Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis II

Arbeitsblatt 47

Übungsaufgaben

Aufgabe 47.1. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum von endlicher Dimension. Zeige, dass der Dualraum V^* die gleiche Dimension wie V besitzt.

Aufgabe 47.2. Es sei K ein Körper und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum mit Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$. Es sei

$$V^* := \operatorname{Hom}_K (V, K)$$

der Dualraum zu V. Zeige, dass auf V^* die Koordinatenfunktionen $v_1^*, \ldots, v_n^*$, die durch

$$v_j^*(v_k) = \begin{cases} 1, \text{ falls } j = k, \\ 0 \text{ sonst,} \end{cases}$$

definiert sind, eine Basis von V^* bilden.

Aufgabe 47.3. Betrachte die Linearform

$$L\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y, z) \longmapsto x + 3y - 4z.$$

(1) Bestimme den Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft

$$\langle u, v \rangle = L(v) \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^3\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ das Standardskalarprodukt bezeichnet.

(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 3x - 2y - 5z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $\varphi = L|_E$ die Einschränkung von L auf E. Bestimme den Vektor $w \in E$ mit der Eigenschaft

$$\langle w, v \rangle = \varphi(v) \text{ für alle } v \in E\,,$$

wobei $\langle -, - \rangle$ die Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E bezeichnet.

Aufgabe 47.4. Zeige, dass ein Skalarprodukt eine nicht-ausgeartete Bilinearform ist.

Aufgabe 47.5. Es sei V ein euklidischer Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, der mit dem induzierten Skalarprodukt versehen sei. Es sei

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform und $v \in V$ der zugehörige Gradient im Sinne von Lemma 47.5. Zeige, dass der Gradient $u \in U$ zur Einschränkung $f|_U$ die orthogonale Projektion von v auf U ist.

Aufgabe 47.6. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Zeige, dass eine von 0 verschiedene lineare Abbildung

$$f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$$

keine lokalen Extrema besitzt. Gilt dies auch für unendlichdimensionale Vektorräume? Braucht man dazu Differentialrechnung?

Aufgabe 47.7. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto x^2y - z^3xe^{xyz},$$

in jedem Punkt $P \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 47.8. Berechne den Gradienten der Funktion

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y,z) \longmapsto \frac{xyz - z^2}{\ln(xy) + z^2},$$

in jedem Punkt $P \in G$ mit $G = \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}_{>1} \times \mathbb{R}$

Aufgabe 47.9. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass f und $(Df)_P$ im Punkt P den gleichen Gradienten besitzen.

Aufgabe 47.10.*

Wir betrachten Dreiecke mit den beiden fixierten Eckpunkten $(-1,0)$ und $(1,0)$ und dem variablen Eckpunkt (x,y).

(1) Erstelle eine Formel für den Flächeninhalt des Dreieckes mit den Eckpunkten $(-1,0),(1,0),(x,y)$.
(2) Erstelle eine Formel für den Umfang des Dreieckes mit den Eckpunkten $(-1,0),(1,0),(x,y)$.
(3) In welche Richtung muss man den dritten Punkt (x,y) bewegen, damit der Flächeninhalt möglichst schnell wächst?

(4) In welche Richtung muss man den dritten Punkt (x, y) bewegen, damit der Umfang möglichst schnell wächst?

Aufgabe 47.11.*

Wir betrachten ein Ballspiel, bei dem das Tor durch die Eckpfosten $(-1, 0)$ und $(1, 0)$ gegeben ist. Der Ball (bzw. der ballführende Spieler) befindet sich in der variablen Position (x, y). Die Wahrscheinlichkeit, von einer bestimmten Position aus ein Tor zu erzielen, hänge direkt vom Winkel (Torschusswinkel) ab, der das Dreieck $(-1, 0), (1, 0), (x, y)$ im Punkt (x, y) besitzt (man denke an die Situation, wo der Spieler allein vor dem leeren Tor steht und es allein auf die Zielgenauigkeit ankommt).

(1) Erstelle eine Formel für den Torschusswinkel in Abhängigkeit von der Ballposition (x, y).
(2) Skizziere die Menge der Punkte, für die der Toreinschusswinkel gleich 90 Grad ist.
(3) In welche Richtung muss der Ball bewegt werden, damit der Torschusswinkel möglichst schnell wächst?

Aufgabe 47.12. Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, $G \subseteq V$ eine offene Menge, $P \in G$ ein Punkt und

$$f \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine in P differenzierbare Funktion. Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum Kern von $(Df)_P$ gehört, wenn er orthogonal zum Gradienten $\operatorname{Grad} f(P)$ ist.

Aufgabe 47.13. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2 + y^2 .$$

Aufgabe 47.14.*

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto xy^2 - x .$$

Aufgabe 47.15. Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x^2y - y^2 + x .$$

Aufgabe 47.16. Es seien L und M Mengen und $L \times M$ ihre Produktmenge. Beschreibe die Faser der Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto y,$$

über einem Punkt $y \in M$. Kann die Faser leer sein?

Aufgabe 47.17. Seien $L_1, \ldots, L_n$ und $M_1, \ldots, M_n$ Mengen und seien

$$\varphi_i \colon\ L_i \longrightarrow M_i$$

Abbildungen. Zu einem Punkt $P_i \in M_i$ sei $F_i \subseteq L_i$ die Faser von φ_i über P_i. Zeige, dass die Faser der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n$ über $P = (P_1, \ldots, P_n)$ gleich $F_1 \times \cdots \times F_n$ ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 47.18. (4 Punkte)

Berechne den Anstieg der Funktion

$$f \colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2y - x + y^3,$$

im Punkt $P = (1, 1)$ in Richtung des Winkels $\alpha \in [0, 2\pi]$. Für welchen Winkel ist der Anstieg maximal?

Aufgabe 47.19. (5 Punkte)

Betrachte die Funktion

$$f \colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x + \sin(y) - xz.$$

(1) Bestimme den Gradienten G von f im Punkt $P = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ bezüglich des Standardskalarprodukts $\langle -, - \rangle$.
(2) Es sei

$$E = \{(x, y, z) \mid 2x - y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

und es sei $g = f|_E$ die Einschränkung von f auf E. Bestimme den Gradienten $\tilde{G}$ von g bezüglich der Einschränkung des Standardskalarprodukts auf E.
(3) Zeige, dass $\tilde{G}$ die orthogonale Projektion von G auf E ist.

Aufgabe 47.20. (4 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte der Funktion

$$f \colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy^3 - xy + \sin y.$$

Aufgabe 47.21. (5 Punkte)

Bestimme die kritischen Punkte zur Funktion

$$f(x,y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 6y^3 - 6x^2y + 8y^2$$

aus Beispiel 46.9.

Abbildungsverzeichnis