n}$ノ代リニ用ユ、



**第二百三十八款**　**總ての異ふるにあらざる$n$個の物を悉く取れる順列の數を求むること、**

玆ニ$n$個ノ文字アリトシ其中ノ$p$個ハ$a$, $q$個ハ$b$, $r$個ハ$c$トス餘ハ之ニ準ズ、

$P$ヲ所要ノ順列ノ數トス、

所要ノ順列ノ任一ニ於テ$a$ノ凡テヲ互ニ相異リ又殘ル他ノ凡テヨリモ異リタル$p$個ノ文字ニ變ズト假定セヨ然ルヰハ此等$p$個ノ新字ノ排列ノミ變ズルヲ以テ一個ノ順列ノ代リニ$|\underline{p}$ナル種々ノ順列ヲ得ベシ、

是故ニ$a$ノ凡テヲ互ニ相異ナリ又殘ル他ノ凡テヨリモ異ナレル$p$個ノ字ニ變ジ而シテ$b, c$等ノ凡テハ不變トスレバ乃チ$P\times|\underline{p}$ノ順列ヲ得ベシ、

同理ニ由テ若シ此等ノ新順列ノ任一ニ於テ$b$ノ凡テヲ互ニ相異ナリ又殘ル他ノ凡テヨリモ異ナリタル$q$個ノ字ニ變ズレバ此等ノ$q$個ノ新字ノ排列ヲ變ズルヿニヨリ$|\underline{q}$ナル順列ヲ得ベシ、　是故ニ順列ノ總數今ハ$P\times|\underline{p}\times|\underline{q}$　トナル、

此方法ヲ以テ進ミ若シ凡テノ文字ノ中相同ジキモノ二個ト無キ樣ニ變ズルヰハ順列ノ全數ハ次ノ如シ、

$$P\times|\underline{p}\times|\underline{q}\times|\underline{r}\ldots\ldots\ldots$$

然ルニ相異ナリタル$n$個ノ物ノ順列ノ數ハ$|\underline{n}$　ナリ、

是故ニ　　$P\times|\underline{p}\times|\underline{q}\times|\underline{r}\times\ldots\ldots=|\underline{n}$

$$\therefore\ P=\frac{|\underline{n}}{|\underline{p}\,|\underline{q}\,|\underline{r}\ \ldots\ldots}$$

例ヘバ、　$aaabbc$ナル六字ヲ悉ク取レル順列ノ數ハ

$$\frac{|\underline{6}}{|\underline{3}\,|\underline{2}\,|\underline{1}}=60.\quad \text{ナリ、}$$

## 組合 (Combinations.)

**第二百三十九款**　若干ノ物ヲ一度ニ若干宛取リ其順序ニ拘ラズ組合ス方法ヲ組ミ合セト稱ス、

例ヘバ $a, b, c, d,$ ナル四字ヲ一度ニ二ツ宛取レル組ミ合セハ $ab, ac, ad. bc, bd, cd$ ナリ、

$n$ 個ノ物ヲ $r$ 個宛取レル組ミ合セノ數ヲ示スニ ${}_nC_r$ ナル記號ヲ用ユ、

**第二百四十款**　相異なれる $n$ 個の物を $r$ 個宛取れる組合の數を求むること、

相異ナレル物ヲ $a, b, c, \ldots\ldots$ ノ文字ヲ以テ表ハス、

$a$ ヲ除キ $n-1$ 個ノ文字アリ而シテ此等ノ $n-1$ 字ヲ一度ニ $r-1$ 個宛取レル組ミ合セノ數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ、　今若シ $a$ ヲ此等ノ組合セト共ニ取ルトキハ $n$ 個ノ字ヲ一度ニ $r$ 個宛取リ而シテ其各ニ於テ $a$ ノ現ハルヽ組ミ合セノ凡テヲ得ベシ而シテ斯ノ如キ組ミ合セノ數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ、

同理ニ由テ $n$ 個ノ文字ヲ一度ニ $r$ 個宛取リ而シテ其各ニ於テ $b$ ノ現ハルヽ組ミ合セノ數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}$ ナリ而シテ $c, d,$ 等ニ於テモ亦此ノ如シ、

今若シ $a$ ヲ含ム凡テノ組合セ, $b$ ヲ含ム凡テノ組合セ等ヲ相合スルトキハ1個ノ字母ヲ含ム組合セノ $r$ 倍ヲ得ベシ是故ニ $n$ 個ノ物ヲ $r$ 個宛取レル組合セノ總數ハ ${}_{n-1}C_{r-1}\times n\div r$ ナリ、　故ニ　${}_nC_r={}_{n-1}C_{r-1}\times\frac{n}{r}$.

上ノ關係ハ $n$ 及ビ $r$ ノ凡テノ價ニ向テ眞ナルガ故ニ $n$ ヲ $n-1$ ニ $r$ ヲ $r-1$ ニ變ズレバ即チ

$${}_{n-1}C_{r-1}={}_{n-2}C_{r-2}\times\frac{n-1}{r-1}.$$



此 $n$ ヲ $n-1$ ニ $r$ ヲ $r-1$ ニ變ズルコトヲ反覆シ以テ順次ニ下ノ結果ヲ得、

$${}_{n-2}C_{r-2}={}_{n-3}C_{r-3}\times\frac{n-2}{r-2},$$

$${}_{n-3}C_{r-3}={}_{n-4}C_{r-4}\times\frac{n-3}{r-3},$$

$$\ldots\ldots\ldots=\ldots\ldots\ldots$$

$${}_{n-r+2}C_2={}_{n-r+1}C_1\times\frac{n-r+2}{2}.$$

又若干物ヲ一度ニ一ツ宛取レル組合セノ數ハ其物數ニ等シキコトハ明ナリ即チ

$${}_{n-r+1}C_1=\frac{n-r+1}{1}.$$

上ノ相等式ノ左右兩節ヲ夫々相乘ジ且ツ公因數ヲ悉ク消去スルトキハ次ノ如シ、

$${}_nC_r=\frac{n}{r}\times\frac{n-1}{r-1}\times\frac{n-2}{r-2}\times\ldots\ldots\ldots\frac{n-r+1}{1}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)}{\underline{|r}}$$

故ニ、　相異りたる $n$ 個の物を $r$ 個宛取りたる組合せの數は $n$ を最大とせる $r$ 個の順次整數の連乘積を $r$ を最大とせる $r$ 個の順次整數の連乘積にて除したる商なり、

例ヘバ　${}_8C_3=\frac{8.7.6}{1.2.3}=56,$

又　${}_8C_5=\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}=56.$

**第二百四十一款**　第二百三十七款及ビ第二百四十款ニ於テ $_nP_r$ 及ビ $_nC_r$ ヲ互ニ關係ナク求メタリ、然レド $r$ 個ノ相異ナレル物ノ諸ノ組ミ合セヲ若シ其文字ノ順序ヲナルタケ變更ズルドハ $\underline{|r}$ ノ順例ヲ生ズルヲ以テ、

$$_nC_r \times \underline{|r} = {}_nP_r \qquad ナリ$$

此レ相異ナリタル $n$ 個ノ物ヲ $r$ 個宛取レル組合セヲ順列ノ數ノ項ヲ以テ表ハシタルモノナリ、

**第二百四十二款**　第二百四十款ニ於テ

$$_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots r}$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots r} \times \frac{\underline{|n-r}}{\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}.$$

何トナレバ $n(n-1)\ldots(n-r+1) \times \underline{|n-r} = \underline{|n}$. ナルヲ以テナリ、

此範式ハ屢々用ユルモノナリ.

**第二百四十三款**　前款ニ於ケル範式ヨリ

$$_nC_{n-r} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-r}\,\underline{|r}}$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = {}_nC_{n-r}.$$

故ニ、 $n$ 個の物を $r$ 個宛取れる組合せの數は $n$ 個の物を $n-r$ 個宛取れる組合せの數に等し、

然レド上ノ命題ハ $n$ 個ノ物ノ內ヨリ $r$ ヲ取ルドハ常ニ $n-r$ 個ヲ殘サヾルベカラザルノ理ヨリ直チニ知ルヲ得ベシ故ニ $r$ 個ノ物ヲ取ルヿノ種々ノ方法ノ數ハ其殘リノ數即チ $n-r$ 個ノ物ヲ取ルヿノ種々ノ方法ノ數ト恰モ同一ナラザル可カラズ、



**第二百四十四款**　$(n+1)$ 個ノ物ヲ $r$ 個宛取レル組合セノ全數ハ或ル特別ナル文字ヲ含ムカ含マザルカニ從テ二群ニ分ツコトヲ得ベシ、特別ナル文字ヲ含マザル所ノ數ハ餘ス $n$ 個ノ物ヲ $r$ 個宛取ル組ミ合セノ數ニシテ $_nC_r$ ナリ、而シテ其文字ヲ含ム所ノ數ハ餘ス所ノ $n$ 個ノ物ヲ $(r-1)$ 個宛取ル組合セノ數ニシテ $_nC_{r-1}$ ナリ、則チ

$$_{n+1}C_r = {}_nC_r + {}_nC_{r-1}$$

是レ緊要ナル命題トス之ヲ亦次ノ如ク一般ナル範式ヨリ證明スルヿヲ得ベシ、

$$_nC_r + {}_nC_{r-1} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)}{1.2.3.\ldots r}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+2)}{1.2.3.\ldots(r-1)}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{\underline{|r}}(n-r+1+r)$$

$$= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+2)}{\underline{|r}}$$

$$= {}_{n+1}C_r.$$

**第二百四十五款**　第二百四十款ヨリ

$$_nC_r = \frac{n}{1} \times \frac{n-1}{2} \times \frac{n-2}{3} \times \ldots\ldots \times \frac{n-r+1}{r};$$

$$\therefore \quad {}_nC_r = {}_nC_{r-1} \times \frac{n-r+1}{r}.$$

是故ニ　$n-r+1 \gtrless r$ ニ從テ, 即チ $r \lesseqgtr \frac{1}{2}(n+1)$

ニ從テ　$_nC_r \gtrless {}_nC_{r-1}$ ナリ、

故ニ $n$ 個ノ物ノ組合セノ數ハ $r$ ノ $\frac{1}{2}(n+1)$ ヨリ小ナル間ハ $r$ ト共ニ增大スルモノナリ、

然シ $n$ 若シ偶數ナレバ ${}_nC_r$ ハ $r=\frac{n}{2}$ ナル時最大ナリ、

$n$ 若シ奇數ナレバ $r \lesseqgtr \frac{1}{2}(n+1)$ ナル時 ${}_nC_r \gtreqless {}_nC_{r-1}$.

$$r=\tfrac{1}{2}(n+1) \text{ ナル時 } {}_nC_r = {}_nC_{r-1}.$$

故ニ $n$ 奇數ナル時ハ ${}_nC_r$ ハ $r$ ノ $\frac{1}{2}(n-1)$ 或ハ $\frac{1}{2}(n+1)$ ナル時最大ナリ、

例ヘバ $n=8$ ナル時

$${}_nC_r = \tfrac{8}{1}\times\tfrac{7}{2}\times\tfrac{6}{3}\times\tfrac{5}{4}\times\tfrac{4}{5}\times\ldots\ldots,$$

而シテ $r=4$ ナル時 ${}_nC_r$ ハ最大ナリトス、

又　$n=9$ ナル時

$${}_nC_r = \tfrac{9}{1}\times\tfrac{8}{2}\times\tfrac{7}{3}\times\tfrac{6}{4}\times\tfrac{5}{5}\times\tfrac{4}{6}\times\ldots\ldots,$$

而シテ $r$ ノ 4 或ハ 5 ナルトキ ${}_nC_r$ ハ最大ナリ、

## 第五十六例題

1. ${}_{15}P_8$ ${}_{10}P_4$ 及ビ ${}_8P_8$ ヲ求ム、

2. 十個ノ物ヲ一度ニ四個宛取レル順列ノ數ハ七個ノ物ヲ悉ク取レル順列ノ數ニ等シキコトヲ證セヨ、

3. *Success*, *mississippi* 及ビ *algebraically* ナル語ノ各ニ就テ凡テノ字母ノ順列ノ數ヲ求ム、

4. 九字母 *aaaabbbcc* ヲ一例ニ排列スベキ方法幾何アリヤ、

5. 34567 ナル數字ヲ以テ形作ラルベキ數ハ幾何アリヤ又 11122333 ヲ以テセバ如何、

6. ${}_nP_5 = {}_nP_4 \times 22$ ナルコトヲ與テ ${}_nP_n$ ヲ求ム、



7. ${}_nP_5 = {}_nP_4 \times 12$ ナルコトヲ與テ $n$ ヲ求ム、

8. ${}_{16}C_4$, ${}_{15}C_5$, 及ビ ${}_6C_5$ ヲ求ム、

9. 若シ ${}_nC_5 = {}_nC_{10}$ ナレバ ${}_nC_2$ ヲ求ム、

10. 若シ ${}_{2n}C_3 = 12 \times {}_nC_2$ ナル時 $n$ ヲ求ム、

11. ${}_8C_4$ ニ於テ或ル特別ナル一物ヲ含ム組合ノ數ハ之ヲ含マザル數ニ相等シキコヲ證セヨ、

12. ${}_{2n}C_n$ ニ於テ或ル特別ナル一物ヲ含ム組合ノ數ハ之ヲ含マザル數ニ相等シキコヲ證セヨ、

13. ${}_{12}C_4$ ニ於テ或ル特別ナル一物ヲ含ム組合セノ數ハ組合全數ノ三分ノ一ナルコトヲ證セヨ、

14. ${}_{3n}C_n$ ニ於テ或ル特別ナル一物ヲ含ム組合セノ數ハ組合セノ三分ノ一ナルコトヲ證セヨ、

15. 選擧場ニ於テ十人ノ候補者アリ此中ニテ六人ヲ投票セントスル其方法如何、

16. 遊戯會十四人アリ此中ヨリ十一人ツヽくりっけっと遊戯ヲナサントス其組合ノ數如何、

17. 五個ノ黑球ト四個ノ白球ノ中ヨリ黑二個白二個ヲ取ル方法幾何アリヤ、

18. 四貴女及ビ六紳士ノ中ヨリ二貴女及ビ二紳士ヲ擇ミテてにす遊戯ノ一組ヲ設ケントス其方法幾何ナリヤ

19. 六貴女及ビ八紳士ノ中ヨリ二貴女及ビ二紳士ヲ擇ミテてにす遊戯ノ一組ヲ設ケントス其方法幾何アリヤ、

20. 茲ニ四通ノ書翰ト指名シタル四枚ノ書翰函アリ此凡テノ書翰ヲ封入スルニ當リテ誤輸ヲナスベキ場合ハ幾何アルベキヤ、

# 第　二　十　六　編

## 二項定理 (The Binomial Theorem.)

**第二百四十六疑**　任意ノ二ツノ複式ノ積ハ其一式ノ各項ニ他式ノ總テノ項ヲ乘ジ然シテ得ル處ノ總テノ積ノ和ナリト云フハ既ニ之ヲ證明セリ、

今三ツノ式ノ連乘積ヲ求メンニハ初メノ二式ノ積ノ中ノ各項ニ第三式ノ總テノ項ヲ乘ス可キナリ故ニ其連乘積ハ第一式ノ一項ト第二式ノ一項ト第三式ノ一項トヲ共ニ乘ジテ得ラルヽ總テノ積ノ和ナリ、

同理ニ由テ若干ノ式ノ連乘積ハ第一式ノ一項ト第二式ノ一項ト其他各式ヨリ一項ヅヽヲ取リ共ニ乘ジテ得ラルヽ總テノ積ノ和ナリ、

例ヘバ、若シ $(a+b)$ $(a+b)$ $(a+b)$ ノ各因數ヨリ一字ヅヽ取リ之ヲ共ニ乘ズレバ其積ノ一項ヲ得ベシ而シテ斯ノ如ク各因數ヨリ一字ヅヽ取リ異ナル組ミ合セノ數ヲ盡サバ其積ノ總テノ項ヲ得ベキナリ、

尙ホ詳ラカニ解セバ各因數ヨリ $a$ ヲ一個ヅヽ取ルコヲ得其仕方ハ唯一アリ故ニ $a^3$ ハ其積ノ一項ナリ、

又 $a$ ヲ二個取リ $b$ ヲ一個取ルコヲ得其仕方ハ三ツアリ何トナレバ $b$ ハ三ツノ因數ノ各ヨリ取ルコヲ得レバナリ故ニ $3a^2b$, 一項ヲ得、

又 $a$ ヲ一個 $b$ ヲ二個取ルコヲ得其仕方モ亦タ三ツアリ故ニ $3ab^2$ ノ一項ヲ得、

終リニ $b$ ヲ一個ヅヽ取ルコヲ得其仕方ハ唯一アリ故ニ $b^3$ ノ一項ヲ得、

此故ニ其連乘積ハ　$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

故ニ　$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$　ナリ.



**第二百四十七款**　$n$ 個ノ因數アリテ各ミ $a+b$ ナリト假定セヨ、

今若シ $(a+b)(a+b)(a+b)$......ノ各因數ヨリ一字ヅヽヲ取リ之ヲ共ニ乘セバ其積ノ一項ヲ得ベシ而シテ有ラユル仕方ニテ斯ノ如クセバ其積ノ總テノ項ヲ得ルナリ、

偖各因數ヨリ $a$ ヲ一個ヅヽ取ルコヲ得而シテ其仕方ハ唯一アルノミ故ニ $a^n$ ハ其積ノ一項ナリ、

又 $b$ ヲ一個取リ $a$ ヲ殘リノ $(n-1)$ 個取ルコヲ得而シテ $b$ ヲ一個取ル仕方ノ數ハ $n$ 個ノ物ノ中ヨリ一個ヲ取ル仕方ノ數ト恰モ相同ジ則チ其數ハ $_nC_1$ ナリ故ニ $_nC_1 . a^{n-1}b$ ヲ得、

又 $b$ ヲ二個取リ $a$ ヲ殘リノ $(n-2)$ 個取ルコヲ得而シテ $b$ ヲ二個取ル仕方ノ數ハ $n$ 個ノ物ノ中ヨリ二個ヲ取ル仕方ノ數ト恰モ相同ジ則チ其數ハ $_nC_2$ ナリ故ニ $_nC_2 . a^{n-2}b$ ヲ得、

一般ニ $b$ ヲ $r$ 個 ($r$ ハ $n$ ヨリ大ナラザル正整數トス) 取リ $a$ ヲ殘リノ $(n-r)$ 個取ルコヲ得而シテ $b$ ヲ $r$ 個取ル仕方ノ數ハ $n$ 個ノ物ノ中ヨリ $r$ 個ヲ取ル仕方ノ數ト恰モ相同ジ則チ其數ハ $_nC_r$ ナリ故ニ $_nC_ra^{n-r}b^r$ ヲ得ヽ

終リニ $b$ ヲ各因數ヨリ取ルコヲ得而シテ其仕方ハ唯一ナリ故ニ $b^3$, 一項ヲ得コレ則チ $_nC_r . a^{n-r}b_r$ ニ於テ $r=n$ トナスモ $_nC_n=1$ ナルヲ以テ此結果ト符合ス

此故ニ　$(a+b)(a+b)(a+b)\cdots\cdots$($n$個ノ因數ニ至ル)

$$=a^n+{}_nC_1 . a^{n-1}b+{}_nC_2 . a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$
$$+{}_nC_r a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

是ニ由テ若シ $n$ ヲ任意ノ正整數トスレバ下式ヲ得、

$$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1 . a^{n-1}b+{}_nC_2 . a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+{}_nC_r a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

此雙式ヲ二項定理　(*Binomial Theorem*)　ト稱ス、

又此式ノ右邊ノ級數ヲ $(a+b)^n$ ノ展開 (*Expansion*) ト稱ス、

若シ此右邊ノ級數ノ中ニ在ル ${}_nC_1$, ${}_nC_2$, 等ニ既知ノ値（第二四〇款）ヲ代入スレバ通常此定理ヲ書キ著ハス處ノ形狀ノ式ヲ得乃チ次ノ如シ、

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

**第二百四十八款**　$(a+b)^n$ ノ展開ノ某項ヲ求メンニハ $\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r$ ノ中ノ $r$ ニ適當ノ値ヲ代用スベシ、

此故ニ上ノ式ヲ展開式ノ普通項 (*General Term*) ト稱ス、

**第二百四十九款**　若シ二項式ノ展開ノ範式ニ於テ $n=2$ トスレバ次ノ如シ、

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

若レ $n=3$ トスレバ次ノ如シ

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+\frac{3.2}{1.2}ab^2+b^3$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

若シ $n=4$ トスレバ次ノ如シ、

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+\frac{4.3}{1.2}a^2b^2+\frac{4.3.2}{1.2.3}ab^3+b^4$$

$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

又若シ $a$ ヲ $2x$ ニ代ヘ $b$ ヲ $-3y$ ニ代ヘ且ツ $n=5$ トスレバ次ノ如シ、

$$(2x-3y)^5=(2x)^5+5(2x)^4(-3y)+\frac{5.4}{1.2}(2x)^3(-3y)^2$$



$$+\frac{5.4.3}{1.2.3}(2x)^2(-3y)^3+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}(2x)(-3y)^4+(-3y)^5$$

$$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4-243y^5.$$

**第二百五十款**　二項定理ハ又次ニ示ス處ノ方法ニテ之ヲ證明スルヲ得ベシ、

今 $n$ ハ任意ノ正整數ナル時

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}a^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n,$$

或ハ　$(a+b)^n=a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots\cdots$

$$+{}_nC_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots\cdots+b^n.$$

ナルコヲ證明スルヲ要ス、

先ツ其定理ハ指數ノ $n$ ナル時眞ナルモノト假定シ之ニ他ノ因數 $a+b$ ヲ乘シ其積ニ於ケル $a$ 及ビ $b$ ノ同乘方ヲ有スル諸項ハ之ヲ合シテ一項トセバ下ノ式ヲ得ベシ、

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+(1+{}_nC_1)a^nb+({}_nC_1+{}_nC_2)a^{n-1}b^2+\ldots$$

$$+({}_nC_{r-1}+{}_nC_r)a^{n-r+1}b^r+\ldots+b^{n+1}.$$

然ルニ　$1+{}_nC_1=1+n={}_{n+1}C_1,$

$${}_nC_1+{}_nC_2=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n+1)n}{2}={}_{n+1}C_2,$$

又 $r$ ノ任意ノ値ニ就テハ

$${}_nC_{r-1}+\ C_r={}_{n+1}C_r. \qquad \text{[第二四四款]}$$

故ニ　$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+{}_{n+1}C_1.a^nb+{}_{n+1}C_2.a^{n-1}b^2+\ldots$

$$+{}_{n+1}C_r.\ a^{n+1-r}b^r+\ldots+b^{n+1}.$$

是ニ由テ若シ此定理ハ $n$ ノ値ノ何レカニ就セテ眞ナルヲ知レバ必ズ

其次ヰノ大ナル値ニ就ヒテモ亦タ眞ナルヿヲ知ルベキナリ、

偖、此定理ハ $n=1$ ナルヰハ眞ナルハ勿論ナリ然ラバ上ニ論スル所ニ因リ $n=2$ ナルヰモ亦タ必ズ眞ナルベシ既ニ $n=2$ ナルヰ眞ナラバ $n=3$ ナルヰモ亦タ必ズ眞ナルベシ逐テ此ノ如ク論究スレバ際限アルコトナシ夫故ニ此定理ハ $n$ ノ總テノ正整値ニ就キテ眞ナルベキナシ、

代數學ニ於テハ屢々此類ノ證明法ヲ用ヰルヿアリ之ヲ歸納法 (*Induction.*) ト名付ク、

**第二百五十一款**　二項定理ニ因レバ $(a+b)^n$ ノ展開ニ於テ初項ヨリ第 $r+1$ 項ト末項ヨリ第 $r+1$ 項ハ次ノ如シ、

$${}_nC_r\, a^{n-r}b^r,\ 及ビ\ {}_nC_{n-r}\, a^rb^{n-r}.$$

然ルニ $r$ ノ値何ニテモ ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ ナリ〔第二四三款〕

是ニ由テ $(a+b)^n$ ノ展開ニ於テ　初項と末項より等しき距離にある何れの二項の係數も皆ゐ相同し、

**第二百五十二款**　第二百四十七款ノ範式ニ於テ $a=1$ トシ $b=x$ トスレバ次式ヲ得、

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^2+\ldots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}}x^r+\ldots+x^n.$$

此式ハ二項定理ノ最モ簡便ナル形狀ニシテ一般ニ用ヰラルヽモノナリ、

二項定理ノ上ノ形狀ハ總テノ塲合ヲ包含スルモノナルヲ記臆スベシ例之バ若シ $(a+b)^n$ ヲ求ムルヲ要スルニハ次ノ如クスベシ、

$$(a+b)^n=\left\{a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right\}^n=a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n=a^n\left(1+n\frac{b}{a}+\&c.\right)$$

$$=a^n+na^{n-1}b+\&c.$$



# 第五十七例題

次ノ各ノ展開ヲ記ルセ、

1. $(x+a)^6$.　　2. $(1-x^2)^5$.　　3. $(3x-2y)^6$.

4. $(2a+3a^2)^4$.　　5. $(2x^2-1)^6$.　　6. $(y-x)^7$.

7. $(a-3b)^{10}$ ノ第三項ヲ求ム、

8. $(2x-x^2)^{12}$ ノ第五項ヲ求ム、

9. $(2a-\frac{1}{2})^8$ ノ第六項ヲ求ム、

10. $(1-x)^{10}$ ノ第七項ヲ求ム、

11. $(1+x)^{20}$ ノ第十八項ヲ求ム、

12. $(1-x)^{22}$ ノ第二十一項ヲ求ム、

13. $(a+\sqrt{b})^4+(a-\sqrt{b})^4$ ヲ展開セヨ、

14. $(a+\sqrt{b})^6+(a-\sqrt{b})^6$ ヲ展開セヨ、

15. $(a+\sqrt{b})^8+(a-\sqrt{b})^8$ ヲ展開セヨ、

16. $(1+x)^8$ ノ中項ヲ求ム、

17. $(1+x)^{10}$ ノ中項ヲ求ム、

18. $(2x-3y)^8$ ノ中項ヲ求ム、

19. $(a+x)^8$ ノ展開ニ於テ最大ノ係數ヲ有スル項ヲ求ム、〔第二四五款〕

20. $(a+x)^9$ ノ展開ニ於テ最大ノ係數ヲ有スル二項ヲ求ム、

21. $(a+x)^{12}$ ノ展開ニ於ケル初メノ三項及ビ終リノ三項ヲ記ルセ、

22. $(1+x)^{2n}$ ノ展開ニ於ル $x^n$ ノ係數ハ $(1+x)^{2n-1}$ ノ展開ニ於ケル $x^n$ ノ係數ノ二倍ナルヿヲ證セヨ、

23. $(1+x)^{2n}$ ノ中項ハ $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{\underline{|n}}2^nx^n$ ナルヲ示セ、

24. $99^4$ 及ビ $999^3$ ヲ求ムルニ二項定理ヲ應用セヨ、

**第二百五十三款**　次ニ二項展開ニ於ケル諸係數ノ性質ニ就

ヲ攷究セントス、

二項定理ヲ下ノ如キ形状ニテ書クヲ便ナリトス、

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_rx^r+\ldots+c_nx^n,$$

此所ニ

$$c_0=c_n=1,\ c_1=c_{n-1}=n,\ \text{及ビ}\ c_r=c_{n-r}=\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}.$$

**第二百五十四款**　第二百五十三款ノ範式ニ於テ $x=1$ トスレバ次ノ如シ、

$$2^n=c_0+c_1+c_2+\ldots+c_r+\ldots c_n.$$

故ニ、$(1+x)^n$ の展開に於ける諸の係數の和は $2^n$ なり、

又　$x=-1$ トスレバ次ノ如シ、

$$(1-1)^n=c_0-c_1+c_2-c_3+\ldots$$

$$\therefore\ \ 0=(c_0+c_2+c_4+\ldots)-(c_1+c_3+c_5+\ldots).$$

故ニ、二項展開に於て奇數の諸項の係數の和ハ偶數の諸項の係數の和に等し、

例一、$c_1+2c_2+3c_3+\ldots+rc_r+\ldots+nc_n=n2^{n-1}$. ナルヲ證セヨ、

$$c_1+2c_2+3c_3+\ldots+rc_r+\ldots+nc_n$$

$$=n+2.\frac{n(n-1)}{1.2}+3.\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}+\ldots$$

$$+r\frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}+\ldots+n$$

$$=n\left\{1+(n-1)+\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{\lfloor n}{\lfloor r-1\,\lfloor n-r}+\ldots+1\right\}$$

$$=n(1+1)^{n-1}$$

$$=n2^{n-1}.$$



例二、$c_0-\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2-\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$　ナルヲ證セヨ、

$$c_0-\tfrac{1}{2}c_1+\tfrac{1}{3}c_2-\tfrac{1}{4}c_3+\ldots+(-1)^n\frac{c_n}{n+1}.$$

$$=1-\tfrac{1}{2}.n+\tfrac{1}{3}\frac{n(n-1)}{1.2}-\tfrac{1}{4}\frac{n.\,n-1.\,n-2}{1.2.3}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{n+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left\{(n+1)-\frac{(n+1)n}{1.2}+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3}+\ldots+(-1)^n\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\left\{1-(n+1)+\frac{(n+1)n}{1.2}-\ldots+(-1)^{n+1}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}(1-1)^{n+1}=\frac{1}{n+1}.$$

**第二百五十五款**　$c_r=c_{n-r}$ ナルヲ以テ二項定理ハ次ノ二式ノ何レカ其一ヲ以テ書キ著ハシ得ベシ、

$$(1+x)^n=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_rx^r+\ldots c_nx^n,$$

$$(1+x)^n=c_n+c_{n-1}x+c_{n-2}x^2+\ldots c_{n-r}x^r+\ldots+c_0x^n.$$

此二式ノ右邊ニ在ル二ツノ級數ノ積ニ於ケル $n$ ノ係數ハ次式ニ等シ、

$$c_0^2+c_1^2+c_2^2+\ldots c_n^2.$$

故ニ　$c_0^2+c_1^2+\ldots c_2^2+c_r^2+\ldots c_n^2$ ハ $(1+x)^n\times(1+x)^n$ 即チ $(1+x)^{2n}$ ニ於ケル $x^n$ ノ係數ニ等シ而シテ又此係數ハ範式ニヨリ直チニ之ヲ求メバ $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$ ナリ、（第二六六欵ヲ參照セヨ）

是ニ因テ、$(1+x)^n$ ノ展開ニ於ケル諸ノ係數ノ平方の和は $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$ ニ等シ、

**第二百五十六款**　二項定理ヲ應用シテ $(a+b+c)^n$ ノ展開ヲ求ムルヲ得ベシ乃チ下ノ如シ、

## 例　　題

$$(a+b+c)^n=\{a+(b+c)\}^n=a^n+\dots+\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}a^r(b+c)^{n-r}+\dots\dots$$

又　$(b+c)^{n-r}=\dots+\frac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\;\underline{|n-r-s}}b^sc^{n-r-s}+\dots\dots$

故ニ $a^rb^sc^t$ ノ係數ハ次ノ如シ但シ此 $r,s,t$ ハ任意ノ整數ニシテ $r+s+t=n$ ナルモノナリ、

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|n-r}}\times\frac{\underline{|n-r}}{\underline{|s}\;\underline{|t}}=\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|s}\;\underline{|t}}$$

故ニ $(a+b+c)^n$ ノ展開ニ於ケル普通項ハ次ノ如シ、

$$\frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\;\underline{|s}\;\underline{|t}}a^rb^sc^t.$$

例ヘバ、　$(a+b+c)^3$ ノ展開ニ於ケル $abc$ ノ係數ハ

$$\frac{\underline{|3}}{\underline{|1}\;\underline{|1}\;\underline{|1}}=6$$ ナリ、

又　$(a+b+c)^7$ ノ展開ニ於ケル $a^4b^2c$ ノ係數ハ

$$\frac{\underline{|7}}{\underline{|4}\;\underline{|2}\;\underline{|1}}=105$$ ナリ、

## 第五十八例題

次ノ諸例ニ於テ $c_0,c_1,c_2,\dots$ ハ $(1+x)^n$ ノ展開ニ於ケル $x^0,x^1,x^2,\dots$ ノ係數ヲ表スモノナリ、

1. $c_1-2c_2+3c_3-\dots+(-1)^{n-1}nc_n=0$.　ヲ證セヨ、

2. $c_0-2c_1+3c_2-\dots+(-1)^n(n+1)c_n=0$.　ヲ證セヨ、

3. $c_0+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{3}c_2+\dots+\frac{1}{n+1}c_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.　ヲ證セヨ、



## 例　　題

4. $\frac{c_1}{c_0}+2\frac{c_2}{c_1}+3\frac{c_3}{c_2}+\dots+n\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{1}{2}n(n+1)$.　ヲ證セヨ、

5. $c_0+c_1x+2c_2x^2+\dots+rc_rx^r\dots+nc_nx^n=1+nx(1+x)^{n-1}$.　ヲ證セヨ、

6. $c_0c_1+c_1c_2+c_2c_3+\dots+c_{n-1}c_n=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n+1}\;\underline{|n-1}}$.　ヲ證セヨ、

7. $c_0c_2+c_1c_3+c_2c_4+\dots+c_{n-2}c_n=\frac{\underline{|2n}}{\underline{|n+2}\;\underline{|n-2}}$　ヲ證セヨ、

8. $c_0^2-c_1^2+c_2^2-\dots+(-1)^nc_n^2$.　ハ $n$ 若シ奇數ナラバ 0 ニ等シク又 $n$ 若シ偶數ナラバ　$\frac{\underline{|n}}{\underline{|\frac{1}{2}n}\;\underline{|\frac{1}{2}n}}$　ニ等シキヲ證セヨ、

9. $c_0^2+2c_1^2+3c_2^2+\dots+(n+1)c_n^2=\frac{(n+2)\;\underline{|2n-1}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n}}$.　ナルヲ證セヨ、

10. $c_1^2+2c_2^2+3c_3^2+\dots+nc_n^2=\frac{\underline{|2n-1}}{\underline{|n-1}\;\underline{|n-1}}$.　ナルヲ證セヨ、

11. $c_1-\frac{c_2}{2}+\frac{c_3}{3}-\dots+(-1)^{n-1}\frac{c_n}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$.　ナルヲ證セヨ、

12. $\frac{1}{x}-\frac{c_1}{x+1}+\frac{c_2}{x+2}-\dots+(-1)^n\frac{c_n}{x+n}=\frac{\underline{|n}}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$.　ナルヲ證セヨ、

# 第二十七編

## 雜定理及ビ例題

## (Miscellaneous Theorems and Examples.)

**第二百五十七欵** 三次以上ノ代數式ニシテ最モ廣通ノ形状ヲナスモノヽ因數ヲ求ムル方法ヲ示スハ此書ノ程度ニ於テハ爲シ難シ然レ圧三次以上ノ代數式ニシテ視察ニ依テ直チニ其因數ヲ知リ又項ノ排列ヲ更ヘテ其因數ヲ知ルヲ得ルモノモ亦多シ今下ニ此類ノ數例ヲ示スベシ、

例一、 $1-x-x^3+x^4.$ ノ因數ヲ求ム、

$$1-x-x^3+x^4=1-x-x^3(1-x)=(1-x)(1-x^3)$$
$$=(1-x)(1-x)(1+x+x^2).$$

例二、 $2x^3-3x^2+1$ ノ因數ヲ求ム、

$$2x^3-3x^2+1=2x^2(x-1)-(x^2-1)$$
$$=(x-1)\{2x^2-x-1\}=(x-1)(x-1)(2x+1).$$

例三、 $(x^2+1)^2-2x(x^2+1)-8x^2$ ノ因數ヲ求ム、

$$(x^2+1)^2-2x(x^2+1)-8x^2=\{(x^2+1)+2x\}\{(x^2+1)-4x\}$$
$$=(x+1)^2(x-2+\sqrt{3})(x-2-\sqrt{3}).$$

**第二百五十八欵** 次ニ掲グル二次式ノ一例ハ是迄ニ攷究セシモノヨリ稍々複雜ナルモノナリ然レ圧其因數ハ尋常ノ方法ニ依テ求ムルヲ得、

例、 $x^2+4xy+3y^2-4x-10y+3.$ ノ因數ヲ求ム、

此式ハ $x^2+2x(2y-2)+3y^2-10y+3.$ ナリ、

此 $x$ ヲ有ツ項ハ $(2y-2)^2$ ヲ加ヘテ完全平方トナスヲ得故ニ $(2y-2)^2$ ヲ加減シ下ノ如シ

$$x^2+2x(2y-2)+(2y-2)^2-(2y-2)^2+3y^2-10y+3,$$



即チ $(x+2y-2)^2-(y^2+2y+1).$

此結果ハ二ツノ平方ノ差ナリ依テ其因數ハ次ノ如シ

$x+2y-2+(y+1)$ 及ビ $x+2y-2-(y+1),$

即チ $x+3y-1$ 及ビ $x+y-3,$

而テ是レ等ハ要スル處ノ因數ナリ、

**第二百五十九欵** $x-a, x^2-a^2,$ 及ビ $x^3-a^3$ ハ凡テ $x-a$ ヲ以テ除セラルベキヲ知リテ $x^n-a^n$ ハ $n$ ノ正整數ナル限リハ凡テ $x-a$ ヲ以テ除セラルベキヿヲ證セントス

$$x^n-a^n=x^n-ax^{n-1}+ax^{n-1}-a^n$$
$$=x^{n-1}(x-a)+a(x^{n-1}-a^{n-1}).$$

是ニ依テ若シ $x-a$ ハ $x^{n-1}-a^{n-1}$ ヲ除スルナラバ又

$$x^{n-1}(x-a)+a(x^{n-1}-a^{n-1})$$

ヲ除スベシ即チ $x^n-a^n$ ヲ除スベシ、

此故ニ若シ $x-a$ ハ $x^{n-1}-a^{n-1}$ ヲ除スレバ又 $x^n-a^n$ ヲ除スベキナリ、

然ルニ $x-a$ ハ $x^3-a^3$ ヲ除スベキナリ故ニ亦 $x^4-a^4$ ヲ除スベシ、而テ $x-a$ ハ $x^4-a^4$ ヲ除スベキ故ニ亦 $x^5-a^5$ ヲ除スベシ、逐テ斯ノ如ク際限ナシ、

此ヲ以テ $n$ ノ正整數ナル[illegible]ハ其何タルニ拘ラズ $x^n-a^n$ ハ常ニ $x-a$ ヲ以テ除セラルベキナリ、

$x^n+a^n=x^n-a^n+2a^n$ ナルヲ以テ若シ $x-a$ ヲ以テ $x^n+a^n$ ヲ除スレハ其殘リハ $2a^n$ ナリ故ニ $x^n+a^n$ ハ $x-a$ ヲ以テ除スルヿ能ハズ

今若シ $a$ ヲ $-a$ ニ變ズレバ $x-a$ ハ $x-(-a)=x+a$ トナリ又 $x^n-a^n$ ハ $x^n-(-a)^n$ トナル而テ $x^n-(-a)^n$ ハ $n$ ノ奇數ナルト偶數ナルトニ從テ $x^n+a^n$ トナリ或ハ $x^n-a^n$ トナルベシ、

此ニ由テ、　$n$ ハ奇數ナル時ハ

$x^n+a^n$ ハ $x+a$ ヲ以テ除スルヲ得、

而テ　$n$ ハ偶數ナル時ハ

$x^n-a^n$ ハ $x+a$ ヲ以テ除スルヲ得、

故ニ、　$n$ ノ正整數ナル時ハ

$x-a$ ハ常ニ　$x^n-a^n$ ヲ除ス、

$x-a$ ハ決シテ　$x^n+a^n$ ヲ除セズ、

$x+a$ ハ $n$ 偶數ナレバ　$x^n-a^n$ ヲ除ス、

$x+a$ ハ $n$ 奇數ナレバ　$x^n+a^n$ ヲ除ス、

此四ツノ塲合ハ凡テ第一ノ中ニ含蓄セルコハ旣ニ上ニ證明セリ之ヲ各別ニ證明スルコハ學生ノ演習ニ供シコヽニ記ルサズ、

此ノ結果ヲ其商ヲ表ハス樣書キ記ルスヲ得乃チ下ノ如シ

$$\frac{x^n-a^n}{x-a}=x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\dots+a^{n-1},$$

$$\frac{x^n\pm a^n}{x+a}=x^{n-1}-x^{n-2}a+x^{n-3}a^2-\dots\pm a^{n-1},$$

此第二ノ範式ニ於テ $n$ 若シ奇數ナラバ兩邊倶ニ上部ノ符號ヲ取リ又若シ偶數ナラバ倶ニ下部ノ符號ヲ取ルベシ、

## 第五十九例題

次ノ各式ノ因數ヲ求ム、

1. $x^3-x^2-x+1.$
2. $x^6-x^4-x^2+1.$
3. $1-x-x^4+x^5.$
4. $1-x^2-x^8+x^{10}.$
5. $x^2-y^2-2ax-2by+a^2-b^2.$



6. $x^2-y^2-5x-y+2.$
7. $x^2-2xy-8y^2-2x+20y-8.$
8. $a^2-b^2+c^2-f^2-2ac-2bf.$
9. 次ノ各除法ニ於ケル商ヲ記ルセ、
   (i) $(x^5-y^5)\div(x-y)$　(ii) $(x^7+y^7)\div(x+y)$
   (iii) $(x^8-y^8)\div(x+y).$
10. $n$ 若シ任意ノ整數ナラバ $7^n-1$ ハ 6 ニテ除セラルベキヲ證セヨ、又 $35^{2n+1}+1$ ハ36 ニテ除セラルベキヲ證セヨ、
11. 除法ヲ實施スルコナクシテ $(3x^2-2x+1)^3-(x^2+3x-5)^3$. ハ $x^2-5x+6$ ニテ除セラルベキヲ示セ、
12. $(2a+3b)^3+(3a+2b)^3$ ヲ $5a+5b$ ニテ除シタル結果ヲ記ルセ、
13. $(2a+4b-4c)^3+(a-b+7c)^3$ ヲ $a+b+c$ ニテ除シタル結果ヲ記ルセ、
14. $(1-x)^2$ ハ $1-x-x^5+x^6$ ノ因數ナルコヲ示セ、
15. $n$ ハ任意ノ整數ナル時 $(1-x)^2$ ハ $1-x-x^n+x^{n+1}$ ノ因數ナルコヲ示セ、
16. $n$ ハ任意ノ整數ナル時 $(x-1)^2$ ハ $nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$ ノ因數ナルコ及ビ $x^n-nx+n-1$ ノ因數ナルコヲ示セ、

---

**第二百六十欵**　今次ノ緊要ナル定理ヲ證スベシ、

**若シ $x$ を有つ任意の有理整數式の $x$ を $\alpha$ に代へて此式消失する時は $x-\alpha$ は此式の因數なり、**

$x$ ノ自乘ニ從テ配列シタル此式ヲ

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$$

トスレバ假設ニ由テ

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\dots=0.$$

故ニ　$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$

$$=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots-(a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\dots)$$

$$=a(x^n-\alpha^n)+b(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+c(x^{n-2}-\alpha^{n-2})+\dots$$

然ルニ前款ニ依テ $x^n-\alpha^n,\ x^{n-1}-\alpha^{n-1},\ x^{n-2}-\alpha^{n-2}$, 等ハ皆ナ $x-\alpha$ ニテ除セラルベシ、

此故ニ $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots\dots$ モ亦 $x-\alpha$ ニテ除セラルベシ、

**第二百六十一款**　上款ニテ證明セシ定理ハ又次ノ方法ニテ證明スルヲ得、

$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ ヲ $x-\alpha$, ニテ除シ若シ殘リアラバ其 $x$ ヲ含マザルニ至ルマデ演算シ而テ $Q$ ヲ其商トシ $R$ ヲ其殘リトス、

然ラバ除法ノ性質ヨリ

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots=Q(x-\alpha)+R,$$

而テ此方程式ノ兩邊ハ全ク相同シキモノナリ、

偖テ $R$ ハ $x$ ヲ含マサルヲ以テ $x$ ノ値ヲ變ズルモ $R$ ニ變化アルコナレ

然ラバ $x=\alpha$ トスレバ

$$a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\dots=Q(\alpha-\alpha)+R=R.$$

此ニ由テ、　若シ $x$ を含む任意の式を $x-\alpha$ にて除する時其殘リハ原式中の $x$ を $\alpha$ に代ゆれば得べし、

$x-\alpha$ ハ $x$ ノ代リニ $\alpha$ ヲ取ル時消失スル式ノ因數ナリト云フ定理ハ上ノ定理ノ特別ノ場合トシテ其中ニ含蓄スルモノナリ、

例一、　$x^3-4x^2+2x+1$ ヲ $x-3$ ニテ除シタル時ノ殘リヲ求ム、

此殘リハ $3^3-4.3^2+2.3+1=-2$　ナリ、

例二、　$x-2$ ハ $x^4-3x^2+2x-8$ ノ因數ナルコヲ證セ、

此要件ハ $2^4-3.2^2+2.2-8=0$ ナリ而テ此要件ハ適合セリ、

例三、　$x^2-3x+2$ ト $x^3-13x+12$ ノ最低公倍數ヲ求ム、



$x^3-3x+2$ ノ因數ハ $x-1$ ト $x-2$ ナリ而シテ其 $x-1$ ハ $x^3-13x+12$ ノ因數タルノ要件ニ適合スレモ $x-2$ ニ於テハ然ラズ、　故ニ要スル所ノ最低公倍數ハ $(x-2)(x^3-13x+12)$ ナリ、

例四、　任意ノ有理整數式ハ若シ其 $x$ ノ各自乘ノ係數ノ和零ナラバ $x-1$ ヲ以テ除セラルベキヲ證明セヨ、

何トナレバ若シ諸ノ係數ノ和零ナラバ其式ハ $x=1$ トスレバ消失スベシ故ニ $x-1$ ハ因數ナリ、

**第二百六十二款**　$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots$ ナル式ノ $x$ ニ $a$ ヲ代用スレバ此式消失スル時ハ $x-a$ ハ此式ノ因數ナルコハ既ニ之ヲ證明セリ、

又除法ノ實施ニ於テ其商ノ第一項即チ $x$ ノ最高次ノ項ハ $ax^{n-1}$ ナルコ明白ナリ、

此故ニ與ヘラレタル式ハ次式ト同値ナリ、

$$(x-a)(ax^{n-1}+\dots\dots)$$

今若シ與ヘラレタル式ハ $x=\beta$ ナル時ニモ亦消失スト假定スレバ $x-\alpha$ ト $ax^{n-1}+\dots\dots$ トノ積ハ $x=\beta$ ナル時ニ消失スベシ然ルニ $x=\beta$ ナルモ $x-\alpha$ ハ消失セザルヲ以テ $x=\beta$ ナル時 $ax^{n-1}+\dots\dots$ ハ消失セザル可ラズ、　是ニ由テ $x-\beta$ ハ $ax^{n-1}+\dots\dots$ ノ因數ナリ而テ若シ除法ヲ行ヘバ其商ノ第一項ハ $ax^{n-2}$ ナルベキコ明白ナリ、

夫故ニ與ヘラレタル式ハ次式ト同値ナリ、

$$(x-\alpha)(x-\beta)(ax^{n-2}+\dots\dots)$$

同樣ニ原方程式若シ $x$ ノ諸ノ値 $\gamma,\delta$, 等ノ各ヲ以テスルモ亦タ消失スルトセバ其式ハ次式ト同値ナリ

$$(x-a)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\dots(ax^{n-r}+\&c.),$$

但シ此 $r$ ハ $x-\alpha,\ x-\beta$, 等ノ衆因數ノ數ニ等シ、

此故ニ與ヘラレタル式ニ $\alpha, \beta, \gamma$ 等ノ $n$ 個ノ値ノ何レヲ $x$ ニ代用スルモ其式消失スル時ハ $x-\alpha$ ノ如キ形狀ノ因數 $n$ 個アルベシ而テ尙ホ殘リノ因數 $ax^{n-r}+\ldots\ldots$ ハ $a$ ニ化スベシ然ラバ與ヘラタレル式ハ次式ト同値ナリ、

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots\ldots$$

## 第二百六十三欵

$x$ ニ就テ第 $n$ 次ノ式ハ $n$ 個ノ $x$ ノ價ヨリ多クヲ以テ消失スルヿ能ハズ何トナレバ其式ヲ、

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots$$

トシ $\alpha, \beta, \gamma\ldots\ldots, n$ 個ノ値ヲ以テ消失スルモノトセバ次式ト同値ナラザル可ラズ

$$a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\ldots$$

今若シ $\alpha, \beta, \gamma$ 等ノ $n$ 個ノ値ノ各ト異ナル任意ノ他ノ値 $P$ ヲ代用スルト考フレバ $P-\alpha, P-\beta,$ 等ノ因數ハ何レモ零ナラザルヲ以テ其連乘積モ亦タ零トナル能ハズ故ニ與ヘラレタル式ハ $a$ の零なるノ外ハ $x=P$ ヲ以テ消失スル能ハザルナリ、

然ルニ $a$ 若シ零ナラバ原式ハ　$bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots,$　トナル而テ此式ハ第 $(n-1)$ 次ナリ故ニ又 $b$ ノ零ナルノ外ハ $x$ ノ $(n-1)$ 個ノ值ノミヲ以テ消失スルヲ得ルモノナリ逐テ此ノ如シ、

此ニ因テ $x$ ニ就テ第 $n$ 次ノ式ハ其 $x$ ノ各自乘ノ係數悉ク零ナルノ外ハ $x$ ノ値 $n$ 個ヨリ多クヲ以テ消失スル能ハズ而テ此等ノ係數凡テ零ナル時ハ $x$ ノ値ノ何タルニ係ラズ其式ノ消失スルハ明了ナリ、

## 第二百六十四欵

$x$ ノ値ニシテ次式ヲ零ナラシムルモ

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{a-2}+\ldots$$

ノハ次ノ方程式ノ根ナリ

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=0.$$



此故ニ第 $n$ 次の方程式ハ $n$ 個の根より多くを有する能はず但シ未知量ノ各自乘ノ係數悉ク零ナルノ時ヲ除ク蓋シ此場合ニ於テハ $x$ ノ任意ノ値ヲ以テ方程式ニ適合スレバナリ、

## 第二百六十五欵

若シ第 $n$ 次ノ二式

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots,$$

及ビ

$$px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots,$$

アリテ $x$ ノ値 $n$ 個ヨリ多ク以テ互ニ相等シケレバ方程式

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\ldots=px^n+qx^{n-1}+rx^{n-2}+\ldots,$$

即チ方程式

$$(a-p)x^n+(b-q)x^{n-1}+(c-r)x^{n-2}+\ldots=0$$

ハ $n$ 個ヨリ多クノ根ヲ有スベシ

故ニ第二百六十四欵ニ由テ $x$ ノ各異ノ自乘ノ係數悉ク零ニ等シカラザル可ラズ乃チ

$$a=p,\quad b=q,\quad c=r,\qquad 等$$

此ニ由テ若シ $x$ ニ就テ第 $n$ 次ノ二式アリテ $x$ の値 $n$ 個より多クヲ以テ互ニ相等シケレバ一式ノ $x$ ノ任意ノ自乘ノ係數ハ他式ノ $x$ ノ同自乘ノ係數ト相等シ、

## 第二百六十六欵

限ヲレタル項數ヲ有スル任意ノ二式アリ若シ凡ての値ヲ以テ互ニ相等シキ時ハ明ラカニ上款ノ要件ニ適合セリ何トナレバ値ノ數ハ式中ニ含有セル或ル文字ノ最高自乘ノ指數ヨリ大ナルヿ勿論ナレバナリ、

此ニ由テ限ラレタル項數ヲ有スル任意ノ二式アリテ若シ其中ニ含有スル文字ノ凡ての値ヲ以テ互ニ相等シケレバ任意ノ文字ノ種々ノ自乘ノ係數ヲ等シトシ方程式ヲ作ルヲ得、

上ノ定理ハ限リナキ項數ノ二式ニ於ケルモ亦タ眞ナリ然レ𪜈斯ノ如

キ式ノ攷究ハ本書ノ程度ノ外ナリ、

**第二百六十七款**　或ル式ノ中ニ含有スル何レノ二ツノ文字ヲ彼此交換スルモ其式變セザル𪜈ハ之ヲ對稱式ト稱ス、

例ヘバ，$a-b$ 及ビ $a^2+b^2$ ハ $a$ ト $b$ ニ關係シテ對稱式ナリ何トナレバ此何レノ式モ $a$ ヲ $b$ ニ代ヘ及ビ $b$ ヲ $a$ ニ代ユルモ變化セザレバナリ、

又 $a+b+c$ 及ビ $a^3+b^3+c^3+3abc$ ハ $a, b, c$ ノ三字ノ何レノ二ツ、ニ關係スルモ對稱式ナリ、

$a, b, c$ ノ三字ニ關係シテ一次ノ對稱式ハ唯一アルハ明ラカナリ即チ $pa+pb+pc$ ナリ但シ此 $p$ ハ或ル數字係數トス、

**第二百六十八款**　三ツノ文字 $a, b, c$ ヲ有ツ因數ヲ排列スルニ $a$ ヲ $b$ 或ハ $c$ ノ前ニ置キ $b$ ヲ $c$ ノ前ニ置クハ初學ノ爲ニ最モ善キ方法ナリ然レ𪜈稍々進歩シタル學生ニ至テハ然ラズ、

此最モ善キ排列ハ $a$ ハ $b$ ニ先ンジ、$b$ ハ $c$ ニ先ンジ又 $c$ ハ $a$ ニ先ンズル樣ナリタル時ナリ、　此後三ツノ文字例ヘバ $a, b, c$ ノ如キモノニ就テハ此排列法ニ從フモノト知ルベシ、

例ヘバ、$bc+ca+ab$ ト記ルス此所ニ $a$ ヲ有セザル項ヲ第一ニ置キ，$b$ ヲ有セザル項ヲ其次ニ置ケリ此類ノ排列法ニ常ニ注意スベキナリ、

**第二百六十九款**　今前款ニ於テ證明セシ諸定理ノ應用ヲ示サン爲ニ數例ヲ設ク、

例一、$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5$ ハ $(b-c)(c-a)(a-b)$ ヲ以テ除セラルベキヲ證セヨ、

若シ次式 $b=c$. トスレバ

$$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(i)},$$

其結果ハ　$(c-a)^5+(a-c)^5$,



此レ即チ零ナリ、

故ニ $(b-c)$ ハ (i) ノ因數ナリ之ト同樣ニテ $c-a$ 及ビ $a-b$ ノ各々因數ナルヲ證シ得ベシ、

故ニ (i) ハ $(b-c)(c-a)(a-b)$ ニテ除セラルベキナリ、

例二、次式ヲ證セヨ、

$$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3=24abc.$$

若シ $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3 \ldots \text{(i)}$, ナル式ニ於テ $a=0$ トスレバ其結果ノ消失スルヲ見ルヿ容易ナリ、

故ニ $a$ ハ (i) ノ因數ナリ、

又同樣ニ $b$ 及ビ $c$ モ各々 (i) ノ因數ナリ、

偖テ (i) ハ第三次ノ式ナリ故ニ只三ツノ因數ヲ有スルヲ得ルノミ、然ラハ其因數ハ $abc$ カ或ハ $abc$ ニ或ル數ヲ乘ジタルモノニ等シ、

故ニ　$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$

$$=Labc \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(ii)}$$

此 $L$ ハ或ル數ニシテ $a, b, c$ ノ何タルニ拘ラズ常ニ相同ジキモノナリ、

然ラバ $a, b, c$ ノ各ニ特別ノ値ヲ命ズレバ $L$ ノ値ヲ發見シ得ベシ、

例ヘバ、$a=b=c=1$. トスル時ハ (ii) ハ次ノ如クナル

$$3^3-1^3-1^3-1^3=L$$

$$\therefore\ L=24.$$

又 (ii) ノ左邊ニ於ケル $abc$ ノ係數ヲ實際ニ發見シテ以テ $L$ ノ値ヲ求ムルヲ得ベシ、　第二百五十六款ニヨリ $(a+b+c)^3$ ニ於ケル $abc$ ノ係數ハ $\dfrac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|1}\,\underline{|1}}=6$ ナリ而テ同樣ニ他ノ各立方ニ於テ $abc$ ノ係數ハ $-6$ ナリ故ニ全キ係數ハ 24 ナリ然ルニ右邊ノ係數ハ $L$ ナリ故ニ前ノ如ク $L=24$ ナリ、

例三、 $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$ ノ因數ヲ求ム、

次式ニ於テ若シ $b=c$ トセバ

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$

此結果ハ $c^3(c-a)+c^3(a-c)$

コレハ零ナルヿ明ラカナリ、

此ニ由テ $b-c$ ハ與ヘラレタル式ノ因數ナリ而テ同法ニ依テ $c-a$ ト $a-b$ モ亦タ各々因數ナルヲ證シ得ベシ、

借テ與ヘラレタル式ハ四次ナリ然ラバ既ニ發見セシ三ツノ因數ノ外ニ尚ホ一次ノ因數一ツアルベシ此因數ハ $a, b, c$ ニ關係シテ對稱式ナリ故ニ $a+b+c$ ナラザルヲ得ズ、

此ニ由テ與ヘラレタル式ハ

$$L(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

ニ等シカルベシ但シ此 $L$ ハ數ナリ、

此ニ於テ $a, b, c$ ニ各々特別ノ値ヲ命ズルカ或ハ又 $a^3$, ノ係數ヲ比較スレバ $L$ ノ値ヲ求メ得ベシ乃チ $b-c=-L(b-c)$ ナリ故ニ $L=-1$ ナリ、

此故ニ

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

例四、 $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單セヨ、

此分母ノ最低公倍數ハ $(b-c)(c-a)(a-b)$ ナリ、

故ニ與ヘラレタル式ハ次式ニ等シ

$$\frac{-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)}{(b-c)(c-a)(a-b)}.$$

已ニ此結果ヲ得レバ形狀上ヨリ吾人ハ自ラ分母ノ因數ノ何レカガ亦分子ノ因數ナルヤヲ試ミントスルノ念ヲ起スベシ而シテ前例ニ準シ之ヲ



探求スレバ終ニ分子ハ分母ト同一ナルヲ發見ス故ニ與ヘラレタル式ハ一ニ等シ

**第二百七十款** 次ニ揭グルモノハ緊要ナル恒式ナリ、

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

又次式ヲ記臆スベシ

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=\tfrac{1}{2}\{(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2\}.$$

又 $a+b+c$ ハ $a^3+b^3+c^3-3abc$, ノ一因數ナルヲ以テ若シ $a+b+c=0$ ナラバ $a^3+b^3+c^3+3abc=0$ ナルヲ知ルベシ、

此故ニ $a+b+c=0$ ニ適合スル $a, b, c$ ノ凡テノ値ニ對シテ $a^3+b^3+c^3=3abc$ ナリ、

之ヲ換言スレバ, 三量ノ和若シ零ナラバ其三量ノ各ノ立方ノ和ハ其三量ノ積ノ三倍ニ等シ、

例ヘバ $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3=3(b-c)(c-a)(a-b)$

$$(b+c-2a)^3+(c+a-2b)^3+(a+b-2c)^3$$
$$=3(b+c-2a)(c+a-2b)(a+b-2c)$$

亦タ $(x-a)(b-c)+(x-b)(c-a)+(x-c)(a-b)=0$

ナルヲ以テ

$$(x-a)^3(b-c)^3+(x-b)^3(c-a)^3+(x-c)^3(a-b)^3$$
$$=3(x-a)(x-b)(x-c)(b-c)(c-a)(a-b).$$

**第二百七十一款** 二ツ以上ノ未知量ノ値ヲ確定スル爲ニハ二ツ以上ノ方程式ナカルベカラザルハ既ニ之ヲ示セリ、然レ𪜈此事タル若シ未知量ノ値ニ或ル方法ヲ以テ制限ヲ設クルガ如キ場合ニ於テハ正當ナラザルナリ、

例ヘバ一個ノ方程式 $3x+4y=10$ アリテ此 $x$ ト $y$ トハ正ノ整數ナリト制限スレバ此方程式ニ適合スル値ノ組合ハ唯一アルノミ即チ $x=2$

$y=1.$ ナリ、

又 $(x-a)^2+(y-b)^2=0$ ノ方程式アリテ此中ニ含メル凡テノ量ハ實量ナルモノトノ制限ヲ設クレバ $x=a$ 及ビ $y=b$ ナルヿヲ決定シ得何トナレバ凡テ實量ノ平方ハ正ナルベク又二ツノ正量ノ和ハ其量俱ニ零ナルニアラザレバ零トナル能ハザレバナリ、

其他ノ例ハ第百八十六款ニ攷究セシモノナリ、

例、　若シ $a, b, c, d$ ハ皆ナ實量ニシテ且ツ

$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=4(ab+bc+cd)$$

ナル時ハ $a=b=c=d$ ナルベキヲ證セヨ、

先ヅ　$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2-4(ab+bc+cd)$ ナル式ヲ二ツ或ハ二ツヨリ多クノ平方ノ和ノ形狀ニ變ゼザルヲ得ズ乃チ下式ヲ得、

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2=0.$$

然ラバ $a-b, b-c,$ 並ニ $c-d$ ハ皆ナ實量ナルベキヲ以テ次ノ如シ、

$$a=b,\ b=c,\ 及ビ\ c=d.$$

## 第二百七十二款　次ニ掲グルモノハ緊要ナル例ナリ、

例一、　二ツノ正量ノ和定マレル時其積ノ最大ノ値ヲ求ム、

此定マリタル和ヲ $2a$ トス、然ラバ若シ一ツノ量ヲ表ハスニ $a+x$ ヲ以テセバ他ノ一量ハ $a-x$ ニテ表ハスベシ從テ其積ハ $a^2-x^2$ ナルベシ、

偖テ $a$ ハ定マリタルモノナレバ $a^2-x^2$ ハ $x=0$ ナル時其値最大ナリ、而テ此場合ニ於テ二ツノ量ハ相等シ、

此故ニ、二ツノ正量ノ和定マレル時其積ハ二量相等シキ時最大ナリ、

例二、　二ツノ正量ノ積定マレル時其和ノ最小ノ値ヲ求ム、

今 $(x+y)^2=4xy+(x-y)^2$ ナルヨリ $(x+y)^2$ ハ決シテ $4xy$ ヨリ小ナ



ラザルヲ知ル而シテ $(x+y)^2$ ハ $x=y$ ナル時 $4xy$ ニ等シキヲ知ルベシ、

是ニ依テ若シ二ツノ正量ノ積定マレル時其和ハ二量相等シキ時最小ナリ、

例三、　$x+\frac{a^2}{x}$ ノ最小ノ値ヲ求ム、

$2s$ ヲ以テ此和ヲ表ハス時ハ

$$x+\frac{a^2}{x}=2s.$$

即チ

$$x^2-2sx+a^2=0$$

故ニ

$$x=s\pm\sqrt{s^2-a^2}.$$

偖テ $x$ ハ實量ナル故ニ $\sqrt{s^2-a^2}$ モ亦タ實量ナラザルベカラズ故ニ $s$ ハ $a$ ヨリ小ナルヿ能ハズ、

是ニ依テ $x$ ノ實量ニシテ且ツ正量ナル時 $x+\frac{a^2}{x}$ ノ最小ノ値ハ $2a$ ナリ、

例四、　任意ノ二ツノ正量ノ等差均數ハ其等比均數ヨリ大ナリ、

此二量ヲ $a$ 及ビ $b$ トス、

然ラバ其等差均數ハ $\frac{1}{2}(a+b)$ ニシテ等比均數ハ $\sqrt{ab}$ ナリ、

故ニ本題ハ次ノ關係アルヲ證スルヲ要スルナリ

$$\tfrac{1}{2}(a+b)>\sqrt{ab}$$

或ハ

$$(a+b)^2>4ab$$

或ハ

$$(a-b)^2>0$$

然シテ此最后ノモノハ正當ナリ何トナレバ $(a-b)^2$ ハ必ワズ正ナルベケレバナリ、

## 第二百七十三款　是ヨリ任意ノ代數式ノ立方根ヲ求ムルノ方法如何ヲ說明シ以テ本編ヲ終ヘントス、

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

ナルハ既ニ之ヲ知レリ故ニ二項式ノ立方ハ四項ヲ有ス、又立方式ヲ一定ノ文字ノ自乘ニ從ヒ排列スルトキハ其兩端ノ二項ノ各ノ立方根ハ即チ原ノ二項式ノ各項ナリ、

又逆ニ　若シ完全ノ立方式アリテ一定ノ文字ノ自乘ニ從ヒ排列セル四項ヲ有スルトキハ其式ノ立方根ハ兩端ノ各項ノ立方根ノ和ナリ、

此ニ由テ任意完全立方式ノ立方根ハ其式四項ノミヲ有スレバ觀察ニ依テ直チニ之ヲ書キ著ハスヿヲ得ベシ、

例ヘバ $27a^6-54a^5b+36a^4b^2-8a^3b^3$ ノ立方根ヲ求ム、

此式ノ兩端ノ各項ノ立方根ハ $3a^2$ ト $-2ab$ ナリ

故ニ要スル所ノ立方根ハ $3a^2-2ab$ ナリ、

又 $a^9-6a^6b^2+12a^3b^4-8b^6$ ノ立方根ハ $a^3-2b^2$ ナリ

**第二百七十四款**　或ル一定ノ文字ノ三ツノ異ナル自乘ノミヲ有スル代數式ヲ其文字ノ自乘ニ從テ排列スル時ハ其項ハ四ツアルノミ、

例ヘバ

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2.$$

ナル式ハ $a$ ノ相異ナル項只三ツヲ有ス即チ $a, a^2, a^3$ ヲ有スルノミ今之ヲ $a$ ノ自乘ニ從テ排列スレバ

$$a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)+(b^3+c^3+3b^2c+3bc^2)$$

即チ　$a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3.$

故ニ此式ハ上款ニ於テ攷究セシ場合ニ屬スルモノナリ而シテ其立方根ハ $a+b+c$ ナリ、

**第二百七十五款**　今最モ廣通ナル場合ニ就テ攷究セントス、

今 $(A+B)^3$ ノ立方根ヲ求ムト假定ス、此 $A$ ハ根ノ中ノ若干項ヲ表ハシ $B$ ハ其余ノ項ヲ表ハスモノナリ而シテ $A$ 及ビ $B$ ノ中ニアル諸



項ヲ各々一定ノ文字ノ遞昇(或ハ遞降)ノ自乘ニ從テ排列スレバ $A$ ノ中ノ何レノ項モ $B$ ノ中ノ項ヨリ其文字ニ就テハ高次(或ハ低次)ナルモノトス、

又、$A$ ノ中ノ各項ヲ前知シテ $B$ ノ中ノ各項ヲ求ムルヲ要スルト假定ス、

今 $(A+B)^3$ ヨリ $A^3$ ヲ減ズルトキハ次ノ殘リヲ得、

$$(3A^2+3AB+B^2)B.$$

又排列ノ法ヨリ此殘式中ノ最高(或ハ最低)次ノ項ハ乃ハチ $3\times$($A$ ノ初項ノ平方)$\times$($B$ ノ初項)ナルヲ知ル、

此ニ由テ要スル所ノ根ノ次項即チ $B$ ノ中ノ最高(或ハ最低)次ノ項ヲ得ンニハ次ノ如クスベシ、

全たき式より根の中にて既に發見したるものゝ立方を減じ殘式の初項を根の初項の平方の三倍にて除すべし、

是レ即チ根ノ初項ヲ知リテ之ニ續ク各項ヲ求ムル方法ナリ而シテ根ノ初項ハ與ヘラレタル式ノ初項ノ立方根ナルヿハ明ラカナリ、

今　$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6$　ノ立方根ヲ要スルノ題ヲ以テ立方根ヲ求ムル演算ノ方法ヲ説明スル下ノ如シ、

$$x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6.$$

$$(x^2)^3=x^6$$

$$(x^2-2xy)^3=x^6-6x^5y+12x^4y^2-8x^3y^3$$

$$(x^2-2xy+3y^2)^3=x^6-6x^5y+21x^4y^2-44x^3y^3+63x^2y^4-54xy^5+27y^6.$$

先ヅ與ヘラレタル式ノ初項ノ立方根ヲ求ム乃チ $x^2$ ヲ得之ヲ要スル所ノ根ノ第一項トス、

次ニ與ヘラレタル式ヨリ $x^2$ ノ立方ヲ減ジ殘式ノ初項即チ $-6x^5y$ ヲ

$3\times(x^2)^2$ ニテ除スレバ $-2xy$ ヲ得之ヲ根ノ第二項トス、

次ニ與ヘラレタル式ヨリ $x^2-2xy$ ノ立方ヲ減ジ殘式ノ初項即チ $9x^4y^2$ ヲ $3\times(x^2)^2$ ニテ除スレバ $3y^2$ ヲ得之ヲ根ノ第三項トス、

次ニ又與ヘラレタル式ヨリ $x^2-2xy+3y^2$ ノ立方ヲ減ズレバ殘式ナシ、

是ニ由テ與ヘラレタル式ハ $(x^2-2xy+3y^2)^3$ ナリ故ニ要スル所ノ根ハ $x^2-2xy+3y^2$ ナリ、

$x^2, x^2-2xy$ 等ノ各立方ヲ與ヘラレタル式ノ下ニ記スルニ當リテ同類項ヲシテ同行ニアラシメバ其各立方ヲ減ジタル殘式ヲ得ルニ便ナリ、

又各立方ヲ別々ニ求ムル代リニ其前ノ立方ヲ用ユレバ勞ヲ省クヿアレ𪜈之ヲ緊要ナルモノトナシテ此所ニ揭グル程便利ナルモノニハアラズ、

**第二百七十六款**　一式ノ四乘方根ハ其式ノ平方根ノ平方根ヲ求ムレバ之ヲ得ベク又六乘方根ハ其立方根ノ平方根ヲ求ムレバ之ヲ得ベシ其他類推スベシ、

或ル代數式ノ幾乘方根ニテモ要スル處ノ者ヲ求ムルニハ前款ニ準ジ之ヲ解スレバ困難アルヿナシ、

今二項定理ニ基ツキ任意ノ代數式ノ第 $n$ 乘方根ヲ求ムル法則ヲ次ニ示スベシ、

其代數式ヲ或ル文字ノ遞降自乘ニ從テ排列シ其初項ノ $n$ 乘方根ヲ求ムレバ要スル所ノ根ノ第一項ヲ得ベシ、

又根ノ若干項ヲ求メ得タル時ソノ $n$ 自乘積ヲ與ヘラレタル式ヨリ減ジ殘式ノ初項ヲ根ノ初項ノ $(n-1)$ 自乘積ノ $n$ 倍ニテ除スレバ根ノ中ニテ既ニ得タル項ノ次項ヲ得ベシ、

立方以上ノ乘方根ハ視察ニヨリテ容易ニ求メ得ラルヽモノヽ外ハ之ヲ要スルヿ極メテ稀ナリ、



# 第六十例題

1. 下式ヲ證セヨ、　$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
$$=bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(b-c)(c-a)(a-b).$$

2. 下式ヲ證セヨ、　$a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab).$$

3. 下式ヲ證セヨ、　$(b-c)^5+(c-a)^5+(a-b)^5$
$$=5(b-c)(c-a)(a-b)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

4. 下式ヲ證セヨ、
$$(a+b+c)^4-(b+c)^4-(c+a)^4-(a+b)^4+a^4+b^4+c^4$$
$$=12abc(a+b+c).$$

5. 下式ヲ證セヨ、　$a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c).$$

6. 下式ヲ證セヨ、　$b^2c^2(b-c)+c^2a^2(c-a)+a^2b^2(a-b)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

7. 下式ヲ證セヨ、　$a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$
$$=-(b-c)(c-a)(a-b)(bc+ca+ab).$$

8. 下式ヲ證セヨ、　$a^4(b^2-c^2)+b^4(c^2-a^2)+c^4(a^2-b^2)$
$$=-(b+c)(c+a)(a+b)(b-c)(c-a)(a-b).$$

9. $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$.　ノ因數ヲ求ム、

10. $a(b+c-a)^2+b(c+a-b)^2+c(a+b-c)^2$
$+(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.　ノ因數ヲ求ム、

11. $a^2(b+c-a)+b^2(c+a-b)+c^2(a+b-c)$
$-(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.　ノ因數ヲ求ム、

12. $a(b+c)(b^2+c^2-a^2)+b(c+a)(c^2+a^2-b^2)$

$+c(a+b)(a^2+b^2-c^2).$ ノ因數ヲ求ム、

13. $(x+y+z)^{2n}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}$ ハ

$(y+z)(z+x)(x+y)$ ニテ除シ盡シ得ルコトヲ證セヨ而シテ

$n=1$ 及ビ $n=2$ ナル時其商ヲ求ム、

14. $(x+y)^3-x^3-y^3=3xy(x+y)$ ナルヲ證セヨ、

又 $(x+y)^5-x^5-y^5=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$ ナルヲ證セヨ、

15. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ、

16. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ、

17. $\dfrac{1}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ、

18. $\dfrac{1}{a^2(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{b^2(b-c)(b-a)}+\dfrac{1}{c^2(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ、

19. $\dfrac{b+c}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ、

20. $\dfrac{b+c}{a(a-b)(a-c)}+\dfrac{c+a}{b(b-c)(b-a)}+\dfrac{a+b}{c(c-a)(c-b)}$ ヲ簡單ニセヨ、

21. $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{1}{(b-c)(b-a)(x+b)}$

$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\dfrac{1}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ ヲ證セヨ、

22. $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x+b)}$

$+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\dfrac{-x}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ ヲ證セヨ、

23. $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(x+a)}+\dfrac{b^2}{(b-c)(b-a)(x+b)}$

$+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(x+c)}=\dfrac{x^2}{(x+a)(x+b)(x+c)}$ ヲ證セヨ、

24. $\dfrac{(b^2-c^2)^3+(c^2-a^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3}$ ヲ簡單ニセヨ、

25. 下式ヲ證セヨ、



(i) $a+b=\dfrac{a^2}{a-b}+\dfrac{b^2}{b-a}.$

(ii) $a+b+c=\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}.$

(iii) $a+b+c+d=\dfrac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^4}{(b-c)(b-d)(b-a)}$

$+\dfrac{c^4}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\dfrac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}.$

26. $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^3}{(b-c)(b-d)(b-a)}$

$+\dfrac{c^3}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\dfrac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1$

27. $\dfrac{bcd}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{cda}{(b-c)(b-d)(b-a)}$

$+\dfrac{dab}{(c-d)(c-a)(c-b)}+\dfrac{abc}{(d-a)(d-b)(d-c)}=1$ ヲ證セヨ、

28. $\dfrac{bc}{(a-b)(a-c)}(x-a)^2+\dfrac{ca}{(b-c)(b-a)}(x-b)^2$

$+\dfrac{ab}{(c-a)(c-b)}(x-c)^2=x^2.$ ヲ證セヨ、

29. 下式ヲ證セヨ、 $(b+c)^2+(c+a)^2+(a+b)^2-(c+a)(a+b)$

$-(a+b)(b+c)-(b+c)(c+a)=a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab.$

30. $(b+c)^3+(c+a)^3+(a+b)^3-3(b+c)(c+a)(a+b)$

$=2(a^3+b^3+c^3-3abc).$ ヲ證セヨ、

31. 下式ヲ證セヨ、 $(b+c-a)^3+(c+a-b)^3$

$+(a+b-c)^3-3(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)=4(a^3+b^3+c^3-3abc).$

32. 下式ヲ證セヨ、 $(x^2+2yz)^3+(y^2+2zx)^3$

$+(z^2+2xy)^3-3(x^2+2yz)(y^2+2zx)(z^2+2xy)=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2$

33. $x^2+y^2+z^2=(yz+zx+xy)$ ナル時ハ $x=y=z$ ナルヲ證セ、

34. 下ノ各式ヲ證明セヨ、

(i) $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$ ナル時ハ $a=b.$

(ii) $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ ナル時ハ $a=b=c$

(iii) $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ ナル時ハ $a=b=c=d$.

(iv) $n(a^2+b^2+c^2+\dots)=(a+b+c+\dots)^2$ ナル時ハ $a=b=c=\dots$

但シ $n$ ハ文字ノ數ナリ

35. $x+\frac{1}{x}$ ノ最小ノ値ハ 2 ナリ, $x+\frac{4}{x}$ ノ最小ノ値ハ 4 ナリ, 又 $x+\frac{9}{x}$ ノ最小ノ値ハ 6 ナルコトヲ證セヨ、 但シ $x$ ハ實數ニシテ且ツ正數ナルモノトス、

36. $\frac{x^2-3x+4}{x^2+3x+4}$ ハ $x$ ノ値實數ナラバ 7 ヨリ大ナル能ハズ又 $\frac{1}{7}$ ヨリ小ナル能ハザルコトヲ證セヨ、

37. 若シ若干ノ正量ノ和不易ナレバ其連乘積ハ各量相等シキ時最大ナルベシ

38. 若シ若干ノ正量ノ連乘積不易ナレバ其和ハ各量相等シキ時最小ナルベシ

39. 若シ $\frac{yz-x^2}{y+z}=\frac{zx-y^2}{z+x}$ ナル時ハ各分數ハ $\frac{xy-z^2}{x+y}$ ニ等シク又 $x+y+z$ ニ等シキコトヲ證セヨ、

40. 若シ $\frac{ad-bc}{a-b-c+d}=\frac{ac-bd}{a-b-d+c}$ ナル時ハ $a=b$ 或ハ $c=d$ 或ハ $a+b=c+d$ ナル可シ、

41. 若シ $(a-\alpha)^2x+(a-\beta)^2y+(a-\gamma)^2z=(a-\delta)^2$

$$(b-\alpha)^2x+(b-\beta)^2y+(b-\gamma)^2z=(b-\delta)^2$$

$$(c-\alpha)^2x+(c-\beta)^2y+(c-\gamma)^2z=(c-\delta)^2$$

ノ方程式ヨリ $x, y, z$ ヲ求ムル時ハ $d$ ノ値ノ何タルニ拘ラズシテ

$$(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$$

ナルベキヲ證セヨ、

42. 若シ方程式 $\frac{a}{x+a}+\frac{b}{x+b}=\frac{c}{x+c}+\frac{d}{x+d}$ ニ一對ノ等根アル時ハ



$a$ 或ハ $b$ ノ一量ハ $c$ 或ハ $d$ ノ一量ニ等シキカ或ハ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ ナリ 又其根ハ $-a, -a, 0$ カ $-b, -b, 0$ カ或ハ $0, 0, -\frac{2ab}{a+b}$ ナルコトヲ證セヨ、

43. $2(x^2+x'^2-xx')(y^2+y'^2-yy')=x^2y^2+x'^2y'^2$ ナル時ハ $x=x'$ 及ビ $y=y'$ ナル可シ、

44. $a(a+d)(a+2d)(a+3d)+d^4$ ハ完全ノ平方ナルコトヲ證セヨ、

45. 次ノ各式ノ立方根ヲ求ム、

(i) $x^3-24x^2y+192xy^2-512y^3$.

(ii) $1+3x+6x^2+7x^3+6x^4+3x^5+x^6$.

(iii) $x^6-9x^5+33x^4-63x^3+66x^2-36x+8$.

(iv) $8x^6-36x^5+102x^4-171x^3+204x^2-144x+64$.

46. $(y+z)(z+x)(x+y)+xyz=xyz(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$. ナルヲ證セヨ、

47. 若シ $a, b, c, x$ ハ皆ナ實量ニシテ、

$$(a^2+b^2)x^2-2b(a+c)x+b^2+c^2=0$$

ナル時ハ $a, b, c$ ハ等比級數ニシテ $x$ ハ其公比ナリ、

48. $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots\dots$(因數ノ數$n$ニ至ル)$=\frac{1-x^{2^n}}{1-x}$ ナルヲ證セヨ、

49. $s=a+b+c$ ナル時下式ヲ證セヨ、

$$(as+bc)(bs+ca)(cs+ab)=(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

50. $a+b+c+d=0$ ナル時ハ

$$(a^3+b^3+c^3+d^3)^2=9(bcd+cda+dab+abc)^2.$$
$$=9(bc-ad)(ca-bd)(ab-cd)$$
$$=9(b+c)^2(c+a)^2(a+b)^2.$$

ナルベシ、

# 試　驗　問　題　集

## 第　一

ケンブリッヂ地方試驗　　幼年生　　1885.

1. 次ノ二式ヲ各々簡單ナルモノニ化セヨ、

$$3a-2(b-c)-\{2(a-b)-3(c+a)\}-\{9c-4(c-a)\}$$

及ビ　$$12\left(\frac{x+y}{2}-\frac{y-2x}{6}\right)-8\left(\frac{3y-x}{2}-\frac{3x+2y}{4}\right).$$

2. $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$ ト $x^3+3x^2y+3xy^2-y^3$.

ノ積ヲ求ム、

二式ノ積ハ $x^8+x^4y^4+y^8$ ニシテ其一ハ $x^2-xy+y^2$ ナル時ハ余ノ一式如何、

3. 次ノ二ツノ恒式ヲ證明セヨ、

$$(x+y+z)^3=(x+y-z)^3+(x-y+z)^3+(-x+y+z)^3+24xyz$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{b}\right)\left(1-\frac{c}{b}\right)}+\frac{1}{\left(1-\frac{a}{c}\right)\left(1-\frac{b}{c}\right)}=1.$$

4. $(2x+1)(2x+3)(2x+5)(2x+7)+16.$ ノ平方根ヲ求ム、

5. 二ツノ代數式ノ最小公倍數ヲ求ムル法則ヲ述ベ且ツ證セヨ、又 $x^{11}+x^4$ ト $x^{16}+x^7$. ノ最小公倍數ヲ求ム、

6. 次ノ各方程式ヲ解セヨ、

(1) $(3x-1)(4x+5)-(x-2)(2x+1)=(2x+3)(5x-2)+12.$

(2) $\frac{x-y}{3}-\frac{2y-3x}{6}=8,\quad \frac{x}{6}-\frac{y}{3}=1.$

(3) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}=\frac{6}{x}.$

7. 鷄卵商アリ鷄卵若干ヲ二十個ニ付一しるりんぐ四ぺんすノ割合ニテ買ヒ次ニ又前ノ數ノ五倍ヲ百個ニ付六しるりんぐ三ぺんすノ割合ニテ買ヒ其後十二個ニ付十ぺんすの割合ニテ悉ク之ヲ賣リシニ一ぱうんど七志るりんぐノ利益アリシト云フ此商人買賣セシ鷄卵ノ數幾何ナリヤ、



8. 一隊ノ兵士ヲ以テ恰モ充實セル方陣ヲ作リ得ベシ又四列ノ中空ノ方陣ヲモ作リ得ベシト云フ而シテ後ノ方陣ノ前面ノ人數ハ初メノ方陣ノ前面ノ人數ヨリ二十五人多シト云フ此一隊ノ兵士ノ數幾何ナリヤ、

9. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

(1) $\frac{b}{x-a}+\frac{a}{x-b}-2=0.$　　(2) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2},\quad x^2+3y^2=28.$

10. 等差級數ノ $n$ 項ノ和ヲ求ム、級數 21, 18, 15, ......ノ幾項ノ和ガ 81 トナルヤ、

若シ $a, b, c$ ハ等比級數ヲナシ $x$ ハ $a, b,$ ノ等差均數又 $y$ ハ $b, c$ ノ等差均數ナラバ次ノ關係アルヲ證セヨ、

$$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2.$$

11. $m$ 個ノ物ヲ一度ニ $r$ 個宛取リタル配合ノ數ヲ求ム、

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ノ數字內ヨリ五ツヲ取リテ組立ツル總テノ整數ノ和ヲ求ム、但シ各整數ノ內ニ同ジ數字ヲ一度ヨリ多ク用ヰザルモノトス、

12. 二項定理ヲ述ベヨ、又定理ニ依テ $(a-2x)^{12}$ ノ第七項ヲ求メ又 $(1+x)^{2n}$ ノ中項ハ次ノ如クナルヲ示セ、

$$\frac{1.3.5...(2n-1)}{\underline{|n}}(2x)^n.$$

## 第　二

ケンブリッヂ地方試驗　　成年生　　1885.

1. 次ノ各方程式ヲ解セヨ、

(i) $\frac{x^2+1}{x-1}+\frac{x^2-2}{x-2}=2x,$

(ii) $\frac{ax+b}{cx+b}+\frac{bx+a}{cx+a}=\frac{(a+b)(x+2)}{cx+a+b}.$

(iii)　$x\sqrt{x^2+12}+x\sqrt{x^2+6}=8,$

(iv)　$3x^2+5xy=22,$

$11xy+3y^2=19.$

2. 一數アリ二ツノ數字ヨリ成ル其一數字ハ他ノ三倍ナリ今此數ノ數字ヲ轉置シ一數ヲ作レバ其二數ノ差ハ十八ナリ依テ各數ヲ求ム、

3. 若シ $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$ ナル時ハ此各分數ハ次式ニ等シキヲ證セヨ、

$$\left\{\frac{\lambda_1a_1{}^m+\lambda_2a_2{}^m+\dots+\lambda_na_n{}^m}{\lambda_1b_1{}^m+\lambda_2b_2{}^m+\dots+\lambda_nb_n{}^m}\right\}^{\frac{1}{m}}.$$

若シ $\frac{x}{a+2b+c}=\frac{y}{2a+b-c}=\frac{z}{4a-4b+c}$ ナル時ハ

$\frac{a}{x+2y+z}=\frac{b}{2x+y-z}=\frac{c}{4x-4y+z}.$ ナルヲ證セヨ、

4. 差比級數ヲナセル $n$ 量ノ和ヲ求ム、　又差等級數ヲナセル $n$ 量ノ和ノ範式ヲ書キ著ハセ、

次ノ各級數ノ六項ノ和ヲ求ムルニ此範式ヲ應用セヨ、

(i) $1-3+9-27+\dots,$　　(ii) $1-3-7-11-\dots$

自然數ノ初メ $n$ 個ノ平方ノ和ハ $20n$ ニ等シト云フ此 $n$ ナル數ヲ求ム、

5. 錯列ノ數ニ就テノ範式ヲ用井ルコトナクシテ $n$ 個ノ物ヲ一度ニ $r$ 個宛取リタル配合ノ數ヲ求メヨ、

次ノ各種ノ貨幣一枚ツヽヲ以テ幾種ノ金額ヲ作リ得ルヤ、

ぺんにー、しっくすぺんす、しるりんぐ、はーふくろうん、くろうん、そべりん、

[第六及ビ第七ノ二問ハ此書ノ程度ニ越ユルモノナレバ之ヲ省ク]

第　三

ケンブリッヂ高等地方試驗　　　1881.

1. $a=5, b=3, c=2,$ ナラバ $a^3-b^3-c^3-3abc$ 及ビ $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}$



ノ値ヲ求ム、

2. 二ツノ代數式ノ最高公除數ヲ求ムル法則ヲ解明セヨ、

$x^4-11x^2+49$ ト $7x^4-40x^3+75x^2-40x+7.$　ノ最高公除數ヲ求ム、

3. 次ノ分數ヲ最簡ノ形狀ニ化セヨ、

$$\frac{(a^2+2bc)^3+(b^2+2ca)^3+(c^2+2ab)^3-3(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}{(a^2-bc)^3+(b^2-ca)^3+(c^2-ab)^3-3(a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)}.$$

4. 次ノ方程式ヲ解セヨ、

$$\left.\begin{array}{l}7x+11y=68\\9x-4y=33\end{array}\right\},\qquad 2x^2-11x=63,\qquad \left.\begin{array}{l}x^2-y^2=8x-16,\\3xy=6x+7y.\end{array}\right\}$$

二數ノ和ハ 47 ニシテ其積ハ 312 ナル二數ハ如何、

5. 等比級數ヲナセル若干量ノ和ヲ求ム、

等比級數ヲナセル三量アリ其和ハ $\frac{7}{6}$ ニシテ其平方ノ和ハ $\frac{133}{36}$ ナリ各量如何、

6. $n$ 個ノ物ヲ一回ニ $r$ 個宛取リタル配合ノ數ヲ求ム、

$n$ 個ノ物ヲ一回ニ $r$ 個宛取リタル配合ノ數ハ $n$ 個ノ物ヲ一回ニ $2r$ 個宛取リタル配合ノ數ニ等シク又 $n$ 個ノ物ヲ一回ニ $r+1$ 個宛取リタル配合ノ數ハ $n$ 個ノ物ヲ一回ニ $r-1$ 宛取リタル配合ノ數ノ三分ノ十一ニ等シ然ラバ $n$ ト $r$ ノ値ハ如何、

7. 二項定理ヲ其指數ノ正ニシテ整數ナルモノニ就テ證明セヨ、

$(a+b)^{2n}$ ノ展開式ニ於テ第一、第三、等ノ係數ノ平方ノ和ト第二、第四、等ノ係數ノ平方ノ和トノ差ハ次式ノ如クナルヲ證セヨ、

$$\frac{2n(2n-1)\dots(n+1)}{1.2\dots n},$$

第　四

豫備試驗　　　1885年十月

1. 自乘、指數、及ビ項ノ界說ヲ述ベヨ、　又下式ヲ單簡ニセヨ、

$$a-2b-\{4a-(b-3c)+c\}.$$

2. 任意ノ二ツノ代數式ノ乘法ノ法則ヲ述ベヨ、

$x^3+9y^2+9z^2+3xy-3xz+9yz$ ニ $x-3y+3z$ ヲ乘ゼヨ、

3. $1+3a-24a^2+8a^4$ ヲ $4a^2-6a-1$ ニテ除セヨ、

4. 二ツノ代數上ノ分數ノ乘法ノ法則ヲ證明セヨ、

又次ノ各式ヲ單簡ニセヨ、

(i) $\dfrac{x^3-7x^2+12x-4}{x^4-5x^3+5x^2-15x+6}$.

(ii) $\dfrac{x^2-16y^2}{x^2-xy-12y^2}\times\dfrac{x^2-9y^2}{x^2+xy-12y^2}$.

5. 方程式ノ何レノ項ニテモ其符號ヲ變スレバ一邊ヨリ他邊ニ轉移セシムルヲ得ベキヲ證セヨ、

次ノ各方程式ヲ解セヨ、

(i) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x+9}=\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x+7}$.

(ii) $(b+c)x+(b-c)y=2ab,$

$(c+a)x+(c-a)y=2ac.$

6. 方程式 $x^2+ax+b=0$ ノ二ツノ根ノ積ハ $b$ ニ等シキヲ證セヨ、

次ノ方程式ヲ解セヨ、

(i) $(a-b)x^2+(b-c)x+c-a=0.$

(ii) $\sqrt{2x+10}+2\sqrt{x+6}=2.$

此各方程式ヨリ得タル根ヲ其原式ニ代用シ以テ汝ガ解法ノ正否ヲ撿セヨ、

7. 或人貨幣三十枚ヲ有ス其内若干ハしるりんぐニシテ其餘ハはあふ、くろうんナリ若シ此はあふ、くろうんヲしくすぺんすニ替へしるりんぐナぺんに一ニ替ユルトキハ總數二百三十四枚トナルベシト云フ此人ノ有スルしるりんぐ貨ノ數幾何ナリヤ、



8. 比及ビ比例ノ界説ヲ述ベヨ、

$1:2::x-2:x+3$ ヨリ $x$ ヲ求メヨ、

若シ $x:y::a:b$ ナラバ $(x^2-a^2)(y^2-b^2)=(xy-ab)^2$ ナルヲ證セヨ、

9. 等比級數ノ連續セル諸項ノ第一項ト公比トヲ與フ第 $n$ 項及ビ $n$ 項ノ和ヲ求メヨ、

此諸式ヲ用ヰテ級數 $3, 5, 8\frac{1}{3},\ldots\ldots$ ノ第五項及ビ五項ノ和ヲ求メヨ、

10. 級數 $1+1\frac{3}{4}+2\frac{1}{2}+\ldots\ldots$ ノ第十二項ニ至ルマデノ和ヲ求ム又級數 [illegible]$+\frac{3}{4}+$[illegible]$+\ldots\ldots$無究ニ至ルマデノ和ヲ求ム、

又 51 ト 191 トノ間ニ在ル凡テノ偶數ノ和ヲ求ム、

## 第　五、

ケンブリッヂ豫備試驗　　　　1885年十二月

1. 代數式、及ビ式ノ次ナル語ノ界説ヲ述ベヨ、又タ同次式トハ何ゾ、

$a=-3,\ b=-5,\ c=8$ ナルトキ $a^3+b^3+c^3-3abc$ ノ値ヲ求ム、

2. 若干ノ量ノ積ハ其因數ノ順序ヲ如何ニ取リテ相乘ズルモ相同シキヿヲ證明セヨ、

$(x-a)^3,\ (x+a)^3$ 及ビ $(x^2+a^2)^3$ ノ連乘積ヲ求ム、

3. (i) $16x^4-81$, (ii) $a^3-a^2-a+1$, (iii) $5x^2-8xy+3y^2$ ノ各ノ因數ヲ求ム、

4. 分數ノ値ハ其分子ト分母ニ同ジ量ヲ乘ズルモ變ゼザルヿヲ示セ、

次ノ各式ヲ單簡ニセヨ、

(i) $\dfrac{2-x}{1-2x}-\dfrac{2+x}{1+2x}-\dfrac{1-6x}{4x^2-1}$.　　(ii) $\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{3}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{1}{x+3}$.

5. 次ノ各方程式ヲ解セヨ、

## 試驗問題集

(i) $\frac{1}{2}(x-2)-\frac{x-5}{9}+5\frac{x-1}{6}=0.$　　(ii) $y+\frac{3}{x}+1=0,\ y+\frac{5}{x}=9.$

(iii) $\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}.$

6. 父子アリ其年齢ノ和ハ八十年ナリ又此二人ノ年ノ數ノ積ノ十二分ノ一ハ父ノ年ノ數ヨリ五十六多シト云フ各幾年ナリヤ、

7. $m, n, p$ ノ各々正數ナル時 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ ナルコ及ビ $(a^mb^n)^p=a^{mp}b^{np}$ ナルコヲ證明セヨ、

$x+243y^{\frac{5}{3}}$ ヲ $x^{\frac{1}{5}}+3y^{\frac{1}{3}}$ ニテ除セヨ、

8. 比ノ兩項ニ同ジ量ヲ加フレバ前ヨリモ尚ホ一ニ接近スルコヲ證セヨ、

$\frac{5}{8}$ ヨリ大ナル比ヲ得ン爲ニ $5:11$ ノ兩項ニ加フベキ最小ノ正整數ヲ求ム、

9. 若シ $a:b::ma+nc:mb+nd$ ナラバ

$c:d::ma-nc:mb-nd$ ナルコヲ證セヨ、

10. 二ツノ量ノ間ニ若干ノ等差均數ヲ容ルヽノ法ヲ示セ、

5ト$-9$ノ間ニ四十一ノ等差均數ヲ容レ，且ツ其和ヲ求メヨ、



## 答　　式

## 諸例題ノ答

I.
1. (i) 6, (ii) 59, (iii) 16.
2. (i) 9, (ii) 5, (iii) 9, (iv) 0, (v), 0, (vi) 11.
3. 16, 27, 64, 8, 4, 2.
4. (i) 7, (ii) $\frac{5}{2}$, (iii) 0, (iv) 0.　　**7** 8, 8.
8. (i) 7, (ii) 256, (iii) 2, (iv) 24.
9. 98, 98, 98, 98; 56, 56, 56, 56.
10. 3, $5\sqrt{5}$, 7, $\frac{3}{2}$, 4.

II.
1. (i) 1, (ii) $-1$, (iii) $-7$, (iv) $-10$.
2. (i) 1, (ii) 2, (iii) 0.
3. (i) $-7$, (ii) 7, (iii) 14.　**4.** $-b+a$, 1.
5. $-12$.　**6.** 120, $-30$.　**7.** $-\cdot005$.
8. $-5$ 分　**9.** $-10$ 度　**10.** 后者
11. 后者　**12.** 6, 0.　**13.** 0, 6; 6, 0.
14. 4, 0.　**15.** 0, 0.

III.
1. $-8ab$.　**2.** $12ab$.　**3.** $-a^4$.
4. $a^5$.　**5.** $a^3b^3$.　**6.** $2a^3b$.
7. $-x^3y^3$.　**8.** $-2x^4y^4$.　**9.** $-12a^3b^3$.
10. $10x^5y^5$.　**11.** $6a^7b^5c$.　**12.** $8a^7c^3$.
13. $6a^4x^3y^3$.　**14.** $-15a^4b^4c^4x^4y^4$.
15. $a^2, -a^3, a^4$.　**16.** $x^2, -y^3, z^4$.
17. $a^2b^2, -b^3c^3, x^4y^4$.　**19.** $9a^2b^4x^2, 4x^4y^2, 25a^2x^4$.

20. $-a^6b^3x^9$, $-27a^3x^6y^9$, 21. $a^2b^2$, $a^6b^6$, $-a^4b^7c^3$.

22. 128. 23. $-49$. 24. 1.

4 **IV.** 1. $-2$, $-\frac{5}{2}$, $\frac{2}{3}$. 2. $-a$, $-4a$, $-\frac{3}{2}ab$.

3. $2xy^2$. $-\frac{4}{3}ab$, $\frac{2}{3}x^3y$. 4. $ad$, $-abc^2d^2$.

5. $-2a^5b^4c^4$, $-4x^3y$, $-\frac{1}{3}xy$. 6. $8abc$.

六 **V.** 1. 17, 10. 2. 6. 3. 0, 0. 4. $\frac{5}{3}a^2b^2c^3$.

5. $-3bx^2y^3$. 6. (i) $\pm 4$, (ii) 3, (iii) $\sqrt{5}$, (iv) 37, (v) $-24$.

6 **VI.** 1. $2a$. 2. 0. 3. $a$. 4. $a^3-a$.

5. $3a-a^3$. 6. $2m^2-n^2$. 7. $4a^2-4ab+4b^2$.

8. 0. 9. 0. 10. $-a-b-c$. 11. $2x$.

12. $3a-10b+2$. 13. $-x^2y-2xy^2-3y^3$. 14. 0

7 **VII.** 1. $a+b$, $x+x^2$. 2. $3b-3a$, $3-3x^2$. 3. $b$, $2y$.

4. $-2x^2+6x-3$. 5. $3x^2-3x+1$.

6. $3x^2-2xy+y^2$. 7 $4x^3-x^2y-10xy^2+7y^3$.

8. $2a^3+5a^2b+4ab^2-3b^3$. 9. $2a^2b^2+5b^4$.

10. $2ab+2bc-ca$. 11. $-a^2-2b^2-c^2$.

12. $-4x^3+4x^2y-xy^2+y^3$.

8 **VIII.** 1. $-y+z$. 2. $a$. 3. 3. 4. 0. 5. 1.

6. 0. 7. $6x-y-5z$. 8. $x-2y+5z+8$.

9. $4a-4c$. 10. $6x-4y+3z$. 11. $-2a-b+4c$.

12. $2a-4b-3c+d$.



9 **IX.** 1. $x^2-4y^2$. 2. $a^2-\frac{1}{4}b^2$ 3. $1-a^3x^3$. 4. $-y^3+b^3$.

5. $x^3-9a^2x$. 6. $y^3-4b^2y$. 7. $x^2-y^2+2yz-z^2$.

8. $16a^2-4b^2+12bc-9c^2$. 9. $a^4+a^2+1$. 10. $a^4+1$.

11. $x^8+x^4+1$ 12. $x^4-x^2+1$.

13. $3x^4+5x^3y+8x^2y^2-8xy^3-8y^4$.

14. $-x^4+4x^3y-2x^2y^2-4xy^3-y^4$.

10 **X.** 1. (i) $4a^2+12ab+9b^2$. (ii) $a^4-10a^3b+25a^2b^2$.

(iii) $9x^2y^2-6xy^3+y^4$. (iv) $a^2+4b^2+9c^2-4ab-12bc+6ac$.

(v) $a^4-2a^3b+3a^2b^2-2ab^3+b^4$. (vi) $x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

(vii) $x^4-2x^3y+3x^2y^2-2xy^3+y^4$.

(viii) $b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2+2abc(a+b+c)$.

(ix) $a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$.

(x) $a^2+b^2+c^2+d^2-2ab+2ac-2ad-2bc+2bd-2cd$.

(xi) $x^6+2x^5+3x^4+4x^3+3x^2+2x+1$.

(xii) $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$.

2. (i) $x^4+x^2y^2+y^4$. (ii) $9x^4-x^2y^2+4xy^3-4y^4$.

(iii) $-x^2+2xz+y^2-z^2$. (iv) $a^6+a^4b^2-a^2b^4-b^6$.

11 **XI.** 1. $3a^4-5a^3b-12a^2b^2-ab^3+3b^4$ 2. $-x^4+6x^2y^2-y^4$.

3. $\frac{9}{4}x^4+2x^2+\frac{4}{9}$. 4. $a^3-3abc+b^3+c^3$.

5. $8a^3-18abc+27b^3+c^3$. 6. $a^4x^4-ax$. 7. $a^4-b^4$.

8. $x^8-y^8$. 9. $x^8+x^4y^4+y^8$. 10. $a^8+a^4+1$.

11. $2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4$.

## 答　　　式

12. $-x^3+2x^2y+3x^2z+4xy^2-12xyz+9xz^2-8y^3+12y^2z+18yz^2-27z^3$.

13. $x^8-2a^4x^4+a^8$.　14. $x^4+y^4$.　15. $a^4-a^2b^2+b^4$.

16. $8a^3+36a^2b+54ab^2+27b^3$, 及ビ $27a^3-54a^2b+36ab^2-8b^3$.

18. $a^3-8a^2+23a-26$.

**XII.** 1. $\frac{5}{4}x^2-\frac{7}{4}xy+y^2$.　2. $x+2y$.　3. $x-\frac{1}{2}y$.

12

4. $1+ax+a^2x^2$.　5. $-x^2-xy-y^2$.

6. $-3x-2$.　7. $-x^2-3x-1$.

8. $x^2-x+1$.　9. $x^4-x^2+1$.

10. $x^2-2x+4$.　11. $-x-y+z$.

12. $-x-2y-z$.　13. $-xy+xz+yz$.

14. $a^2b^2+abcd+c^2d^2$.　15. $a^4x^4-a^3x^3+ax-1$.

16. $-a-2b+3c$.　17. $x^2-x+2$.

18. $x^2+x+2$.　19. $-x^5-2x^4-4x^3-5x^2-10x-20$

20. $x^2+3ax+3a^2$.　21. $1+x-x^2$.

22. $x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz$.

23. $-4x^2-y^2-z^2-2xy+2xz-yz$.

24. $x^4-3x^2+4x+1$.　25. $1+2x+3x^2+4x^3$.

26. $a^2+2ab-ac+b^2-bc+c^2$.　27. $1+3x-3x^2$.

28. $5-3x+2x^2$.　29. $x+y+z$.

30. $ax^2+(ac-b^2)x-b^2c$.

## 第　一　雜　例　題



## 答　　　式

**A.** 1. 6.　2. $2a^2+ab-4ac+2b^2+bc+c^2$.

4. $x^3+\frac{23}{4}x^2-\frac{3}{8}x+1$, $\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{4}x^2y^2+y^4$.　5. $12x^2+12$.

6. $2+4x+6x^2+8x^3+10x^4$.

**B.** 1. 87, $-5$.　2. $5b^4-3b^3a+3a^3b-5a^4$.

3. 0, $7x-7$, $2b-2a$.　4. $9x^4-\frac{1}{9}$, $a^2+2ab+b^2-c^2$.

6. $x^2-(y+2)x+y^2+y+1$.

**C.** 1. $-1\frac{1}{6}$.　2. $2a^3+\frac{5}{2}a^2b+\frac{31}{8}b^3$.

4. $a^2x^4+(2a^2-1)x^2+a^2$, $4a^2+b^2+9c^2+4ab-12ac-6bc$.

4. $x^2+2xy+y^2$.　5. $x^4-xy^3+y^4$.

**D.** 1. 0, 0.　2. $2x-12y+7z$.　3. $-4ab-4ac$.

4. $a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$, $1+x^8+x^{16}$.

5. $x^2-xz+z^2$, $(x+y)^2-(x+y)z+z^2$.

**E.** 1. 8.　2. $14x+2y$, $3x+15y$, $42x^2+216xy+30y^2$.

3. $b^2-a^2$.　5. $5(b-a)$, $5(7a^2-11ab+7b^2)$.

**F.** 1. $\frac{1}{4}$.　2. $a^3-a^2(x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}z)+a(\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}xz+\frac{1}{8}yz)-\frac{1}{8}xyz$.

3. 12.　4. $x-y+z$, $2y^2$.

**XIII.** 1. 3.　2. 1.　3. $-4$.　4. $-6$.

13

5. 0.　6. 0.　7. $\frac{3}{4}$.　8. $\frac{1}{13}$.

9. $-2$.　10. $-3$.　11. $5\frac{4}{5}$.　12. ~~2~~ 6

13. $-8.$　14. $6.$　15. $-20.$　16. $5.$

17. $-5.$　18. $-2\frac{12}{23}.$　19. $12.$　20. $-9\frac{5}{13}$

21. $2\frac{1}{2}.$　22. $13.$　23. $1.$　24. $-1\frac{3}{4}.$

25. $\frac{2}{3}$　26. $2\frac{1}{2}$　27. $-1\frac{1}{4}.$　28. $-1\frac{1}{6}.$

29. $4\frac{1}{4}.$　30. $-1\frac{8}{13}.$　31. $-5.$　32. $-1.$

33. $2.$　34. $-16.$　35. $1.$　36 $a+b$

37. $2a.$　38. $b-a.$　39. $\frac{a}{2}.$　40. $\frac{b}{2}.$

41. $a.$　42. $ab.$　43. $-\frac{2ab}{a^2+b^2}.$　44. $0.$

45. $b-a.$　46. $-\frac{a^2+b^2}{2a}.$　47. $\frac{1}{2}(a+b).$

48. $\frac{bc}{a}.$　49. $-\frac{1}{2}(a+b).$　50. $\frac{1}{3}(a+b+c).$

**XIV.** 1. 99, 101.　2. 18, 88.　3. 10, 15.

14

4. $27\frac{1}{2}$, $72\frac{1}{2}$.　5. 20.　6. 21.

7. 20, 5.　8. 15, 5.　9. 12, 26.

10. 9, 22.　11. 40.　12. 420.

13. 14.　14. 6.　15. 420.

16. 112.　17. 45, 55.　18. 60, 40.

19 $13\frac{1}{3}$, $33\frac{1}{3}$.　20. 24, 12.　21. 20圓、

22. 25圓, 15圓.　23. $1\frac{3}{4}$圓.　24 150圓 100圓.

25. 40圓, 35圓.　26 130圓, 125圓, 105圓

27. 30圓, 15圓, 20圓　28. 甲$22\frac{1}{2}$圓, 乙$27\frac{1}{2}$圓, 丙50圓.

29. 男1圓, 女$\frac{1}{2}$圓, 童$\frac{1}{4}$圓.

30. 男一錢, 女七厘五毛, 童三厘七毛半.

31. 5年ニテ　32. 30年前



33. 30, 10.　34. 35, 5.

35. 甲二十五圓　乙三十五圓　丙四十圓

36. 甲$23\frac{1}{3}$ 乙$25\frac{1}{2}$ 丙$27\frac{1}{3}$ 丁$23\frac{1}{2}$　37. 十五錢

38. 二十錢　39. 12000圓　40. 1000圓 500圓 250圓

41. 五錢 銀20　五十錢 銀4　一圓 銀4.

42. 一圓 銀4　五十錢 銀12　五錢 銀20

43. 5時$27\frac{3}{11}$分　44. 9時$32\frac{8}{11}$分　45. 18 及ビ 15.

46. 燒酒8升5合 水3升5合　47. 1500人　48. 28日　49. 2279圓

50. 30圓　51. 280圓　52. 45錢　53. 15日

54. 8日　55. 480.

**XV.** 1. $x=1, y=-1\frac{1}{2}.$　2. $x=3, y=2.$　3. $y=9, x=100.$

15

4. $x=-2, y=-1.$　5. $x=4, y=-3.$　6. $x=1, y=-1.$

7. $x=-54\frac{2}{3}, y=1\frac{3}{8}.$　8. $x=\frac{5}{6}, y=-\frac{5}{6}.$　9. $x=-2, y=\frac{1}{2}.$

10. $x=1, y=1.$　11. $x=5, y=-3.$　12. $x=3\frac{2}{7},\ y=6\frac{5}{7}.$

13. $x=5, y=2.$　14. $x=5, y=-3.$　15. $x=1, y=-1.$

16. $x=3, y=-1.$　17. $x=y=-2.$　18. $x=2\frac{1}{2}, y=1\frac{1}{2}.$

19. $x=5, y=2.$　20. $x=\frac{207}{224}, y=\frac{425}{224}.$　21. $x=8, y=16.$

22. $x=5, y=7.$　23. $x=2\frac{1}{7}, y=2\frac{2}{3}.$　24. $x=\frac{19}{65}, y=-19.$

25. $x=3, y=6.$　26. $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{3}{2}.$

27. $x=a+\frac{b}{2},\ y=a-\frac{b}{2}.$　28. $x=a,\ y=b.$

29. $x=2a+b,\ y=2b+a.$　30. $x=\frac{a}{b},\ y=\frac{b}{a}.$

31. $x=2b-a,\ y=2a-b.$　32. $x=y=c.$

33. $x=8\frac{5}{7},\ y=3\frac{1}{7},\ z=3.$　34. $x=-1,\ y=-2.\ z=4.$

35. $x=\frac{1}{2}(b+c),\ y=\frac{1}{2}(c+a),\ z=\frac{1}{2}(a+b).$

**XVI.** **1.** 20. 30.　**3.** $12\frac{1}{2}$円 $2\frac{1}{2}$円　**4.** $\frac{2}{3}$ 斤 $\frac{1}{3}$ 斤

16

**5.** 甲 40 日 乙 120 日　**6.** $\frac{3}{5}$.　**7.** $\frac{3}{8}$.

**8.** 240, 360.　**9.** 22円 26円　**10.** 5. 圓

**11.** 480 方尺　**12.** 21 日　**13.** 2400円 900円

**15.** 12, 24, 36, 48.　**16.** 甲, 450円 乙 225円 丙 $237\frac{1}{2}$ 丁 $87\frac{1}{2}$圓

**17.** 48,　**18.** 7 及ビ 2.　**19.** $\frac{41}{43}$.　**20.** 1. 6.

**21.** 200, 250.　**22.** 五十錢貨3 二十錢貨8 十錢貨 9.

**23.** $17\frac{1}{2}$ フランク　**24.** 甲 66錢. 乙 82錢.　**25.** 50.

# 第二雜例題

**A.** **1.** 1.　**2.** $7a-7b$.　**4.** $x^2-2x-2$.

**5.** (i) 2, (ii) $x=6, y=15$. (iii) $x=\frac{1}{2}(a-b)$, $y=\frac{1}{2}(a+b)$.

**6.** 60.

**B.** **1.** $4\frac{1}{2}$　**2.** $a^2+b^2$.　**4.** $x^4-2x^2+x+2$.

**5.** (i) $-6$; (ii) $x=-162$, $y=42$; (iii) $x=6$, $y=8$.

**6.** 二圓金貨 95枚 五十錢銀貨 40枚.

**C.** **1.** $-b-d$.

**4.** $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$, $x^2+y^2+1+y+x-xy$.

**5.** (i) $x=-1$, $y=-1$, (ii) $x=y=a$.

**6.** 甲 12 及ビ 18　乙 24 及ビ 6





**D.** **1.** $-11\frac{1}{4}$.　**2.** $2ab$.　**4.** $15b^2c^3-3ab^3c$, $a+2b-3c$.

**5.** (i) $\frac{7}{6}$; (ii) $x=5$, $y=4$; (iii) $x=\frac{1}{4}$, $y=\frac{1}{2}$, 6. 1225.

**E.** **1.** $a^2$.　**2.** $4a^2+ab+ac+4b^2+bc+4c^2$.

**4.** $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}$, $cx^2+dx-c$.

**5.** (i) 5; (ii) $x=\frac{8}{10}$, $y=\frac{8}{9}$; (iii) $x=a+b$, $y=a-b$.

**6.** 8 及ビ 5.

**F.** **1.** 130.　**2.** $a^8-x^8$.　**4.** $2y^2-3y+1$, $a+2b+3c$.

**5.** (i) $\frac{cd-ab}{a+b-c-d}$; (ii) $x=-1$, $y=-1$.　**6.** 茶 2志林 6 片斯、 珈琲 1 志林 8 片斯.

**XVII.** **1.** $(3a-b)^2$.　**2.** $(2x-3)^2$.

17

**3.** $\left(x+\frac{y}{2}\right)^2$　**4.** $\left(2x^2-\frac{y}{4}\right)^2$　$(2x-\frac{y}{4})^2 +52xy$

**5.** $(2ax+by)^2$.　**6.** $3(1+a^2x)^2$.

**7.** $-(a-2b)^2$.　**8.** $-4(1-x)^2$.

**9.** $y^2\left(2x+\frac{y}{2}\right)^2$.　**10.** $xy(x-2y)^2$.

**11.** $(2xy+a+b)^2$.　**12.** $(3a+3b-c)^2$.

**XVIII.** **1.** $(a^2+b)(a^2-b)$.　**2.** $(x+3y^2)(x-3y^2)$.

18

**3.** $(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})$.　**4.** $(x+\sqrt{3}y)(x-\sqrt{3}y)$.

**5.** $(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)$.　**6.** $(9x^2y^2+a^2)(9x^2y^2-a^2)$.

**7.** $xy(x+2y)(x-2y)$.　**8.** $y(2x+3y^2)(2x-3y^2)$.

**9.** $3x^3(x+3a)(x-3a)$.　**10.** $5ax(2ax+3y)(2ax-3y)$.

**11.** $4(a-b+c)(2c-b)$.　**13.** $8x(x+1)^2(x-1)$.

**XIX.** 1. $4(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

2. $(3xy-\frac{1}{2}z)(9x^2y^2+\frac{3}{2}xyz+\frac{1}{4}z^2)$.

3. $a^3(1-2a)(1+2a+4a^2)$. 4. $(2a^2+b)(4a^4-2a^2b+b^2)$.

5. $2x(y-\frac{1}{2}x)(y^2+\frac{1}{2}xy+\frac{1}{4}x^2)$.

6. $9ab^2(a-\frac{1}{3}b)(a^2+\frac{1}{3}ab+\frac{1}{9}b^2)$.

7. $3ab(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$.

8. $5bc(2a-bc)(4a^2+2abc+b^2c^2)$.

9. $(a^3+8)(a^3-8)=(a+2)(a-2)(a^2+2a+4)(a^2-2a+4)$.

10. $(x^6+a^3b^3)(x^6-a^3b^3)=(x^2+ab)(x^2-ab)$
$(x^4+x^2ab+a^2b^2)(x^4-x^2ab+a^2b^2)$.

11. $9(x+y)(x^2+xy+y^2)$ 12. $4(x-y)(7x^2-2xy+7y^2)$.

**XX.** 1. $(x-1)(x-3)$. 2. $(x+4)(x+5)$.

3. $(x-7)(x-2)$. 4. $(x-12)(x-11)$.

5. $(x+7)(x-5)$. 6. $(x-5)(x+2)$.

7. $(x+7)(x-2)$. 8. $(x-12)(x+11)$.

9. $(x+2y)^2$. 10. $(x-y)(x-4y)$.

11. $(4x-y^2)(x-y^2)$. 12. $(5x-1)(2x+1)$.

13. $-(x-10)(x+1)$. 14. $-(x^2-4)(x^2+2)$.

15. $x(x-6)(x+3)$. 16. $xy(x-2y)(x+y)$.

**XXI.** 1. $(4x^2+25y^2)(2x+5y)(2x-5y)$.

2. $(9a^2+4b^2)(3a+2b)(3a-2b)$.

3. $(1+3a)(1-3a+9a^2)$. 4. $(3+2x)(9-6x+4x^2)$.

5. $2b(a-b)$. 6. $(a+b+2c-2d)(a+b-2c+2d)$.



7. $(a-c)(a+b+c)$. 8. $(a^2+c^2+b^2)(a+c)(a-c)$.

9. $(2a+b+c)(b-c)$. 10. $8xy(x^2+y^2)$.

11. $(a+b+3c)(a+b-c)$. 12. $(a-b+c)(a-b-c)$.

13. $ab(2a+b)(a+2b)$. 14. $5(x+y)(7x^2+11xy+7y^2)$.

15. $(x-y)(x+\frac{1}{4}y)$. 16. $(x+a)\left(x+\frac{1}{a}\right)$.

17. $(x+\frac{2}{3})(x+\frac{3}{2})$. 18. $(x+\frac{2}{3})(x-\frac{3}{2})$.

19. $(3x+2y)(2x-3y)$. 20. $(9x+8)(8x-9)$.

21. $(x^2-1)(x^2-4)=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$.

22. $(x^2-9y^2)(x^2-4y^2)=(x+3y)(x-3y)(x+2y)(x-2y)$.

23. $(mx+ny)(nx+my)$. 24. $(2x+13)(x-3)$.

25. $(a+b-3x)(a+b-2x)$.

26. $\{x+y-3(a+b)\}\{x+y-5(a+b)\}$.

27. $2(a-d)(a+b+c+d)$.

28. $(x^2+4x+3)(x^2+4x-5)=(x+1)(x+3)(x-5)(x-1)$.

29. $(a-c+b-d)(a-c-b+d)$.

30. $(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$
$=(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)$.

31. $(3a+b)^2-4c^2=(3a+b+2c)(3a+b-2c)$.

32. $(a-y)(a^3+z^3)=(a-y)(a+z)(a^2-az+z^2)$.

**XXII.** 1. $a^2b^2$. 2. $abc^2$. 3. $3ab$. 4. $2xy$.

5. $12a^2b^3x^4$. 6. $b^3x$. 7. $x^3y^5$. 8. $b^3c^6$.

9. $7y^2$. 10. $ab$. 11. $xyz^2$. 12. $abcx^2$.

**XXIII.** 1. $x^2(x-a)^3$. 2. $a+b$. 3. $(a+b)^2$.

4. $b^4c^3(b+c)^2$. 5. $a(a^2+b^2)$. 6. $a^2+3b^3$.

7. $a^2x^2(x+2a)$. 8. $a^2x^2(a^2-4x^2)$. 9. $x+2$.

10. $x(x+2y)$. 11. $x-1$. 12. $a-b$.

**XXIV.** 1. $x-1$. 2. $x-y$. 3. $2x-1$.

24

4. $2x-y$. 5. $x^2-2$. 6. $x^2-2y$.

7. $a-2$. 8. $2b-1$. 9. $x-1$.

10. $x^2y^2-1$. 11. $x-2a$. 12. $2a-b$.

13. $a^2-ab+b^2$. 14. $4a^2-2a+1$. 15. $x^2-y^2$.

16. $x-1$. 17. $x^2+x+1$. 18. $x^2-3x+5$.

19. $x-7$. 20. $x-y$. 21. $x-y$.

22. $x-5$. 23. $x^2-2x+4$. 24. $a-2x+3$.

25. $x^2+7$. 26. $x^2+5x+1$. 27. $x^2+4x+3$.

28. $x^2+2x+1$. 29. $y-2$. 30. $y^2-3yz+4z^2$.

31. $2x^2-3x-1$. 32. $x^2+2x+2$. 33. $x-1$.

34. $x^2-3x+1$. 35. $x^2+(2m-3)x-6m$.

36. $mx+ny$.

**XXV.** 1. $a^3b^3$. 2. $a^2bc^3$. 3. $18a^2b^3$.

4. $20x^3y^3$. 5. $120a^3b^4x^6$. 6. $3a^2b^5x^5$.

7. $72a^2b^3x^4y^6$. 8. $6a^3b^3c^3$.

9. $462ab^3xy^4z^3$. 10. $a^3b^3c^2$.

11. $30x^2y^3z^3$. 12. $a^4b^2c^3x^4$.

**XXVI.** 1. $(a-x)(a-2x)(a-3x)$.

2. $a^3x^3(a-x)(a-2x)(a-3x)$.





3. $(a-b)(a+b)^2$. 4. $12a^2b(a-b)(a+b)^2$.

5. $(x+1)(x+2)(x+4)$. 6. $(x+y)(x+2y)(x+4y)$.

7. $(x-1)(x-2)(x-3)$. 8. $(3x-y^2)(2x-y^2)(x-y^2)$.

9. $(a^2-b^2)^2$. 10. $(x^2-4y^2)^2$.

11. $(x+2)(x+3)(x+4)$. 12. $(x-2y)(x-3y)(x-4y)$.

**XXVII.** 1. $54a^3b^2c^3$. 2. $a^4b^3c^3$. 3. $24a^3b^2$.

4. $12a^3b^3$. 5. $x^3y^3(x^2-y^2)^2$. 6. $a^2(a^2-b^2)$.

7. $xy^3(x^2-1)$. 8. $12ax^2y^2(x-y)(x+y)^2$.

9. $90(x^2-9)(x^2-16)$. 10. $12(a^3-b^3)(a^2-4b^2)$.

11. $8ab^3d(a^2-d^2)$. 12. $(x-2)(x-4)((x-6)$.

13. $(x+1)(x+3)(x-10)$. 14. $6(x^2-1)(x^2-4)$.

15. $(x-1)(x-2)(2x+3)(3x+1)$.

16. $(2x-1)(3x+2)(7x+1)$.

17. $(x-3y)(x-y)(3x-y)$. 18. $x(x-1)(x+3)(2x-1)$.

19. $xy^2(x^2-4)(x^2-9)$. 20. $x^6-a^6$.

21. $x^4-1$. 22. $(x-4)(3x-2)(3x^2+2x+1)$.

23. $(x^2-a^2)^2$. 24. $(x+1)(x+3)(x^2-4)$.

25. $(x-1)(x+2)(x+6)(x^2-2x+4)$.

26. $(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)(a+5)$.

**XXVII.** 1. $\frac{a}{b}$. 2. $\frac{x}{y}$. 3. $\frac{c}{2a^2b^2}$.

4. $\frac{3}{2a^2b^2}$. 5. $\frac{y^4}{x^2}$. 6. $\frac{3}{4}x^5z^3$.

7. $\frac{3ac^4}{5b^2x^3}$. 8. $\frac{5cd^3}{6a^3b}$. 9. $\frac{3a^4x^2z^3}{5b^4y^2}$.

答　　　　式

10. $\frac{5a^3c^2}{7y}$.　　11. $\frac{2c^4z^4}{3a^4x^4}$.　　12. $\frac{3ac^3x^2}{4b^2y^2z^2}$.

**XXIX** 1. $\frac{2b}{a+b}$.　　2. $\frac{y^2}{1-y^2}$.　　3. $\frac{a-b}{a+b}$.

4. $\frac{x}{x-a}$.　　5. $\frac{x-1}{x+1}$.　　6. $\frac{1-y}{1+y}$.

7. $\frac{x}{x-2}$.　　8. $\frac{x^2}{x^2-1}$.　　9. $\frac{4}{x+4}$.

10. $\frac{2x}{1+2x}$.　　11. $-\frac{1}{x+2}$.　　12. $-\frac{1}{a+3}$.

13. $-\frac{x^2}{x^2+a^2}$.　　14. $-\frac{x^2+a}{a}$.　　15. $\frac{x^3}{x^2+a}$.

16. $-\frac{x^2y^2}{x^2y^2+a^2}$.　　17. $\frac{5a}{x+3a}$.　　18. $-\frac{x}{x+4a}$.

19. $\frac{a-x}{a+x}$.　　20. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.　　21. $\frac{x+1}{x^2+x+1}$.

22. $\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}$.　　23. $\frac{x-2}{x-4}$.　　24. $\frac{1-2a}{1-4a}$.

25. $\frac{x-4}{x+11}$.　　26. $\frac{1-4y^2}{1+11y^2}$.　　27. $\frac{x-y}{x+4y}$.

28. $\frac{1-a^2b^2}{1+4a^2b^2}$.　　29. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$.　　30. $\frac{a-b}{a+b}$.

31. $\frac{a^2+b^2}{a^2+ab+b^2}$.　　32. $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+b^2}$.



答　　　　式

**XXX.** 1. $\frac{x+2}{2x+1}$.　　2. $\frac{3x-5}{x^2-3x+2}$.　　3. $\frac{x^2+5x+10}{x^3+2x^2+3x+6}$.

4. $\frac{x+1}{x}$.　　5. $\frac{2x^2+3ax+7a^2}{x^2-6ax+2a^2}$.

6. $\frac{x^2+2x+3}{3x^2+2x+1}$.　　7. $\frac{x-2}{x^2+1}$.

8. $\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+1}$.　　9. $\frac{x+2}{2x+1}$.

**XXXI.** 1. $\frac{2b}{a^2-b^2}$.　　2. $\frac{1}{x^2-5x+6}$.　　3. $\frac{x}{(x-2)^2}$.

4. $\frac{4y}{x-y}$.　　5. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.　　6. $\frac{1}{a}$.

7. $\frac{8(x+6)}{x^2-16}$.　　8. $\frac{x+3}{x^4-1}$.　　9. $\frac{1}{1-9x^2}$.

10. $\frac{4a^4}{a^4-x^4}$.　　11. $\frac{8a^8}{a^8-x^8}$.

12. $\frac{2(x^2+5x+7)}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$.　　13. $\frac{2}{x(x^2-1)}$.

14. $\frac{2}{a(a+1)(a+2)}$.　　15. $\frac{48}{(x^2-9)(x^2-1)}$.

16. $\frac{6}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$.　　17. $\frac{24}{x(x^2-1)(x^2-4)}$.

18. $\frac{24}{a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$.　　19. 0.　　20. 0.

21. $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. 22. 0. 23. $\frac{x}{(x-2a)^2}$.

24. $\frac{1}{a+2}$. 25. $\frac{2(x+ay)}{x-ay}$. 26. $\frac{4x^2+3}{x^2-1}$.

27. $\frac{3-x}{1-x}$. 28. $\frac{2}{x-3y}$. 29. 1. 30. 1.

**XXXII.** 1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{ab}{4c^2}$. 3. $\frac{ad}{c^2}$.

4. $\frac{2ac}{3b^2}$. 5. 1. 6. 1. 7. $\frac{b^2}{c^2}$.

8. $\frac{a^4}{c^4}$. 9. $\frac{8}{abc}$. 10. $xyz$. 11. $x^2$.

12. 1. 13. $\frac{2xy}{3ab}$. 14. $\frac{xy}{b^2z}$.

15. $\frac{x^2+ax+a^2}{x-2a}$. 16. $\frac{a^2+ax+x^2}{a^2-ax+x^2}$.

17. $\frac{x-1}{x-4}$ 18. $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$.

19. 1. 20. $\frac{x^2-6x+5}{x^2-6x+8}$. 21. 1.

**XXXIII.** 1. $\frac{5(x+a)}{(x-2a)^2}$. 2. $\frac{1}{2x^2-1}$. 3. 1. 4. 0.

5. 0. 6. $\frac{2}{y}$. 7. 1. 8. $x-1$.

9. $\frac{3(4x+5)(3x+4)}{(2x+3)(5x+6)}$. 10. $\frac{1+x^4}{x(1+x^2)}$. 11. $\frac{1}{3x^3}$.



12. $\frac{x^2(x-1)}{(x+1)}$. 13. $\frac{4}{4x-a+3}$. 14. 1.

**XXXIV.** 1. 7. 2. 4. 3. 4. 4. $-\frac{1}{2}$.

5. $-2$. 6. $-4$. 7. $-\frac{3}{7}$. 8. $\frac{13}{18}$.

9. 1. 10. $-2$. 11. $\frac{3}{2}$. 12. 5.

13. $\frac{1}{16}$. 14. $-2$. 15. 1. 16. $6\frac{1}{2}$.

17. $\frac{48}{41}$. 18. $-6$. 19. $\frac{3}{2}$. 20. $-8$.

21. $2a-b$. 22. $\frac{a+b}{2}$ 23. $\frac{-2bc}{a^2+b^2}$.

24. $\frac{ab}{b-a}$. 25. $\frac{-2ab}{a+b}$, 或ハ 0,

26. $x=\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$, $y=\frac{ab(a-b)}{a^2+b^2}$.

27. $x=2$, $y=2$.

## 第三雜例題

A. 1. $y^3-6xy^2+6x^2y-x^3$.

3. (i) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, (ii) $(a-b)(a+b+2)$,

(iii) $(x-7)(x+4)$.

4. $x^2+x-4$, $\frac{x^2-x+5}{x(5x^2+4x+16)}$.

5. (i) 5, (ii) $x=1$, $y=-1$, (iii) $x=-\frac{a+b}{2}$.

6. 甲　二圓三十五錢　　乙　六十五錢

B. 1. 0, 0.

3. (i) $x(x-2^2)$, (ii) $(2x-1)(x-2)$, (iii) $(x^2+1)(x-1)$.

4. $\frac{2}{x+3}$.　5. (i) $\frac{8}{9}$, (ii) $x=a$, $y=0$.　6. $\frac{8}{80}$.

C. 3. (i) $(1-3x)(1+21x)$, (ii) $3y(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)$,

(iii) $(x+1)^3(x-1)^3$.

4. $\frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$, $\frac{x-3}{x^2+7x+3}$.

5. (i) 5, (ii) $x=\frac{c(b-c)}{a(b-a)}$, $y=\frac{c(a-c)}{a(a-b)}$.

6. 甲　七十圓　乙　三十圓

D. 1. 4.　　8. (i) $x(x+3y)(x-2y)$, (ii) $(x-a)(x+a)^2$,

(iii) $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)$.

4. (i) $\frac{2(a+x)}{a-x}$, (ii) 2.　5. (i) $x=5$, (ii) $x=\frac{1}{5}$, $y=-17$.

6. 72.

E. 2. $x^3+x^2y+xy^2+y^3$, $(x+y)^3+2z(x+y)^2+4z^2(x+y)+8z^3$.

3. $(x+5)(5x-1)$, $a(a+b+c)(a-b-c)$.

4. $2a(2a-3b)(2a+3b)(2a-b)$.　6. 二千四百圓

F. 1. 59.　　2. $x^5-ax^4-a^4x+a^5$



3. $(x^2+1)(x+1)^2(x-1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

4. $\frac{x}{4x^2-y^2}$.　5. (i) $-\frac{a^3+b^3}{a+b}$, (ii) $x=3, y=-1, z=0$.

6. 350 エーカー.

XXXV. 1. $\pm\frac{1}{3}$.　2. $-1$或ハ$-2$.　3. 0或ハ$\pm\frac{1}{3}$.

4. $\pm1$或ハ$\pm2$.　5. $\pm1$.　6. $\pm\sqrt{15}$.

7. $\pm4$.　8. 0.　9. 0或ハ$-7$.

10. 0或ハ11.　11. 0或ハ$1\frac{1}{3}$.　12. 0或ハ$1\frac{1}{3}$.

13. 0或ハ$\frac{b}{a}$.　14. 0或ハ$-c$.　15. $\pm3$.

16. $\pm3$.　17. $\pm1$.　18. $\pm9$.

19. 1或ハ2.　20. 2或ハ5.　21. 4或ハ$-2$.

22. 2或ハ$-3$.　23. 0, 4或ハ$-2$.　24. 0, 2或ハ$-3$.

25. $-a, -b$, 或ハ$-c$.　26. $-b-c$, $-c-a$, 或ハ$-a-b$.

XXXVI. 1. $\pm2$.　2. $\pm3$.　3. 1或ハ6.

4. 3或ハ6.　5. 6或ハ$-3$.　6. $-1\pm\sqrt{2}$.

7. 3或ハ$-1$.　8. 1或ハ$-3$　9. $-\frac{1}{3}$.

10. $\frac{4}{3}$.　11. 7或ハ$\frac{1}{7}$.　12. 4或ハ$-\frac{1}{5}$.

13. $-10$或ハ$-11$.　14. $\frac{1}{10}$或ハ$\frac{1}{11}$.

15. $\frac{1}{3}$或ハ$-\frac{5}{7}$.　16. $\frac{1}{7}$或ハ$-\frac{4}{3}$.　17. $-\frac{2}{3}$或ハ$-\frac{3}{2}$.

18. 1或ハ$-\frac{1}{6}$.　19. 3或ハ$-1\frac{17}{23}$.　20. 2或ハ$-2\frac{11}{20}$.

21. $\frac{4}{3}$或ハ$5\frac{2}{3}$.　22. $\frac{1}{4}$或ハ$\frac{3}{4}$.　23. 11或ハ$-21$.

24. 0或ハ4.　25. 2或ハ$\frac{1}{2}$.　23. $3\pm2\sqrt{2}$.

27. 3或ハ$-2$　28. $-\frac{1}{3}$或ハ$-2\frac{2}{3}$.　29. 3或ハ$-4\frac{2}{3}$.

30. 2或ハ$1\frac{3}{5}$.　31. $2\pm\sqrt{3}$.　32. 5或ハ$1\frac{1}{7}$.

33. 2或ハ$\frac{1}{2}$.　34. $-1$或ハ$-\frac{16}{3}$.　35. $2\pm2\sqrt{3}$.

36. $\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$. 37. $\frac{1}{2}$ 或ハ $-3$. 38. $7$ 或ハ $1\frac{1}{3}$.

39. $5$ 或ハ $-\frac{1}{6}$. 40. $-2\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. 41. $a$ 或ハ $2a$.

42. $a$ 或ハ $3a$. 43. $\frac{-a\pm b}{2}$. 44. $\frac{a\pm b}{3}$.

45. $b$ 或ハ $2a-b$. 46. $b$ 或ハ $-2a-b$.

47. $2a-b$ 或ハ $-b$. 48. $c$ 或ハ $c-2b$.

49. $1$ 或ハ $\frac{a-b}{b-c}$. 50. $1$ 或ハ $-\frac{a+b+c}{a+b}$.

51. $\frac{a}{b}$ 或ハ $\frac{b}{a}$. 52. $-\frac{b}{c}$ 或ハ $-\frac{c}{b}$.

53. $\frac{a+b}{a-b}$ 或ハ $\frac{b-a}{a+b}$. 54. $\frac{b+a}{b-a}$ 或ハ $\frac{b-a}{b+a}$.

55. $a$ 或ハ $\frac{1}{a}$. 56. $\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$.

57. $a+b$ 或ハ $\frac{2ab}{a+b}$. 58. $a+b$ 或ハ $\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$.

59. $a+b$ 或ハ $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. 60. $b$ 或ハ $\frac{a^2}{b}$.

61. $c$ 或ハ $-\frac{a^2+ac+b^2+bc}{a+b+2c}$.

62. $c$ 或ハ $-\frac{ab(a+b+2c)}{2ab+ac+bc}$. 63. $0$ 或ハ $-\frac{1}{2}(a+b)$.

**XXXVII. 1.** (i) $(x-2)(x+2)=0$, (ii) $x(x-3)(x+4)=0$.



(iii) $(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3})=0$, (iv) $(x-a)(x+b)(x-c)=0$.

(v) $(x-2+\sqrt{2})(x-2-\sqrt{2})=0$,

(vi) $(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b})=0$.

2. (i) $1$, (ii) $-2$, (iii) $-\frac{7}{3}$. 3. (i) $0$, (ii) $-8$, (iii) $-\frac{7}{4}$.

4. $12$. 5. $p^2-2q$. 8. $\frac{4}{3}$. 9. $3$ 或ハ $-5$

15. $\frac{b^2-4ac}{a^2}=\frac{q^2-4pr}{p^2}$. 16. $15$. 17. $2$ 或ハ $11$.

18. $0$ 或ハ $4$. 19. $4$ 或ハ $\frac{8}{9}$. 20. $9$ 或ハ $\frac{1}{4}$.

21. $1$ 或ハ $6$. 22. $1$ 或ハ $-\frac{1}{2}$. 23. $0$ 或ハ $\frac{18}{13}$.

24. $5$ 或ハ $\frac{5}{4}$. 25. $9$ 或ハ $-\frac{18}{5}$.

**XXXVIII. 1.** $\pm1$, $\pm2$, 2. $\pm1$, $\pm3$. 3. $\pm a$, $\pm\frac{1}{a}$.

4. $\pm a$, $\pm\frac{1}{a}$, $\pm\sqrt{-a^2}$, $\pm\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2}\right)}$.

5. $3$, $-1$, $\pm2$, 6. $4$, $1$, $-2$, $-5$.

7. $2$, $-3$, $\frac{-1\pm\sqrt{-27}}{2}$. 8. $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

9. $1$, $\frac{1\pm\sqrt{-15}}{4}$. 10. $\frac{-1\pm\sqrt{(-1)}}{2}$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

11. $1$, $-3\pm2\sqrt{2}$. 12. $\frac{7}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $1\pm\sqrt{5}$.

13. $\frac{-3\pm\sqrt{45}}{2}$, $\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. 14. $3$, $2$, $\pm\frac{1}{2}$.

15. $5$, $-8$, $\frac{-3\pm\sqrt{221}}{2}$. 16. $1$, $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

17. $1$, $\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. 18. $3$, $5$, $-8$.

19. $3, \pm\sqrt{7}$.　　20. $-1, -1, 4$.

21. $2, \frac{1}{2}\pm\sqrt{(\frac{33}{20})}$.　　22. $-3$.

XXXIX. 1. $x=5, y=1$.　　2. $x=7, y=-3$; 或ハ $x=3, y=-7$.

3. $x=3, y=\frac{1}{3}$; 或ハ $x=\frac{1}{3}, y=3$.

4. $x=5, y=-2\frac{1}{3}$; 或ハ $x=-3\frac{1}{2}, y=3\frac{1}{3}$.

5. $x=3, y=\frac{3}{4}$; 或ハ $x=-\frac{5}{4}, y=5$.

6. $x=3, y=1$; 或ハ $x=\frac{5}{4}, y=-\frac{5}{4}$.

7. $x=\frac{4}{3}, y=\frac{2}{3}$; 或ハ $x=\frac{1}{2}, y=\frac{3}{2}$.

8. $x=1, y=3$; 或ハ $x=\frac{21}{8}, y=\frac{7}{8}$.

9. $x=3, y=2$; 或ハ $x=2, y=3$.

10. $x=3, y=2$; 或ハ $x=\frac{2}{5}, =-\frac{3}{5}$.

11. $x=5, y=2$; 或ハ $x=3, y=4$.

12. $x=1, y=3$; 或ハ $x=\frac{5}{4}, y=2$.

XL. 1. $0, 5; 0, -5; \pm 6, \pm 3$.

2. $\pm 3, \pm 2; 0, \sqrt{34}, 0, -\sqrt{34}$.

3. $\pm 3, \pm 4$.　　4. $\pm\frac{(a-b)^2}{a+b}, \pm\frac{4ab}{a+b}$.

5. $\pm 4, \pm 2; \pm 6\sqrt{-2}, \mp 8\sqrt{-2}$.

6. $\pm 5, \pm 1; \pm 4, \pm\frac{1}{2}$.　7. $\pm 14, \mp 8; \pm 1, \pm 5$.

8. $\pm 1, \pm 2; \pm\frac{7}{3}\sqrt{-2}, \mp\frac{3}{2}\sqrt{-2}$.　9. $\pm 5, \pm 2$.

10. $\pm 2, \pm 1$.　　11. $\pm 3, \pm 5; \pm 36, \mp 11\frac{1}{3}$.

12. $\pm 5, \pm 3; \pm 4\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}$.　13. $\pm 1, \pm 2; \pm\sqrt{3}, 0$.

14. $\pm 5, \pm 3$,　15. $3, -4; -4, 3$.　16. $3, -6; -6, 3$.

17. $-4, 6$.　　18. $6, 10; 4, 15$.



19. $3\pm\sqrt{6}, 3\mp\sqrt{6}$.　　20. $3, -\frac{1}{3}; -1, 1$.

21. $7, 4; -4, -7$.　　22. $5, 3; -3, -5$.

22. $4, 3; 3, 4$.　　24. $5, -4; -4, 5$.

25. $\pm 3, \pm 1; \pm 1, \pm 3$.　　26. $\pm 3, \pm 3$.

27. $4, -3; -3, 4; \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}, \frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$.

28. $6, -1; -1, 6; \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}, \frac{5\mp\sqrt{17}}{2}$.

29. $\frac{3}{2}, \frac{2}{3}$.　　30. $\frac{6}{7}, \frac{7}{12}; \frac{12}{7}, \frac{7}{6}$.

31. $0, 0; 1, 2; \frac{15}{22}, \frac{9}{22}$.　32. $2, 1; \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; -1, 0$.

33. $x=\sqrt[3]{125}, y=\sqrt[3]{-27}$.　　34. $4, 5; 5, 4$.

35. $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{\sqrt{-14}}{3}, \mp\frac{\sqrt{-14}}{2}$.

36. $a+b, a+b; \frac{ab-b^2}{a}, \frac{ab-a^2}{b}$.　37. $a, b$.

XLI. 1. $\pm 27, \pm 9$.　2. $7, 11$.　3. $\pm 25$ 及ビ $\pm 5$.

4. 12 及ビ 13.　5. 38, 42.　6. 3 或ハ 63.

7. 39 及ビ 29.　8. $\pm 2$.　9. 50.　10. 18.

11. 水18ガロン　　12. 20.　13. 20.

14. 75.　　15. $2\frac{2}{17}$.　16. 毎時 4マイル

17. 45マイル及ビ60マイル　18. $1\frac{3}{8}$.　19. 4日.

20. 9シルリング　21. 9ペンス　22. 48.

23. 7s. 及ビ 8s. 9d.　24. 72.　25. £10, £5, £1000.

26. $\frac{1}{2}$及ビ$\frac{1}{3}$,或ハ$\frac{2}{3}$及ビ$-\frac{1}{6}$.　27. $3\frac{1}{3}$マイルト$1\frac{2}{3}$マイルナリ.

28. 578人　29. 13インチ,8インチ,　30. 1500平方ヤード.

31. 3ヤード及ビ4ヤード　32. 210マイル或ハ144マイル

## 第四雜例題

**A.** 1. $y$.　　2. $a^3-125b^3+8c^3+30abc$.

3. $x^2+x(a-2b)+(a^2+3b^2)$.

4. (i) $3(x+y+z)(x-y-5z)$, (ii) $(x^2-1).(y^2-1)$,

(iii) $(x^2z-1)(y^2z-1)$.

5. (i) $\frac{x+6}{2-x-x^2}$,　(ii) $\frac{2}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

6. (i) $x=\frac{3ab-2ac-bc}{a+2b-3c}$, (ii) $x=7$ 或ハ $-\frac{3}{4}$,

(iii) $x=2$ 或ハ $\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$ 或ハ 2.　7. 17 及ヒ 18.

**B.** 1. (i) 6.　　3. $x^4+2ax^3+3a^2x^2+2a^3x+a^4$.

4. $(64x^6-729)(3x+2)$.　5. (i) $\frac{2(x+3)}{x^4-1}$, (ii) 1.

6. (i) $x=-\frac{1}{5}$, (ii) $x=5$ 或ハ $-6\frac{2}{3}$,

(iii) $x=\pm2$ 或ハ $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}$,　$y=\pm3$ 或ハ $\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$.

8. 840 枚

**C.** 1. (i) $24a-21b$, (ii) $a^6-6a^4b^2-7a^2b^4-4b^6$.

3. $4xy-6x^2-2y^2$.

4. (i) $(3x+2)(3x+1)$, (ii) $(a+b+c+d)(a-b+c-d)$

$(a+b-c-d)(-a+b+c-d)$.



5. $y$.　6. (i) $x=-212$, (ii) $x=y=a$.　7. 3 及ビ 5.

8. 6$s$. 2$d$. 5$s$. 5$d$.

**D.** 2. $3+2x+8x^2+4x^3+x^4$.

5. $(x+1)(x+2)(x+3)(x-7)$, $x=7$.

6. (i) $x=\frac{2}{3}$, $y=3$, (ii) $x=a$ 或ハ $b$.

(iii) $x=2$, $y=1$; $x=6\frac{1}{4}$, $y=-3\frac{1}{4}$　8. 10 ガロン.

**E.** 1. $2\frac{5}{8}$.　　3. $-3a+3b-18c+6d$.

4. $(6x^2-5ax-6a^2)(2x^2+2ax+3a^2)$.　5. $\frac{1}{x+y}$.

6. (i) $x=\frac{a+b}{2}$,　(ii) $x=0$ 或ハ 4,

(iii) $x=\frac{3}{5}$, $y=\frac{2}{3}$; $x=1\frac{1}{2}$, $y=1\frac{2}{3}$.　7. $x=c$ 或ハ $\frac{a^2}{c}$.

8. 一時間ニ十五マイル

**F.** 1. $a^3+a^2b+ab^2+b^3$.　3. $1+4x-x^2$.　4. $x-1$, 1.

5. (i) 0, (ii) $x$.　6. (i) $x=1$, (ii) $x=a$ 及ビ $y=b$,

(iii) $x=0$ 或ハ $\frac{4}{5}$.

7. $7\sqrt{13}$.　　8. 169 或ハ 144.

**XLII.** 1. $a^{15}$.　2. $a^{15}$.　3. $-a^6$.　4. $a^8$.

5. $16a^{20}$.　6. $-a^{20}$.　7. $a^2b^8$.　8. $a^{15}b^{20}$.

9. $-a^7b^{28}$.　10. $-27a^{21}b^{15}c^3$.　11. $a^4b^8c^{20}$.

12. $-125a^6b^9c^{12}$.　13. $\frac{a^6}{b^6}$.　　14. $\frac{a^{15}}{b^5c^{10}}$.

15. $\frac{a^6}{b^{12}c^{18}}$　　16. $4a^8+12a^4b^3+9b^6$.

17. $a^{10}-4a^5b^4+4b^8$.　　18. $a^2x^8-2abx^4y^3+b^2y^6$.

19. $a^4-4a^3b+4a^2b^2$.　　20. $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$.

21. $a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9$.

22. $8a^6-36a^4b^2+54a^2b^4-27b^6$.

23. $27a^6-54a^4b^2+36a^2b^4-8b^6$.

24. $a^4+b^4+c^4+2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2$.

25. $a^6+4b^6+9c^6-4a^3b^3+6c^3a^3-12b^3c^3$.

26. $a^2+4b^2+9c^2+16d^2+4ab+6ca+8ad+12bc$
$+16bd+24cd$.

27. $1+2x+3x^2+4x^3+3x^4+2x^5+x^6$.

**XLIII.** 1. $3x-5y^2$.　　2. $2x^5-3y^3$.　　3. $x^4-3y^6$.

4. $\frac12x^4-\frac13y^5$.　　5. $a+2b+3c$.　　6. $2a-b-3c$.

7. $2a^2+b^2-c^2$.　　8. $5a^2-3b^2+2c^2$.

9. $x^2+x+1$.　　10. $2x^2-2x-1$.

11. $3x^2-6x-6$.　　12. $1-\frac12xy-2x^2y^2$.

13. $2x^2+x-\frac13$.　　14. $x^2-x+\frac14$.

15. $x^2+xy+y^2$.　　16. $4-12x+9x^2$.

17. $1+2x+3x^2$.　　18. $2x^2-x+\frac12$.

19. $1-2x-2x^2$.　　20. $x^3-2x^2+x-2$.

21. $3x^3-2x^2+3x+2$.　　22. $x^2-11x+17$.

23. $a-\frac12x+4$.　　24. $x^2+x(y+z)+yz$.

**XLIV.** 1. 4.　　2. $\frac13$　　3. $\frac14$　　4. $\frac14$.



5. 1000.　6. 25.　　7. $a^2b^2$.　　8. $a^{-1}b^{\frac14}$.

9. $a^2b^8$.　10. $a^{-6}b^{-1}$.　　11. $a^{\frac13}+x^{\frac13}+y^{\frac23}$.

12. $a^{\frac32}y^{\frac12}+a^{\frac13}y$.　　13. $a^{\frac23}x^{\frac56}+a^{\frac32}y^{\frac12}$.　　14. $a^{-\frac{7}{12}}b^{\frac23}$.

15. $\sqrt{a}-\frac{1}{a^2}$.　　16. $\frac{1}{a^4\sqrt[4]{b}}$.　　17. $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b}-\frac{b}{\sqrt[3]{a^2}}$.

18. $\frac{1}{a^3\sqrt{b}}+3\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}$　　19. $x-y$.

20. $1-x^{\frac34}$　　21. $a+b$.　　22. $x^3-1$.

23. $x^n+2x^{\frac n2}+3+2x^{-\frac n2}+x^{-n}$.

24. $\frac{1}{16}a^2-\frac{1}{12}a^{\frac32}b^{\frac12}+\frac{1}{18}ab-\frac{1}{27}a^{\frac12}b^{\frac32}+\frac{1}{81}b^2$.

25. $x^{\frac32}+y^{\frac32}$　　26. $x^n+x^{\frac n2}y^{\frac n2}+y^n$.

27. $x^{\frac43}-x^{\frac23}y^{\frac23}+y^{\frac43}$.

28. $x^{\frac46}-3x^{\frac36}y^{\frac13}+9x^{\frac26}y^{\frac23}-27x^{\frac16}y+81y^{\frac43}$.

29. $a^2c^{\frac52}$.　　30. $a^3-64b^2$.

32. (i) $x^{\frac13}+1$, (ii $2x^{\frac13}-y^{\frac13}$,(iii) $a^{\frac12}x^{\frac13}-a^{\frac13}x^{\frac12}$:

33. $2xa^{-1}-3+4x^{-1}a$.　34. $x^{\frac13}-2x^{\frac12}+x^{\frac56}$.

**XLV.** 1. $7\sqrt3$.　2. $8\sqrt[3]{5}$.　3. $3\sqrt5$.　4. $4\sqrt[3]{2}$.

5. 0.　6. 30.　7. 6.　8. 6.

9. $10\sqrt[6]{40}$.　10. $4\sqrt[6]{2}$.　11. $\frac{1}{5}\sqrt{15}$.
12. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.　13. $3-2\sqrt{2}$.　14. $\frac{1}{2}(7+3\sqrt{5})$.
15. $5-\sqrt{15}$.　16. $\frac{1}{71}(103+80\sqrt{3})$.
17. $\frac{1}{4}(2+\sqrt{2}-\sqrt{6})$.　18. $\frac{3}{22}(4+3\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{15})$.
19. $2\sqrt[3]{4}+2$.　20. $\sqrt[3]{81}+1$.
21. 5·828.　22. 6·635.　23. $1+\sqrt{5}$.
24. $3+\sqrt{7}$.　25. $3-\sqrt{3}$.　26. $5-\sqrt{3}$.
27. $2\sqrt{13}-7$.　28. $6\sqrt{2}-3\sqrt{5}$.
29. $14+2\sqrt{21}$.　30. $2+\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
31. $2\sqrt[4]{5}$.　32. $\sqrt{3}-1$.
33. $\sqrt{(a+x)}+\sqrt{(a-x)}$.　34. $\sqrt{(x+2)}+\sqrt{(2x-3)}$.
35. $\frac{1}{2}(3-\sqrt{7})$.　36. $\sqrt{8}-\sqrt{7}$.
37. $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

**XLVI.** 1. 7 : 8, 31 : 36. 41 : 48, 5 : 6.　2. 2.
3. −13.　4. $\frac{1}{7}$.　5. 55 及ビ 66.
6. 21 及ビ 56.　7. $\frac{1}{3}$.　8. $\frac{1}{2}$.
9. 2 或ハ 3.　10. 4 : 7.　11. 9 及ビ 12.
12. 16.　13. 5 : 8, 3 : 5.
14. $4x^2 : 9y^2$.　15. $\frac{11}{16}$.

**XLVII.** 6. $a^2b^2$.　7. $a^2-b^2$　8. $a^3, (a+b)^3$.

**XLVIII.** 1. $8\frac{1}{3}$.　2. 5.　6. 6.　7. $6\frac{3}{4}$.
8. 452·38896 平方尺.　9. 113·076.　10. 160.
11. 64 英尺.　13. $\frac{45}{28}$ 立方英尺.





14. $a^2-b^2=4c^2$.　15. $2053\frac{1}{3}$.　16. 12 英寸.
17. 15 英里.

## 第五雜例題

**A.** 1. $\frac{13}{18}$.　2. $a^2-3ab+b^2$.
3. $1-x^3-x^4$.　4. $\frac{(a-1)(b-1)}{b}$
5. 3 シルリング　7. $\frac{5}{4}$.

**B.** 1. $3\frac{3}{7}$.
2. $(a-1)x^3-3ax^2+(a^2-a^3)x-(a^3+2a^2+2a+1)$.
3. (i) $x(x-7y)(x-6y)$, (ii) $(5c-a)(3a+4b+c)$,
(iii) $(x-2y+3)(x-2y-3)$.
4. $\frac{4x}{x+2y}$.　5. (i) 4 或ハ $-\frac{5}{3}$;
(ii) $x=\frac{17}{3}$, $y=\frac{10}{3}$; $x=\frac{277}{32}$, $y=\frac{215}{32}$.
7. $3x^3-2xy^2+5y^3$.　8. 6 及ビ 8.

**C.** 1. $20b-10a-8c$.　2. $b^2-a^2+\frac{b^4}{a^2}-\frac{a^4}{b^2}$.
3. $\frac{a^2+b^2}{a+b}$, $3a^2+ab-4b^2$.　5. $a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}+3y^{\frac{2}{3}}$.
7. 378 里　[本文上段ノ速ナル語ヲ遲ニ改ムベシ]

**D.** **2.** $x^2+(a-b)x-ab$.

**3.** $6x(x+1)(x-3)(x-4)$. **4.** $\frac{1}{2}(y+z-x)^2$.

**5.** (i) $x=-7$; (ii) $x=\pm\frac{3}{7}\sqrt{91}$, $y=\pm\frac{2}{91}\sqrt{91}$.

**6.** $16\frac{1}{2}$ 英尺 及ヒ $13\frac{3}{4}$ 英尺. **7.** $x-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+y$.

**E.** **1.** $\frac{1}{8}(x-y)$. **2.** $2ax-(3b-4c)y$.

**3.** (i) $4a^2b^2(b+2a)(b-2a)$, (ii) $(x+3)(x-29)$;

(iii) $(3x+5y)(x-2y)$.

**5.** 42. **6.** $2\sqrt{ax}-2a$.

**F.** **1.** $a^2-b^2-c^2-d^2+2bc+2cd-2bd$.

**2.** $(a+b+c)^2$. **3.** $x^2-5x+6$; 3 或ハ 2.

**5.** (i) $x=-\frac{25}{9}$, (ii) $x=2\frac{1}{3}$, $y=-1\frac{1}{6}$; $x=-1\frac{3}{4}$, $y=1\frac{3}{8}$.

**6.** $30+13\sqrt{6}$, $y^{\frac{5}{12}}$. **7.** $x^6-3x^4+2x^2-1$.

**XLIX.** **1.** (i) 61, (ii) 117, (iii) $-75$, (iv) $6\frac{5}{8}$, (v) $a-28b$.

**2.** 84. **3.** $-2$. **4.** 78. **5.** 0.

**6.** 第21. **7.** 第102. **8.** (i) 10, (ii) 0, (iii) $a$.

**9.** (i) $\frac{6}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{4}{7}$, 等 (ii) $3\frac{1}{3}$, $3\frac{2}{3}$, 4, 等.

(iii) $\frac{4a}{3}$, $\frac{5a}{3}$, $2a$, 等.

**10.** $4a-5b$, $3a-4b$, $2a-3b$, 等.

**11.** $\frac{1}{3}a-4\frac{1}{3}b$, $-\frac{1}{3}a-3\frac{2}{3}b$, $-a-3b$, 等. **13.** 5.

**L.** **1.** 420. **2.** 180. **3.** $94\frac{1}{2}$. **4.** 660





**5.** $8\frac{1}{2}$. **6.** $-21$. **7.** $30\frac{1}{2}$. **8.** $7\frac{1}{2}$.

**9.** $\frac{5n(9-n)}{12}$. **10.** $\frac{n(17+7n)}{21}$.

**11.** $\frac{7(3\sqrt{2}+4)}{\sqrt{2}+1}$. **12.** $\frac{n-1}{2}$.

**13.** $n(a^2+3ab+b^2-abn)$. **14.** $369\frac{1}{16}$.

**15.** $6\frac{1}{2}$, 8, $9\frac{1}{2}$, 11, $12\frac{1}{2}$, 等, $852\frac{1}{2}$.

**16.** 680. **17.** 3. **18.** 48. **19.** 90.

**22.** 7500. **23.** 247950. **24.** 3874.

**25.** $\frac{2n^3-n-1}{2}$.

**LI.** **1.** (i) $\frac{1}{27}$, (ii) $-\frac{243}{16}$, (iii) $\frac{b^5}{a^3}$ **2.** $\frac{16}{9}$.

**3.** $-\frac{1}{128}$. **4.** (i) $\pm 6$, (ii) $\pm 42$, (iii) $\pm a^2b^3$.

**5.** $-2$, 4; $\pm 6$, 3, $\pm\frac{8}{3}$; 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{9}{4}$, $\frac{27}{8}$.

**LII.** **1.** $16\{(\frac{3}{2})^n-1\}$. **2.** $39\frac{117}{256}$.

**3.** $\frac{a}{r^n-1}$, $\frac{r^n-1}{r-1}$. **4.** $\frac{27}{2}\{1-(\frac{8}{9})^8\}$.

**5.** $4\frac{89}{144}$. **6.** $6\frac{3}{5}$. **7.** $5\frac{5}{9}$.

**8.** 5. **9.** $\frac{b^n-a^n}{a^{n-3}(b-a)}$. **10.** $1\frac{4}{5}$.

**11.** 8190. **12.** 3·4142. **13.** $6x^2-5x-6$.

**15.** 3, $\frac{3}{4}$, 等, 或ハ 1, $\frac{3}{4}$, 等. **16.** 12, $-4$, 等. **17.** 2.

**LIII.** 1. 0.　　2. 1195742.　　3. $1\frac{1}{4}$.

4. $\frac{b^n-a^n}{a^{n-2}(b-a)}$.　　5. $\frac{1}{8}$.　　6. $104\frac{1}{3}$.

7. $76a+57b$.　　8. $\frac{3}{28}\{1-(\frac{4}{3})^8\}$.　　9. $5\frac{5}{64}$.

10. $161\frac{3}{32}$　　11. (i) $71\frac{1}{4}$.

(ii) $-6$; (iii) $\frac{16}{7}\{1-(\frac{3}{4})^6\}$, $\frac{16}{7}$; (iv) $6\frac{53}{88}$;

(v) $\frac{3}{2}\{1-(\frac{2}{3})^6\}$, $\frac{3}{2}$.

13. 1, 3, 5, 等.　　14. $5\pm2\sqrt{6}$.

17. 2, 6, 18.　　18. 1, 3, 5, 7, 9.

19. 9 及ビ 12, 或ハ 1 及ビ $-4$.

**LIV.** 2. $\frac{7}{6}, \frac{7}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{3}, \frac{7}{2}$.　　3. $\frac{4}{5}, \frac{8}{9}, 1, \frac{8}{7}$.

**LV.** 1. $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$; $\frac{1}{2}$.　　2. $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$; $\frac{1}{4}$.

3. $\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$; $\frac{1}{12}$.

4. $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}\right)$; $\frac{1}{6}$.

5. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+n+1}$; $\frac{1}{x+1}$.

6. $\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1+x}-\frac{4}{1+(n+1)x}\right\}$; $\frac{1}{x(1+x)}$.

7. $\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$.

8. $\frac{1}{4}\cdot n(n+1)(n+2)(n+3)$.

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(2n-1)(2n+1)(2n+3)$.



10. $\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.　　11. $\frac{2}{3}\cdot n(n+1)(2n+1)$.

12. $na^2+n(n-1)ab+\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1)b^2$.

13. $na^2+n^2ab+\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)b^2$.

## 第六雜例題

**A.** 1. 48.　　3. $3x-7$, $x=\frac{7}{3}$.

4. (i) $x=-4$, $y=\frac{1}{7}$. (ii) $x=c$, 或ハ $x=a+b+c$.

5. 牛每頭 £20　羊每頭　£2.10s.

7. $ab^{-1}+32a^{-\frac{3}{8}}b^{\frac{1}{2}}$.　　8. $-\frac{1}{23}(73+40\sqrt{3})$, $\sqrt{8}+\sqrt{17}$.

9. $\frac{20}{7}\{1-(\frac{3}{4})^8\}$, $\frac{20}{7}$.

10. $109\frac{11}{21}$, $119\frac{1}{21}$, …$290\frac{10}{21}$, 和 4000.

**B.** 1. $x-8y+4z$.　　2. $(nx+my)(mx+ny)$, $(x-y)(x^2+y^2)$.

4. (i) $x=\pm\sqrt{ab}$, (ii) $x=7$ 或ハ $-2$.　　9. $a^3+b^3-c$.

8. (i) $-1040$, (ii) $4\frac{1}{6}$.　　9. 71071.　　10. 88 ヤード.

**C.** 1. 2.　　2. $2x^2-3xy+2y^2$.　　4. $3(x-3a)^2(x^2-4a^2)$.

5. $\frac{6a^2}{(a^2-4)(a^2-1)}$.　　6. 一時間ニ 5 里, 100 里

7. 1.　　9. (i) 0, (ii) $8\frac{1}{3}$.　　10. 9 及ビ 25.

**D.** 1. $x^4-a^4$.　　3. $\frac{(x-4)(x-7)}{x^2}$.

4. (i) $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{3}$, (ii) $x=\pm5$; $y=\pm3$, $x=\pm\frac{15}{8}$, $y=\pm\frac{5}{3}$.

5. 48.　　6. $x^2-40x+8=0$.　　7. $x^{3}-x^{-1}+4x^{-3}$.

9. (i) $-7\frac{853}{1536}$, (ii) $5\frac{2}{3}$.

**E.** 1. $-x^2-xy-y^2$.　　2. $3a^2+4ab+b^2$.

3. $a-b$, $(a-b)(4a-b)(3a^2+b^2)$.　　4. $(x+1)^2$.

5. $-mn$.　　6. $x=-\frac{5}{6}$.　　8. $2x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{2}}-4y$.

9. (i) $\frac{1}{2}n(n-7)$, (ii) $\frac{2}{3}$.　　10. $22\frac{1}{2}$ 及ビ 45.

**F.** 1. $8xz$.　2. $a^2+b^2+c^2-2ab+ac-bc$.　4. $-\dfrac{2}{a+2x}$.

5. (i) $x=3, y=7, z=4$. (ii) $x=4\frac{1}{2}$. (iii) $x=\pm 9$, $y=\pm 3$.

6. 其式ハ $(x^3-2x^2+5x-6)^2$.　　7. $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+\sqrt{7})$.

**LVI.** 1. 2730, 5040, 40320.　　3. 420, 34650, 172972800.

4. 1260.　5. 120, 210.　6. 720.　7. 8.

8. 1820, 3003, 6.　9. 105.　10. 5.　15. 210.

16. 364.　17. 60.　18. 90.　19. 420.　20. 9.

**LVII.** 1. $x^6+6x^5a+15x^4a^2+20x^3a^3+15x^2a^4+6xa^5+a^6$.

2. $1-5x^2+10x^4-10x^6+5x^8-x^{10}$.

3. $81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4$.

4. $16a^4+96a^5+216a^6+216a^7+81a^8$.

5. $64x^{12}-192x^{10}+240x^8-160x^6+60x^4-12x^2+1$.

6. $y^7-7y^6x+21y^5x^2-35y^4x^3+35y^3x^4-21y^2x^5+7yx^6-x^7$.

7. $405a^8b^2$.　　8. $126720x^{16}$.　　9. $-14a^3$.



10. $210x^6$.　　11. $1140x^{17}$.　　12. $231x^{20}$.

13. $2a^4+12a^2b+2b^2$.　　14. $2a^6+30a^4b+30a^2b^2+2b^3$

15. $2a^8+56a^6b+140a^4b^2+56a^2b^3+2b^4$.　　16. $70x^4$.

17. $252x^5$.　　18. $90720x^4y^4$.　　19. $70a^4x^4$.

20. $126a^5x^4$ 及ビ $126a^4x^5$.

21. $a^{12}$, $12a^{11}x$. $66a^{10}x^2$; $66a^2x^{10}$, $12ax^{11}$, $x^{12}$.

24. 96059601, 997002999.

**LIX.** 1. $(x+1)(x-1)^2$.　　2. $(x^2+1)(x+1)^2(x-1)^2$.

3. $(1-x)^2(1+x+x^2)$.

4. $(1-x)^2(1+x)^2(1+x+x^2)(1-x+x^2)$

5. $(x-y-a-b)(x+y-a+b)$.　　6. $(x+y-1)(x-y-2)$

7. $(x+2y-4)(x-4y+2)$.　　8. $(a+b-c+f)(a-b-c-f)$.

9. (i) $x^4+x^3y+x^2y^2+xy^3+y^4$.

(ii) $x^6-x^5y+x^4y^2-x^3y^3+x^2y^4-xy^5+y^6$.

(iii) $x^7-x^6y+x^5y^2-x^4y^3+x^3y^4-x^2y^5+xy^6-y^7$.

12. $(2a+3b)^2-(2a+3b)(3a+2b)+(3a+2b)^2$.

13. $3(2a+4b-4c)^2-3(2a+4b-4c)(a-b+7c)+3(a-b+7c)^2$.

**LX.** 9. $-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$.　　10. $4abc$.

11. $2abc$.　　12. $2abc(a+b+c)$.

13. 3; $5(x^2+y^2+z^2+yz+zx+xy)$.　　15. $a+b+c$.

16. 1.　　17. $\dfrac{1}{abc}$.　　18. $\dfrac{bc+ca+ab}{a^2b^2c^2}$.

## 答式

**19.** 0. **20.** $\frac{a+b+c}{abc}$.

**24.** $(b+c)(c+a)(a+b)$.

**75.** (i) $x-8y$. (ii) $1+x+x^2$. (iii) $x^2-3x+2$. (iv) $2x^2-3x+4$.


明治二十五年四月二十日出版
明治二十五年四月十八日印刷
訂正三版

明治二十四年八月廿五日出版
明治二十四年八月十八日印刷
訂正二版

明治二十四年三月五日出版
明治二十四年二月廿六日印刷
第一版

定價金壹圓





發兌元 圖書出版會社
大阪市東區北久太郎町四丁目番外壹番屋敷

印刷者 橘磯吉
東京市京橋區瀧山町七番地滊關社

發行者 梅原忠藏
圖書出版會社名代人
大阪市東區北久太郎町四丁目番外壹番屋敷

翻譯者 小出壽之太
京都市上京區新椹木町竹屋町二番戸

翻譯者 中久木信順
京都市愛宕郡下鴨村二百卅三番戸

# 特別大賣捌所

飛彈高山
駿河靜岡
仝高岡
仝富山
仝富山
越中富山
仝根室
北海道函館
仝飯田
信濃長野
仝高田
仝新潟
仝葛塚
仝三條
仝水原
仝長岡
仝長岡
越後長岡
仝
仝
仝
仝
仝
東京

枡重兵衛
廣瀬市藏
車次郎七
眞田善次郎
大橋甚吾
中田清兵衛
伊藤直三郎
惺文社
奧村書店
西澤喜太郎
室直三郎
林留吉
櫻井產作
茲卷七十郎
樋口小左衛門
西村六平
覺張治平
松田周平
目黑十郎
西原國太郎
大川屋書店
小林新兵衛
大倉孫兵衛
覺張榮三郎
三省堂書店

仝府中
仝深津
仝福山大黑町
備後尾道
仝井原
備中倉敷
仝
仝
備前岡山
大和奈良橋本町
仝龜岡西町
丹波柏原
兵庫縣神戶
仝
若狹小濱
近江大津
仝津
伊勢津
越前福井
仝大聖寺福田町
仝
加賀金澤
仝
尾張名古屋
美濃岐阜

前川大成堂
藤井周四
妹尾先進堂
三木半兵衛
茨田元次郎
西澤六藏
森禎藏
仮谷槌太郎
武內彌三郎
坂田一郎
內藤半七
中井正吉
熊谷幸助
大北安之助
細川治兵衛
小川儀平
河島九右衛門
豐住謹次郎
岡崎左喜助
深城伊三郎
池善平
近田太三郎
片野東四郎
川瀬代助
三浦源助

# 圖書出版會社藏販甲部賣捌所

| | |
|---|---|
| 德島市通町三丁目 | 阪井萬吉 |
| 京都市上京區寺町通二條下ル | 河合卯之助 |
| 京都市上京區寺町通二條下ル | 梅原支店 |
| 愛媛縣伊豫國西條町 | 金川支店 |
| 兵庫縣神戶市元町五丁目 | 吉岡支店 |
| 福岡縣筑前國博多中島町 | 積善館支店 |
| 仝南區塲町三丁目 | 岡本宇野 |
| 仝南區心齋橋北詰北へ入 | 中村芳松 |
| 仝東區北久寶寺町四丁目 | 濱本伊三郎 |
| 仝東區北久太郎町四丁目 | 岡本仙助 |
| 仝東區安土町四丁敷 | 積善館 |
| 仝東區備後町四丁目 | 吉岡平助 |
| 仝東區備後町四丁目 | 梅原龜七 |
| 大阪市東區淡路町三丁目 | 金川善兵衛 |

# 特別大賣捌所

紀州和歌山　平井文助
仝　山中專吉
土佐高知　澤本駒吉
仝　世羅織次郎
伊豫松山　向井藏次郎
仝　高松　宮脇仲次郎
仝　丸龜　鹽田保藏
讃岐琴平　箸方儀三郎
仝　大工町　山本吉太郎
因州鳥取上魚町　横山安次郎
伯耆米子　今井兼文
仝　園山喜右衛門
仝　大芦和七
出雲松江　川岡清助
仝　山口中市町　小原塞翁堂
仝　赤間關　山名松次郎
長門船木　生田新一
仝　山口　宮川清吉
周防岩國　白銀伊兵衛
仝　忠海　田上三郎
仝　西横町　松村善助
仝　友田藤助
安藝廣嶋　清水庫三郎
備後尾道久保町　兒玉保兵衛

壹岐郷之浦　西村書店
對州嚴原今屋敷町　倉成惣二郎
仝　甲斐治平
豐後大分　山川庄三郎
豐前小倉魚町　辛島倉吉
薩摩鹿兒嶋　吉田幸兵衛
仝　天草山口村　澤田周次
仝　高瀬　浦田伊平
肥後熊本　長崎次郎
仝　佐世保港　五良川信湯
仝　安中半三郎
仝　小野左右輔
仝　長崎　鶴野常藏
仝　田中房一郎
仝　書籍會社
肥前佐賀　河内莊助
仝　赤司平助
仝　小柳幸次郎
筑後久留米　蒻竹儀平
仝　高田芳太郎
筑前博多　林斧助

スミス氏代数学

チャーレス・スミス 著

中久木 信順

小出 寿之太　共訳