Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 13

Projektionen

Zu einer direkten Summenzerlegung $V = U_1 \oplus U_2$ nennt man die Abbildung

$$p_1 \colon V \longrightarrow U_1,\, v_1 + v_2 \longmapsto v_1,$$

die erste Projektion (oder Projektion auf U_1 bezüglich der gegebenen Zerlegung oder Projektion auf U_1 längs U_2) und entsprechend

$$p_2 \colon V \longrightarrow U_2,\, v_1 + v_2 \longmapsto v_2,$$

die zweite Projektion zu dieser Zerlegung. Da die U_1 und U_2 Untervektorräume von V sind, ist es sinnvoll, die Gesamtabbildung

$$V \xrightarrow{p_1} U_1 \longrightarrow V$$

ebenfalls als Projektion zu bezeichnen. Dann liegt eine Projektion im Sinne der folgenden Definition vor.

Definition 13.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

heißt *Projektion* von V auf U, wenn $U = \operatorname{bild} \varphi$ und $\varphi|_U = \operatorname{Id}_U$ ist.

Beispiel 13.2. Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und v_i, $i \in I$, eine Basis von V. Zu einer Teilmenge $J \subseteq I$ sei

$$V_J = \langle v_i,\, i \in J \rangle$$

der zu J gehörende Untervektorraum und

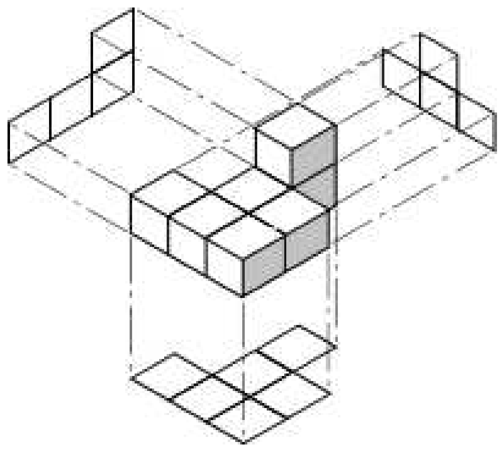
$$p_J \colon V \longrightarrow V,\, \sum_{i \in I} a_i v_i \longmapsto \sum_{i \in J} a_i v_i,$$

die zugehörige Projektion. Das Bild dieser Projektion ist V_J und man kann die Abbildung auch als

$$p_J \colon V \longrightarrow V_J$$

auffassen. Der Kern der Abbildung ist

$$\operatorname{kern} p_J = \langle v_i,\, i \notin J \rangle.$$



Beispiel 13.3. Für den $\mathbb{R}^3$, versehen mit der Standardbasis, ergeben sich (im Sinne von Beispiel 13.2 betrachtet man die zweielementigen Teilmengen $J \subset \{1, 2, 3\}$) drei verschiedene Projektionen[1] auf die Koordinatenebenen. Man nennt

$$p_{\{1,2\}} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, (a, b, c) \longmapsto (a, b, 0),$$

die Projektion auf die Grundebene,

$$p_{\{1,3\}} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, (a, b, c) \longmapsto (a, 0, c),$$

die Projektion auf die Aufebene,

$$p_{\{2,3\}} \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, (a, b, c) \longmapsto (0, b, c),$$

die Projektion auf die Kreuzebene (oder Seitenebene). Die Bilder eines Gegenstandes im $\mathbb{R}^3$ unter diesen Projektionen heißen auch Grundriss, Aufriss und Kreuzriss.

Zu einelementigen Teilmengen $\{j\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ gehören die Projektionen auf die Achsen.

Eine abstraktere Definition ist die folgende, die a priori ohne Bezug auf einen Untervektorraum auskommt.

Definition 13.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

heißt *Projektion*, wenn

$$\varphi^2 = \varphi$$

gilt.

[1] Diese Projektionen sind sogar sogenannte orthogonale Projektionen. Davon kann man nur sprechen, wenn man ein Skalarprodukt zur Verfügung hat, was wir im zweiten Semester behandeln werden. Hier liegen einfach nur lineare Projektionen vor, die, anders als im orthogonalen Fall, wesentlich vom gewählten direkten Komplement abhängen.

Die Identität und die Nullabbildung sind Projektionen.

Lemma 13.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer direkten Zerlegung*

$$V = U \oplus U'$$

ist die Projektion auf U eine Projektion im Sinne von Definition 13.4. Eine solche Projektion

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

führt umgekehrt zu einer Zerlegung

$$V = \operatorname{kern} \varphi \oplus \operatorname{bild} \varphi,$$

und φ ist die Projektion auf $\operatorname{bild} \varphi$.

Beweis. Es sei π_U die Projektion auf U. Für $v = u + u'$ mit $u \in U$, $u' \in U'$ gilt dann

$$\pi_U(\pi_U(u + u')) = \pi_U(u) = u = \pi_U(u + u'),$$

also

$$\pi_U^2 = \pi_U.$$

Sei umgekehrt

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine Endomorphismus mit

$$\varphi^2 = \varphi.$$

Es sei $x \in \operatorname{kern} \varphi \cap \operatorname{bild} \varphi$. Dann gibt es insbesondere ein $y \in V$ mit

$$\varphi(y) = x.$$

Dann ist

$$x = \varphi(y) = \varphi(\varphi(y)) = \varphi(x) = 0,$$

d.h. der Durchschnitt der beiden Untervektorräume ist der Nullraum. Für ein beliebiges $v \in V$ schreiben wir

$$v = \varphi(v) + (v - \varphi(v)).$$

Dabei gehört der vordere Summand zum Bild und wegen

$$\varphi(v - \varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(\varphi(v)) = \varphi(v) - \varphi(v) = 0$$

gehört der hintere Summand zum Kern. Es liegt also eine direkte Summenzerlegung vor. $\square$

Homomorphismenräume

Definition 13.6. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Dann nennt man

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \{f : V \to W \mid f \text{ lineare Abbildung}\}$$

den *Homomorphismenraum*. Er wird versehen mit der Addition, die durch

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$

definiert wird, und der Skalarmultiplikation, die durch

$$(\lambda f)(v) := \lambda \cdot f(v)$$

definiert wird.

Nach Aufgabe 13.8 handelt es sich in der Tat um einen K-Vektorraum.

Beispiel 13.7. Es sei W ein K-Vektorraum über dem Körper K. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(K,W) \longrightarrow W,\ \varphi \longmapsto \varphi(1),$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen, siehe Aufgabe 13.10.

Der Homomorphismenraum $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ spielt auch eine wichtige Rolle. Er heißt *Dualraum* zu V und wir werden ihn in den nächsten beiden Vorlesungen genauer besprechen.

Lemma 13.8. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Eine lineare Abbildung*

$$\varphi\colon U \longrightarrow V$$

mit einem weiteren Vektorraum U induziert eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(U,W),\ f \longmapsto f \circ \varphi.$$

(2) *Eine lineare Abbildung*

$$\psi\colon W \longrightarrow T$$

mit einem weiteren Vektorraum T induziert eine lineare Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,T),\ f \longmapsto \psi \circ f.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 13.14. □

Lemma 13.9. *Es sei V ein K-Vektorraum mit einer direkten Summenzerlegung*

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

Es sei W ein weiterer K-Vektorraum und es seien

$$\varphi_1\colon U_1 \longrightarrow W$$

und

$$\varphi_2\colon\, U_2 \longrightarrow W$$

lineare Abbildungen. Dann ist durch

$$\varphi(v) \;=\; \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)$$

eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon\, V \longrightarrow W$$

gegeben.

Beweis. Die Abbildung ist wohldefiniert, da die Darstellung $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in U_1$ und $v_2 \in U_2$ eindeutig ist. Die Linearität ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \varphi(av + bv') &= \varphi_1((av + bv')_1) + \varphi_2((av + bv')_2) \\ &= \varphi_1(av_1 + bv_1') + \varphi_2(av_2 + bv_2') \\ &= a\varphi_1(v_1) + b\varphi_1(v_1') + a\varphi_2(v_2) + b\varphi_2(v_2') \\ &= a\varphi_1(v_1) + a\varphi_2(v_2) + b\varphi_1(v_1') + b\varphi_2(v_2') \\ &= a\varphi(v) + b\varphi(v'). \end{aligned}$$

□

LEMMA 13.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es seien*

$$V \;=\; V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$

und

$$W \;=\; W_1 \oplus \cdots \oplus W_m$$

direkte Summenzerlegungen und es seien

$$p_j\colon\, W \longrightarrow W_j$$

die kanonischen Projektionen. Dann ist die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \prod_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m} \operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)\,,\; f \longmapsto p_j \circ (f|_{V_i})\,,$$

ein Isomorphismus. Wenn man die $\operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)$ *als Untervektorräume von* $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ *auffasst, so liegt eine direkte Summenzerlegung*

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \;\cong\; \bigoplus_{1 \le i \le n,\, 1 \le j \le m} \operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)\,.$$

vor.

Beweis. Dass die angegebene Abbildung linear ist, folgt direkt aus Lemma 13.8. Zum Nachweis der Injektivität sei $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ mit $f \neq 0$ gegeben. Dann gibt es ein $v \in V$ mit

$$f(v) \;\neq\; 0.$$

Sei $v = v_1 + \cdots + v_n$ mit $v_i \in V_i$. Dann ist auch $f(v_i) \neq 0$ für ein i. Dann ist auch $(f(v_i))_j$ für ein j und damit ist

$$f_{ij} \;=\; p_j \circ (f|_{V_i}) \;\neq\; 0.$$

Zum Nachweis der Surjektivität sei eine Familie von Homomorphismen $f_{ij} \in \operatorname{Hom}_K(V_i, W_j)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, gegeben, die wir als Abbildungen nach W auffassen. Dann sind die

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} f_{ij}$$

lineare Abbildungen von V_i nach W. Dies ergibt nach Lemma 13.9 eine lineare Abbildung $\sum_{i=1}^{n} f_i$ von V nach W, die auf die vorgegebenen Abbildungen einschränkt. □

SATZ 13.11. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Es sei $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ eine Basis und $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W. Dann ist die Zuordnung*

$$\operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Mat}_{m \times n}(K),\ f \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f),$$

ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.

Beweis. Die Bijektivität wurde in Satz 10.14 gezeigt. Die Additivität folgt beispielsweise aus

$$\begin{aligned} (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f+g))_{ij} &= ((f+g)(v_j))_i \\ &= (f(v_j) + g(v_j))_i \\ &= f(v_j)_i + g(v_j)_i \\ &= (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(f))_{ij} + (M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(g))_{ij}, \end{aligned}$$

wobei der Index i die i-te Komponente bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ bezeichet. □

Man kann auch die zu den Basen gehörende direkte Summenzerlegung in die eindimensionalen Untervektorräume Kv_i bzw. Kw_j betrachten und Lemma 13.10 anwenden.

KOROLLAR 13.12. *Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume mit den Dimensionen n bzw. m. Dann ist*

$$\dim(\operatorname{Hom}_K(V, W)) = nm.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 13.11. □

Untervektorräume von Homomorphismenräumen

LEMMA 13.13. *Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K. Dann sind die folgenden Teilmengen Untervektorräume von* $\operatorname{Hom}_K(V, W)$.

(1) *Zu einem Untervektorraum $U \subseteq V$ ist*

$$S = \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \varphi|_U = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$. *Wenn* V *und* W *endlichdimensional sind, so ist*

$$\dim(S) = (\dim(V) - \dim(U))\dim(W).$$

(2) *Zu einem Untervektorraum* $U \subseteq W$ *ist*

$$T = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W) \mid \mathrm{bild}\,\varphi \subseteq U\}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$, *der zu* $\mathrm{Hom}_K(V,U)$ *isomorph ist. Wenn* V *und* W *endlichdimensional sind, so ist*

$$\dim(T) = \dim(V) \cdot \dim(U).$$

(3) *Zu Untervektorräumen* $V_1 \subseteq V$ *und* $W_1 \subseteq W$ *ist*

$$H = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W) \mid \varphi(V_1) \subseteq W_1\}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$. *Wenn* V *und* W *endlichdimensional sind, so ist*

$$\dim(H) = \dim(V_1)\dim(W_1) + (\dim(V) - \dim(V_1))\dim(W).$$

(4) *Zu Untervektorräumen* $V_1, \ldots, V_n \subseteq V$ *und* $W_1, \ldots, W_n \subseteq W$ *ist*

$$L = \{\varphi \in \mathrm{Hom}_K(V,W) \mid \varphi(V_1) \subseteq W_1 \text{ und } \varphi(V_2) \subseteq W_2 \text{ und } \ldots \text{ und } \varphi(V_n) \subseteq W_n\}$$

ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}_K(V,W)$.

Beweis. (1). Die Untervektorraumeigenschaft ist klar. Zur Dimensionsaussage sei U' ein direktes Komplement zu U in V, also

$$V = U \oplus U'.$$

Es sei $u_1, \ldots, u_r$ eine Basis von U'. Jede lineare Abbildung aus S bildet U auf 0 ab, und auf U' bzw. auf der Basis hat man freie Wahl. Daher ist

$$S \cong \mathrm{Hom}_K(U', W)$$

und die Dimensionsaussage folgt aus Korollar 13.12.

(2). Die Untervektorraumeigenschaft ist wieder klar. Die natürliche Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(V,U) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(V,W)$$

von Lemma 13.8 (2) ist in diesem Fall injektiv und daher ist

$$T \cong \mathrm{Hom}_K(V,U).$$

(3). Die Untervektorraumeigenschaft ist klar. Im endlichdimensionalen Fall sei

$$V = V_1 \oplus V_2$$

eine direkte Summenzerlegung. Nach Lemma 13.10 ist

$$\mathrm{Hom}_K(V,W) = \mathrm{Hom}_K(V_1,W) \oplus \mathrm{Hom}_K(V_2,W)$$

und es ist
$$H \;=\; \operatorname{Hom}_K(V_1, W_1) \oplus \operatorname{Hom}_K(V_2, W)\,.$$
Daher ist die Dimension gleich
$$\begin{aligned}&\dim(V_1) \cdot \dim(W_1) + \dim(V_2) \cdot \dim(W)\\ &\qquad = \dim(V_1)\dim(W_1) + (\dim(V) - \dim(V_1))\dim(W)\,.\end{aligned}$$

(4). Mit
$$L_i \;=\; \{\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W) \mid \varphi(V_i) \subseteq W_i\}$$
ist $L \;=\; \bigcap_{i=1}^k L_i$. Daher folgt (4) aus (3). ☐

Bemerkung 13.14. Es sei K ein Körper und es seien V und W endlichdimensionale K-Vektorräume. Wir betrachten die natürliche Abbildung
$$\Psi\colon\; V \times \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow W,\; (v, \varphi) \longmapsto \varphi(v),$$
wobei links der Produktraum steht. Diese Abbildung ist im Allgemeinen nicht linear. Es ist zwar einerseits
$$\varphi(v_1 + v_2) \;=\; \varphi(v_1) + \varphi(v_2)$$
und andererseits
$$(\varphi_1 + \varphi_2)(v) \;=\; \varphi_1(v) + \varphi_2(v),$$
wenn man also eine Komponente festhält, so gilt Additivität (und ebenso Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation) in der anderen Komponente. Im Produktraum gilt
$$(v_1, \varphi_1) + (v_2, \varphi_2) \;=\; (v_1 + v_2, \varphi_1 + \varphi_2)$$
und somit ist
$$\begin{aligned}\Psi((v_1, \varphi_1) + (v_2, \varphi_2)) &= \Psi((v_1 + v_2, \varphi_1 + \varphi_2))\\ &= (\varphi_1 + \varphi_2)(v_1 + v_2)\\ &= \varphi_1(v_1 + v_2) + \varphi_2(v_1 + v_2)\\ &= \varphi_1(v_1) + \varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_1) + \varphi_2(v_2)\\ &\neq \varphi_1(v_1) + \varphi_2(v_2)\\ &= \Psi((v_1, \varphi_1)) + \Psi((v_2, \varphi_2))\end{aligned}$$
(nur in Ausnahmefällen ist $\varphi_1(v_2) + \varphi_2(v_1) \;=\; 0$).

Abbildungsverzeichnis