實用統計學

劉迺敬譯

南京書店出版

1932

第一章

次數分配式

*I*編列記分成爲次數分配式（記分平時稱爲分數例如算學分數英文分數等）

1. 普通的測量：連續的及間斷的次序(Series)得着許多記分後能案他們的大小排成一個次序——測驗心理的社交的特性(Trait)或能量(Capacity)時，我們所得的所處理的事實，大半可列成一個連續的次序，一個連續的次序，可界說之爲一個次序，在理想上雖已經經過許多次數的分裂，但要再分之，還可以行，例如起於白癡止於天才的 *IQ* 量表，我們總以爲他的極小的準個(Unit)爲1，他是一個以1進的量表，但是說應用精確的測驗方法，亦得不着100.89 *IQ*. 100.83 *IQ*. 等等，也沒有理由，試看所有的能量，爲心理測驗，心理量表，教育測驗，教育量表所測驗的，及體格的特象，如頭圍的大小，體長，體重等等，沒有一個不表示連續的現象，所以任何測驗記分在所用的量

表之全距離(Range)以內的，不拘整數分數，皆能存在，皆有意思，苟在眞正的連續次序上找出缺處，則缺處之發生，大概由於受測驗的人數過多，或由於測驗的工具不精，或有別的原因，並不是沒有測驗記分能存在於這個缺處。

但是也有測量記分，不能列成連續的次序的，例如店舖裏的職員每星期的薪金，自十元至二十元不等，這個薪金量表的單個或爲一元，或爲五角，但絕對沒有一個人每星期的薪金爲 17.53 元，再舉一個例子，某地方每家的小孩數目，平均計算起來爲4.57 個，但是人家小孩的數目，或爲四個，或爲五個，決沒有4.57 個的。而四與五之間，即有一個缺處了。像這些次序含有缺處的，叫做間斷的次序。

所幸在心理學方面所得着的一切測驗記分，排列起來，總表示連續的現象，如此便把我們的問題，大大的弄簡單了，我們就來研究方法，處理連續的材料，把間斷的次序，暫且擱下，等到後面再研究他。

2. 連續次序內的測驗記分之記區法——由測驗或實驗所搜集的材料，往往只爲一串數目字，或爲一堆數碼，一點意思都沒有，把他們整理分區成爲一個系統後，纔看出意思來，第一步在組織材料，把測驗記分分到區域(Interval)裏去，組合起來，分區的辦法，共分三段，舉之於下：

(1) 全距離(Range)的決定——全距離爲最大的記分和最小的記分的差別，所以

全距離＝最大的記分－最小的記分

(2) 區域大小及區域數目的決定——區域的大小，及區域的數目，隨測驗記分的全距離及種類而定。

(3) 記分的編列(Tabul tion)——把分立的記分，編列到適宜的

區域裏。

第　一　表

五十四個智力測驗記分

第一部　　原來的記分　　(分散的)

185	174	127	183	168	*126	177	154	157	189	172
*201	158	160	179	184	155	137	177	164	198	176
185	197	151	188	188	169	195	165	185	188	164
195	176	185	185	179	146	182	153	158	160	191
176	138	185	155	178	151	144	191	170	157	

*最大的記分＝201　　*最小的記分＝126

第二部　　用三個方法把把上面的記分組合起來成爲一個記分分配式

(A)			(B)		(C)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
記分(X)	編列記分	次數分配式(F)	記分(X)	F	記分(X)	F
200到205	1	1	200—204·99	1	200—204	1
195,,200	1111	4	195—199·99	4	195—199	4
190,,195	11	2	190—194·99	2	190—194	2
185,,190	卌卌	10	185—189·99	10	185—189	10
180,,185	111	3	180—184·99	3	180—184	3
175,,180	卌111	8	175—179·99	8	175—179	8
170,,175	111	3	170—174·99	3	170—174	3
165,,170	111	3	165—169·99	3	165—169	3
160,,165	1111	4	160—164·99	4	160—164	4
155,,160	卌1	6	155—159·99	6	155—159	6
150,,155	1111	4	150—154·99	4	150—154	4
145,,150	1	1	145—149·99	1	145—149	1
140,,145	1	1	140—144·99	1	140—144	1
135,,140	11	2	135—139·99	2	135—139	2
130,,135		0	130—134·99	0	130—134	0
125,,130	11	2	125—129·99	2	125—129	2
		總次數＝54		N＝54		N＝54

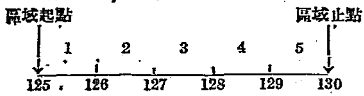
分區的三段方法，已經在第一表裏表白出來，第一表裏的記分，代表54個大學學生的智力測驗記分，因爲最大的記分爲201，最小的記分爲126，故全距離等於201－126＝75個準個，找出全距離之後，就要求區域的數目了，決定區域的數目之最好的普通方法，在試定一個區域的量，使全距離得爲之分爲至多20個至少10個區域，故區域的數目，等於全距離被區域的量除，我們的全距離爲75個準個，若假定一個區域包含五個準個，卽以5除全距離，便得着15個區域，若以一個區域包含3個準個，卽以3除全距離，則得着25個區域，若以一區域包含10個準個，卽以10除全距離，則得着7.5區域(因爲一個區域之含有五個，三個，十個準個者，其實所包含者小於五個，三個十個準個故全距離被區域之量除過之後，得數爲整數者，應於其上加1，得數爲分數者，應變爲整數，故以每個區域包含五個準個則有6個區域；以每個區域包含3個準個，則有26個區域；以每個區域包含10個準個，則有8個區域，參看第一表)

$$區域數目=\frac{全距離}{區域的量}=大於10個小於20個$$

知道全距離及區域數目之後，我們就要編列記分了，編列記分歸於區域裏的方法，已經在第一表第二部裏表白出來，第一表第二部的第一直行的頂上有"記分"兩個字，(通常以×代表之)在這兩個字下，有一行區域，這行區域，是按區域的大小排列而成的，最小的區域在頂底下，最大的區域在頂上頭，(以頂底下的區域爲第一個區域，一直數上來)頂底下的區域125－130，表明這個區域從125起到130止，第二個區域爲130－135，表明這個區域從130起，到135止，第二直行的頂上，有"編列記分"四個字，其下有一行記分符號，正在區域的對面，每個符號，代表一個記分，代表每個記分的符號，必須擺在相當

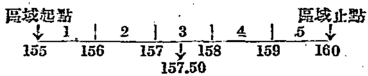
的區域裏，在第一表第一部裏，第一個記分爲185，卽在185—190區域裏，記一個符號，第二個記分爲201，卽在200—205區域裏，記一個符號，第三個記分爲188，卽在185—190區域裏，記一個符號，其餘照樣做下去，一直把所有的記分，都擺在相當的區域裏，再把每個區域裏的符號，一齊加起來，擺在第三直行內，此行表示記分分配的情形，所以這行的頂上，有"次數分配式"五個字，通常用F代表之，這行的底下，有"總次數"三個字，表示記分的總數，通常用N代表之，本題的$N=54$。次數分配式的第一個區域的下限(Lower Limit)爲125。記分的最小的爲126，以五個準個爲一個區域時，用126—131區域，或用125—130區域都行，在理想上，他們沒有區別，不過用125—130區域，編列記分及推算時，都覺得便利些。

3. 表明區域的界限的三個法子 區域的界限，可用三個法子表白出來，第一表內第二部的第一第四第六三直行，是表白區域界限的三種方法，第一直行的第一個區域爲125—130，表明所有的記分，自125起，一直到130而不包括130止，皆應歸納到這個區域裏，第四直行的第一個區域125—121.99，表明同樣的事實，只是格外明確罷了，他的上限爲129.99，可知凡記分包含小數的，只要他的整數爲129.無論他的小數爲什麼，皆應歸納到這個區域裏，但130不能包含在內。第六直行也是表明同樣的事實，比第一直行還清楚些，但是不及第四直行了，125—129表明這個區域自125起至129止，可知第一第四第六三直行是表白一件事實的三種方法，看下面的圖便更明白。



第四第六兩直行皆比第一直行好，學者宜用第四直行或用第六直行，第一直行不好的地方，可用一個比方，把他說出來，假定有一個記分爲160，我們很容易把他擺在 155－160 區域裏，因爲這個區域的上限爲 160，所以次數分配式的準確，即在明白弄清區域的界限，學者須切記之。

我們常常假定每個區域裏的記分，均勻的散佈於這個區域裏，不管這個區域包含幾個準個，三個準個也好，五個準個也好，這種假定總能成立，若是我們想用一個量，代表一個區域裏所有的記分，那嗎這個區域的中心點，必爲最合理的選擇了，譬如在第一表第二部下第(6)直行的155－159區域裏有六個記分，155，155，157，157，158，158他們可被這個區域的中心點代表之，這個區域的中心點爲 157.50，請看下圖。



求區域的中心點的方法爲：

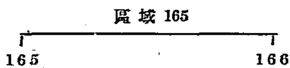
$$中心點＝區域的下限＋\frac{區域的上限－區域的下限}{2}$$

譬如 155－159 區域的中心點，必爲 $155+\frac{160-155}{2}=157.50$.因爲這個區域的長度爲5，他的中心點必爲2.5，把2.5 加到這個區域的下限上，即爲157.50。

常常有人問道，域區的中心點，能不能代表一個區域裏所有的記分？在回答這個問題之前，再把155－159區域裏的記分拿來看看，有兩個爲155，小於這個區域的中心點，有兩個爲157，差不多等於中心

點，有兩個為 158，大於中心點，再把 160—164 區域及 145—149 區域裏的記分拿來看看，在這兩個區域當中，每個皆有四個記分，兩個記分大於中心點，兩個記分小於中心點，有時候區域裏的記分，雖沒有這種持平對稱的現象，但是我們有很好的證據，能使區域的中心點，代表區域裏的記分的假定得以成立，有時候大多數記分，偏於區域中心點的一邊(參看第88頁)那嗎以中心點為代表的假定，就不能用了，但是處理智力測驗的記分分配式或教育測驗的記分分配式，以區域的中心點為代表的假定很穩妥，若是記分數目大，那就很好，因為記分的數目，在區域中心點以上的，差不多等於記分的數目在區域中心點以下的。

4. 在連續的次序裏一個記分的意思 ——我們已將關於記分分區的事件，關於認清區域的上限下限的事件說過了，現在我們又想把一個記分的意思，弄得清楚些，譬如有一個智力測驗的記分為 165 點，假定這個記分，占據量表上一段空間，那嗎在 165 和 166 之間的記分如165.3,165.8 等等，皆必在這段空間之內，皆應以 165 視之，請看下面的圖：

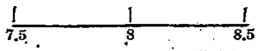


所以記分165，表白一個人只做對了165個題目，或是他差一點便做完了 166 個題目。

就動作 (Performance) 量表而言，一個記分，或等於8，或大於8，而小於9的，皆記之以8，擺在8—9 區域或 8—8.99 區域裏：至於作品 (Product) 量表，例如桑戴克的書法量表，記分 8 代表所有的量之在 7.5和8.5 之間的，所以記分 7.7,8.0,8.4,等等，皆以8 代表之，若是把

這種量表上的一個記分，用一段直線表示出來，8即爲7.5—8.5區域的中心點，看下面的圖：

區域 8



這種記分的方法：多用於書法，繪畫，作文量表上。

就上面看起來，在連續次序裏，一個記分的意思，隨記分的方法而變更，若是記分的方法，沒有在測驗上說明出來，最妥當把記分22當作22—23，不要把他當作21.5—22.5

5. 集中趨勢的度量(Measures of Central Tendency)——記分編成次數分配式之後，我們就要求集中趨勢的度量了。集中趨勢度量的大小，告訴我們兩件事，(1) 他是一個量可以代表一個團體所得着的一切記分，因此，一個團體的動作，得着他做代表，便有一個簡明的意思。(2) 能使我們藉團體動作之代表者，比較團體，定其優劣，我們有三個方法，測量集中趨勢：第一個爲均點，第二個爲中點第三個爲衆點，把這三個方法，在下面一一的說出來。

1. 均點 (Mean)

均點是測量集中趨勢最著名的一個方法，他的界說爲："把所有的記分加起來，用記分總次數除"。譬如一個人做了五天工，第一天賺了三塊錢，第二天四塊錢第三天三塊半錢，第四天五塊錢，第五天四塊半錢，他的每天平均的工錢，等於五天工錢的總數，用做工的天數除，所以：

$$分散的次序的均點=\frac{\Sigma(記分)}{N} \text{——} (1)$$

公式(1)裏的N，代表一個次序裏記分的總次數符號(Σ)表明總和的意思。

記分組合起來成爲次數分配式後，求他的均點的方法，和上面所說的稍有不同，第二表裏的兩個例題，把這種方法淸淸楚楚的表示出來，第一個例題，含有54個智力測驗記分。編成次數分配式後，求他的均點的方法如下：先把每個區域裏的記分數目 F，和該區域的中心點 X 相乘得着 FX 行，再把所有的 FX 加起來，用 $N(54)$ 除一下，即得着均點了，用區域的中心點，代表區域裏的記分，卽因爲記分經過組合歸到區域裏去後，他們便失掉了本來面目，不得不用他們所在的區域的中心點，代表他們，因此我們不得不把每個區域裏的記分數目 F，和該區域的中心點 X 相乘，以後把所有的 FX 加起來，再用 N 除一下，求均點的公式爲

$$X=\frac{\Sigma FX}{N} \text{———————} (2).$$

第二表的第二個例題，也是一個例子，表明怎樣推算組合的材料的均點，這個例題的次數分配式代表200個男子的勾消測驗記分(Cancelation Test Scores)，我們先把記分分到九個區域裏，因爲每個區域包含4個準個，所以每個區域的中心點，等於該區域的下限，加上該區域所有的準個的半數，譬如一個區域的下限爲104，再加上該區域所有的準個的半數2，卽得着該區域的中心點了，FX 行的總數爲23988，$N=200$，應用公式(2)卽求得均點爲119.94。

在上面兩個例題裏，我們已經表明怎樣推算一羣人的記分的均點，但是我們也可應用公式(1)及公式(2)推算一個人的許多測驗記分的均點。譬如我們把一個人對於光的反射時間，測量一百次；以後把這一百個記分，編成一個次數分配式；那嗎求這個分配式的均點和求一百個人對於光的反射時間的均點相同。

第二表

材料組合成爲次數分配式後求其均點中點衆點。

1. 此係54個智力測驗記分從第一表第二部裏取來的。

記分	中心點	F	FX
200—204·99	202·5	1	202·50
195—199·99	197·5	4	790·00
190—194·99	192·5	2	385·00
185—189·99	187·5	10	1875·00
180—184·99	182·5	3	547·50
175—179·99	177·5	8 26	1420·00
170—174·99	172·5	3	517·50
165—169·99	167·5	3	502·50
160—164·99	162·5	4	650·00
155—159·99	157·5	6	945·00
150—154·99	152·5	4	610·00
145—149·99	147·5	1	147·50
140—144·99	142·5	1	142·50
135—139·99	137·5	2	275·00
130—134·99	132·5	0	
125—129·99	127·5	2	255·00
		$N=54$	9265·00

(1) 均点 $=\frac{\Sigma FX}{N}=\frac{9265}{54}=171.51$

(2) $\left(\frac{N}{2}=27\right)$ 中點 $=175+\frac{1}{8}\times 5=175.625$

(3) 衆點落於(185—189)區域裏或在 187.5處

2. 200個人的勾消測驗記分。

記分	中心點	F	FX
136—139	138	3	414
132—135	134	5	670
128—131	130	16	2080
124—127	126	23	2898
120—123	122	52	6344
116—119	118	49 52	5382
112—115	114	27	3078
108—111	110	18	1980
104—107	106	7	742
		$N=200$	23988

(1) 均點$=\frac{\Sigma FX}{N}=\frac{23988}{200}\doteq 119.94$

(2) $\left(\frac{N}{2}=100\right)$ 中點$=116+\frac{48}{49}\times 4=119.92$

(3) 衆點落於(120—123)區域裏或在122處

2. 中點　(Nedien 以M代表之)

把記分案大小排成次序之後，中點卽是這個次序正中的一點，或說中點是一點，在他的上下，記分的數目均等。按這個界說求中點，卽是從次序的一頭，向前數下去，數到記分總次數之半$\frac{N}{2}$，卽到了中點所在的地方。

讓我們先注意簡單的散慢的次序的中點推算法。於此有兩種情形發生：第一種卽是總次數 (N) 爲單數，第二種卽是總次數 (N) 爲雙數，先說第一種，設有十一個連續的記分； 14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,$N=11$，$\frac{N}{2}=5.5$ 表明中點在第五個半記分的地方。我們先數進來五個記分，以後再數進來半個記分，卽到了中點的地方了。若是我們先從左向右數進來五個記分：14,15,16,17,18，我們卽到了19，因爲記分18，含有從18起一直到19，而不包含 19 的意思。再數進來半個記分(　)，卽到了19.5。19.5卽是中點，要想證明這個結果，卽可從右向左數進來5.5 個記分，先數五個記分進來，24,23,22,21,20，我們卽到了記分 20；再數.5個記分進來，卽到了19.5。19.5卽爲中點請看下圖：

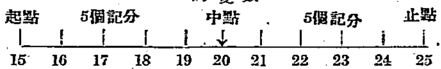
N 爲單數

起點		5.5個記分				中點			5.5個記分			止點
14	15	16	17	18	19	↑19.5	20	21	22	23	24	25

再舉例證明N爲雙數時他的中點的推算法，若是從上面十一個記

分裏，把記分 14 去掉，那嗎總次數就變爲雙數了，$N=10,\frac{N}{2}=5.0$．從左向右數進來5 個記分，15,16,17,18,19,卽到20,20卽爲中點，照樣自左向右數進來5 個記分：24,23,22,21,20．我們也到了 20 請看下圖：

N爲雙數



在上面所舉的兩個情形裏，記分表現連續的現象．若是第一個情形的十一個記分，表示間斷的現象，那就沒有一個量，恰好爲這個次序的正中點，符合中點的界說，但是記分的數目爲單數時，把他們案大小排成次序之後，居中的記分，卽爲第$\left(\frac{N+1}{2}\right)$個記分，所以第一個情形的居中的記分，爲第$\frac{11+1}{2}=6$個記分，卽是19,19 的左右皆有 5個記分，若是總次數爲雙數，推算中點的方法，就稍稍變更了，若是第二個情形的十個記分，表示間斷的現象，那嗎在這個次序裏，不但沒有正中點，又沒有居中的記分了，但是照例假定一個居中的記分，在兩個頂中的記分的中間，譬如$\frac{N+1}{2}=\frac{10+1}{2}=5.5$，表明假定的居中的記分，在 19 和 20 之間，爲19.5．(間斷的記分，組成次數分配式後，其中點的推求法，在 36 頁上，再研究之)

把連續的材料組成分配式，他的中點的推算法，在第二表的兩個例題裏表白之，第一個分配式的總次數 $N=54,\frac{N}{2}=27$. 中點必爲量表上的一點，在這點的兩旁，皆有27個記分，若是我們從這個分配式的下端，向上數，那嗎自 125—129.99 區域到 170—174.99 區域的上限，已經數了26個記分，但是我們所要的爲第27個記分，我們必須從175—179.99 區域裏拿出一個記分來，175—179.99 區域，共有八個記

分，假定這8個記分均勻的散佈于這個區域裏，則一個記分必定占這個區域的8分之1.每個區域，包含五個準個，每個區域的8分之1，必定包含$\left(\frac{1}{8}\times 5\right)$=.625準個；把.625加到175上，即得着這個分配式的中點了。所以中點$=175+\left(\frac{1}{8}\times 5\right)=175.625$，請看第一圖。

第二表的第二個例題，也是一個例子，表明中點怎樣求出；有了這個例題，可以除去關於第一個例題所發生的疑點，這個例題的分配式，共有200個記分。次數的一半，必爲100個記分，中點必定離這個分配式兩頭有100個記分遠，若是我們從這個分配式的下端第一個(104—107)區域，向前數上來，(從分配式的上端向下數亦可)數到52個記分時，即到了112—115區域的上限，但是116—119區域裏，有49個記分，52+49=101，便多了一個記分，所以我們必須從116—119區域裏，拿出48個記分來，補足100之數，48個記分，占116—117區域的四十九分之48，所以把116—119區域的49分之48，加到116上去，即得着中點了，中點$=116+\left(\frac{48}{49}\times 4\right)=119.92$第一圖(2)把這個中點的推求法，用圖表示出來：

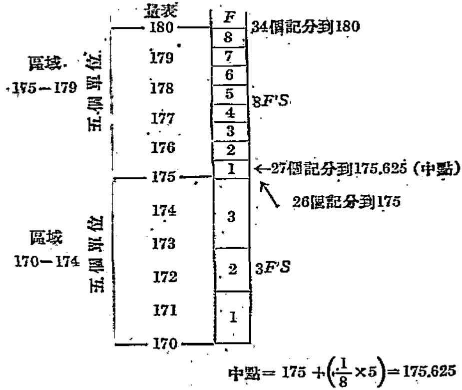
推算中點的步驟

(1) 求$\frac{N}{2}$記分。

(2) 從分配式的下頭起向上數，　直數到中點所在的區域的下一個區域爲止，但是把已經數過的記分的數目記着。

(3) 從$\frac{N}{2}$記分裏減去已經數過的記分的數目，把這個餘數，用中點所在的區域裏的記分的數目除一下，再乘以區域所包含的準個的數目。

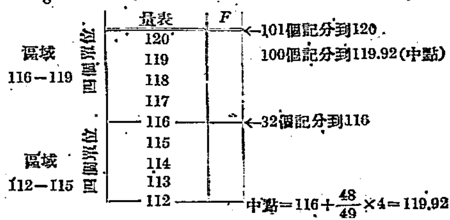
(4) 把從(3)所得着的分量加到中點所在的區域的下限上去，即得着這個量表的中點了。



第一圖（1）

推算中點

解釋：數進來26個記分時，即到了175處，數進來34個記分時，又到了180處，要求27在什麼地方，先求出5個單位(區域的長度)的$\frac{1}{8}$，再把這個量加到175上去，即得着175.625為中點了。



第一圖（2）

推算中點

解釋：數進來52個記分時，即到了116處數進來101個記分時，即到了120處，要求100在什麼地方，先求出4個準個(區域的長度)的$\frac{48}{49}$，再把這個量加到116上，即得着中點119.923.

3. 衆點(Mode以M_o代表之)——在一個次序裏，那個記分發現的次數最多他就是衆點，這就是衆點的最簡單的界說；譬如在10，11，11，12，12，13，13，13，14，14，15；次序裏，發現次數最多的記分為13，13即為衆點。在第一表第一部裏，185發現五次，多於無論那一個記分發現的次數，故185即為那個次序的衆點。

若是記分表示連續的現象，組合成為次數分配式後，"Crude"衆點，即為包含次數最多的區域的中心點，如我們不知道在第一表第一部裏記分185發現的次數最多，而為衆點，則即以185—189區域的中心點187.5為衆點，因為這個區域裏的次數最大，照樣找出第二表的Crude衆點為這個120—123區域的中心點122，因為這個區域裏的次數，亦為最大的原故。

Crude衆點，大半隨區域的大小而移動，可知衆點不穩定，不是測量集中趨勢的好度量，但是這種缺點，也不要緊，因為我們只用衆點表明次數分配式的集中點罷了，故可不須把衆點界說得十分仔細。

3. 差異的度量 (Measures of Variability)

在第二段內，我們已經說過集中趨勢的度量。集中趨勢的度量，代表一組記分，好像一個整體一樣。知道怎樣推算集中趨勢的度量以後，第二步就要推算記分的差異了，就要推算記分環繞集中趨勢的度量的佈散程度。

差異的度量的用處，可用一個比方，表白出來，若是我們測驗50

個男孩及50個女孩的聯想力，求出男孩的記分的均點爲34.6點，女孩的記分的均點爲34.5點，就兩組的均點而言，好像在這兩組人的動作上，沒有差別，不過我們考查各組原來的記分時，發現男孩的記分最大的爲51點，最小的爲15點，女孩的記分最大的爲45點，最小的爲19點，因此我們知道男孩的記分散佈的範圍比較的廣些，記分彼此的差異比較的大些，這種較大的差異，很能引起吾人的興趣。若是一羣學生的能力，不相上下，他們的記分，必大半離表尺上的一個定點很近，因此記分的全距離很短，差異很小，若是一羣學生的能力參差不齊，他們所得的記分，亦必定大小不一，因此記分的全距離必長，差異必大，現在有四種測量記分的差異的法子：

(1) 全距離，

(2) 四分差，

(3) 標準差，

(4) 平均差。

(1) 全離距——在第一表裏，記分組合成爲次數分配式後，我們就要用到全距離了，因爲全距離卽是最大的記分和最小的記分的差別，就前面所舉的比方而言，男孩記分的全距離，自然爲51－15＝36點，女孩記分的全距離，自然爲45－19＝26點，可知全距離是表白記分散佈的情形的一種度量，他包括分配式的全體，若是我們要比較兩組記分的差異，只求其大概，不管其精確，不防用這種度量，若是兩組記分的數目太小，不需精確的度量時，更不防用他，因爲全距離只能顧到最大的記分及最小的記分，其他記分散佈的情形皆全不得而知，若是記分分配式裏缺點又大又多，則其全距離卽不可靠。

(2) 四分之一差(或簡稱之爲四分差)——設有一個分配式把他

的第七十五分點和第二十五分點的距離，用2除一下，所得的一段，即叫做四分差，用Q代表之，第25分點，通常用Q_1代表之，他是量表上的第一個四分之一點，在這點之下，有記分全數的百分之二十五，第七十五分點，通常用Q_3代表之，他是量表上的第三個四分之一點，在這點之下，有記分全數的百分之75，照樣中點可用Q_2代表之，是量表上第二個四分之一點。

要想求Q，我們必須先找出第75分點及第25分點，求這些點的方法，和求中點的方法相同，求Q_1時，我們從分配式的底下，向上數進來記分全數的百分之二十五，求Q_3時，我們從分配式的底下，向上數進來記分全數的百分之七十五。

在第一表裏，我們有54個智力測驗記分，現在我們要求這個記分分配式的Q，請看第三表，先求Q_1，從分配的下端向上數進來記分總次數的四分之一，記分總次數為54，他的四分之一為$\frac{54}{4}=13.5$，我們從這個分配式的下端向上數，數到第十個記分時。我們已經達到155–159.99區域的下限，但是155–159.99區域有6個記分，我們所要的，只是(135–10=)3.5個記分，3.5個記分，占據155–159.99區域的$\left(\frac{3.5}{6}\times 5\right)=2.92$個單個，把2.92加到155上，即得着$Q_1=157.923$。

照樣再求Q_3，從分配式的下端向上數進來記分總數的四分之三，記分總數的四分之三為$\frac{3}{4}\times N=40.5$個記分，我們自分配式的下端向上數，數到第37個記分時，我們即達到180–184.99區域的下限，但是185–189.99區域有10個記分，我們所要的，只是(40.5–37=)3.5個記分，3.5個記分，占據185–189.99區域的$\left(\frac{3.5}{10}\times 5=\right)1.75$個準個，把1.75加到185上，即得着$Q_3=186.753$。

Q_1及Q_3求出後，我們即用下面的公式求Q：

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2} \text{——————} (3)$$

在本例題上 $Q=\frac{186.75-175.92}{2}=14.42$.

第三表

記分組合成爲分組式後求他的 Q,MD,及σ.

1.54個智力測驗記分(亦係第一表的材料)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
記分	中心點	F	x	Fx	Fx^2
200—204·99	200·50	1	30·93	30·03	956·66
195—199·99	197·50	4	25·93	103·73	2689·46
190—194·99	192·50	2	20·93	41·86	876·13
185—189·99	187·50	10	15·93	159·30	2537·65
180—184·99	182·50	3	10·93	32·79	358·39
175—179·99	177·50	8	5·93	47·44	281·32
170—174·99	172·50	3	·93	2·79	2·79
165—169·99	167·50	3	−4·07	−12·21	49·68
160—164·99	162·50	4	−9·07	−33·28	329·06
155—159·99	157·50	6	−14·07	−84·42	1187·79
150—154·99	152·50	4	−19·07	−76·28	1454·66
145—149·99	147·50	1	−24·07	−24·07	579·36
140—144·99	142·50	1	−29·07	−29·07	845·06
135—139·99	137·50	2	−34·07	−68·14	234·53
130—134·99	132·50	0	−39·07		
125—129·99	127·50	2	−44·07	−88·14	3884·33
		$N=54$		837·44	18353·88

均點＝171.57 (第二表)

$$\frac{N}{4}=13.5 \qquad \frac{3N}{4}=40.5$$

$$Q_1=155+\frac{3.5}{6}\times5=157.92$$

$$Q_3=185+\frac{3.5}{10}\times5=186.75$$

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{186.75-157.92}{2}=14.42$$

$$MD=\frac{\Sigma Fx}{N}=\frac{837.44}{54}=15.51.$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma Fx^2}{N}}=\sqrt{\frac{18353.88}{54}}=\sqrt{339.887}=18.44$$

第三表　續

2 200個勻砌測驗記分(此係第二表(2)的材料)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
記　分	中心點	F	x	Fx	Fx^2
136—139	138	3	18 06	54 18	978 49
132—125	134	5	14 06	70 30	988 42
128—131	130	16	10 06	160 96	1619 26
124—127	126	23	6 06	139 38	844 64
120—123	122	52	2 06	107 12	220 67
116—119	118	49	−1 94	95 06	184 42
112—115	114	27	−5 94	160 38	952 66
108—111	110	18	−9 94	178 92	1778 47
104—107	106	7	−13 94	97 58	1360 27
	$N=200$			1063 88	8927 30

均點＝119.94（第二表）

$$\frac{N}{4}=50 \qquad \frac{3N}{4}=150$$

$$Q_1=112+\frac{25}{27}\times4=115.70$$

$$Q_3=120+\frac{49}{52}\times4=123.77$$

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{123.77-115.70}{2}=4.04$$

$$MD=\frac{\Sigma Fx}{N}=\frac{1063.88}{200}=5.32$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma Fx^2}{N}}=\sqrt{\frac{8927.30}{200}}=6.68$$

再舉一個比方，表明推算分配式的Q，請看第三表 (2) ，這個分

配式的總次數$N=200$ $\frac{N}{4}=\frac{200}{4}=50$，最下的兩個區域104-107及108—111共有25個記分，第三個區域有27個記分，但是我們所要的，只是(50—25=)25個記分，25個記分，占據112—115區域的$\left(\frac{25}{27}\times 4=\right)$3 70個準個，把3 70加到112—115區域的下限上，即得着$Q_1=115$ 703。

再求Q_3，從分配式的下端向上數進來記分總數的四分之三，記分總數的四分之三爲$\left(\frac{3}{4}\times 200=\right)$150個記分，最下的四個區域，共有101個記分，第五個區域有52個記分，但是我們所要的，只是(150—101)=49個記分，49個記分，占據第五個區域的$\left(\frac{49}{52}\times 4=\right)$3 77個準個，把3 77加到第五個區域的下限上，即得着$Q_3=123,773$，再應用公式(3)，把Q_1及Q_3的量，代入公式(3)，即求得$Q=4$ 04個準個。

這兩個四分之一點，Q_1及Q_3，很重要，因爲這兩點是兩個界限，分配式中間的百分之五十，在這兩個界限之內，這兩點之間的距離，叫做內四分之一差，Q叫做半個內四分之一差，實際上，Q爲自Q_1到M及自Q_3到M的二個距離的均點，因爲Q容易求出，所以我們常常用他測量記分環繞中點散佈的疎密 若是分配式的記分聚集很密兩個四分之一點，相距即近，Q即小，若是記分散佈較疎，兩個四分之一點。相距即遠，Q即大。

若是分配式表示常態的現象，(參看第71頁)Q即指定兩個界限。一個在中點上，一個在中點下，在中點和中點上的界限之間，有記分全數的百分之二十五，在中點和中點下的界限之間 亦有記分全數的百分之二十五，因此中點即在Q_1和Q_3的正中間，這種Q公認之爲PE (Probable Error)PE只能應用於常態分配式上或用之以測量可靠度，但常人不察，往往將Q及PE混用之，PE係可靠量的度量，在第三章內，再詳論之。

推算Q的步驟（組合的材料）

求Q_1

1，求$\frac{N}{4}$

2，從分配式的下端向上數，一直數到Q_1所在的區域的下一個區域爲止，把已經數過的記分數目記着。

3，從$\frac{N}{4}$裏減去已經數過的記分數目，把餘數用Q_1所在的區域裏的記分數目除一下，再以區域所包含的單個數目乘之。

4，把從(3)所得着的分量加到Q_1所在的區域的下限上去，即得着Q_1了。

求Q_3

1，求$\frac{3N}{4}$

2，從分配式的下端向上數，一直數到Q_3所在的區域的下一個區域爲止，把已經數過的記分數目記着。

3，從$\frac{3N}{4}$裏減去已經數過的記分數目，把餘數用Q_3所在的區域裏的記分數目除一下，再以區域所包含的單個數目乘之。

4，把從(3)所得着的分量加到Q_3所在的區域的下限上去，即得着Q_3了。

求Q。

把Q_3及Q_1的量，代入公式(3)裏，

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{}$$

3 平均差 (Mean Deviation 以$M\ D$代表之)——假設我們有一羣記分，把他們各個和他們的集中趨勢（通常用均點有時也用中點及衆點）相減，得着一羣差數，有些差數爲正數，有些差數爲負數，把所有的差數都當作正數看，再把他們加起來，用記分的總次數除一

下，即得着平均差了，所以平均差可界說之爲"不管差數的符號，而求得的差數的均點"。

現在舉一個例子，把上面的界說，弄得格外明瞭些，設使我們有五個記分：6,8,10,12,14，他們的均點爲 10，先求每個記分和均點的差數 6－10＝－4,8－10＝－2,10－10＝0，12－10＝2，14－10＝4，因此由均點所求出的五個差數爲－4,－2,0,2,4,不管符號的正負，把這五個差數加起來，得着 12,再用 5 除一下，即得着$MD=\frac{12}{5}=2\ 4$

求簡單的分散的次序的平均差所用的公式爲

$$MD=\frac{\Sigma x}{N}\text{(數學的加法)}\text{——————}(4)$$

公式(4)中的 Σx＝差數的總和，N＝記分的總數

在第三表裏，我們有兩個問題，表明推算組合的次數分配式的平均差、第一個問題的均點，已經在第二表裏求出來爲 171 57 。要找出他的平均差，我們須先從均點求出差數來，因爲記分組合歸入區域後，即不能找出每個記分和均點的差數，只能求出每個區域的中心點和均點的差數。譬如 200－204.99 區域的中心點爲 202 50 把他和均點 171 57相減即得該區域的差數爲 30 93，下一個區域的中心點爲197 50 把他和均點171 50相減即得該區域的差數爲25 93，照樣做下去，一直到170－174 99 區域爲止。170－174 99 區域以上所有的差數，皆爲正數，因爲在 170－174.99 區域以上所有的區域的中心點，皆大於均點的緣故，從 165－169 99 區域起，一直到分配式的頂底下止，所有的差數，皆爲負數；因爲在165－169 99 區域以下所有的區域的中心點皆小於均點的緣故。所以 165－169 999 區域的差數爲 －4 07，即是 167 50－171 57＝－4 07 。照樣一直做下去 。最下的區域的差數爲 －44 07。

所須記得的，卽是差數是從每個記分或從每個區域的中心點減去均點而得的。

差數＝記分或區域的中心點－均點

所以記分或區域的中心點大於均點時，差數卽爲正數。記分或區域的中心點小於均點時，差數卽爲負數。

但是我們求差數時，不須把均點從每個區域的中心點裏減去。因爲每個區域包含五個準個，求出頂上頭的區域的差數爲 30 93 後，卽從 30 93 裏減去 5，得着 25.93 爲下一個區域的差數，再從 25 93 裏減去5，得着 20 93，爲再下一個區域的差數，照樣一直做下去，負差數的推求法，和正差數的推求法相同，譬如 93－5＝－4 07，－4 07－5＝－9 07；一直到－44 07爲止。

把自均點所求出的每個區域的差數，皆擺在第四直行內。因爲有些區域裏頭的記分多些，有些區域裏頭的記分少些；所以每個區域裏頭的差數，必須用該區域裏頭的記分數目乘起來；因此得着第五直行 fx，頂上的區域的 fx 爲 30 93；因爲這個區域，只有一個記分，所以我們只須把第四直行裏的 $x=30\ 93$，用第三直行裏的 $f=1$ 乘一下。下一個區域的 fx 爲103 72 該區域有四個記分。每個記分，皆有一個差數爲 25 93，所以我們必須把第四直行裏的 $x=25\ 93$，和第三直行裏的 $f=4$ 相乘起來。照樣把第四直行裏的各個 x，和第三直行裏的相當的 f 相乘，求出其他的 fx。

等到所有的 fx 皆求出來後，我們即不管符號的正負，把他們一齊加起來，再用 N 除一下，即得着 MD 了，本題的 $MD=\frac{837\ 44}{54}$ 或 15.51。

推求組合的分配式的平均差的公式爲。

$$MD=\frac{\Sigma fx}{N}\text{(數學的加法)}\text{——————(5)}$$

無論差數從那一個集中趨勢求出來。(或從均點，或從中點或從衆點均可)公式(5)皆合用。

在第三表裏的第二個問題，表示推算200個勾消記分的平均差，這二百個記分，被組合成爲一個分配式，而這個分配式的每個區域，包含四個準個，這個分配式的均點，已經在第二表(2)裏找出來爲119.94頂頭上的區域的中心點138和均點相減所得出來的差數爲18.06，下一個差數是從18.06減去4而得的。照樣一直做下去，把各個區域的差數求出來。

第五直行的fx，是把f及同行(橫行)的x相乘而得的。fx的總和爲1063.88；N爲200；應用公式(5)，求出本題的平均差爲5.32。

從常態分配式(參看第87頁)的均點起，向左量一個$M.D.$又向右量一個$M.D.$在這兩個界限之內，共有記分全數的百分之57.5。所以$M.D$比Q略爲大一點。若是$M.D.$大，即是記分環繞集中趨勢而散佈的範圍廣，若是$M.D.$小，即是記分環繞集中趨勢而散佈的範圍狹。

4. 標準差 (Standard Deviation 以σ代表之)……標準差在四個差異度量中，要算頂靠住，頂準確的，因爲這個緣故，做研究工夫的人，總是用他。標準差和平均差有幾個不同的地方：(1)推算平均差的時候，我們不顧符號的正負，把所有的差數，皆當作正數看。推算標準差的時候，我們把每個差數，自方一下，免掉處理符號的困難，(2)推算標準差所用的差數，係自均點求出的，不是從中點或衆點求出的，但是推算平均差時所用的差數，有時從中點或衆點求出的，代表標準差的符號，爲希臘字母σ。

標準差可界說之爲"一個度量，是把由均點所求出的每個差數，自方一下，總和起來，平均之，再開平方而得的"。現在舉一個簡單

的例子，表明σ的推算法。假設有五個記分6,8,10,12,14，他們的均點爲10，把均點從每個記分裏減去，得着五個差數　$-4,-2,0,2,4$，再把每個差數自方一下，得着16,4,0,4,16,五個數，把他們加起來，用五除一下，得着一個商數。最後開這個商數的平方根，即得着這個次序的　$\sigma=2.8283$，求分散的次序的標準差的公式爲

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}\text{——————}(6)$$

第三表表明組合的分配式的σ的推算方法，這個方法，和分散的分配式的σ的推算方法相同，不同的地方，即在由每個區域的中心點，減去均點，求得差數，把各個差數自方之後，再把他用同行的(橫行)次數f乘一下，因此我們得着一個直行fx^2。$fx=fxx$，所以求fx^2行的最簡單的法子即是把第四直行的x，和第五直行的fx相乘起來，譬如頂上頭的fx^2爲956.99　956.99爲x(30.93)和fx(30.93)相乘而得。下一個fx^2爲2689.66。2689.66爲x(25.93)和fx(103.72)相乘而得，其他fx^2皆是如此求出來的。所有的fx^2皆爲正數，因爲每個$-x$，總有一個$-fx$爲伴，把他們相乘起來，就得着一個正數了。把所有的fx^2加起來，得着18353.88，再用N除一下，即得着$\frac{\Sigma fx^2}{N}=339.887$。$\frac{\Sigma fx^2}{N}$可叫做差數自方的均點，再把差數自方的均點開平分，即得着$\sigma=18.44$。所以推算組合分配式的σ的公式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}\text{——————}(7)$$

第三表的第二個問題，也是一個例子，表明組合的分配式的σ的推算方法。第六直行的fx^2，也是照前面的方法，把x和fx相乘所求出來的。fx^2的總和爲8927.30，$N=200$，應用公式(7)即求出　$=6.683$。〔參看第三表(2)注意σ之推算〕

標準差較之平均差受機遇變動 (Change fluctuation)的影響小些，所以標準差是四個差異度量中之最穩定的，自常態分配式(71頁)的均點，向左量一個σ，又向右量一個σ，他的記分全數之百分之68.26，皆在這兩個界限之內。百分之68.26，約等於三分之二。其他略失常態，略失對稱的分配式，也能表示這種情形，譬如第三表內第一個問題的記分全數的三分之二，大約皆在記分 190 及記分 153 之間。

190＝171.57＋18.44

＝均點加標準差

153＝171.57－18.44

＝均點減標準差

σ總大於$M.D.$，$M.D.$總大於Q，他們的這種關係，可以核對推算的準確。

$IV.$ 推算$\bar{X}$，$M.D.$及σ的簡法

在第二表及第三表內，已經把$\bar{X}$，$M.D.$，及σ用長法求出來了。用長法推算組合的分配式的均點，是以每個區域的中心點乘同行（橫行）的次數f；再把這些乘積加起來，用N除一下。若是再求$M.D.$，及σ，我們必須先把所求得的均點、和每個區域的中心點相減，求差數。

所以用長法求統計的度量時，我們必須處理很大的數量及小數，有時候推算上很覺得麻煩。要想省時間，省工夫，我們必須應用假定均點法，或稱之為簡法。簡法只能用以推求$\bar{X}$，$M.D.$及σ。若是求M及Q，我們還須要用長法。簡法的用途很廣，學統計的人，必須把他應用到純熟的地步，不但能省時間，省工夫；並且推算相關係數時，(第四章)他是最不可少的。

第四表2表明用簡法推算 $\bar{X}$，M.D.及 σ。因爲要比較長法簡法的好壞，要把這種比較，弄得清清楚楚的，所以用這兩種法子，把 $\bar{X}$，M.D.及 σ 都推算出來，擺在第四表1及2裏。

1. 用簡法推算均點

用簡法推算均點，最種要的地方，即在先假定一個量爲均點 $\bar{X}_1$，以後再用更正法，更正他爲均點。關於假定均點一層，沒有一個固定的法則，最好在分配式的中心，選一個區域，用他的中心點做假均點，或選擇次數最大的區域的中心點爲假均點。本題最大的次數在 185—189區域裏，但是我們所假定的均點爲 167.5，不是 187.5，因爲 167.5 距分配式的中心比較的近些。均點假定之後，我們就要求更正量了，求更正量的步驟如下：

第四表

I. 長法

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
記分	中心點	F	FX	x	Fx	Fx^2
200—204	202•5	1	202•5	30•93	30•93	956.66
195—199	197•5	4	790•0	25•93	103•93	2689•46
190—194	192•5	2	385•0	20•93	41•86	876•13
185—189	187•5	10	1875•0	15•93	159•30	2537•65
180—184	182•5	3	547•5	10•93	32•79	358•39
175—179	177•5	8	1420•0	5•93	47•44	281•32
170—174	172•5	3	517•5	•93	2•79	2•59
165—169	167•5	3	502•5	−4•07	−12•21	49•69
160—164	162•5	4	650•0	−9•07	−36•28	329•06
155—159	157•5	6	945•0	−14•07	−84•42	1187•79
150—154	152•5	4	610•0	−19•07	−76•28	1454•66
145—149	147•5	1	147•5	−24•09	−24•07	579•36
140—144	142•5	1	142•5	−29•07	−29•07	845•06
135—139	137•5	2	270•5	−34•07	−68•14	2321•53
130—134	132•5	0				
125—129	127•5	2	255•0	−44•07	−88•14	2884•32
		$N=54$	9265•0		337•44	8353•88

$$1.\ 均點=\frac{\Sigma FX}{N}=\frac{9265}{54}=171\ 57$$

$$2\ MD=\frac{\Sigma Fx}{N}=\frac{837\ 44}{54}=15\ 51$$

$$3\ \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma Fx^2}{N}}=\sqrt{\frac{18353\ 88}{54}}=18\ 44$$

2 簡法

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
記分	中點	F	x^1	Fx^1	Fx^2
200—204	202 5	1	7	7	49
195—199	197 5	4	6	24	144
190—194	192 5	2	5	10	50
185—189	187 5	10 F大=31	4	40	160
180—184	182 5	3	3	9	27
175—179	均點=177 5	8	2	16	32
170—174	171 57 172 5	(散均點) 3	1	3(+109)	3
165—169	167 5	3	0	0	0
160—164	162 5	4	—1	— 4	4
155—159	157 5	6	—2	—12	24
150—154	152 5	4	—3	—12	36
145—149	147 5	1 F小=23	—4	— 4	16
140—144	142 5	1	—5	— 5	25
135—139	137 5	2	—6	—12	72
130—134	132 5	0	—7		
125—129	127 5	2	—8	—16(—65)	128
		N=54		174	770

I $\bar{X}=167\ 50$

$\bar{X}'=\frac{44}{54}=8148$ $\quad \bar{X}'^2=6639$

$Cx=8148\times5=4.07$

均點$=167\ 5+4\ 07=171\ 57$

$$2.\ MD. = \frac{\Sigma Fx' + c'(F_{小} - F_{大})}{N} \times 區域的長度$$

$$= \frac{171 + .8148(23-31)}{54} \times 5 = 15.51$$

$$3.\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{N} - \bar{X}'^2} = \sqrt{\frac{770}{54} - .6639} = 3.687 \times 5 = 18.44$$

(1) 求第四直行裏的差數。把每個區域當作一個準個看，則自一個區域的中心點，到其隣近的區域的中心點，亦必為一個準個。均點假定之後，卽把假均點和每個區域的中心點相減，求差數。譬如 170—174區域的中心點172.5，和假均點167.5相差爲一個區域，因此在x'直行下，及 172.5 橫行裏記一個1.(175—179)區域的中心點177.5 和假均點相差爲兩個區域；因此在X'直行下，及 177.5 橫行裏，記一個 2。照樣一直向上做去，因此得着 3,4,5,6,7,等差數，7 爲頂高區域 中心點和假均點相差之量(實在的差數自然爲7×5=35)。

165—169區域的中心點167.5和假均點167.5 相差爲零，因此在x'直行下，及165—169 區域對面，記一個0，在165—169 區域以下所有區域的中心點，皆比假均點小，所以以下的差數，皆爲負數，故 162.5和假均點 167.5相差爲—1，157.5 和假均點相差爲—2，其他的差數爲—3,—4,—5,—6,—7,—8,

(2) 第四直行做完之後，我們就求fX'直行了。簡法的fX'之推求法，和長法的fX'之推求法相同，即是第四直行裏的X'和第三直行裏的f相乘，簡法以區域爲準個，故由簡法所求出的差數，比較的小些，因此求fX'直行，亦比較的容易些，在假均點以上的fX'，皆爲正數，在假均點以下的fX'，皆爲負數，因爲fX'符號的正負視X'的符號之正負而定。

(3) 由fX'直行求校正量的方法如下：正fX'的總和爲109，負fX

的總和爲 −65，因此 fX' 直行的總和，等於 $109+(-65)=44$。再用 N $(=54)$ 把他們除一下，即得着校正量 $\bar{X}'=\left(\frac{\Sigma fX'}{N}=\frac{44}{54}\right)$ 81483，$\bar{X}$ 是以區域爲準個所求出來的，可叫做區域準個校正量，把 $\bar{X}'$ 用 5（區域的長度）乘一下，得着 4 07，此即爲 Cx，叫做記分校正量（Score Correction）再把 Cx 加到假均點 167 5 上，即得着均點 $=171\ 573$，（比較用長法及簡法所求出的兩個均點）

用簡法來求均的步驟（參省第四表2）

1 把記分組成一個分配式。

2. 在分配式的中間，選擇一個區域的中心點爲假均點。最好選擇次數最大的區域的中心點。

3 以一個區域爲準個，求每個區域的中心點和假均點的差數。

4. 把 X 和 f 相乘起來。

5. 求 fX' 的總和，再以 N 除之，所得之商，即爲校正量（$\bar{X}'$）校正量是以區域爲準個所求出來的，叫做區域準個校正量。

6. 用區域的長度，把校正量乘一下，得着 Cx，叫做記分校正量。

7. 把 Cx 加到假均點上，用代數的加法）求均點，Cx 有時候爲正數，有時候爲負數；隨假均點的大小而改變。但是把 Cx 加到假均點上求均點的方法，總是合用，Cx 或爲正數，或爲負數，皆不相干。

若是學者以爲簡法名不符實，請把簡法的第四第五第六直行，和長法的第五第六第七直行　比較看看。用簡法，不但可以省掉一個直行，並且因爲把一個區域當作一個準個看的緣故，推算上省了許多工夫。若是分配式包含許多大數用長法求均點，一定很麻煩。所以簡法的好處，就在省時候，省工夫。

2. 用簡法推算平均差

(A)從均點推算平均差

用簡法求平均差的好處，即在以一個區域的長度為一個準個，這種方法，免掉小數，縮短乘法，但是同時須求出一個校正量，校正Σfx。因此推算平均差的公式變複雜了。推算平均差的公式為

$$M\,D=\frac{\Sigma fx'+x'(F_{小}-F_{大})}{N}\times 區域的長度 \qquad (8)$$

〔從均點中點或衆點推算$M\,D$公式(8)皆合用〕

凡區域的中心點，小于均點者，把他們所有的次數皆加起來，用$F_{小}$代表之，凡區域的中心點，大于均點者　把他們所有的次數皆加起來，用$F_{大}$代表之。譬如在第四表裏，所有的中心點自 167 5 起到 127.5止，皆小于均點。171 57。他們所有的次數為 23，所以$F_{小}=23$。所有的中心點自172 5起到202 5止，皆大于均點，171 57，他們所有的次數為31，所以$F_{大}=31$

$F_{小}$及$F_{大}$皆從分配式的均點求出來的，學者須特別記之。譬如 165—169 區域裏有 3 個記分，因為這個區域的中心點 167 5，小于均點171 57，所以這三個記分歸到$F_{小}$裏去。$F_{大}+F_{小}=N$。學者求出$F_{大}$及$F_{小}$後，不防用這個方程式校對一下，本題的$F_{小}=23$，$F_{大}=31$；而$31+23=54$。

公式 (8) 的別項，還須加以解釋，x 係以一個區域為準個所求出的。求均點時，已經把x'求出來了，他等於 8148，$\Sigma fx'$是不管符號之正負，把所有的f'相加所得的，Σfx等於174。

現在把$\Sigma fx'$，x'，$F_{小}$，$F_{大}$，及N之量代入方程式(8)裏，則得着$\frac{174+8148(23-31)}{54}$，因此求得$M\,D=3\,102$個區域，若把他化為準個，還須把他用區域的長度乘一下，因此得着$M.D=3\,102\times5=15\,51$準個，(把這個得數，和用長法所求出的得數，比較一下)。所須注意

的，卽是用公式(8)求出$M.D.$後，必須把他用區域的長度乘一下；因爲$\Sigma fx'$及x'俱以一個區域爲準個求出的。

用公式(3)求分配式的$M.D.$最簡單。但是x'小於1個區域時，公式(8)才能給我們一個正確的$M.D.$因此公式(8)的用處，不免受限制，第四表的x'爲.8148，小於1個區域，因此公式(8)可合用，所以用簡法所求出的$M.D.$，和用長法所求出的$M.D.$相同。但是人往往忽略這種限制；因爲求均點時無論假均點爲什麼，總可以求出一個校正量來校正他，得着均點。但是求$M.D.$就不行了。只是x'小於1個區域時，公式(8)才合用，若是x'大於1個區域，我們即可用均點所在的區域的中點爲假均點，再從這個假均點求差數，並應用公式(8)求$M.D.$(在Kelley的統計學書裏第72頁上，還有一個方法，可以免掉以上所說的困難)。

用簡法由均點求MD.的步驟

(1)求x'(以一個區域爲準個)若是x'小於1，則

(2)用數學的加法求fx'的總和

(3)求$F_{小}$，$F_{小}$代表小於均點的記分的數目，求$F_{大}$，$F_{大}$代表大於均點的記分的數目。

(4)把$\Sigma fx'$，x'，$F_{小}$，$F_{大}$，及N的量，代入公式(8)裏求$M.D.$

第五表

用簡法從中點求MD(材料從第二表(2)裏拿來的)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
分記	中心點	F	x'	Fx'
136—139	138	3	5	15
132—135	134	5	4	20
128—131	130	16 $F_{大}=99$	3	48
124—127	126	23	2	16
120—123	122	52	1	52

116—119	118	(假均點)49	$F_{小}=101$	0	
112—115	114	27		−1	−27
108—111	110	18		−2	−36
104—107	106	7		−3	−21
		$N=200$			265

$$\frac{N}{2}=100$$

$$\text{中點}=116+\left(\frac{48}{49}\times4\right)=119.92$$

假中點＝118(116－119區域的中心點)

校正量$Cx_{\circ}=119.92-118.00=1.92$

$$x'=\frac{1.92}{4}=.48$$

應用公式 $$MD=\frac{\Sigma Fx'+x'(F_{小}-F_{大})}{N}\times\text{區域的長度}$$

$$MD=\frac{265+.48(101-99)}{200}\times4$$

$$MD=1.33\times4=5.32$$

(B) 從中點求M.D.

有時候我們願意由中點求M.D.由中點求M.D.的公式，和由均點求MD.的公式相同，祇是在推算的方法上，有不同的地方，請看第五表第五表的材料，即是第二表(2)的材料。

先求中點求得中點爲119.92，其次以中點所在的區域的中心點爲假中點，假中點爲118.以中點119.92減去假中點118,得着校正量Cx (119.92－118)＝1.92，再把校正量用區域的長度(4)除一下，即得着$x'=.48$(區域準個校正量)由假中點118求差數，再把差數和次數f相乘起來求fx'，用數學的加法，求fx'的總和，因此得着$\Sigma fx'=265$，求小于中點的記分的總數$F_{小}$，$F_{小}=101$。求大於中點的記分的總數$F_{大}$，$F_{大}=99$。

把$\Sigma f\bar{x}$，$\bar{x}$，$F_小$，$F_大$及N的量，代入公式(8)裏，再乘以區域的長度，即得着$MD=5.32$準個。

3　用簡法求標準差σ

用簡法求標準差，不如用他求MD之複雜。所用的公式爲：

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx'^2}{M}-\bar{x}'^2}\times\text{區域的長度}\qquad(9)$$

其中之$\Sigma fx'^2$爲所有的差數自方之總和，差數係由假均點所求出的，$\bar{x}'^2$爲校正量之自方，x'^2及$\Sigma fx'^2$皆是以一個區域爲準個所求出的。

用簡法求σ，已經在第四表裏表白出來，先把第四直行裏的x'，和第五直行裏的fx'相乘起來，求第六直行裏的fx'^2，在推算的程序上，長法和簡法完全相同，只是簡法的x'^2，是以一個區域爲準個所求出的，所以簡法的各個x'比較的小些，因此求fx'^2及fx'^2比較的容易些，推算$\bar{x}'$的方法，在前面第28頁上已經說過了。本題的fx'^2的總和$\Sigma fx'^2=770$，$\bar{x}'=.6639$。把他們代入公式(9)即求出$\sigma=3.687\times5$，或18.44個準個。

無論$\bar{x}'$的量如何，公式(9)總合用，不像公式(8)只是在$\bar{x}'$小於1的時候才合用，因此公式(9)增加σ的用處，

4　簡法亦適用於間斷的次序

間斷的次序已在第二頁上界說了。他是一個次序，其中有間斷的地方，即是說在一個真正的間斷的次序上，每個記分，不是代表量表上的一段空間，只是一個分立的各別的數量，譬如一個小孩，兩個小孩，1和2之間，有一個缺空，一塊錢，兩塊錢，1和2之間，又有一個缺空。

第六表表明怎樣推算間斷分配式的集中趨勢的度量，及差異的度量，這個表的材料，是某鄉村裏44家小孩的數目，第一直行的數目字，代表小孩的數目，第二直行的數目字，代表人家的數目，譬如有

一家有10個小孩，有三家各有九個小孩，有四家各有八個小孩，等等

第 六 表

求間斷分配式的 $\bar{X}$, MD, 及 σ

小孩的數目	家數	x	fx'	Cx^2
10	1	5	5	25
9	3	4	12	48
8	4	3	12	36
7	3 $f_{大}=24$	2	6	12
6	5	1	5+40	5
5	8	0		
4	7	−1	−7	7
3	4	−2	−8	16
2	4 $f_{小}=20$	−3	−12	36
1	2	−4	−8	32
0	3	−5	−15−50	75
	$N=44$		90	292

$\frac{N}{2}=22$

$\bar{X}'=5$ $\qquad Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{6\ 5-3}{2}=1\ 75$

$\bar{x}'=\frac{-10}{44}=-\ 23 \quad \bar{x}^2=\ 054 \quad MD=\frac{\Sigma fx'+\bar{x}'(F_{小}-F_{大})}{N}=\frac{90-23(20-24)}{44}$

均點$=4\ 77$ $\qquad MD=2\ 07$

中點$=5\ 0$ $\qquad \sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}-\bar{x}^2}=\sqrt{\frac{292}{44}-\ 054}$

衆點$=5\ 0$ $\qquad \sigma=2\ 57$

$\frac{N}{2}=22$　因為第22個記分在5上故　中點 $=5$

$\frac{N}{4}=11$　因為第11個記分在3上故Q_1　$=3$

$\frac{3N}{4}=33$　因為第33個記分在6與7之間故$Q_3=6.5$

因為這種次序是間斷的　所以各個記分的本來面目必須保存，因此即沒有一個中心點，可以代表區域，只得 (1) 假定5為均點，(2) 從假均點求差數x，(3) 求fx 及fx^2兩直行，因為區域為1故x 即為Cx，學

者注意及之。

若是我們用校正量-.23，校正假均點5，即得着這個分配式的均點爲4.77。這個得數，按照算學學理，是決對不錯的，但是實際上，說不通。因爲從來沒有一個人家有4.77個小孩子，因此中點恐怕是一個有意思的測量，讓我們求中點，記分總數之半爲22，從分配式的下端向上數，第22個記分，即在5的對面，在間斷次序裏，命分數毫無意思，因此即以5爲這個分配式的中點。不必再用補插法，求5以外的命分數了，得數5，即謂居分配式正中的家庭，或多數的家庭，皆有五個小孩，較之每家小孩的平均數爲4.77個實在些。

所謂每家兒童的平均數目4.77個，果有什麼意思？第一，他必定是N家小孩的總數被N除一下所得出的商數。若是我們所調查的家庭係全體人民的雛形，則所求得的均點，即爲全體人民的均點，這個均點，對於全體人民是一個固定的因數。若是我們知道一處家庭的數目，只要這處家庭能爲全體人民的雛形，則以這個均點乘此處家庭數目，即得着此處兒童的數目了。所以均點有這種用處，無論記分表示間斷或繼續的現象。

我們很難求出間斷分配式的中點及四分差。在上面所舉的例題裏，實在沒有一個量，符合中點的界說，剛剛只有一半記分，大於這個量；一半記分，小於這個量，我們共有44個家庭，中點必爲一點，大於他的有22個，小於他的亦有22個，但是小於5的有20個記分，剛剛爲5的有8個記分，大於5的有16個記分，若是以5爲中點，5之下只有20個記分，而沒有22個記分，若是以中點大於5一點，則凡有5個小孩的家庭數目，皆歸到中點之下了，是20+8個記分，在中點下，所以我們說：實在沒有一個量，符合中點的界說。

我們還有一個中點的界說，中點即爲一個居中的記分，即是把記分由小至大排列起來，(參看第11頁)居正中的那一個，即是中點。嚴格說起來，這個界說，還不適用於間斷分配式，因爲兩三個記分一樣大時，我們即不能按他們的大小，把他們排列起來了，譬如八家各有兒童5個。如何能按他們的大小，排列他們呢？我們也可以承認在這八家之中，總有一家居這個分配式的中心點，這家兒童的數目爲5，所以中點即爲5，我們所用的中點即是他，不過他還是一個粗陋而且疑靠的度量罷了。

推算間斷分配式的差異度量，只在Q上發生困難，以我們的問題而論，記分總數的四分之一爲11，自下端向上數進來11個記分，Q_1爲3(不用補插法求3以外之命分數)若要核對這個數，即自上向下數進來33個記分，Q_1亦爲3記分總數的四分之3爲33，自下向上數進來33個記分，我們剛剛數完第6級上的次數，若是自上向下數進來11個記分，我們剛剛數完第7級上的次數，因此Q_3或爲6或爲7，最好使Q_3等於6和7的中心點6.5用這個方法求出Q_3來,自然是一個權宜的方法。

Q_1爲3，Q_3爲6.5，$Q=\frac{6.5-3}{2}=1.75$

求間斷分配式的$M.D$及σ，也用公式(8)及公式(9)，和求連續分配式的$M.D$及σ相同。譬如$F_{小}$等20，代表小孩的數目小於4.77的，$F_{大}=24$，代表小孩的數目，大於4.77的，因此。

$$MD=\frac{90+(-23)(20-24)}{44}\times 1\text{(區域的長度)}=2.07$$

及

$$\sigma=\sqrt{\frac{292}{44}-.054}\text{ (區域的長度)}=2.57$$

〇五 團體的比較

1. 比較差異的度量：(Measures of relative Variability) 差異系數 (Coefficient of Variation)

我們已經論到一個分配式的純粹差異的度量，Q, MD, 及σ,，但是我們有時候很願意求出比較差異來，或是把一個團體，用不同的測驗具，測驗兩次，以後把這兩次的差異趨勢，比較一下，或是施用同樣的測驗具於兩個團體，以後比較這兩個團體的差異趨勢，除非兩個分配式的均點相同，才能把他們的純粹差異的度量比較比較，否則不能直接比較他們。現在舉出一個例題來說明這個原因，有 50 個小孩子，先受6 分鐘的算學測驗，他們的平均記分爲20.5，σ爲 5.24，後又受同樣的測驗 10 分鐘，這一次的平均記分爲 34.8，σ爲9.62，若是我們比較這兩次的σ，我們一定以爲10分鐘的測驗分配式的差異趨勢較之 6 分鐘的測驗分配式的差異趨勢大的多。雖是第二次測驗的σ，幾乎等於第一次測驗的σ2倍，但是這羣小孩子的算學能力差異量，並不隨測驗時間之增加而加倍；因爲平均記分，也自 20.5 增到 34.8 換言之，這兩個σ不能相互比較，因爲他們是由不同的集中趨勢所求出來的，要想比較這兩次的差異趨勢我們必須找出一個度量來，同時能兼顧到集中趨勢及差異趨勢，這種度量，即是皮爾生教授所採用的差異係數：

$$V=\frac{100\sigma}{\text{均點}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

應用這種公式於我們的問題上，即找出

六分鐘的測驗：

$$V=\frac{5.24\times 100}{20.5}=25.56.$$

十分鐘的測驗：

$$V=\frac{9.62\times100}{34.8}=27.64$$

可知兩次測驗的差異趨勢，不爲50和一百之比，乃是93與一百之比，$\left(\frac{25.56}{27.64}=93\%\right)$

凡一個團體在不同的情形之下，受同樣的測驗，往往產生不同的差異趨勢，令人迷惑不解，此時最好應用差異係數以校正之，若是兩個分配式的均點相同，兩個差異趨勢才可直接比較。

2.藉集中趨勢的度量及差異趨勢的度量比較兩個團體

兩個團體的均點或中點之不同，不一定表明這兩個團體內的個人的動作異常的不同，集中趨勢之不同，或表明甲團體內最低的人，反好於乙團體內最高的人；或表明甲團體內最好的一小部分，較之乙團體內最壞的一部份稍好一點。所以要想比較兩個團體，只求出他們的均點，或中點，是不够的，因爲他們的不同，全從差異上看出來。

現在舉一個比方，把上面所說的再說一下，例如有男小孩一團體。共300個，又有女小孩一團體，共250個。這兩個團體，受過同樣的測驗，各團體的均點，中點Q，及σ，皆求出來，現在比較這兩個團體的集中趨勢。女孩的均點，比男孩多2.19點。女孩的中點，比男孩多2.25點，若就這些結果而論，似乎在這種測驗上；有一種性別的表現，但是在我們下一個斷語之前，我們應當把這兩個團體的差異度量，比較一下。

比較這兩個團體的Q，及σ之後，才知道女孩子的記分，環繞集中趨勢而散佈的範圍，比較的廣些。兩個團體的記分的全距離，大約相同。全體的男孩子，和百分之92女孩子的記分。皆在12與32之間。Q告訴我們居中的百分之50男孩子的記分，在19與24之間，居中的百分之50女孩子的記分，在20與27之間。

比較這兩個團體的σ，又知道居中的3分之2男孩的記分，在21.99

士3 63之間。(即是在18與25之間)居中的3分之2女孩的記分，在24 18士5 12之間。(即是在19與29之間)雖是男孩的均點及中點和女孩的不同，但就差異的度量看起來，女孩和男孩的記分，佔據表尺的部分相同。

第四表

籍集中趨勢差異趨勢的量 比較兩個團體

男小孩

記分	f	x'	fx'	fx'^2
28—32	15	2	30	60
24—28	68	1	68+98	68
20—24	128	0		
16—20	79	−1	−79	79
12—16	10	−2	−20−99	40
N=300				247

女小孩

記分	f	x'	fx	fx^2
32—36	20	2	40	80
28—32	35	1	35+76	35
24—28	73	0		
20—24	68	−1	−68	68
16—20	41	−2	−82	164
12—16	13	−3	−39−189	117
N=250				464

$\frac{N}{2}=150$

$\bar{X}'=22\ 0$

$x=\frac{-1}{300}=-\ 003$

$Cx=-\ 003\times4=-\ 01$

均點=21 99

中點$=20+\frac{61}{128}\times4=21\ 91$

$\frac{N}{2}=125$

$\bar{X}'=26$

$x'=\frac{-114}{250}=-\ 456\quad x=208$

$Cx=-\ 456\times4=-1.82$

均點=24.18

中點$=24+\frac{3}{73}\times4=24\ 16$

$$\left[\frac{N}{4}=75\right]Q_1=16+\frac{65}{79}\times4=19\ 29$$

$$\left[\frac{N}{4}=62\ 5\right]Q_1=20+\frac{8\ 5}{68}\times4=20.50$$

$$\left[\frac{3N}{4}=225\right]Q_3=24+\frac{8}{68}\times4=24.47$$

$$\left[\frac{3N}{4}=187\ 5\right]Q_3=24+\frac{65\ 5}{73}\times4=27.59$$

$Q=2\ 59$

$\sigma=\sqrt{\frac{247}{300}}\times4$

$=907\times4=3\ 63$

$Q=3\ 55$

$\sigma=\sqrt{\frac{464}{250}-208}\times4$

$=1\ 28\times4=5\ 12$

〔男小孩的百分之幾達到或超過女孩的中點24 16呢?217個男孩子的記分小於24。(24—28)區域包含68個記分，因爲每個區域包含4個準個，16準個必定包含 $\frac{68}{4}\times 16=2\ 72$ 個記分，因知 $217+2.72=21\ 9\ 72$ 個男孩子的記分，在女孩子的中點下。又 $300-219\ 72=80\ 28$ 是 $80\ 28$ 個男孩子的記分，在女孩子的中點上。故 $\frac{80\ 28}{300}=26\ 76\%$ 男孩子達到或超過女孩子的中點。〕

要想比較男女孩兩個團體的差異，我們必須求出差異係數，他們爲•

$$男孩的\ V=\frac{3\ 63\times 100}{21\ 99}=16\ 5$$

$$女孩的\ V=\frac{5\ 12\times 100}{24\ 18}=21\ 2$$

若以百分數說出來男孩的差異程度只抵女孩的百分之78

$$\left(\frac{165}{42}=77\ 8\right)$$

3 藉重叠量(Overlapping)比較兩個團體

兩個團體，對於一種測驗，其動作相似之程度，可藉該兩團體的兩個記分分配式之重叠量表示之。這種方法，係補前種方法之不足，重疊法，卽是求一個團體的百分之幾，達到或超過別個團體的中點。對於現在的問題，我們要求百分之幾的男孩，達到或超過女孩的正中的記分。

求重叠量的方法如下：

(1)女孩的中點爲24 16，要找出多少男孩的記分，在24.16之下，我們找出二百十七個(10+79+128)男孩的記分，在24之下。若要求多少記分，在24 16之下。我們須用4(區域的長度)除(24—28)區域內的次數68，而以16乘之。因此我們求出24—28區域的16，應包含

2.72個記分。把217.和2.72加起來，得着219.72。卽謂300個男孩之中，有219.72個的記分，在女孩的中點之下。若是從300裏，減去219.72，得80.28，則80.28表示80.28個男孩的記分，在女孩的中點之上。再以300除80.28，得.27。是27%男孩的記分大於女孩的正中的記分。(看第7表)

總結第七表裏的結果，及前節的討論，我們找出男孩的均點和女孩的均點的差別為2.19分，女孩較優。男孩的中點和女孩的中點的差別為2.25分，女孩較優。男孩之中，百分之27，達到或超過女孩的中點。百分之百的男孩的記分，和百分之92的女孩的記分，落於表尺上相同的兩個界限之內。三分之二的男孩的記分，在18與25之間，三分之二的女孩的記分。在19與29之間。就這些事件看起來，我們得着一個結論。即是每個團體的各個分子彼此的差別，較之兩個團體的均點或中點的差別還大些，還重要些。

VI　求次數分配式的百分點

我們求Q時，必須先求出Q_1，第25分點，及Q_3，第75分點。此外我們覺得10分點，20分點分，30點分，40分點等等，都很有用。求他們的方法，和求中點及四分點相同。求第25分點時，我們從分配式的底端，向上數進來記分總數的四分之一，求第50分點時，照樣數進來記分總數的$\frac{1}{2}$，求第十分點時，數進來記分總數的$\frac{1}{10}$，求第20分點時，數進來記分總數的$\frac{2}{10}$，百分點能使我們比較各個人在各種測驗上之地位。或合併每個人在各種測驗上的地位(參看第6　張)為一個地位代表他。

第八表包含54個智力測驗記分分配式，並表明求百分點的方法。先求第10分點，54的$\frac{1}{10}$為5.4，從分配式的下端，向上數進來5.4個記

分，即得着147，照樣求出第20分點爲155.67。除去小數不算，第20分點爲155；因爲在繼續次序上，155代表所有記分之在155及156之間者，求出第30分點爲160.25，亦照例棄去小數.25，其他百分點，皆列在第八表內。

零分點及第100分點怎樣呢？他們是分配式的最大的記分及最小的記分。譬如從第一表內原有的記分裏，找出最小的記分爲126，最大的記分201，因此零分點卽爲126，第100分點卽爲201。

注意：第八表內有"累積次數"直行。這行的數目很容易求得，即是"累積次數"行的第一個次數(自下向上數)爲F行的第一個次數。累積次數行的第二個次數，爲本行的第一個次數，加上F行的第二個次數而成。累積次數行的第三個次數，爲本行的第二個次數，加上F行的第三個次數而成。照樣一直做下去，有了這一行；我們很容易指出任何百分點在分配式的什麼地方，譬如第70分點。自然爲第$\left(54\times\frac{7}{10}=37.8\right)$個記分。看累積次數行，即找出第37個記分已經達到180—184區域的上限185了，故第70分點，在185—189區域之內。

第八表

I. 求次數分配式的百分點(材料是從第一表拿來的)

記分	f	累積分記
200—204	1	54
195—199	4	53
190—194	2	49
185—189	10	47
180—184	3	37
175—179	8	34
170—174	3	26
165—169	3	23
160—164	4	20
155—159	6	16
150—154	4	10
145—149	1	6

百分點	記分
100	201
90	194
80	188
70	185
60	179
50	175
40	167
30	160
20	155
10	147
0	126

140—144	1	5
135—139	2	4
130—134	0	2
125—129	2	2
	$N=54$	

推算

54的10%= 5 4　　$145+\frac{4}{1}\times5=147$

54的20%=10 8　　$155+\frac{8}{6}\times5=155\ 67(155)$

54的30%=16 2　　$160+\frac{2}{4}\times5=160\ 25(160)$

54的40%=21 6　　$165+\frac{1\ 6}{3}\times5=161\ 67(167)$

54的50%= 27　　$175+\frac{1}{8}\times5=175\ 626(175)$

54的60%=32 4　　$175+\frac{6\ 4}{8}\times5=179$

54的70%=37 8　　$185+\frac{8}{10}\times5=185\ 40(185)$

54的80%=43 2　　$185+\frac{6\ 2}{10}\times5=188\ 1\ (188)$

54的90%=48 6　　$190+\frac{1\ 6}{2}\times5=194$

第八表 續

2. 材料從 *Pintner* 及 *Paterson* 所著之"動作測驗量表"書裏拿來的。此係72個九歲小孩的替換測驗記分。

記分(秒)	f	累積記分
80—89	1	1
90—99	2	3
100—109	5	8
110—119	5	13
120—129	13	26
130—139	9	35
140—149	6	41
150—159	11	52
160—169	5	57
170—179	3	60

百分點	記分
100	80
90	108
80	121
70	126
60	133
50	141
40	152
30	158
20	172
10	192

180—189	4	64
190—199	3	67
200—209	2	69
210—219	3	72
	N=72	

0	219

推算

72的10%(第90分點)＝ 7 2　$100+\left(\frac{4\ 2}{5}\times 10\right)=108\ \ 4(108)$

72的20%(第80分點)＝14 4　$120+\left(\frac{1\ 4}{13}\times 10\right)=121$

72的30%(第70分點)＝21 0　$120+\left(\frac{8\ 6}{10}\times 10\right)=126\ 6(126)$

72的40%(第60分點)＝28 8　$130+\left(\frac{2\ 8}{9}\times 10\right)=133$

72的50%(第50分點)＝36　$140+\left(\frac{1}{6}\times 10\right)=141\ 67(141)$

72的60%(第40分點)＝43 2　$150+\left(\frac{2\ 2}{11}\times 10\right)=152$

72的70%(第3 分點)＝50 4　$150+\left(\frac{9\ 4}{11}\times 10\right)=158{,}5(158)$

72的80%(第20分點)＝57 6　$170+\left(\frac{6}{3}\times 10\right)=172$

72的90%(第10分點)＝64 8　$190+\left(\frac{8}{3}\times 10\right)=192\ 67(192)$

．百分點表造成之後，即容易找出任何記分的百分點。若是一個人的記分爲 177，請先看記分行，177 正在第 50 分點(175)及第 60 分點(179)之間，他的百分點即爲55，若是一個人的記分爲158，請看記分行第 20 分點爲 155，第 30 分點爲 160，故 158 的百分點爲

$$\left(20+\frac{3\times 10}{5}\right)=26$$

在第八表(2)裏，又把72個九歲學生的替換測驗(Substitution test)記分分配式的各個百分點求出來。因爲記分代表時刻單個，故最低的記分代表最好的動作，最高的記分代表最壞的動作。因此百分點量表，

是倒過來的。我們應從第100分點向下數。譬如要求第90分點，我們須從分配式的項上，向下數進來$\left(\frac{72}{10}=\right)$7.2記分，恰好數到108，要求第80分點，我們應從分配式的項上，向下數進來記分總數的$\frac{2}{10}$，恰好數到121。第100分點爲80，在理想上爲最快最好的成績，零分點爲219，最壞的成績。

若是一個九歲的小孩，他化費141秒，畢完替換測驗；從百分點直行裏，查出他的百分點爲50，他的記分，剛剛爲這個團體的記分的中點，若是一個小孩，花費181秒，完畢這個測驗，從百分點直行裏，找出他的百分點爲15，剛剛在第十分點192，和第20分點172的中間。

7. 何時應用集中趨勢及差異趨勢的度量

初學統計學的人，遇着一個問題時，往往不知道應用那一個集中趨勢的度量，或那一個差異趨勢的度量；以下的概要，可爲解決日常所遇着的問題的指南。

I. 何時應用均點。中點，及衆點：

(1) 應用均點。

(a) 苟各個記分，應具同等的重量(Weight)以決定集中趨勢的度量。

(b) 苟需要最高的可靠程度。

(c) 苟相關係數，必須以乘積法推算；或可靠量的度量，必須求出。

(2) 應用中點：

(a) 苟要一個很快很容易推算出來的集中趨勢的度量。

(b 苟有特別大或特別小的記分，而能動搖均點者。

(c) 苟有若干記分，應當支配集中趨勢，其餘環繞他們的記

分皆在集中趨勢的上下，

(3) 應用衆點

(a) 苟只要一個不十分準確的，很易求出的集中趨勢。

(b) 苟只要找出一個記分發現次數最多。

2 何時應用全距離 Q, MD, 及 σ

(1) 應用全距離

(a) 苟材料太少太零碎。

(b) 苟只要知道散佈的最大限度。

(2) 應用 Q

(a) 求一個快而便于檢驗的差異趨勢的度量。

(b) 苟有特別大特別小的記分苟記分散佈很疏。

(c) 苟只要知道環繞集中趨勢而集中的情形

(3) 應用 MD

(a) 苟要案差數的大小，而予以重量。

(b) 苟兩極端的差數，不影響差異趨勢的度量。

(4) 應用 σ

(a) 苟要極高的可靠程度。

(b) 苟要兩極端的差數，影響差異趨勢的度量。

(c) 苟相關係數或可靠量的度量，以後須求出來。

8 公式

1 集中趨勢的度量

(1) 均點

A 長法

(a) 分散的材料

$$均點=\frac{\Sigma(記分)}{N} \qquad (1)$$

(b) 組合的材料

$$均點=\frac{\Sigma fX}{N} \qquad (2)$$

B 簡法

(a) 分散的材料

均點$=x'+Cx$(代數的加法)

$$Cx=\frac{\Sigma fx'(代數的加法)}{N}\times 區域的長度$$

(2) 中點

把記分按大小排列起來，成為一個次數分配式，以後從分配式的下端，向上數進來記分全數的$\frac{1}{2}$。

(3) 衆點

為發現次數最多的記分，或為次數最大的區域的中心點。

2 差異趨勢的度量

(1) 全距離=最大的記分——最小的記分。

(2) 四分差

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2} \qquad (3)$$

(3) 平均差。

A 長法。

(a) 分散的材料

$$MD=\frac{\Sigma x(數學的加法)}{N} \qquad (4)$$

(b) 組合的材料

$$MD=\frac{\Sigma fx(數學的加法)}{N} \qquad (5)$$

B 簡法

(*a*) 組合的材料

$$MD=\frac{\Sigma fx+\bar{x}'(F_{小}-F_{大})}{N}\times\text{區域的長度}\qquad(8)$$

(4) 標準差

A 長法

(*a*) 分散的材料

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}\qquad(6)$$

(*b*) 組合的材料

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}}\qquad(7)$$

B 簡法

(*a*) 組合的材料

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N}-\bar{x}'^2}\text{區域的長度}\qquad(9)$$

(5) 差異係數

$$V=\frac{100\sigma}{\bar{x}}\qquad(10)$$

9 題例

以下的問題，表白聯續的及間斷的次序的均點　中點，衆點，Q，MD，及σ。他們皆以簡法推算出來的，學者請仔細溫習之。

例　題　一

推算均點，中點，衆點，，QMD，及σ區域的長度＝7

×	中心點	f	x	fx	fx^2
145—151 99	148 5	1	6	6	36
138—144 99	141 5	1	5	5	25
131—137 99	134 5	2	4	8	32
124—130 99	127 5	2 $f_{大}=34$	3	6	18
117—123 99	120 5	3	2	6	12
110—116 99	113 5	10	1	10+41	
103—109 99	106 5	15	0		10
96—102 99	99 5 $x=10626$	14	−1	−14	14
89— 95 99	92 5	6	−2	−12	24
82— 88 99	85 5	3 $f_{小}=25$	−3	− 9	27
75— 81 99	78·5	2	−4	− 8−43	32
			$n=59$	84	230

$\frac{N}{2}=29.5$

$X'=106.5$ $MD.=\frac{84+(-.034)[25-34]}{59}\times 7$

$\bar{X}'=-\frac{2}{59}=-.034$ $\bar{x}^2=.001$ $MD.=10.00$

$Cx=-.034\times 7=-.238$ $\sigma=\sqrt{\frac{230}{59}-.001}\times 7$

$\bar{X}=106.5+(-.238)=106.26$ $\sigma=1.97\times 7=13.79$

$M=103+\frac{4.5}{15}\times 7=105.10,\ M_0=106.50$

$\left[\frac{N}{4}=1\ .75\right]Q_1=96+\frac{3.75}{14}\times 7=97.875$

$Q=7.55$

$\left[\frac{3N}{4}=44.25\right]Q_3=110+\frac{4.25}{10}\times 7=112.975$

例題二

計算均點中點 Q 及 σ，區域的長度＝1

記分	f	x'	fx'	fx'^2
22—22·9	1	12	12	144
21—21·9	7	11	77	847
20—20·9	16	10	160	1600
19＝19·9	35	9	305	2745
18＝18·9	81	8	648	5184
17＝17·9	172	7	1204	8428
16—16·9	330	6	1980	11880
15＝15·9	600	5	3000	15000
14＝14·9	1031	4	4124	16496
13＝13·9	1793	3	5370	16137
12＝12·9	2572	2	5144	10288
11＝11·9	2951	1	2951＋24984	
10＝10·9	3187	0		
9＝9·9	3319	－1	－3314	3319
8＝8·9	2391	－2	－5782	11564
7＝7·9	2149	－3	－6447	19341
6＝6·9	3115	－4	－5260	21040
5＝5·9	684	－5	－3420	17100
4＝4·9	302	－6	－1812	10872

3= 3 9	112	−7	− 784	5488
2= 2 9	38	−8	− 304	2432
1= 1 9	10	−9	− 90=27218	810
N=23596			=2224	180715

$\frac{N}{2}=11798$

$\bar{X}'=10\ 5$

$\bar{x}'=\frac{2234}{23596}==09\ \bar{x}'^2=008$　　　$\sigma=\sqrt{\frac{180715}{23595}=\ 008}\times 1$

$Cx===09$

$\bar{X}=10\ 41$　　　$\sigma=2\ 77$

$M=10+\frac{978}{3187}\times 1=10\ 31$

$\left[\frac{N}{4}=5890\right]Q_1=8+\frac{1239}{2890}\times 1=8\ 45\quad Q=1\ 92$

$\left[\frac{3N}{4}=17697\right]Q_3=12+\frac{739}{2572}\times 1=12\ 23$

例　題　三

推算間斷的次序的均點，中點，衆點，Q，及σ，區域的長=1

記分	f		x'	fx'	fx'^2
21	2	f小	−4	−8	32
22	1		−3	−3	9
23	4		−2	−8	16
24	9		−1	−9=28	9
25	21		1	11	11
X=25 036			2	12	24
26	11	F大	3	3	9
27	6		4	4+30	16
28	1				
29	1			58	125
	N=56				

$\frac{N}{2}=28$

$\bar{X}'=25$　　　$MD=\frac{58+036(37=19)}{56}\times 1$

$x=\frac{2}{56}=036\ \bar{x}^{2}=.001\ MD=1\ 05$

$\bar{X}=25.04$　　　$\sigma=\sqrt{\frac{26}{56}-.001}\times 1$

$MO=25$　　　$\sigma=1.50$

$Mo=25$　　　$Q=1.0$

$\left[\frac{N}{4}=14\right]$　$Q_1=24$

$\left[\frac{3N}{4}=42\right]$　$Q_3=26$

習　題

1. 把以下的記分，編列成爲三個次數分配式；第一個的區域，包含三個準個；第二個的區域，包含五個準個；第三個的區域，包含十個準個。

以下係一百個學生的入學試驗記分

63	80	75	90	81	83
78	81	83	83	89	98
46	90	103	81	71	93
82	78	86	85	73	83
74	86	84	72	63	76
103	78	85	81	105	94
78	101	76	96	74	75
86	65	80	81	98	56
103	90	92	85	78	73
87	75	102	58	78	95
73	73	73	96	83	110
95	90	87	86	96	98
82	86	70	70	95	71
89	86	85	72	94	92
73	84	79	74	88	72
92	86	93	84	50	
85	76	82	99	91	

2. 以下的兩個分配式，代表兩組學生 A 及 B 的記憶驗測記分：

(1) 求每個分配式的均點，中點，Q，及 σ

(2) 求 A 組的百分之幾，達到或超過 B 組的中點？

(3) 藉差異系數 V，比較兩組的比較差異趨勢。

記分	A 組	B 組
79=83	6	8
74=78	7	8
69=73	8	9
64=68	10	16
59=63	12	20
54=58	15	18
49=53	23	19
44=48	16	11
39=43	10	13
34=38	12	8
29=33	6	7
24=28	3	2
	$N=123$	$N=139$

3. 把前題的 A，B，兩組的第30分點，第60分點及第90分點，比較一下。

4. 以下的問題，給學生以練習的機會，推算集中趨勢及差異趨勢的度量。用簡法推求各個問題的均點，MD，及 σ。

(1) 求均點及 σ

記分	f
70=71	2
68=69	2
66=67	3
64=65	4
62=63	6
60=61	7
58=59	5
56=57	4
54=55	2
52=53	3
50-51	1
	$N=39$

(2) 求中點並從中點求 $M.D.$

記分	f
90=94	2
85=89	2
80=84	4
75=79	8
70=74	6
65=69	11
60=64	9
55=59	7
50=54	5
45=49	0
40=44	2
	$N=56$

(3) 求均點，MD，及 σ

記分	f
120=122	2
117=119	2
114-116	2
111=113	4

(4) 求個斷次序的均點及 σ

記分	f
80	1
70	3
78	3
77	6

108=110	5	76	8
105−107	9	75	7
102−104	6	74	3
99=101	3	73	4
96= 98	4	72	2
93= 95	2	71	1
90= 92	1		
	$N=40$		$N=38$

(5) 求中點及 σ

記分	f
100=109	5
90= 99	9
80= 89	14
70= 79	19
60= 69	21
50= 59	30
40= 49	25
30= 39	15
20= 29	10
10= 19	8
0= 9	6
	$N=102$

(6) 求均點，中點，及 σ

記分	f
80=84	8
75=79	14
70=74	19
65=69	24
60=64	29
55=59	27
50=54	26
45=49	23
40=44	20
35=39	15
30=34	10
	$N=220$

答 數

		A 組	B 組
2 (2)	均點	53 88	56 21
	中點	52 70	56 64
	Q	9 64	9 90
	σ	13 82	13 73

(2) A 組的 33% 達到或超過 B 組的中點

(3) 差異系數 A組=25 64，B組=24 43 A組的散佈程度等於 B組的 95 3 %

		A 組	B 組
3	第三十分點	46	49
	第六十分點	56	60
	第九十分點	74	75

4. (1) 均點= 61·26	σ = 4·99	
(2) 中點= 67·27	MD = 8·97	
(3) 均點=106·5	MD = 5 55	σ = 7·23
(4) 均點= 75·66	σ = 2·11	
(5) 中點= 55·67	Q=16·41	
(6) 均點= 57·0	中點=57·04	σ =13·17

第二章

繪圖法及常態弧

1. 次數分配式的圖形表示

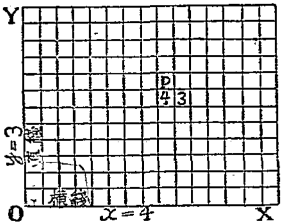
在前章裏，我們已經學會怎樣把測驗記分組織起來，排列起來，成爲一個次數分配式，這種排列，在推算集中趨勢及差異趨勢上，幫助很多。且對於事件(或記分)能予以一個整體的觀念。我們又能按次數分配式畫出一個圖來，圖形有分析的作用能把數目字的材料分析得淸淸楚楚，使人一望而知。廣告家早已發現圖形有這種魔力，能引人注目；而統計工作上最精細的紀載，反得不着這一點，故統計家也利用圖形，引人注意。把抽象難解釋的數目字的記載，變爲具體易懂的圖樣。

一共有三種方法，能把分配式畫出來。第一種爲次數多邊形。第二種爲柱形。第三種爲累積形。請詳言之。

1. 次數多邊形

在討論次數多邊形的構造法之前，請先簡單的溫習代數原理之適

用於圖形表示者。繪圖須根據兩根線，即是縱橫線。一根直線，即是Y軸，一根橫線，即是×軸。這兩根基本線彼此垂直。他們相交之點，叫做起點，以O代表之。（參看第二圖）設P的$x=4$，$y=3$。若欲位置之，請先從起點沿×軸向右去四個準個，在那裏畫一根線，與Y軸平行。再從起點沿Y軸向上去三個準個，在那裏畫一根線，與×軸平行。則這兩根線之交點，即為P所在之處。（參看第二圖）任何點只要知道他的x及y之量，即可根據×軸及Y軸求出來。×軸上之距離，通常稱之為橫線；Y軸上之距離。通常稱之為直線。

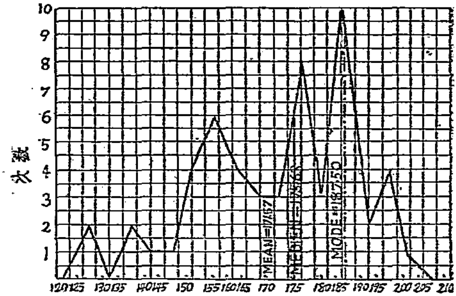


第二圖

縱橫軸X及Y之用途

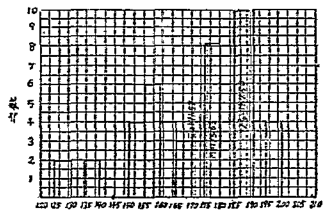
現在可以表明，繪圖的原理，怎樣可以應用之於次數多邊形之構造，如第三圖之附圖一所示。這個圖表自第一表內的次數分配式，區域的界限自零點起有規則的佈置之於底邊。（×軸）每個區域內的次數，順着Y軸的方向，一個一個的記於圖內。第一個區域(125=129)內的次數為2。(參看第一表)要把他畫於圖上，即在該區域的中心點127.5處，向上去兩個Y軸的準個，即在那裏記一點，第二個區域(130—134)

的次數爲零，故第二點即記在×軸上，而在130及135的中心。(135－139) 區域內的次數爲 2，(140－144) 區域內的次數爲 1，以及其他區域內之次數皆照樣一一記之於圖內。所須記得的，即是繪次數多邊形時，以區域的中心點，代表該區域內所有的記分的量。直立於各區域的中心點之直線的高度，代表各區域內的記分次數。



第三圖 (1)

第一表內的54個記分分配式以次數多邊形表示出來



第三圖 (2)

第一表內的材料以柱形表示出來

把所有之點皆記於圖內後，用直線把他們連起來，即成爲一個次數多邊形，如第三圖的附圖 I 所示。要想完成這個圖，必須把最低區域(125－129)以下的一個區域，及最高區域(200－204)以上的一個區域，都包括於X量表上。新加的兩個區域裏的次數當然爲零，因此多邊形得起於X軸，復止於X軸。一個區域在X軸上佔多大的空間，須視所用的紙的闊度，及分配式上的區域為數目之大小而定。對於X軸及Y軸上的準個的長度之選擇，實在沒有一個定則。圖形的長度，某區域內的最大的次數，〔例如(185－189)區域內的次數爲10〕足以表示Y軸上的準個，宜多大。只要繪過幾個圖，學者即可發現：若是Y軸上的準個太大，則圖即表示自甲區域至乙區域的改變太大。若是Y軸上的準個太小，則多邊形太扁。同樣若是X軸上的準個太大，則多邊形太扁。若是X軸上的準個太小，則所造成的"次數表面"之各點太形擁擠，而不能使之與別的圖相比較了。

分配式的總次數，以多邊形的面積代表之。多邊形的面積，在界線，或次數表面，(Frequency surface)及底線之間。每個區域的面積，不能與該區域所包含的記分數目成比例，因爲分配式不規則，故次數表面，亦因之不規則。

要想把均點中點衆點在圖上表白出來，必須首先案他們的量，把他們位置於X軸上。以後即在那裏，豎立幾根垂直線，如圖所示。而衆點即在次數表面最高的地方。

製造次數多邊形的步驟

(1) 畫兩根直線，彼此垂直。直線畫於紙的極左邊，橫線畫於紙的底邊。直線爲Y軸，以OY表示之。橫線爲X軸，以OX表示之。兩線之交點，以O表示之，叫做起點。

(2) 把次數分配式的區域，排列於X軸上，以最低區域以下的一個區域的下限爲起點，以最高區域以上的一個區域的上限爲止點。把每個區域的界限標明之。再選擇適宜的長度，爲X軸的準個。因此可使所有的區域，皆能畫在一張圖上。

(3) 把Y軸的準個畫上。使之可以表明各個區域裏的記分數目。Y量表必須適宜，能使最大的記分次數，得以表現於這張圖上。

(4) 在每個區域的中心點處，順着Y的方向向上行，等待行到一定的高度，足以代表該區域所有的記分數目，即在那裏作一點記之。

(5) 用直線把所記的各點連絡起來，即成爲一個次數多邊形了。

2. 柱形 (Histogram or Column diagram)

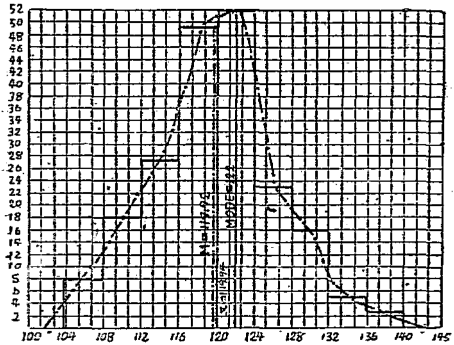
柱形，係用圖表示次數分配式的第二個方法。第三圖 (2) 表示一個次數分配式的柱形，而這個次數分配式，已在第三圖 (1) 裏，把他畫成次數多邊形了。柱形及次數多邊形的構造法，完全相同。只有一點不同，即是在次數多邊形上，每個區域內的記分，皆爲該區域的中心點所代表。柱形的構造，則根據一種假設：即是在一個區域內所有的記分，假設之均勻的散佈於該區域內。因此在柱形上每個區域所有的記分，可用一個長方形代表之。其底邊爲該區域的長度，其高度等於該區域內的記分數目。譬如(參看第二圖2) 125－129 區域。他有兩個記分，即能用一個長方形代表之。其底邊等於X軸上一個區域的長度，其高度等於Y軸上的兩個準個又130－134區域沒有記分，故不能爲他造一個長方形。其他長方形的高度，隨各個區域的記分數目之多寡而定。若有兩個比鄰的區域，他們的記分數目相同，例如140－144區域，及145－150區域，則爲他們所造成的長方形的底邊，概括X軸上兩個區域的長度。最高的長方形爲135－139區域：其高度等於Y軸

上的十個準個。故製造X軸及Y軸時，必須注意(1)區域的數目，(2)所用的紙的大小，(3)最大次數等等。在柱形上每個區域，爲一個長方形所代表。但亦不須把各個長方形的邊，伸長至圖的底邊，如第三圖(2)所示。因爲界線的起落，足以表示由甲區域至乙區域記分數目的增減。能表白此，圖的能事已盡。至於總次數N，當然爲柱形的全面積所代表，亦如次數多邊形一樣。在柱形內，每個長方形的面積，與一個區域內的記分數目，可成比例。所以柱形實爲表示記分數目的一種準確圖。爲比較這兩種次數圖利便起見，案第三表的分配式，在同樣的縱橫線上，繪出一個次數多邊形及一個柱形。請看第四圖，因爲記分的數目大，及其分配式對稱的原因，所以這兩個圖較之第三圖的兩個兩圖規則些。(在第71頁內還有幾個柱形及次數多邊形請參看之)

何時用次數多邊形，何時用柱形，實在沒有一個定則，可以遵守。次數多邊形不及柱形準確因爲柱形內各個長方形的面積，能代表各個區域內的記分數目。但是若把兩個或更多的分配式畫於一處，則次數多邊形較爲有用，因爲畫柱形時，往往有幾個直線，合於一處，不容易看清。柱形及次數多邊形二者的功用，皆表示記分在量表上分配的情形：記分或均勻的散佈於量表上，或堆積於量表的下端，或堆積於量表的上端。圖形不但可以表示一羣學生的程度狀況，并且可以表明測驗具的良否。若是測驗具太易，則大多數記分，堆積於量表的上端。(即右邊)若是測驗具太難，則大多數記分，堆積於量表的下端。(即左邊) 若是測驗具不難亦不易，記分即對稱的散佈於量表上：只有幾個記分發現於量表的兩端，大多數的記分皆發現於量表的中心。如此則次數多邊形及柱形近似一個常態分配式了。

3. 累積形

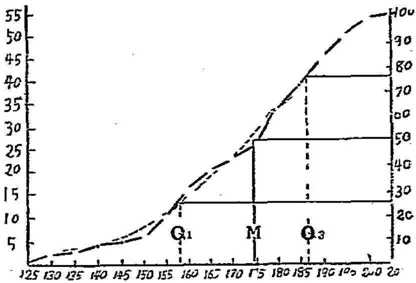
累積形係表示次數分配式的第三個方法。在繪累積形之前，分配式的記分，必須首先挨次加起來，如第九表內兩個分配式所示。這兩個分配式係從第二表（1及2）取來，已在第三第四兩個圖內把他們畫成一個柱形，一個次數多邊形。注意：第九表的前兩個直行爲普通次數分配式所同有。但在第三直行內，每個區域所有的數目，係該區域的數目之在第二直行內者，加上下一個區域內的數目之在第三直行內者而成。各個累積記分，即是如此求出來的，已在第41頁上說過了。最後一個累積記分。自然等於N。（累積分配式，亦能表明多少人的記分小於量表上之某點。譬如在第九表內，我們找出十個人的記分小於155，47個人的記分小於190等……）



記　分

第　四　圖

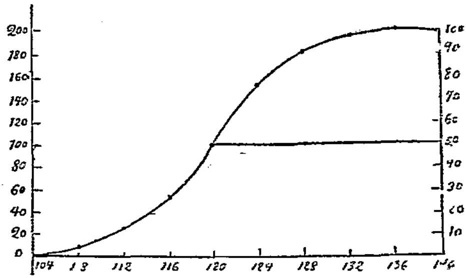
次數多邊形及柱形：(材料從第二表(2)裏拿來的)



區　域

第五圖 (1)

累積形　材料從第二表(1)拿來的



區　域

第五圖 (2)

累積形　材料從第二表(2)拿來的

根據第九表的分配式，造出兩個累積形，如第五圖(1)及(2)。先看第五圖(1)下的54個記分的累積形。其分配式的區域，佈置於X軸上；其累積記分，則案其在X軸上之位置，及其大小，順着Y的方向，作點記之。所須記憶的，即是製造次數多邊形時，每個區域內的次數記於該區域的中心點。製造累積形時，每個累積次數，必須記於該區域的上限。譬如弧上的第一點為兩個Y準個(累積記分為2)記於130處。〔125—129)區域的上限〕第二點亦為兩個Y準個，記於135處。第三點為四個Y準個，記於140處等等。最後的一點，為54個Y準個記於205處。所記之點，用線連起來，即成為一個累積形。所須注意的，此弧起於X軸上125處，止於X軸上205處，惟距X軸54個Y準個是了。

第九表

第二表內的兩個分配式的累積次數(為製造第五圖的累積形之用)

(1)

記分	f	累積
200—204	1	54
195—199	4	53
190—195	2	49
185—139	10	47
180—184	3	37
175—179	8	34
170—174	3	26
165—169	3	23
160—164	4	20
155—159	6	16
150—154	4	10
145—149	1	6
140—144	1	5
135—139	2	4
130—134	0	2
125—129	2	2
$N=54$		

(2)

記分	f	累積
136—139	3	200
132—135	5	197
128—131	16	192
124—127	23	176
120—123	52	153
116—119	49	101
112—116	27	52
108—111	18	25
104—107	7	7
$N=200$		

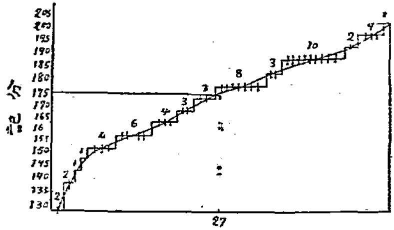
因爲雛形(Sampling)太小，記分分配式不對稱，所以累積形表示不規則的現象。要想除去這種不規則的現象，及便利將來的推算，所以我們常行修平法。即是給一根平坦弧使之經過許多點子。如第五圖(1)的虛線 即爲修平後的現象。若是雛形很大，而記分又分配得適宜，修平法可以不用。

第五圖(2)內的累積形，是根據第九表(2)的分配式所造的。既未引進新的事件，可以不須再加解釋。注意：此弧起於104處 第一個區域的下限，而止於140處，最後區域的上限。而各個累積次數，如7，25 52，等等，必須記於相當的區域的上限。這個累積形，不須修平因爲分配式很對稱的緣故。

累積形不及次數多邊形，及柱形之能常用於實驗心理學及教育學上，因爲他很不容易解釋。但是他亦有幾個好處 (1)累積形的形狀，不隨區域的大小而變更，別的次數圖則不然。(2)次數多邊形及柱形不能互相比較，除非他們的區域的數目及區域的大小完全相同，而累積形則不受這種限制。

累積形對於測驗學者的最大功用，在容易從其推求百分點，請看第五圖(1及2)先作一根垂線於最後區域的上限處，使之向上伸長 與弧相接。(在第一個累積形內，這個垂線作於205處)。再將這根垂線，分爲十個等份，用數目字10，20，30，40，50，60，70，80，90，100標明之。(0點在X軸上，100點在弧上)。這些點標明分配式的十個十進點。若求第二個十進點，即第20分點，則自20處，畫一根線，與X軸平行，一直到弧爲止，再從此處(平行線與弧相交之點)畫一根垂線於X軸。這個垂線，即標明第20分點，在X軸上的位置。其他百分點，及四分點，可照樣求出來。注意 在累積形(1)裏，0點爲125，在理想上，

他爲分配式內最底的記分。第一百點爲 205，在理想上他，爲分配式內最高的記分。



記分順序排列

$N=51$

第六圖

製造累積形的第二個法子　把得着各個記分的人數挨其所得的記分之大小挨次排列之於X軸。記分則記之於Y軸上。

百分點由累積形求出者，和百分點由第八表 (1) 求出者，完全相同。學者請比較之。百分點由累積形 (2) 求出者，較之百分點由累積形(1)求出者，要準確些，因爲弧線較規則的原故。

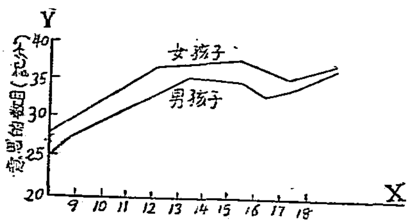
繪圖求百分點，其準確與否，恃乎弧上的點的位置準確與否，及量表的精細，記分數目的多寡，和分配式對稱的程度如何而定。

構造累積形的第二個方法，詳見第六圖。此圖係根據第九表(1)內的材料所造的。試思分配式的54個人。先把得着各個記分的人數，按其記分的大小，順序排列之於底邊。再案每個記分的大小，畫出長方形來，因此得着一羣長方形。每個長方形的底邊，代表有這個記分的人數。每個長方形的高度，代表記分的大小。再畫一個平拔弧，經

過每個長方形的上端的中心點，即成爲一個累積形了。百分點很容易從累積形尋出來。若要求中點，則在X軸$27\left(\frac{N}{2}\right)$處，畫一根垂線，與弧相交。再從這根垂線與弧相交之點，畫一根直線，與X軸平行，一直到Y量表爲止。這根線與Y量表相交之點，卽爲中點所在之處。四分點及百分點，皆可照樣求出來。

2 繪圖法的別的功用……曲線比較圖

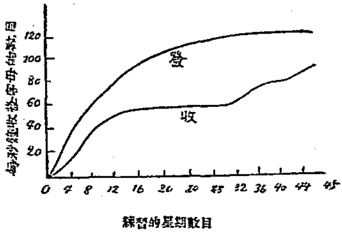
在心理測驗上，有許多問題，其材料可用圖表示出來。其他問題，表示一種特性改變之程序；而改變由於生長，學習，練習，等等原因者，亦可用圖表示出來。在第七圖內，有許多問題，可做例子。把他們的材料，用線表示出來，在這些圖內，記分須案照縱橫線畫出來，縱線卽爲X軸；橫線卽爲Y軸。



年　齡

附圖：1—推理性記憶：年齡表白之於X軸上，記得的意思多寡(記分)表白之於Y軸上

第七表：曲線比較圖

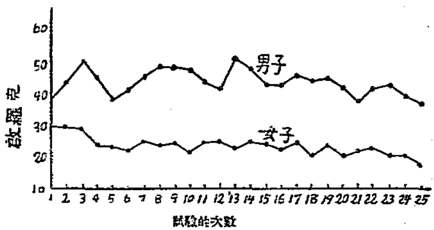


附圖2：收電發電技能的進步：練習的星期數目，表白之於X軸上每分鐘發出之字母數目，表白之於Y軸上。

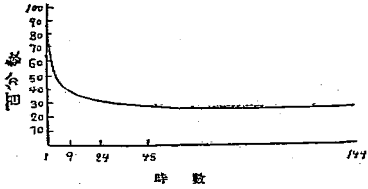
第七圖：曲線比較圖

第七圖的附圖 (1)，爲年齡或生長弧線，他表白男女學生自八歲至十八歲記憶力增長的情形。

第七圖的附圖(2)，爲學習或練習弧線，他表白電報生經過幾個星期的練習，他的收發電報的能力增長的情形。能力增長的速率，根據每秒鐘收發字母數目的多寡而定。



附圖：腕力測驗器，表示25次腕力的大小。而每兩次試驗，相距十秒鐘。腕力以啓羅克表示之。被試驗者，爲一個男子，一個女子。



附圖4 遺忘曲線——底線上的數目字，表明學習後所經過的時數。Y軸上之數目字，表明記得的百分數。

第七圖

曲線比較圖

第七圖的附圖 3，為動作或練習弧線，他表白一個男子及一個女子25次腕力的情形。注意 試驗的次數，表明於X軸上。腕力的大小，表明於Y軸上。這些圖很有用，可使我們看出一個人或一個團體在各次試驗時動作的情形如何，且可使我們在長時間的試驗上看出疲勞的影響來。

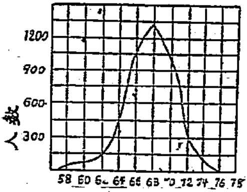
第七圖的附圖4為遺忘弧線，他表白記憶力的大小。要想知道記憶力的大小，即須測量原來記得的材料，經過不同的期段，還能記得百分之幾，遺忘期段，排列之於X軸上，記得的百分數，排列於Y軸上。

3 常態機率弧 (Normal probability curve)

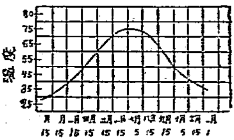
在第八圖內，有四個附圖 兩個次數多邊形，兩個柱形。他們是根據人種學，心理學，及氣象學的材料製成的。這些圖的形式相同。大抵多數記分集中於量表的中心點。離中心點向左右去，記分數目即漸漸少。在量表的極左端，即低記分所在的地方 只有幾個記分。較

此地向右去，記分數目卽漸漸增加。到量表的中心點時，記分最多。過此點再向右去，記分數目又漸漸減少。一直到量表的極右端，卽大記分所在的地方，只剩幾個記分了。

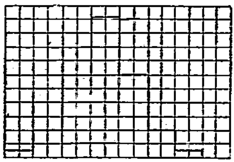
若是我們從弧的最高點，畫一根垂線於底線，則分開這個弧爲兩部份。他們的形式，及面積的大小，完全相同，因爲這個弧是極端對稱的。一個極端對稱的弧，或次數表面，已在第九圖內表示出來。而第八圖的四個附圖。亦很類似他。這種鐘形弧，叫做常態機率弧，簡稱之爲常態弧，在心理測驗上，有極大的價值。知道他的特性，非常要緊。實驗心理學者，及測驗學者，必須注意的。所以本章以後各節，專門詳論常態弧的特性，及其功用。



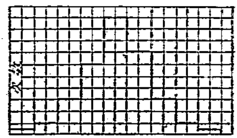
身長(以英寸表白之)
附圖1 8585個英國男子的身長
(由Yule的書中第89頁拿來的)



附圖 (每月的平均溫度 係自47年每月的溫度求出的(由Kelley書中第28頁拿來)

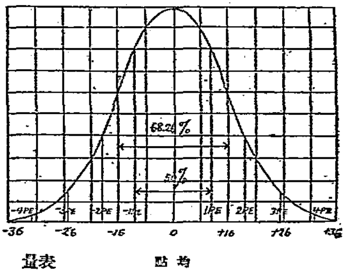


附圖4 數目字記憶的久暫，123個成人的女學生(由Thorndike書中第99頁取來)



附圖3 809個隨意找來的小孩的 IQ 他們的年齡自5歲起到14歲止(從Terman書中第66頁取來)

第八圖　次數分配式的樣本(材料從幾處取來)



第 九 圖

常 態 機 率 弧

1. 機率的原理；機率弧的來源及其構造

要想明瞭機率弧，必須研究關於機率的法則。一件事可發現的機率，即為其在總次數當中得發現的次數，這個次數，與總次數所成的比率，即叫做機率。一件事發現的機率，可以根據支配機能機遇的機遇的法則而能推知的。例如拋錢時，得着字面或花面的機率各為$\frac{1}{2}$。擲骰子時，得着兩點或三點的機率各為$\frac{1}{6}$。故機率實為一個比率，實為一個命分的分數：他的分母，等於期望機遇的次數：他的分子，等於一切可能的次數。這種比率，總在零與兩個界限之間，零表示機遇之不可能，"1"表示機遇之決對可能，譬如天將落的機率為零一個人總有死日的機率為1。在這兩個界限之間，互延着無數機率量。

試應用機率原理於拋錢事件上。(拋錢及擲骰子，是簡單的常用的比方，表白機遇率)，若是拋一個錢，無論那一面向上皆可，其機率為百分之百。字面向上的機率為$\frac{1}{2}$，花面向上的機率亦為$\frac{1}{2}$，設以

H 代表字面，T 代表花面，則有 $(H+T)$，或是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.00$

若是同時拋兩個錢(a)及(b)，則有四個組合

(1)	(2)	(3)	(4)
ab	*ab*	*ab*	*ab*
HH	*HT*	*TH*	*TT*

即是兩個錢(a)及(b)的字面皆向上；或是(a)的字面向上，(b)的花面向上；或是(b)的字面向上，(a)的花面向上；或是兩個錢的花面皆向上。若用機率表白之，則兩個字面發現的機率為 $\frac{1}{4}$；一個字面及一個花面發現的機率為 $2\times\frac{1}{4}$，或 $\frac{1}{2}$；兩個花面發現的機率為 $\frac{1}{4}$。

再近一步，若是同時擲三個錢，(a)，(b)，及(c)，即有八個可能的結果：

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
abc	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*	*abc*
HHH	*HHT*	*HTH*	*THH*	*HTT*	*THT*	*TTH*	*TTT*

用機率表白出來，三個字面發現的機率為 $\frac{1}{8}$；兩個字面一個花面，或一個字面兩個花面發現的機率各為 $\frac{3}{8}$ 三個花面發現的機率為 $\frac{1}{8}$。若是拋擲四個或五個錢，可以照樣求出各種組合的機率來。

列舉各個組合，未免費事，現有一個比較簡單的方法，可以應用。若有兩個獨立的事件，每個發現失敗的機率相同，（譬如拋一個錢，花面及字面的機率相同）則複（Compound）機率可藉二項開展式 $(P+Q)^2$ 求出之。P 代表發現的機率，Q 代表失敗的機率，指數 2 代表事件的數目。若以 H 代替 P，以 T 代替 Q，我們即有 $(H+T)^2=H^2+2HT+T^2$。這種開展式，可以解釋之如下：

$1H^2$　表示兩個字面均發現，四次中可有一次。機率$=\frac{1}{4}$

$2HT$　表示一個字面一個花面發現，四次中可有兩次。機率$=\frac{1}{2}$

$1T^2$　表示兩個花面均發現，四次中可有一次。機率$=\frac{1}{4}$

$\overline{N=4}$

注意　拋兩個錢所得的結果，正和由二項開展式所求出者相同。

若有三個獨立的事件，苟其為錢，則公式$(P+Q)^n$可變為$(H+T)^3$。展開之，即得$H^3+3H^2T+3HT^2+T^3$，可以解釋之如下

$1H^3$　表示三個字面均發現，八次中，可有一次。機率$=\frac{1}{8}$。

$3H^2T$　表示兩個字面一個花面發現，八次中，可有三次。機率$=\frac{3}{8}$

$3HT^2$　表示一個字面二個花面發現，八次中，可有三次。機率$=\frac{3}{8}$。

$1T^3$　表示三個花面均發現，八次中，只有一次。機率$=\frac{1}{8}$。

$\overline{N=8}$

拋三個錢所得的結果，正和上面二項開展式所求出者相同。

無論多少個獨立的事件，只要各個的發現或失敗的機率相同，二項開展式均合用。若是同時拋十個錢，則可得有$(P+Q)^{10}$，若以H代替P，T代替Q，則$(H+T)^{10}$。10指明所拋的錢數。若把$(H+T)^{10}$展開之，則有

$$(H+T)^{10}=H^{10}+10H^9T+45H^8T^2+120H^7T^3+210H^6T^4+252H^5T^5+210H^4T^6+120H^3T^7+45H^2T^8+10HT^9+T^{10}$$

可以解說之如下

$1H^{10}$　表示10個字面均發現，1024次中，只有一次。，機率$=\frac{1}{1024}$

$10H^9T$ 表示9個字面一個花面發現，1024次中，可有10次。……機率$=\frac{10}{1024}$

$45H^8T^2$ 表示8個字面兩個花面發現，1024次中，可有45次。……機率$=\frac{45}{1024}$

$120H^7T^3$ 表示7個字面三個花面發現，1024次中，可有120次。……機率$=\frac{120}{1024}$

$210H^6T^4$ 表示6個字面4個花面發現，1024次中，可有210次。……機率$=\frac{210}{1024}$

$252H^5T^5$ 表示5個字面5個花面發現，1024次中，可有252次。……機率$=\frac{252}{1024}$

$210H^4T^6$ 表示4個字面6個花面發現，1024次中，可有210次。……機率$=\frac{210}{1024}$

$120H^3T^7$ 表示3個字面7個花面發現，1024次中，可有120次。……機率$=\frac{120}{1024}$

$45H^2T^8$ 表示2個字面8個花面發現，1024次中，可有45次。……機率$=\frac{45}{1024}$

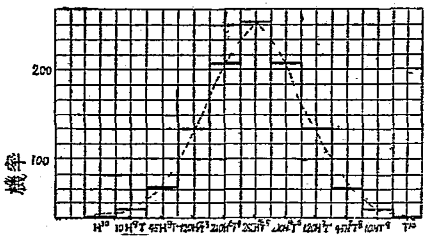
$10HT^9$ 表示1個字面9個花面發現，1024次中，可有10次。……機率$=\frac{10}{1024}$

$1T^{10}$ 表示10個花面均發現，1024次中，只有一次。……機率$=\frac{1}{1024}$

$\overline{N=1024}$

根據上面的結果，畫一個柱形；及一個次數多邊形於同樣的軸上。把開展式的11項，排列於X軸上，各項所佔之空間相等。把每個組合

(Comb.nation)的發現次數，按其大小，順着Y的方向畫出來，則得着一個對稱的機率弧。最大的次數在X量表中心。離中心愈遠，次數愈少。把十個錢拋1024次，在理想上，希望得着一個結果，如第十圖所示。



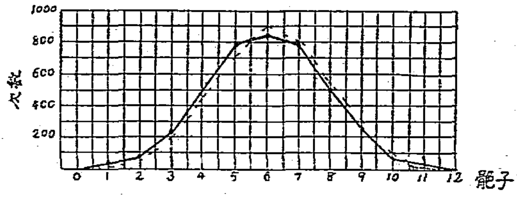
第十圖

機率表面得自 H+T)^{10}之開展式

現在學者，做了許多試驗，或拋錢，或擲骰子等等 其目的在證明理想的和實驗的結果是否相同，有一個很著名的試驗，從*yule*書中第253頁取來，係把十二個骰子，擲4096次。以四點五點六點爲成功，一點二點三點爲失敗。譬如把十二個骰子擲一次，得着3，1，2，6，4，6，3，4，1，5，2，3，其中有五個爲成功。把4096次的成功數目，和從二項開展式所得着的理想的結果，繪於相同的軸上，如第十一圖所示。從此可看出獲得的次數，和理想的次數，異常吻合。若是學者願把十個錢，擲1024次，證明第十一圖的結果，他即可發現實驗的結果，與理想的希望，吻合的程度很大。

2 機率弧適用於心理測驗的原因

第十圖內的次數弧，係從 $(H+T)^{10}$ 的開展式所造成的，是一個對稱十邊多邊形。若是因數(譬如錢)的數目，從 10 個加到 20 個，30 個，40個，則多邊形的邊數，亦從10邊加到20邊，30邊，40邊 (底邊的長度仍舊) 因數的數目每加一次，弧上的點子彼此即愈靠近一點，等到因數的數目非常之大。(若是 $(P+Q)^n$ 的 n 爲無窮大)，多邊形就變成一個異常平坦弧如第十一圖內的弧了。這個理想的多邊形，或常態弧，代表各種組合的發現次數，且此爲一大群彼此相同相等獨立的因數的組合，而每個因數的發現或失敗的機會相等。



——— 理想弧

實在弧

第 十 一 圖

把12個骰子擲4096次比較其實在結果和理想的結果

(材料從 Yule 書中第258頁取來)

若是把第九圖的次數弧，與第八圖的四個附圖根據身長測量，智力測驗，記憶力測量，溫度測量所造成者，比較比較，即發現這些圖與常態弧很相似，換言之各種現像的分配式，好像受因數的運行所支配，而因數的出沒，悉遵照一種定律，正如支配錢及骰子的組合的定律一樣。其他分配式，莫不如此。所以數量的材料，(Quantitative data) 有一種順着常態機率弧而分配的傾向。這種傾向，叫做常態次數律。

此律簡單述之為：自然現像的測量記分，與心理特性及社會特性測量記分，其分配也，以其集中趨勢為樞紐，向兩邊成對稱之形，蓋受機會律的支配也。

各種現象的次數分配式，和機會分配式由拋錢或擲骰子所得相似的原因，由於二者皆受機會律的運行所支配。"機會"可界之為"一個結果，由許多因數之運行所得者，同時沒有一個因數，勢力特大，左右一切，而且所有的因數，皆是相同相等並且獨立的"。若拋錢或擲骰子，一羣微細的因數，例如手腕的扭轉，錢或骰子舉起的高度，錢或骰子的重量及大小，實驗室地板的種類，以及其他(參看Jerome Harry的 Statistical method 自 169—170 頁)等等，皆支配錢的字面或花面向上，或支配骰子的某點向上。照樣人的身長，體重，頭的形式，智力，或眼睛的顏色等等，無一不受許多因數所支配；而每個因數對於最後結果，幾乎有同等的力量。(影響)(注意：若是一個或幾個因數，有較大的力量，分配式即不復表現機率弧的狀態，而向量表的上端或下端傾斜。"傾斜"問題，在 88 面，再詳論之)。

許多試驗，證明常態機率弧能準確的表白各種事件的機遇的次數，有些分配式，已在第八圖內表示出來。下面再把支配常態分配式的重要事件舉出來：(參看D.C. Jones 的"A first course in Statistics 第233頁)

(1) 生物統計學：在一國或一個社會裏，經過若干年的一段時期男孩生產數目，和女孩生產數目的比例。混種後，各樣植物及各樣動物的比例。

(2) 人種統計學：同年同性人羣的身長，體重，頭圍的大小，等等。

(3) 社會統計學及經濟統計學；在同樣境遇之下，統計生產率，

婚姻率，及死亡率。在同樣境遇之下及同種職業上，統計工資及出品。又統計工價及貨價，等等。

(4) 心理測驗：由標準測驗所得着的智力，聯想快慢，直覺快慢，反應快慢等等。由教育測驗所得着的綴字記分，算學記分，默讀記分，等等。

(5) 觀察的錯誤：測量身長，動作快慢，物體大小，體格的心理的特性，等等，皆有錯誤。其錯誤或大於實量，或小於實量。若按錯誤的大小而分配之，恰成一個常態機率弧。(這個題目在第三章再討論之)

常態弧，常稱之爲常態機率弧，因爲他表白機會現象 (Chance Phenomenon) 能機遇的機率。他亦叫做常態次數弧，因爲測量各種事件所得之次數分配式皆爲常態。他亦叫做錯誤弧，因爲若把這些變數 (Variable) 如身長，線度，動作快慢，動作強弱，或反應時間等等，測量多次，則每個測量記分，與眞測量記分，必相差若干，有相差很大的，有相差很小的。若案這些差錯的大小，把他們製成一個弧，即成爲一個理想的機率弧了。(參看第三章)

在常態弧的討論未完之前，不得不說一句話，提醒學者。平時所得着的分配式雖和理想的機會分配式相似，但是不可以其相似，即下一種斷語：因爲有這種相似，我們能假定一切心理的及體格的特性，皆由於相似的，相等的，獨立的，完全受機會支配的因數之運行而成，支配音樂天才或智力的因數，我們不知道他們，不能據之以構成以下的假定：(1) 因數運行的方式相同，(2) 因數運行所遵循的律，如同產生錢或骰子的機會分配式的因數所遵循的一樣。然選擇常態弧應用，而不選擇別種弧的原因，即因爲常態弧，體合我們的材料較好些。但是弧

的理想方面的健全。與弧的實用，純為兩事。(參看 Jones的書第233頁)

3 常態次數弧的重要特點

在常態次數弧上，均點中點及衆點皆在分配式的中心點，故彼此相等。可知常態機率弧 是一種極端對稱的弧。所以構成集中趨勢的測量記分 皆落在弧的中心。在常態弧上，各個差異趨勢的度量，包括弧的全面積的固定的一部分如下 (參看第九圖)

(1) 若在離均點左右一個σ處，畫兩根垂線，則在這兩根垂線，底邊，及弧之間的面積，等於弧的全面積的68 26%。簡言之，即常態分配式的中間的一部份，約佔全體的$\frac{2}{3}$，包括於均點及$\pm\sigma$之間。

(2) 若在離均點左右一個平均差處，畫兩根垂線，則在這兩根垂線，底邊，及弧之間的面積，等於全面積的57 5%。簡言之分配式中間的一部份，約佔全體的57 5%，包括於均點及$\pm MD$之間。

(3) 若在離均點左右一個PE處，畫兩根垂線，則在這兩根垂線，底邊，及弧之間的面積，等於全面積的50%。若是分配式是完全對稱的PE即等於第25分點及第75分點的距離的$\frac{1}{2}$，因為有全面積的25%在均點的左邊，亦有25%在均點的右邊。故分配式的中間的一部份，約佔全面積的50%，包括於均點及$\pm PE$之間。

差異趨勢的度量，有幾個固定的關係，舉之如下：

(1) $PE = 6745\,\sigma$

(2) $PE = 8453\,MD$

(3) $\sigma = 1\ 4825\,PE$

(4) $\sigma = 1\ 2533\,MD$

(5) $MD = 7979\,\sigma$

(6) $MD = 1\ 1843\,PE$

第一個關係，爲我們常常用着的，必須記得。從這些方程式裏，可以證明 σ 大於 MD，MD 大於 PE，或 Q 正如第25頁所言。

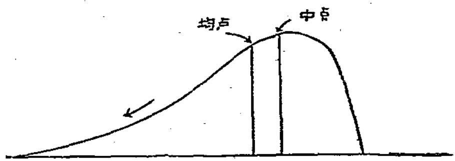
4　斜度的測量

在次數多邊形或柱形上，首先引人注目的，即爲對稱的或傾斜的現象。在常態弧上，均點中點及衆點合於一處，且其左右兩邊，極端對稱。在一個傾斜的分配式上，均點中點及衆點則現發於三處。對稱的現象全無，而向一邊傾斜。傾斜程度的大小，可以下面的公式測量之

$$傾斜=\frac{3(均點-中點)}{標準差}, \qquad (11)$$

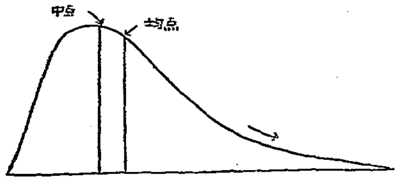
在常態分配式上，斜度等於零，因爲均點等於中點的原故。分配式愈近於常態，均點卻愈等於中點，而斜度卽愈小。

若是應用公式(11)於54個智力測驗記分分配式，則得着 −6 —6 表示斜度的程度及傾斜的方向。這個分配式，卽爲負傾斜的分配式，向左邊傾斜，記分多堆集於量表之右邊，而漸漸向左邊散佈，請看第12圖。若是分配式表示正傾斜，向右邊傾斜，則記分多堆集於量表之下端，或左邊，而漸漸向右邊散佈，請看第1圖。



第十二圖

負傾斜　向左傾斜



第十三圖

正傾斜：向右傾斜

應用公式(11)，求200個勾消記分分配式〔(在第2表(2)裏)〕的傾斜的程度，得着+.003,003表示很小的正傾斜，並表示這個分配式很與標準分配式相似。

分配式傾斜的原因有好幾種，我們很難盼望25個八歲男孩的 *I Q* 的分配式爲常態，亦難盼望一羣愚笨及神經衰弱的小孩的 *I Q* 的分配式爲常態，縱使這羣小孩的數目很大。第一羣小孩的數目小，第二羣小孩是經過特別選擇的。一個選擇的團體，不能代表其所從出的較大的團體。數目小，及特別的選擇，皆是致成傾斜的原因。（傾斜由於這兩種原因致成者，有一個例子，請看第一表內的分配式）又測驗具構造不精良，及記分時引進錯誤等等，皆可產生傾斜現象於測驗記分分配式上。

除去這些明顯的原因外，傾斜的現象，往往由於材料眞正欠缺常態。（理想上分配式總應爲常態，亦無眞正的理由）。常態欠缺的原因，大抵由於幾個因數，支配最後的結果。他們或強有力，或發現的次數，多於機會所許可。(參看第79頁)譬如一粒骰子，有幾面較重，則從他所得着的分配式，總是傾斜的。再從實在材料上，舉出一個比

方來，表示死亡的機會的圖很傾斜，——嬰孩及老人死亡的機會大於中年人。——有兩種原因(1)各時期內死亡的原因的數目不同，(2)各時期內死亡的原因的重要不等。

再從測驗方面，舉出一個比方來。若是舉行算術四則測驗於1000個第八年級學生，則將發現許多記分堆積於分配式的上端，或右端，表示負傾斜。若是這個測驗只包含命分開方利息等等問題，則將發現許多記分堆積於量表的下端，即左邊，表示正傾斜。這些結果，可藉產生機率弧的細小的正負因數解釋之。若是測驗太容易，則有些因數被除去，不能運行，以致弧之上端，不能伸展。譬如聰明學生所能有的較高數學的知識，即為被除去的因數。若是測驗太難，則又有些因數被除去，不能運行，以致弧之下端不能伸展。譬如淺近數學之知識，即為被除去的因數。測驗太容易，則有許多最高的記分一樣大，不能分別他們的高下。測驗太難，又有許多記分皆為零，亦不能分別他們的高下。

4　常態弧之應用

次數弧的全面積，代表分配式的總次數。(參看第60頁)若是知道弧的全面積。及弧的一部分為全面積的幾分之幾，則容易求出該部分內　包含次數多少。關於常態弧的事件，已在第十及第十一表內說明了。從這兩個表,可以查出機率弧的一部分理想的次數。熟習這些表,頗有用處，對於許多問題，可得着相當的解決。因此在未研究種種問題之前須根據常態分配式的假設才得解決，同時必須把第10及第11表的構造及其用處，弄得清清楚楚。

1 第10表及第11表之構造及其用處

第10表表明常態弧下均點與離均點若干個σ處所立直線之間的面

積，爲弧的全面積的幾分之幾。弧的全面積，爲計算便利起見，假定包含10000個記分。第十表的第(1)直行上端，冠有$\frac{X}{\sigma}$，表示此行皆爲自均點起的距離，而各個距離，彼此相差.1σ(研究第十表時，應參照第九圖)。距離以σ的百分之一計，見於各直行的上端。若要找均點與離均點1.σ處所立直線之間的記分數目，須先從$\frac{X}{\sigma}$直行向下找，找到1.0爲止。再由1.0向右橫找，找到直行上冠以.00者爲止，則找到3414.3414，表明在全數10000中，佔3414；又表明均點與離均點1σ之間的面積，佔全面積的34.13%。再說清楚一點，常態分配式的34.14%，包括於底邊，弧，及離均點1σ處所立的直線之間。若要找均點與離均點1.57σ之間包括分配式的百分之幾？先在$\frac{X}{\sigma}$直行內,找1.5;再由1.5向右橫找，找到直行上冠以.07爲止，則找到4418。卽謂常態分配式的44.18%，包含於均點與離均點1.57σ之間。

我們已經討論均點右邊的距離，常態弧的右邊的半部，弧的正方向了。常態弧是兩邊對稱的,所以第10表對於弧的左右兩半部皆適用,要想找出均點與離均點－1.26σ之間包括分配式的百分之幾，先從$\frac{X}{\sigma}$直行1.2處向右橫找，找到直行上端冠以.06者爲止，卽找到3962。此數表明分配式的39.62%，包括於均點與離均點－1.26σ之間。照樣可求出均點與離均點－1.00σ之間所包括之百分數爲34.13。學者現在當可證明均點與±1.00σ之間的面積，等於常態分配式全體的68.26%了。

根據理想，常態弧可與其底邊相遇於離均點左右極遠之處。爲實用起見，我們假定弧與底邊相遇於離均點＋3σ及－3σ處。從第10表可以看出在10000個記分中，有4986.5個記分，包括於均點與＋3σ之間；也有4986.5個記分，包含於均點與－3σ之間。所以10000個記分

中，有9973個記分，或分配式的 99.73%，包括於-3σ與$+3\sigma$之間。可知只有弧的全面積的一小部分，或.27%，不包括於$\pm 3\sigma$之間。

PE 也可用作測驗的單個，確定常態弧的一部分所包含的理想的次數。第11表表明常態弧下均點與離均點若干個 PE 所立之直線之間的面積，為全面積的幾分之幾。查第十一表和查第十表相同。如要查均點與$1PE$之間的數目，先從$\frac{X}{PE}$直行，裏查1.0，再自1.0向右橫找，

第十表

常態機率弧的全體的部分：把弧的底邊，以σ的1%為單位，分為許多等份。在每等份的末端，立一個直線，則在均點與每個直線之間之部份，必据弧的全面積的幾分之幾。

例題：求出均點與1.36之間的部份，等於弧的面積的40.32%

$\frac{x}{\sigma}$	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0239	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0536	0575	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1025	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1623	1664	1700	1736	1772	1803	1444	1879
0.5	1915	1950	1935	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2154	2485	2517	2549
0.7	2580	2611	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3254	3290	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3503	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3043	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4235	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4383	4394	4406	4418	4429	4441
1.6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4513	4582	4591	4599	4603	4616	4625	4635
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2.0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817

2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4864	4868	4371	4875	4878	4831	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4903	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4935
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4945	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981
2.9	4981	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986.5	4986.9	4987.4	4987.8	4988.2	4988.6	4988.9	4987.3	4989.7	4990.0
3.1	4990.3	4990.6	4991.0	4991.3	4991.6	4991.8	4992.1	4992.4	4992.6	4992.9
3.2	4993.129									
3.3	4995.166									
3.4	4996.631									
3.5	4997.614									
3.6	4998.409									
3.7	4998.922									
3.8	4999.277									
3.9	4999.519									
4.0	4999.683									
4.5	4999.966									
5.0	4999.997133									

找到直行上端冠有 .00 為止，即找到 2500。此即為要查出之數，即謂分配式的25%，包括於均點及 $1PE$之間，照樣均點與$-1PE$之間，亦包括分配式的25%。可知分配式中間的50%，包括於$-1PE$及$+1PE$之間。這個表不如第10表精細，只是$1PE$量及.05PE量，見於表內。若要更小的PE量，則必須行補插法。

因為$\pm 3\sigma$以外之機率弧的部分非常之小，可無須注意，因此也可不必注意$\pm 4PE$以外之弧的部分，因為 10000 個記分當中，已有9930(4965×2)個記分，包括於$\pm 4PE$之間，(參看第十一表)所以去掉$\pm 4PE$以外之弧的部分，只去掉分配式的.70%。

第10及第11表，可以任意擇用。若用第10表，行補插法，比較容易些。若用第11表，雖不行補插法，在心理測驗的工作上，亦無太不準確的妨礙。

2. 用第10及第11表解算各種問題

有許多問題，可用第10及第1 表解算之。但同時必須假定分配式爲常態，或近於常態。爲便於參考起見，在以下每組例題之前，加以問題類別之說明。

第十一表

常態機率弧的面積的部份：把弧的底邊，以PE的.05%爲準值，分爲許多等份。在每等份的末端，立一個直線，則在均點與每個直線之間之部份，必佔弧的全面積的幾分之幾。

例題：求出均點與1.55PE之間的部份佔全面積的35.21%

$\frac{X}{PE}$	.00	.05	$\frac{X}{PE}$	.00	.05
00	0000	0135	3·0	4785	4802
·1	0269	0403	3·1	4817	4831
·2	C536	0670	3·2	4845	4859
·3	0802	0935	3·3	4870	4881
·4	1063	1193	3·4	4894	4900
·5	1321	1447	3·5	4909	4917
·6	1571	1695	3·6	4924	4931
·7	1816	1935	3·7	4937	4943
·8	2053	2168	3·8	4948	4953
·9	2291	2392	3·9	4957	4961
1·0	2500	2606	4·0	4965	4968
1·1	2709	2810	4·1	4971	4974
1·2	2908	3004	4·2	4977	4979
1·3	3097	3188	4·3	4981	4983
1·4	3275	3350	4·4	4985	4987
1·5	3441	3521	4·5	4988	4989
1·6	3579	3671	4·6	4990	4991
1·7	3742	3811	4·7	4992	4993
1·8	3869	3939	4·8	4994	4995
1·9	4000	4057	4·9	4995	4996
2·0	4113	3166	5·0	4996	4997
2·1	4217	4265	5·1	4997·1	4997·4
2·2	4311	4354	5·2	4997·7	4998
2·3	4396	4435	5·3	4998·2	4998·4
2·4	4472	4508	5·4	4998·6	4998·8
2·5	4541	4573	5 5	4999	499911
2·6	4302	4631	5·6	4999·2	4999·3
2·7	4657	4682	5·7	4999·4	3999·5
2·8	4705	4727	6·8	4999·55	4999·6
1·9	4748	4767	5·9	4999·56	4999·7

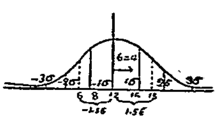
A. 確定常態分配式的百分之幾落於指定的界限內

例題1……設有一個常態分配式，他的均點＝12，$\sigma=4$。(a) 問分配式的百分之幾落於16與8之間？(b) 問在18以上有分配式的百分之幾？(c) 在6以下有百分之幾？

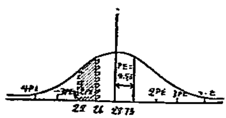
(a) 16大於均點4故差數為正4；8小於均點4故差數為負4若以σ之量，除以上兩個差數，即得着＋1及－1。即謂16在均點的右邊，且離均點1σ，8在均點的左邊，離均點-1σ（參看第十四圖的附圖1）查第1）表，找出一個σ所概括的面積，佔全體的34.13%，故$\pm1\sigma$之間的面積，等於全面積的68.26%。是這個分配式的68.26%，落於8與16之間，這個結果，可以機會二字解之。因為分配式的68.26%，皆落於8與16之間，故任何記分，得落於8與16之間的機會為68%。

(b) 18與均點之差為正6，即是離均點1.5σ。查第10表，發現分配式的43.32%，落於均點與1.5σ之間。但是分配式的右半部，佔弧的全體的50%。自50%減去43.32%，得着6.68%。即謂分配式的6.68%落於18之上。若以機會之理解之，即謂任何記分，得落於18之上的機會為萬分之668，或為7%。

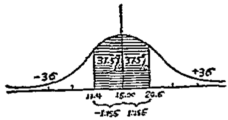
(C) 6與均點之差為負6，即離均點-1.5σ。在均點與-1.5σ之間，有全分配式的43.32%。所以全分配式的6.68%（50%－43.32%＝6.68%）落於6之下。即謂任何記分，得落於σ之下的機會為百分之7。



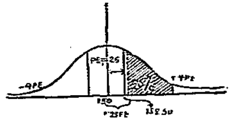
附圖1.



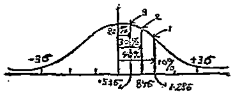
附圖2.



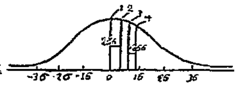
附圖3.



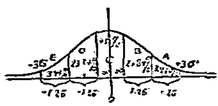
附圖4.



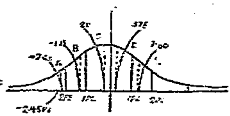
附圖5.



附圖6.



附圖7.



附圖8.

第十四圖

表示各種問題可藉第十表及第十一表解算之

例題2……有一個分配式，他的均點=29.75，Q=4.56，問分配式的百分之幾，落於22與25之間？任何部分落於22與26之間的機會為何？

在常態分配式裏，$Q=PE$。22距均點負7.75個單個，或$-1.70PE$。25距均點負3.75個單個，或$-.822PE$.(參看第十四圖的附圖2)查第十一表，常態分配式的37.42%，落於均點及$-1.70PE$之間；常態分配式的21%，落於均點及$-.822PE$之間。把上面兩個百分數相減，則得16.42%，(37.42%−21%)即謂分配式的16.42%，落於$-1.70PE$及$-.82$

$2PE$之間，或26及22之間。故任何記分落於22及26之間的機會，爲百分之16，或爲萬分之1642。

B 已知常態分配式的百分數求其界限

例題(1) 有一個分配式，均點=16，$\sigma=4$，問居分配式中間的75%，在什麼界限之內？

居常態分配式中間的75%，必有37.5%在均點的左邊，亦有37.5%在均點的右邊。查第10表，發現10000個記分中，有3749個記分，或分配式的37.5%，落於均點及1.15σ之間。故又必有分配式的37.5%，落於均點及−1.15σ之間。所以居中的75%，落於均點及±1.15σ之間，或均點及±4.60個準個之間，因爲$\sigma=4$把±4.60加於均點上，則知居分配式之中的75%，落於20.60及11.40兩個界限之間。(參看第十四圖的附圖3)

例題(2) 有一個分配式，其均點=150，$Q=26$，問分配式最高的20%，落於什麼界限之內。

常態分配式的最高的20%，佔據常態弧的極右邊的一部份。在其下限與均點之間，必還有30%。查第十一表，發現10000個記分中，有3004個記分，或分配式的30%，落於均點與1.25PE之間。因爲$PE=26$，所以1.25$PE=1.25\times26=32.5$準個，即謂分配式最高的20%的下限，離均點32.5個準個，即在(均點+32.5或150+32.5=)182.50處。故分配式的最高的20%的下限爲182.50，而其上限，則爲分配式的最大的記分。

C 確定測驗題目，問題，測驗項目之難易

例題1 有三個測驗問題。第一個被一大羣未加選擇的人的10%解對了；第二個被此羣的19%解對了，第三個被30%解對了。假定

這羣人的能力分配式爲常態，問這三個問題的難易如何？

先從分配式裏找出問題1的地位。在這地位之上，有分配式的10%。(解對的人數)在這地位之下，有90%。(未解對的人數)在這個分配式的最高的10%的下限及均點之間，有分配式的40%。(50%－10%＝40%)查第10表，發現常態次數分配式的39.97%，或40%，落於1.28σ與均點之間。所以問題1的地位，在離均點1.28σ處。1.28σ即是問題1的難易量。

第二個問題，爲這羣人的20%解對了。在他的地位及均點之間，還有30%。(50%－20%＝30%參看第十四圖的附圖5)查第10表，發現29.95%，或30%，落於均點及.84σ之間。所以問題2的難易量爲.84σ。第3個問題，落於分配式的一點。在這點與均點之間，有此羣的20%，(50%－30%＝20%)查第10表，20%落於均點與.53σ之間。所以.53σ爲問題3的難易量。

總結以前的結果如下

問題	解對的百分數	σ量	σ量的差數
1	10%	1.28	
2	20%	.84	.44
3	30%	.53	.31

看上面的結果，可知問題2與問題3的百分數的差別量，等於問題1與問題2的百分數的差別量。而問題2與問題3的難易量之差別爲.31，問題1與問題2的難易量之差別爲.44，假定人的能力分配式爲常態，則σ量爲問題難易的表示物，而百分數的差別，不足爲問題難易的表示物。

例題2　有三個測驗問題。第一個被一大羣人的50%答對了，

第二個被40%答對了，第三個被30%答對了，問此羣人的百分之幾，答對第四個問題，庶幾第一與第二個問題的難易差別量，等於第三與第四個問題的難易差別量？

凡問題被一羣人的50%答對了，亦必被50%答錯了，故此種問題的地位，在常態分配式的正中，所以問題一的σ量爲零，因爲他的地位正在均點上。(參看第十四圖的附圖6)第二個問題，被此羣的40%答對了，被60%答錯了，所以在他的地位與均點之間，有分配式的10%查第10表，找出9.87%或10%落於均點與.25σ之間；故.25σ即爲第二個問題的難易量。問題3被此羣的30%答對了，所以在他的地位與均點之間有20%；查第10表，找出常態分配式的19.85%，或20%，落於均點與.52σ之間。故.52σ即爲第三個問題的難易量。

因爲問題2的地位，在難易量表上，比之問題1的遠.25σ，所以問題4的地位在難易量表上，比之問題3的，亦必遠.25σ。若是問題4難於問題3的程度，等於問題2難於問題1的程度，則問題4的難易量，必須爲.52σ+.25σ，或.77σ。查第10表，發現27.94%，落於.77σ與均點之間。50%−28%=22%，是問題4必須爲此羣的22%所答對。總結上面的結果如下：

問題	解對百分數	σ量	σ量之差別
1	50%	.00	…………
2	40%	.25	.25
3	30%	.52	…………
4	22%	.77	.25

苟問題甲被一大羣的22%答對了，問題乙被30%答對了，問題丙被40%答對了。問題丁被50%答對了，則問題甲難於問題乙的程度，

等於問題丙難於問題丁的程度，可知能力分配式爲常態時，百分數之差別，不能爲難易差別的表示物。

D. 若是能力分配式爲常態則案能力的大小把他們分爲數組

例題 1……假設用一個測驗具，測驗一百個大學學生。按他們的能力，把他們分爲A,B,C,D,E五組，而各組的能力的全距離，完全相等。假定被測驗人的能力，表示常態分配式的現象；而被測驗者，係任意找來的，問A,B,C,D,E五組，各有多少人？

這五組的地位，在第14圖附圖7上，已經表示出來。若是弧的底邊的長度，等於自-3σ到$+3\sigma$，或6σ。則把底邊以5除之，即得着5個等段。每等段等於1.2σ。是每組佔據弧的底邊1.2σ。先把弧的底邊，分爲5個等段。後在每段終點處，畫一根垂線，則弧的全體，被分爲五份。若自右邊數起，則A佔據弧的底邊的極右邊的1.2σ；B佔據第2個1.2σ；C佔據均點右邊的$.6\sigma$及均點左邊的$.6\sigma$；D佔據第4個1.2σ；E佔據極左邊的1.2σ。

若要求出一羣的百分之幾，包含於A組內，必須找出常態分配式的百分之幾，落於3σ(A組的上限)與1.8σ($3\sigma-1.2\sigma=1.8\sigma$)之間。查第10表，發現常態分配式，49.86%落於均點與3σ之間；46.41%，落於均點與1.8σ之間。因此常態弧的全面積的3.45%，(49.86%$-$46.41%$=$3.45%)落於3σ與1.8σ之間。所以A組包括一羣全體的3.45%。

別組的百分數，可照樣求出來。常態弧的46.41%，落於均點與1.8σ之間，(B組的上限)而22.57%，落於均點與$.6\sigma$(B組的下限)之間。從46.41%裏減去22.57%，得着23.84%。即謂此羣全體的23.84%，屬於B組，C組居於$-.6\sigma$與$.6\sigma$之間。均點與$.6\sigma$之間，有常態分配式的

22.57%；均點與 $-.6\sigma$ 之間，亦有等大的百分數，故 C 組包含45%（22.57%×2=45%）。D 組落於 $-.6\sigma$ 與 -1.8σ 之間，故其所有之百分數，等於 B 組。E 組落於 -1.8σ 與 -3σ 之間，故其所有之百分數，等於 A 組，各組人數之百分數，舉之如下：

各組	A	B	C	D	E
各組之百分數	3.5	23.8	45	23.8	3.5
每組之人數（以100名計算）	4或3	24	45	24	3或4

假定能力之分配，如常態機率弧之形，則100人中，應有4人，屬於 A 組，或稱爲優異組；24人屬於 B 組，或稱爲高才組；45人屬於 C 組，或稱爲中等組；24人屬於 D 組，或稱爲低能組；4人屬於 E 組，或稱爲最劣組。

以上的方法，可以用之確定一大羣人中，有多少屬於 A 組，B 組，C 組，D 組，E 組。用這個方法時，必須假定人的能力分配式爲常態。

3. 按問題的難易量順序排列成爲一個量表自最易的問題其難易量爲零者一直排列下去。

測驗學者最大的工作爲構造量表。量表係把許多問題由易到難排列而成的。設有一組問題，而各個問題答對的百分數，已經求出，則按照他們的百分數，把他們排列起來，即成爲一種量表。這種量表，自然粗陋。因爲各個問題的真難易量，（參看第92頁）及被測驗者的能力的全距離，我們皆不知道。

苟能假定能力分配式爲常態分配式，則必以 σ 或 PE 爲測量的單位。如此不但能按測驗問題的難易，排列他們；并且能指定他們各個在難易量表（常態弧的底邊）上的位置。因此自一個問題至別個問題在量表上之距離，或自一個問題至量表的零點之距離，可以明確的指出

來，好像我們能指出裁尺上的兩點的距離一樣。製造這種量表的方法，詳說之如下。譬如要做一個量表，測量12歲小孩的思考力。(用三段法)或做一個量表，測量4年級小學生的加法程度。或做一個量表，測量8歲小孩的語句記憶力。做量表的步驟如下：

(1) 彙積許多難易的問題，而這些問題能概括所欲測驗的範圍。

(2) 用這些問題，測驗一個很大的隨機的雛形，(Random sampling(此爲一大羣的雛形，而此測驗，即爲此一大羣所構造者。

(3) 求每個問題爲此雛形的百分之幾所答對。由此可發現同等難易的問題或太多者；問題有太難，或太易，不合用，必須棄掉者。按問題的難易，把他們排列起來。若是一個問題，被此羣的93%所答對，則這個問題，必易於第二個問題之被此羣的75%所答對．第二個問題，必易於第三個問題之被此羣的55%所答對。任何問題，答對的百分數愈大，他在難易量表上的位置愈低。

(4) 按第10表，把每個百分數變爲士PE，或士σ。辦法如下：一個問題，被一羣的40%所答對，則他的位置，高於均點10%，或·375 PE。又有一個問題，被此羣的78%所答對，則此問題的位置，在均點下28%，(50%−78%=−28%)或−1.15PE. 把這五個問題的結果，舉之如下。(參看第十四篇的附圖8)

問題	A	B	G	D	E
答對的百分數	93	78	55	40	14
	(50−93)	(50−78)	(50−55	(50−40	(50−14)
離均點的百分數	−43	−23	−5	10	36
離均點的PE量	−2.20	−1.15	−20	·375	1.60

注意：問題A 被此羣的93%所答對，此百分數佔據弧的右半部的全體，即爲50%，及均點左邊的43%。所以這個問題的位置，在均點

左邊−2.20PE處。把每個問題答對的百分數，從50%裏減去之，即得其餘數，稱之爲每個問題離均點的百分數。求得離均點的百分數後，再查第11表，即得着每個問題離均點的PE量了。

(5) 得着每個問題離均點的PE量後，則又必須求出每個問題離零點的PE量。求零點的方法如下：假定一個問題，彼此羣形的95%所答對，此問題離均點的百分數爲(50%−95%=)−45%，而其PE量爲−2.45，設以=2.45PE爲量表的零點則以上五個問題，離這便零點多遠，可求出之如下：

問題	A	B	C	D	E
離均點的PE量	−2.20	−1.15	−.20	.75	1.60
離零點(−2.45PE)的PE量	.25	1.30	2.25	2.83	4.05

求每個問題距零點多遠的最簡單方法，係把零點從每個問題離均點PE量裏減之即得。譬如問題A，離均點的PE量爲−2.20，而零點爲−2.45，則問題A距零點的PE量，爲−2.20−(−2.45)或.25PE。問題E離零點的PE量爲1.60−(−2.45)，或4.05PE，其餘問題離零點的PE量，可照樣求出來。

我們已經有零點了，又把每個問題離零點的PE量求出來了，則可案問題的PE量之大小，把他們排列起來成爲一個量表。

這種量表，是問題編列而成的。問題的區段，并非個個等大。但亦不能謂其無用，而不能爲一種測量的工具。裁尺上的單位，處處等大。故以裁尺量物，極容易，極準確。倘使量表上的區段，個個等大。則應用他亦容易，亦準確。故量表製造者，竭力使量表上的區段，個個等長。第一種方法，在淘汰問題。問題太擁擠者，則淘汰之。問題之距離，彼此相等者，則保存之。第二種方法，在另選一組問題，測

驗學生，再從這些問題裏，選擇問題之能填充量表上之空處者。或改變問題之字句，或變更記分之方法，而移動問題在量表上之位置。

有一個很好的例子，表明應用第一個方法，得使量表上的區段，個個等大。這個例子，即為Woody的數學量表B。他所包含的問題，係從量表A中選出。他們的PE量彼此的差別，幾乎相等。量表A內的問題的PE量，彼此的差別，不等：例如問題一的難易量距零點1.23PE，(零點在第二年級的中點下$-2.42PE$)問題二的難易量距零點1.40PE，問題三的難易量距零點2.50PE，等等。

A組內別的問題及其PE量，及從A組所選擇之問題組成B組者，俱列於第十二表內：

第十二表

Woody 數學測驗量表內的問題的難易量：A 組及 B 組

問題	量表A之PE量	量表B之PE量	量表PE量的差別 量表B
1	1·23	1·23	
2	1·40	1·40	·17
3	2·50	2·50	1·10
4	2·61		
5	2·83	2·83	·33
6	3·21		
7	3·25	3·25	·43
8	3·35		
9	3·68		
10	3·78	3·73	·52
11	3·92		
12	4·18		
13	4·19	4·19	·41
14	4·85	4·85	·66
15	4·97		
16	5·52	5·52	·67
17	5·59		
18	5·73		
19	5·75	5·75	·23
20	6·10	6·10	·35
21	6·44	6·44	·34
22	6·79	6·79	·35
23	7·11	7·11	·32

24	7·43	7·43	·32
25	7·47		
26	7·61		
27	7·62		
28	7·67		
29	7·71	7·71	·23
30	7·71		
31	7·97		
32	8·01		
33	8·18	8·18	·47
34	8·22		
35	8·58		
36	8·67	8·67	·49
37	8·67		
38	9·19	9·19	·52

以小學第二年級的中點下 $-2.425\ PE$ 爲加法量表的零點(在第二年級中點下 $-2.425\ PE$) 因爲要使量表 A 適用於自第二年級，到第七年級學生，故其上半部的問題很難。非第二年級學生所能解算。注意：在量表 B 內，除去幾個問題外，其餘的問題自難到易，其 PE 量的差別，幾乎相等。學生所得的記分，即爲他所答對之最難的問題的 PE 量，學生答對問題愈多，他在量表上的地位愈高，正如小孩的身長，可以裁尺量之。

若是量表上的隔段處處等大，則自10點至12點的距離，必等於自12點至14點的距離。而自 14 點至 15 點的距離，則等於以前兩個距離各個的二分之一。再者，若是第一個小孩算對八個問題；第二個小孩，算對四個問題；第三個小孩，連一個也未算對，我們即可以說：第一個小孩高於第二個小孩的量，正等於第二個小孩高於第三個小孩的量，但是我們還不能說：一個記分等於別個記分若干倍，因爲不像量長度之尺，量重量之秤，其量物也，自决對的零點計算。而動作量表(Performance scale)的零點，係試驗者隨意選擇的，一個人72 英寸長，自然較之一個小孩子36英寸長高一倍。但在加法測驗上，若是一個小

孩得着一個記分5。以後他得着一個記分10，我們實在不能說：他的算學能力，已經增長一倍。除非這個量表的零點是決對的，零點代表一點加法知識都沒有，才可以這樣說。

構造量表的方法，已經詳細說過了。這種方法，對於任何團體，任何年級，任何班次，皆可合用。若要一個量表，不僅適用於一年級，要適用於小學各年級，則這種方法，必須擴充。擴充之法如下：

(1) 求每個問題爲各級學生百分之幾所對算，以後案其百分數，求其PE量。

(2) 求各級中點彼此的距離等於多少PE。其推求法，在求一級學生的百分之幾所有的記分。大於下一級學生的中點。再應用第十一表，把這些百分數，變爲PE量 則得着兩級中點的距離，等於多少PE了。

(3) 知道各級中點之距離後，再把各個問題離某級中點之PE量，變爲離公共零點之PE量。每個問題爲幾級學生所解算，故每個問題，有幾個PE量。把每個問題的幾個PE量平均之，則得着他在量表上之PE量，離公共零點之PE量了。(請參看 Woody 的 measurement of some achievement in arithmetic)

還有一個比較簡單的方法可用。即是從一大羣裏，隨意找出一個很大的雛形；用許多問題，測驗他們。以後再求出每個問題爲此雛形的百分之幾所答對。再把這些百分數，變爲PE量。這種方法，與在第95頁上所說的相同：係假定被測驗者的能量，(Capacity) 其分配也，恰如一個常態弧。以精確論，這種方法恐不及前一個；不過他的好處，即在簡單而且爲直接的。

4. 把地位高下的，優劣的評判變爲量表上的σ或PE地位

以前幾節，詳論動作量表的構造。其構造的方法係根據"每個問

題。爲某團體的百分之幾所做對。而每個問題的百分數，即爲該問題的難易量"。但是往往遇着被測量的能力，有這種性質：動作不能以"對"與"不對"記之必須把他和別個同樣的動作，比較一下才能定其好壞，我們必須構造作品量表。(Product scale) 例如書法量表，作文量表，繪畫量表等等、測量作品的品質。(Qualitiy) 例如欲評定一個人的書法的優劣，即把他所寫的字，和書法量表上的標準樣本，比較比較。

作品量表的構造，係根據這種假設：凡差別爲等多人看出者相等第一步在獲得一大羣樣本，例如書法，作文等等，其中自然有很好的，亦有很壞的。第二步在找出一大羣富有經驗的評判員。請他們案樣本的優劣，把他們排列起來。如此一個樣本，得和其餘的比較一下。每個樣本，經評判員排列之高於別個樣本的次數，變之爲百分數，即謂評判員的百分之幾，把某樣本評判之高於某樣本。再把這個百分數，變爲PE，此即爲兩個樣本的優劣差別量稱PE表白者，或稱之爲PE差別。PE差別找出後，樣本之被選出編爲量表者，其離任意指定之零點多少PE亦找出來。請以 Hillegas 作文量表 (Hillegas 曾於 1912 年在哥倫比亞師範院雜誌上發表一篇文章，題目爲："測量青年人的英文作文的品質量表) 上的樣本8及樣本9做例子。Hillegas 找到202個評判員。請他們案英文作文品質的優劣，把他們排列起來。有一篇特意做的文章，公認爲一點好處都沒有的，定之爲量表的零點。202個評判員當中，有136個。或評判員全體的67.5%，評判樣本9優於樣本8.查第 XI 表，找出百分差別67.5%約合.66PE，此即樣本9優於樣本8的量。樣本8的優劣量，已找出高於量表的零點7.72PE。故樣本9高於零點7.72+.66，或8.38PE。Hillegas 量表上別的文章的優劣量，藉PE表白者，已找出爲：0, 1.83, 2.60, 3.69, 4.74, 5.85, 6.75, 7.72, 8.38.

9.7，注意：這個量表上的堦段，是很規則的，兩個比隣堦段，相距約1*PE*。

5. 佈置記分成為一個測驗具

在溫習量表構造法未完之前，我們應當舉出幾個方法以之佈置測驗具上之仔目。(item)我們平時總看一個人做對測驗仔目多少，而定其記分。故記分即為做對的問題，或測驗仔目的數目，並不按照(3)及(4)的方法先求各個測驗仔目的難易量，再案照其難易量的大小，佈置之成為一個測驗具，我們所擬用的佈置記分法有三，(a)百分量表，(2)年齡量表，(3)*T*量表，(参看M^c^call W.M,的How to experiment in educatiam)

(*a*) 我們已能在記分分配式上，指出各個百分數。(42—43頁)我們能案一個學生所得的記分，在記分分配式上的位置，而給以百分數20,30,等等。百分法，假定百分數10和百分數20的差別，等於百分數40和百分數5 的差別。簡言之，百分法假定每兩個隣近的百分數的差別完全相等，百分量表上的準個，個個等大。不過這種假定，健全與否，實在是一個疑問。因此為實用計，百分量表，在理想上，尚站不住。

(*b*) 在年齡量表上，一大羣隨機抽選的7歲小孩子所得的均分，則為7;一大羣隨機抽選的9歲小孩子所得的均分則為9等等。記分之在年齡中間者，則以補插法求出。年齡量表，流行最廣，又容易解釋。其最大的缺點，即在難得着一個很大的隨機抽選的雛形，用以求各年齡的常模。(Norm) 因為低年齡的小孩子，有許多尚未進學校；高年齡的小孩子，又有許多已經離開學校。故年齡量表，只在很窄的能力範圍內，很準確。

(*c*)近來M^c^call提出一種佈置記分的方法，即是*T*量表。*T*量表沒

有百分量表年齡量表的缺點。T 記分，即爲隨機抽選的12歲小孩子的記分分配式的 σ 量。T 記分，自0起到100爲止。零記分，在量表的均點下5σ處。記分100，在量表的均點上5σ處。測量的準個，卽爲 $1T$。此卽隨機抽選的12歲小孩的記分分配式的.1σ。T記分的均點爲50T。而離此點向左右去10點，卽爲±1σ所在之處。實際上，T 記分只能自15起至85止。若是一個人受某種測驗，而正在12歲小孩的均點處，則得 T50。若是他高於12歲小孩的均點1σ，則得 T60。若低於12歲小孩的均點1σ，則得 T40。

T量表的構造法，在M^c^call的 How to measure in Education 上第十章內，已詳細說過，故在此處，只須將其最大的好處說一說：(1)量表所概括的範圍大，遇必要時，亦可擴充之。(2)所有的 T 記分，皆以等大的準個表白之，又有一個公共的零點。故各種測驗上的記分，(假使採用T 記分)皆能直接比較，皆可直接合併起來。(3)一個記分，無論得自那一種測驗具，就其與12歲小孩的均點的關係言，皆有同樣的意思。

V 把優劣的等級變爲準個數目或記分

常想把等級變爲準個或記分，而在推算相關係數上(見第四章)尤甚。這種變法，可藉表行之。但所研究的特性，其分配之狀，必能假定之爲常態。設有15個販商，案其販賣能力大小，而排列之。能力最大者，列爲第一。能力最低者，列爲第15，若能假定販賣能力，依照常態弧而分配，則先把等級變爲百分地位，再查第十三表，找出各人的販賣記分，代表他的販賣的能力，試舉一個問題，表白變更等級的辦法。

問題一……設有15個販商，店東案其優劣而定其等級，再把這些

等級，變爲10點量表(量表包含10單個)上之記分。

變更等級爲記分的辦法如下：第一步應用以下的公式求百分地位：

$$百分地位=\frac{100(R-.5)}{N}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

(此方法係 Clark Hull 所找出，請參看 The computation of pearson r from ranked data, Journal of applied psychology 1922,6,385)公式(12)中的R,代表各人在次序上的等級，N代表所有的人數，以此決定各人的百分地位。第二步查第13表，找出十點量表上的記分。販商A名列第一，(參看以下的表)他的百分地位$=\frac{100(1-.5)}{15}$，或爲3.34。查第13表，找出他的記分爲8.5。(無須用精確的補插法)照樣販商B名列第二，他的百分地位爲$\frac{100(2-.5)}{15}$，或爲10，故其記分爲7.5。別人的記分，皆照樣找出來，擺於下表內。

販賣者	等級	百分	記分(量表10)
A	1	3·34	8·5
B	2	10·00	7·5
C	3	16·67	6·9
D	4	23·34	6·4
E	5	30·00	6·0
	6	36·67	5·7
G	7	43·34	5·3
H	8	50·00	5·0
I	9	56·67	4·7
J	10	63·34	4·3
K	11	70·00	4·0
L	12	76·67	3·6
M	13	83·34	3·1
N	14	90·00	2·5
O	15	96·67	1·5

在前面有好幾處已經表明：在特性上常態之假設，意謂在能量兩極端上的差別，大於同等的差別之在均點附近者。看上表即知其所以然了。故在等級次序裏，兩個鄰近的等級的差別，處處爲1。變爲記分後，兩個鄰近的記分的差別，則處處不同。在次序的兩端上，差別最

大。在次序的中心差別最小。故A與B的差別，或N和O的差別，大於G和H的差別3倍。換言之，自H進而至於G，(自第八級至第七級)較之自B進而至於A(自第二級至第一級)容易三倍。

第13表還有一個用處，即在合併不完備的等級，試舉例以明之。

例題二……設請三個評判員，按A,B,C,D,E,F六個人的誠實的高下而排列之。評判員甲知道這六個人而評判其高下。評判員乙只知道三個人而評判之。評判員丙只知道四個人而評判之。若合併這三組等級，而其中有兩個不完全，能不能為這六個人求出一種公平的排列？請看以下的材料：

第十三表

(借用 Hull 的材料請參看 Journal of applied Psychology)

變等級為單位或記分

以R代表等級，N代表等級的數目，應用公式求百分地位$=\frac{100(R-.5)}{N}$；再案百分地位，查出記分。

例題：若是N= 25 R=3 ，百分地位$=\frac{100(3-.5)}{25}$，或為10.00查表求得記分為7.5

百分數	記分	百分數	記分	百分數	記分
·09	9·9	22·32	6·5	83·31	3·1
·20	9·8	23·88	6·4	84·56	3·0
·32	9·7	25·48	6·3	85·75	2·9
·45	9·6	27·15	6·2	86·89	2·8
·61	9·5	28·86	6·1	87·96	2·7
·78	9·4	30·61	6·0	88·97	2·6
·97	9·3	32·42	5·9	89·94	2·5
1·18	9·2	34·25	5·8	90·83	2·4
1·42	9·1	36·15	5·7	91·67	2·3
1·68	9·0	38·06	5·6	92·45	2·2
1·96	8·9	40·01	5·5	93·19	2·1
2·28	8·8	41·97	5·4	93·86	2·0
2·63	8·7	43·97	5·3	94·49	1·9

3·01	8·6	45·97	5·2	95·03	1·8
3·43	8·5	47·98	5·1	95·62	1·7
3·89	8·4	50·00	5·0	96·11	1·6
4·38	8·3	52·02	4·9	96·57	1·5
4·92	8·2	54·03	4·8	96·99	1·4
5·51	8·1	56·03	4·7	97·37	1·3
6·14	8·0	58·03	4·6	97·72	1·2
6·81	7·9	59·99	4·5	98·04	1·1
7·55	7·8	61·94	4·4	98·32	1·0
8·33	7·7	63·85	4·3	98·58	·9
9·17	7·6	65·75	4·2	98·82	·8
10·06	7·5	67·48	4·1	99·03	·7
11·03	7·4	69·39	4·0	99·22	·6
12·04	7·3	71·14	3·9	99·39	·5
13·11	7·2	72·85	3·8	99·55	·4
14·25	7·1	74·52	3·7	99·68	·3
15·44	7·0	76·12	3·6	99·80	·2
16·69	6·9	77·68	3·5	99·91	·1
18·01	6·8	79·17	3·4	100·00	·0
19·39	6·7	80·61	3·3		
20·93	6·6	81·99	3·2		

評判員	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
評判員甲的等級	1	2	3	4	5	6
評判員乙的等級		2		1		3
評判員丙的等級	2		1		3	4

假定試實的分配，亦爲常態，因爲 A 在6人中居第一，而 D 只在四人中居第一，C 只在三人中居第一，故 A 似較重要。但是就等級論、則等級相同，總皆等大。然把各人在次序上的等級，用公式(12)變爲百分地位；再從第13表上，查出此百分地位的記分，則 A 因居六人之首，而得記分 77，D 因居三人之首，而得記分 69；C 因居四人之首，而得記分 72。請看下表。〔是否值得費工夫把等級變爲記分，然後再合併之，求出負重的(Weighted)等級來，還是一個疑問。若欲等級上負以重量，則此方法亦有用〕。

評判員	A	B	C	D	E	F
評判員甲的等級……	1	2	3	4	5	6
記分……	77	63	54	46	37	23
評判員乙的等級……		2	…	1	…	3
記分……		50	…	69	…	33
評判員丙的等級……	2	…	1	…	3	4
記分……	55	…	72	…	43	28
記分的總數 ………	132	113	126	115	80	84
均分	66	57	63	58	40	28
優劣的等級…………	1	4	2	3	5	6

其他等級皆照樣變過來。等級變爲記分後，再把他們合併起來，平均之；則求得負重的等級了。

應用公式(12)及第十三表，能把一切等級，變爲記分。但是同時必須假定所研究的特性，表示常態形狀，凡特性，不能用普通方法測量者，例如運動技能，人格，美麗等等，只能案他們的優劣，把被測量的人列成等級，則變等級爲記分的方法即很有用了。這種方法在相關問題上，亦極有用。苟以一種能力爲標準，而這種能力的大小，只能以等級表示之，同時又有好幾種測驗記分。若要求這些測驗記分和這種標準的相關量，必須先把等級變爲記分才行。變出的記分，可以合併之，平均之如同別的測驗記分一樣。

至於第十三表的構造，亦不可不簡單說明之。此表係由常態次數弧所推得。其弧的兩端，則截止於±2.5σ處，故弧的底邊爲5σ。可把5σ分爲100個等份，每份佔.05σ。自弧的最高端計算起，第一個.05σ，佔分配式全體的.09%，(2.5σ佔弧的49.38%，2.45σ佔弧的49.29%。49.38%−49.29%=.09%)故以9.9(10−.09=9.9)記之；[在100點表量上(量表包含100個單個)則爲99]第二個.05σ，佔分配式全體的.20%，

(因爲2 5σ佔弧的49 38% 2 40 佔弧的49 18%，49 38%－49 18%＝.20%)故以9 8，(10－ 20＝9 8)或98記之。其他那樣求出來。可知百分地位，代表分配式的一部份，居底邊上已知的σ量的右邊，σ量決定記分的大小。

問題

1 (a) 案第52－53頁上問題二內的兩個分配式，畫出(1)次數多邊形，(2) 柱形。爲比較起見，再案每個分配式，在同樣縱橫軸上，繪出一個次數多邊形，及一個柱形。

b) 求該兩個分配式的傾斜程度。

2 把第58頁上問題二內的分配式A,繪出一個累積形，把繪圖求出的百分點，和推算出來的百分點，比較一下。

3 假定特性X，爲六個因數所支配。而這六個因數，個個相似，相等，且獨立。而各個因數顯沒的機率亦相同，假設測驗1000個隨機選抽的人的特性X，而得着一個分配式，請把這個分配式畫出來。

4 設有一個隨機的雁形，包含1000個記分，其均點爲 14 4，而σ＝2 5。

(a) 問百分之幾，落於 12 與 16 之間？

(b) 任何記分，得落於 18 以上之機會如何？

(c) 任何記分，得落於 8 以下之機會如何？

5 一個分配式，近似常態，包含100個記分，其均點爲29 74，而Q＝3 18。

(a) 問記分的百分之幾，落於24 與25 之間？

(b) 問居中的60%在什麽界限之內？

(c) 問最低的 5%，在什麽界限之內？

6.在一個測驗具上，第七年級的中點爲23，而Q爲4.8。第8年級的中點爲31.6，而Q爲4.0。問第7年級的百分之幾，在第8年級的中點之上？

7.一羣12歲小孩子，兩年前，他們的默讀能力的均點爲40，而其Q爲3.6，他們的作文能力的均點爲62，而其σ爲9.6。現在這羣小孩子在默讀上多得着12分，在作文上多得着10.8分，問默讀上的獲得大於作文上的獲得多少倍？

8.有四個問題1,2,3,4,爲一大羣學生所解算。第一個問題，爲此羣的50%算對了；第二個，爲60%算對了；第三個，爲70%算對了；第四個，爲80%算對了。把1與2的難易量的差別，和3與4的難易量的差別，比較比較。

9.一個大學校，採用十級分數，$A+,A,A-$；$B+,B,B-$；$C+$ $C,C-$；及D。假定算學能力，合乎常態分配式。第一年級學生，共有500個問有多少人得$A+$，多少人得A等等？

10.有五個問題，被隨機抽選的一大羣的15%，34%，50%，62%及80%解對了。若把能力的零點，定於-3σ處，問每個問題離零點的σ量若何？

11.有一大羣富有經驗的評判員，其中之88%評列作文A高於作文B；65%評列作文B高於作文C.若已知作文C離零點(或最壞的作文其分數爲零者)3.5PE，問A及B各離零點多少PE？

12.體育教員，案25個足球運動者之運動技能，列成等級，自1至25.假定運動技能之分配式爲常態，試把等級變爲100點量表上之記分？

答數

4.(a)57.04%　(b)萬分之749　(c)萬分之52

5·(a) 4.8 %　(b)25,76與33.72　(c) 21.95與分配式最低的極限

6·30.65%

7·2.96(將近3)倍

8·1與2的差別爲 $.25\sigma$；3與4的差別爲 $.315\sigma$

9·十級分數……A+, A, A−, B+, B, B−, C+, C, C−, D。

人數……3　14　40　80　113　113　80　40　14　3

10·4·04,　3.41,　3.00,　2.69,　2.16

11·B，　4.07PE；　A，　5.82PE

12·

等級	記分	等級	記分
1	89	13	50
2	80	14	48
3	75	15	46
4	71	16	44
5	68	17	42
6	65	18	39
7	63	19	37
8	61	20	35
9	58	21	32
10	56	22	29
11	54	23	25
12	52	24	20
		25	11

第三章

可靠的度量 (Measures of reliability)

1. 可靠量之義意

所謂個人的特性之眞測驗記分，就是指一個人的特性，例如身長，反應時間，智力等等，在固定情形之下，測量無數次，眞記分，即是這無數次測量記分的均點。實際上眞記分很難得着，因爲我們只能把一個特性測量幾次，不能把他測量無數次。但是可求出已得的記分和眞記分的極能機遇的(Most probable)差別來，而度量其大小。這種度量，即爲已得的記分的可靠量之指示物，表示已得的記分和眞記分相似的程度。

照樣求出一個團體所的度量(例如均點，中點等)其可靠量，可以該度量和眞度量之極能機遇的差別決定之。眞度量例如眞均點或眞標準差可以界說爲一個度量，而這個度量，必須把團體內各個份子都測量過，才能得着。兩個團體的眞差別，係兩個眞均點，或眞中點的差

別。要想把眞度量的意思弄明白些，非舉例說不可。譬如測量我國所有12歲男小孩的身長。測量後，把測量記分，排成一個次數分配式，再推算他的集中趨勢，及差異趨勢。推算出來的均點。即是我國12歲男小孩的平均身長。推算出來的標準差。即表白記分環繞眞均點的興散佈情形。照樣再測量我國所有12歲女小孩的身長，並求其眞均點，及環繞眞均點的眞差異趨勢。求出12歲男小孩及女小孩的身長的眞均點後，即可比較，而知其實在情形。

但是測量一個團體的各個份子，往往爲事勢所難能。把一個人測量無數次，亦爲事實所不許。不得已只得研究可得着的，能爲代表的一組記分，通常稱之爲雛形。往往此雛形與彼雛形不同。因此各個雛形的集中趨勢的度量及差異趨勢的度量和眞度量不同，或失之過大，或失之過小。故測量一個人或一個團體時，我們必須問"求得的度量可靠到什麼程度？這個問題，又引起第二個問題"，必須有多少次測量，方可得着所盼得的標準，即謂求得的度量和眞度量之差別，小于一個定量"。

以下各節的目的，在求出方法來，使我們能回答這些問題。我們將研究(1)中點及均點的可靠量，(2)差異趨勢的可靠量，(3)兩個度量的差別的可靠量。(相關的可靠量在第四　章上研究之)

12集中趨勢之度量的可靠量

1. 均點的可靠量

*A.*藉標準差 *Standard error* 表示均點的可靠量

研究均點的可靠量，須注意均點的可靠量所依賴的因數。假使要想求我國大學第一年級學生之平均分數，我們必須測驗我國大學第一年級所有的學生，得其分數後，再求其均分。但是要如此做，實在大

費功夫，做不到。我們只能測驗一大羣隨機抽選的大學第一年級學生，只能注意一個雛形。即謂不能專門測驗一個大學校裏的第一年級學生，也不能選擇一個地方的大學第一年級學生；其用意即在妨止選擇成績最好的或成績最壞的學生。我們愈能隨機抽選，即愈能得到一羣大學第一年級學生，他們的程度或能力，可以代表全國大學第一年級學生的程度或能力。所以求得的均點可靠與否，恃乎富有代表性的雛形之獲得。

假定已有一個富有代表性的雛形，則均點的可靠量，恃乎分配式的兩種特質：(1)受測驗人數之多寡，(2)記分差異趨勢之大小。

(1) 受測驗人數之多寡，影響均點的穩定很大，因爲增加一個記分(除非他等于均分)也能使均點改變又加一個記分於10個記分上，或加一個記分於1000個記分上，皆足以影響他們的均點，但是對於前者的影響較大。在實際上及理想上，均點的可靠量的增加，不與記分數目成比例，而與記分數目的方根成比例。(參看 *yule* 的統計學原理第257頁)所以25個記分的均點的可靠量，不是大于一個記分的可靠量25倍，乃是大於他$\sqrt{25}$，或5倍。同樣36個記分的均點的可靠量，不是大於9個記分的均點的可靠量4倍，乃是大於他2倍，因爲$\sqrt{36}$或6，只是大於$\sqrt{9}$或3二倍。

(2) 記分數目，可影響均點的可靠量，前節已經說明，但是均點的可靠量的大小，亦恃乎環繞均點的差異趨勢的大小而定。若是分配式的σ大，則記分環繞均點而散佈的範圍亦大，即難知到未得着的記分，大概落於何處，靠近均點呢，還是離均點很遠呢。反之，若是σ小，即知道未得着的記分，必定離均點不遠。因此已得的均點的可靠量，恃乎σ之大小。σ加大，則可靠量減小。

均點的可靠量，第一恃乎公平而可代表的樣形之獲得。若能滿足這種條件，則均點的可靠量之大小，可藉標準錯誤——記分的數目及分配式的 σ——測量之。求均點的標準錯誤σ_M的公式爲：

$\sigma_M = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}$…………(13) 這是一個最重要常用的，求可靠量的公式。注意：σ變小，或 N 加大，皆能使標準錯誤σ_M變小。標標錯誤減小。表明已得的均點和眞均點的機遇的差別亦減小如許。所以σ_M愈小，均點的可靠量即愈大。

現擧一個例題，表明公式(13)的用途，及其價値。

問題(1)……在 1883 年，英國人種學委員會。在英格蘭島，測驗8585個男子的身長，得着均點爲 67.47英寸，σ爲2.57 英寸，問此均點可靠至何程度？假使英國全國男子的身長，皆受測量，因此得着眞均點，問已得的均點和眞均點的機遇的差別如何？

應用公式(13)，求得均點的準標錯誤爲.0277 英寸，這種結果，可以解釋之如下：已得的均點67.46英寸，不大於眞均點±1σ_M或±.0277英寸之機會爲 6 8 %. 換言之，眞均點落於 67.46＋.0277，及 67.46－.0277 之間，或落於 67.488 及 67.432 英寸之間之機會爲 68%.至於眞均點落於 67.46 ± 3×.0277(±3σ_M)之間，或落於67.543及 67.377英寸之間之機會則爲100%。

標準錯誤如何測量均點的可靠量，且擧一例來說明他。假設測量1000 組男子身長，每組有男子8585個。所得之 1000 個均點，彼此各異，因爲抽選樣形時，引進錯誤所致。(參看第30　頁)因此各個樣形，不能代表全體至同等之程度。假使能得着英國全體男子的平均身長，則此爲眞均點。若把眞均點，從已得的1000個均點各個裏減去，則得着1000個差數。這1000個差數，大小不同。據理想之所及，若案其大小

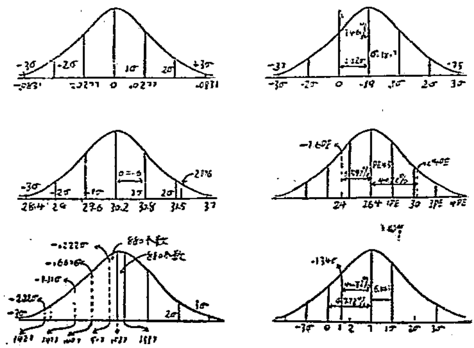
排列起來，即成爲一個長態機率弧。(參看第130頁)在這個理想的差數分配式上，我們只有幾個很大的正差數及負差數，許多很小的正差數及負差數，還有許多差數爲零。可知已得的均點幾等於眞均點者頗多。

1000個差數分配式的均點，必在0處，在此處的次數最大。差數分配式的σ爲$\frac{\sigma}{\sqrt{N}}$換言之，均點的標準錯誤，測量這些差數環繞零點而散佈的程度。因此這是一種度量我們用之以度量已得的均點和眞均點的極能機遇的差別。

以上所得着的結果，可以第15圖的附圖1表白之。這1000個差數，已排列成爲一個常態次數分配式。其均點爲零，其σ爲.0277，圖內直線的高度，代表差數的次數。最高的直線，在均點處，差數爲零。在常態分配式的均點左右一個σ處，畫兩根直線，則在這兩根直線之間的一部分佔，全體的68.26%。

因此可說已得的均點67.46英寸和眞均點的差別不大於±.0277英寸之機會爲68%.換言之，眞均點落於67.46+.0277及67.46-.0277之間，或落於67.488及67.432英寸之間之機會爲68%。眞均點落於67.45±.0331之間，或落於67.543及67.377英寸之間之機會爲100%。8586個英國男子的平均身長，爲67.46英寸，而其標準錯誤爲.0277英寸。現再進而研究第119頁上的第二個問題，即是必須得着多少個測驗記分，才可得着一個結果，而這個結果和眞結果的極能機遇的差別小於一個定量。假使欲得着一個均點而要其可靠量大於已得的均點之可靠量二倍，問須要增加多少個測驗記分才可以行？假設人數增加，而差異趨勢σ不變，要想把標準錯誤減小一倍，而使其可靠量加大一倍，只要用2乘$\frac{0.75}{\sqrt{8585}}$的分母即行。但是$2\sqrt{8585}=\sqrt{4\times8585}$.可知要想加大可靠量一倍，測驗記分的數目，必須增加4倍。因此得着一個定

例：若要加大均點的可靠量一倍，必須增加測驗記分數目4倍。若要加大均點的可靠量3倍，必須增加測驗記分的數目9倍等等。假定σ不變均點由400個測驗記分求得者，其可靠量的程度，必倍於均點之由100個測驗記分求得者。均點由900個測驗記分求得的，其可靠的程度，必3倍於均點之由100個測驗記分求得的。



第 十 五 圖

B.用均點的 PE 表白均點的可靠量

測量均點的可靠量，有時候用均點的PE，代替$\sigma_{\bar{X}}$。均點的PE之解釋，恰如$\sigma_{\bar{X}}$，其公式等於公式(13)，用.6745乘一下。(參看第114頁)

$$PE_{\bar{X}}=\frac{.6745\,\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

應用這個公式於英國男子身長的問題，求得$PE_{\bar{x}}$ 爲.0187 英寸。可知已得的均點，7.46英寸和眞均點的差別，不大於±.0187英寸之機會爲50%？又因爲±4PE 幾乎概括常態分配式的全體，所以眞均點

在67.46±4×.0187之間，或在67.39及67.53英寸之間之機會爲100%。

注意：把±3σ所含包的部份，和±4PE所包含的部份，比較一下±3σ.包括常態分配式的万分之9973；(看第X表)±4PE包括常態分配式的萬分之9930，(看第十一表)是±3σ所包括的，較之±4PE所包括的，大万分之43.万分之43，似乎很小；若在分配式的中間，則更不足輕重。若在分配式的兩極端，則很重要，要想PE兩極限所包括的部份，等於±3σ所包括的，則須要±4.45PE。

但是平時總用±4PE，而不用±4.45PE，爲完全可靠的範圍，其原因即在(1)±4PE所表示之兩個界限，而爲眞均點所可落入之機會已很大爲万分之9930。(2)用±4.45PE雖可略爲增加可靠量一點，但在推算上，感受不便之處很大，故仍用±4PE。

2. 中點的可靠性

測量已得的中點的可靠量之公式，很容易從均點的可靠量的公式推出來。因爲 $\sigma_M=1.25331\sigma_{\bar{X}}$，$PE_M=1.25331PE_{\bar{X}}$，故

$$\sigma M=\frac{5\sigma}{4\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

$$PE_M=\frac{5\times.6745\times\sigma}{4\sqrt{N}}=\frac{.8454\sigma}{\sqrt{N}}\cdots\cdots(16)$$

$$PE_M=\frac{5Q}{4\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16A)$$

公式(15)，(16)，及(16A)，之用途及其解釋正如均點的可靠量的公式一樣。現舉一例以明之。

問題(2)……測驗801個12歲男小孩的智力，得着中點＝21.4，Q=4.9，問中點的可靠量如何？問這個中點逼近眞中點至何程度？

應用公式(16A)，求出 PE_M＝.2164，可知眞中點和已得的中點21.4之差別，不大於±.2164之機會爲50%。我們確知眞均點必

在 21.4 ±(4 × .2164)之間，或在 22.27 及 20.53 之間。

因爲 σ_M 及 PE_M 皆大於 $\sigma_{\tilde{X}}$ 及 $PE_{\tilde{X}}$ 1.25倍，所以已得的均點，總較之已得的中點可靠些。因此要得着最高的可靠量，宜用均點。

III 差異趨勢的度量的可靠量

1. 標準差或 σ 之可靠量

已得的均點或中點的眞可靠量之大小，係根據已得的均點或中點和眞均點或眞中點之極能機遇的差別之大小決定之，照樣已得的 σ 或 Q 的可靠量之大小，可根據已得的 σ 或 Q 和眞 σ 或眞 Q 之極能機遇的差別之大小決定之。推求已得的 σ_σ 可靠量的公式如下：

$$\sigma_\sigma = \frac{\sigma}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

在問題一裏，已經找出8585個英國男子身長的 σ 爲2.57 英寸。但是我們要問這個 σ 可靠到什麼程度，他可以代表眞 σ 到什麼程度？把及 N 之量，代入公式(17)裏，則找出 σ_σ 爲 .0196 英寸。即謂已得的 σ (=2.57英寸)和眞 σ 之差別，不大於± .0196 英寸之機會爲 68 %。又這個 σ 和眞 σ 之差別，不大於 3 ×± .0196 英寸，或± .0588 英寸之機會爲千分之997。故眞 σ 必在2.57± .0588 之間，或在 2.63 及 2.51 英寸之間。

2. 四分段或 Q 之可靠量

分配式的 Q 之可靠量，可以下面的公式求之：

$$\sigma_Q = \frac{1.11 \times \sigma}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

或
$$\sigma_Q = \frac{1.65 \times Q}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (18A)$$

測驗801個12歲男小孩的智力，得着中點爲 21.4 點 Q 爲 4.9 點問此 Q 的可靠量如何？應用公式(18A)求得 σ_Q = 202.即謂已得的 Q(4.9) 和眞 Q 之差別，不大於± .2 2 之機會爲 68%眞 Q 在 4.9±3×.202 之間，或在 5.5 及 4.3 之間之機會爲万分之 9 73。

IV 兩個度量差別之可靠量

1. 兩個均點差別之可靠量

A 藉 σ 表示差別之可靠量

假設我們測驗10歲男女小孩的智力，而求其差別。普通的方法，即是隨機的抽選一大羣10歲男小孩，及一大羣10歲女小孩；以後測驗他們；再求出這兩羣的均分；並比較其大小。若是女小孩的均點較大，因之我們相信中等的女小孩，較之中等的男小孩優。但在確定這種結論之前，必須求出已得的差別可靠到什麼程度。已得的差別和眞差別的極能機遇的差別如何？(參看第38頁研究兩個均點的差別之意義)蓋已得的差別，非決對的。若是我們測驗其他一羣男小孩及一羣女小孩，或可得着一個相反的結果。求已得的差別的可靠量的公式爲：

$$\sigma_d=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

公式(19)裏的$\sigma_{\bar{x}_1}$，爲第一個已得的均點之標準錯誤；$\sigma_{\bar{x}_2}$爲第二個已得的均點之標準錯誤；σ_{d_1}爲兩個均點的差別的標準錯誤。故欲求兩個均點的差別的可靠量，須知道兩個均點本身的可靠量。

現舉一個問題，表明公式(19)的用途，及其價值：

問題3……用智力測驗具，測驗308個德國人，及325個丹麥人，得着結果如下：

國籍	受測驗人的數目	均點	標準差
德國人	308	13·88	2·43
丹麥人	325	13·69	2·23

這兩個均點的差別爲 .19，德國人優於丹麥人，問這個差別的可靠量如何？若測驗其他兩組德國人及丹麥人，問是否亦得着同樣的差別？問這個差別，可否降爲0；或發生相反的差別，丹麥人反優於德

國人？換言之，已得的差別和眞差別的極能機遇的差別如何？要回答這些問題，須先求出德國人及丹麥人的均點的可靠量，再從之求出兩個均點差別的可靠量。

應用公式(13)，求出兩個均點的標準錯誤如下：

德國人的　$\sigma_{\bar{x}}=\frac{2.43}{\sqrt{308}}=.1385$

丹麥人的　$\sigma_{\bar{x}}=\frac{2{,}23}{\sqrt{.25}}=.1237$

把這兩個結果代入公式(19)內，則得

$\sigma_{d}=\sqrt{(.1335)^2+(.1237)^2}=.1857$

已得的差別爲 .19，而這個差別的標準錯誤爲 .1857。藉差別的標準錯誤，解釋已得的差別，正如藉均點的標準錯誤，解釋已得的均點一樣。故可說已得的差別.19 和眞差別相差不大於±.1857 之機會爲68%。.19 和眞差別相差不大於3×.±1857或±.56 之機會爲 99 %。

總結以上所求得的結果，我們知道法國人的均分和丹麥人的均分之眞差別準在 .19±.56 之間，或在—.37 及+.75 之間。注意這個全距離的下限爲負數，所以眞差別得小於 0；卽謂丹麥人的均分，有時候得大於德國人的均分。故已得的差別，雖是表示德國人較優，但是我們不能十分相信中等德國人和中等丹麥人之眞差別總大於 0。卽謂我們不能十分相信中等德國人總優於中等丹麥人。

但是德國人和丹麥人的眞差別大於零的機會如何？在回答這個問題之前，讓我們思索以下的理想的境遇。(參看第 114 頁)假使可得着1000組德國人的均分，及1000組丹麥人的均分，而每組人係由德國人或丹麥人中隨機抽選而得的，而每組的大小又差不多相同。再假設把各組德國人及丹麥人組成一對一對的，再把成對的兩組的均分相減一

下，得着1000個差別，而這 1000 個差別的均點，則 .19。再假設這個差別分配式，適合一個常態機率弧：其下限爲−.37，上限爲+.75，均點則在19處，如第15圖的附圖2所示。以.19爲均點的緣故，因爲他是實際上所得的差別，故以他做均點，實爲極能穩週的。其他任何差別大於.19或小於.19的機會爲$\frac{1}{2}$故就論理言，這個差別.19 的地位，應在均點處差別分配式的σ爲$6\bar{d}$=.1857

要想決定丹麥人和德國人的眞差別大於0的機會，我們須用.1857(差別分配式的σ)除.19(此爲自零差別至平均差別 *Mean difference* 之距離) $\frac{.19}{.1857}$=1.02 查第 10 表，發現常態弧全體的萬分之 3461 落於均點及1.02σ之間，再加上均點以上的5000，則有萬分之8461(請參看第 *XV* 圖的附圖2) 卽謂德國人的均分和丹麥人的均分之眞差別大於零的機會爲萬分之 8461. 換言之，中等德國人得優於中等丹麥人之機會爲84%。此卽回答德國人和丹麥人的眞差別大於零之機會如何的問題。

已得的差別.19很大，足以担保德國人優於丹麥人的機會大於$\frac{1}{2}$。但其大還不足以担保德國人的均分總大於丹麥人的均分，因此又有一個問題發生，卽是差別必須多大，才能担保德國人總優於丹麥人？看*XV*圖的附圖 (2) ，就知道這個問題，不難回答。若把零差別點移至−3 (.37) 處，則眞差別總大於零了，因爲差別弧的全體皆在這點的右邊，若把零差別點移至−.37處，則平均差別變爲.37+.19，或.56。把這個新差別D(.56)以$6\bar{d}$除之，則得$\frac{.56}{.1857}$，或 3σ。是差別必須爲.56，始能担保丹麥人和德國人的眞差別大於零的機會爲萬分之 9986.5。

把前幾節所說的，總結起來。德國人的均點和丹麥人的均點的差別爲.19，等於.56的三分之一。.56爲十足可靠的差別，足以担保差別總大 零。但是已得的差別 .19 亦很大，足以担保五次中有四次，德

國人的均分大於丹麥人的均分。

已得的差別大於零的機會多大，可從第14表，直接查出來。譬如 $D=.19$，$\sigma_d=.1857$，因此 $\frac{D}{\sigma_d}=1.02$。從14表上，查出眞差別大於零的機會爲84%。又因爲 $\frac{D}{\sigma_d}=3$ 表明十足可靠量，故1.02只等於十足可靠量的34%$\left(\frac{1.02}{3}=34\%\right)$。

平時總以 $\frac{D}{\sigma_d}=3$ 表明十足可靠量，因爲 $=3\sigma$ 幾包括均點下所有的差別。若是 $\frac{D}{\sigma_d}$ 大於3，則可靠量更大。

B.藉 PEd 表明差別的可靠量

均點的差別之可靠量，用 PE 測量之，如同用 σ_d 測量之一樣，其公式爲：

$$PE_d=\sqrt{PE^2_{\bar{X}_1}+PE^2_{\bar{X}_2}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

公式(20)裏的 $PE_{\bar{X}_1}$ 及 $PE_{\bar{X}_2}$，爲兩個已得的均點之可靠量以 PE 表白者。公式(20)之解釋，如同公式(19)之解釋一樣。現舉一例來說明牠。

問題4……把替換測驗具（Substitution test），分爲兩部份。先施行第一部份，再施行第二部份。被測驗的人，爲200個大學一年級女學生。所得的結果如下：

測　　驗	均點(秒數)	σ
第一部份	65·51	11·13
第二部份	60·32	12·04

做第二部份測驗時，需要時間較少。問時間上的差別，是否爲一個眞差別，是否由於做過第一部份測驗後，得着練習，故需要學習第

二部份測驗上之*Key*的時間較少？倘再測驗別組女子，時間上之獲得是否減少，抑或得着相反的結果？

第十四表

已有兩個度量的實在差別及σ_d，求真差別大於零的機會。

例如$\frac{D}{\sigma_d}=1.3$，表明真差別大於零的機會爲90%。

注意：在$\frac{D}{\sigma_d}=1.5$後，百分數增加很慢，故$\frac{D}{\sigma_d}$直行內之數，過1.5後，卽不以.05遞進，而以.10遞進。

$\frac{D}{\sigma_d}$	機會以百分數表白之	$\frac{D}{\sigma_d}$	機會以百分數表白之
·00	50	1·15	87
·05	52	1·20	88
·01	54	1·25	89
·15	56	1·30	90
·20	58	1·35	91
·25	60	1·40	92
·30	62	1·45	93
·35	64	1·50	93
·40	65	1·60	94
·45	67	1·70	96
·50	69	1·80	96
·55	71	1·90	97
·60	73	2·00	98
·65	74	2·10	98
·70	76	2·20	99(98·6)
·75	77	2·30	99(98·6)
·80	79	2·40	99(99·2)
·85	80	2·50	99(99·4)
·90	82	2·60	99(99·5)
·95	83	2·70	100(99·7)
1·00	84	2·80	100(99.74)
1·05	85	2·90	100(99·8)
1·10	86	3·00	100(99·9)

第十五表

已有兩個度量之差別及PE_d，求真差別大於零的機會。

例如$\frac{D}{PE_d}=1.10$，表明真差別大於零的機會爲77%

注意：過 2.0 $\left(\frac{D}{PE_d}\right)$ 後百分數增加很慢，故 $\frac{D}{PE_d}$ 直行內之數過 2.0 後，即不以.05 遞進，而以.10 遞進。

$\frac{D}{PE_d}$	機會以百分數表白之	$\frac{D}{PE_d}$	機會以百分數表白之
.00	50	1.55	85
.05	51	1.60	86
.10	53	1.65	87
.15	54	1.70	87
.20	55	1.75	88
.25	57	1.80	89
.30	58	1.85	89
.35	59	1.90	90
.40	61	1.95	91
.45	62	2.00	91
.50	63	2.10	92
.55	64	2.20	93
.60	66	2.30	94
.65	67	2.40	95
.70	68	2.50	95
.75	69	2.60	96
.80	71	2.70	97(96.6)
.85	72	2.80	97
.90	73	2.90	97(97.5)
.95	74	3.00	98(97.9)
1.00	75	3.10	98
1.05	78	3.20	98(98.5)
1.10	76	3.30	99(98.7)
1.15	77	3.40	99(98.4)
1.20	79	3.50	99
1.25	80	3.60	99
1.30	81	3.70	99
1.35	82	3.80	99(99.5)
1.40	83	3.90	100(99.6)
1.45	84	4.00	100(99.7)
1.50	84		

先應用公式(14)，求出兩個均點的機錯(Probable error)

第一部份的 $$PE_{\bar{X}_1}=\frac{.6745\times 11.13}{\sqrt{200}}=.5310$$

第二部份的 $$PE_{\bar{X}_2}=\frac{.6745\times 12.04}{\sqrt{200}}=.5743$$

把上面所求得的，代入公式（20）內，則得

$PE_d=\sqrt{(.5310)^2+(.5743)^2}=.7822$ 已得的差別 D 爲 5.19，PE_d 爲 .782，所以 $\frac{D}{PE_d}=6.64$。查第(15)表，則知 $\frac{D}{PE_d}=4$，已表明十足可靠。現在他爲 6.64，是他不但表明十足可靠，並且還多 2.64 PE（6.40 −4.00）即謂還大於所需要担保眞差別大於零的 66%。

平時常以 $\frac{D}{\sigma d}=3$，表示十足可靠。故 $\frac{D}{PEd}$ 至少等於4，才能表示十足可靠。

2　中點差別之可靠量

公式(19)及(20)係用以求均點差別的可靠量的，但亦可用以求中點差別的可靠量，只須把他們變爲

$$\sigma d=\sqrt{\sigma_{M_1}^2+\sigma_{M_2}^2} \qquad (21)$$

$$PE_d=\sqrt{PE_{m_1}^2+PE^2m_2} \qquad (22)$$

再舉一個例題，表明這兩個公式的用途。

問題5　用語言測驗具，測驗一羣12歲男小孩及一羣12歲女小孩，所得的結果如下

	數　目	中　點	Q
男　孩	801	21.40	4.9
女　孩	448	22.80	5.3

這兩個中點的差別爲1.4分，女孩優於男孩。假定這兩組小孩，係隨機抽選的，問這種差別是否很大，足以担保眞差別大於零，女孩確較優？

求兩個中點的可靠量：

應用公式(16A)，求出

女孩的　$PE_m=\frac{5\times5.3}{4\sqrt{448}}=.3130$

男孩的　$PE_m=\frac{5\times4.9}{4\sqrt{801}}=.2164$

把這兩個結果。代入公式(22)裏，則得

$$PE_d=\sqrt{(.3130)^2+(.2164)^2}=.3805$$

已有的差別爲1.4；E_d爲.3805所以$\frac{D}{PE_d}=3.68$查第(15)表，發現12歲男小孩和十二歲女小孩的眞中點的差別大於零的機會爲99.3%即謂已有的差別等於差別之足以担保十足可靠者92%。$\left(\frac{3.68}{4.00}\right)$在實用上，這個差別，已經很高，可算爲十足可靠了。

V. 問題：關於可靠量之度量者

在這段內，特意舉出幾個問題，必須用本章內的公式及表才能解算出來。爲便於參考起見，以下每組問題之前，附以問題性質之說明。

A. 求眞均點大於或小於量表上一個定點或落於已知界限內之機率

問題1……假設已有的均點爲30.2，σ爲6.00，N爲100。假定這個雛形，可代表其所從出之全體人民，(*a*)問已有的均點之可靠量如何？(*b*)問眞均點得小於29之機會如何？ *c*)問眞均點得大於31.5之機會如何？(*d*)問眞均點落於28及31之間之機會如何？

(*a*)應用公式(13)，找出σ_M爲.6。可知已有的均點和眞均點之差別不大於±.6之機會爲68%。眞均點落於30.8及29.6之間之機會爲68%又30.2和眞均點之差別，不大於±.6×3，或±1.8之機會爲99.7%，即謂眞均點落於28.4及32之間之機會爲99.7%。

這些結果已表在第5圖的附圖(3)上。這個附圖，是無數雛形的均點的分配式，現以這個均點分配式的均點在30.2處，以30.2爲均點分配式的均點的緣故，因爲他是實在的，且爲極能機遇的均點。這個分

配式的標準差爲 .6，這是已知的均點的標準錯誤。

(b)眞均點小於 29 的機會如何？29 離已知的均點(30.2) −1.2 點，或 -2σ 查第 10 表，發現萬分之 4772，落於常態分配式的均點及 -2σ 之間，可知還有萬分之228(5000−4772)落於2σ之下。故眞均點得小於 29 之機會爲萬分之 228。

(c)眞均點大於31.5 之機會如何？31.5 大於已知的均點1.3分，卽是離已知的均點 2.17σ。在常態分配式裏，萬分之 4850 落於均點及 2.17σ之間，所以還有(5000−4850=)萬分之150，在 31.5 之上。故眞均點得大於 31.5 之機會爲萬分之 150。

(d)眞均點落於28 及 31之間之機會如何？28 小於均點 2.2 點，卽是離均點 -3.67σ，31大於均點.8 點，卽是離均點 1.34σ。在常態分配式裏，有萬分之 4999，落於均點及 -3.67σ 之間；有萬分之 4099，落於均點及1.34σ 之間。故在 -3.67σ及1.34σ 之間，有 4999+4099 或 9098 是：是眞均點得落於 28 及 31 之間之機會爲 91%。

問題2……已知的均點爲26.4；$PE_{\bar{X}}=1.5$，(a)問眞均點等於 30 之機會如何？(b)問眞均點等於 24 之機會如何？

正如同問題 1 一樣，這種情形，可以常態機率弧表白之。其均點在26.4處，其$PE=1.5$(看第15圖的附圖5)

(a)眞均點等於 30 之機會如何？30 大於已知的均點 3.6 點，卽是離已知的均點2.4PE。查第11表，在常態分配式裏，萬分之 4472，落於均點及 2.4PE 之間；還有(5000−4472=)萬分之528，在 2.4PE 或 30 之上。所以眞均點=30或大於 30 之機會爲萬分之 528。

(b)眞均點等於 24 之機會如何？24 小於均點 2.4 點，卽是離均點 −1.6PE。在常態分配式上，有萬分之 3597，落於均點及−1.6PE 之

間；所以還有(5000−3597)萬分之1403，在1.6PE之下。所以眞均點等於24或小於24之機會爲萬分之1403。

B.求已知的度量和眞度量的差別在已知的兩個界限內的機率

問題3……已知的均點爲152.7，σ爲4.5(*a*)求已知的均點和眞均點之差別不大於一點的機率，(*b*)不大於3點的機率(*c*)不大於5點的機率，(*d*)不大於10點的機率。

(*a*)這個問題與*A*下的諸問題相似；只在語句的表白上，畧有不同。要想求出已知的均點和眞均點的差別，不大於十1或−1之機率，我們必須求眞均點落於152.7±1之間，或151.7和153.7之間之機會如何。(參看第XV圖的附圖5：±1點離已知的均點±$\frac{1}{4.5}$或±.222σ。查第X表，找出萬分之880，落於均點與.222σ之間；亦有萬分之880落於均點與.222σ之間。因此有萬分之1760，(=880×2)落於+.222σ與−.222σ之間。故已知的均點和眞均點之差別。不大於+1之機會爲萬分之1760。

(*b*)±3點距已知的均點±$\frac{3}{4.5}$或±.667σ。因爲有2475×2或4950，落於.667σ與−.667σ之間，故已知的均點和眞均點之差別，不大於±3之機會爲萬分之4950。

(*c*)±5點距已知的均點±$\frac{5}{4.5}$或±1.11σ，故已知的均點和眞均點之差別，不大於±5點之機會爲萬分之3665×2或7330。

(*d*)±10點距已知的均點±$\frac{10}{4.5}$，或±2.22σ，故已知的均點和眞均點之差別，不大於±10點之機會爲4860×2或9736。

(*c*)求兩個團體的度量之眞差別大於或小於一個定量的機率

問題4……兩個已知均點的差別爲3.0σ=1.5。(*a*)問兩個均點的眞差別大於零的機會如何？(*b*)大於1的機會如何？(*c*)大於3的機會如何？

(*a*)零差別在差別分配式的均點(3)下$\frac{3}{1.5}$或2σ處，看第15圖的附圖6。因爲有萬分之4772落於常態分配式的均點及2σ之間，所以眞差別大於零的機會爲 5000＋4772，或 9772。〔注意：這個結果可從第(14)表直接查出，即是$\frac{D}{\sigma d}$＝2時，機會＝98〕

(*b*)眞差別大於1之機會如何？1在均點下$\frac{2}{1.5}$，或1.33σ處，因爲在常態分配式上，有萬分之4082，落於均點及1.33σ之間，所以眞均點大於1之機會爲萬分之5000＋4082或9082。

(*c*)眞差別大於3的機會如何？已知的差別3，已擺在差別分配式的均點處，因爲他是已知的極能機遇的差別，故眞差別大於或小於3的機會爲50%注意：$\frac{D}{\sigma d}=\frac{0}{1.5}$爲零〔參看第(14)表〕

VI 可靠量公式用途之限制及在解釋時所應有之謹慎

本章內所有之公式，用以推算已知的集中趨勢及差異趨勢之度量的標準錯誤者，在利用已有的分配式之兩種特點：(1)他的標準差σ及(2) N 記分的數目。就這些公式看起來，似乎沒有阻止我們爲已知的度量推求一個標準錯誤的可能，但是普遍的，不分辨的應用這些可靠量公式，亦將產生錯誤，因此在此地把可靠量公式用途的限制及在解釋求得的結果時所應有的謹慎，簡單的說一說。

(1) 解釋標準錯誤時；我們必須假定一個雛形裏的記分，必按照常態機率弧而分配，但當N很大時，這種假定才能成立。若是雛形本身太小，這種假定，即不“的實”(Valid) 故可靠量的度量可靠與否，全恃乎N之大小而定若是N小於25，可靠量的度量，即不可用。一個簡單的可行的方法，用以判斷一個雛形是否很大，即在繼續增加隨機抽選的記分，一直到記分加入，而均點或中點不搖動時爲止。到了這種

境界，才可說雛形很大，足以代表所從出的大團體。但是只是記分數目大，亦不足爲眞正的雛形之憑證。

(2) 可靠量的度量較大的缺點，在於集中趨勢及差異趨勢的度量(例如均點 σ 等)的標準錯誤及機錯只能測量由"隨機抽選雛形"所生的錯誤。現在舉一個例子，解釋"隨機抽選雛形"的意義。在第114頁上，我們求出8585個英國人的平均身長爲67.46英寸，而其均點的標準錯誤爲.0277英寸，可知英國人的眞平均身長，得在67.54英寸與67.38英寸之間之機會爲千分之997。所謂眞平均的身長，便是英國全國人民的平均身長。而8585個英國人，不過爲英國全國人民的一個雛形而已。若是此羣英國人，眞能代表英國全國人民，則其均點，卽爲眞均點。除偶中外，這個雛形，或其他照機抽選出來的等大的雛形，皆不能代表英國全體人民至十足的程度。所以各個雛形的均點，不能相同。假使各個雛形，是實在隨機抽選的，而又無很大的常錯在其中，則其均點將環繞眞均點而散佈。散佈的範圍，必很窄狹。用雛形代表全體人民所生的錯誤，叫做"隨機抽選雛形所產生的錯誤"，或簡稱之爲"雛形錯誤"。

標準錯誤及機錯的功用，在測量雛形錯誤的大小，在測量已知的度量($\bar{X}$, σ, 等)和眞度量的差別，換言之，標準錯誤或機錯，係測量以雛形代表全體所生的錯誤。如果已知的均點的標準錯誤小，則已知的均點便很可靠，是一個小標準錯誤，表示一個大可靠量。

除雛形錯誤外，可靠量公式，不能測量由其他原因所產生的錯誤。錯誤發生於未得着一個隨機的雛形者，不能藉可靠量公式查出；亦不能以之測量其大小。例如智力測驗均分，得自500個大學學生，其年齡在18及25之間者，不能代表這些年齡的全體人民，因爲大學學生爲一

個選擇的團體。測驗其他許多機遇的雛形而各個皆包含500個人其年齡自18到25者，必得着許多均，分而皆與大學學生的均分有差別。這些當然不能說是隨機抽選雛形所發生的錯誤。若以這羣大學學生為全體人民的代表(自18歲到25歲)。幷求其均點的標準錯誤，將在全體人民(自十八歲到二五歲)的智力上發生一個很大的錯誤觀念了。(這羣大學生只可視為大學生全體的雛形)。錯誤之由練習，疲勞，測驗具有可教性，測驗技術及記分技能不精，及各種偏癖而生者，可靠公式皆不能測量之。

仔細研究各個雛形，再施行測驗，保持原有的測驗環境，應用客觀校對法等等，皆可減除錯誤的來源，假設常錯很小，無足輕重，要想試驗一個雛形適宜與否，最簡單的方法即是從全體人民裏再隨機抽選幾個等大的團體來。如果這幾個團體的度量，例如均點等，差不多大，始能相信我們已經有了代表的雛形。假使他們相似的程度不大，則必須繼續增加每個雛形的記分數目一直到這些雛形很相似時為止。要想知道已得的數量是否可靠，應採用這種方法以決定之。可靠量公式在這方面能告訴我們的甚少。

(3) 在此章完結之前，關於差別可靠量的公式〔例如σ_d及PE_d〕之用途，不可不說一下。這些公式只能測量變錯 (Variable error)，只能測量隨機抽選雛形而生的錯誤。在原來的記分上之常錯及上面所舉出的各種錯誤，皆無從查考。而他們的影響，亦無法測量，而且這些公式，總假定已有的兩組記分彼此無關係，(參看第　　頁)精選差別解釋已有的差別時，必須把這些限制，記在心裏。

VII可靠量公式

1.集中趨勢的度量之可靠量

(1) 均點

1. $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$

2 $PE_{\bar{X}} = \dfrac{.6745}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (14)$

(2) 中點

1. $\sigma_{M} = \dfrac{5}{4}\,\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (15)$

2. $PE\,m = \dfrac{5}{4}\,\dfrac{.6745\sigma}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$

3. $PE\,m = \dfrac{5}{4}\,\dfrac{Q}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (16a)$

2.差異趨勢的度量之可靠量

(1) 標準差

1. $\sigma_{\sigma} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$

(2) 四分段

1. $\sigma_{Q} = \dfrac{1.11\sigma}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$

2. $\sigma_{Q} = \dfrac{1.65Q}{\sqrt{2N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (8a)$

3.兩個度量之差別的可靠量

(1) 均點

1. $\sigma_{d} = \sqrt{\sigma_{\bar{X}_1}^2 + \sigma_{\bar{X}_2}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (19)$

2. $PE_{d} = \sqrt{PE_{X_1}^2 + PE_{X_2}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (30)$

(2) 中點

1. $\sigma_{d} = \sqrt{\sigma_{M_1}^2 + \sigma_{M_2}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$

2. $PE_{d} = \sqrt{PE_{M_1}^2 + PE_{M_2}^2} \cdots\cdots (22)$

問題

注意：爲計算"一致"起見，先把以下問題裏的 σ 或 PE 求出來，使他含有三個小數，然後再看第三個小數是什麽；苟其大於5，則把他去掉，把第二個小數加一個準個，苟其小於5，則只將他捨棄。例如 1.876σ 則變爲 1.88σ，$.023PE$ 則變之爲 $.02\,PE$ 等等。

1. 設已知的均點爲 26.4 σ 爲 3.2，N 爲 100。
   (a) 此 100 個記分系 10000 個記分的隨機的雛形。問這 10000 個記分的眞均點，大於27的機會如何？
   (b) 問他落於 26 及 27 之間之機會如何？
   (c) 問眞差異趨勢落於3.1 與 3.3 之間之機會如何？
   (d) 問眞差異趨勢小於 3.5 的機會如何？
2. 設中點 $=27.40$，$Q=12.84$，$N=81$。
   (a) 問這個隨機的雛形所從出之全體人民之眞中點能大於75的機會如何？
   (b) 問他落於 70 與 74 之間的機會如何？
   (c) ～眞 Q 不大於 15 的機會如何？
   (d) ～眞 Q 落於10與14之間的機會如何？
3. 設 $X_1=29.6$，$\sigma_1=3.54$，$N=100$。$X_2=28.4$，$\sigma_2=5.36$ $N=225$
   (a) 求這兩個分配式的 σ。
   (b) 求兩個均點的差別之可靠量。
   (c) 假定差異趨勢不變，什麽差別可稱爲完全可靠？
4. 在第53頁上習題2裏有兩個配分式 A 及 B，求其均點的差別之可靠量。
5. 設 $\bar{X}=K$，$PE\bar{X}=3.5$。問眞均點與已知的均點相差1的机會如何？

(2)相差3的机會如何？(3)相差10的机會如何？

6.設$M_1-M_2=36$，$FE_d=30$。

(a) 眞差別小於零的機會如何？

(b) 等於1或大於1的機會如何？

(c) 問已知的差別，等於差別能保證十足可靠的百分之幾？

7.求第107頁上問題4之均點的可靠量。

求第107頁上問題5之均點的可靠量。

8.從A,B,C,D各大羣裏，隨機的抽選一個雛形，包含100個人，得着以下的結果，

A 均點$=101$，$\sigma dist =100$

B 均點$=104$，$\sigma dist =110$

C 均點$=93$，$\sigma dist =96$

D 均點$=56$，$\sigma dist =85$

(a) 問A的均點高於B的均點的機會如何？

(b) 問A的均點高於C的均點5的機會如何？

(c) 問A的均點高於D的均點10的機會如何？

(d) 問B高於A的均點的機會如何？

(e) 問B高於C的均點的機會如何？

(f) 問B高於D的均點的機會如何？

答數

1 (a) 百分之3

(b) 百分之86

(c) 百分之34

(d) 百分之91

2. (*a*) 百分之16

(*b*) 百分之55

(*c*) 百分之90

(*d*) 百分之71

3. (*a*) $\sigma_{\bar{x}_1}=.354$ $\sigma_{\bar{x}_2}=.357$

(*d*) 百分之99

(*C*) 1.51

4. 真差别的百分之92

5. (*a*) 百分之15

(*b*) 百分之44

(*c*) 百分之95

6. (*a*) 百分之21

(*b*) 百分之72

(*b*) 百分之30

7. (*a*) $\sigma_{\bar{x}}=.0791$

(*b*) $PE\bar{X}=.318$

8. (*a*) 萬分之222

(*b*) 萬分之9845或百分之99。

(*c*) 萬分之9999.257或百分之百

(*d*) 萬分之61

(*e*) 百分之48

(*f*) 百分之95

第四章

相關量 (Correlation)

1 相關量的意義……前面所討論的，大抵推求統計度量的方法，用以表示一個人或一羣人的一種特性或能量的情形，但是研究一和別種特性的關係，譬如智力，和音樂天才的關係，其重要恐較之測量一個特性的情形尤甚。我們常要查問智力（用智力測驗其所求出者）和學校成績（學校的分數）是不是有關係？智力高的人，他的學校作業，是不是優於中等學生？用一種測驗，找出一個人在這一方面的能力，能不能據之以推知他在另一方面的能力？是否有幾種能力，有密切的關係；又有幾種能力，毫無關係？這些問題，如何答覆，請研究相關量的方法。

統計的方法，表示相關的程度，稱之爲相關系數，以γ代表他。

先研究固定不變的相關量。圓周大於直徑3.1416倍，不管圓圈的大小如何，圓周和直徑的關係總是如此。增加或減小圓圈的直徑若干，

同時在圓周上亦增加或減少此分量的 3.1416倍。這種關係是固定的，故可說直徑和圓周的相關是圓滿的，而 γ 爲 1.00 若是 100個人，受甲乙兩種測驗，其在甲種測驗上，名列第一的，在乙種測驗上，亦名列第一；在甲種測驗上，名列第二的，在乙種測驗上，亦名列第二；由此類推下去。各人的甲乙兩種測驗記分之情形如此，其相關最爲圓滿，故相關系數 γ 爲 1。

再研究無關的情形。假使施行智力測驗及搞拍測驗 (tapping) 於100個大學四年級學生。智力測驗的均分爲175，30秒的平均拍數爲185。設把這羣人分爲3組，優組，中組，劣組。優組的智力測驗均分爲190。而其搞拍驗測的均分爲184。中組的智力測驗均分爲171，而其搞拍測驗的均分爲186。劣組的智力測驗均分爲160，而其搞拍測驗的均分爲185。因爲這三組搞拍均分大概相同，所以我們不能根據一個人的搞拍數目，而推知其智力測驗的記分，因爲搞拍均分自185到190，可以與智力記分 150，或 175，或 200 同時並生。故若根據一個人搞拍記分，而推測其智力記分，則無異於根據藍色眼睛，淡色頭髮，而推測其智力記分。這種推測，與猜擬無異，毫無價值。因此兩種特性，毫無相關之處，故相關系數幾爲零。

圓滿的相關量，以係數 1.00表明之。"無關"以係數 0 表明之。在1.00與0兩個界限之間，有許多大小不齊的相關量，以系數.30，.60.，90，等表明之。相關係數，在 0 與 1 之間者，謂之正相關。而相關程度的高低，看相關系數之大小而定。

正相關外，還有負相關。若是一種特性程度高的，和別種特性程度低的，有關係處，或兩種情形彼此正相反者，都叫做負相關。負相關達到圓滿之境，則 $\gamma = -1.00$。設有25個男小孩，其拉丁文成績最

優者，其手工成績最劣。其拉丁文成績，次優者，其手工成績次劣；由此類推下去。參看第1－6頁上的第16表內的例題。

這種關係，是固定而相反的。因其相關量達到圓滿之境且為負的，故相關系數 r 為－1.00。在－1.00及0之間，有許多大小不齊的負相關量，正如正相關一樣。

相關係數，可列成一個量表，自－1.00起經過0一直到正1.00為止。正相關，表明正關係；零相關，表明無關係；負相關，表明相反的關係。為明白起見，故先把正負相關及零相關詳細說了一番。但是能得着極端的係數，如＋1.00及－1.00的機會很少。平時所得着的皆是兩極端之間的系數，如.90，.21，－.31，等等。這些系數，是否為高為低，視乎他們靠近1.00或0而定。關於相關系數的意義，將來在第148頁上，再詳說之。

11 相關係數：──他是什麼，他做什麼

1. 相關係數為一個比率

在直接討論 r 的推算法之前，先在本段內，把 r 所代表的，及其如何測量相關量，弄清楚些。用乘積法推算 r 之步驟，再在下段內詳舉之。

請先看第16圖，此圖叫做"散佈圖" *Scatter diagram* 表白120個大學學生之成對的體長體重的散佈情形。散佈圖的構造法很簡單，先在圖的極左邊，把身長分配式的區域，從下向上，排列起來；又沿圖的底邊，把體重分配式的區域，從左向右排列下去。來每個人的體重體長的大小，記一個符號於圖內，例如一個人的體重63啓羅克，體長176生的。其體長應在第三橫行內，（從上向下數）其體重應在第五直行內，（從左向右數）所以這個人的體長體重的代表符號，應在第五直行

第十一表

表示相關系數爲—1

男小孩	拉丁文成績之地位	手工成績之地位
1	1	25
2	2	24
3	3	23
4	4	22
5	5	21
6	6	20
7	7	19
8	8	18
9	9	17
10	10	16
11	11	15
12	12	14
13	13	13
14	14	12
15	15	11
16	16	10
17	17	9
18	18	8
19	19	7
20	20	6
21	21	5
22	22	4
23	23	3
24	24	2
25	25	1

的第三方格內，在這個方格內記一個符號。因爲有6個人的體重在65—69啓羅克之間，他們的身長在175—179生的之間，故此方格內有6個符號。照樣察各個人的體長體重，把他們都記於相當的方格內。在圖的底邊 Fx 橫行內，找着每個體重直行內的人數。(體重爲 X 變數) 在圖的右邊 Fy 直行內，找着每個體長橫行內的人數。(體長爲 Y 變數) Fy 直行下，及 Fx 橫行右邊的總數爲 20。若把每個方格內的符號，變爲數目字，則散佈圖即變爲相關表了。(參看第二十圖)

第 XVI 圖

表示相關爲一個比率

	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	FY	平均體重
189 185								1	1	82.5
184 180			1	3	3	4	2	3	16	76.3
179 175			4	11	6	3	2	2	28	66.4
174 170		2	9	11	8	2	1		33	62.8
169 165		5	7	10	3				26	58.2
164 160	1	2	7	1	2				13	57.9
159 155	1	1		1					3	52.8
Fx	3	10	28	37	23	9	6	6	120	
平均體長	162.5	166.5	169.5	172.8	173.6	178.6	178.5	181.7		

(A)				(B)			
體重		平均體長		體長		平均體重	
80—84	全距離85—47.5=37.5	181.7	全距離181.7—162.5=19.2	135—189	全距離185—160=25	82.5 } 1.9	全距離71.9-54.2=17.7
75—79		178.5		180—184		71.3 }	
70—74		178.6		175—174		66.4	
65—69		173.6		170—174		62.8	
60—64		172.8		165—169		59.2	
55—59		169.8		160—164		57.9	
50—54		166.8		155—159		54.2	
45—49		162.5					

平均體長的改變……………………19·2÷6·55=2·93

實際體重的改變……………………37·6÷7·75=4·84

$$\text{比率}\frac{2\cdot93}{4\cdot84}= \cdot60$$

平均體重的改變……………………………$17.7 \div 7.75 = 2.28$
實際體長的改變……………………………$25 \div 6.55 = 3.82$

$$比率\frac{2.28}{3.82} = .60$$

平均體長＝172·6生的　　$\sigma ht = 6.55$生的

平均體重＝ 63·1啓羅克　　$\sigma wt = 7.75$啓羅克

$$比率\frac{\sigma wt}{\sigma ht} = \frac{7.75}{6.55} = 1.18$$

從散佈圖上，可以看出幾個要點。例如我們能把體重直行裏的人，案其體長的大小，而分配之。在第三直行內有 28 個人，其體重皆在55—59啓羅克之間，其中有一位，是 180—184 生的高；有四位，175—179 生的高；有九位， 170—174 生的高；有七位， 165—169 生的高；有七位，160—164生的高。照樣能把體長橫行裏的人，按其體重的大小，而分配之。在最下的第二橫行內，有33個人，都是160—164生的高；其中有一位，重45—49啓羅克；有兩位，重50—54啓羅克；有七位，重 55—59 啓羅克；有一位，重 60—64 啓羅克；有兩位，重65—69啓羅克。仔細看這個圖，即可看出成對的體長體重有一個趨勢，即從圖的右首上邊，向圖的左首下邊而趨。蓋由於體長高者，其體重亦高；體長中等者，其體重亦中等；體長小者，其體重亦小所致。即以各行，橫行或直行，而論，亦皆如此，故不須另加證據，即敢斷言此圖內的體長體重的相關爲正，並且很高。

荀再進一步，而求體重45—49啓羅克的人的平均身長。即是求這個直行內的分配式的均點。這個直行內只有三個人。這三個人的平均身長，用簡單的方法推算出來爲 162.5 生的，把他擺在這個直行的底下。照樣求出其他各直行內所有人的平均身長，把這些平均身長找出後，都擺在 A 下。就 A 下面直行看起來，發現體重47.5啓羅克增長到

85啓羅克時，平均體長亦隨之從 62.5生的增長到 181.7 生的。是體重增長 37.5 啓羅克時，平均身長亦隨之增長 19.2 生的。

請再注意體重。用上面的方法求平均體重隨體長而增長的情形。請看最低的橫行，其中三個人皆是155－159生的高，求出他們的平均體重為45.2 啓羅克。再看上一個橫行，其中十三個人，皆是160－164生的高，求出他們的平均體重為57.9 啓羅克。照樣把各個體長橫行的平均體重求出來，擺在平均體重直行內。再把這些結果擺在B 下。因此找出體長增長25生的時，自 (160到135) 平均體重亦隨之而增長17.7 啓羅克。(自71.9 到 54.2)

若是相關系數測量兩組記分的相關相依的程度，則應希望得着一$\left(\frac{\text{平均體長的改變}}{\text{實際體重的改變}}\right)$比率，或$\frac{19.2}{37.5}$，測量體重體長的相關。也希望得着$\left(\frac{\text{平均體重的改變}}{\text{實際體重的改變}}\right)$比率，或$\frac{17.7}{25}$測量體長體重的相關，這兩個比率求出為 .51 及.71。這兩個比率彼此既不相同，即皆不是適宜的相關量，因為一羣人的體長與其體重的關係，當與該羣人的體重與其體長的關係一樣。

以上兩種結果不同的原因，由於未題及以下的事實；體長的改變量，體重的改變量，及由他們所構成的比率，皆隨所用的測量準繩而變更。例如我們用生的測量體長，用啓羅克測量體重，所用的兩個準繩彼此既不同，故所求出的比率亦各異。要想免掉這種困難，除非把體長體重的改變，變為其分配式的 σ 的倍數。如此則不管測量所用的準繩為什麽，皆可得着同樣的結果。這 120 的體長分配式的 σ 為 6.55 生的，其體重分配式的σ為 7.75 啓羅克。若以 6.55 除平均體長的改變量，以7.75 除實際體重的改變量，則有$\left(\frac{\text{平均體重的改變}}{\text{實際體重的改變}}\right)$比率，或

$\frac{2\cdot93}{4\cdot84}=.605$，(參看第十六圖)若照樣用7.75除平均體重的改變量，用6.55除實際體長的改變量，則有$\left(\frac{\text{平均體重的改變}}{\text{實際體長的改變}}\right)$比率，或$\frac{2.28}{3.82}=.60$這兩個比率相同，無論那一個皆可爲相關系數，而表示這120人的體重體長的相關程度。

用這種方法求兩個變數的關係，在證明比率(稱之爲相關系數)實在所做的爲什麼。其實他並不是一個實用的精確的求相關系數的方法，故平時總不用他。其不精確的地方，即在估計分配式的全距緣時，往往不能確定這個次序起於何處，止於何處，因爲分配式兩極端的記分很少的緣故。本問題的相關系數，將在第II段內，用他法求出來。而其全距雖則調配適宜，使之產生正確的r。

2. 相關系數的圖形表示

我們不僅能用比率表白相關系數，也能用圖形表白他到底是個什麼東西。現在要把第十六圖內的體長體重的相關係數.60，在第十七圖內。用線表白出來在這個圖內，體長量表及體重量表的準個，係案他們的σ的大小而調配的。因此體長體重的改變，可以比較。這種調配法，(Adjustment)也很簡單。看第十六圖。知道體重分配式的σ爲7.75啓羅克，體長分配式的σ爲6.65生的，是體重的σ大于體長的σ1.18倍。(因爲$\frac{7.75}{6.55}=1.18$)所以只須使每個身長區域大於每個體重區域1.18倍，則X及Y的距離，(Distance)可以比較。體重分配式自左向右横列之，爲X變數；體長分配式，自上向下直列之，爲Y變數。簡言之，若是體長的σ大於體重的σ兩倍，則使體長量表上的每個區域，等於體重量表上的每個區域之半便行了。

把第十七圖，照以上所說的畫出來；把每個體重直行內所有人的平均身長，記於這個圖內，以$\times$標明其所在處，(這些平均體長見於第

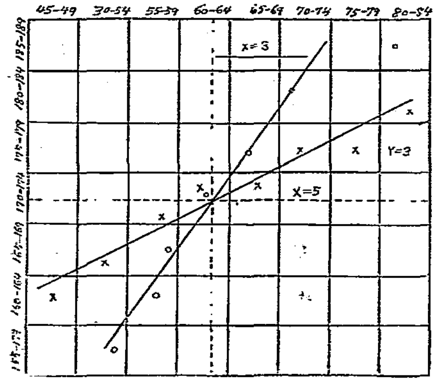
十六圖內）再畫一根直線，經過全體體重分配式的均點。又畫一根橫線，經過全體體長分配式的均點。〔這120人的平均身長爲172.6生的，平均體重爲63.4啓羅克，見第十六圖〕以這兩根線爲縱橫軸。再畫一根直線，經過縱橫軸的交點，並使之經過或靠近所有的X。畫這根線有一個很粗簡的方法，即是張一根線，經過縱軸的的交點，然後前後移動，使之能靠近所有的X而後止。兩極端的x可不必注意之，因爲他們所代表的數不多，故不重要。這根斜線，可稱之爲證合最宜線因爲他表白之趨勢，（Run）較之其他任何直線好。從這根斜線上，任取一點，從此點畫一根線，垂直於X軸，再由這點畫一根線，垂直於Y軸；相關量即爲垂直於X軸的線，和垂直於Y軸的線的比率。譬如取斜線上的P點，而$x=5$生的，求出y量爲3生的；其比率爲$\frac{y}{x}$或$\frac{3}{5}=.60$。在此線上，任取一點，其比率$\frac{y}{x}$總爲.60。

這根斜線，表示這個比率$\frac{2.93}{4.84}$，相關量爲.60，正如以上所求出者。這根線叫做隨體重爲轉移的體長消長線。此線有幾個重要的特點，值得吾人注意，在第155頁上，再詳說之。還有一個方程式，可以代表他，在下節內，亦舉出來。有了這個方程式，我們更能準確的位置，這根線於此圖內，較之上面的試錯法好得多。

在上面已經用隨體重爲轉移的體長消長線，證明相關量爲.60現在不難再畫一根線，即是隨體長爲轉移的體重消長線，證明相關量，亦爲.60。先把各橫行的均點，位置於圖上，作0記之。最低橫行的均點爲54.1，第二橫行的點點爲59.9，等等。等到所有的圈子，皆準確的位置於圖上後，再畫一根線經過或靠近所有的圈子。若在這根斜線上取一點p，$y=5$生的，即求出x爲3生的，其比率$\frac{x}{y}$或$\frac{3}{5}=.60$。在這

根線上，任取何點，x與y的關係，總是如此。兩根消長線，表示體長與體重的相關量相同。

體重(啓羅克) (X變數)



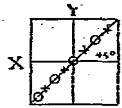
全體的平均體重線書之經過63.4 啓羅克處
全體的平均體長線畫之經過172.6生的處

第十七圖

用圖表示相關係數

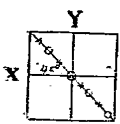
第17圖，還有一種用處。即是能用線，表示相關量1或－1為什麼，(1)假設兩根消長線相對的移動，等．合而為一，與X軸作成45角時，則在這根重疊的消長線上，任取一點，x總等於y，是這兩個比率$\frac{x}{y}$及$\frac{x}{y}$總相等，而γ為1.00。(參看第十八圖)所以相關量為正且圓滿時，所有的X及0皆落於一根直線上，而這根直線自圖的右首上端(在第一象限內)向圖的左首下端(在第三象限內)傾斜。表明體長最大

的人，體重亦最大，體長次大的。體重亦次大，如是而下，體長體重的等次，完全一致。(2)假設第一根消長線，(即是經過各直行體長均點者) 向X軸移動，直到與X軸吻合爲止X軸爲一根橫線，經過全體體長分配式的均點。再設第二根消長線，(即是經過各橫行體重的均點者)向Y軸移動，直到與Y軸吻合爲止。Y軸爲一根直線，經過全體體重分配式的均點，如此則比率$\frac{y}{x}$及$\frac{x}{x}$俱爲零，因爲第一個比率的y及第二個比率的x皆爲零的原故，故相關係數$r=0$ $r=0$時，其情形爲體重雖參差不齊，散佈成爲一個分配式，而平均體長則一。或體長雖參差不齊，散佈成爲一個分配式，而平均體重則一。所以一個中等體長的人，其體重可大可適中可小。一個體重中等的人，其體長可大可適中可小。(參看第138頁，摘拍記分和智力記分的關係)第十九圖表示零相關的形狀。

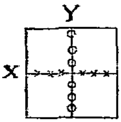


第十八圖

(3) 設把兩根消長線，旋轉一下，使之自圖的左首上端，(第2象限)向圖的右首下端 (第四象限) 傾斜。若是這兩根線又合而爲一，而與X軸成45°角，則在這個重叠消長線上，任取一點，x總等於y而$-\frac{y}{x}$及$\frac{x}{y}$俱爲-1.00。惟稍注意此圖即發現這兩個比率內的x及y，總有一個爲負，故這兩個比率俱爲負。而相關系數爲-1.00。卽謂關係達到圓滿之境，但是相反的。相關量圓滿且相反時，所有的x及0皆落於一根直線上，而他自圖的上左角向圖的下右角傾斜。其情形爲體長最大的，其體重最小；體長次大的，其體重次小；如此類推下去。體長減小，其體重即加大。(參看第二十圖)



第十九圖



第二十圖

相關量圓滿時，或正或負，兩根消長線即合而爲一。相關量在兩個極限之間，兩個消長線即分開第十七圖內之消長線，表示 $\gamma=.60$。

III 用乘積法 (Prodcut moment) 推算相關係數

1. 乘積公式(差數由兩個分配式之假均點求出者)

前節已將相關系數，詳細解說一番學者想已知其意蘊。請再注意用乘積法推算 r，(乘積法係 Pearson 教授所推出，故又稱之為Pearsnγ)，請看第二十一圖內的推算法。相關表內陳列 120 人之成對的體長體重。此表係由第十六圖所變成。推算 γ 之步驟如下。(看以下數節時。請參看第十六圖)

第一步……按照第 139 上頁所說的，製造一個散佈圖再把他變為相關表。

第二步……假定全體體長分配式(即為 Fy 直行)的均點，並將假均點所在的橫行，用雙線表白之。(請看第二十一圖)假定全體體長分配式的均點為 171.5(為170－174區域的中心點)從假均點求差數，請看 y' 直行。再求 fy' 及 fy'^2 兩直行。用普通法求 y' 再用公式 $\left(\sqrt{\frac{fy'^2}{N}-y^2}\right)\times$ 每個區域所包含準個數目，求 $\cdot y$。求出 $\cdot y$ 為 (1.31×5) 6.55 生的。

第 二 十 一 圖

用乘積法求 120 個大學學生的體長體重的相關系數

體重(磅)

體長(生的)	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79	80-84	Fy	y'	fy'	fy'²	Σx'y' +	Σx'y' −
								1 (12) 12	1	3	3	9	12	
			1 (-2) -2	3 0	3 (2) 6	4 (4) 16	2 (6) 12	3 (8) 24	16	2	32	64	58	2
			4 (-1) -4	11 0	6 (1) 6	3 (2) 6	2 (3) 6	2 (4) 8	28	1	28 (63)	28	26	4
		2 0	9 0	11 0	8 0	2 0	1 0		33	0				
	1 (3) 3	5 (2) 10	7 (1) 7	10 0	3 (-1) -3				26	-1	-26	26	20	3
	1 (6) 6	2 (4) 8	7 (2) 14	1 0	2 (-2) -4				13	-2	-26	52	28	4
	1 (9) 9	1 (6) 6		1 0					3	-3	-9 (-61)	27	15	
											2	206	157 (146)	-13
Fx	3	10	25	37	22	9	5	6						
x'	-3	-2	-1	0	1	2	3	4						
fx'	-9	-20	-28(-57)		22	18	15	24(79)=22						
fx'²	27	40	28	-	22	36	45	96=294						

$\bar{y}=\frac{2}{120}=.017$　　$\bar{X}'=\frac{22}{120}=1.83.$　　$\gamma=\dfrac{\frac{146}{120}-.017\times.183}{1.31\times1.55}$

$cy=.0003$　　$cx=.0334$

$=.085$　　$=.915$　　$\gamma=.60$

$\sigma_y=\sqrt{\frac{206}{120}-.0003}\times5$　　$\sigma_x=\sqrt{\frac{294}{120}-.0334}\times5$　　$PE=\frac{.6745[1-(.60)]}{\sqrt{120}}$

$\sigma_y=1.31\times5$　　$\sigma_x=1.55\times5$　　$PEr=.04$

$\sigma_y=6.55$　　$\sigma_x=7.75$

假定全體分配式(即爲fx橫行)的均點，並將假均點所在的橫行，用雙線表白出來假定全體體重分配式的均點爲 62.5(即爲 60— 64區域的中心點)從假均點求差數，再求 fx' 及 fx'^2 兩橫行。用普通法求σ_x，求出σ_x爲 7.75 磅羅克。(請看第21圖)

第3步……第2步所說的，不過是用假均點求 σ 的普通法子。新的事情，乃在求$\Sigma x'y'$直行。這個直行內的數目，有的爲正，有的爲負。故在 $\Sigma x'y'$ 下，預備兩個直行；一個專爲正數用的，一個專爲負數用的。求 $\Sigma x'y'$ 直行內的數目的法子，請藉相關表內的最高橫行的一個方格內的次數說明之。這個方格，和全體體重分配式的假均點所在的方格相差4個區域，故差數$x'=4$；和全體體長分配式的假均點所在的方格相差3個區域，故差數$y'=3$。這兩個差數的乘積爲 $4\times3=12$，叫做乘積差數。即將12擺在此方格內的右首上邊，並加以括弧。因爲這個方格內的次數爲1，故只有一個乘積差數$12\times1=12$。把這個乘積差數，擺於方格內的左首下邊。因爲這個橫行沒有其他次數，乃把12擺於$\Sigma x'y'$下。因爲他是正數，故擺於(+)直行下。

讓我們注意第二個橫行的各方格內的次數，(從右到左)。在第二橫行內極右邊的方格，距全體體重分配式的假均點4個區域，距全體

體長分配式的假均點兩個區域，故這個方格的乘積差數為4×2=8。把8擺在這個方格的右首上邊，並加以括弧。因為這個方格內的次數為3，故有3個乘積差數，如8×3=24。把24擺在這個方格的左首下邊。再看此橫行的第二個(自右向左數)方格，這個方格的乘積差數為6，因為他和全體體重的假均點相差3個區域，和全體體長的假均點相差為2個區域。因為這個方格內的次數為2，故有兩個乘積差數，如2×6=12。把12擺在第2個方格內。第三個方格的乘積差數為4，因為x'及y'各為2。而其中次數為4，因此有4個乘積差數，如4×4=16。把16擺在第三個方格內的左首下邊。第4個方格內的次數為3，而其差數x'為1，y'為2；故3個乘積差數為3×(1×2)=6。把6登記於此方格內。第五個方格之登記數為0，因為$x'=0$，故乘積差數$x'y'=(2\times0)$為0。第六個方格之登記數為−2。這個數所以為負的緣故，因為$x'=-1, y'=2$；又此方格內之次數為1，故1個乘積差數為(1×2)=−2。把此橫行所有的$x'y'$，按其正負加起來。計得着58及−2兩個數。再把58擺於(+)直行內，把(−2)擺於(−)直行內。

照樣把表內其他橫行的各個方格內之登記數，及各個橫行的乘積差數之總和，一齊求出。求所須記得者，即是求$x'y'$時，第一第三象限內所有的次數之乘積差數皆為正，第二第四象限內所有的次數之乘積差數皆為負。(參看第147頁) 又須記着；所有的次數之在X' (體重的假均點) 所在的直行內者，及所有的次數之在y' (體長的假均點) 所在的橫行內者，其乘積差數皆為零，因為前者的x'及後者的y'俱為零。

在任何橫行內，所有的次數的y'相同。因此推算的工夫，可以減省。若把一個橫行內的各個次數，一一和其x'相乘起來，便得着fx'，再把所有的fx'一齊加起來，用y'乘一下，即得着$\Sigma x'y'$了。現舉一個

例子，證明之請看倒數第二個橫行，由右及左。若把此橫行內的各個方格內的次數，以其x'乘之，則得着$(2\times1)+(2\times0)+(7\times-1)+(2\times-2)+(1\times-3)=-12$。再以$y'(=-2)$乘之則得着24，正和表內的$\Sigma x'y'$直行下兩個數28及$-4$相同。用這種方法，求每個橫行的最後登記數$\Sigma x'y'$，較為方便。但是校對錯誤時反覺困難。

第四步………每橫行的乘積差數已經求出來擺在正負直行內，再把正負直行內的數，一齊加起來，得着兩個數，159及-13，因此$\Sigma x'y'=159-13=146$。相關系數，即可以下面的公式

$$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-\bar{x}'\bar{y}'}{\sigma x\ \sigma y}\cdots\cdots\cdots\ \cdots\cdots\cdots(23)$$

求出之。用$\frac{146}{120}$代替$\frac{\Sigma x'y'}{N}$，.183代替$\bar{x}'$，.017代替$\bar{y}'$，1.55及1.3代替σx及σy，求得$r=.60$。

注意：$\bar{x}'$，$\bar{y}'$，σx及σy皆應以區域為準個求出來。因為所有的乘積差數皆是以區域為準個所求出來的，是公式(23)的份子份母，內的各項皆是以區域為準個所求出來的。以區域為準個推算，結果不變，而推算的工夫反省得多。

2. 乘積法(差數係從兩個分配式的真均點求出的)

公式(23)，係應用假均點求出假均數$\bar{x}'$及$\bar{y}'$，故不得不用校正量$\bar{x}'$及$\bar{y}'$校正$\frac{\Sigma x'y'}{N}$。若是差數是從兩個分配式的真均點求出的，則無須校正，因為$\bar{x}'$及$\bar{y}'$皆等於零。故從真均點求差數，則公式(23)變為；

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma x\sigma y}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

公式(24)又可略為變更一下。因為$\sigma x=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$，$\sigma y=\sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}}$，故公式(24)又可變為；

$$\gamma=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2}\sqrt{\Sigma y^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

公式(25)內的x及y皆爲真差數，$\sqrt{\Sigma x^2}$及$\sqrt{\Sigma y^2}$爲真差數平方之總和，再開方。若$N=30$或40，則宜應用公式(23)。若次序 Series 很短，而又只須求出兩種特性有無關係，不要十分準確，則可應用公式(25)。應用公式(25)時，不要一個相關表，可看第十七表內的例子。此問題係求兩種聯想測驗記分的相關量，其推求的步驟如下

第十七表

例證r之推算法；差數由均點求出者

學生	測驗一記分(x)	測驗二記分(y)	x	y	x^2	y^2	xy
A	50	22	−12	−8.4	144	70.56	100.8
B	53	25	−9	−5.4	81	29.16	48.6
C	56	34	−6	3.6	36	12.99	−21.6
D	58	28	−4	−2.4	16	5.76	9.6
E	60	26	−2	−1.4	4	19.36	8.8
F	61	30	−1	−.4	1	16	4
G	61	32	−1	1.6	1	2.56	−1.6
H	64	30	2	−.4	1	16	−.8
I	67	28	5	−2.4	45	5.76	−12.0
J	70	34	8	3.6	64	12.66	28.8
K	71	36	9	5.6	81	31.36	55.4
L	73	40	11	9.6	121	92.16	105.6
均點	62	30.4			578	282.92	317.0

均點(測驗1)＝62.0

均點(測驗2)＝30.4

$$=\frac{317}{\sqrt{578}\sqrt{282.92}}=.78$$

$$pEr=\frac{.674\,[1-(.78)^2]}{\sqrt{12}}=.08$$

第一步……求測驗一及測驗二的均點，求出第一個均點爲62.0，第二個均點爲30.4。

第二步……求測驗一的每個記分和其均點62.0的差數，把所有的

差數，擺於x直行內。(由測驗一的均點求出之差數稱之為x差數，由測驗2為均點求出之差數稱之為y差數)求測驗二的每個記分和其均點30.4的差數，把所有的差數，擺於y直行內。

第三步…把x差數及y差數，都平方之，擺於x^2及y^2直行下。

第四步…把各橫行X的差數及Y的差數乘起來，擺於xy及y^2直行下。

第五步…以317代替Σxy，578代替Σx^2，282.92代替Σy^2於公式(25)內，求γ。

IV 相關係數的機錯

γ的PE，可以公式(26)求出之；

$$PE\ \gamma=\frac{.6745(1-\gamma^2)}{\sqrt{N}}\text{……………………}(26)$$

若把γ量.60，及N的量120，代入公式(26)內，卽可求出體長體重的(參看21表)相關量的機錯，求出$PE\gamma=.04$[若知γ及N的量則$PE\gamma$可直接或用補插法由第(18)表查出來]$PE\gamma=.04$，表明眞γ落於.60±.04，或.56及64之間之機會為均等，落於.60±(4×.04)或.44及.76之間之機會為萬分之9930。所謂體長體重的γ者，(參看第123頁)卽是全體人民的體長體重的γ。而吾人所測驗的120人，只為全體人民的一個機遇的雛形。γ至少須大於他的PE四倍，才能相信他有存在之可能。設有某兩個特性的相關量，剛剛大於他的PE四倍。例如$\gamma=.16$，$PE_\gamma=.04$。則眞γ在.16±(4×.04)或在0及.32兩個界限之內。除非γ大於他的pE四倍，否則決不能以γ為可靠，蓋γ至少須大於零。若是相關量很小，γ亦必須大於他的pE五六倍。

在第三章裏已經說過；兩個均點或兩個中點的差別的可靠量，可用σd及PEd(參看第33頁)度量之。照樣兩個γ的差別的可靠量，可用$PEd(\gamma_1-\gamma_2)$度量之。

第十八表

相關系數的機錯

知道N及γ之大小可查出PE_γ之量

記分的數目	相關係數γ 0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
20	1508	1493	1448	1373	1267	1131	0965
30	1231	1219	1182	1121	1035	0924	0788
40	1067	1156	1024	0971	0896	0800	0683
50	0954	0944	0915	0868	0801	0715	0610
70	0806	0798	0774	0734	0677	0605	0516
100	0674	0668	0648	0614	0567	0506	0432
150	0551	0546	0529	0501	0463	0413	0352
200	0477	0472	0453	0434	0401	0358	0305
250	0426	0421	0409	0387	0358	0319	0272
300	0387	0386	0374	0354	0327	0292	0249
400	0337	0334	0324	0307	0288	0253	0216
500	0302	0299	0290	0274	0253	0226	0193
1000	0213	0211	0205	0194	0179	0160	0137

記分的數目	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
20	0871	0769	0660	0543	0419	0287	0147
30	0711	0628	0539	0444	0342	0234	0120
40	0616	0544	0467	0384	0296	0203	0104
50	0551	0486	0117	0343	0265	0181	0093
70	0466	0411	0353	0290	0204	0153	0074
100	0391	0345	0294	0242	0187	0128	0066
150	0318	0281	0241	0193	0153	0115	0054
200	0275	0243	0207	0172	0133	0091	0047
250	0246	0218	0187	0154	0118	0081	0032
300	0225	0199	0170	0140	0148	0074	0038
400	0195	0172	0148	0122	0094	0064	0033
500	0174	0154	0132	0109	0084	0057	0029
1000	0123	0109	0093	0077	0059	0041	0021

求$PEd(\gamma_1-\gamma_2)$的公式為；

$$PEd(\gamma_1-\gamma_2)=\sqrt{PE^2_{\gamma_1}+PE^2_{\gamma_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

公式(27)內的PE_{γ_1}及PE_{γ_2}，是兩個γ的PE，必須先用公式26求出來。

公式(27)的價值，可用下題證之。設有101個八歲男孩子，他們的IQ和勾消測驗記分的相關為.20，而γ的PE為.065。又有110個

八歲女孩子，受同樣的兩種測驗，求出γ為.25，而其 PE 為.06。女孩的相關量大於男孩的相關量.05。這種差別，是否很大，足以担保女孩的Q和勾消測驗的真相關量，較之男孩的大？要想回答這個問題，我們必須先求出兩個γ的差別的PE來，應用公式(27)求出 $PEd(\gamma_1-\gamma_2)=\sqrt{(.065)^2+(.06)^2}=.09$。再把已有的差別和這個結果比較一下，則得$\dfrac{D}{PEd}=.556$；即謂這兩個相關量的真差別大於零的機會為64%。(參看15表)所以差別.05是不可靠的，不足以担保女孩的相關量總大於男孩的相關量。若要十足可靠，則須有一個差別至少等於4×.09或為.36〔若是$\dfrac{D}{PEd}=4$或大於4則差別為可靠〕而我們現在所有的差別.05只等於十足可靠量的14%，其為不可靠可知。

$PE\gamma$ 及 $PEd(\gamma_1-\gamma_2)$兩個公式，在應用上所受之限制，及解釋他們時所應有之謹慎，和標準錯誤及機錯的公式一樣。(參看第三章49頁)要想可靠量的度量有用，則γ必須從機遇的很大的雛形求出來。倘若是從很小的特別選擇的團體求出來，則根據他們所求出的 $PE\gamma$，PEd，往往令我們對於γ發生一個錯誤的解釋，而當相關系數很大時，則尤當小心。

譬如有一個γ為.90，他是從20個記分求出的。雖是他的$PE\gamma=.03$然他的本身實在靠不住，(參看第18表)因為若從同羣(Population)裏再找出20個來，其γ或只等於這個γ的一半大。

V 消長方程式

I. 消長方程式用差數表自出來

在相關表裏，我們已經找出(參看第17圖)兩根消長線，又叫做最適宜的線。第一根最適宜的線，(best fit)經過或靠近各直行的均點(即是平均身長，以× 代表者)。第二根最適宜的線，經過或靠近各橫行

的均點，(即是平均體重，以0代表者)。這兩根最適宜的線。很有價值：(1)因爲他們能表明平均體長，隨體重的定量改變而改變，平均體重隨體長的定量改變而改變。(2)若是X及Y的區域的大小，係案X及Y兩個分配式的σ的大小而配定的，則兩個消長線之中，無論那一個，皆能直接表示相關量。

上節說明消長線有兩種用途，而第二種用途，即是直接表示相關量，並無多大價值，因爲不必顧及兩個σ的大小，可直接造出一個相關表來，然後用乘積法求γ，如第21圖所示。較之從消長線估量γ容易多了。其實消長線的價值，不在產生γ，而在使我們根據一個人在一個測驗或在一羣測驗上的地位，預測一個人在另一個測驗上或一羣測驗上的極可機遇的地位。

我們如何方能預測呢？現在簡單的在此地說一說。假使知道一個人的體重爲68啓羅克，而想從相關表上估量他的體長，則他的體長之最可能的最好的估量即爲65－69區域內所有人的平均體長。從第16圖內，查出這個直行裏25個人的平均體長爲173.6生的。所以173.6生的，即爲體重68啓羅克的人的最可能的體長。照樣體重72啓羅克的人的極可機遇的體長爲178.6生的，因爲此係體重70－74啓羅克區域內的所有人的平均體長。總之一個人的極可機遇的體長，爲和他的體重相等或大約相等的（以體重區域的所有人的均點。爲一個人的極可機遇的體長，還有錯誤。求這種錯誤大小的方法，在第164頁上再說說之）所有人的體長的均點，體合各個直行的平均體長最適宜的線，爲表示平均體長，隨體重的改變而改變的線。(即是線之經過第17圖之各個×者）所以知道一個人的體重，即能根據隨體重爲轉移的體長消長線，推測他的體長。照樣知道一個人的體長，即能根據隨體長爲轉

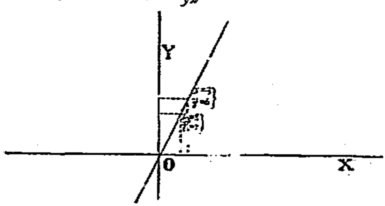
移的體重消長線，推測他的體重。(即是線之經過第17圖之各個0者)

若有兩個代表消長線的方程式，則從他們所得着的推測，較之從消長線本身所得着的還容易些，準確些。若知一個人在X變數上的地位，(譬如體重)則把X的量，代入方程式之聯合X及Y者，則可直接求其在Y變數上之極能機遇的地位。(譬如體長)這兩個消長線的方程式，係皮而生教授。根據"體合最宜"的標準所推得。故他的方法，簡單的說起來，即在找出一根線的方程式，而各行(或是橫行或是直行)的均點和這根線的差數之平方之總和為最小。(以最小平方法，推求消長方程式。請參看 Jones 的 A first course in statistics 第106及第271頁)。體合最宜線有兩根。一根體合各橫行的均點最宜，一根體合各直行的均點最宜。

經過各直行的均點之線的方程式，其簡單的形式為；

$$y = \gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}x \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (28)$$

公式(28)內的$\gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}$，叫做消長系數，可以$byx$或$bxy$代表之。因此這個方程式，又可寫為$y=b_{yx}x$，或為$y=b_{12}x$



第 *XXII* 圖

〔註解；把代表直線的方程式畫出來；設X及Y為縱橫軸。設有$y=2x$，請把x及y的關係畫出來。先把x的量，代入方程設內，求

y 的量。設 $x=3$，則 $y=2\times2$ 或4；設 $x=3$，則$y=2\times3$，或6。任設x為何量，皆能求出 y 來，滿足這個方程式的要求。現在把 $x=2$ $y=4$ 之點，及 $x=3$ $y=6$ 之點，等等；一一記於圖內，則此諸點皆落於一根直線上，而這根直線表示 $y=2x$時，x和y 的關係。這根線經過起點因為$x=0$時，y 亦等於零故方程式 $y=2\times$ 代表一根直線，經過起點。而各點彼此的關係，則為$\frac{y}{x}=2$所表示。$\frac{y}{x}$叫做線的斜度。直線之經過起點者，其普通公式為$y=mx$. m 即為線的斜度。若以 $\gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}$ 代替 m，則立見消長方程式之以差數表白者，不過為經過起點之直線之方程式罷了。〕

若把 γ, σy, σx 之量，(見於第21圖內) 代入第 (28) 公式內，則有 $y=.60\frac{6.55}{7.75}x$, 或$y=.51x$.

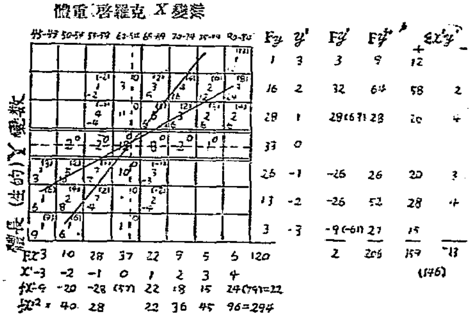
方程式，代表隨體重為轉移的體長消長線。這個方程式，代表一根直線，經過起點，所以很容易把他畫出，如第23圖所示。先畫一根直線，經過 63.4 啓羅克處，此係全體體重分配式(x變數) 的均點。再畫一根橫線，經過 172.6 生的處，此係全體體長分配式 (y 變數) 的均點。這兩根線為縱橫線。因為所畫的線，必須經過起點，所以只有一點必須決定。若是 $x=2$，(任何量皆可)則 y 為 $.51\times2=1.02$。欲位置此點，先從起點沿 x 軸向右過去兩個準個在那裏記一點。再從此點向上過去 1.02 準個。又在那裏記一點。此點即代表 $x=2$ 及 $y=1.02$ 之點。

畫一根線。經過以上求出之點及起點，這根線即為隨體重為轉移的體長消長線。根據這個方程式，即知道在這根線上的一點，其 x 為 1.00, 必有一個相當的y為.51 (把$x=1$代入方程式內求y，求得$y=.51$.) 伴之而生。就是說假設有一個差數，離 XO 的均點 (即是直線之經過

第 XXIII 圖

例證消長線的地位及消長方程式之推算

〔此係第二十一圖內之材料〕



推算 γ

$$\bar{y}'=\frac{2}{120}=.017 \qquad \bar{x}'=\frac{22}{120}=.183 \qquad \gamma=\frac{\frac{146}{120}-.017\times.183}{1.31\times1.55}$$

$\bar{y}'^2=.0003$　　　$\bar{x}'^2=.0334$

$C\ y'=.085$　　　$C\ x'=.915$　　$\gamma=.69$

$\bar{y}'=172.5$　　　$\bar{x}'=62.5$　$PE_\gamma=.04$

$\bar{y}=172.6$　　　$\bar{x}=63.4$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{206}{120}-.0003}\times5=6.55 \qquad \sigma_x=\sqrt{\frac{294}{120}-.0334}\times5=7.75$$

推算消長方程式

I. 以差數表白者

(1) $y=.60\times\frac{6.55}{7.75}x=.51x$

(2) $x=.60\times\frac{7.75}{6.55}y=.71y$

II 以記分表白者

(1) $y-172.6=.51(X-63.4)$

$y=.51X+140.3$

(2) $X-63.4=71(y-172.6)$

$X=.71-Y59.1$

求推測的標準錯誤

$\sigma(\text{est}\,y)=6.55\times.8=5.2$ 生的

$\sigma(\text{est}\,x)=7.75\times.8=6.20$ 磅羅克

全體體重分配式之均點者）一個準個，即另有一個差數伴之而生，而離Y的均點（即是橫線之經過全體體長之均點者參看第23圖）之量，等於差數x的量.51倍。

說眞體一點，一個人的體重，大於全體的平均體重1個啓羅克者，其體長之極能機遇的量，大概大於全體的平均體長.51生的。若是其體重爲64.4啓羅克，（63.4+1.00）其體長之極能機遇的量爲173.11（172.6+.51）生的。再舉一個例子若是一個人體重60啓羅克，低於平均體重3.4啓羅克；其體長之極能機遇的量必爲170.87生的，低於平均體長1.73生的。在這個例子上，若把$x=-3.4$代入方程式內，則求出$y=-1.73$。總之根據這個消長方程式，我們知道：在這個團體內，任何人的體長和平均體長的差數，極能機遇的等於他的體重和平均體重的差數.51倍。所以若知一個人的體重和平均體重的差數，我們即能據以推斷其體長和平均體長的極能機遇的差數。

消長方程式$y=\gamma\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$，叫做隨$X$爲轉移的$Y$消長方程式，而以差數表白出來的。況言之，這個方程式，係根據X和平均X之差數，求任何Y和平均Y的極能機遇的差數。

經過各橫行的均點的消長線的方程式其形式爲：

$$x=\gamma\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

這個方程式，係測量隨Y爲轉移的X之消長。而在現在的問題上，測測量隨體長爲轉移的體重之消長。其消長系數$\gamma\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$，可以$b_{xy}$或$b_{12}$代替之。因此公式(29)，又可寫爲$x=b_{xy}$或$x=b_{12}y$

若把γ，σ_x，及σ_y之量，（見於第21圖內者）代入 式(29)內，則有

$$x=.60\ \frac{7.75}{6.55}y\text{或}x=.71y$$

方程式，測量隨體長爲轉移的體重之消長。這個方程式和前一個方程式一樣，代表一根直線經過起點。所以只要有一點及起點，即足以畫出這根線。設以$y=1$代入這個方程式內，則x即等於.71。

試把$x=.71$及$y=1.00$之點，位置於圖上，再畫一根消長線經過此點及起點。(參看第23圖)

根據第二消長方程式，即知道：苟有一個差數，離全體體長的(Y的)均點爲一個生的，即另有一個極能機遇的差數，離全體體重的均點爲.71啓羅克。換一句話說，任何人的體重和全體平均體重的極能機遇的差數，等於他的體長和全體平均體長的差數.71倍。譬如一個人180生的高。大於全體平均體長7.4生的；其體重之極能遇機的量，大約63.61啓羅克，大於全體平均體重5.25啓羅克。(把y之量7.4代入方程式內求x，卽得着這個結果)

方程式$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$，叫做隨$Y$爲轉移的$X$消長方程式，而以差數表出的。簡言之，這個方程式，係根據Y和平均Y的差數，推測X和平均X的極能機遇的差數。

雖有兩個消長方程式，而每個俱含有x及y。但學生須將此重要事件，記在心內。卽是這兩個方程式，不能交換應用；又不能根據每個方程式，推測x及y。我們想根據x推測y時，即用第一個方程式$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$。($y$爲依靠變數) 想根據$y$推測$x$時，須應用第二個方程式$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$。($x$爲依靠變數)依靠變數，其量須藉別的變數以求出。除非相關達到圓滿之境時。總有兩個消長方程式。當$r=1.00$時，方程式$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$變爲$y=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$。或$\sigma_x y=\sigma_y x$，而方程式$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$變爲$x=\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$，或$\sigma_y x=\sigma_x y$。這兩個方程式相等，故兩根消長線相合。

現舉一個例子，把上節最後一句話，證實出來，假設體重和體長

的相關量達到圓滿之境，而 σx 及 σy 之量仍舊。第一個消長方程式，變爲 $y=1.00\times\frac{6.55}{7.75}x$ 或 $y=.85x$，第個二消長方程式則變爲 $x=1.00\frac{7.75}{6.55}y$，或 $x=1.18y$。就代數方程式說起來，$x=1.181$。是等於 $y=.85x$ 的。因爲 $y=.85x$，則 $x=\frac{y}{.85}=1.18y$。故在這種情形之下，只有一個方程式及一根線。能表示 y 伴 x 的定量改變而改變，亦能表示 X 伴 Y 的定量改變而改變。再者當 $\gamma=1.00$ 而兩個 σ 又相同，或調配之使之相等時，則這根消長線和橫軸所作之角，剛剛45。(參看第18圖及第149—15)頁內所說的)

2. 消長方程式用記分表白出來

公式(28)及公式(29)爲消長線之方程式，而以差數表白出來的。這些方程式內的 x 及 y，皆爲從 X 及 Y 分配式之均點所求出之差數，而非實在的記分。方程式之以差數表出的，雖爲吾人所需要以達到推測的目的，但是也可直接根據一個人的實在記分 X，推測其實在記分 Y，不必把實在記分變爲差數，故可運用消長方程式以記分表出的，不必用消長方程式之以差數表出的，把方程式內的差數變爲記分之法如下，設以 $\bar{y}$ 代表 Y 分配式的均點，Y 代表任何一個 Y 記分，則任何人的記分和均點的差數，可以 $(Y-\bar{y})$ 代表他，故 $y=Y-\bar{y}$。照樣 $x=X-\bar{X}$。

以 $Y-\bar{y}$ 代替 y，以 $X-\bar{X}$ 代替 x 於公式(28)及公式(29)內，則兩個消長方程式變爲：

$$(Y-\bar{y})=\gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}(X-\bar{X})\text{，或 }y=\gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}(X-\bar{X})+\bar{y}\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$(x-\bar{x})=\gamma\frac{\sigma x}{\sigma y}(y-\bar{y})\text{，或 }x=\gamma\frac{\sigma x}{\sigma y}(Y-\bar{y})+\bar{X}\cdots\cdots\cdots(31)$$

此爲兩個消長線的方程式。而以記分表出的。在這兩個方程式內，X 及 y 代表實在的記分，而非代表記分和兩個分配式的均點的差數。

若把從第23圖所得的$\bar{Y}$，r，σ_y，σ_x，及$\bar{X}$的量。代入公式(30)裏，則公式(30)變爲：

$$(Y-172.6)=.60\times\frac{6.55}{7.75}(X-63.4)。$$

化除命分數，則有$Y=.551+140.3$。

要想表明這個方程式的用途，讓我們舉出一個例子來。設在我們的團體內，一個人的體重爲 60 啟羅克，試推測他的極能機遇的體長(1)把60代替X於以上的方程式內，則得着$Y=170.9$ 所以體重 60啓羅克的人的極能機遇的體長爲 170.9 生的。

若想推測體重，則須應用方程式(31)。把$\bar{X}$，r，σ_y，σ_x，及y之量，代入第二個方程式內，則有：

$$(X-63.4)=.60\times\frac{7.75}{6.55}(Y-172.6)：$$

或 $X=.71Y-59.1$。

設有一個人，體長180生的。卽以180代替Y於這個公式內，則求得$X=68.7$啓羅克。故體長 180 生的的人的極能機遇的體重爲 68.7 啓羅克。

當我們已經知道這 120 人的體長體重時，而又說我們能根據一個人的體重推測其體長，豈非怪事，蓋已知其體長體重，卽無須推測。設我們只知道一個人的體重及其年齡。而其年齡，洽巧在這 120 個人的年齡全距離之內，又因爲已經知道這個團體之體重體長的相關量，則能應用這個消長方程式，推測這個人的極可機遇的體長，而無須實去測量他的身長。照樣我們可藉這個消長方程式以推測這個團體所從出之人羣中任何人身長，苟這個團體。係該人羣的一個隨機的雛形。消長方程式，只是對於隨機的雛形所從出之人羣有效。爲 18 至 25 歲(此係這個團體 120 個人的年齡全距離)的男子所求出的消長方程式，

自然不能根據之以推測兒童或婦人的極可機遇的身長。反之爲初級小學學生所求出之消長方程式，自然不能希望他也適用於年齡較長的團體。

大概用體長體重的例子——因爲他們容易測量——表自消長方程式之價値，(Value) 不及用其他較復雜的特性好。 再舉一個例子，設有一羣小孩子，年紀差不多大，其 IQ 和其中學第一年級記分之相關量爲 .70， 設爲這羣學生， 求出消長方程式來。若有一個小孩子他來年進中學他的 IQ，我們已經知道了，即可根據這個消長方程式，以推測其將來極可機遇的學校成績。這一點對於教育指導極有益處；而對於職業指導更有稗益，蓋可以根據其測驗記分，推測其在某種職業上，所能有的成就，因得據之而予以有理的指導。

3. 根據消長方程式而推測，求此種推測的可靠量

A 推測的標準誤錯 (Standard erros of estimate) (σest或 S)

我們常謂由消長方程式所推測出來的 X量或Y 量，爲一個變數極能機遇的量，伴其他變數之已知量而生的，推測出來的量，可靠到什麼程度。可機遇到什麼程度。可用推測的標準錯誤，(σest) 測量之。我們用以下的公式，求推測出來的 Y量之準確。

$$\sigma(esty) = \sigma_y\sqrt{1-\gamma^2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

σ(esty) 又常Sy代替之)

公式(32)的σ_y爲分配式的σ，又"est"在σ下。所以區別 σ(est)，σ_x，σ_y，等等。r爲X及Y的相關系數。

應用方程式(30)，求出體重60啓羅克的人，其極能機遇的體長爲 170.9 生的。(看第163頁)要想求出這種推測出來的量的可靠量，把σ_y及γ 的量，代入公式(32)內，即求出

σ (esty) $=6.55\sqrt{1-.6^2}=5.2$

這個結果，表明一個體重 60 啓羅克的人，其極能機遇的身長爲 170.9生的，而同時有一個σ(esty)爲5.2生的，卽謂其實在身長在170.9 士5.2，或在 65.7生的及176.1 生的之間之機會爲68%。又我們能十分相信這個人的身長，準在 170.9 士(3×5.2)，或在155.生的及 186.5 生的之間。

應用方程式(31)，推測X 的量。要想求出這種推測的準確程度，須用以下的公式：

$\sigma(\text{est.x})=\sigma_x\ \sqrt{1-r^2}$…………………(33)

(σ(est.x)又常以 Sx 代替之)

其中的σ_x二爲X分配式的σ。

應用公式 (31)，找出體長 180 生的的人，其極能機遇的體重爲 68.7 啓羅克。要想求出這種推測出來的量的可靠量，把σ_x及r的量，代入公式(33)裏，卽求出

$\sigma(\text{est.x})=7.75\sqrt{1-.6^2}=6.2$

因知在這個團體內的人，其體長 180 生的者，其極能機遇的體重當爲68.7啓羅克，而同時有一個 (estx)爲6.2啓羅克。卽謂此人的體重得在68.7士6.2，或在62.1及74.9 啓羅克之間之機會爲 68%。又我們能十分相信其體重準在68.7士(3×6.2)或在50.1及87.3啓羅克之間。

B. 推測的機錯 PE(est)

PE (est) 亦可用以測量推測的準確。*PE* (est) 等於 σ(est) 乘常數 .6745。

$PE(\text{est.y})=.6745\,\sigma_y\sqrt{1-r^2}$…………………(34)

$PE(\text{est.x})=.6745\ \sigma_x\sqrt{1-r^2}$…… …………(35)

體重50啓羅克的人的體長，推測之爲 170.9 生的；而同時有一個 σ(est.y)爲5.2生的，有一個PE(esty) 爲.6745×5.2=3.5 生的。這其結果，表明這個人的實在身長在 170.9 ± 3.5，或在 167.4 及 174.4 生的之間之機會爲均等。

照樣一個身長180 生的的人的體重，推測之爲 68.7 啓羅克，而同時有一個σ (estx)爲6.2啓羅克有一個 PE(estx)爲.6745×6.2，或4.2啓羅克。即謂這個人的實在體重在 68.7±4.2，或在64.5及72.9 啓羅克之間之機會爲均等。

推測X及Y時所生之錯誤藉σ (est.) 及PE (est) 公式測量之，注意 $r=1$時，則$\sqrt{1-r^2}=0$.故σ (est)及PE(est)皆等於零，是推測無錯誤。因爲$r=$ 1.00 時，所有成對的記分，皆在重叠的消長線上，故有此結果。(參看 Monroe 的 An introduction to the thory of educational measu em-nts 1923, PP351—353用圖表白 (est.的意義)

觀察 (est)及PE(est)公式，可知根據消長方程式而推測，其推測之準確，視乎兩個分配式的 σ 之大小，及兩個特性的相關量之大小而定。若是Y的差異小，x 和 Y的相關量大，(譬如.90 至 1.00)則根據X之量推測 Y之量，其準確之程度必高。苟差異大，或相關量小，則推測即不可靠，而無價值。苟差異大，相關系數雖高，推測上亦往往有很大的錯誤，而至於無價值。譬如可 $r=.60$，可算很大了，而我們根據體重X，以推測體長Y ，還有一個機錯爲3.2 生的。即謂真體長和推測出來的體長相差不大於± 3.5 生的之機會僅爲均等。

若根據消長方程式而推測，則σ (est)或PE(est)，必須舉出來，總之推測的價值之高低，可以推測的標準錯誤之大小決定之，亦視推測準備之精粹及推測之目的如何而定。

VI 相關問題的演算

在第24圖內，又舉出一個相關問題，演算一番。關於相關問題，已經舉出體長體重問題演算過了。現在又舉出一個問題，把他演算一番。其用意在使學者遇着新材料時，能順着步驟推求其 r 及消長方程式，因以增強其理解力。對於一種方法若只是舉出一個例題演算之，在演算上，往往遇着許多疑難的地方。若另舉出一個問題，再演算一番，往往能將其疑難解除。在以下幾節裏，把本問題在演算上的重要點，一一簡單說明出來。學生閱讀時，請參看第24圖。這個問題，係求136個同年兒童的兩組 IQ 之相關量。這兩組 IQ，係用兩種個別智力測驗具所找出的；先從散步形，造出一個相關表，如第141頁所說的一樣，第一組 IQ 為 X 變數，第二組 IQ 為 Y 變數。推求兩個分配式的均點，及 x'，y'，σ_x，σ_y 等，學者俱已熟習，並已詳載於第24圖內，無須再用文字詳述。

乘積差數 $\Sigma x'y'$ 直行之求得，係選擇(115－119)直行，為 X 的假均點所在之行；及(115－119)橫行，為 Y 的假均點所在之行。$\Sigma x'y'$ 直行內之登記數，係用簡法所求得者。請看第149頁。每橫行內的各個方格內的次數先乘以 x'，再把這些差數加起來，而置於 $\Sigma x'$ 直行下。這個登記數，再以此橫行的 y' 乘之。現在舉一個例子說明之。先看最高的橫行，從左向右看。各個方格內的次數為1.第一個次數的 x' 為5，即把他們相乘起來(1×5)。第二個次數的 x' 為6，再把他們相乘起來(1×6)第三個次數的 x' 為7，又把他們相乘起來(1×7)。因此得着 $\Sigma x'$ 為(1×5)＋(1×6)＋(1×7)＝18.而此橫行之 y' 為8。故最後登記數 $\Sigma x'y'$ 為18×8＝144.照樣求得第八橫行(從上向下數)的登記數 $\Sigma x'$ 為(3×－1)＋(2×0)＋(3×1)＋(3×2)＋(1×3)＋(1×4)＝ 13。而此橫行的 y' 為1，

故最後登記數$\Sigma x'y'$爲3。再看第11橫行，照樣求出登記數$\Sigma x'$爲$(2\times3)+(3\times-2)+(3\times-1)+(2\times0)+(\Sigma\times2)=13$。而此橫行的$y'$爲$-2$，故最後的登記數$\Sigma x'y'$爲26

等到所有之登記數$\Sigma x'y'$一齊求出後，再案其正負，以求其總和$\Sigma x'y'$。再應用公式(23)求r，公式(26)求PEr。注意：在$\dfrac{\dfrac{\Sigma x'y'}{N}-\bar{x}'\bar{y}'}{\sigma_{x'}\ \sigma_{y'}}$內的$\bar{x}'$，$\bar{y}'$，$\sigma_{x'}$，$\sigma_{y'}$，等，俱以區域爲準個而求出者(參看第51頁)

把r，$\sigma_{x'}$，及$\sigma_{y'}$之量，代入公式(28)及公式(29)裏，即求出兩個消長方程式之以差數表出者。再把這兩個消長方程式所代表之兩根直線畫於圖內。平時演算問題時，可無須畫出這兩根線。但是他們也有用處，表示各橫行及各直行(Array)的均點，是否在他們的身上，即謂消長線是否是直的。若是兩個變數的關係，不能以直線表示之，則必須用別的法子，把他求出來。(看182頁)

兩個消長方程式之以記分表出者，也要求出來。第一個消長方程式，係把兩個均點及隨X爲轉移的Y消長係數(.99)代入公式(30)裏所求出的。第二個消長方程式，係把兩個均點及隨Y爲轉移的Y消長系數(.84)代入公式(31)裏所求得的。推測的機誤PE(est)亦求出來。PE(est.y)，係應用公式(34)所求出的PE(est.x)係應用公式(35)所求出的。

在此圖內，已經舉出幾個例子，表白消長方程式在推測上的用途。注意：智力測驗X和智力測驗Y有極大的關係。測驗(X)上的一個IQ 100，能被測驗Y上的一個IQ 98伴之而生。IQ 98係一個極能機遇的量而同時有一個PE(est.y)爲4.12或4點；即謂在測驗Y上實在的IQ在98 ± 4，或在102與94之間之機會爲均等。在測驗X上一個IQ 120，能被在測驗y上一個IQ 118伴之生。118係一個極能機遇的量。而同時亦

有一個PE(esty)爲4點。故不管Y在量表上何處，所有推測出來的Y，皆有等大的推測錯誤。

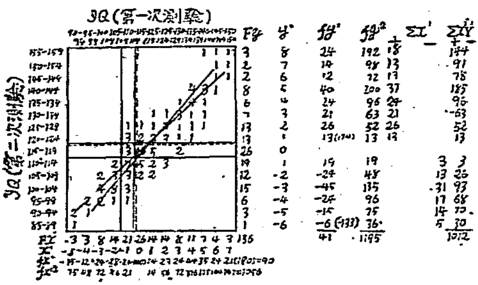
當推測的標準錯誤σ(est.)及機錯PE(est.)被用以表示各個推測出來的記分的可靠量時，則可解釋之如下。譬如一個PE (est.)爲4點，即謂在Y測驗具上，有一半IQ，未能和X測驗具上之IQ相關到圓滿之境，相差等於或大於±4；還有一半IQ，亦未能和X測驗具上之IQ相關到圓滿之境，相差不足±4點。

在許多相關問題上，我們的興趣，只在推測一個測驗具上的記分，(Y常當作依築的變數，X當作獨立的變數)但在第24圖內，也不妨就Y上之IQ，推測X上之IQ。例如Y上之IQ100，被X上之IQ104伴之而生，而同時有一個PE(est.X)爲3.79或4點。即謂實在的$IQ(X)$在104±4或在100及108之間之機會爲50%。

第二十四圖

解算相關問題

第一種測驗具的IQ



$\bar{y}'=\frac{41}{136}=.3$ $\bar{x}'=\frac{90}{133}=.66$ $\gamma=\dfrac{\frac{1012}{316}-.3\times.69}{2.91\times2.71}$

$\bar{y}'^2=.09$ $\bar{x}'^2=.44$

$Cy=1.5$ $Cx=3.30$ $\gamma=.91$

$\bar{y}=117.5+1.5$ $\bar{X}=117.5+3.30$ $PE\gamma=.01$

$=119$ $=120.8$

$\sigma y=\sqrt{\frac{1159}{136}-.09}\times5$ $\sigma x=\sqrt{\frac{1056}{136}-.44}\times5$

$\sigma y=2.95\times5$ $\sigma x=2.71\times5$

$\sigma y=14.75$ $\sigma x=13.55$

消長方程式

I. 以差數表白之

$y=.91\times\frac{14.75}{13.55}x=.99x$

$x=.91\times\frac{13.55}{14.75}y=.84y$

II. 以記分表白之

$y-119=.99(x-120.8)$

$y=.99y-.29$

$X=120.8=.84(y-119)$

$X=.84y+20.8$

求 PE(est)

$PE(\text{est.}Y)=.6745\times14.75\times\sqrt{1-(.91)^2}$

$=4.11(4)$

$PE(\text{est.}X)=.6754\times13.55\times\sqrt{1-(.91^2)}$

$=3.79(4)$

例題

設$X=100$

$Y=99-.59$或98 ± 4

設$X=120$

$Y=118\pm4$

設$Y=100$

$X=84+20.84$

$=104\pm4$

VII 求等級相關量的方法 (rank method)

研究應用心理學及職業心理學的人，常遇着許多材料，表白能力上或優劣上(merit)的差別。這些差別，只能以等級而不能以記分表示之。例如某人誠實，運動能力．販賣能力，智力，廣告能力，顏色的深淺，而等級之。或某人的美麗。(Rank method)或個人的好尙，而等級

之。推求這些材料的相關量，必須採用一種方法而能顧及等級的。若是記分的數目不多，10個以上，25個以下，最好案其優劣之序，而等級之。再以等級法求，其相關量。不必採用長且繁之乘積法。相關系數，由幾個記分而求得的，總難可靠；只能藉其表示相關量的有無作爲初步調查。記分數目過少時，只能用等級方法求其相關量，因爲省時候，而且所得的結果，亦不劣於用長法所求得的。

以下研究兩種方法，求等級相關量。第一種爲等級差別法，第二種爲優越法。

I. 等級差別法 (method of rank difference)

等級差別法，已詳於第19表。此表內的問題，係求12個販賣人的服務年數和其販賣能力的相關量。這12個人的名字，排列於第一直行內。各個人的服務年數，擺在第二直行內。把年數變爲等級，擺在第三直行內。譬如G的服務年數最長，定其等級爲1；C的服務年數次長，定其等級爲2；其餘照樣推下去。所須注意的，A和J服務的年數相等，遂定其各個之等級爲7.5，而不以一個人個的等級爲7，一個人的等級爲8，或以其等級皆爲7，或皆爲8.F的等級爲9。(若是有三個人的記分等大，最簡單的方法，即給各人以居中的等級。例如不給此三人以5,6,7,等級而各給以等級6.)

販賣經理人，案各人販賣能力的大小，而定其等級，擺在第四直行內。能力最大的爲C，定其等級爲1。最小的爲B，定其等級爲12第五直行爲能力等級和服務年數等級的差別。第六直行爲各個差別的平方。這兩種等級的相關量，用以下的公式求出之：

$$P=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

其中的D，代表等級的差別；ΣD^2代表差別平方的總和；N代表

記分數目；P代表等級相關係數。但能藉第20表，把P變爲乘積法的γ。

第十九表

用等級差別法求相關量

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
販賣者	服務年數	優劣的等級（以年數爲標準）	優劣的等級（以能力爲標準）	等級的差別	差別的平方
A	5	7.5	6	1.5	2.25
B	2	11.5	12	.5	.25
C	10	2	1	1.0	1.00
D	8	4	9	5.0	21.00
E	6	6	8	2.0	4.00
F	4	9	5	4.0	16.00
G	12	1	2	1.0	1.00
H	2	11.5	10	1.5	2.25
I	7	5	3	2.0	4.00
J	5	7.5	7	.5	.25
K	9	3	4	1.0	1.00
L	3	10	11	1.0	1.00

$N=12$　　　　　　　　　　　　58.00

$$P=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}=,1-\frac{6\times 58}{12(143)}=.80$$

第XX表的　$r=.81$

$$PEr=\frac{.70.3(1-\gamma^2)}{\sqrt{N}}=.07\qquad\text{〔參看公式(37)〕}$$

以5代替ΣD^2，12代替N於公式36裏，求出P爲.80。查第20表，找出P爲.80時，r=8.1。由P所變成的r之PE，大於用乘積法所求出的r之PE5％。(請參看 Brown 及 Thomson 的 Essentrals of mental measurement, P.103)由P所變成的r之PE的公式爲：

$$PEr=\frac{.7063(1-r^2)}{\sqrt{N}}\dots\dots\dots\dots(37)$$

本問題的r由P所變成的爲.81，故PEr=.07，因此這個相關系數雖由12個記分所求出，照例亦算得很可靠。但當N小於30時，PE之實在量往往大於由公式(37)所求出者。無論如何，r及PE由N小於30所出的，只能作爲臨時的；解釋他們時，尤須小心。對於本問題，我們可以斷定販賣能力和服務年數之間有很高的相關量。

第二十表

把 P 變爲 r

$$P = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

P	r	P	r	P	r	P	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5217	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5530	.79	.8039
.05	.0524	.34	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5381	.82	.8325
.08	.0838	.33	.2439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.30	.3542	.59	.6081	.84	.9516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.55	.8010
.11	.1151	.35	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8769
.13	.1350	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4453	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2911	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

2. 優越法 (method of gains)

推求等級相關量的第二個方法爲優越法。第21表表明優越法的用途。其中的材料，係取自第19表。注意：第19表及第21表內的前四直行，完全相同，不同的地方 在第五直行。第21表的第五直行上端，冠以 G 字，表明此行的數，係第三直行內的數大於第四直行內的數的量。故此直行內的數，爲第三第四兩直行的數的正差數。譬如 A 的服

務年數等級爲7.5，而其能力等級爲6；是其能力等級，超越其年數等級1.5.C,F,H,I,J，等的能力等級，皆超越其服務年數等級。G行的總和爲10.5.注意：若是我們求年數等級超越能力等級，亦可得着等大的G，請看第六直行G。故求第三直行超越第四直行的量，或求第四直行超越第三直行的量均可，沒有區別的。

第二十一表

以優超法求相關量

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
販賣者	服務年數	優劣的等級（以年數爲標準）	優劣的等級（以能力爲標準）	g（優越）[(4)優於(3)]	g（優越）[(3)優於(4)]
A	5	7·5	6	1·5	
B	2	11·5	12	1···	·5
C	10	2	1	·0	
D	3	4	9	···	5·0
E	6	6	8	···	5·0
F	6	9	5	4·0	
G	12	1	2	···	1·0
H	2	11·5	10	1·1	
I	7	5	3	2·0	
J	5	7·5	7	·5	
K	9	3	4	···	1·0
L	3	10	11	···	1·0
				10·1	10·5

$$R=1-\frac{6\ G}{N^2-1}=1-\frac{6\times 10.5}{143}=.56$$

γ(由$XXII$表查出爲)$=.79$

等到G行的總和求出後，可用以下的公式求出相關量：

$$R=1-\frac{6\Sigma g}{(N^2-1)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

以10.5代替ΣG，12代替N於公式(38)裏，卽求出$R=.55$。查第22表，可以把R.56，變爲乘積法的γ.79。注意：由R所變成的γ.79和由P所變成的γ，.81 相差無幾。

第二十二表

把R變爲r

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000						
.01	.018	.26	.429	.51	.742	.76	.947
.02	.036	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.03	.054	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.04	.071	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.05	.089	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.06	.107	.31	.500	.56	.791	.81	.681
.07	.124	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.08	.141	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.09	.158	.34	.541	.59	.818	.84	.672
.10	.176	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.11	.192	.36	.567	.61	.836	.86	.679
.12	.209	.37	.580	.62	.844	.87	.98
.13	.226	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.14	.272	.39	.606	.64	.800	.89	.987
.15	.254	.40	.688	.65	.867	.90	.989
.16	.275	.41	.630	.66	.875	.91	.99
.17	.291	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.18	.397	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.19	.323	.44	.666	.69	.896	.94	.999
.20	.338	.45	.677	.70	.402	.95	.998
.21	.354	.46	.689	.71	.908	.96	.993
.22	.369	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.23	.384	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.24	.399	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.25	.414	.50	.632	.75	.932	1.00	1.0000

優越法，只能產主一個粗率的相關量。其準確的程度，尙不及等級差別法。除$R=0$時不算，系數R有一個很大而不可確知的PE。其消長亦不限於士兩個界限之內，在意義上，自不能和乘積系數相比較，故無好處可言；只是其公式根據等級差別平方所推得，簡單而已(參看 Kelley T.L. 的統計學 1923，p.193) 若是材料少而又不準確，則宜用優越法求其相關量。無須用精確的乘積法，耗費時間。又可先用以作初步之調查，然後再决定應用乘積法與否。

3. 等級法之總結

乘積法能顧及記分的大小及其在次序裏的等級；而等級法只能顧及次序裏各項的等級，例如記分之爲90,86,70的，只能案其大小以定其等級爲1,2,3,而不管90和86相差爲4，86和70相差爲16。等級法只能證明相關量的有無，而不能明示相關量的大小。須特別注意的，即爲除非N很小，小於30，不必用等級法。而這兩個等級法之中，等級差別法還較好。

VIII 求分類的材料的相關量：方格相關法 (Contingency method)

有許多事件，不能用量表測量他，只能把他們案類分出來，然後求其相關量。例如人的眼睛顏色深淺，脾氣的快慢，體育能力的大小，等等，不能用量表量得準確，只能把眼睛的顏色，分爲藍色的，灰色的，棲色的；把人的脾氣分爲急躁的，平和的，紓緩的；把體育能力分爲劣等，中等，優等。以上所舉的乘積法，等級法，皆不能不用以測量分類的材料的相關程度。但是有幾種方法，合用於這種材料，而最好的爲方格相關法，係皮爾生教授(參看Yule的統計學原理第64頁)所推得的，以C表明相關量C叫做均方方格相關系數。(Co-efficient of mean quare contingency)

第23表，係一個方格相關表。其中已將求C的步驟，詳細說明。這個問題，係求父子眼睛顏色的相似程度，共有一千個記分。(Cases)這種方格表的製造法，如同相關表一樣。請先看第一直行，計有藍色眼睛父親353名：其中有194個藍色眼睛兒子，83個灰色眼睛兒子，25個深灰色眼睛兒子，56個棲色眼睛兒子。在第一橫行內，計有335個藍色眼睛兒子：其中有194個藍色眼睛父親。70個灰色眼睛父親，41個深灰色眼睛父親，30個棲色眼睛父親。

等到方格相關量造成後，求c的第二步，在求每個方格的獨立量。

第二十三表

例證C之推求法

(材料係取自 *yule* 的統計學原理第70頁)

父親眼睛顏色

兒子眼睛顏色	藍色	灰色	深灰色	棕色	
藍色	(120) 194	(88) 70	(60) 41	(66) 30	335
灰色	(102) 83	(75) 124	(51) 44	(56) 36	284
深第色	(49) 25	(36) 34	(25) 55	(27) 23	137
棕色	(87) 56	(64) 36	(44) 43	(48) 109	244
	358	264	180	198	1000

第一直行

獨立量

$$\frac{335\times358}{1000}=120 \qquad \frac{137\times264}{1000}=36$$

$$\frac{335\times064}{1000}=83 \qquad \frac{137\times180}{1000}=25$$

$$\frac{335\times180}{1000}=60 \qquad \frac{137\times198}{1000}=27$$

$$\frac{335\times198}{1000}=66 \qquad \frac{244\times358}{1000}=87$$

$$\frac{284\times358}{1000}=102 \qquad \frac{244\times364}{1000}=64$$

$$\frac{284\times164}{1000}=75 \qquad \frac{244\times180}{1000}=44$$

$$\frac{234\times180}{1000}=51 \qquad \frac{244\times198}{1000}=48$$

$$\frac{284\times198}{1000}=56$$

$$\frac{237\times358}{1000}=40$$

第二直行

$$\frac{(194)^2}{120}=313\cdot6$$

$$\frac{(88)^2}{102}=67\cdot5$$

$$\frac{(25)^2}{49}=20\cdot8$$

$$\frac{(56)^2}{87}=36\cdot0$$

$$\frac{(70)^2}{88}=55\cdot7$$

$$\frac{(124)^2}{75}=205\cdot0$$

$$\frac{(34)^2}{36}=32\cdot4$$

$$\frac{(36)^2}{64}=20\cdot3$$

$$\frac{(45)^2}{60}=23\cdot0$$

$$\frac{(41)^2}{51}=33\cdot0$$

$$\frac{(55)^2}{25}=121\cdot0$$

$$\frac{(43)^2}{44}=42\cdot0$$

$$\frac{(30)^2}{66}=13\cdot6$$

$$\frac{(36)^2}{56}=23\cdot1$$

$$\frac{(23)^2}{27}=19\cdot6$$

$$\frac{(109)^2}{48}=247\cdot5$$

$$S=1270\cdot8$$

$$N=1000$$

$$S-N=270\cdot8$$

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}=\sqrt{\frac{270.8}{1270.8}}=.462$$

這些獨立量，見於各個方格內，而以括弧封鎖起來。若是父子的眼睛顏色，無絲毫實在的關聯(Association)，則這些獨立量，即代表父子的數目，而爲我們所盼見於各個方格中的。例如在1000對中，藍眼父親而其子亦藍眼的，計有 194 對。若是父子的眼睛顏色毫無關聯之處，全憑機會的湊合，則只能盼得$\frac{335\times353}{1000}=120$ 對。又藍眼父親而其子藍眼的，共有70對。若其中無實在的關聯，全憑機會的湊合，則在1000對中，只能盼得88對。照樣各個方格內的獨立量，係把該方格所在之橫行的總數及直行的總數相乘起來，而以N除之，所求得的（請看第23表第一直行）。

獨立量求得後，第二步即把該方格內原有的數平方之，而以該方格內的獨立量除之，得着一個商數。(參看第二直行)等到各個商數一齊求出後，把他們加起來，即爲S.本問題的 $S=1270.8$ 再從 S 內減去 N ；則有$S-N$。均方方格相關係數C，即以下面的公式求出的。

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

本問題的 $C=.462$。

求C 的步驟如下：

1,製造方格相關表，如同第23表一樣。

2,把各個方格所在之橫直行的總數相乘起來，而以N 除之，即得各個方格的獨立量。

3,把各個方格內原有的數平方起來，而以該方格內的獨立量除之，得商數。

4,把在(3)內求得的各個商數，一齊加起來，以S代表他。

5,把N 從 S 內減去，得$(S-N)$。

6,以S除$(S-N)$幷開方之，得C。C即爲均方方格相關系數。

根本的原理，綢繹方格相關法者，卽在把每個方格內之原有的關聯次數，和特性完全無關時吾人所盼得於各個方格內之次數，比較比較。若是這兩個次數等大卽謂方格相關表的兩個變數，完全無關，則$C=.00$。若是相關到圓滿之境，則c卽愈近於1，至1為止境。

平時c不附以符號，因為這個系數，只表示兩個特性，是相關的還是獨立的？但為解釋方便起見，若是方格相關表內一個特性的高度，和第二個特性的低度聯合在一起，則C上亦可附以負符號。觀察第23表，發現淡色眼睛的父親，和淡色眼睛的兒子聯合在一起。因此C必為正。注意父親藍眼而其子亦藍眼者，有194個。父親樓眼，而其子藍眼者，僅有50個；父親樓眼，而其子亦樓眼者169個。父親藍眼，而其子樓眼者，僅有50個。故父子眼睛顏色之關聯是正的。若是深色眼睛的父親，和淡色眼睛的兒子發現在一起，則C將為負。總之，我們可從方格相關表上，決定相關量為正或為負，C只表白相關程度之大小而已。

方格相關法，有一個弊病，卽是對於同種材料，C非穩定不變者若是表內的類別加多，C卽因之而變。設表有3×3格，若變之為5×5格，材料雖不變，而兩個C則不同。又C之最大値，亦非只一個，恃乎分類之詳細而變。yule在他的書上，表明以下的事實。(參看yule的統記原理第66頁)

類別之數目＝2時	C不能大於·707
＝3	·816
＝4	·866
＝5	·894
＝6	·913
＝7	·926
＝8	·935
＝9	·943
＝10	·949

因此yule說，若欲求方格相關系數，至少要有5×5格，或更多。如此C始得近於1，但是亦不可分類太細，若分類太細，則C易受微細的偶然的不規則現象的影響，而同時又增加推算上的工夫。

因爲第23表爲4×4格，若增加其類別，則C將改變，惟此表能把這種方法及演算的步驟明白表示出來。又因此表爲4×4格，故C的最大量爲.866。現我們的C爲.462，縱這種度量不精確，亦可斷定此處父子眼睛顏色的相關量爲正，其程度適中等。

C和γ的關係很重要，(1)當分類詳細時，如有5×5格，或更多，(2)當羣形很大時，(3)當我們知道相關的兩種特性俱呈常態分配式時，C可視之爲γ，苟分類不詳細，例如只有 4×4格，或更少，而欲使C等於γ，則須應用皮爾生教授之更正法以更正之。對於5×5格或更詳細的分類，即使用更正法，C被更改甚微。若不需要很準確的相關量，即可視C爲γ。

求C時，若把(1)求獨立量。及(2)平方各個方格內的原有數再以獨立量除之兩個步驟，合而爲一，則演算工夫，可以減少。這種求C的簡法，已在第24表內表明了。注意：在第一直行的第四個方格（從上向下數）內，有一個次數爲1，而此方格內的獨立量，爲$\frac{99\times 8}{384}$。把此方格內的次數平方起來，而以獨立量除之，則有$\frac{1^2}{\frac{8\times 99}{384}}=\frac{1^2\times 384}{8\times 99}$此商數即爲此方格對於$S$的貢獻。照樣第一直行的第五個方格對於$S$的貢獻爲$\frac{5^2\times 384}{8\times 25}$。第一直行的第六個方格對於S的貢獻爲$\frac{2^2\times 384}{8\times 2}$把這三個貢獻合併起來，則有$\frac{384}{8}\left(\frac{1}{99}+\frac{25}{25}+\frac{4}{2}\right)$，其他各個直行對於$S$的貢獻，可照樣求出來。還有一處，可以減省，因爲$N$ (384) 發現於各個直行，故爲各個直行的公因數。故求每個方格的貢獻時，可暫

第二十四表

用簡法求C,

男孩：年齡：4.5—5.5

體重（磅）

體長（英寸）

	24—28	29—33	34—38	39—43	44—48	49—53	總數
45—47			1		2		3
42—44			4	35	21	5	65
39—41		5	87	90	7	1	190
36—38	1	18	72	8			99
33—35	5	15	5				25
30—32	2						2
總數	8	38	169	133	30	6	484

第一直行 $\frac{1}{8}\left[\frac{1}{99}+\frac{25}{25}+\frac{4}{2}\right] = \cdot 3762$

第二直行 $\frac{1}{38}\left[\frac{25}{190}+\frac{324}{99}+\frac{225}{25}\right] = \cdot 3264$

第三直行 $\frac{1}{169}\left[\frac{1}{3}+\frac{16}{65}+\frac{7569}{190}+\frac{5184}{99}+\frac{25}{25}\right] = \cdot 5549$

第四直行 $\frac{1}{133}\left[\frac{1225}{65}+\frac{8100}{190}+\frac{64}{99}\right] = \cdot 4671$

第五直行 $\frac{1}{30}\left[\frac{1}{3}+\frac{441}{65}+\frac{49}{190}\right] = \cdot 2792$

第六直行 $\frac{1}{6}\left[\frac{65}{56}+\frac{1}{190}\right] = \cdot 0650$

$P = 2\cdot 0688$

$$C=\sqrt{\frac{P-1}{P}}=\sqrt{\frac{1{,}0688}{2{,}0288}}=\cdot 719$$

之不顧請看第24表，若以P代表六個直行的總和，則C等於$\sqrt{\frac{\;-1}{P}}$

（因爲$P=\frac{S}{N}$故$S=PN$。以PN代替S於$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}}$公式內，則有$C=\sqrt{\frac{PN-N}{PN}}$。去掉公因數N，則有$\sqrt{\frac{P-1}{P}}$）。

應用簡法，求出C爲.719，而此表的相關系數（γ），則爲.709，（參看第220頁）是C與γ的差別很小，蓋由於N頗大，分類頗細，有6×6格，而體重體長之分配式又各呈常態形狀。

應用簡法，求C之步驟如下：

1，把第一直行之各個方格內的次數平方起來，而以各該方格所在的橫行總數除之。

2，把在(1)內所求得的結果加起來，而以第一直行的總數除之，得着一個商數，稱爲部份總數。

3，把(1)，(2)兩步；爲其他各直行重演一下。

4，把部份總數，一齊加起來，以P代表他。

5，求C，$C=\sqrt{\frac{P-1}{P}}$。

在許多心理問題上，我們須求出各種特性(Attribute)的關係程度，故很有用。

IX 非直線的相關量 (Non-linear relationship)

I. 相關比率 (Correlation Ratio)

兩組記分X和y的關係，可以直線或非直線表示他。若相關表的各個直行或橫行的均點的趨勢，不成直形，而爲弧形，則消長線爲弧形的。這兩個變數的關係，稱之爲弧形相關。

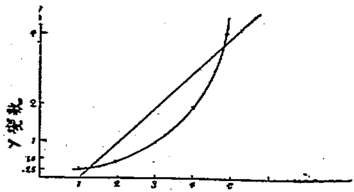
以前所討論的，只限於兩個變數X和Y的直線相關。而在心理測驗學上，往往遇着兩個變數的關係非直形的。因此相關系數γ不能用

了。其理由可略述如下。當將曲的關係爲直線所代表時，則成對的數，環直線而散佈之範圍，大於環曲線而散佈之範圍。因爲曲線能連合各行之均點。故環曲線而散佈之範圍較窄。環繞直線或曲線而散佈之範圍愈窄，則其相關量愈高。故從曲形消長線所求出之相關系數（γ），必小於X和Y之眞相關系數。〔注意第XXV表內的兩個次序的相關量，用乘積法求出爲.93。但其眞相關量爲1.00，因爲Y的量，是決對的依靠X的量。X以數學級數進，而Y以幾何級數進。若按成對的X及Y的量，製出一張圖來，卽知γ小於1.00(參看第25圖)因爲X和Y的關係爲曲形的，故不能以直線代表之。若其關係爲直形，則所記之點，應皆在關係線下。今則不然。故γ小於1.00,在眞曲形相關上，γ總小於η〕

第 二 十 五 表

變數X	變數Y
1	·25
2	·50
3	1·00
4	2·00
5	4·00

故欲求非直線的相關，必須用一種比較普通的系數，必須用一種系



第 二 十 五 圖

數，而能測量成對的X及Y環繞曲形消長線而集中之程度，正如γ能測

量成對的 X 及Y，環繞直形消長線而集中之程度一樣。這種系數，叫做相關比率，係皮爾生教授所求出，而以η符號代表的。因爲η係一種普通的系數，故消長線爲直線時可用，爲曲線時亦可用。若是消長線是直的，則各行的均點皆落於直線上，而 η 即等於r。若是消長線不直，則各行均點，不落於直線上，η即大於r。當X和Y之相關非直形時，η和r不等，η總大於r。故r可視爲較普通的η之一種，正如直線關係，爲曲線關係之一種一樣。

η總爲正，而在0與1,00之間消長。η所表示的關係，是否爲正，或爲負，或變動不居，必須就消長線的方向以定之。

求η之步驟如下：

第一步：

造相關表，如同第23圖及第 24 圖一樣。製造之法，已在第141頁上，詳細說明。

第二步：

求Y的均點及其σ，用假均點法求之。

第三步：

求各直行Y的$\bar{y}_x$，而將其登置於附有$\bar{y}_x$的橫行的相當處。

第四步：

求$\bar{y}_x$和$\bar{y}$的差數，即是$(\bar{y}_x-\bar{y})$。

第五步：

將四步所求出的差數平方起來，而置於附有 $(\bar{y}_x-\bar{y})^2$ 的橫行的相當處。

第六步：

把同一直行內的f_y和$(\bar{y}_x-\bar{y})^2$相乘，例如把第一直行的$(\bar{y}_x-\bar{y})^2$

$=15,52$ 和 $fx=20$ 相乘。

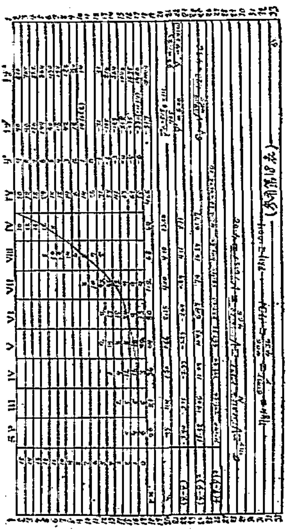
第七步：

把所有的 $fx(\bar{y}x-\bar{y})^2$，一齊加起來，以 N 除之，再開平方，其結果爲 σ_{my}，叫做各直行均點環繞全表均點的標準差。簡稱爲直行均點標準差。

第八步：

以 σ_y 除 σ_{my} 而得着相關比率 η_{yx}，求 η_{yx} 的公式爲

$$\eta_{yx}=\frac{\sigma_{my}}{\sigma_y} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$



把由第26表所求出的 σ_y 及 σ_{my} 之量，代入公式(40)內，則得着 $\eta_{yx}=.931$(PE_η 可用公式(40)求出來)。

$$PE_\eta=\frac{.5145(1-\eta^2)}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41))$$

這個系數 .931，表明465個學生的學級地位和數學測驗成積的關係量；這種關係，及各直行的均點的趨勢，已在第26圖內用曲線表白出來。注意：這根線，起頭很低，漸漸上升，然後忽然彎曲成凹形。

觀此圖即知道隨 X 爲轉移的 Y 消長線非直形的。又從此表求出Y爲.8)較之 η_{yx} 小。任何表的消長線爲直形或非直形可由下面(3)內的方法決定他。

在每個非直線的相關線內，有兩個 η 如同消長線爲直形時，有兩個消長系數 b_{12} 及 b_{21} 一樣。一個爲 η_{yx}，代表隨 X 爲轉移的 Y 消長線，(y 爲依靠變數)。一個爲 η_{xy}，代表隨 Y 轉移的 X 消長線，(X 爲依靠變數)。求 η_{xy}，和求 η_{yx} 一樣。上面舉出求 η_{yx} 所經過的步驟皆合用，只須把所有的 Y 改成 X 即行。求 η_{xy} 的公式爲：

$$\eta_{xy}=\frac{\sigma_{mx}}{\sigma_x}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

在兩個消長方程式內，如公式(28)及公式(29)，r 之量相同，而 η_{xy} 和 η_{yx} 之量則不同。他們各個量的大小，視乎環繞曲線（聯合直行均點及橫行均點之線）而散佈之程度如何而定。本問題之 $\eta_{xy}=.818$，而 $\eta_{yx}=.931$。消長線成直形時，η_{yx} 卽亦各等於 η_{xy}(請看第183頁)

2. 相關比率 η 之校正法

η 之量，特乎雛形內數目之大小，及分類的精粗而定。以常例論，若 N 很小，即無須求 η。若 N 很小，而行數反很多，則 η 求出後，必須應用皮爾生教授的校正法，(參看 Biometricka1923,14,412—417)校正之。若以 K 代表行數，則求校正的 η 之公式：

$$校正的\ \eta^2=\frac{\eta^2-\frac{(K-3)}{N}}{1-\frac{(K-3)}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

(在方程式右首的 η 為原有的 η)

再把本問題的 η，用校正法校正一下，以.931代替 η_{yx}，以8 (y行數)代替 K，以45代替 N 於公式(43)內則有

$$校正的\ \eta^2_{yx}=\frac{(.931)^2-.011}{1-.011},$$

$$\eta^2_{yx}=\frac{.856}{.989}=.8655,$$

$$\eta_{yx}=.930。$$

是被校正的 η_{yx}，與原有的 η_{yx}，相差極微。但是 N 小而 K 大時，則原有的 η 必大受減削。

3. 消長線曲直的試驗

就相關表的表面觀之，很難看出消長線為直的，或為曲的，故必須把 γ 及 η 皆求出來。上面已說過，若是消長線是十分直的，η 即為 γ。若去直愈遠，則 γ 與 η 的差別即愈大。試驗消長線曲直之法，在求 $G[=\eta^2-\gamma^2]$ 和零相差之量，是否大於由隨機抽取雛形所生之變動或差異(fluctuation)之量。須先應用下面的公式，求出 PEg。這個公式，係 Blakeman 所求出，(參看 yule 的統計學原理第352頁)。

$$PEg=.6745\times 2\sqrt{\frac{G}{N}}\sqrt{(1-\eta^2)^2-(1-\gamma^2)^2+1}\cdots\cdots(44)$$

公式(44)內的第二個根號，殆等於1，倘不需要極大的準確，可把他去掉。因此上面的公式變為：

$$PEg=.6745\times 2\sqrt{\frac{G}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

本題的 $\eta_{yx}=.930$，$\gamma=.80$，因此 $G=(.930)^2-(.80)^2=.2249$。由公式(45)，求出 $PEg=.030$。是 G 大於他的 PEg 7.49倍，$\Big(\frac{G}{PEg}=$

$\frac{.2249}{.030}=7.49$）不得謂 $G=.2249$ 係由隨機抽取樣形所生出，故消長線不直無疑。欲利用第 15 表，(即為 $\frac{D}{PE}$ diff 表）以決定 $\frac{G}{PEg}$ 表明 η_2 和 γ^2 的差別為眞的，或為偶然的，亦很便利。

若是 G 很小，或是 η 及 γ 皆很小，則另有一種試驗直形法，(參看 Biometricka 4,1906，PP332－350，Blakemen 之 on test forl inearity of regres ion)可以應用，而無須求出 PEg。案照這種試驗當

$$N(\eta^2-\gamma^2)\angle 11.37 \cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

時，消長線即爲直的。本問題的 $N(\eta^2-\gamma^2_{r})=104.58$ 故知消長線非直形。

眞正非直線的關係，常見於 Psychc－Fhysies 上，及疲勞，練習，遺忘，等試驗上。但在智力及性格測驗上所遇着的多爲直線相關。所以 γ 用於心理學及教育學上時，多於 η。若是消長線實在不直，則當用 η。若是消長線非明顯的變曲，則以 γ 代替 η，不致生出很大的錯誤來。若是相關量低，則尤甚。

相關系數 γ 優於 η 的地方，即在知道 γ 的量，便能寫出消長方程式來，再根據其中的獨立變數的量，推測其依靠變數的量。相關比率，則無此好處。在非直線的相關上，要想根據一個變數，推測另一個變數則必須諧合曲線於各直行或橫行的均點而後可。(要想研究曲線諧合法可參看 (Jones D.C. 的 a first course in statistics 1921 第15，16，17三章)

X，弱小相關系數之校正法

測驗記分或能量測量記分的準確，常受觀察錯誤的影響。"觀察錯誤"可生於兩方面，(1) 試驗者往往不知不覺，略爲更變測驗技術及測驗程序，(1) 被測驗者，往往因受測驗過久而疲勞，分心，注意力遷移，態度改變等等：因而影響其對於測驗之反應。若是觀察許多

次。則正方向的觀察錯誤，和負方向的觀察錯誤，可以互相抵消。但是這種錯誤，常使分配式的σ加大，相關系數減小故對於r必須加以校正，以救濟觀察錯誤的影響。校正公式，係由司皮爾曼教授所求出。(請看 Spearman C 的兩篇文章 1. The Proof and measurement of The association between 2 things American journal of Psychology 1904, Vol. xv,PP 71—101. 2.Demonstraton of true measure of r. Amrican journal of Psychology. 1907，Vo.18，PP161—169)

先對於每種能量，測驗兩次。這兩次的測驗，必須彼此毫無影響。再求出每種測驗自身相關量（參看第六章）由此則弱小的γ得用公式(47)校正之。

求校正的γ之程序如下：

以A及B代表兩種測驗具，並求其相關量。

以A_1代表測驗具A的第一組記分。

以A_2代表測驗具A的第二組記分。

以B_1代表測驗具B的第一組記分。

以B_2代表測驗具B的第二組記分。

以γ_{AB}代表測驗具A和測驗具B的真相關量。

以$\gamma_{A_1A_2}$代表測驗具A的自身相關量。

以$\gamma_{B_1B_2}$代表測驗具B的自身相關量。

以$\gamma_{A_1B_2}$代表測驗具A_1和測驗具B_2的相關量。

以$\gamma_{A_2B_1}$代表測驗具A_1和測驗具B_1的相關量。

則得 $$\gamma_{AB}=\frac{\sqrt{(\gamma A_1B_2)(\gamma A_2B_1)}}{\sqrt{(\gamma A_1A_2)(\gamma B_1B_2)}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47)$$

(參看 ynle 的統計學原理PP213—214)

設A代表"遵示"測驗，*following direction test*，B代表複雜關係測

驗，已求出。

$\gamma_{A_1A_2}=72 \quad \gamma_{B_1B_2}=75，\gamma_{A_1B_2}=35$

$\gamma_{A_2B_1}=42$ 把他們代入公式(47)內，則有

$$\gamma_{AB}=\frac{\sqrt{35\times42}}{\sqrt{72\times75}}=52$$

是即穿錯誤校正後，已有的相關量 5及42。變爲 521。

若測驗具A和測驗具B的相關量,只有一個，則公式(47)不合用。但以兩個可靠系數的幾何均點，除原有的係數，亦可得着一種近似的校正量公式(47)變爲

$$\gamma_{AB}=\frac{\gamma_{A_1B_1}}{\sqrt{\gamma_{A_1A_2}\gamma_{B_1B_2}}} \tag{48}$$

若是測驗具A和測驗具B的相關量爲 50，而可靠系數仍爲 72及.75

則已有的γ云γ 50可校正之如下：

$$\gamma AB=\frac{50}{\sqrt{72\times75}}=68$$

是弱小的係數 50，經校正後，變爲 68。

XI 本章公式之總結

1，乘積γ差數由$\bar{X}'$求出者。

$$\gamma=\frac{\frac{\Sigma xy}{N}-\bar{x}\bar{y}'}{\sigma x\ \sigma y} \tag{23}$$

2，乘積γ,差數由均點求出者。

$$\gamma=\frac{\Sigma xy}{N\sigma x\sigma y} \tag{24}$$

$$\gamma=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2}\sqrt{y^2}} \tag{25}$$

3，$PE\gamma=\frac{6745(1-\gamma^2)}{\sqrt{N}}$ (26)

4，$PEd(_1-_{\gamma2})=\sqrt{PE^2_{\gamma1}+E^2_{\gamma2}}$ (27)

5, 消長方程式之以差數表出者

$$y=\gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}x \cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

$$x=\gamma\frac{\sigma x}{\sigma y}y \cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

6, 消長方程式之以記分表出者

$$y=\gamma\frac{\sigma y}{\sigma x}(X-\bar{X})+\bar{y} \cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

$$x=\gamma\frac{\sigma x}{\sigma y}(Y-\bar{y})+\bar{X} \cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

7, 推測的標準錯誤

$$\sigma(\text{est}y)=\sigma y\sqrt{1-\gamma^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

$$\sigma(\text{est}x)=\sigma x\sqrt{1-\gamma^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$PE(\text{est}y)=.6745\sigma y\sqrt{1-\gamma^2} \cdots\cdots(34)$$

$$PE(\text{est}x)=.6745\sigma x\sqrt{1-\gamma^2} \cdots\cdots(35)$$

8, 等級相關

$$P=1-\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \cdots\cdots\cdots\cdots(3\ \ )$$

$$PE_\gamma=\frac{.7063(1-\gamma^2)}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

$$R=1-\frac{6\Sigma g}{(N^2-1)} \cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

9, 均方方格相關系數 G

$$C=\sqrt{\frac{S-N}{S}} \cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

10非直形的消長線

$$\bar{\eta}yx = \frac{\sigma_{My}}{\sigma y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40)$$

$$PE\bar{\eta} = \frac{.6745(1-\bar{\eta}2)}{\sqrt{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)$$

$$\bar{\eta}xy = \frac{\sigma_{Mx}}{\sigma x} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (42)$$

$$\text{校正的}\bar{\eta}^2 = \frac{\bar{\eta}^2 - \frac{(K-3)}{N}}{1 - \frac{(K-3)}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots (43)$$

$$PEg = .6745 \times 2\sqrt{\frac{S}{N}}\sqrt{(1-\bar{\eta}^2)^2 - (1-\gamma^2)^2 + 1} \cdots\cdots (44)$$

$$PEg = .6745 \times 2\sqrt{\frac{S}{N}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (45)$$

$$N(\bar{\eta}^2 - \gamma^2) \angle 11.37 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (46)$$

11,減弱的相關系數之校正

$$\gamma_{AB} = \frac{\sqrt{(\gamma_{A_1B_2})(\gamma_{A^2B^1})}}{\sqrt{(\gamma_{A_1A_2})(\gamma_{B_1B_2})}} \cdots\cdots\cdots (47)$$

$$\gamma_{AB} = \frac{vA,B,}{\sqrt{(\gamma_{A_1A_2})(\gamma_{B_1B_2})}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

1，以下有兩組記分：一組爲智力測驗記分，一組爲打字記分。打字記分，係一分鐘內所打之字數，被測驗者共一百人。編列記分時，以打字爲 Y 變數；智測力驗爲X變數，Y的每個區域，包含五個準個；X 的每個區域，包含10準個。

打字(y)	智力(X)	打字(y)	智力(X)	打字(y)	智力(X)
46	152	26	164	40	120
31	96	33	127	36	140
46	171	44	144	43	141
40	172	35	160	48	143
42	138	49	106	45	138
41	154	40	95	58	149
39	127	57	146	23	142
46	156	23	175	45	166
34	156	51	126	44	138
48	133	35	120	47	159
48	173	41	154	29	148
38	134	28	146	46	168
26	179	32	154	46	146
37	159	50	159	39	167
34	167	29	175	49	139
51	136	41	164	34	183
47	153	32	111	41	150
39	145	49	164	49	179
32	134	53	119	31	138
37	124	35	160	47	136
26	154	48	149	40	172
40	90	40	149	30	145
53	143	43	143	40	109
46	173	38	159	38	153
39	108	37	157	29	145
52	187	41	153	43	93
47	166	51	149	55	163
31	172	41	163	37	147
33	189	35	175	52	169
22	147	31	133	38	75
46	150	23	178	39	152
44	150	37	168	32	159
37	143	46	156	43	150
31	133				

2, 求以下相關表內的(參看第24表此係求C)

(a) 相關系數及PE_{γ}；

(b) 消長方程式之以記分表示者，及推測的標準錯誤；

(c) 若是一個小孩體重30磅，問其極能機遇的體長如何？若其體重45磅，問其極能機遇的體長如何？

男小孩，年齡4.5—5.5
體重(以磅計算)X

體高(以寸計算)y

	24—28	29—33	34—38	39—43	4—48	49—53	fy
45—47			1		2		3
42—44			4	35	21	5	65
39—41		5	87	90	7	1	190
36—38	1	18	12	8			99
33—35	5	15	5				25
30—32	2						2
fx	8	38	169	133	30	6	334

3. 求以下相關表內的
(2) 相關系數及PEr，
(b) 若是一個學生的智力記分爲 120，問其極能機遇的學校分數如何？

智力$I.Q.$

學校分數	84以下	85—89	90—94	95—99	100—104	105—109	110—114	115—119	120—124	125以上	總數
90以上				3	3	15	12	9	9	5	56
85—89				8	7	15	24	13	6	6	89
80—84			4	6	22	21	20	20	5	1	89
75—79			7	25	33	23	2	7	4		109
70—74		4	1	18	14	22	12	1	1		82
65—69	1	3	3	12	7	8	8	1			43
60—64			2	5	3	1	1				12
總數	1	7	26	77	99	105	87	41	25	12	480

3, 求以下兩組測驗記分的相關量

(a) 應用等級差別法；

(b) 應用優越法。

受測驗者	智力測驗記分	勾消測驗記分
a	185	110
b	203	93
c	188	118
d	195	104
e	176	112
f	174	124
g	158	119
h	197	95
i	176	94
j	138	97
k	126	110
l	160	94
m	151	123
n	185	120
o	185	118

(注意—勾消記分，係以秒計算者，故最大的記分爲94，

5, 求以下兩表的方格相關係數。

(a) 求弟兄的運動能力的相似程度 (此表係從 yule 的統計學原理第 74 頁上取來的)

(b) 求父子的脾氣之相似程度(此表係從 Brown 及Thomson 的心理測驗概要第125頁上取來的。凡方格表少於5×5格的，照例不求其系數，此表僅供練習而已)。

A　　運動能力——兄

		運動家	中等的	非運動家	總數
	運動家	906	20	140	1066
弟	中等的	20	76	9	105
	非運動家	140	9	370	519
	總數	1066	105	519	1690

B　　父

	樂天的	抑鬱的	無常的	恬淡的	總　數
樂天的	122	8	81	67	278
抑鬱的	10	2	7	10	29
無常的	70	9	101	68	248
恬淡的	58	6	66	45	175
總　數	260	23	255	190	730

子

b，下面的相關表，表示120個大學學生的入學試驗記分和課外活動記分的關係。

(a) 求 η_{yx}

(b) 求r，並試驗隨X為轉移的Y消長線是否直的？

入學試驗記分(X)

課外活動記分(y)

	55—59	60—64	65—69	70—74	75—79	80—84	85—89	91—94	95—99	110 104	f_y
18—20					2	2					4
15—17				2		3	1				6
12—14				4		6	2		2		14
9—11		1	2		4	4	6	7	3		27
6—8	1			6	2	2	6	1	4	1	41
3—5	1		1	3	5	3		1	2	4	20
1—2		1		1			1	1	1	2	7
f_x	2	2	3	16	33	20	16	15	11	4	102

7, 證實第26圖的 $\bar{r}_{xy}$ 爲.82(參看第 209頁)

(a) 試驗隨 Y 爲轉移的 X 消長線是否直的？

(b) 把這根消長線畫於圖內。

8, Ma 代表記憶測驗的第一次測驗的記分

Mb 代表記憶測驗的第二次測驗之記分

Aa 代表聯想測驗的第一次測驗之記分

Ab 代表聯想測驗的第二次測驗的記分

Ma 和 M' 的相關量爲.60

Mb 和 Aa 的相關量爲.50

M 和 Ab 的相關量爲.55

Ab 和 Ab 的相關量爲.72

求 M 和 A 的減弱校正相關量

答　數

1, $\gamma = -.05$； $PE = .07$

2, (a) $\gamma = .709$； $PE_\gamma = .017$

(b) $Y = .4\times + 24.42$； $X = 1.26Y - 11,66$

$\sigma(\text{esty}) = 1.79$； $\sigma(\text{estx}) = 3.18$

(c) 36.42英寸； 42.42英寸

3, (a) $\gamma = .455$； $PE_\gamma = .024$

(b) 85,4而同時有一個 $PE(\text{esty})$ 爲4,75

4, (a) $P = .187$； $\gamma = .19$， $PE_\gamma = .18$

(b) $R = .09$； $\gamma = .16$

5, $A, C = .63$　　$B, C = .166$

6. (a) $\bar{r}_{yx} = .43$； $\bar{r}_{yx}$(校正後) $= .36$

(b) $\gamma = -.09$；消長線幾乎一定不直

8, $\gamma = .80$

第五章

純淨相關量及多元相關量

1. 淨純相關量及多元相關量之意義

兩組測驗記分的相關系數，不只是代表兩組記分相關的程度，且代表他們的相關的程度，並加上與他們有關係的其他因數間接的影響。因此要測量兩組記分的相關量，必須除去這些難以支配的因數，免其和各組記分發生關係，而加大或減小淨純的 (net) 相關量。現在舉一個例子，表明難以支配的因數對於相關量的影響。設有一羣小孩，他們的年齡是自七歲至十四歲。他們的智力和年歲的相關量以 γ_{ia} 代表之，他們的學校成績和年齡的相關量以 γ_{sa} 代表之，他們的學校成績和智力的相關量以 γ_{is} 代表之，第三個系數 γ_{is} 不只是測量智力對於學校成績之影響，乃是測量智力對於學校成績的影響，加上年齡差別的間接的影響，想要決定智力和學校成績的關係不受年齡因數的影響，必須把年齡差別的影響除去乾淨。有兩種方法可以做到：(1) 選擇同

等年齡的小孩子，(2) 求智力和學校成績的淨純相關量。此種淨純系數，可用符號 $r_{is.e}$，代表之，可視爲同等年齡的小孩子的智力和學校成績的純淨相關量，或視爲智力和學校成績的淨純相關量，而年齡固定不動者，總之，淨純相關係數，可視爲代表兩個變數的淨純關係，同時另一個或幾個可以加大或減小與相關量的變數已經除去，或令之固定不變。

淨純關係除其能爲一種方法而使我們能以之除去擾亂的因數，因此能支配環境外，又能使我們造成一個含有兩三個變數的消長方程式，俾能根據幾種測驗記分，推算另一種測驗記分。消長方程式可供我們推測記分，作一種預測的工具，牠的準確的程度可根據多元相關系數而決定。多元相關系數是下面兩種記分的相關量：(1)一種測驗記分，(2)同種測驗記分(把兩三種有關係的測驗記分，代入消長方程式中，推測另一種測驗記分)，由消長方程式所推出來的。多元相關系數，可視爲兩組記分的相關量。第一組是一種特性(或幾個特性)受一種測驗具測量而得的，第二組是同種特性(或幾個特性)，受許多測驗具測量而其記分合併爲一者。(要了解多元系數，非親自去演算問題不可)。

簡單的說起來，淨純及多元相關量與兩個變數的相關量無異，只是技能及理想略爲推廣些，使問題能够含有三個或更多的變數。

II. 含有三個變數的相關問題

要明瞭淨純及多元相關的方法及其推算的技術，非舉例說明不可。本問題中有三個變數，我們先求純淨及多元相關量，然後再把普通公式，及其方法的其他用途略說一下。

本問題詳見第26表，係取自馬可適教授的研究。(參看 May Mark A, Predicting Academic Success, Journal of Educational Psychology, 923, Vol XIV, 7, pp429—440)。他欲從450個 *Sy a use* 大學一年級學生的智力及學習習慣，來推測他們的學業成績，更進而求其推測的準確程度。學業成就是以學生第一學期終了時所得的學分及榮譽點績為標準。榮譽點績之多寡看在學程上所得的 A, B, C 之數目的多寡而定。譬如 A 算三個榮譽點績，B 算兩個，C 算一個，D 算及格分數，不給以榮譽點績。第一年級學生選讀普通課程的，最多可獲 8個榮譽點績。

智力是用"密勒智力測驗"及"達得讀"填補界說測驗求出。"密勒"測驗包含120個仔目。"達得讀"測驗包含40個仔目，所以最大的"記分"為160，而450個學生的最小的記分為 50，最大的記分為 150。這種記分分配式，很表現出常態的形狀。

對於勤奮努力方面，決定用每星期所費之平均學習時數為標準。至於學習習慣則以訪問表格求之。在第一學期開始及當中，共施行兩次訪問。訪問表格中有問題涉及每週飲食的時數，每週睡眠的時數等等。因此學生知道其全時間的分配，可被核對出來，非只是訪問其學習習慣，這兩次表格的自身相關已經求出來為 .86。可知他們的可靠量是很高，且很適用。

如前所說，這種研究的主要目的，在根據一個學生的學習習慣及智力，（別的因數如健康，人格，現在的程度等等皆很重要，而與榮譽點績之獲得大有關係，正如 *May* 所言。而現在所選擇的兩個因數，不但很重要，且是客觀的，可測量的），推測其榮譽點績之多寡。解算這個問題，必須先求出榮譽點績和智力相關到什麼程度，而同時使每星期的學習時數固定不變。再求榮譽點績和學習時數相關到什麼程度，而同時使智力固定不變。茲以下之步驟推算本問題。本問題的推算法

及材料，詳見第 26 表。

第二十六表

第一步　　包合三個變數的問題

(1) 榮譽點績	(2) 智力	(3) 每週學習時數
$\bar{X}_1=18.5$	$\bar{X}_2=100.6$	$X_3=24$
$\sigma_1=11.2$	$\sigma_2=15.8$	$\sigma_3=6$
$\gamma_{12}=.60$	$\gamma_{13}=.32$	$\gamma_{23}=.35$

第二步……推算孕純相關量

$$\gamma^*_{12.3}=\frac{\gamma_{12}-\gamma_{13}\cdot\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}}=\frac{.60-.32(-.35)}{.9414\times.9367}=802\cdots\cdots\cdots(49)$$

$$\gamma_{13.2}=\frac{\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}}=\frac{.32-.60(-.35)}{.8\times.967}=.707$$

$$\gamma_{23.1}=\frac{\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13}^2}}=\frac{-.35-.32\times.60}{.8\times9474}=-.715$$

第三步……消長方程式

$$X_1=b_{12.3}x_2+b_{13.2}x_3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

或

$$X_1=b_{12.3}X_2+b_{13.2}X_3+K\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

其中之

$$b_{12.3}=\ _{12.3}\frac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{3.13}}\text{及}\ b_{13.2}=\ _{13.2}\frac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{3.12}}\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

第四步……標準差

(1) $\sigma_{1\cdot23}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.2}^2}=11.2\times.8\times.707=6.34\cdots\cdots\cdots(50)$

(2) $\sigma_{2\cdot13}=\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{12.3}^2}=15.8\times.9367\times.5973=8.84$

(3) $\sigma_{3\cdot12}=\sigma_3\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.2}^2}=6\times.9367\times.7072=3.97$

第五步……消長系數及消長方程式

$$b_{12.3}=.802\times\frac{6.34}{8.84}=.57;\quad b_{1.32}=.707\times\frac{6.34}{3.97}=1.13$$

及

$$X_1=.57x_2+1.13x_3$$

或

$$X_1=.57X_2+1.13X_1-66$$

第六步……標準錯誤

$$\sigma(\mathrm{estx}_1)=\sigma_{1.23}=6.34\cdots\cdots(54)$$

$$PE(\mathrm{estx}_1)=.6745\times6.34=4.28\cdots\cdots(55)$$

第七步……多元相關量

$$R_1(23)=\sqrt{1-\underline{(6.34)^2}}\cdots\cdots(56)$$

$$=8.24$$

〔備註：$\gamma_{23.1}$ 不為方程式 $x_1=b_{12.3}x_2+b_{13.2}x_3$ 所需要。若要求 $b_{12.3}$ 及 $b_{13.2}$ 之量只需 $\gamma_{12.3}$ 及 $\gamma_{13.2}$ 已足凡問題之含有三個變數者若欲根據 x_2 及 x_3 之已知量以推算，則只需要兩個淨純相關系數，請參看第二十六表〕

第一步……先把每組記分的均點，σ，及內相關求出來。這些相關量，就是皮爾生的 γ。其推算法，詳見第四章，榮譽點積和智力之相關量寫之為 $\gamma_{12}=.60$。榮譽點積和學習時數之相關量，寫之為 $\gamma_{13}=.32$。智力和學習時數之 γ，寫之為 $\gamma_{23}=-.35$。榮譽點積和學習時數之相關很低，很值得注意。而最值得注意的，還在學習時數和智力之相關為負數 $-.35$。蓋學生愈聰敏，讀書的時候愈少，故有此現象。

第二步……第二步在求榮譽點積和智力的淨純相關量而同時令學習時數固定不動，不生影響。淨純相關寫之為 $\gamma_{12.3}$。求 $\gamma_{12.3}$ 之公式為

(參看第III段之普通公式)

$$\gamma_{12\cdot3}=\frac{\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}}\text{…………〔公式(49)第232頁〕}$$

把 $\gamma_{12},\gamma_{13},\gamma_{23}$ 之量代入上面公式內，即求得 $\gamma_{12\cdot3}=.802$。這個結果，表明若是450個學生每星期學習之時數一樣多，則榮譽點績和智力的相關系數爲 .802.而非如榮譽點績和智力之原有的相關量爲 .60.換句話說，若是各個學生花費學習時間一樣多，則智力和榮譽點績之相關程度高於各個學生花費之學習時數不等的時候。

求榮譽點績和學習時數之淨純相關，而同時令智力變數，固定不動，則有

$$\gamma_{13\cdot2}=\frac{\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}}\text{…………〔公式(49)〕}$$

把 $\gamma_{13},\gamma_{12},\gamma_{23}$，之量代入上面公式內，則求得 $\gamma_{13\cdot2}=.707$，非復如 $\gamma_{13}=.32$.此明示若是此羣學生之智力一樣大，(即謂智力測驗記分一樣大)則榮譽點績和學習時數之淨純相關量大於此羣學生之智力不等之時。

最後之淨純相關系數 $\gamma_{23\cdot1}=-.715$。這個系數爲智力和學習時數之淨純相關量而同時各個學生之榮譽點績一樣多，求這個系數之公式爲

$$\gamma_{23\cdot1}=\frac{\gamma_{23}-\gamma_{12}\gamma_{13}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13}^2}}\text{…………〔公式(49)〕}$$

如同以上兩個淨純系數一樣，我們可以解釋 $\gamma_{23\cdot1}$ 如下。若是各個學生所得之榮譽點績一樣多，則智力和學習時數之淨純相關量大於各

個學生之榮譽點積數目不等之時。因此發現聰明學生反不及天資中等及天資下等的學生勤奮。(因爲 $\gamma_{23}=-.35$) 而且學生愈聰明，需要勤奮以達到學業成就之標準愈少。(因爲 $\gamma 23.1=-.715$)

第三步……三個淨純相關系數已求出了，第三步即是寫出消長方程式。有了消長方程式之後，再根據一個人的智力及每週學習時數，以推測其極可機遇的榮譽點積之數目，包含三個變數的消長方程式之以差數表出者爲〔公式(51)〕

$$x_1=b_{12.3}x_2+b_{13.2}x_3$$

在上面的方程式內，x_1 爲依靠變數，代表榮譽點積，x_2 及 x_3 爲獨立的變數，代表智力及學習時數。(把上面的各式和 $y=b_{12}x_2$ 比較一下若以 x_1 代替 y，x 代替 x_2 則 $y=b_{12}x$ 變爲 $x_1=b_{12}x_2$) 若用記分代替差數，則上面的方程式變爲

$$(X_1-\bar{X}_1)=b_{12.3}(X_2-\bar{X}_2)+b_{13.2}(X_3-\bar{X}_3)$$

行遷項法，則有 $X_1=b_{12.3}\times_2+b_{13.2}X_3+k$(常數)

但必須先把以上方程式的消長系數 $b_{12.3}$ 及 $b_{13.2}$ 求得後。始能應用之。然

$$b_{12.3}=\gamma_{12.3}\frac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{2.13}} \text{及} \ b_{13.2}=\gamma_{13.2}\frac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{3.12}} \text{〔公式(53)〕}$$

我們已有 $\gamma_{12.3}$ 及 $\gamma_{13.2}$ 之量，須再求出 $\sigma 1.23$，$\sigma 2.13$，$\sigma 3.12$ (稱之爲淨純 σ) 之量，即可求出公式內之消長系數。

第四步……淨純 σ 之量，可以下面公式求出之。

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ \sigma_{1.23}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.2}^2} \\ 2.\ \sigma_{2.13}=\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{12.3}^2} \\ 3.\ \sigma_{3.12}=\ _3\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.2}^2} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{〔公式(50)〕}$$

把原有的γ及淨純γ之量，代入公式(50)裏，則求得$\sigma_{1.23}=6.34$，$\sigma_{2.13}=8.84$；$\sigma_{3.12}=3.97$(看第26表注意推算法)

第五步……從淨純σ及淨純γ求出消長系數$b_{12.3}$及$b_{13.2}$之量爲.57及1.13。因此消長方程式可寫爲

$$x_1=.57x_2+1.13x_3$$

若以1.75乘此方程式，則有(榮譽點績數目)=1(智力測驗記分)+2(學習時數)從此可知智力記分及學習時數，決定榮譽點績數目，而智力記分與學習時數之比重爲1:2

以$(X_1-18.5)$代替x_1，以$(X_2-100.6)$代替x_2，以(X_3-24)代替x_3，則消長方程式之以差數表出者，變爲消長方程式之以記分表出者。再行遷項法，則方程式變爲

$$X_1=.57X_2+1.13X_3-66$$

假使已知一個學生之智力記分X_2，及每週學習時數X_3，則根據以上方程式，可推測其第一學期終了時，可獲得榮譽點績若干。假使一個學生之智力記分爲120點，每週學習時數爲20小時，問其第一學期的極能機遇的榮譽點績數目如何？以120代替X_2，以20代替X_3於消長方程式內，則有

$$X_1=.57\times120+1.13\times20-66$$

此即爲極能機遇的榮譽點績數目，而爲此學生所可獲得的。

第六步……如同其他極能機遇的榮譽點績之從消長方程式所推測出者一樣。這種推測，自不能無錯誤。例如X_1從消長方程式$X_1=b_{12.3}\times_2+b_{13.2}X_3+k$所推測出來，推測的標準錯誤爲$\sigma(\text{est.x}_1)$即是$\sigma_{1.23}$。〔請看公式(50)〕。$PE(\text{est.x}_1)$，則等於$.6745\times\sigma(\text{est.x}_1)$。

本問題之推測的標準錯誤爲6.34點，而$PE(\text{est.x}_1)$爲4.28點。是推

測的榮譽點積 25,而有一個 $PE(\text{est.}x_1)$ 4.28 點。即謂這個學生可獲得榮譽點積不小於 21 不大於 29 之機會爲50%，根據消長方程式以推測其他榮譽點積數目。其推測之可靠量，可以同樣的方法求出之。

第七步……解算問題之最後一步，即在求多元相關之系數，平時以R(多元 R 及優越法之 R不可混淆)表示之。多元相關，可界說之爲一種測驗的記分和同種測驗的記分之由消長方程式所推測出來者之相關系數，再說具體一点，R係依靠的變數X_1和獨立的變數X_2X_3等等聯成一組的相關量。求兩個獨立的變數之R 之公式爲

$$R_{1(23)}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1\cdot23}^2}{\sigma_1^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔公式(56)〕$$

本題之 $R_{1(23)}=.824$ 。即謂若把各個學生的極能機遇的榮譽点積數目，都從消長方程式推測出來，則450個推測的記分和450個實在的記分之相關量爲.824。所以多元R明明白白的告訴我們以X_1和X_2及X_3合併起來的相關程度，在本問題上，明明白白的告訴我們以榮譽點積和智力及學習時數合併起來的相關程度。

第二十七表

按γ之量查$\sqrt{1-\gamma^2}$之表

γ	$\sqrt{1-\gamma^2}$	γ	$\sqrt{1-\gamma^2}$	γ	$\sqrt{1-\gamma^2}$
.00	1.0000	.34	.9404	.68	.7332
.01	.9999	.35	.9367	.69	.7238
.02	.9998	.36	.9330	.70	.7141
.03	.9995	.37	.9290	.71	.7642
.04	.9992	.38	.9250	.72	.6940
.05	.9987	.39	.9208	.73	.6834
.06	.9982	.40	.9165	.74	.6726
.07	.9975	.41	.9121	.75	.6614
.08	.9968	.42	.9075	.76	.6499
.09	.9959	.43	.9028	.77	.6380
.10	.9650	.44	.8980	.78	.6238
.11	.9939	.45	.8930	.79	.6131
.12	.9915	.46	.8879	.80	.6000

.13	.9902	.47	.8827	.81	.5721
.14	.9887	.48	.8773	.82	.5578
.15	.9871	.49	.8717	.83	.5426
.16	.9854	.50	.8660	.84	.5268
.17	.9837	.51	.8617	.85	.5103
.18	.9818	.52	.8572	.86	.4931
.19	.9798	.53	.8480	.87	.4750
.20	.9777	.54	.8417	.88	.4560
.21	.9755	.55	.8352	.89	.4359
.22	.9732	.56	.8285	.90	.4146
.23	.9708	.57	.8216	.91	.3919
.24	.9682	.58	.8146	.92	.3918
.25	.9656	.59	.8074	.93	.3676
.26	.9629	.60	.8000	.94	.3412
.27	.9600	.61	.7924	.95	.3122
.28	.9570	.62	.7846	.96	.3122
.29	.9539	.63	.7765	.97	.2800
.30	.9507	.64	.7684	.98	.3431
.31	.9474	.65	.7599	.68	.1990
.32	.9474	.66	.7513	.99	.1411
.33	.9440	.67	.7424	1.00	.0000

3. 淨純及多元相關量之普通公式

1.淨純相關量之普通公式

相關問題含有三個變數者，藉淨純相關量的方法，可求出兩個變數的淨純相關量，而同時令第三個變數，固定不動。若把這個方法引伸之可求出X_1和X_2的相關量，同時使兩個或更多的變數，固定不動，所以淨純相關系致$\gamma_{12\cdot34}$，好像$\gamma_{12\cdot3}$一樣，表示X_1和X_2的相關量，同時把X_3及X_4的影響，摒除乾淨。又相關系數$\gamma_{12.34\cdots\cdots n}$表明$X_1$，和$X_2$的相關量，同時把其他因數的影響，摒除乾淨。

每個淨純相關系數的附數上，皆有一點。點的左邊的兩個數目字，叫做原始的附數，他們代表兩個變數，其相關量是我們所要推求的。點的右邊的數目字，叫做副式的附數，他們各個代表一個變數，其影

響是我們所要摒除的。淨純γ的級數，(*order*)以副式附數的數目決定之。譬如$\gamma_{12\cdot3}$，或$\gamma_{13\cdot2}$，或$\gamma_{23\cdot1}$，都叫做第一級的淨純相關量。而γ_{12}，或γ_{13}或γ_{23}等，都叫做零級系數。(備註：副式附數的次序，不關重要，故$\gamma_{12\cdot34}=\gamma_{12\cdot43}$。但是原始附數的次序，則頗重要。$\gamma_{12}$明示$X_1$為依從變數由$X_2$推測出來的。$\gamma_{21}$則明示$X_2$為依從變數，由$X_1$所推測出來的。而$\gamma_{12}$量，等於$\gamma_{21}$量)。

第n級的淨純相關量的普通公式為：

$$\gamma_{12\cdot34\cdots\cdots n}=\frac{\gamma_{12\cdot34\cdots(n-1)}-\gamma_{1n\cdot23\cdots(n-1)}\gamma_{2n\cdot13\cdots(n-1)}}{\sqrt{1-\gamma^2_{1n\cdot23\cdots(n-1)}}\ \sqrt{1-\gamma^2_{2n\cdot13\cdots(n-1)}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

應用公式(49)，無論何級的淨純相關量，皆可求出。在四個變數的問題裏的$\gamma_{12\cdot34}$，可以下面的公式求出之：

$$\gamma_{12\cdot34}=\frac{\gamma_{12\cdot3}-\gamma_{14\cdot3}\,\gamma_{24\cdot3}}{\sqrt{1-\gamma^2_{14\cdot3}}\sqrt{1-\gamma^2_{24\cdot3}}}$$

觀上面的公式，可知第二級的相關量，須藉第一級的淨純相關量求出。而第一級的淨純相關量，又須藉零級γ求出之。必須把第一級的γ求出後，始能進而求第二級的淨純相關量。總之高級淨純相關量，必須藉低一級的淨純相關量以求之，低一級的淨純相關量，必須藉低兩級的淨純相關量以求之。由此類推，一直到零級相關量為止。(求淨純相關量時，請查第*XXVII*表，求$\sqrt{1-\gamma^2}$的量。換一句話說，求高級γ時，我們必須從零級γ起向上推算去，故多一個變數，演算工夫上，即大大的增加。因為推算繁雜，故着手工作時，必須斟酌佈置。

求任何級的淨純相關量的PE，如同求零級γ的PE一樣。只須把有關係的量，代入公式(26)就得了。

2.任何級的淨純σ之普通公式

使1,2,3,……n個因數的響影固定不變，我們能求出另兩組記分

的相關量，照樣使1,2,3……n個因數固定不變，我們能求出另一組記分的σ。可以第26表內的$\sigma_{1\cdot 23}$為一個例子。淨純標準段$\sigma_{1\cdot 23}$，為X_1的標準段，而同時X_2(智力)及X_3(每週學習時數)的影響完全除去。

任何級的淨純σ的普通公式為：

$$\sigma_{1\cdot 23\cdots n}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13\cdot 2}^2}\sqrt{1-\gamma_{14\cdot 23}^2}\cdots\sqrt{1-\gamma_{1n\cdot 34\cdots(n-1)}^2}$$

……………(50)

這個公式，可用以求包含許多變數的相關問題的淨純σ。若是一個問題包含5個變數，則$\sigma_{1.2345}$可寫為

(1) $\sigma_{1.2345}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{13.2}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{14.23}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{15.23}^2}$

參照公式(50)或倣照(1)，其他淨純σ可寫為：

(2) $\sigma_{2.1345}=\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{23\cdot 1}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{24\cdot 13}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{25\cdot 134}^2}$

(3) $\sigma_{3.1245}=\sigma_3\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{23\cdot 1}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{34\cdot 12}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{35\cdot 123}^2}$

(4) $\sigma_{4.1235}=\sigma_5\sqrt{1-\gamma_{14}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{24\cdot 1}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{34\cdot 12}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{45\cdot 123}^2}$

(5) $\sigma_{5.1234}=\sigma_5\sqrt{1-\gamma_{15}^2}\ \sqrt{-\gamma_{25\cdot 1}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{35\cdot 12}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{45\cdot 123}^2}$

每個淨純σ，測量一個因數的差異趨勢，而同時其他四個因數的影響除去乾淨，或使之固定不變。他們皆為第四級的淨純γ，因為皆有四個副式附數，淨純σ的等級，由他本身的副式附數的數目決定之。和淨純γ一樣。

把副式附數重新排列一下，任何高級淨純σ皆有幾種寫法。例如第二級的淨純σ有兩種寫法：(1) $\sigma_{1.23}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\ \sqrt{1-\gamma_{13\cdot 2}^2}$，已

見於第205頁，(2) $\sigma_{1.32}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{12.3}^2}$。照樣 $\sigma_{2.13}$ 可寫爲

(1) $\sigma_{2.13}=\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1=\gamma_{23.1}^2}$

(2) $\sigma_{2.31}=\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{12.3}^2}$

又 $\sigma_{3.12}$ 可寫爲

(1) $\sigma_{3.12}=\sigma_3\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{23.1}^2}$

(2) $\sigma_{3.21}=\sigma_3\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.2}^2}$

淨純 γ 的互換(alternate)的形式，可以校對演算上的錯誤。而且有了他們，即無須推算淨純 γ 的用不到的。所以用 $\sigma_{2.13}$ 及 $\sigma_{3.12}$ 的第二種形式，就推算 σ 而言，$\gamma_{23.1}$ 是用不着的。$\gamma_{23.1}$ 既不爲問題所必須，則大可不必求出，(參看第202頁)。在三個變數問題裏，我們所需以寫出消長方程式的，只是兩個淨純 γ。

任何高級的互換形式的數目，恃乎副試附數所能有的 *Petmutation* 的數目。我們知道第二級的 σ 有兩種寫法，$\sigma_{1.23}$ 及 $\sigma_{13.2}$。照樣任何第三級的 σ 有六種寫法，如 $\sigma_{1.234}$，$\sigma_{1.324}$，$\sigma_{1.324}$，$\sigma_{1.342}$，$\sigma_{1.423}$，$\sigma_{1.432}$。任何第四級的 例如 $\sigma_{1.2345}$，有24種寫法。任何第五級的 σ，例如 $\sigma_{1.23456}$，有120種寫法。

所幸需要這種形式不多，惟必須選擇所需要的形式。若審慎選擇淨純的公式，則包含三個以上變數的問題，所需要的淨純 γ 的數目，可以減少。在長問題裏，減少淨純 γ 的數目很要緊，因爲可以免掉演算上的繁瑣。在包含四五個變數的問題裏，淨純 γ 爲吾人所需要以推算少數的淨純 γ 者，在217－220頁內一一舉出。讀者解算問題時可參看之至於包含五個以上變數的問題，其所需要 γ 可參照217－220頁內的公式．

3.消長方程式及消長系數之普通公式

消長方程式，表白一個依靠的變數 X_1 和一羣獨立的變數 $X_2, X_3, X_4, \cdots\cdots Xn$ 的關係。其以差數表白出來的如：

$$x_1 = b_{12.34\cdots n}x_2 + b_{13.24\cdots n}x_3 + b_{14.23\cdots n}x_4 + \cdots b_{1n.23\cdots(n-1)}xn \quad (51)$$

其以記分表白出來的爲：

$$X_1 = b_{12.34\cdots n}X_2 + b_{13.24\cdots n}X_3 + \cdots\cdots b_{1n.23\cdots(n-1)}Xn + K \cdots\cdots \quad (52)$$

根據獨立的變數推測X_1時，消長系數 $b_{12.34\cdots n}, b_{13.24\cdots n}$，等等，給各個獨立的變數以相當的重量 (Weight or Value) 又消長系數，表示各個獨立的變數有如許重量，以決定不受其他變數的影響的 X_1量。故從消長方程式上，卽能指出每種測驗記分，在決定一種測驗記分上，(依靠的變數)佔如何重要的地位。

在消長方程式內的消長系數，可以下面的公式推算之：

$$b_{12.34\cdots\cdots n} = \gamma_{12.34\cdots\cdots n}\frac{\sigma_{1.234\cdots n}}{\sigma_{2.134\cdots n}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (53)$$

若是問題只包含三個變數，則消長方程式爲$X_1 = b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3 + k$。消長系數 $b_{12.3}$及 $b_{13.2}$，皆爲第一級的 b。如同 $\gamma_{12.3}$ 及 $\gamma_{13.2}$ 皆爲第一級的淨純 γ 一樣。$b_{12.3} = \gamma_{12.3}\dfrac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{2.13}}$，而$b_{13.2} = \gamma_{13.2}\dfrac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{31.2}}$。(見第3頁及第26表)消長方程式包含三個以上的變數的，可參照公式(53)寫出來。他們的消長系數，可從公式(53)推出來在五個變數的問題裏，消長方程式爲：

$$X_1 = b_{12.345}X_2 + b_{13.245}X_3 + b_{14.235}X_4 + b_{15.234}X_5 + k$$

而其消長系數(皆爲第三級的)爲：

$$b_{12.345} = \gamma_{12.345}\frac{\sigma_{1.2345}}{\sigma_{2.1345}}$$

$$b_{13.245} = \gamma_{13.245}\frac{\sigma_{1.2345}}{\sigma_{3.1245}}$$

$$b_{14\cdot235}=\gamma_{14\cdot235}\,\frac{\sigma 1.2345}{\sigma 4.1235}$$

$$b_{15\cdot234}=\gamma_{15\cdot234}\,\frac{\sigma 1.2345}{\sigma 5.1234}$$

所以欲求出這些消長系數，必須先求出第三級的淨純γ，及必要的淨純σ。把他們求出後，代入以上方程式內，即求出 b 了。

4.推測的標準錯誤及機錯之普通公式

由消長方程式所推測出來的 X_1 記分，有一個推測的標準錯誤，σ(es.tx_1)，測量錯誤之由應用推測的記分代替實在的記分而生者，σ(est.x_1)可自$\sigma 1.234\cdots\cdots n$ 的公式求出之：

$$\sigma(\text{est.}x_1)=\sigma 1.234\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (54)$$

$$PE(\text{est.}x_1)=.6745\sigma 1.234\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (55)$$

因爲$\sigma 1.23\cdots n$必須求出來，以求消長系數，所以σ(est.x)不須另外求出，在第26表內推測出來的榮譽點積數目的σ(est.x_1)爲6.34點，而其PE(estx_1)爲4.27點。故極可機遇的榮譽點積數目，而爲任何學生所可獲得的其錯誤爲4點或小於4點的機會爲均等。任何推測出來的榮譽點積數目，其錯誤決不大於4×4(16)點。

若用消長方程式以推測X_1記分，可用最小平方(least Square)法，(參看 yule 的書第 231 頁)證明推測的標準錯誤(或機錯)是最小的。故由消長方程式所推測出來的X_1的量，可認之爲最好的推測。而這種推測，係根據直線方程式之包含幾個變數者。消長方程式：

$X_1=.57X_2+1.13X_3-66$(參看第206頁)表示其本身的意義很明顯假定 X_1和X_2,X_3和X_1,X_2和 X_3 的關係，都是直的，則根據這個方程式推測X_1,(榮譽點積)較之根據別的方程式推測X_1,錯誤小些。

5. R之普通公式(多元相關系數)

一個依靠的變數X_1和$(N-1)$個獨立的變數X_2 X_3……Xn的相關量，以下面的公式求之：

$$R_{1(23\cdots\cdots n)}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1\cdot 23\cdots n}^2}{\sigma_1^2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(56)$$

其中之$R_{1(23\cdots\cdots n)}$爲多元相關系數；σ_1爲依靠的記分分配式X_1的σ；$\sigma_{1\cdot 23\cdots\cdots n}$等於推測的標準錯誤，(參看公式 54.)。若只有三個變數，多元相關系數爲 $R_{1(23)}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1\cdot 23}^2}{\sigma_1^2}}$。若有五個變數，則$R_{1(2345)}=\sqrt{1-\frac{\sigma_{1\cdot 2345}^2}{\sigma_1^2}}$。若變數有6個，7個，或更多的，可參照公式(56) 以求R 的公式。

因爲用消長方程式以推測X記分，推測的錯誤爲最小，故多元相關系數R，係已有的記分X_1 和從消長方程式之含有幾個獨立的變數所推測出來的記分X_1的最大相關量。R 很有用處，能表明幾組記分合併後可代表實在的記分X_1到什麼程度。R 總爲正數，不拘消長方程式內的符號怎樣。所以雛形錯誤，並不彼此相消，反來累積。因此R 的 PE (其公式和乘積r的PE公式同)不是系數的實 Co-efficeint of Validity 的一個好度量。要想試驗已得的R的實與否。必須把他和另一個 R 之得自數目等多的記分及數目等多的變數而諸變數彼此無關者，即是 R 之由抽選雛形所生之變動而生者，比較一下。求這種R 的公式爲：

$$R=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(57)$$

其中的n，代表變數的數目；N代表記分的數目。(參看 Rosenow, Curt: The Analysis of mentel function, Psy, monographs, 1917, Vol XXIV5, P20)要想證明這個公式的用途，請以第24 表內的三個變數的

問題，爲一個例子。這個問題的$n=3$，$N=450$。把N及n的量，代入公式(57)內，求得$R=.07$這種結果，表明已得的R.824之"的實"的程度很高。

若把$\sigma_{1.23\cdots n}$以零級γ及淨純γ表白出來，(參看公式50)代入公式，(56)裏，則$R_1(_{23\cdots\cdots n})$的普通公式變爲：

$$R_1(_{23\cdots\cdots n})=\sqrt{1-[(1-\gamma^2_{12})(1-\gamma^2_{13.2})(\cdots)(1-\gamma^2_{1n.23\cdots(n-1)})}\cdots\cdots\cdots\cdots(58)$$

又因爲高級σ有幾種寫法，而寫法種類的多寡，恃乎其級數的高低。故有許多互換的形式以求R。因此則有一種校對的方法，在三個變數的問題裏，R可寫爲：

$$R_1(_{23})=\sqrt{1-[(1-\gamma^2_{12})(1-\gamma^2_{13.2})]}。$$

$$\text{或}\ R_1(_{32})=\sqrt{1-[(1-\gamma^2_{13})(1-\gamma^2_{12.3})]}。$$

在四個變數的問題裏，R可照樣寫爲：

$$R_1(_{234})=\sqrt{1=[(1-\gamma^2_{12})(1-\gamma^2_{13.2})(1-\gamma^2_{14.23})]}。$$

並可以下面的方程式校正之。

$$R_1(_{342})=\sqrt{1-[(1-\gamma^2_{13})(1-\gamma^2_{14.3})(1-\gamma^2_{12.34})]}。$$

6.公式之用於相關問題者(a)包含四個變數的問題(b)包含五個變數的問題

在多元相關問題上，主要的任務，即在用最少的時間及推算工夫求出消長方程式，以表白依崇的變數和獨立的變數的關係。要達到這，

種目的，同時有三個以上的變數在手；則當單簡的計劃，即在先寫下消長方程式所需要的公式，以後再進而求淨純 γ 及高級 σ 而為吾人所需要以推算消長系數者。用最少的推算工夫而能求得含有四五個變數的消長方程式的公式，舉之如下，所有的零級 γ，須先求出，然後再進而求淨純相關量。

(a) 公式為包含四個變數的問題所需要者：

(1) 消長方程式： 消長方程式含有四個變數者，參照公式(52)可寫之如下：

$$X_1=b_{12.34}X_2+b_{13.24}X_3+b_{14.23}X_4+K$$

(2) 消長系數. (1)內的三個消長系數，可以公式(53)求之。

$$b_{12\cdot34}=\gamma_{12\cdot34}\frac{\sigma_{1.234}}{\sigma_{2.134}}$$

$$b_{13\cdot24}=\gamma_{13\cdot24}\frac{\sigma_{1.234}}{\sigma_{3.124}}$$

$$b_{14\cdot23}=\gamma_{14\cdot23}\frac{\sigma_{1.234}}{\sigma_{4.123}}.$$

欲求出相關系數，必須先求出 3 個第二級的淨純 γ 及四個第四級的 σ

(3) 淨純 r

(a) 求

$$\gamma_{12\cdot34}=\frac{\gamma_{12\cdot3}-\gamma_{14\cdot3}\gamma_{24\cdot3}}{\sqrt{1-\gamma_{14\cdot3}^2}\sqrt{1-\gamma_{24\cdot3}^2}};$$

(b) 求

$$\gamma_{13\cdot24}=\frac{\gamma_{13\cdot2}-\gamma_{14\cdot2}\gamma_{34\cdot2}}{\sqrt{1-\gamma_{14\cdot2}^2}\sqrt{1-\gamma_{34\cdot2}^2}};$$

(c) 求

$$\gamma_{14\cdot23}=\frac{\gamma_{14\cdot2}-\gamma_{13\cdot2}\gamma_{34\cdot2}}{\sqrt{1-\gamma_{13\cdot2}^2}\sqrt{1-\gamma_{34\cdot2}^2}}。$$

為(a) 必須求出三個第一級的淨純 γ 如下：

$$\gamma_{12.3}=\frac{\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}};$$

$$\gamma_{14.3}=\frac{\gamma_{14}-\gamma_{13}\gamma_{34}}{\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{34}^2}};$$

$$\gamma_{24.3}=\frac{\gamma_{24}-\gamma_{23}\gamma_{34}}{\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{34}^2}};$$

為(b) 必須求出三個第一級的淨純 γ 如下：

$$\gamma_{13.2}=\frac{\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}}$$

$$\gamma_{14.2}=\frac{\gamma_{14}-\gamma_{12}\gamma_{24}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{24}^2}}$$

$$\gamma_{34.2}=\frac{\gamma_{34}-\gamma_{23}\gamma_{24}}{\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{24}^2}}$$

為(c) 所需要者已在(a)及(b)內求出來了。

〔注意至少有九個淨純 γ 必須求出來。三個第二級的，6個第一級的。這九個第一級及第二級的 γ，連同6個零級 γ，合共有15個相關系數，是吾人所必要的〕。

(4) 標準差. 四個第三級的 σ，可從下面的公式求出。其中所包含的淨純 γ 之量，已在(3)內求出了。

$$\sigma_{1.234}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.2}^2}\sqrt{1-\gamma_{14.23}^2},$$

$$\sigma_{2.134}=\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{24.3}^2}\sqrt{1-\gamma_{12.34}^2},$$

$\sigma_{2.134}$(即為 $\sigma_{2.341}$)

$$\sigma_{3.124}(\text{即為}\sigma_{3.241})=\sigma_3\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{34.2}^2}\sqrt{1-\gamma_{13.24}^2},$$

$$\sigma_{4.123}(\text{即為}\sigma_{4.321})=\sigma_4\sqrt{1-\gamma_{34}^2}\sqrt{1-\gamma_{42.3}^2}\sqrt{1-\gamma_{14.23}^2},$$

消長系數的量。此時可以求出來。代入消長方程式，

(5) 推測的標準錯誤. $\sigma(\text{est}x_1)$……從公式(54)及公式(55)

找出

$$\sigma(est\ x_1)=\sigma_{1.234}$$[看(4)內的$\sigma_{1.234}$之量]

$$PE(est\ x_1)=.6745\sigma(est\ x_1)$$

(6)多元相關系數 R　在四個變數問題裏多元相關R可寫之爲 $R_{1(234)}$，并可應用公式(56)求出。

$$R_{1(234)}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1.234}}{\sigma_1^2}}$$

這個公式　又可寫之爲

$$R_{1(234)}=\sqrt{1-\left[\left(1-r^2_{14}\right)\left(1-r^2_{13.2}\right)\left(1-r^2_{14.3}\right)\right]},$$

或爲　$$R_{1(234)}=\sqrt{1-\left[\left(1-r^2_{13}\right)\left(1-r^2_{14.3}\right)\left(1-r^2_{1\text{-}.34}\right)\right]},$$

(b)公式爲包含五個變數問題所需要者

(1)消長方程式

$$X_1=b_{12.345}X_2+b_{13.245}X_3+b_{14.235}X_4+b_{15.234}X_5+K \quad (52)$$

(2)消長系數

$$b_{12.345}=r_{12.345}\frac{\sigma_{1.2345}}{\sigma_{2.1345}},\qquad b_{14.235}=r_{14.235}\frac{\sigma_{1.2345}}{\sigma_{4.1235}} \quad (53)$$

$$b_{13.\text{-}45}=r_{13.245}\frac{\sigma_{1.2345}}{\sigma_{3.1245}},\qquad b_{15.\ 34}=r_{15.234}\frac{\sigma_{1.\text{-}345}}{\sigma_{5.1234}}$$

(3)淨純 r　應用公式(49)求出 22 個淨純r如下

(a)求r12 345或寫之爲r12 453則

$$r_{12.453}=\frac{r_{12.45}-r_{13.45}r_{23.45}}{\sqrt{1-r^2_{13.45}}\sqrt{1-r^2_{23.45}}}$$

求這個淨純 r 必須先求出 3 個第二級淨純 r 例如

(b)求r13 245或寫之爲r13 452則

$$r_{13.4.2}=\frac{r_{13.45}-r_{12.45}r_{23.45}}{\sqrt{1-r^2_{12.45}}\sqrt{1-r^2_{23.45}}}$$

求r13 452所需要之低一級的淨純 r 已在(a)內求出來了

$$\gamma_{12.45}=\frac{\gamma_{12.4}-\gamma_{15.4}\gamma_{25.4}}{\sqrt{1-\gamma^2_{15.4}}\sqrt{1-\gamma^2_{25.4}}}$$

$$\gamma_{13.45}=\frac{\gamma_{13.4}-\gamma_{15.4}\gamma_{35.4}}{\sqrt{1-\gamma^2_{51.4}}\sqrt{1-\gamma^2_{35.4}}}$$

$$\gamma_{23.45}=\frac{\gamma_{23.4}-\gamma_{25.4}\gamma_{35.4}}{\sqrt{1-\gamma^2_{25.4}}\sqrt{1-\gamma^2_{35.4}}}$$

要想求以上的三個第二級的 γ 必須先求出六個第一級的 γ 例如

$\gamma_{15.4}$	$\gamma_{13.4}$	$\gamma_{12.4}$
$\gamma_{23.4}$	$\gamma_{25.4}$	$\gamma_{25.4}$

(c) 求 $\gamma 14.235$ 如下

$$\gamma_{14.235}=\frac{\gamma_{14.23}-\gamma_{15.23}\gamma_{45.23}}{\sqrt{1-\gamma^2_{15.23}}\sqrt{1-\gamma^2_{45.23}}}$$

要想求這個 γ 必須先求出三個第二級的淨純 γ 例如

$$\gamma_{14.23}=\frac{\gamma_{14.2}-\gamma_{13.2}\gamma_{34.2}}{\sqrt{1-\gamma^2_{13.2}}\sqrt{1-\gamma^2_{34.2}}}$$

$$\gamma 15.23=\frac{\gamma 15.2-\gamma 13.2\gamma 35.2}{\sqrt{1-\gamma^2_{15.2}}\sqrt{1-\gamma^2_{35.2}}}$$

$$\gamma 45.23=\frac{\gamma 45.2-\gamma 34.2\gamma 35.2}{\sqrt{1-\gamma^2_{34.2}}\sqrt{1-\gamma^2_{35.2}}}$$

要想求出來這些 γ 必須先求出六個第一級的 γ 例如

$\gamma 14.2$	$\gamma 13.2$	$\gamma 15.2$
$\gamma 34.2$	$\gamma 35.2$	$\gamma 45.2$

(*d*) 求 γ 15.234 如下

$$\gamma_{15.234}=\frac{\gamma_{15\cdot 23}-\gamma_{14\cdot 23}\,\gamma_{45\cdot 23}}{\sqrt{1-\gamma^2_{14\cdot 23}}\,\sqrt{1-\gamma^2_{45\cdot 23}}}$$

求這個 γ 所需要之低一級的 γ 已在

(*c*) 內求出來了

〔注意……我們至少必須求出四個第三級的γ,6個第二級的γ,12個第一級的γ,共計22個γ〕

(4) 標準差.……五個第四級的σ可從下面的公式求出之，其中所包含之淨純γ,已在(3)內求出來了。

$$\sigma_{1.2345}=\sigma_1\sqrt{1-\gamma^2_{12}}\sqrt{1-\gamma^2_{13\cdot 2}}\sqrt{1-\gamma^2_{14\cdot 23}}\sqrt{1-\gamma^2_{15\cdot 234}}$$

$$\sigma_{2.1345}(\text{即爲}\ \sigma_{2.4531})=\sigma_2\sqrt{1-\gamma^2_{24}}\sqrt{1-\gamma^2_{25\cdot 4}}\sqrt{1-\gamma^2_{23\cdot 45}}\sqrt{1-\gamma^2_{12\cdot 345}}$$

$$\sigma_{3.1245}(\text{即爲}\ \sigma_{3.4521})=\sigma_3\sqrt{1-\gamma^2_{34}}\sqrt{1-\gamma^2_{35\cdot 4}}\sqrt{1-\gamma^2_{23\cdot 45}}\sqrt{1-\gamma^2_{13\cdot 245}}$$

$$\sigma_{4.1235}(\text{即爲}\ \sigma_{4.2351})=\sigma_4\sqrt{1-\gamma^2_{24}}\sqrt{1-\gamma^2_{34\cdot 2}}\sqrt{1-\gamma^2_{45\cdot 23}}\sqrt{1-\gamma^2_{14\cdot 235}}$$

$$\sigma_{5.1234}(\text{即爲}\ \sigma_{5.2341})=\sigma_5\sqrt{1-\gamma^2_{25}}\sqrt{1-\gamma^2_{35\cdot 2}}\sqrt{1-\gamma^2_{45\cdot 23}}\sqrt{1-\gamma^2_{15\cdot 234}}$$

(5) 推測的標準錯誤. $\sigma(est.x_1)$

$\sigma(est.x_1)=\sigma 1.2345$〔請看(4)$\sigma$內1.2345之式〕……………(54)

$PE(est.x_1)=.6745\sigma(est.x_1)$……………………………(55)

(6) 多元相關系數. R

$$R_1(2345)=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1.2345}}{\sigma_1^2}}\quad\cdots\cdots(56)$$

亦可寫之爲

$$R_{1(2345)}=\sqrt{1-\left[\left(1-\gamma^2_{12}\right)\left(1-\gamma^2_{13\cdot2}\right)\left(1-\gamma^2_{14\cdot23}\right)\left(1-\gamma^2_{15\cdot234}\right)\right]}$$

而以下面的方程式校對之

$$R_{1(2345)}=\sqrt{1-\left[\left(1-\gamma^2_{14}\right)\left(1-\gamma^2_{15\cdot4}\right)\left(1-\gamma^2_{12\cdot45}\right)\left(1-\gamma^2_{13\cdot245}\right)\right]}$$

IV.一個多元相關問題含有四個變數

在第II段內，已經說過：案照一個學生的智力(X_2)及其每週學習時數(X_3)，可以推測他的榮譽點積(X_1)來。從三個變數的消長方程式，推測一種記分，這種推測出來的記分的PE ($est_x x_1$)，已經找出爲4.28點。而多元相關系數$R_{1(23)}$表示推測出來的記分，能代表實在的記分到所能到的程度，已找出爲.824設於變數X_2及X_3外，再添一個因數X_4.再設這個因數爲中學學業成績。(看May, Predicting Academic success. j. of Edu. Psy. vol XIV, PP 434—436)因此即有三個獨立的變數，可以從之推測依靠的變數，榮譽點積。遂有一個問題發生：這個新添的因數，能使我們推測這個學生的大學學業成績較準確多少？

這個問題的答覆，可求之於第28表，該表對於這個問題，解算得很詳盡，并且遵照第III段六內的計劃，解算四個變數的問題，至於推算的程序，方法，及特別重要之點，須另加討論，可看以下各節。

各組記分的均點，σ,及六個零級內相關，須先求出來，對於這6個內相關，雖沒有詳說，但實爲解算多元相關問題最繁難的一部份，因爲對於每個γ,必須造出一個相關表來。

(1)現在順着第216頁上(6)內所舉出的公式，向前討論。(參看第二十八表)在推算任何淨純γ之前，須先將消長方程式寫下，再從之以決定何種淨純γ及高級σ爲我們所需要的。

(2)從消長方程式，知道我們需要三個第二級的淨純 γ，例如 $\gamma_{12\cdot34}$，$\gamma_{13\cdot24}$，及 $\gamma_{14\cdot23}$：4個第三級的 σ，例如 $\sigma_{1\cdot234}$，$\sigma_{2\cdot134}$，$\sigma_{3\cdot124}$，及 $\sigma_{4\cdot123}$ 以確定消長方程式內的恆數。凡淨純 γ 爲消長方程式所需要的，皆推算出來。

(3)要想求 $\gamma_{12\cdot34}$，必須求出三個第一級的淨純 γ，例如 $\gamma_{12\cdot3}$，$\gamma_{14\cdot3}$，及 $\gamma_{24\cdot3}$。要想求 $\gamma_{13\cdot24}$，必須求出三個第一級的淨純，γ，例如 $\gamma_{13\cdot2}$ $\gamma_{14\cdot2}$，及 $\gamma_{34\cdot2}$。對於最後的淨純 $\gamma_{14\cdot23}$，必須求出第一級的 γ，因其所需要的已經求出來了。所以至少需要9個淨純 γ

淨純 $\gamma_{12\cdot34}$，表示(1)榮譽點績和(2)智力的淨純相關量，同時(3)學習時數及(4)中學均分的影響，除去乾乾淨淨。照樣 $\gamma_{13\cdot24}$ 表示(1)榮譽點績和(3)學習時數的淨純相關量，而同時使(2)智力及(4)中學均分，固定不變。第一個第二級的淨純 $\gamma_{12\cdot34}=.764$ 小於 $\gamma_{12\cdot3}=.802$ 甚微。而第二個淨純 $\gamma_{13\cdot24}=.676$ 又小於 $\gamma_{13\cdot2}=.707$ 甚微，有了這些比較，才知道苟令智力固定不變，中學校的分數對於榮譽點績和學習時數的純粹相關量影響甚微。若學習時數不變，中學校分數對於榮譽點績和智力純粹相關量的影響亦甚微，但須注意者，即是(1)榮譽點績和(4)中學均分的零級相關系數 1 爲 .40，而 $\gamma_{14\cdot2}=.246$，$\gamma_{14\cdot3}=.387$，及 $\gamma_{14\cdot23}=.088$。就 $\gamma_{14\cdot23}=.088$ 而論，可知所有的榮譽點績，和中學均分的關係皆受(2)智力與(3)學習時數的影響，不過受智力的影響大，受學習時數的影響小。

(4)應用第216頁上(6 內的公式，即無須另求其他淨純 γ，便可推算四個第三級的 σ，而爲消長系數所需要者，淨純 γ（參看第238頁）淨純 σ 例如 $\sigma_{1\cdot234}$，$\sigma_{2\cdot134}$ 等等，皆爲其原始附數所指明的記分分配式的差異趨勢，而同時其他三個因數（副二附數）的影響，除去乾淨。譬如

$\sigma 1.234=6.31$，$\sigma_1=11.2$ 即謂450個學生當中，苟各個學生的(2)智力，(3)學習時數，及(4)中學均分完全相同，則榮譽點積分配式的σ，將等於σ_1之半，σ_1是這羣學生的榮譽點積的差異趨勢，而其智力，學習時數，平均分數皆彼此不等。

把已求得的淨純量及量，連合起來，即可求消長系數。消長系數求出後，再代入消長方程式內求$x_1=.55x_2+1.07x_3+.083x_4$。若以12.5乘此方程式，則得(榮譽點積的數目)$=7$(智力測驗記分)$+13$(每週學習時數)$+1$(中學均分)。若消長方程式以記分形式表出之，則有

$$X_1=.55X_2+1.07X_3+.083X_4-69$$

就這個消長方程式而論，學習時數的重量，必須大於智力記分的重量兩倍大於中學均分的重量13倍，方能決定一個學生第一學期終了時的極能獲遇的榮譽點積數目。可知中學均分和其他兩個因數相較，其對於榮譽點積的影響甚小。

(5)中學校分數不能改進榮譽點積數目之推測，可見之於$PE(estx_1)$之大小，根據現有的方程式，推測榮譽點積，其推測的PE為4.26點。根據消長方程式之不含有中學校分數者(參看第240頁)推測榮譽點積，其推測的$PE(estx_1)$為4.28點，可知根據一個學生的智力及每週學習時數，推測其所能獲得之榮譽點積，而推測之錯誤，較之另外加上一個變數，中學校均分，只大一點，故多加一個變數，再構成一個消長方程式，其工作無大價值。

(6)多元相關系數$R_1(234)$為.823，而$R_1(23)$為.824。觀此可知中學校分數對於榮譽點積的推測的可靠量，無很大的貢獻。

苟把因數一一分別或合併試驗之，再把榮譽點積的推測的可靠量一一比較之，很有趣味，似此多元消長方程式之預測的價值，而為

$\sigma(est._1)$的大小所表示的，便一目了然，把因數一一分別或合併試驗，所得着之推測的標準錯誤及相關系數如下：

依據的變數 (榮譽點績)	$\sigma(est.x_1)$	相關系數
$X_1=.43X_2-24.78$	8.96	$\gamma_{12}=.60$
$X_1=.60X_3+4.1$	10.61	$\gamma_{13}=.32$
$X_1=.57X_2+1.13X_3-66$	6.34	$R_1(_{23})=.824$
$X_1=.55X_2+1.07X_3+.083X_4-696.31$		$R_1(_{234})=.826$

令我們注意的地方，卽在當 X_2和X_3 合併試驗時較之各個變量分別試驗時，$\sigma(est.x_1)$變小，相關量變大，把X_4 加入公式後，推測的標準錯誤及相關系數受改變極微。再增加其他變數，把淨純及多元相關的公式展長，已得的$\sigma(est.x_1)$或還可以減小，已得的 R 或還可以加大。

在決定加入一個變數或幾個變數于消長方程式之前，新方程式的預測的價值，必須由 $\sigma(est.x)$ 或R 決定之，因爲有了他們，才能知道新加的一個或數個變數的影響如何，才能知道$\sigma(est.x_1)$ 或減小不少，R 或加大不少，値得額外推算的功夫。以本問題而論，$\sigma(est.x_1)$或$R_1(234)$，明白告訴我們，中學校均分對于含有智力及每週學習時數的消長方程式的"預測"的價值，增高極微。

V. 淨純及多元相關量之價值及用途

(1) 淨純相關量在分析上及因果推考上的價值及用途

淨純相關法的功用，在分析每個因數對於整個所盡的本份(Part)，

因此能使我們求出兩組記分的淨純相關量，而同時把其他一個或幾個因數的影響除去乾淨。現在舉 *Cyril Burt* 的工作 (參看 Burt Cyril, men al and Scholastic test 1921, PP 180－184) 做一個例子，證明淨純相關的用途。*Burt* 欲求出一個小孩子的智年，由 *Binet* 測驗所求得的，影響他的學校作業到什麼程度。他抽選300個小孩子，從七歲到十四歲，把他們各個的(1)*MA* 找出來，又把(2)學校成績由教育測驗所獲得而經教員的校正的及(3)實足年齡都找出來。找出 *M A* 和學業成績的相關係數 γ_{12} 為.91.把實足年齡固定不變，找出 *MA* 和學業成績的淨純 $\gamma_{12\cdot3}$ 為 .68.第二個結果 .68 有兩種意思：第一，他表明實足年齡對於*MA*和學校作業的相關量有很大的影響。所以γ_{12} 很龐大。$\gamma 12$ 很龐大的現象，由于 *MA* 與學校成績皆和實足年齡有同時增長的傾向。所以年齡被依靠的地方很大，而產出一個龐大的 γ_{12}. 第二；$\gamma_{12\cdot3}$＝.68表明小孩的實足年齡等大時，有一個真關係存在於智年和學業成績之間。換言之，智年 (*M.A.*) 對于學生的學業成績，實在是一個重要的因數，不管實足年齡怎樣

第二十八表

推算包含四個變數的相關問題

推算$\bar{X}$，σ，及內相關量

1. 築學點績	2. 智力	3. 學習時數	4. 中學校均分
$\bar{X}_1=18.5$	$\bar{X}_2=100.0$	$\bar{X}_3=24$	$\bar{X}_4=79$
$\sigma_1=11.2$	$\sigma_2=15.8$	$\sigma_3=6$	$\sigma_4=7.5$

$\gamma_{12}=.60$	$\gamma_{23}=-.35$	$\gamma_{34}=.11$
$\gamma_{13}=.32$	$\gamma_{24}=.30$	
$\gamma_{14}=.40$		

案照第 216 頁之計劃向前演算

(1) 消長方程式

$$X_1=b_{12\cdot34}X_2+b_{13\cdot24}X_3+b_{14\cdot23}X_4+K \quad \cdots\cdots(52)$$

(2) 消長系數

$$b_{12\cdot34}=\gamma_{12\cdot34}\frac{\sigma_{1\cdot234}}{\sigma_{2\cdot134}} \quad \cdots\cdots(53)$$

$$b_{13\cdot24}=\gamma_{13\cdot24}\frac{\sigma_{1\cdot234}}{\sigma_{3\cdot124}}$$

$$b_{14\cdot23}=\gamma_{14\cdot23}\frac{\sigma_{1\cdot234}}{\sigma_{4\cdot123}}$$

第二十八表……續

(3)淨純γ

(a) 求

$$\gamma_{12\cdot 34}=\frac{\gamma_{12\cdot 3}-\gamma_{14\cdot 3}\gamma_{24\cdot 3}}{\sqrt{1-\gamma_{14\cdot 3}^2}\sqrt{1-\gamma_{24\cdot 3}^2}}$$

為(a)求三個第一級的淨純γ

$$\gamma_{12\cdot 3}=\frac{\gamma_{12}-\gamma_{13}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{32}^2}}=\frac{.60-.32(-.35)}{.9474\times .9367}=.802$$

$$\gamma_{14\cdot 3}=\frac{\gamma_{14}-\gamma_{13}\gamma_{34}}{\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{34}^2}}=\frac{.40-.32\times .11}{.9474\times .9939}=.387$$

$$\gamma_{24\cdot 3}=\frac{\gamma_{24}-\gamma_{23}\gamma_{34}}{\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{34}^2}}=\frac{.36-(-.35)\times .11}{.9317\times .9939}=.428$$

把第一級的淨純γ之量代入，求得

$$\gamma_{12.34}=\frac{.802-.387\times .428}{.9208\times .9028}=.764$$

(b) 求

$$\gamma_{13\cdot 24}=\frac{\gamma_{13\cdot 2}-\gamma_{14\cdot 2}\gamma_{34\cdot 2}}{\sqrt{1-\gamma_{14\cdot 2}^2}\sqrt{1-\gamma_{34\cdot 2}^2}}$$

為(b)求三個第一級的淨純γ

$$\gamma_{13\cdot 2}=\frac{\gamma_{13}-\gamma_{12}\gamma_{23}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{23}^2}}=\frac{.32-.600(-.35)}{.7\times .9367}=.707$$

$$\gamma_{14\cdot 2}=\frac{\gamma_{14}-\gamma_{12}\gamma_{24}}{\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{24}^2}}=\frac{.40-.60\times .36}{.8\times .9330}=.246$$

$$\gamma_{34\cdot 2}=\frac{\gamma_{34}-\gamma_{23}\gamma_{24}}{\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{24}^2}}=\frac{.11-(-.35)\times .36}{.9367\times .9330}=.270$$

把第一級的淨純γ之量代入求得

$$\gamma_{13.24}=\frac{.707-.246\times .27}{.9682\times .9629}=.676$$

(c) 求

$$\gamma_{14\cdot 23}=\frac{\gamma_{14\cdot 2}-\gamma_{13\cdot 2}\gamma_{34\cdot 2}}{\sqrt{1-\gamma_{13\cdot 2}^2}\sqrt{1-\gamma_{34\cdot 2}^2}}$$

求$\gamma_{14.23}$所需要之低一級的淨純γ已經求出來了。

把第一級的淨純γ之量代入求得

$$\gamma_{14.23}=\frac{.246-.707\times .27}{.7042\times .9629}=.088$$

第二十八表……續

(4) 標準差

$$\sigma 1.234=\sigma_1\sqrt{1-\gamma^2_{12}}\sqrt{1-\gamma^2_{13\cdot2}}\sqrt{1-\gamma^2_{14\cdot23}}=11.2\times.8\times.7072\times.9968=6.31 \quad (50)$$

$$\sigma 2.134=\sigma_2\sqrt{1-\gamma^2_{23}}\sqrt{1-\gamma^2_{24\cdot3}}\sqrt{1-\gamma^2_{12\cdot34}}=15.8\times.9367\times.0028\times.6499=8.68$$

$$\sigma 3.124=\sigma_3\sqrt{1-\gamma^2_{23}}\sqrt{1-\gamma^2_{34\cdot2}}\sqrt{1-\gamma^2_{13\cdot24}}=6\times.9367\times.9620\times.7332=3.97$$

$$\sigma 4.123=\sigma_4\sqrt{1-\gamma^2_{34}}\sqrt{1-\gamma^2_{24\cdot3}}\sqrt{1-\gamma^2_{14\cdot23}}=7.5\times.9939\times.9028\times.9959=6.71$$

求淨純消長系數，$b12.34, b13.24, b14.23$

$$b_{12\cdot34}=\gamma_{12\cdot34}\frac{\sigma 1.234}{\sigma 2.134}=.764\times\frac{6.31}{8.68}=.55 \quad \cdots\cdots (53)$$

$$b_{13\cdot24}=\gamma_{13\cdot24}\frac{\sigma 1.234}{\sigma 3.124}=.676\times\frac{6.31}{3.97}=1.07$$

$$b_{14\cdot23}=\gamma_{14\cdot23}\frac{\sigma 1.234}{\sigma 4.123}=.088\times\frac{6.31}{6.71}=.083$$

把消長系數的量代入，消長方程式變為 $x_1=.55x_2+1.07x_3+.083x_4$ (差數形式)

又因為 $(X_1-18.5)=.55(X_2-100.6)+1.07(X_3-24)+.083(X_4-79)$

$$X_1=.55X_2+1.07X_3+.083X_4-69 \text{ (配分形式)}$$

(5) 推測的標準錯誤

$$\sigma(\text{est.}x_1)=\sigma 1.234=6.31 \quad \cdots\cdots (54)$$

$$PE(\text{est.}x_1)=.6745\times6.31=4.26 \quad \cdots\cdots (55)$$

(6) 求多元相關系數 R

$$R_1(234)=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1\cdot234}}{\sigma_1^2}}\sqrt{1-\frac{(6.31)^2}{(11.2)^2}}=.826 \quad \cdots\cdots (56)$$

校對

$$R=\sqrt{1-\left[\left(1-\gamma^2_{12}\right)\left(1-\gamma^2_{14\cdot3}\right)\left(1-\gamma^2_{12\cdot31}\right)\right]}=\sqrt{1-[.8996\times.8552\times.43]}=.826$$

再進一步，*Burt* 求出學校作業(2)和實足年齡(3)的相關量 r_{23} 為.87.把智年 *MA* 影響固定後，求出學校作業和實足年齡的淨純 $r_{23\cdot 1}$ 為.40.智力的影響既已完全除去乾淨，而學校作業和實足年齡的相關量仍如是之高，據 *Burt* 說，此實係實足年齡不正當的影響及於分級之確證。就這些例子看起來，可知推算淨純 r 是分析影響學業成績之因數之第一步。若把這種方法延長之，還能除去其他因數的影響，而獲得兩組記分的純粹關係。

藉淨純相關法，分析因數的影響，這種分析法，已詳上節，有了這種分析法，始能確定因果關係之所在。Phillips(參看 Phillips, Frank M. Application of Partial Correlation to a health problem. Reprint no 867 from public health report, sep. 1923) 研究政府人員因病請假的原因，歷一年之久，發現請假人數和請假日期的平均溫度的相關量 r_{at} 為 −.37.把四個因數(1)請假日期早晨八點鐘的溫度，(2)請假前一日正午的溫度，(3) 請假日期的雨量 (4)，請假日期日出的百分數固定起來，找出請假人數和溫度的淨純相關量為 −.39 與前面的相關量沒有多大的差別；因為 r_{at} 便是唯一的 r(別的 r，零級的或淨純的，都無足輕重) 故有此結果。在許多因數當中，請假日期的溫度，實為請假最重要的副因或輔因，(疾病自然為請假的主要原因) 但淨純相關，對於主因附因等事件，毫無所表示。至於兩個因數當中，誰為因，誰為果，不過普通分析之事，在這個例子上，因果的分別很明顯。

淨純相關法可以推考因果的關係 *Reavis* (參看 Reavis, y: Factors Controlling Attendance in rural school T. C. Columbia Univ 1920) 想求出鄉村學校學生缺席與出席的原因。他選擇幾個因數：(1) 學校距

離，(2) 年齡年級的關係，(Age-grade relation) (3) 學生作業的種類，(4) 教員的訓練及經驗等，(5) 學校設備，(6) 社會的種類認為與學生出席有關的。應用淨純相關法解決這個問題時，發現只有出席和距離的零級相關量，出席和社會種類的零級相關量，被減小最少。第一個從－.45減小到－.43，第二個從0.30減小到.285故知在這些因數當中，只有距離及社會種類。對於學校出席，最有直接的獨立的影響。在這個例題上，因果的分別很明顯。學校距離及社會種類，為出席或缺席之因，而非為果。

(2)消長方程式在預測上及分析上的價值

消長方程式的價值有兩種：(1) 就其普通形式看來，他給每個獨立的變數一種重量，因此X_1(依除的變數)可被推測出來，而推測的錯誤最小。(參看第224頁)。(2)就其特別形式觀之，他能把一種能量或能力在一定範圍內分析之。現把消長方程式的這兩種用途，詳細述之於下。

(1) 上面已經說過，消長方程式能把兩個或更多的測驗記分，(獨立的變數 $X_2\ X_3\cdots\cdots X_n$) 變成一個量，而為X_1的最良的推測量。在第202頁內的問題裏，若是我們已知道一個學生的智力分數 X_2，及每週學習時數X_3即能應用消長方程式，求這個學生可能獲得榮譽點數 X_1。消長方程式一經求出後，若知道別個學生的 X_2及 X_3，即可據之以推測其 X_1。消長方程式能否為推測的工具，可由推測的標準錯誤的大小及多元相關系數決定之。

再從別的方面，找出一個例子，證明消長方程式在預測上的價值。這個例子，係 *Moore* 的工作。(參看 Moore. H. L. Forecasting the yield and price of cotton, 1917 PP 108－115) 他想預測美國南部

棉花的收成，他以喬治省的棉花收成爲依靠的變數，以五月雨量，六月溫度，及八月溫度，爲獨立的變數。由此造出一個消長方程式，在八月底，從之預測棉花的收成，而這種預測，較之美國農部，根据九月裏棉花狀況而預測尤準，(所謂預測準者，即是錯誤較小的意思。)

消長方程式除爲預測工具外，還可以決定每個仔測驗在整個測驗具中所應有的重量。因此把各個仔測驗的記分合併起來，即爲該整個測驗具所測量的能量的推測，這種問題與上節預測的問題有同樣的性質，設欲造出一個團體智力測驗具，含有四個仔測驗，構造的方法第一步，在選擇標準(參看第2?3頁標準的界說)例如(1)學校分數(2)教員的推測(3)(1)與(2)合併起來，(4)標準智力測驗具如 *Stanford Binet* 等爲標準。第二步在選擇四個仔測驗皆與(1)(標準)有很高的相關量，而(2)彼此的內相關量很低，這兩種條件，足以担保每個仔測驗總可以測量標準的一方面，並且每個仔測驗測量標準的另一方面；因爲他們的內相關低，故知其如此現以 Xc 代表標準，以 X_1, X_2, X_3，及X_4代表四個仔測驗，則消長方程式用記分表出，爲$Xc=AX_1+BX_2+CX_3+DX_4+K$。其中的 A, B, C, D，爲消長系數并爲給與四個仔測驗記分的重量，而K爲恆數。假使$A=1, B=2, C=3, D=4$，則消長方程式變爲$Xc=1X_1+2X_2+3X_3+4X_4+K$。即謂一個學生得自測驗1的記分，再以1乘之；得自測驗2的記分，再以2乘之；得自測驗3的記分再以3乘之；得自測驗4的記分，再以4乘之；把這些仔測驗的記分併合起來便是這個學生的智力的最好的推測。

消長方程式給我們一個理想的方法，使我們能把幾個仔測驗合併成爲一個測驗具，因爲每個仔測驗，在消長方程式上，皆案照他本身和標準的淨純相關量的大小而獲得重量。在這種情形下，推測的標準

錯誤是最小的；而推測的X_c和實在的X之相關量是極大的。明示我們這個測驗具，能代表標準到所能到的程度。

(2)消長方程式普通形式，和其特別形式，有不同的地方。在其特別形式上，所有仔測驗的σ，皆當作等大。這種辦法，可以免掉測驗單位大小之不同及測驗記分的差異趨勢之不同。又能使我們根據相關量即可決定每個獨立的變數，獨自對於依賴的變數所負的重量。因此各個因數，對於最後結果貢獻，可以分析出來，但須牢記的，便是消長方程式的特別形式，不能用之以推測。

現在把第202頁上的三個變數的問題，拿來證明消長方程式的特別用途。設以X_1(學業點績)為標準。而以X_2(智力)及X_3(每週學習時數)為獨立的變數，普通的消長方程式為：

$$X_1=b_{12\cdot3}X_2+b_{13\cdot2}X_3+K.$$

以公式(53)代替b，則有

$$X_1=\gamma_{12\cdot3}\frac{\sigma_{1.23}}{\sigma_{2.13}}X_2+\gamma_{13\cdot2}\frac{\sigma_{1.32}}{\sigma_{3.12}}X_3+K.$$

再以公式(50)代替淨純σ，則有

$$X_1=\gamma_{12\cdot3}\frac{\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{13}^2}\sqrt{1-\gamma_{12\cdot3}^2}}{\sigma_2\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{12\cdot3}^2}}X_2+\gamma_{13\cdot2}\frac{\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}\sqrt{1-\gamma_{13\cdot2}^2}}{\sigma_3\sqrt{1-\gamma_{23}^2}\sqrt{1-\gamma_{13\cdot2}^2}}X_3+K.$$

把γ的量代入，再設$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$，則有

$$X_1=.802\ \frac{(.9474)}{(.9368)}X_2+.707\ \frac{(.8)}{(.9867)}X_3+K;$$

或$X_1=.8X_2+.6X_3+K.$

這種結果，若加以解釋，則謂智力及每週學習時數，雖皆化為能

力，獲得榮譽點績，但其各個的貢獻爲.8與.6或4與3之比。這種比率，表示兩個變數對於最後結果之比較的 (Relative) 貢獻，非指示兩個記分之比重(Relative wieght).兩個變數記分之比重則見於第206頁內的普通消長方程式中，最有趣味的，是智力測驗記分和學習時數的記分的比重爲1:2,而他們對於榮譽點績的實在的貢獻，除去準個的大小，差異趨勢的大小等等，爲4:3.故知在學業成就上，智力所負之重量，較之學習時數所負之重量大。學習時數之重量如此之大，由於他和智力之間，有一個大而負的相關量。

在淨純及多元相關量的用途上，有幾種限制，亦必須明白敍述出來。第一，要確定淨純相關量是"的實"的，則所有零級系數必須從材料之有直形消長線的求出來。

在推算淨純之前，我們必須查明所有零級γ有沒有直形消長線，若是對於直形尚有疑問，則必須應用直形試驗法以試驗之。

第二，記分的數目須大，若是變數多則尤須如此，否則淨純及多元系數即無意思，若是所研究的問題包含變數多，而記分 (Cases) 的數目反很小，則易得着一個大而錯的系數，若能充分認識以上所舉出的限制及情形，則淨純及多元相關量，實能給我們一種很準確很有力的工具，而能應用之以分析心理測驗及社會測驗上所發生的問題。

VI. 假 (Spurious) 相關量

兩種測驗具的相關量，所以叫做假的，由於他全然或有幾份受其他因數的影響。總之，假相關量發生之原因，由於未能保持原有的測驗境界之所致，而其影響所及，則使相關系數過大。有幾種境界，可以產生假相關量的，舉之如下：

1. 假相關量由於材料之龐雜

在第 204 頁上，已經發帶年齡不相等，而產生一個過大的相關量，便是假相關量，施行兩個測驗具於一羣年齡不等的學生；及一羣年齡同等的學生則從前羣所得着的相關量，（當測驗記分隨年齡加大時）大於從後一羣所得着的。例如有一羣男孩子，自十歲至 18 歲不等，他們的腕力和前臂長度的相關量很大，迥異乎實在的關係程度，實由於這兩種體格特性，俱隨年齡而增長的緣故。

忽略年齡因數，在相關工作上，實為錯誤的大原。每逢舉出兩個測驗具的相關量，或一個測驗具的可靠系數時，必須把年齡的距離，年級，等——舉出以示其羣之龐雜，不如此，r的本身便無價值。

除年齡外。還有許多別的因數，可以引起假相關量來，（參看Kelley L, Tables to facilitate the Calculation of partial Co-efficient of r and regression Equation. Bulletin, University of Texas, 1916, no. 27）若是遺傳和酗酒，及退化，俱有正相關量，若不把遺傳的影響固定起來，則酗酒和退化的相關量（因為這兩個因數俱受遺傳的間接影響）將必太大。若有500個大學四年級學生，及500個工人，皆受智力測驗及勾消測驗。假定大學學生，在這兩種測驗具上的能力比較的大些。若是這兩種測驗具的相關量，對於學生及工人皆為零，若把這兩羣人合拼起來，將產生一個正相關量，由於這兩羣人合拼後，材料變龐雜的緣故（參看 Otis A.S. Statistical method in Educational measurement, 1925, PP 334—336這種相關量，自然是假的。）

要想相關量的實，必須把由於材料龐雜所產生之影響除去。苟不能確定這種影響的分量，則事不易為矣。除非致成龐雜的因數是可測量的，庶可藉淨純相關量的方法，把他的影響核除之。

2. 假指數相關量

X_1,X_2,及X_3可以完全無關。(參看 Yule 統計原理 PP215—216)若設$Z_1=\frac{X_1}{X_3}$,$Z_2=\frac{X_2}{X_3}$,則Z_1和Z_2之間,仍有關係存在且大至.50。例如兩個人各自獨立的觀察一羣物件,觀察的錯誤,(X_1及X_2)可以毫不相關。若把這兩種觀察的錯誤,以觀察X_3除之,即是把他們化爲X_3之百分數,則可得着一個很明顯的相關量。這是假相關量。假成分,自然是這個公共的因數X_3了。

在心理學上,有一個極普通的假指數相關量的例子。便是從兩個不同的智力測驗具所得的$I.Q.$的相關量。若把500個年齡不等,自3歲至14歲,的小孩子的$I.Q.$從兩個測驗具求出來,則IQX_1及QX_2之相關量,將必過大,因爲有一個公共因數年齡X_3;因爲$IQ=\frac{M.A.}{C.A.}$)存在這兩組IQ之間。

若用淨純相關法,把公共因數年齡固定起來,就可以去掉假成分。

3. 一個測驗和一羣測驗之相關量而前者爲後者之一份子

若把幾個仔測驗(X_1,X_2,X_3 等等的記分),平均一下,或一齊加起來,而求合併的測驗記分和一個仔測驗的記分X_1的相關量。這個相關量,將必太大,因爲X_1包括在合併的測驗之中。假成分的分量或程度,可用比率$\frac{t}{s}$度量之。其中之t,爲一個仔測驗所包含的成分的數目;而S爲合併的幾個仔測驗所包含的成份絫數目。(參看 Musselman j.R Spurious r app ied to Urn Sedemata, journal of American Statistical Association Vol. 18, September, 1923)

例如 *Army Alphi* 的數目塡補仔測驗有 20 項，而全體測驗具有 212 項。若是 *Alphi* 全體記分和塡補仔測驗記分之間，毫無關係，則此二者之間，仍可找出一點關係來 其量等於塡補仔 測驗之項數與 *Alphi* 全體測驗之項數之比率，即是 $\frac{20}{212}=.094$這個相關量。將必太大，因爲兩組材料中，皆含有塡補仔測驗之項目。

注意：若幾個仔測驗，完全或幾乎等長，則無論那一個仔測驗和全體測驗具(前一個仔測驗包含在內)的假相關量，幾乎是固定的，個個相同的。 ($\frac{t}{s}$是相等的) 因此最穩妥把各個仔測驗和全體測驗具之相關量，一一求出來，比較比較；藉此可以找出那幾個仔測驗，眞爲某種能量之測驗的工具。

VII.本章的公式

1. 淨純 γ.

$$\gamma_{12\cdot 34\cdots n}=\frac{\gamma_{12\cdot 34\cdots(n-1)}-\gamma_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}\gamma_{2n\cdot 13\cdots(n-1)}}{\sqrt{1-\gamma^2_{1n.23\cdots(u-1)}}\sqrt{1-\gamma^2_{2n.13\cdots(-1)}}}\cdots(49)$$

2. 淨純 σ.

$$\sigma_{1\cdot 23\cdots n}=\sigma 1\sqrt{1-\gamma^2_{12}}\sqrt{1-\gamma^2_{132}}\cdots\cdots\sqrt{1-\gamma^2_{1n.23(n-1.)}}\quad(50)$$

3. 消長方程式之以差數表出者

$$x_1=b_{12.34\cdots n}x_2+b_{13\cdot 24\cdots n}x_3+\cdots b_{1n\cdot 23\cdots(n-1)}\ x_n\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

4. 消長方程式之以記分表出者

$$X_1=\ _{12\,34\cdots n}X_2+\ _{13\cdot 24\cdots n}X_3+\cdots\ _{1n\cdot 23\cdots(n-1)}X_n+K\ \cdots\cdots\cdots(52)$$

5. 消長系數

$$b_{12.34\cdots n}=\gamma_{12.34\cdots n}\frac{\sigma_{1.23\cdots n}}{\sigma_{2.13\cdots n}}\cdots\cdots\cdots(53)$$

6. 推測的標準錯誤

$$\sigma(\text{est.x.})=\sigma_{1.23\cdots n}\cdots\cdots\cdots(54)$$

7. 推測的機錯

$$PE(\text{est.x.})=.6745\times\sigma(\text{est.x.})\cdots\cdots\cdots(55)$$

8. 多元相關系數

$$R_{1(23\cdots n)}=\sqrt{1-\frac{\sigma^2_{1.23\cdots n}}{\sigma_1^2}}\cdots\cdots\cdots(56)$$

9. 求機會 R 之公式

$$R=\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{N}}\cdots\cdots\cdots(57)$$

10. R 的互換的公式

$$R_1\ (23\cdots n)=\sqrt{1\left[\left(1-\gamma^2_{12}\right)\left(1-\gamma^2_{13.2}\right)\cdot\left(1-\gamma^2_{1n.23\cdot(n-1)}\right.\right.}.\quad(58)$$

問　　題

1. 一羣小孩子，自八歲至14歲，他們的智力和學校成績的γ爲.80；智力和年齡的γ爲.70；學校成績和年齡的γ爲.60。若是這些小孩子的年齡相等，問他們的智力和學校成績的γ如何？

2. 有大學一年級學生100名，求出他們的智力測驗和勾消測驗的γ爲.20，智力測驗和聯想測驗的γ爲.70，勾消測驗和聯想測驗的γ爲.45 問智力測驗和勾消測驗的淨純相關量如何？問智力測驗和聯想測驗的淨純相關量如何？求出結果來請解釋之。

3. 設有以下的材料

X_1＝中學校數學分數　　X_2＝英文興趣測驗分數

X_3=歷史測驗分數

X_4=數學測驗分數

$\sigma 1=4.93$　　$\gamma 12=20$　　$\gamma 23=63$

$\sigma 2=3\ 13$　　$\gamma 13=.15$　　$\gamma 24=21$

$\sigma 3=6.12$　　$\gamma 14=24$　　$\gamma 34=54$

$\sigma 4=4\ 64$

(a)求隨$X_2X_3X_4$,爲轉移的X_1消長方程式

(b)求決定X_1的記分之X_2,X_3,及X_4的比重

(4)以下係 *Syracuse* 大學校的450個文科一年級學生之成績

(1)榮譽點績　　(2)智力　　(3)中學校平均分數

$\bar{X}_1=18\ 5$　　$\bar{X}_2=100.6$　　$\bar{X}_3=79$

$\sigma_1=11\ 2$　　$\sigma_2=15.8$　　$\sigma_3=75$

(4)學分　　(5)每週學習時數

$\bar{x}_4=16.1$　　$\bar{x}_5=24$

$\sigma 4=1\ 5$　　$5=6$

$\gamma 12=.60$

$\gamma 13=40$　　$\gamma 23=36$

$\gamma 14=22$　　$\gamma 24=20$　　$\gamma 34=40$

$\gamma 15=32$　　$\gamma 25=-35$　　$\gamma 35=11$　　$\gamma 45=25$

(a)求消長方程式而以榮譽點績爲依附的變數。

(b)若有一個學生其智力記分爲110,中學校均分爲 5,入學時有15個學分,每週平均學習時數爲25小時,問其極能機遇的榮譽點績如何?

5 用第四題內的材料,若是一個人的智力記分爲120,而要獲得20榮譽點績,問他每週須學習若干小時?(注意 造出一個消長方程式,以

學習時數爲依守的變數，荣譽點績及智力爲獨立的變數。）

6 設以X_1爲標準，X_2及X_3爲兩個別的測驗具其γ及σ如下

$\gamma 12=.90$　　　　　　$\sigma 1=5.00$

$\gamma 13=.50$　　$\gamma 23=.20$　　$\sigma 2=10.00$

　　　　　　　　　　$\sigma 3=8.00$

若把X_2及X_3合併起來根據之以推測X_1，問較之根據X_2或X_3以推測X_1準確多少？

7 設有一個測驗具包含兩個仔測驗，而每個仔測驗和標準的γ皆爲.50若是這兩個仔測驗的γ爲.20。

(*a*)若再增加一個仔測驗，而這個仔測驗和標準的相關量爲.50。和其他各個仔測驗的相關量爲.20，問這個測驗能增加這個測驗具的推測的價值若干？

(*b*)若再增加一個仔測驗與(*a*)內所增加的仔測驗同，問這兩個相同的仔測驗，能增加這個測驗具的推測的價值若干？

8 設兩種完全獨立的測驗記分B及C，決定第三種測驗記分A。若B與A的γ爲.50，問C與A的γ如何？

9 應用問題1內的材料，藉智力及年齡分析學校成績，問這兩個因數對於學校成績的貢獻成一個什麼比例？

10. 一個測驗具包含10個仔測驗共有200個項目。一個仔測驗和全體測驗具的相關量爲.60，若是這個仔測驗含有155項目，問求出的假相關量過大若干？

答　　數

1. $\gamma=.67$

2. 智力測驗與句削測驗的γ爲−.18。智力測驗與聯想測驗的γ爲

.70

3. (a) $x_1 = .37x_2 - .11x_3 + .28x_4$

(b) 數學分數＝6.5 (英文興趣測驗分數)－2(歷史興趣測驗分數)
+5(數學興趣分數)

4. (a) $X_1 = .58X_2 + .14X_3 - 1.03X_4 + 1.10X_5 - 62$

(b) 24而同時有一個PE(est.x)＝4點

5. 18小時而同時有一個PE(est.x.)為2.7小時：18±2.7

6. 根據X_2以推測，則σ(est.x.)＝4.0

…………X_3以推測，則σ(est.x.)＝4.3

…………X_2及X_3以推測，則σ(est.x.)＝3.5

7. (a) R自.64增加到.73

(b) R自.64增到.79

8. $\gamma_{AG} = .866$

9. 智力及年齡之供獻，其比率幾爲10:1

10. 075

第六章

統計方法及技術對於測驗及測驗結果之應用

欲詳論統計方法對於測驗的應用，自非一章所能蔵事，非有專書不可，故此章僅能（大都限於相關量及可靠量）研究重要的方法(1)處理普通測量問題，(2)作高級統計學處理測驗結果的基礎。

I 測驗記分之"的實"(Validity)

測量工具"的實"與否，視乎其能否盡職，能否測驗他所要測量的東西。用尺量物，而能用其他測量工具校對之而不錯，則尺即的實，用測驗具測量能量，而所測量的能量，能客觀的測量之，界說之，則測驗具即的實。

1 測驗具之"的實"，可藉其和標準之相關量以斷定之

欲斷定一個測驗具的實與否，須視其和獨立的"標準"之相關量如何。標準係一種度量，一個測驗具之價值，可藉之以判定。例如吾人

常取學校分數。教員意見，或別的測驗具而信其的實者，爲智力測驗具的標準。(美人常以推舉的個別測驗具爲智力的標準)職業測驗具的標準，爲在職業上之實在能力，苟一個測驗具和標準皆可靠，則此測驗具和標準的相關量必高，此即爲的實之確證。故在接受標準和一個測驗具的相關量爲最後一步之前，必須明白這個測驗具的可靠量苟能知標準的可靠量則更好。(參看 Kelley T. L. the reliability of test score, j. of Edu. Res. 1021, Vol. 3.5 P370)

2. "的實"之間接的測量法

若是沒有一個可靠的標準，不得不用間接的方法，以求"的實"，第一個間接的方法，卽是合併幾個性質相同的測驗具的記分而平均之，再求每個測驗具的記分和平均記分的相關量，其與平均記分之相關量最高者，卽斷之爲最好，最的實，*Wh tley* 曾將三個辨別測驗具，辨別顏色，辨別形式，辨別物件，求出三個相關量如下。(這些測驗具若等長，則假冒份子是固定的。)

$$\text{三個測驗具的均分和}\begin{cases}\text{辨別顏色測驗具的}\gamma=.67\\\text{辨別形式測驗具的}\gamma=.99\\\text{辨別物件測驗具的}\gamma=.96\end{cases}$$

因此他說：就這三個測驗具測驗同樣的能力而言，辨別形式測驗具，要爲最好，而可爲他們三個的代表。對於一種能力或功能若無一種度量爲標準，則測量此功能的幾個測驗具的均分，即可利用之爲標準。

測量的實之第二種間接的方法，在求一個測驗具與許多別的各個測驗具的相關量。如此可以找出這個測驗具所測量，及量不到的事實。限制聯想測驗，例如意義相反的測驗具，論理的關係測驗具，等等，

與智力測驗具，及推理測驗具的相關量，高於他們與勾消測驗具，及顏色辨別測驗具之相關量。故以限制聯想測驗具，測量推理測驗具及智力測驗具所測量的能量，較之勾消測驗具及辨別測驗具好，（只是得不着直接的的實的標準時，才可用這種間接的方法。）

因爲沒有的實的標準的緣故，心理學家不便給測驗具一個籠統名稱，常案測驗具本身實在所做的，而給他一個形容字做名稱，不用界說不清的心理的功用爲他的名稱，因此我們有意義相反的測驗具，填補測驗具，等等，而沒有聯想測驗具，或推理測驗具，等等。

II. 測驗記分的可靠量

1. 測驗具的可靠量藉其自身相關量度量之

A. 可靠系數

一個測驗具(或其他測量的工具)的可靠量，可以其測量一種能量始終一致定之，若是一羣人受同樣的測驗兩次，而各人前後兩次所得的記分差不多大，則此測驗具即可靠，若是先後兩組記分的正負差別大於練習影響之所能及，（練習加大所有的記分至同等程度，故不響影自身相關量。但是他能引進一個常錯，）或是這種差別太多，則這個測驗具，自相矛盾，而不可靠，求一個測驗具的可靠量的方法，即在把一個測驗具及其副測驗具施行於一羣人，得着兩組記分，再求這兩組記分的相關量。這就是自身相關量，又叫做可靠系數。

若是一個測驗具的可靠系數爲 1.00，則此測驗具即爲所要測量的能量之最準確的測量工具，若是可靠系數爲 .0,0 則此測驗具即不可靠，測驗具的可靠系數愈低，測驗始終一致之程度愈小。

自身相關量高到什麼程度，才足爲適宜的可靠量呢？這是一個很重要的問題，而其答案，則全恃乎測驗具的性質，與夫受測驗的人對

多寡，及其能力差異之大小而定，智力測驗編製者，大半力持此意。為任意抽選之同年小孩，造一個測驗具，其可靠平數之最低限度為.90。照吾所說，心理及體格測驗具至少要有一個可靠系數為.80，才能為一個可靠的工具，但是"至小"的限度，也受測驗的紊亂而變，因為可靠系數，隨測驗記分之全距離的大小而變。（參看第246頁）故舉出一個測驗具的可靠平數時，總應當把受測驗的人數，及其能力差異之大小，一併舉出來。

B 延長或重施測體具對於可靠量所發生之影響

若是測驗具的自身相關量，不足令人滿意，還有兩條路可走。(1)延長測驗具至其可靠量增高為止，或(2)把一個測驗具及其副本重施一次，把測驗具的兩次及其副本的兩次記分平均之，再求這兩組平均記分的相關量。若是舉行(2)後，可靠系數還太低，不妨把這個測驗具及其副本，再施行一次，復施行一次，一直到得着一個滿意的可靠量為止，但是試驗(1)或(2)不免花費許多時間及工夫，所幸吾人已有一個方法，能代替(1)或(2)的辦法。此即利用 *Spearman* 的預測公式，有時稱為 *Brown* 的公式，（請參看 Brown Wm 的 the Essentials of mental measurement, 1911, P102)

$$r_x=\frac{N r}{1+(N-1)r} \tag{59}$$

試舉例證明這個公式的用途，假設一個測驗具的自身相關量為.70 若是加長這個測驗具的長度一倍，問其影響及於可靠量若何？把 r 的量.70，及 $N=2$，代入公式(59)內，求 r_x，則得

$$r_x=\frac{2\times .70}{1+.70}=.82$$

是把測驗具加長一倍，即可把他的自身相關量，由.70提高到.82若不加長測驗具本身，而把測驗具及其副本重施一次，把測驗具的兩

次記分及其副本的兩次記分平均之，再求這兩組平均記分的相關量，其結果和加長測驗具本身一倍所得的，完全相同。

預測公式還有一個用處，假設一個測驗具的自身相關量，或測驗具和測驗副本的相關量為 .80 測驗具必須加長多少，或測驗具必須重施幾次，庶可得着一個可靠系數(r_{nn}) .95？把r的量 .80，及r_{nn}的量 .95，代入公式內求N，則有

$$.95=\frac{.8N}{1+.8N-.8}=\frac{.8N}{.2+.8N}$$

$$.04N=.19$$

$$N=4.75\text{或}5.00(\text{整數})$$

即謂這個測驗具，必須增長五倍，或施行5次，(連同其副本)方能把自身相關量，由 .80提高到 .95

當一個測驗具加長兩三倍時，若想從預測公式所得的結果，是的實的，則所增加的項目或問題，其可靠量必須等於這個測驗具的原有的可靠量。若能滿足這個條件，則任意加長測驗具，在理想上，可能把他的自身相關量，提高到任何盼得的程度。但此似不近情，且亦可證明，可靠系數當前四五個仔測驗合併時，可按照預測公式而加大，過此則其加大之速率，即不如預測公式之所推測。(參看Holzinger Karl J. Note on the use of Spearman's prophecy Formula for reliability, J of Edu, Psy. 1923, Vol XIII 5 PP301—305)

C　可靠系數得自一個測驗具者

若是一個測驗具沒有副本，又不能好好的再把他施行一次，只好把他分為兩半部，求此兩半部的可靠量，以後再藉Spearman的公式，求出整個測驗具的可靠量來，辦法如下。把測驗具分為兩半部，凡測驗項目為單數者，歸入一半部，凡測驗項目為雙數者，歸入一半部，由

此得着兩組記分，或應用其他方法亦可。(參看 Rush. G. M. 及 Delmango M. C. The Dowrey Will Temperament group test; Analysis of its rel a bility a d Val dity Jour al of applied Pycholopy, Vol VII, I, 1923, P. 65) 再把這兩組記分的相關量求出來，此卽爲半個測驗具的可靠係數。以γ_h代表半個測驗具的自身相關量，以$N=2$，把他們代入 *Spearman* 的公式內，卽求出整個測驗具的可靠量來：

$$\gamma_x=\frac{2\gamma_h}{1+\gamma_h} \qquad (60)$$

應用這個公式時，我們必須有以下的假定：如此分配出來的兩個半部測驗具，在難易上及內容上，皆須大約相同。

D. 可靠係數恃乎受測驗的羣衆之多寡及其能力差異之大小而定

可靠係數，得自一個測驗具及其副本之施於一級學生者，苟和可靠係數得自一個測驗具及其副本之施於幾級學生者等大，仍不能說他們表示等大的可靠量：其原因卽在兩個受測驗的團體內容複雜之不同。(人數多寡不同，程度差別不同，近來 *Kelley* 發現一個公式，(參看 T e Reliability of test Score jour el of Educa tional Research, 1921 Vol III5, PP310—319) 倘知道一個測驗具，施諸一級學生者之可靠係數，則能藉此公式，決定這個測驗具，施諸幾級學生，其可靠係數必須多大才可說這個測驗具，對於一級學生，或數級學生之效能等大。這個公式爲

$$\frac{\sigma}{\Sigma}=\frac{\sqrt{1-R}}{\sqrt{1-r}} \qquad (61)$$

其中的σ，爲一級學生的標準差，而Σ爲幾級學生的標準差，γ爲這個測驗具的可靠係數得自一級學生的，而R爲這個測驗具的可靠係數得自幾級學生的，試舉一例證明之，設一級學生的$\gamma=.50$，而$\sigma=5.00$，

又設一大羣學生包含第三年級至第八年級學生的$\Sigma=15$.問這個測驗具必須有一個多大的R,庶幾這個測驗具，對於一級學生，及幾級學生的效能才相同？把σ Σ及γ的量，代入公式(61)內，求出$R=.94$.卽謂這個測驗具，用之於一級學生，其可靠係數爲.50.若欲其用於幾級學生，而其能力的全距離，大於一級學生的三倍，則其可靠系數，必爲.94，方能表示其可靠的程度，與前相同。

有了這個公式，卽可藉之以判斷一個測驗具對於整個全距離(Σ)，其效能是否等於對於整個全距離的一部份(σ)一樣。或其效能對於一個全距離和對於別個全距離一樣。其另一個功用，卽在舉出及解釋可靠系數時總須把受測驗的人數，及其能力差異之大小，一併舉出來，(參看 Otis A.S. 的統計學 1925 PP 253—254)

2. 可靠量的指數 (The index of reliability)

在固定情形下，一個人被一個測驗具測量了無數次，或被許多測驗副本測量以後。求出平均記分來，此平均記分，卽是此人在這個測驗上的眞記分，*T. L. Kelley* (參看 A Simplified method of using Scaled data or Purposes of testing, School and Society 1916, Vol IV, 34 71)發現一個公式可藉之求出一組記分和一組相當的眞記分的相關量，

$$\gamma_{obt.\,t\,ue}=\sqrt{\gamma_{12}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (62)$$

其中的γ_{12}爲自身相關量或可靠系數，得自一種測驗具的諸種副本的，故有可靠系數，卽能求得一組已得的記分和其相當的眞記分的相關系數。這個系數叫做可靠量的指數，且爲可靠系數γ_{12}所能達到之最大的量。故知最大的相關量，而能得自一個測驗具。和別種測量工具者，(除非機會可以產生一個過大的假相關)厥能這種測驗具和眞能代表他實際所測量的東西的相關量，即是這個測驗具和眞記分的相關

量（參看Kelley T. L. the Reliability of test Scores, j. of ed. Res. 1921 Vol III, 5327）γ_{12}尋常總小於1.00，故$\gamma_{obt.true}$總大於γ_{12}。

試舉一例，證明可靠量的指數。假設受測驗的團體的$\gamma_{12}=.64$，則$\gamma_{o't.true}=\sqrt{.64}$或.80，而.80即為這個測驗具在他現在的形式上所能得着（除機會外）之最高的自身相關量。可靠量的指數，是一個測驗具的可靠量的有用而容易解釋的度量，因為把已得的可靠系數開方一下，即能找出一個測驗具所能產生之最大的可靠量，若是$\gamma_{12}=.25$，而$\gamma_{o't.true}=\sqrt{.25}$或.50，若仍繼續應用這個測驗具而不加長之，改良之，則徒費時間。

3. 測量的標準錯誤及機錯：σ_m及PE_m

一個測驗具的可靠量可藉(1)可靠系數，(2)可靠量的指數度量之。還有一個方法，度量一個測驗具的可靠量，即是確定一個測驗具的一個記分和其相當的一個眞記分相似之程度如何。（眞記分已在第246頁上界說之）一個已得的記分和其相當的眞記分，總相差若干，由於受兩種錯誤的影響：一種常錯，一種變錯。常錯的重量，偏於一方，故不影響自身相關量，且可以把他除去，把他的影響度量出來。變錯則不然，時而為正，時而為負，不容易除去；故使已得的記分和其相當的眞記分，不能吻合。

故測量變錯的影響，成為一種很重要的事情，但可求出測量的標準錯誤σ_m來度量之。σ_m又可解釋之為變錯之量之度量，或解釋之為已得的記分和眞記分除去常錯後之機遇的差別之度量。σ_m係從σ(est)求出，在方程式$\sigma(\text{est.})=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}^2}$中，（參看公式32）$\sigma_1$為測驗一的$\sigma_1$，而$\gamma_{12}$為測驗1和測驗2的相關量，則$\sigma$(est.1)度量推測的準確。即是相當

在測驗二上各個人的記分，推測在測驗一上各個人的相當的記分，測測準確程度，即以$\sigma(\text{est}_1)$度量之，若以測驗二上記分代表真記分，而以測驗1上記分，代表已得的記分得自同樣測驗具的，則方程式可寫為

$$\sigma(\text{est obt}) = \sigma_{obt}\sqrt{1-\gamma^2_{obt\ true}}$$

但是$\gamma_{obt\ true} = \sqrt{\gamma_{12}}$，而$\gamma^2_{obt\ true} = \gamma_{12}$，可靠系數。把$\sigma_{obt}$及$\gamma^2_{obt\ true}$的量，代入以上方程式內，則有

$$\sigma(\text{est obt.}) = \sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}}$$

再以σ_m代替$\sigma(\text{est.obt})$則有

$$\sigma_m = \sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}} \qquad (63)$$

公式(63)即為測量的標準錯誤之公式。設已有γ_{12}(一個測驗具的可靠系數)及σ_1(測驗記分的σ)則應用公式(63)，即能度量一個已得的記分和其相當的真記分之機遇的差別之大小。

此外還有PEm被用的次數較多可以下面的公式求出來

$$PEm = .6745\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}} \qquad (64)$$

試例證這些公式的用途。設以一個智力測驗具，測驗一百個大學生，求出平均分數為150點，σ為15.00點。而這個智力測驗具的自身相關量(兩個副本的相關量)為.90試求$\sigma(m)$及$PE(m)$。應用公式(63)，求出

$$\sigma m = 15\sqrt{1-.90} = 4.74$$

應用公式(64)求出

$$PE(m) = .6745 \times 15\sqrt{1-.90} = 3.20$$

$PEm = 3.20$。若把他解釋出來，即謂此羣中任何人的真記分落於已得的記分±3.20之間之機會為均等。若其已得的記分為175，則其真記分落於178.20及171兩個界限之間之機會為均等。換句話說

已得的記分之半數，其錯誤(和眞記分的差別)不大於±3.20點。

在σ_M及$PE(m)$公式上，這個測驗具及其副本的σ，俱假定之相等。若是他們不相等，則必須應用下面的公式了。

$$\sigma_M = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\sqrt{1-\gamma_{12}} \quad \cdots\cdots (65)$$

$$\text{及}PE(m) = .6745\times\left[\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\sqrt{1-\gamma_{12}}\right] \quad \cdots\cdots (66)$$

在前面的例子裏，若是第一個智力測驗副本的$\sigma=15$，而第二個智力測驗副本的$\sigma=20$則σ_M及$PE(m)$為

$$\sigma_M = \frac{10+20}{2}\sqrt{1-.90} = 5.53$$

$$\text{及}PE(m) = .6245\times5.53 = 3.73$$

學者切莫把σ(est)及PE(est)的公式，和σ_M及$PE(m)$的公式混淆起來。當我們知道一個人的記分在第二種測驗具上而根據之以推測他的記分之在第一種測驗具上時，σ(est)及PE(est)公式，則明示我們以這種推測準確程度。極能機遇的記分，自然藉消長方程式之聯合兩種測驗具的記分者推測之。當我們知道一個測驗具的σ及其可靠系數時，σ_M及PEm公式能使我們確定一個人的已得的記分和其相當的眞記分的差別。

若有幾個測驗具，其記分也採用不同的準個，則一個測驗具的(σ_M)和別個測驗具的(σ_M)，不能直接比較。例如我們不能把敲拍測驗(記下30秒內敲拍的次數)記分的可靠量，和論理的記憶測驗記分的可靠量相比較(記下記得的項目之數目)但是有一種簡單的方法可以免掉這種困難，即是應用一種和差異系數(V)相似的比率。例如一個測驗具的比率$\frac{\sigma_M}{\bar{X}}$或$\frac{PEm}{\bar{X}}$可以直接和別個測驗具的比率$\frac{(\sigma_M)}{\bar{X}}$或$\frac{PEm}{\bar{X}}$相比較。如此自一種測驗具所得的記分之可靠量可以和自別種測驗具所得的記

分之可靠量比較。

III 合併不同的測驗具之記分

若施行幾種不同的測驗具於一個人，常常想把得自各種測驗具的記分合併成爲一種混合的記分，以代表這個人，在這些測驗具上的地位。最簡單的辦法，即在把這些記分平均一下 但只把他們平均一下，還免不了兩種難點 第一個難點，即是測驗具上所用之單個的種類及大小各有不同。有許多測驗具，以分量限制法施行之。工作完畢時，無論受測驗者已做多少，他的動作，以其所需之時間記之。又有多少別的測驗具以時間限制法施行之。時間之長短是固定的，受測驗者的記分是在固定的時間內所做成之項目的數目，或已答成之問題的數目。由以上兩種方法得着的記分，自然不能直接合併起來。

第二個難點，即爲各個測驗具在混合的記分上，所負的重量的問題。只是平均原有的記分，不能令我們按照各個測驗具的重要，而支配於最後的整個記分上，雖常常以爲只要把測驗結果，平均一下，就可免掉重量附加的困難問題，其實我們所做的，只在附加重量，而全然不知道重量應當怎樣，想免掉這些難點，現在已經有人提出幾個方法來，合併分立的測驗記分，成爲一個混合的記分。對於這些方法，請研究一下。

1 用百分法合併測驗記分

若把每個仔測驗的記分分配式，分成百分點，則不難把一個人在各個仔測驗上所獲得的百分等級合併起來，而得着他的最後的百分等級。求百分點的方法，已詳見於第49頁。現在只須表明幾個分配式的百分等級如何合併起來

第二十九表

九歲小孩子在三個測驗具上的百分等級分配式

合併一個小孩子的百分等級的方法

測驗具	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	記分	百分等級
在圖畫填補測	62	240	297	325	372	407	440	450	499	576	464	445	65
替換測驗	219	190	273	158	152	141	133	126	121	109	80	126	70
Seguin form board	34	24	21	20	18	18	17	16	15	15	14	17	60

百分等級的中點……………………65

施行 *P.ntneer-Patterson* 動作測驗具內的三個仔測驗於九歲小孩子，得着三個記分分配式。這三個分配式的百分等級，詳於上表，有一個九歲男孩子，對於圖畫填補測驗，獲得445分，查上表，這個記分的百分等級爲65.(在60及70之間)在替換測驗上，獲得126分.查上表，其百分等級爲70.在 *Seguin fo m-'oard* 測驗上，獲得17分。查上表，其百分等級爲60.這三個百分等級的中點爲65.表示這個小孩優於中等九歲小孩。苟其10歲或11歲，則另有百分表合用，觀察第(29)表，知道合併百分等級的方法很簡單，很明白。這種方法免去各種測驗所用單個的不同，而給各一個仔測驗以同等重量。

2. 以中等智年法合併測驗記分

苟被測驗者爲小孩子，而各個測驗說明書上皆附有年齡標準，(age-norms)則自易求出每個小孩子在每個測驗上的*MA*，再求出這些 *M.A.* 的中點。他即爲混合的記分。

有許多著作者，如*Whipple*在他的 *manual of mental and phys'cal tests* 上，*Pintner* 及 *Patterson* 在他的 *A scale of Perfo mance tests* 上，*Pyle W.H* 在他的 *Examin tion of school children* 上，印出許多表格來，因得按一個人在各種測驗具上所得的記分，從之查出相當的 *MA* 來，求*MA* 的中點的方法很有用，而其結果亦容易解釋，但對於成人

則無用。

3. 合併測驗記分，每個測驗具的重量，係按照其記分的差異趨勢而定的

苟施行幾個測驗具或全採用時間限制法，或全採用分量限制法，則記分可以直接合併起來，而各種測驗記分，在合併時所負重量，可案照其差異趨勢以決定之。試舉一例，以表白這種方法。設有一個測驗具其均分 =25，而其$\sigma=5$，學生A在此測驗具上所得的記分為 20。又有一個測驗具其均分=150，而其$\sigma=15$，學生A從之得着的記分為 160。若是只把A的兩個記分加起來，則有 160+20=180，可知其得自第二個測驗具的記分，比較得自第一個的，在合併時重要三倍。因為第二個測驗記分分配式的δ比第一個大三倍。要想給這兩個測驗具以同等的重量，則必須把他們的差異趨勢使之相等，即是把第一個測驗具的σ以 3 乘之，或把第二個測驗具的σ以3除之。這兩種辦法，必須實行其一，若實行第一個辦法，則求出合併的記分為$[(20\times3)+(160)]=220$。若實行第二個辦法，則求出合併的記分 $20+\dfrac{160}{3}=73.34$ 在每個合併的記分上，220或73.34，這兩個測驗具的重量相同。

第三十表

按照差異趨勢給記分以重量再合併之

測驗200個大學校女學生得着下面的結果

測驗	1.同想	2.認識	3.填補	4.諳讀	5.字彙	
均點	6.50	37.47	03.78	104.71	73.90	
σ	1.76	7.69	4.36	26.79	7.60	
倍數(給測驗具以同等重量)	5	1	2	$\frac{1}{3}$	1	
新σ	8.80	7.69	8.72	8.93	7.60	
A的記分	5	35	30	100	75	
A的記分(賦同等重量)	25	35	60	34	75=229	總數
A的記分(測驗1及2的重量為2其餘的重量為1)	50	35	120	34	75=314	總數

要想明瞭這種合併記分法，請看第(30)表。學生A從五個仔測驗所得的記分，及每個仔測驗的均點及σ在皆其內。若把A的五個仔測驗記分加起來,則測驗4(常識)在最後合併的記分上,所負的重量，較之測驗一(論理的記憶，回想)大15倍。因爲測驗4的σ,大於測驗1的σ十五倍，而常識測驗的重量又較之填補測驗的重量，幾大六倍；較之論理的記憶測驗，(認識測驗)，及字築測驗的重量各大三倍。常識測驗所估之重要如此，優於其他仔測驗如此，似不可能。——是實他是最不重要的——故不得不重新估定他們的重量，最簡單的方法，卽爲劃一各個仔測驗的重量、如第30表所表示的一樣，若是乘測驗一的σ以5,乘測驗二的σ以1,乘測驗三的σ以2,乘測驗四的σ以$\frac{1}{3}$,乘測驗五的σ以1,則各個仔測驗的σ等大。若以求出的"倍數"，(Multipliers)乘A的相當的各個測驗記分，則各個新測驗記分，在最後合併的記分上，各有同等的重量。確定"倍數"時，如可做到，最好令之皆爲整數，且使之小到能小的地步。例如在第30表內，測驗二及測驗五的σ，令之爲標準，因此則其他仔測驗的倍數，得爲最小了。

欲令，回想測驗，及填補測驗的重量，在最後合併的記分上，大於其他測驗的重量兩倍，要想達到這個目的，只須把測驗一的σ以十乘之，測驗三的σ以四乘之，其餘照舊不改，卽使測驗一的σ及測驗三的σ,大於其他測驗的σ兩倍，苟已令所有的測驗的重量相同而爲1，則只須把測驗一及測驗三的σ倍起來。

這種方法的步驟，總結之如下：

(a) 求每個仔測驗的均點及 或Q.

(b)若給各個仔測驗以同等的重量，則選擇"倍數"

以乘各個仔測驗的σ或Q,令所有的新σ或Q等大，若以幾個仔測驗

應較別的仔測驗重要些，則使他們的σ及Q按比較而倍之。

(c)以在(b)內所求出之"倍數"乘相當的記分，再把這些新記分加起來，這個結果，卽爲一個合併的記分，若有其他理由，需要較小的數，則再把他們平均之亦可。

4. 把不同的測驗具之記分變成可比較的次序後再合併之

前面已說過，如想把不同的測驗具的記分合併起來，則有兩種難點發生，(1)各測驗具所採用的單個不同，(2)各測驗具的記分的差異趨勢不同。我們已經在上面舉出三個法子，除去這些難點，但是還有一個法子可用，卽是把不同的測驗具的記分，變成可比較的分配式後，再直接把他們合併起來。

有兩個法子，能把測驗記分這樣合併起來，這兩個法子，皆假定測驗記分分配式是常態的。最近發明的，是 *Clark Hull* 的法子。(參看 The Conversion of test scores into series wh'ch shall have any assigned mean and degree of dispersion journal of applid psychology, 1922, 6, P. 299.)

這個法子，卽在把從每個測驗具所得着的記分，變成一個"標準"常態分配式，在這個分配式內，記分從零一直排列到100，而均點在50，σ爲14.〔各人的記分彼此相差不能過均點±3.5σ，因爲$\frac{50}{3.5}=14.00$.故此分配式的σ設之爲14.00.〕按照以下的方法，很容易把一個測驗具的記分改變一下。

設$\bar{X}$＝一個測驗具的均點，

設σ＝一個測驗具的σ

設$X_{\circ}$＝一個人的記分，在這個測驗具上。

設50＝改變的次序之均點。

設14＝改變的次序之σ

設X＝一個人的記分，在改變的次序上。

若設 $S=\frac{14}{\sigma}$ 設 $K=50-\bar{X}S$ 則 $X=K+SX_1$

舉例證之設一個測驗具的均點為16 00，σ為3 5而學生A在這個測驗具上的記分為18，問A的改變的記分是什麼？

$S=\frac{14}{3\ 5}=4.00, K=50-(16\times4)=-14.00$

把S及X的量代入，$X=K+SX_1$裏，則有

$X=-14+(4\times18)=58$

是在一個分配式內，而此分配式的均點為50，$\sigma=14$者，A的記分即為58，換句話說，(假定一個常態分配式)58高於分配式的均分50之量，正如18高於分配式的均點16 00之量。

第三十一表

	測驗1 造字	測驗2 數字記憶久暫
均點	16 30	7.4
σ	4 90	1 3
A的記分	18 00	8 0
A的記分(改變的)	54 86	56 48

舉出一個例子，即足以證明，怎樣用這種方法，把記分合併起來，先應用上面的公式於測驗1，造字測驗，則$S=\frac{14}{4\ 9}=2.86$，$K=50-(16\ 30\times286)=3.38$，故 $X=3\ 38+2\ 86X_1$以A的記分18代替X_1，則求得$X=54\ 86$。同樣求測驗2的$S=\frac{14}{1\ 3}=10\ 8$ $K=50-(7\ 4\times10\ 8)$

$=-29.42$；故$X=-29.92+(10.8\times 8)$（8為A的記分在數字記憶久暫測驗具上者）$=56.48$把A的兩個改變的記分平均一下，則得着一個合併的記分55.67了·55.67略優於兩個測驗具的均點50.

為各個測驗具求出K及X後，卽能把造字測驗具上的所有的記分，立時藉$X=3.38+2.86X_1$公式，變為新記分；把數字記憶久暫測驗具上的所有的記分，立時藉$X=-23.92+10.8X_2$公式，變為新記分；而X_1代表測驗具上的實在的記分。

在1912年。Woodwo th 教授，曾根據同樣的原理，找出一個合併記分的方法（參看 Combining the results of several tests A study in statistical method, Psy. review, 1912, Vol5 XIX PP 97—123)

Woodwo h 的方法在先求一個人在一個測驗具上的記分和這個測驗具的均分的差數，$X-\bar{X}$.再以此測驗具的σ除此或正或負的差數，$(\pm x)$.而稱此結果，$\left(\frac{\pm x}{\sigma x}\right)$，為削小的記分。(注意在 Woodwo h 方法上，均點則以之在零處，而σ則以之等於1.)把一個人在各種測驗具上的記分，皆如此變為削小的記分。然後把他們平均之，合併之，故各個測驗具的重量，在混合的記分上皆為1.00.試用第31表內的材料，表白這個方法的用途；在造字測驗具上，學生A的記分為18，高於此測驗具的均點(16.30) 1.70.再以此測驗具的σ除此差數，卽得着A的削小的記分了。——此削小的記分。以σ為準個表出之，則為.347在數字記憶久暫測驗具上，A的記分為8.00，高於這個分配式的均點(7.4).6.以此測驗具的σ除之，則得着一個削小的記分.462.若把這兩個削小的記分平均之，則找出A高於受這兩種測驗的羣衆的均點.405,(σ準個).(注意：這個方法如同前一個方法一樣，假定測驗的分配式，幾乎為常態?.

以這兩個方法論，第一個似較爲簡單，因爲只包含正數，（所有改變的記分皆在0與100之間），而第二個方法，則生出許多正負數，且常爲命分數，既小而又不易處置。再者用 *Hull* 的方法所求出一個合併的記分55.67，雖一個中等學生，僅能懂得百分數者，亦能了解。而用 *Woodworth* 的方法，所求得的.405，只是有統計訓練的人，才能懂得。

但是 *Woodworth* 的方法，有一個特別的好處即是當兩三個測驗具的記分變爲削小的記分後，他們的相關量，很容易求出來。求這種相關量的方法，詳於第32表，表中載有十個人在記憶久暫測驗具上及常識測驗具上之削小的記分，及這兩個削小的記分次序的相關量，推算這個相關量的手續很簡單，因爲每個人在記憶久暫測驗具上之削小的記分，即爲他的 x 而除以 σx，而其在常識測驗具上之削小的記分，又爲他的 y 而除以 σy. 十個人之削小的記分之乘積總和，即爲 $\frac{\Sigma xy}{\sigma x\ \sigma y}$，而 $\gamma = \frac{\Sigma xy}{\sigma x \sigma y}$ 〔公式(24)〕，以 N(10)除之。$\frac{\Sigma xy}{\sigma x \sigma y}$ (7.31)以 N 除之即爲.731。

第三十二表

求兩組削小的記分之相關量

受測驗者	記憶久暫記分(X)	常識記分(Y)	削小的記分 $\left(\frac{X}{\sigma x}\right)$	削小的記分 $\left(\frac{X}{\sigma y}\right)$	削小記分之乘積 $\left(\frac{x\ y}{\sigma x\ \sigma y}\right)$
A	5	90	−1.19	....	....
B	9	60	.33	−1.45	−.566
C	8	90	....	....	....
D	7	85	−.39	−.24	.094
E	6	70	−.79	−.97	.766
F	10	100	.79	.49	.387
G	12	130	1.58	1.94	3.065
H	6	80	−.79	−.49	.387
I	5	75	−1.19	−.73	.869
J	12	120	1.58	1.46	2.307

但須記憶，苟分配式向一邊傾斜，而不呈常態現象，則以上兩個方法，皆不適用。前面已經說過，他們係根據常態形之假設而推出的。

IV 兩組測驗記分之和或較之σ

若是知道兩個次序 X_1 及X_2 的相關量及兩個次序的σ,苟把這兩個次序之相當的記分相加或相減，成為一個新合併的次序，則易求出這個新次序的σ 苟新分配式的記分，由兩個分配式之相當的記分相加而得的，則新 ,可由以下的公式求得，(參看 yule 的統計學原理PP210—211)

$$\sigma_s=\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2+2\gamma\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \qquad (67)$$

公式(67)內的σ_s,為新加的次序的σ, σ_{x_1}為X_1的σ, σ_{x_2}為X_2的σ,而γ為 X_1和X_2的相關系數，苟新分配式的記分，由兩個分配式之相當的記分相減而得的，則(67)變為

$$\sigma_d=\sqrt{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2-2\gamma\sigma_{x_1}\sigma_{x_2}} \qquad (68)$$

其中的σ_d為新減的次序的σ

試舉例證明以上兩個公式的用途。設 X_1 代表動字—目的格測驗具(vero object test) X_2代表意義相反的測驗具，又設$\sigma_{x_1}=11.18$, $\sigma_{x_2}=9.00$, $\gamma=.60$ 問 (1) X_1及X_2 之相當的記分相加後所成之新次序的 σ為什麼？(2) X_1及X_2 之相當的記分相減後所成之新次序的 σ為什麼？先應用公式(67)，把σ_{x_1}、σ_{x_2}及γ的量代入，則有

$$\sigma_s=\sqrt{(11.18)^2+(9.00)^2+2\times .60\times 11.18\times 9.00}$$

$$\sigma_s=18.07$$

故18.07即為(X_1+X_2)次序的σ 再求(X_1-X_2)次序的σ_d 把σ_{x_1}, σ_{x_2}

及γ的量代入公式(68)內，則有

$$\sigma_d=\sqrt{(11.18)^2+(9.00)^2-2\times.60\times11.18\times9.00}$$

$$\sigma_d=9.23$$

若把一個測驗具在另一個情形下，對於同羣的學生再施行一下，而欲求出這兩次所得的記分之差別的σ，則公式68，可合用。其方法和前相同，只是所用的僅是一個測驗具，有人反對公式(68)，蓋以公式(68)需要從這個測驗具先後兩次所得的記分的γ；除非要γ作別用，可以毋需把他求出來，否則很容易把從一個測驗具先後兩次所得的相當的記分，相減一下，直接求出他們的差數的σ來。

均點的可靠量$\sigma_{\bar{x}}=\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$〔公式(13)〕故$\sigma=\sqrt{N}\sigma_{\bar{x}}$，因此可用$\sqrt{N}\sigma_{\bar{x}}$代替$\sigma_{\bar{x}_1}$，$\sqrt{N}\sigma_{\bar{x}}$代替$\sigma_{\bar{x}_2}$，$\sqrt{N}\sigma_{\bar{x}s}$代替$cs$及$\sqrt{N}\sigma_{\bar{x}}d$代替$\sigma_d$，把相當的量代入公式(67)及公式(68)裏，則有(公式兩邊的N相消)

$$\sigma_{\bar{x}s}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2+2\gamma\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(69A)$$

及　$$\sigma_{\bar{x}d}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2-2\gamma\sigma_{\bar{x}_1}\sigma_{\bar{x}_2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(69B)$$

其中的$\sigma_{\bar{x}s}$爲(X_1+X_2)次序的均點的σ，而$\sigma_{\bar{x}d}$爲(X_1-X_2)次序的均點的σ

苟X_1和X_2之間有相關之處，則須應用公式(69A)及公式(69B)．苟X_1和X_2之間無關係，則根號下之第三項不能存在而公式(69A)及公式(69B)變爲

$$\sigma_{\bar{x}s}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(70A)$$

及　$$\sigma_{\bar{x}d}=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(70B)$$

若以σ_d代替$\sigma_{\bar{x}d}$於公式內(70B)內，則有$\sigma_d=\sqrt{\sigma_{\bar{x}_1}^2+\sigma_{\bar{x}_2}^2}$，而爲吾

入立時所認識，此即吾人所用以測量兩個均點的差別的可靠量。若略加改變，則變爲吾人所用以測量兩個 σ 或兩個 γ 的差別的可靠量的公式。所須記憶的，即爲(60)公式，係普通公式(69B)之一種特式而假定 X_1和X_2 之間無關係者，若欲再求PE代替 σ，則只須以 .6745 乘 σ 便行了。

V. 怎樣解釋兩個測驗具的相關系數

一個相關系數，何時才可以其爲高？若是兩個測驗具的γ爲.40，這個γ高呢，還是低呢？像這一類的問題，及其他別的問題和相關系數之解釋有關者，常常發生於測驗工作上，若想懂得已得的 γ 之意蘊，也應回答這些問題。

γ爲度量關係程度之工具其能力可藉幾個方法估量之，(1)藉推測的標準錯誤(2)藉測量的標準錯誤(3)藉因數的百分之幾，爲兩個有關係的能量所同有者，在立下一個普通定則，分別 γ 爲高，爲中等，爲低之前，須先研究γ的三種解釋法。

1. 藉推測的標準錯誤 σ(est)解釋相關系數

推測的標準錯誤，係估量相關系數的効能之最可實行的方法，蓋由於根據一個人在測驗2上所得的記分，便可推測其在測驗1上，能得的記分。推測的準確程度如何，$\sigma(\text{est.}x_1)$能明示之，而 $\sigma(\text{est.}x_1)$則全恃乎這兩個測驗具的γ如何。苟$\gamma=1.00$則$\sigma(\text{est.}x_1)=.00$；即謂根據$X_2$以推測 X_1上的記分，推測得非常準確，毫無錯誤。苟$\gamma=.00$則 $\sigma(\text{est.}x_1)$等於 σ_1；即謂我們只知道推測的記分，在X_1分配式的兩極端(已得的記分 ±3σ)以內的某處。換言之，根據分配式X_1以推測，其準確不優於根據分配式 X_1再加上分配式X_2。當γ自1.00漸漸小到零時，推測的標準錯誤漸漸加大，故根據消長方程式以推測，其準確之程度不一。自十分

準確一直到臆測爲止。故關係的大小可以σ_{est}的大小度量之。

舉例證之，假設兩個測驗具X_1及X_2的相關量爲 .60，而σ_1爲5.00，則$\sigma(est_1)$爲$5\sqrt{1-.6^2}$或4.00，只較$\gamma=.00$時之$\sigma(estx_1)$5.00（最低的推測力）小20%當γ自.00漸漸加大至1.00時，$\sigma(estx_1)$受$\sqrt{1-\gamma^2}$的影響，逐漸變小，故只從$\sqrt{1-\gamma^2}$上即能推測一個γ的"預測"力。$\sqrt{1-\gamma^2}$ *Kelley*（參看 Kelley T. L. Principles underlying the Classification of man. J of applied psy 1919, Vol III, 1, P40）稱之爲"疎遠系數"（Coefficient of alienation）而以K代表之，K係測量兩個變數X_1及X_2關係之烏有。γ係測量其關係的存在，故當$K=1.00$時，$\gamma=.00$當$K=.00$時，$\gamma=1.00$ 是疎遠系數愈大，相關係數愈小，預測的能力亦愈小，要表明γ逐漸增大時，預測程度如何逐漸準確，故把K量之隨γ自.00到1.00而變者求出來擺於第33表內。

注意 γ必爲.866，K始界於圓滿相關量和臆測之間，推測的標準錯誤，始減小一半，當γ爲.30或更小時，疎遠係數很大，而根據於此以預測，預測的程度猶近於臆測，雖當$\gamma=.99$時 推測的標準錯誤，猶等於$K=1.00$時所有之推測的標準錯誤$\frac{1}{7}$大，故想推測一個人的記分略爲準確一點，γ至少必須大於.90

第 三 十 三 表

奈γ量自.00到1.00，查K量

γ	$K=\sqrt{1-\gamma^2}$	γ	$K=\sqrt{1-\gamma^2}$
.00	1.0000	.80	.6000
.10	.9950	.8660	.5000
.20	.9798	.90	.4539
.30	.9539	.95	.3122
.40	.9165	.98	.1990
.50	.8660	.99	.1411

60	8000	1 00	0000
70	7141		
(7071)	7071		

2. 藉測量的標準錯誤解釋相關係數

在前面已說過測量的標準錯誤，能供我們推測從一個測驗具所得着的記分和其相當的眞記分之機遇的差別。又因爲 $\sigma(m)=\sigma_1\sqrt{1-\gamma_{12}}$，故這種機遇的差別量，大半恃乎自身相關$\gamma_1$的大小而定，故$\gamma$的量，可由$\sigma(m)$的大小斷之，當$\gamma=1\ 00$時，$\sigma(m)=00$，是每個已得的記分即爲眞記分。當$\gamma=00$時，$\sigma(m)=\sigma_1$(分配式的$\sigma$)，則我們只能知道眞記分落於已得的分配式之兩極端內某處。——在兩極端($\pm 3\sigma$)內，換言之，當$\gamma=00$時則已得的記分和眞記分之機遇的差別量，即如是大，設臆斷眞記分在已有的分配式某處，則在此處之記分，和已得的記分之差別量即爲此種機遇的差別量。

舉例證之。假設一個測驗具的可靠系數$\gamma_{12}=80$ $\sigma_1=10\ 00$，則$\sigma(m)=10\sqrt{1-80}$，或4 472.若$\gamma=00$，則$(m)=10\ 00$ 故知可靠系數.80，僅足以使其$\sigma(m)$小到等於臆測時之$\sigma(m)$之45%（因爲臆測時之$\sigma(m)=10\ 00$，當γ自0漸漸加大至於1 00時，$\sigma(m)$受$\sqrt{1-\gamma_{12}}$的影響，漸漸變小，故這個因數$\sqrt{1-\gamma}$，可用以試驗一個已得的可靠系數的效能，正如可用K以試驗兩個測驗具的γ之量一樣。$\sqrt{1-\gamma_{12}}$的量，已按照γ的量自00至1 00求出來，請看第34表。

第三十四表

案γ量自00到1 00査$\sqrt{1-\gamma}$量

γ	$\sqrt{1-\gamma_{12}}$	γ	$\sqrt{1-\gamma_{12}}$
00	1 0000	80	4472
10	9487	90	.3162
20	8944	95	2236

.30	.8367	.98	.1414
.40	.7746	.99	.1000
.50	.7071	1.00	.0000
.60	.6325		
.70	.5477		
.75	.5000		

看第34表，可知一個測驗具的自身相關量至小爲.75，$\sqrt{1-\ _{15}}$始得界於十足可靠量及臆測之間，，當$\gamma=.98$時，一個記分和眞記分之差別，不大於士.1 $14\sigma_1$之機會爲68%，因爲很高的可靠系數，譬如.80或更高，尙表示離十足可靠量很遠，則自身相關量之爲.30或.40者其缺價值可知。

3. 藉公共分子或因數之百分比解釋相關系數

把相關系數，當作一個比率，有時候很有用，這種比率，或直接，或間接表明有關係的測驗具所同有的份子或因數之百分比，可視之爲一種方法，表白一個測驗具內之因數之支配某種能量者，也包含於別的測驗具內而等於其因數全數的幾分之幾。(參看Kelley的統計學PP189—190)假設測驗具X所測量的能量恃乎(a+c)個獨立的原素的因數之有無，測驗具Y所測量的能量，恃乎(b+c)個獨立的原素的因數的有無，則a個因數只支配X的記分，b個因數只支配Y的記分，而c個因數爲X及Y所同有，再設所有的因數a,b,及c,皆只受機遇律支配。故每個因數的發現機會均等，正如擲錢其花面字面向上之機會均等一樣。

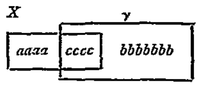
若設Na=因數a的數目，Nb=因數b的數目，Nc=因數c的數目，則x和y的相關量(參看Kelley之統計學第190頁)

$$\gamma=\frac{Nc}{\sqrt{(Na+Nc)(Nb+Nc)}} \quad \cdots\cdots\cdots (71)$$

可以依上面的公式求出來。

可知相關系數等於X及Y所同有的因數數目，而除以X及Y各個所有之因數數目之幾何均點，這種情形，可以第27圖表之，其中之X受8個因數支配，四個a,4個c，Y受11個因數支配，7個b,4個c,相關量爲

$$\gamma=\frac{4}{\sqrt{(4+4)(7+4)}}\text{或爲}\frac{4}{\sqrt{8\times 11}}=.426$$



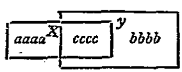
$$\gamma=\frac{4}{\sqrt{11\times 8}}=.246$$

第二十七圖

若是支配X的因數數目，等於支配Y的因數數目，則$N_a=N_b$，公式(71)變爲

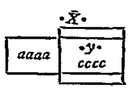
$$\gamma=\frac{N_c}{N_a+N_c}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(72)$$

觀此可知相關系數，爲一個命分分數，表示因數之支配X及Y的有幾分之幾爲X及Y所同有。設t代表公共因數N_c，s代表因數數目(N_a+N_c)之在X及Y上者則γ爲$\frac{s}{t}$(所須記憶者,即爲支配X及Y之因數數目及其影響力均假設之均等)。這種情形，以第28圖表白之，X受8個因數支配，4個a及4個c.Y亦受八個因數支配，4個b及4個c.由公式(72)求出相關量爲$\frac{4}{8}$或.50.



$$\gamma=\frac{s}{t}=.50$$

第二十八圖



$$\gamma=\frac{4}{\sqrt{4\times 8}}=.707$$

第二十九圖

再假設Y完全受N_c個份子所支配，而X則受同樣的份子再加上N_a

個份子所支配，則公式(71)變爲

$$\gamma=\frac{Nc}{\sqrt{Nc(N+Nc)}}\cdots\cdots(73)$$

而相關系數，則等於X及Y所同有之因數數目，被X及Y所有的因數數目的幾何均數除之，參看第29圖，y爲4c所支配，X被同樣的因數，及a所支配，故相關系數，爲 $\frac{4}{\sqrt{4\times8}}$ 或.707.若把γ平方之，則有。

$$\gamma^2=\frac{Nc}{Na+Nc}\cdots\cdots(74)$$

是系數的平方，表明Y的份子，全數包括於X的份子內，或X的份子之一部份，包括於Y內，第29圖，表明Y包括X的50%，而 $\gamma^2=(.707)^2$，或.50，果如其所應如是者。(這個結果，很有意義，若是測驗具X_2的所有份子，和測驗具X_1(即是標準)的所有份子相同則X_2包括於X_1的程度等於系數 $\gamma_{x_1x_2}$ 的平方。但須根據這種假定，兩個測驗具的記分，係獨立的相同的份子之總和，而每個份子的出沒，只受機會律之支配。又因爲γ=.707時，疎遠系數亦等於.707，(參看第33表)。故之等於.707者(不是.50)，應視爲圓滿相關量之半。(參看 Worworth R. S. Combining the results of several test: a study in Statistical me hod Psy Review, 1912, XIX, P. 113, 及 Hull blark the joint yield from, teams of tests, j of Edu Psy, 1923, 14, PP 396. 406. 根據同樣的假設，公共份子，達全數之33%者，即是 $\gamma^2=.3334$，可產生一個γ=(.574)，適合圓滿相關量之 $\frac{1}{3}$.公共份子達全數之25%者，可產生一個γ=.50，適合圓滿相關之 $\frac{1}{4}$.故γ之爲.30或更小者，重叠之程度很小，故公共份子的百分比亦很小。

相關系數爲公共因數之百分比的度量，在拋錢或擲骰子所得之次

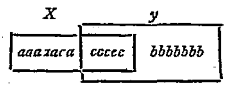
序上，可以顯出他的長處來。在拋錢上，重疊的程度，可以任意支配，試舉一例明之，請看第30圖內的相關表，其中有兩個次序，每個次序皆含有500次拋擲，(擲 2個錢)求這兩個次序的關係。先把12錢拋一下，記下花面的數目，記於X橫行內，以後留下5個錢不動，把其餘的7個錢，再擲一下，連同未拋的5個錢記算，看一共有多少花面。把這數目記下來。記於y直行內。(附在X記錄之對面)如此有五個因數，對於每對拋擲的貢獻一樣，案照公式(72)推算，其相關量應爲 $\frac{5}{12}$ 或.416. 應用乘積法，求出這兩個次序的實在的相關量爲 .424. 可知實在的和理想的結果，符合的程度很高，這種情形，已在第 30 圖上，表示出來，若是留下4 個錢不動，則γ將爲$4/12$，或.334.若是留下6 個錢不動，γ將爲$6/12$或.50等等，現在已把公共因數的數目，(錢之丟下不動者)自O漸漸變至12，γ自O漸漸變至1.00,造出許多圖來。(請看Pearl's Medical Biometry and statistics, PP 234—300)

第　三　十　圖

把12個錢擲500次圖中所表示的係每次所得之花面之數目先擲12個錢以後留下5個不動把其餘的再擲一下

第一次拋擲所得之花面數目

第二次拋擲所得之花面數目	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	總數
12														
11								1						1
10					1		2		2	3	1	1		10
9						2	9	13	4	3				31
8				1	5	9	10	18	14	4	2			63
7			1	2	5	14	24	28	10	7	4			95
6			1	3	9	18	27	29	16	3	2	1		109
5				4	11	23	21	15	9					83
4			3	6	9	21	14	10	5	1				69
3			3	3	8	4	4	4						26
2			3	1	5	1	1							11
1					1	1								2
0														
總數			11	20	54	93	1 2	118	60	21	9	2		500



$Nc=5$

$Na=Nb=7$

$$\gamma=\frac{Nc}{Na+Nc}=\frac{5}{12}=416 \tag{72}$$

用乘積法推算，求得

$\gamma=424$

（上面的材料係取自 Pearl R medical Biometry and statistics P 297）

第三六圖

把骰子擲100次其結果如圖所示先擲5個骰子(x)記下點子的數目骰子則留下不動再另擲5個骰子(y)看一共有多少點連同前5個骰子計算

第一次擲5个骰子所獲得之點子數目(X)

		10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	總數
第二次擲10個骰子	45													1	1	1	3
	45									1							1
	43								2				1		2		5
	42								1	1	1		1	1		1	6
	41								1					1			2
	40							2	3					1			6
	39							2	2	1							6
	38					1		1	1	1	2	1			1		9
	37			1			1	2	2	1	1	1				1	6
	36				1	1	2	2	1	1							8
	35				1		1	2	1	1	2		1				9
	34			1	1			2	1	1	2		1				9
	33	1			1					1							3
	32					1	2	1									5
	31			1	1		1			1	1						5
	30					2		1	1								4
	29	1							1								2
	28			2		1	1	1									5
	27			2				1									3
	26	1															1
	25		1			1											2
	總數	3	1	7	3	6	4	11	12	14	15	6	6	5	4	3	100

用乘積法推算，求得

$\gamma = 0\,694$

$Nc = 9 \quad Na = 5$

	X	
	(5) *aaaaa*	(5) *ccccc*
	y	

$$\gamma = \frac{Nc}{\sqrt{Nc(Na+Nc)}} = \frac{5}{\sqrt{5\times 10}} = 707 \qquad (73)$$

假設按照以下的方法擲骰子，(這個實驗是著作者自己所做的)得着兩個次序，再求這兩个次序的相關量，先擲5個骰子，看有多少點，記於X直行下，以後另擲5個骰子，看一共有多少點，(連同前5個骰子的點子數目計算)記於y直行下，如此擲一百次，得着一百個X及一百個y記錄，每個y拋擲，其因數(10個骰子)包括於X內者佔全數之50%，故X與y之相關量，得藉公式(73)求出之，求出$\gamma = \frac{5}{\sqrt{5\times 10}}$或707。(參看第31圖及其附圖)應用乘積法，又求出其相關量爲694，可知實在的和理想的結果符合的程度亦很高，γ的平方，幾等於50，故此爲X及y之公共份子的百分比，且適爲圓滿相關量之半，(參看第266頁)

公式(71－74)很有趣，而能啓示，在一定特別情形之下，能給我們以解釋相關係數之方法，但在任何情形之下，若謂把相關係數平方之，即能斷定公共因數的百分比，或重疊的分量則大錯，蓋大半心理測驗具上的記分，許多社會測驗及教育測量上的記分，似爲許多互相依賴，交雜極密的因數的合力的結果，然而一個測驗具的記分，果爲許多獨立的相似的份子之總和，則非吾人之所得知。

結　論

果如前幾節所說，相關係數視爲很高者，仍去圓滿相關量很遠，嚴格說起來，相關係數必爲.95或更大，方得視之爲高，但在心理社

會教育測驗具上，有許多主要的錯誤的來源，大概由於材料很蕪雜，測量工作太草率，以致測驗相關量，不能高到.95以上，而能高於.70或.75者亦不多，有此缺點，只得認.70,亦爲高了。相關量之高低，而爲測驗學者所公認者，舉之如下

γ從.00到±.20爲無足輕重之關係或無關係。

γ從±.20到±.40爲低相關量，有關係，但很低，

γ從±.40到±.70爲中等相關量。

γ從±.70到±1.00爲高相關量。

這種等級，係臨時定的，亦大概不錯。但相關系數的大小，應視其所有的材料性質，樣形的大小，及PE_r的大小，而小心估量之，不管其實量如何。

問　題

1. 一個測驗具的自身相關量爲.60

   A. 問此測驗具必須延長多少倍，方得提高其自身相關量至.90?

   B. 加長測驗具一倍，問其效力及於可靠量若干

2. 兩個相等的半個量表，係從 *Downey will Temperament* 測驗具所造成，其構造之法如下 (1) 把所有單數仔測驗，構成一個半個量表，與所有雙數仔測驗，構成另一個半個量表 (2) 合併測驗具每式 (Pattern) 的前兩個仔測驗，爲一個半個量表，合併測驗具每式的後兩個仔測驗，爲另一個半個量表。(3) 合併測驗具每式的第一個及最後一個仔測驗，爲一個半個量表。合併每式的第二個及第三個仔測驗，爲另一個半個量表。

   每個半個量表的可靠系數，按照以上三法，求出如下

方法	可靠系數	
1	.17	
2	.31	
3	.24	$N=146$
均點	.24	

問全體 *D oney* 測驗具的可靠量如何？（參看 Ruch G. M. 及Del manzo M. C. 的 the Downey will temperament group test: a fur her analyeis of the reliability and validity j. of applied psy. vo'. VII, 1523, P65)

3.在一個小團體內，一個測驗具的可靠系數爲.55，而其記分的σ爲3.00，若在一個大團體內，記分的σ爲5.00，問此測驗具的自身相關量如何，才有同等的可靠量？

4.一個測驗具的可靠系數，得自一個大而任意抽選的團體爲.92.其均點爲142，而其σ爲16.00，若是一個人得着一個記分150。

(*A*)問這個記分的*PE*，卽是*PE*(m)，如何？

(*B*)問眞記分落於什麼界限內？

(*C*)第三個測驗具，測驗別的功能，其可靠系數爲.85，而其均點爲54，σ爲10.00，問那一個測驗具的記分較可靠些，接近眞記分些？

5.一個測驗具的可靠系數爲.80，問從這個測驗具所能得着的最大的自身相關量如何？

6.以下的記載，(以秒記算)是從100個 *Ba nard* 大學第一年級學生求出的，而學生*A*的記分，亦在下面（參看 Carothers F.E. the Psychological examination of college student; archives of

Psy 1921, no. 46 PP 21 ff)

測驗具	配對測驗具 co ordinate	敲拍測驗具 Tapping	辨別顏色測驗具 Discrimination of colors	意義相反的測驗具 Opposite
均點	82 7	376 3	57 0	51 1
σ	10 8	51 7	8 8	10 3
A的記分	85	350	62	40

A 按聯差異趨勢的大小，合併A 的記分，定各個測驗具的重量為1。

B 按畢差異趨勢的大小，合併A 的記分，定配整測驗具，及搞拍測驗具的重量為1，辨別顏色測驗具的重量為3，意義相反的測驗具的重量為4。

7 應用問題 6的材料，並應用(256－258)頁上的兩個方法，合併 A 的記分，因為所有的記分皆以秒計算，故記分大者，其實為小。

8 150 個中學第四年級學生，在一個智力測驗具上，得着一個均分120 及 $\sigma=21\ 6$，兩星期後，測驗者極力稱贊其好，而不示之以其各個所得之記分，再令之受一次測驗，而此次所用之測驗具，係此種智力測驗具之第2式，得着均點為126及σ 為 23 2 這兩個測驗具之γ為.86。

(a) 問激刺（稱贊）及練習的影響，足以提高均點嗎，問怎樣去掉練習的影響？

(b) 問何以要有這兩個測驗具的相關量？

9 一個測驗具和標準的γ 為 .85，假定在這個測驗具上的動作，完全受X份子所支配，在標準上的動作，完全受$(X+y)$份子所支配。問這個測驗具包括標準的程度如何？

10 用三種方法，解釋γ之等於 50及 65者。

答　數

1 (*a*)6倍

(*b*)$\gamma=75$

2 方法1，$\gamma=29$方法2　$\gamma=47$方法3，$\gamma=33$均點　$\gamma=38$

3 $\gamma=84$

4. (*a*)$PE(\mathrm{m})=3\ 05$

(*b*)落於162.2及137 8之間

(*c*)第一個測驗具

$\frac{PE_m}{X}=021$(第一個測驗具)

$\frac{PE_m}{X}=047$(第二個測驗具)

5 $\gamma=89$

6 (*a*)以1，$\frac{1}{5}$，,1，及1 爲4個測驗具的倍數，得着 257 爲*A* 的合併記分。

(*b*)*A* 的記分爲 501 (因爲記分爲時刻準備故記分愈大，其質愈小。)

7 *A*的記分爲42及65，其均點爲52 75(Hull的方法)*A*的記分爲－21 3，509，－568，1 078，其均點爲.202。(這個結果表明*A*高於這羣學生的4個測驗具的均點，.202σ)

8 (*a*)是的，因爲 $\frac{D}{6\sigma}=5+$

9 公共份子，約佔 72 %

南京書店出版各書

類別	書名	著者	定價
文學類	四人及其他（劇本集）	王古魯譯	一册實洋七角
文學類	光明（小說集）	羅西作	一册實洋三角
文學類	巨盜（小說集）	倘鉞作	一册實洋八角
文學類	定慧方丈（小說集）	周樂山著	一册實洋三角
文學類	蜘蛛男（偵探小說）	黃宏鑄譯	一册實洋八角
文學類	詞林佳話	陳登元輯註	一册實洋五角
文學類	唐人故事詩	陳登元編	一册實洋五角
文學類	中國文學體例談	楊啓高著	一册實洋四角
政治類	三民主義下之地方自治	馮棨著	一册實洋五角
政治類	國民政府組織法研究	馮霞著	一册實洋四角
史地類	日本地理	周光倬編	一册實洋壹元二角
史地類	法國的革命	杜殊寄編	一册實洋五角
英文知	實用標準英文繙譯法上册	程璟生著	一册實洋壹元五角

實用統計學

每冊實價大洋壹元四角

外埠酌加郵費

中華民國二十一年四月初版

譯　者	劉迺敬
發行者	南京書店
總發行所	南京書店 南京太平路二四一號
分發行所	上海河南路四九五號
分售處	各省各大書局