統計學原理及應用

經濟叢書

統計學原理及應用

王仲武著

商務印書館發行

Economical Series

STATISTICS, THEORETICAL AND PRACTICAL

By

WANG CHUNG WU

1st ed., July., 1927

Price: $3.00, postage extra

THE COMMERCIAL PRESS, LIMITED

SHANGHAI, CHINA

中華民國十六年七月初版

（經濟叢書）統計學原理及應用一册

（每册定價大洋叁元）

（外埠酌加運費匯費）

著作者　王仲武

發行者　商務印書館

印刷所　上海寶山路　商務印書館

總發行所　上海棋盤街中市　商務印書館

分售處　商務印書分館

北京　濟南　蘭谿　天津　太原　安慶　保定　開封　蕪湖　奉天　西安　南昌　吉林　南京　九江　龍江　杭州　漢口　長沙　福州　貴陽　常德　廣州　衡州　潮州　張家口　成都　香港　重慶　梧州　廈門　雲南　新嘉坡

九一四自

馬寅初博士序

人類社會，日臻繁複，耳目有所未周，則不能無賴於統計焉。蓋個人動作，在在與社會有關。倘於社會事實，未盡了了，則閉門造車，難期合轍。自然界現象，變化萬端，亦非一二人力所能窮，則綜合統計又爲必要。是故學者不能離統計而研學；政治家不能離統計而施政；事業家不能離統計而執業也。然則統計何自而成乎？曰成於人。成於人而人用之，則成之者是否正確可信，用之者是否了然無誤，一視成之者與用之者造詣何如耳？編製不衷於學理，則不當；應用不得其法，則失真。不當則不信；失真則動輒貽誤矣。是故人類社會，不惟其有統計也，必正確而信者，迺能致用。又不徒有統計也，必善用之而效始著。設非有專門學術，安足以語夫是哉。我國固無統計，能統計者亦不數見。雖然社會需此，不啻饑者待食，渴者待飲，治學執業交苦之矣。政府設統計專局，十數年略無成績。學校設統計科目，所造甚尠。憂時者病焉。僉謂臨事之先，亟應儲材，灌輸學術，尤不宜緩。但統計爲實用之學，必得體用兼

備學術皆明者，方不至臨事無措。而我國坊間流行之書，與學校所授之課，率皆略於方術，有空疏之弊。以此治學，雖至勤無補。西籍佳者，又非盡人能讀。宜乎統計人才，迄今猶寥落若晨星也。且是學也，與各科學皆相關聯，而尤根於高等數理，非淺學所能，則著作之林無善本，又何怪乎？吾友王君仲武，高才博學，邃於統計。感社會之需要，慨是學之不張，著統計原理及應用一書。學理與方術兼備，取材既豐，舉例亦夥，關於計算數理，圖表編製，尤稱精賅。章末附以摘要，問題，及參考書名，組織亦善。俾初學易於致力；精研更有門徑，斯誠我國出版界之異彩，而亦茲學前途之福音矣！有志是學與夫研學治事有賴於統計者，烏可不取而一讀哉？嵊縣馬寅初序。

郭秉文博士序

自然界之現象,社會之事實,至繁賾矣! 列記之,整理之,依數量觀察之法則,考核其情狀,推見其因果及規律,使棼然者呈整齊之形;棼如者有線索可理。若製爲圖表,則更燭照數計,一覽了然者,則統計之功也。現代學術,多根據科學的方法。故首重嚴密精確之事實,而統計之用益廣。若經濟,若人口問題,若工商業,若教育,若政治,若道德與宗教,無不用統計法以處理其材料,解答其一部分之問題。顧國內於統計原理及應用,尙少專書,亦學術上之一憾也。王君仲武,對於統計孳究精深。今迺本其平素實地之經驗,數載教學之心得,著統計原理與應用一書。除將重要之原理闡發無遺外,關於圖表之製作,計算之方法,更無不備極詳賅。凡有例證,又皆搜羅釐訂,運以精思。至本書內容之材料,多屬於經濟實業者,章節之編製,亦臻完善,洵足爲專門實業學校之良好教本。然則是書之能風行於世,是固不佞所深信不疑而可取必者矣!

民國十一年四月,郭秉文序。

楊杏佛先生序

余畏著書,尤不敢爲人作序。畏作書以下筆以後絕少稱心滿意之作,故因循無成書之日。不敢作序,則以序言重在批評介紹,泛諛則欺讀者,率真則傷作者,不如不着一字之猶得藏拙也。同學王君仲武治商業有年,尤好攻統計學,近以所著統計學原理及應用索序,余雖畏爲人作序,然以曾目覩王君編著此書之勤,搜羅材料之廣,乃不能不一言。

統計之學在科學中爲新進,十八世紀中葉普魯士沙士墨(Sussmitch)始用統計方法爲系統之研究。沙氏以前雖有渥成華(Achenwall)創統計學之名,其書之內容,去今之所謂統計學固甚遠也。十九世紀以還,斯學始大盛,德法努力於理論之發明,英美則注重於實際之應用,統計學遂成研究純粹科學與應用科學者所必不可少之工具。

中國自西學輸入以來,其始朝野醉心於富强之說,故光緒中葉專重軍械製造;光宣之交,提倡工業技術。民國成立留學生始有選科之自由,物質科學與社會科學乃漸

爲人所重視。三十年來但以模倣鈔襲爲事，高深之研究固無人問津，卽實地之調查亦絕少從事者，宜統計學之在中國如章甫適越無所用之也。曩在南京高師教授統計學，欲覓一中文統計學課本，竟不可得。友人王敬禮君爲言某君數年前嘗譯英人鮑來(Bowley)之統計學原則，求售竟無顧者，至今未能付印。統計學解人之難得於此可見。近數年研究之者，興味差濃，已不似前此之沈寂，王君今復有統計學原理與應用之編印。斯學之興，足爲國人注重研究與調查之徵，誠學術界之曙光也。王君之書，除將一般原理敘述外，尤重在實用，於圖表之編製，及公式之應用，言之特詳，不特可爲工商政治之藍本，卽習純粹科學者，亦可取作整理材料，編造報告之參考。將來因應用之需求而進求理論，因理論之發明而益廣應用，中國統計學或有冶德法英美之理論應用於一爐而發揚光大之之一日，願與王君共勉之。

民國十三年六月七日　　　　楊　銓序

自序

魯論工欲善其事，必先利其器。蓋謂工師匠石，縱有過人絕技，而所以表見其絕技者，則仍視所操之工具利否，而成績之優劣，出品之良窳隨之。統計之在今日，其重要價值，比之研究科學之利器。是欲謀百業之改良與進步，而豈可不於統計先加之意哉？統計之爲用，卽根據科學的方法，從大量，得共相；由已知，測未知；而因以解決個人，社會，國家及自然界各種之現象。其爲需要，蓋如是亟亟。而夷考國內除各官署頒有統計報告，及少數學校設有統計科目外，其他蓋未之前聞。卽使有之，亦等於無足輕重。表册盈案，以塡紙簏而已，而眞確者有幾？挂圖滿壁，用飾觀瞻而已，而精密者有幾？以故調查所至，眞象茫如；編製經年，終歸無用；而遲緩因循之弊，尙不在此列。西儒謂統計學之在世界，尙屬幼稚時代，誠哉其幼稚也。蒙旣有鑒於此，而更有感於學校教本之缺乏，因於暇日捃摭歐美名著，參加個人實驗，草就此篇。第一編專就統計習見之原理，批郤導窾。第二編則就應用之方術，鉥摫兼呈。更於

各項原則方法之右，附以實例，加以批評。至其材料十之七八，採自我國。非至不得已時，不剌取西籍餘瀋，防隔閡也。惟茲事體大，絓漏之處，究所不免，尚冀海內博雅君子，不吝教誨，俾匡其謬，則豈惟區區之榮，抑亦茲學之幸也。

民國十二年九月，王仲武，序於南京。

凡　例

(1) 是書之取材,除參考歐美專家之名著(書名見各章參考書欄)外,多根據不佞實地之經驗,與夫教學之心得。

(2) 是書之編制,第一編詮釋原理。第二編說明應用。又於各章之末,附有摘要,問題,參考書三項,既可輔助學者得有系統之記憶,并可供給學者得有實際之練習,更可使初學者明瞭材料之來源,深造者得有精擊之塗徑。

(3) 是書之體例,最適合於專門實業,或高級商業學校。因所有例證,十分之八屬於經濟及實業者。餘皆屬教育,生物種種。他若一般專門大學,或從事統計之事業者,亦可藉作參考書籍。蓋因其學理與方術兼備也。

(4) 是書之特點,除擬定各名辭之定義外,對於統計方法一層,盡量解釋,詳密驗證。又如圖表之應用,尤重實例,精核批評。讀者苟能悉心擊求,自可觸類隅反。

(5) 是書之譯註,除解釋外,更將西文原字附錄於旁,俾便尋繹。

統計學原理及應用

目　　次

第一編　緒論

第二編　各論

附　　錄

統計學原理及應用

第一編　緒論

第一章　統計之略史

第一節　統計事實之由來

統計事實之發生甚古。蓋自有國家組織以來，卽有之矣。如調查一國之財富，徵收各地之賦稅，以定國庫之收入；稽查戶口之數目，統計兵士之多寡，以定戰鬬力之厚薄；又或專爲一事實而作總合之調查，繼續之記載，是皆統計之事實也。當紀元前1200年，我國夏禹曾本其個人實地考察之所得，編製禹貢九州篇（表式見後）。乃依治水之次序，州境之區劃，川河之原委，物產，土質，貢賦之次第，而排列之。其組織雖不完善，然頗具有統計之作用矣。厥後在商湯，則有井田之制度，卽土地戶籍之統計也。在春秋，則有千乘萬乘之邦國，卽兵車調查之比較也。若夫史

記之年表，漢書之表志，尤爲我國統計中之傑作。自此以降，關於國家圖籍，物產表册，無代無之。惟終乏專家之研究，科學之系統，以故未成專學。今復援歐西歷史，用以證明其事實。在紀元前3050年，埃及曾調查全國戶口及財富之現狀，以規劃金字塔之建設。其後1650年，羅馬氏第二(Rameses II)復作埃及土地之調查。按人民之數額，以均分之。此皆歐洲上古統計事實之最早而尤著者也。日後統計之事實，乃常現於世；在中古期如伽乃曼(Charlemagne)，威廉(William the Conqueror)，呵爾買蒙(Al-Mamun)，及德皇費得利克第二(Emperor Frederick II of Germany)，英皇愛德華第二(Edward II of England)，皆有人口產業種種之調查。惟其方法不精良，而又無一定之期間，此其缺點耳。及至十六七世紀，西歐之商業日漸興起，時人對於統計調查之事實，已稍知重要。不似昔日之漠然視之，若無足輕重者。如秀來(Sully)作法國財政及陸軍之統計。1665年，苛伯(Colbert)作商業之統計。1699年，路易第十四(Louis XIV)從各地觀察史所得之消息，作全國簡單之報告。1719年，費得利克威廉第一(Frederick William I)

創作半年報告，統計全國人口，職業，房屋，不動產，租稅，各地財產，以及其他種種。蓋此時之統計調查，已具有科學之用意。不圖行之三年，忽然中止。直至大費得利克(Frederick the Great)，乃始作國籍，年歲，死亡，以及農，工，商，船隻，財產等統計。此殆因彼深信統計之利用，可以促進國勢，發達工商，故竭力提倡，俾統計界生一絕大之影響也。迄至1782年以還，統計方法，遂日漸完善，而其功效之確證，亦遂大見。

第二節 統計學術之發現

統計學術之出世，約在紀元1544年時，黑德堡有一教授繆師泰(Sebastian Muenster)著一古代各國考。專論以往各古國組織，財富，陸軍，商業，宗教及法律種種情形之記錄與比較，是為統計書中之第一部。十六世紀末，意人盛所味懦(Franceso Sansovino)及波太羅(Giovanni Botero)，亦皆有統計上之著述。其取材及命意，殆與繆氏所著者大致相同。1614年孟弟買林(Seigner de Montmarin)編比較統計一書。1660年德儒康令(Hermann Conring)著歐洲方今國家學一書。意欲使普國人士咸知當時

歐洲列邦之國情,行政,人口及種種經濟之事實。此後德國諸大學中,均備統計學一科。直至1772年,德儒渥成華(G. Achenwall)遂定統計學(statistic)之名,此卽統計學之濫觴也。

第三節 統計學術之改進

統計事實與統計學術之發現,已如上述。茲復根據歷史之眼光,詳論統計學術之改進於下:

A. 歷史的統計(empirical statistics) 此種統計,發現最早。卽皇家史館繼續之統計。其主要之作用,爲

(1) 統禦國家治理政事上之一助。如調查財富,分配賦稅,以定政府之歲入;統計兵士,以定戰鬬力之厚薄是。

B. 比較的統計(comparative statistics) 此卽將歷史的統計所得,按各事實現象,更作比較之統計。其主要之作用,爲

(1) 經濟發展之根據。如財富,人口之調查,按時期,或區域以作比較。可發現其分配,與消長相當之理,是皆經濟發展之根據。

(2) 政策施行之標準。如根據歷年所行政策之結果,作比較之統計。則其已往之得失,固可發現。而日後政策施行之標準,亦有所參考也。

C. 科學分析的統計 (analysis of statistics by scientific methods) 此卽將以上兩種統計所得之材料,更用科學的方法,作分析的研究,以統計之。其主要之作用,爲

(1) 分析統計可以證實經濟社會以及各種科學之推想與原理。此卽按多年事實之現象,作精細分析的統計,以闡發其真理也。

(2) 分析的統計對於政府一切事務,皆得相當之推理。其影響於政府之活動者甚大。

晚近統計界則將統計分爲兩層研究之:——(1) 統計方法 (statistical method), (2) 統計報告 (statistical information)。前者爲研究統計之方法;譬之如何蒐集材料?如何整理?如何判決?如何計算等?以闡發其相當之關係。後者則爲報告之性質。卽根據前者所得之結果,用最適當而有趣味之方法,以通知於公衆也。

第四節 統計學派之沿革

近世以來,統計之學派甚多。茲大別之,約有三派:

A. 舊學派統計學 此學派發生最早。蓋當意大利諸共和國組織之始,各國中卽有以外交關係,調查他邦之國情,以應本國政治界之參考者。其後德人所倡之統計學,亦多宗此派。惟斯派中猶有最著之二支派:

(1) 國勢學派 當十七世紀時,統計界有研究國家狀況之學者;有研究社會情態之學者;亦有研究國家勢力之學者;概稱之曰國勢學派。此派之鼻祖爲繆師泰。其統計之主要目的,專在說明記錄,以定改良政治之標準。

(2) 表式統計學派 自十八世紀以還,統計界多知大量觀察 (large aggregates) 之重要。於是丹麥人安希孫(Anchersen)遂創此派。其目的專重數量,而究研範圍,則在有形之事實。如人口之調查是也。惟該派統計之術,不甚精確。僅將調查所得之數量,羅列成表。并未能按科學之方法 (scientific method),以發見其根本之原因,亦一缺點。

B. 數學派統計學　　創此派者爲英人葛蘭溫脫(Capt. John Graun)。彼因深信人口問題之重要，遂從事人口之調查。而其統計方法，首在蒐集正確之材料。然後根據學理，以推究其原因，并闡發其定理，而演繹其通則也。故斯派統計學，偏重數理的計算。如按人口之調查，計其生死之比率，俾世人皆知人口問題中，得有一定之法則存焉。如是則其有功於統計方面者固大，其有裨於生命保險者尤匪淺鮮。更若馬爾賽斯 (Robert Malthus, 1776–1834) 所發見人口繁殖之定率，亦莫非根據此派統計之結果，而爲其經濟上之一助也。

C. 新派統計學　自十九世紀以來,統計界咸知以上兩派之方法不精,範圍過狹(多限於人口問題),於是倡興此派。除合統計之學理與統計之行政爲一體外,更有三項特色：改進統計的技術一也，公刋政府統計二也,政府按時勢之需要,參加意見,詳細說明,更公布研究所得之結果於人民三也。故斯派統計之方法,較前進步。而應用之範圍,亦大爲推廣。殆凡人類所有之問題,皆可依數字之排列,按統計之方法，以研究社會上一切

之事實焉。

第五節 各國統計之概況

晚近歐美各國對於統計上興味，日盛一日。在 1790 年，美政府作第一次人口統計表。其後每十年作一表，并將各十年所作之表，互相研究。以發現人口生死之比率。故此一種十週表，可稱爲美國之發明式。其後(1801年)英吉利亦作人口調查錄。1833 年，德國關稅聯盟會擬按照各省人口攤派賦稅，於是作三週年表。卽每隔三年調查人口一次，此種定期調查之統計，其結果最爲正確，近世各國多採用之。中國亦於 1911 年，設立第一統計機關。總之，統計之應用，與時俱進。其方法範圍，均日有改革。在1900年，美國設立永久統計局，以統計各種專門之事業，其後各國亦多倣效設立。此近世各國對於統計事業之大概也。

摘　　要

1. 統計事實之由來，與國家組織之發生，同在一期。

2. 統計事實發生之原因有二:

A. 古代立國，全恃兵力。故欲抵禦外患，傳播國威，尤非有雄厚之戰鬬力不可。因此則不得不從事武人之

調查，以明戰鬬力之真相。

B. 古代帝王之揮霍與夫政府之糜用，皆取之於子民。爲此，則不得不從事戶口之調查。

3. 統計事實之發現，首在埃及，次爲中國(均在紀元年前)。

4. 禹貢九州表，是中國第一統計表。

5. 統計學術之發生，在十六世紀之中葉。

6. 規定統計學之名目者，爲德儒渥成華。

7. 近世各文明國家，均有統計機關，以美國爲最完善。

8. 統計學術之改進，可分三期：(1) 歷史的統計；(2) 比較的統計；(3) 科學分析的統計。

9. 統計學派之沿革，約分三派：(1) 舊派，(2) 數學派，(3) 新派。

10. 最近世之統計，分統計方法；與統計消息兩層之研究。

11. 我國史漢表志，其方法卽根據統計。

問　題

1. 何謂統計之事實與統計之學術?

2. 統計事實因何而發生?

3. 統計學術之發現,約在何時?首倡者何人?

4. (A)歷史的統計之主要作用爲何?

(B)比較的統計之主要作用爲何?

(C)科學分析的統計之主要作用爲何?

5. 晚近統計界對於統計上作如何之研究?

6. (A)舊學派統計學之特色爲何?

(B)數學派統計學之特色爲何?

(C)新派統計學之特色爲何?

7. 舊學派中最著之二派爲何?又各派所專重之標準爲何?

8. 近世各國對於統計之觀察如何?

9. 我國三代井田之制度如何,試道其詳。

參考書

1. Meitzen, August: History, Theory and Technique of Statistics, Part I.

2. Yule, G. Vany: An Introduction to the Theory of Statistics,

Introduction, pp. 1-5.

3. King: Elements of Statistical Method, Part I, Chaps. I & III, pp. 1-38.

第二章　統計之定義

溯自十七世紀以還,統計之學術漸著於世,而統計專家亦遂先後輩出。各樹一幟,各宗一說,自此統計之派別日夥,定義日歧。後世學者又多附和一家之學說,服從一派之主張,各立門戶,莫衷一是,此統計真詮之所以不明也。玆先述統計名辭之由來,次及各家之定義。

I. 統計名辭之由來　統計之名辭,在英文為 statistics; 法文為 Statistique, 德文為 Die Statistik, 意文為Statistica, 然皆係拉丁文 Status 之轉音。考其初義,不外為一考查國家情狀之學術而已。故統計學最初之定義,即拉丁文所謂考察邦國情勢之學術 (inquiry into the condition of a state)。漢英字典有稱統計為國記或國志者,亦即拉丁文之原意也。

II. 各家之定義　韋卜司頭 (Webster) 謂統計為考查

國家人民情狀之學術 (classifiable facts respecting the condition of the people in a state)。橫山雅男謂統計者，以社會與國家動靜之現象，依合法之大數觀察，研究其原因及規律之學科。此二家之定義，詳細體察，非謂完全不足代表統計意義，惟嫌拘泥古代之定義，不若以下各定義之明晰，易於了解。

巴萊 (A. L. Bowley) 稱統計為計算平均之學術 (science of average; science of counting)。又謂統計可以考查事實多數現象中各部彼此之關係 (numerical statements of facts in any department inquiry placed in relation to each other)，可以為表示各種現象之摘要法及分類法 (devices for abbreviating and classifying statements making clear the relations)。鄙意巴氏之定義，自較切實。惟專講統計一部分之方法，究欠圓適。

友爾 (Yule) 則謂統計者，是從多數原由中，以求出數量的根據，關於所定事實範圍之影響也 (quantitative data affects to marked extent by a multiplicity of causes)。又謂統計之方法，卽專為闡明數量的論據，關於所定事實

範圍影響之術也 (Methods specially adopted to the elucidation of quantitative data affected by a multiplicity of causes)。此定義對於原理固未詳明,卽於方法一層,亦僅述其影響,而究未言其如何也。

金氏 (W. I. King) 對於統計之研究最力,而於定義一層,尤覺煞費苦心,以冀圓滿適用。故其定義曰: 統計學者,乃由分析所得枚計或估計之結果,以研究自然或社會之全體現象之學也 (The science of statistics is the method of judging the collective natural or social phenomena from the result obtained by the analysis of an enumeration or collection of estimates)。不佞對於此定義,極表同情。惟惜其祇言分析 (analysis) 的方法,而未提及綜合 (synthesis) 之作用。至於統計術 (methods) 一層,亦未說明,斯屬缺點。

葛伯蘭地 (Copeland) 謂統計者,卽以數目表示事實,從大量現象中;分析之,以明各個單體對於各部之關係;比較之,以顯各部之同異;繼續記錄,以備永久比較統計之用也 (Statistics may be defined as numerical statements of facts by means of large aggregates are analyzed, the relation of individual units to their groups are ascertained, comparisons are made between groups and continuous records are maintained for comparative purposes)。余意此定義,不甚完全。對於統計之原理,固未提及,卽對於統計之方法,亦不能完全說明。至若比較各部之異同,繼續記錄之類,則事屬當然,亦非定義中所不可少者。

塞加利司悌(H. Secrist)謂統計之意義,爲從大量事實之現象中,按照合法的系統的枚計與估計,以求適應預定目的之作用,及闡明各個現象彼此相互之關係(Aggregates of facts affected to a marked extent by a multiplicity of causes, numerically stated, enumerated, or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purposes, and placed in relation to each other)。又謂統計之方法,乃用各種綜合與分析的方法,依據科學的搜集,而解答各個事實之現象,或各個現象與其內容全體之關係 (The expression statistical methods is used to include all those devices of analysis and synthesis by means of which statistics are scientifically collected and used to explain or describe phenomena either in their individual or related capacities)。此定義,在意義上觀之,可稱完全。惟其措詞過嫌冗長,不便記憶,不易領會,未免感受困難耳。

以上諸學者之定義及其缺誤之點,旣已詳述。玆再將本書之定義,敍述如下,以供參考:

III. 本書之定義　統計學者,根據科學方法,從分析或組合所得枚舉或估計之結果,以研究自然及社會全體現象之學術也 (The science of statistics is the method of judging the collective natural or social phenomena from the result scientificly obtained by the analysis or synthesis of an enumeration or collection of estimates)。蓋統計者,統而計之之謂也,故必以全體之現象爲範圍。至於計算之方法,有從逐類分析,而爲按件枚舉者;或約略估計者;亦有就全體綜合,而爲按件枚舉者;或約略估計者。總之,凡計算之結果,欲求正確,則尤不得不根據科學的方法。否則,統計之功效未見,而統計之誤解反生矣。若夫統計

之應用範圍，則極其廣漠。質言之，卽凡自然界與社會現象之各問題，殆莫不爲本科學所當研究者也。

上項定義，係參合塞加利斯梯與金氏定義而得者。其不同之點，卽在加入組合 (synthesis) 之作用，及根據科學方法之所得兩層(scientifically obtained)。如此庶於統計之方法，乃見精確，且於應用亦能普及。

摘　　要

1. 統計之定義，至今分歧。

2. 統計之定義，卽根據科學方法，從分析或組合所得枚舉或估計之結果，以研究自然及社會全體現象之學術也。

3. 拉丁原義，漢英字典及韋氏字典三處統計之定義，均稱統計爲考察國情之學術。

4. 橫山雅男謂統計學爲觀察社會與國家動靜現象之學術。

5. 巴萊謂統計爲平均學，或計算學。

6. 友爾謂統計爲闡發數量的論據，關於所定事實範圍之影響之學術。

7. 葛坡蘭地謂統計爲以數目表示事實者也。

8. 金氏謂統計是從分析所得枚計或估計之結果，以研究自然與社會現象之學術。

9. 塞加利斯悌所稱統計之定義，雖甚繁複，但其要義，直與金氏相同。惟加以綜合及依據科學的搜集兩條件耳。

問　題

1. 何謂統計?
2. 何謂統計之方法?
3. 試述各家統計定義之異同及優劣。
4. 試擬一統計之定義。

參考書

1. Horace Secrist: An Introduction to Statistical Methods, Chap. I, pp. 7–9.
2. Bowley, A. L.: An Elementary Manual of Statistics, Chap. I, pp. 1–6.
3. Bowley, A. L.: Elements of Statistics, Chap. I, pp. 3–13.
4. Yule, G. U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Chap. I, p. 5.

5. King, W. I.: Elements of Statistical Methods, Chaps. II, III, pp. 20-39.
6. Melvin T. Copeland: Business Statistics, Chap. I, p. 3.
7. 橫山雅男著，孟森譯：統計通論 52-53 頁。
8. Webster's Dictionary.
9. 英漢，拉丁文，德文，法文，及意文各字典。
10. Encyclopedia.

第三章　統計之法則

統計之大意,雖已略見於前章。今重將統計普通的法則,分別呈述,則更足以證明其內容。

I. 統計齊一之法則 (The Law of Statistical Regularity)。 此種法則,實爲統計上之最重要者。蓋每察一事之現象,均可任取其一部分之情形,而推究其全體。今若察上海工人所得之報酬,以及其生活程度等問題,則可就滬上各項工業一部分工人之情形,以推測全體之現象,殆亦非不可靠也。此卽依據數學上可遇度之定理 (the mathematical theory of probabilities),大凡於衆多數之中,任取(at random)其適當之若干數,按合理之計

算，則其所得結果之要件，直與全體之平均者 (on the average)，洵屬相近也。

馬易 (Mayer) 曾將此法則分析爲四：

A. 狀態之法則。 此卽研究社會事物靜態現象之法則。例如一國人口男女之數，自有一定之比例是也。故亦名現在的法則。

B. 發現之法則。 此爲研究一般現象之法則。例如一國中每年人口之產生死亡犯罪等，亦常存有一定之比率是也。因其討論事實，發現定規，故亦名事件發現之法則。

C. 發展之法則。 此爲研究社會一般事實發展現象之法則。例如人類一生之經過，社會古今之進化，常有一定之規則存在是也。

D. 因果之法則。 此爲研究二個或二個以上社會動態現象，與自然現象之因果關係之法則。例如實業衰萘，則結婚者減少；物價昂貴，則犯罪者增加皆是也。

II. 大量不變之法則 (The Law of Inertia of Large

Numbers)。此法則乃依據齊一之法則而得者。殆謂凡大量事實一部分現象之變動,雖極顯著,然衡諸大量,則常恆不變(constant)。例如甲地五穀歲產額,或顯有特奇之增減。惟按諸全省全國或全世界之均數,則其歲產之量,大致相等。如某城本年被火災之數,忽三十倍於上歲。今就一城言之,則其變動自甚。然苟以全國火災之總額觀之,則亦恆常不變。非然者,火險公司將何所據而定其營業之標準乎?美國近歲火災之損失,所以逐年約略相等者,固為統計進步之所致,而亦足證此法則之不謬矣。

摘要

1. 統計之法則有二:——

   I. 統計齊一之法則。其中復分為四:

      A. 狀態之法則,

      B. 發現之法則,

      C. 發展之法則,

      D. 因果之法則。

   II. 大量不變之法則。

2. 統計科學之根據，卽在上述之法則。

3. 大量不變之法則，實爲齊一法則之系則。

問　題

1. 統計齊一之法則，爲根據何種學理而發生。

2. 試設一習見之例，以說明統計兩法則各個之用途。

3. 保壽公司與水險公司營業之標準，係根據何種法則?

參考書

1. King, W. I.: Elements of Statistical Methods, Chap. III, pp. 28–31.

2. 橫山雅男著，孟森譯：統計通論第三十四章。

第四章　統計之用途

統計之用途甚廣，今從其定義觀之，殆無論自然現象，與社會現象，靡不可應用統計之原則及方法，以解答其全體，或一部之問題。今爲謀讀者便利起見，則不得不依科學的眼光，分兩項以述之:

I. 純正統計(Pure Statistics)之用途。 卽專指統計

本身之用途也。如研究統計之原則,定理,方法,種種皆是。故此項用途,在研究其科學之方法,闡發其普通之原則。俾各種事業統計時,均得應用之。

II. 應用統計(Applied Statistics)之用途。 即指統計各方面實地之應用而言。如用之於自然現象中,則可以研究日月星辰運動之理;禽獸草木滋生之由;山川土地變更之因;凡此種種,皆自然界統計之用途。又若用之於社會現象中,則更繁矣。在政治統計中,可以研究人民,領土,司法,財政,軍事等,已往之陳迹,而推測其將來。在社會統計中,可以根據貧民,勞動,慈善等,過去之情形,而預測日後之現象。在經濟統計中,可以發見生產,分配,銷費等,變更之原則,而爲預測之標準。在人口統計中,可以研究人口之密度,生死之比率,以發見其相當之定率,而預度將來人類之活動。在農工商各實業統計中,亦皆可藉統計之原則,及方法,以爲預定其耕種,製造,營業上政策之參考。晚近科學方面(物理,化學,數學,教育,心理,論理等科),亦皆根據統計之法則,而解答其問題。凡此種種,皆社會現象中統計之用途

也。總之,按諸今日統計應用之範圍,已可謂天地覆載,無所不包,而其用途之廣漠,蓋可想見矣。

摘　要

1. 統計之用途,可分二項:

A. 純正統計之用途,即專指統計本身而言。

B. 應用統計之用途, 即專指統計各方面之應用而言。

問　題

1. 何謂純正統計之用途?

2. 何謂應用統計之用途?

3. 統計用途之範圍如何?

4. 試述統計對於我將來職業上之用途。

5. 試舉一實例,以證明統計之用途。

6. 世說月暈而風,礎潤而雨,又云:世界六十年,必有一劫,凡此種種,是否有統計之功用在焉。

7. 統計學對於保險業之用途如何?

參 考 書

1. King, W. I.: Elements of Statistical Methods, Chap. III, pp.

24–28.

2. Bowley, A. L.: An Elementary Manual of Statistics, Chap. I, pp. 1–6.

第五章 統計之程序

統計方法之程序，固視其研究問題之範圍與性質而異。卽歐西各統計專家亦復各有主張，殊不一律。茲特根據當代英美統計名家巴萊，塞加利司悌及金氏三人之主張，參加著者之經驗，分其程序爲五：(I) 審訂問題，(II) 選定單位，(III) 蒐集材料，(IV) 彙類分析，(V) 勘校結果。

I. 審訂問題　當事者在未進行之先，宜將應研究事實之範圍與性質，精密考核，而規定問題 (problem)，審查要件 (factors)。則以後進行之手續，庶有標準。

II. 選定單位　當問題已審定之後，卽須依據問題與材料之性質及關係，而選定適稱之單位，以爲搜羅材料之用。

III. 蒐集材料　問題單位旣定，則應按照材料之性質，酌定調查方法，搜羅必需材料，藉供綜合或分析

之用。

IV. 彙類分析　將搜羅所得零星雜亂之材料,用表列法以整理之;用圖式及數理法,以分析之;而解答種種問題。是爲統計上最後之目的。

V. 勘校結果　關於應研究問題之結果,雖由上述四步之手續告竣。然其結果之確度,究屬可靠與否,尤非精密勘校不可。

上述五步,確爲實際統計時之程序。惟關於各步精密之手續,確切之例證,均未詳論。容於下篇中,覶縷述之。

摘　要

統計方法之程序分五步:

(1) 審訂問題,

(2) 選定單位,

(3) 蒐集材料,

(4) 彙類分析,

(5) 勘校結果。

問　題

1. 試取雜誌或報章上他人作成之統計,根據本章原

則，以討論之。

2. 當實際統計之先，倘未全部計劃，釐定步驟，其流弊如何？

參考書

1. King, W. I.: Elements of Statistical Method, Chaps. IV, V, VI & VII, pp. 39-82.

2. Meitzen, August: Statistics, pp. 168-170.

第二編　各論

第六章　統計問題之審定

審定統計之問題者，卽審定其進行之目的也。此種手續，洵爲每次統計時最先而最要者，故不得不詳細以述之。

第一節　確定題目

統計者常就一事實所有之現象，用大量的觀察，精確的比較，以闡發其相當之定律也。惟每一事實之現象，往往紛繁複雜，故於研究之先，必須按原作統計之主旨，確定其問題。而尤當將問題之性質與範圍，詳細審明，俾作觀察比較之標準。否則，當進行之始，稍一疏忽，則問題之意義不明，方法亦因之而異，其後所得之結果，必至毫無價值，真所謂失之毫釐差之千里也。茲特舉例以證之。

設有人欲作工資之統計，以研究其高低之原因，而發現其相當之規律。則最先必熟審其命題之主義，確定工資之性質，與範圍，然後作適當之觀察。倘於命題

之始，意義不甚明晰，則所搜集之材料，有爲貨幣工資(money wages)，有爲真實工資 (real wages)，如是以不同性質之材料，而作不合理之比較，其結果之荒謬，自不待言。故對於此題之統計，第一步，應審定其目的，究爲貨幣工資，抑屬真實工資，而確定其問題。然後按法進行，方可得有價值之結果。今由此例，可證明問題之確定與明晰，實爲統計手續中最要之條件。而美國統計專家金氏所以有言曰：統計上第一件重要之事，卽在問題之確定與明瞭者 (The first essential is to make the problem definite and clear-out)，其卽此意歟？

第二節　規定要件

當問題確定以後，卽須按問題之主旨，選擇要件，以定進行之方法。不然，問題雖已確定，而各方面之材料，紛然雜呈於目前，倘一一統計之，比較之，則所得結果，固不足信。或且任統計員之偏見，詳其所當略，略其所當詳，輕者重之，重者輕之，而其結果，甚至大相反對，殊失統計之功效耳。玆復舉實例以證之。

例如當美國與西班牙戰爭時，美人曾有作一海軍

軍人與紐約居民每年死亡數目比較之統計。該問題之主義,原在比較彼此死亡之差率。惟以其內容要件未明之故,而所得之結果,乃至荒謬異常。卽如當時海軍軍人,每歲死亡者,僅占千分之九,而紐約居民病死者,反在千分之十六。於是斷言謂紐約居民之生活,反不如海軍軍人之安穩。如此結論,殆人人知其爲不近情理。然查其錯誤之原,實因內容條件不明之故。如以紐約所有之居民及海軍軍人之總數爲分母,以各地死亡者爲分子,其計算之法雖正,但因紐約居民,老幼不一,强弱懸殊;且以死亡之病症,又復繁雜,故居民易於染病而死。至若海軍軍人,則多年富力强之士,又皆爲精密體格檢查之合格者,加以軍隊衞生,環境清潔,是染病之機會較少,故其死亡之率亦較低,此當然之理。并非紐約居民之生活,反不若海軍軍人之平安也。故對此種問題之研究,應將死亡上重要之條件,如死亡者之年齡,體格,及病症種種,詳細規定,然後依法進行,則其所得之結果,必大異於前。而自有可信之價值也。

摘要

1. 統計上第一條要件，即為確定題目。

2. 第二條要件，即為規定問題內容之要件。

3. 統計問題之確定，應以統計之目的為標準。

4. 要件之規定，應以問題之內容為標準。

5. 統計所得之材料，皆應合於規定之要件。

問題

1. 何謂確定題目？

2. 對於內容之要件，應如何規定之？

3. 假使統計之題目已定，而要件未明，則其所得之結果當如何？

4. 統計問題，當如何確定之？

5. 試舉一實例，以證明確定題目及規定要件之重要。

參考書

1. King, W. I.: Elements of Statistical Method, Chap. IV, pp. 39–42.

2. Meitzen, August: Statistics, pp. 168–170.

第七章　統計單位之選擇

統計上之事實，無非將自然界或社會上所發生之現象，用數目以表示其相因之關係耳。故乍視之，對於此等統計之單位 (statistical units)，每以爲非屬難事。然考諸實際，確爲統計上最難之問題。譬如作國際貿易統計，普通均以各國貿易輸出輸入之總額與差數爲比較，以推測國際間之損益。而世之主張保護貿易者 (protectionist)，亦多根據其結果，以爲規定國際貿易政策 (foreign trade policy) 之標準。要知所用統計之單位，雖屬一律。然其所得結果，實毫無價値之可言。蓋因各國之國度，旣有大小之異；而人民之總數，復有多寡之殊。故其貿易總額之差數，當然不足以代表各國國際貿易上實質之比較。若再以一國輸出輸入之差數，以測其損益，是亦不足據也。例如英吉利國外貿易，每歲輸入之額，雖常超過輸出之數。然猶不足爲病者，實以英爲工業國家。輸入之物，多屬原料，而運出之貨，則悉爲製造之品。故輸入雖年年超越輸出，而其實反有利益也。卽此一例，讀者殆亦知單位之規定，切不可不審愼出之矣。總之，統計單位之擇定，絕不可預存成見，或苟於計算之心，務使所用單位，適合於統計

之意旨，與夫材料之性質，然後所得之結果方能有效。至於單位之種類，單位之資格，以及應用時之規律，均當澈底研究，以供參考。

第一節 單位之類別

統計單位之類別甚繁。茲先按事實本體之性質，分類如下：——

A. 屬於個體 (Individual Things) 方面者。

此類事實，均得以數目計之。故又名計數的單位。其中可別為兩種以述之：

(1) 自然事物的單位 (Natural Things and Events Relating to Natural Kinds)。卽按自然人物原有之個體，而為單位也。例如人口，動植物之統計，皆依其本身之個體而算，是計數之法 (counting method) 也。至若年齡，生死之統計，則當照其改變一定之時期而測之，亦屬計數之法。故此種單位，在統計上價值最高，而亦最常用者。其優點有二：一曰正確 (definiteness)。因以個體為單位，觀察時自更明確。一曰意義完全 (fullness of meaning)。因各個單體，均能獨自分開，

絕無含糊之意。且每個單體，亦能代表完全之意義。如牛一頭，讀者見之，殆莫不具有一全牛之觀念。斯卽多數統計家所以常稱此爲最優良單位之故也。

(2) 人爲事物的單位 (Produced Kinds and Produced Qualities)。斯種單位，專按人力製造事物之個體，以爲計算者。故亦名製造的單位。若桌一張，椅一把之類，皆是也。此種單位，從數目觀之，似甚完善。惟究諸實際，則其旣屬人爲者，自不能絕對一致。且其目的，皆隨人定，倘人之目的變，則此單位亦必不能保其無變，斯卽其缺點也。至若便於計算一層，殆正與自然事物的單位相同。

B. 屬於度量方面者 (Measurational Units)。此類專備度量之法，以爲計算之單位。其中亦可分爲二種:

(3) 體量的單位 (The Physical Measurement Units)。斯種單位，卽用於普通修短廣袤之測度也。如道路之長度 (length)，以里計;器皿之容量 (cubical contents)，以立方尺計;貨物之輕重，以權計 (weight);田畝之廣袤，以方尺 (square feet) 或方畝 (square

acre) 計。是皆以恆同之度,而爲計算之單位也。此種單位之缺點,約有三者:一曰:過於抽象 (abstraction),不能表示具體之事實 (concrete things)。如度一室之長短,雖可報告其廣袤,然不能表現其實在之情狀。再如測一物之容積,縱以立方尺計之,然對於形式重量,以及質地種種,仍屬缺然。故不若自然事物的單位之能代表原體也。二曰:度量時所用之單位,各國不同,殊地而異。加之人工所造之具(如尺,斤,密度,里,畝等等),其確度 (exactness) 尤不可靠,是亦其缺點也。三曰:製造之尺度雖準,而應用時又未必人人皆同,是尤不可不審愼者也。雖然此種單位之缺點,縱有種種,惟有時亦不能不用之。例如歐西雞卵之計算,多因其大小不均,不宜用計數之法,故每以權 (by weight) 代之。再若煤炭米麥之輕重,道路江河之修短,則尤非用此種單位,不能以計其度量。惟更有將時 (1) (2) 或 (2) (3) 兩種單位,同時幷用者,其目的在使計算之度較爲正確也。我國綢綢之買賣,每有用尺兩 (或權其重量,或度其尺碼,更有先度其長,後計

其重者)之法。歐西又有所謂磅尺(foot pounds),馬力(horse-power),車哩(car-mile),噸里(ton mileage)等類,皆其例也。

(4)金錢的單位(The Pecuniary Unit)。統計之單位,繁複難定。然除以上三種外,其餘多屬價值的統計,是以金錢爲單位也。故名曰金錢的單位。例如經濟界商業界所最常用之單位"元"(dollar),卽按貨物(article)之價值(value),與夫交易之實力(power in exchange),而特定之者。蓋斯種單位,在理論觀之,固不能代表實體之真正單位,然經濟界商業界對於貨物之計算,殆不僅欲知其量數(quantity),而猶須測度其交易之真值(value in exchange)。職此之故,是非採用此種單位,不克盡其功。但應用時,亦有研究之點,譬如作一國經濟之調查,以定賦稅之歲入;統計貿易之情狀,以測國際之盈虧,是當以"元"爲單位者。惟一元之值,在我國一國之內,其兌換之價,已因各地而殊。若論國際間貨幣之價值,金銀之比率,則尤因時因國而大不同,是烏足爲統計之單位

耶?故統計者,應用此種單位時,必須注意下列二點:

第一爲時間 (Time)。卽須詳審調查之時期,對於斯項單位,有無影響。

第二爲地方 (Place)。卽須細察調查之區域,對於斯項單位,有無關係。

若商業之統計,每因會計制度(accounting system)紊亂(not uniform)之故,而使統計單位失真,是尤不可不注意者也。

C. 此外又有按單位之用途,而分爲四類者:

(1) 簡單的單位 (Simple Units)。此項單位,專用於個別計數之事實,是與自然單位 (natural units) 大同而小異。如牛一頭,魚一尾,人一口等等皆是。又若十噸之煤,百里之路,以其計算便利,而屬斯類。此則與度量單位 (measurement units) 相同也。

(2) 組合的單位(Composite Units)。此項單位,專用於合成之事實。如一家,一國,一公司之類是。

(3) 解釋的單位 (Units of Interpretation)。此項單位,專用於解釋時間 (time),區域(place),情形(con-

dition)，種種之統計。

(4) 表述的單位 (Units of Presentation)。此項單位，專用於表格之上。故每以"元"，"百兩"，"千拓"，"萬噸"，"百分數"等類爲單位。其目的在將統計事實之現象，畢呈於一表，而使閱者得以一目了然也。

第二節　統計單位之資格

此節專論統計單位上必需之資格。殆無論何種單位，皆應具之。非然者，即材料之搜集周密，計算之手續精良，亦不能發生統計上之功效。玆特選錄其最著者數則如下：

A. 單位須有普遍 (Universality) 之資格。大概每次統計之調查，未必皆限於一部分，或一期間者。故所取之單位，務須普遍，切不可有所偏倚，而使計算結果，不能正確。例如作我國各地五穀產量之統計，則非以斤擔* 爲單位不克。殆因斗斛包袋等之容量，有隨地而異之弊，是不若斤擔之較爲普遍也。又如統計各省金融之狀況，則當以國幣爲計算之單位。斷不能效舊日市場之辦法，有所謂庫平也；漕平也；關平也；公估平也；申公砝平也；九八規元也；更有其他各地之市平。名目紛歧，計

算繁複，殊無普遍單位之資格。由是迺知我國今日幣制統一問題，亦屬金融統計上之急務也。

* 此斤擔，係指普通者而言。故擔重百斤，非一百二十斤之石。斤重十六兩，無漕法（十六兩）蘇法（十四兩四錢）之別。

B. 單位須有穩定 (Stability) 之資格。 近世統計上之主要測算，即在總數 (total) 與平均數 (average)。但往往以單位不穩定之影響，而使之輒變。是真不可不詳加考察者。今設數例以證之：第一如普通物價，按件計工工人之所得，或氣象之統計等等，皆有驟然變動之現象，其單位每因之而易。故於此種情形，非用多次之測算法 (frequent measurements)，不足以表現其充分之狀態。第二如貧富之調查，失業之調查，以及統計每季商業之所得種種，其應用之單位，均須適合於完全期間內 (a complete period)。絕不可使之中途變換，而令計算之結果不生實效也。總之，每次應用之單位，務求於有效時間內，恆固不變，而使統計結果之價值，確然可靠。

C. 單位須有可比 (Comparability) 之資格。 統計之作用，原從比較中以闡發其蘊奧者。故所用之單位，亦

必具有可比之資格，然後計算之結果，方能達其目的。不然，單獨的，籠統的數目，是毫無價値之可言。況乎統計之現象，除計算單位之本身有可比性外，猶須應用於地方不同 (different places)，時期先後 (different time)，而作縱橫的比較。譬如統計上海天津兩地進口之貨量，是地方不同比較之例也。再若統計歷年教育之經費，則爲時期先後比較之例也。總之無論縱橫的比較，其相比事實之現象，必期同質，所謂"同類相比" (Like can only be compared with like) 是。而應用之單位，亦必屬可比性者，方可得有效之結果。

D. 單位須有可數 (Countability) 之資格。　統計事實之現象，固屬比較。而比較之度，尤須邃密。絕非"大小""多少""長短""寬窄"等含混之差度，所能表現其真確之較量者。故必以精密適當可數之單位，而計算之，方能將大量現象 (aggregates of facts)，用簡明之數字表示之。惟此等可數之單位中，尤以十進位者爲最宜，殆以其便於計算故耳。卽如十錢爲兩，十尺爲丈，十斗爲石是。

E. 單位須具有明確 (Accuracy) 之資格。 統計單位之意義，必求明確 (accurate) 無疑 (doubtless)。而其定名，尤須有完全代表意義之資格，然後計算者或應調查者，方不至因誤會而發生不正確之報告也。例如調查南京與北京之戶數 (families)，其單位自以每戶 (per family) 爲度。惟此戶之意義，究屬指一般之家庭而言(不分大小之家庭)，抑指一夫一妻新式之小家庭而言，是不可不明白定之。苟含混不清，則數十人之家庭，直與夫婦二人之家庭相同。如此安可由戶數不同之比較，以推測兩城人口之密度耶?

總之，凡每次統計時，欲求得有價值之結果，則對於上述五項單位之資格，均須特別注意。其他如何種性質之統計，宜用何種單位。何種性質之統計，忌用何種單位。則屬於應用之規律，俟於下節中詳述之。

第三節 單位應用之法則

單位之應用，全視統計之性質以爲衡。絕不可預存成見，先事臆度，而任用何種之單位也。玆爲謀學者便於記憶起見，爰錄其應用上普通之法則如下：

A.須察明事實來源之情形，以及單位發生之境地，然後採定之。如此之單位，方稱適宜。

B.須定明單位之意義，其法有四：

(1)須切合問題，以規定單位之意義。不然，當調查之先，對於各問題不加精密之研究，貿貿然而規定之。則日後實際上，必有多種之困難也。

(2)須切合讀者及被調查者之常識，而定單位之意義。否則，恐難免有誤解之虞。

(3)須有合理之根據，以規定單位之意義。

(4)須說明單位之意義，以免含混之代替。卽如調查上海無錫兩地受教育者之人數，旣應指明其範圍，尤須規定其資格。以後方不至有魚目混珠之流弊。

C.須詳審事實之性質，現象之情狀，而規定其單位。大概統計結果價值之有無，雖在蒐集計算方法之精粗。而單位之適合與否，亦其主要之原因也。

D.須知用直接之單位為最上。蓋其觀察旣精，而計算尤確也。卽如單位之可數者則數之，切不宜權之

或量之。但於不能數時，始可採用其他單位，以度量之。

摘　要

1. 單位之分類,有二法:

第一按事實之本身而分者,可得四種單位:——

A. 屬於個體方面者 { (1) 自然事物的單位, (2) 人爲事物的單位。

B. 屬於度量方面者 { (1) 體量的單位, (2) 金錢的單位。

第二爲按單位之用途而分者,亦可得四種:——

(1) 簡單的單位,

(2) 組合的單位,

(3) 解釋的單位,

(4) 表述的單位。

2. 單位必具之資格爲

A. 普遍,

B. 穩定,

C. 可比,

D. 可數，

E. 明確。

3. 單位應用之法則：

A. 應審查事實及單位之來源，

B. 應定明單位之意義，

a. 切合問題，

b. 切合讀者及被調查者之程度，

c. 有合理之根據，

d. 有明確之解說。

C. 應熟察事實現象之情狀，

D. 應知利用直接的單位，無已時，始得採取其他單位。

問　題

1. 單位之種類有幾，何者爲最良？

2. 單位中發生最早者，爲何種？

3. 單位不適合時，對於統計之結果，影響甚大，試設例以述之。

4. 單位上最要之資格爲何？

5. 試設例以證明單位。

(1) 不普遍之弊，

(2) 不穩定之弊，

(3) 不可比之弊，

(4) 不可數之弊，

(5) 不明確之弊。

6. 單位應如何規定，始得切合讀者及被調查者之常識。

7. 說明應用直接單位之利點。

8. 單位之意義，應如何定明之？

9. 簡單單位與組合單位之區別何在？

參考書

1. Copeland, H. T.: Business Statistics, Ch. I, pp. 29–47.

2. Bowley, A. L.: The Nature and Purpose of the Measurement of Social Phenomena, pp. 29–97.

3. Watkins G. P.: "Statistical Units," in Quarterly Journal of Economics, Vol. XXVI, pp. 673–702.

4. King, W. I.: The Elements of Statistical Method, Ch. V, pp. 43–46.

5. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Ch. III, pp. 59–77.

6. Secrist, H.: Readings and Problems in Statistical Methods, Ch. III, pp. 150–159.

第八章　統計材料之來源與蒐集

本章專論統計之材料，上半部首將其來源，分別敍述，後半部除說明蒐集手續外，并將事前一般應須討論之各方面，如調查方法，問題規定，計算人員，以及表格種種，均詳爲研究。俾所得材料旣屬正確而合理，且復井井有條。則日後實際整理時，自免手續上紛拏交錯之弊。讀者宜注意之。

第一節　統計材料之類別

統計材料之內容，固甚紛繁。然自其大體觀之，可得二類：

A. 初級材料(Primary Materials)。此類材料，係方從調查表上集得而未經組織者，所謂"粗料"是也。其優點卽在最爲真實。至若材料性質之差異，填寫格式之

不齊，則又其缺點也。例如上海工業商業資本之統計，最初由各公司工廠交回之調查單，其記載之數目，卽屬此項之材料。

B. 次級材料(Secondary Materials)。 此項材料，係指由初級所得而加以組織者，所謂"成料"是也。卽如前例，凡由各工廠公司調查單上集得之原數，單位旣常不一，塡寫之格式，亦復各異。例如有以銀兩爲單位者，有以國幣爲單位者；有塡以資本總額者，更有塡以實繳之資本者。故必加以整理，重行組織，使各個單位相同，格式一律，然後方能就用。緣是乃知初級材料之優點，在於眞實。而次級材料之優點，在較合用。

當組織次級材料時，應注意下列二點：——

(1) 初級材料之單位，多屬簡單的單位 (simple units)。當組織爲次級材料之後，則常成組合的單位 (composite units)。即有時不須改爲組合的而仍爲簡單者，終必將各種單位，化爲一律。故於是時應最注意次級與初級兩項單位之關係，以及對於結果之影響也。

(2)當整理初級材料與次級材料時,尤應精密計算,詳細觀察。萬不可稍一疏忽,而使錯誤之影響,發生於無形之中。

第二節　統計材料之來源

初級材料之來源,非由實地之調查,即由通函之訪問。至若次級材料,則其來源甚多。茲分述於下:

A. 政府方面。　統計材料往往零散四方,非由規模較大及有勢力之機關,不足以作完全之徵集。故近世歐美各邦,凡關於實業,經濟,人口等統計之調查,多由中央及地方各機關協同負責,分任其職。蓋以事務紛繁,非集衆力,實無以成之。試觀美國之統計局,卽其例也。我國農商統計,交通統計,以及最近之戶籍調查,其材料來源,皆屬於此方面者。

B. 團體方面。　晚近教育工商以及司法各界,無不知借統計的方法,科學的手段,以解答種種問題,闡發種種定律,其中尤以實業界爲更甚。常由各項團體設立協會,聯合會等等,以從事調查,蒐集已往及目前之現象,傳達全體或特別之消息。如是其有裨於各業進行

上之參考者，殊匪淺鮮。我國近歲教育及實業各界，亦漸有此項之組織。如中華教育改進社，銀行公會，紡織業聯合會等，皆其例也。鄙意以爲各地商會，亦當創設統計之機關，專作各地每月，每季，或每年各項實業概況之統計。如此既可供各地實業家之借鏡，亦足爲全國或世界實業統計上之參考。

C. 單獨機關方面。 凡材料之來自此方面者，多屬專門性質。例如各大學統計會所得之調查，有爲政治的，經濟的，司法的，疾病的，甚至如哈佛大學以統計科之實驗，忽調查每省鞋業之狀況。更有由商店工廠，或農林機關爲特種之作用，而實行調查者。譬如美孚火油行 (Standard Oil Co.)。常考察各地火油之產量與消費量，而爲審訂營業進行上之標準。再若伊文思書館當每學年終，必分散教授用書調查表於各學校，藉以統計全國學校用書之總額，以及一般學校教本之趨勢。如是，亦足爲推銷營業上之參考。大抵由此方面得來之材料，其確度在比較上觀之，覺更可靠。因此既屬專門之調查，且因其當事者有直接利害之關係，自不至如泛泛統計上

之輕忽。惟此種調查,往往為一時期者,輒行輒止,不足為長期統計上之貢獻。

D. 個人方面。　從此方面所得之材料,最為可靠。以其執事者單獨負責,自不至犯推諉之弊。且此項調查,常出於個人之本意,興味必濃。因是對於事實之內容,諒有精密之研究,則其蒐集之材料,自不患其無可信之價值也。例如美國伯卜生 (Babson) 在每年一月刊行商業統計表 (Babson Calendar) 一册,卽根據已往十年商業之情形,而推測本歲中各項商業之漲落也。(Babson Chart 在商業統計中,頗具重要之價值,詳見原表)。此方面材料,甚不易得。我國直無此例。實在個人之財力與技能有限,從事於此,較為難也。

總之次級材料之來源,不外上述諸方面。其中雖各具利弊,惟在統計者按其研究之性質與目的,善自採擇耳。

第三節　統計材料之蒐集

統計次級材料普通之來源,雖已如上述。然一般事實,多須經適當之蒐集後,方可得有效之材料。茲分事前之準備,與蒐集之方法兩段,縷述如下:

A. 蒐集材料前之準備。此種準備,約分三項:——

(1)確定統計之目的。 統計時每就事實上所有之現象,用大量的觀察。故其內容往往紛繁複雜,當研究之先,必須按原作統計之主旨,確定目的,以為蒐集上之標準(詳見第六章)。

(2)規定蒐集之範圍。 當觀察之始,除將該次統計之主旨審訂外,對於應蒐集之事物現象,尤須確定一適當之範圍。否則,所得之材料,在表面上觀之,雖極豐富。惟以其來源分歧,性質各異,則其結果之謬誤,亦勢所難免者。

(3)預定進行之計畫。 當統計目的與蒐集範圍已定之後,卽應酌定進行之計畫。譬之如何蒐集;如何整理;如何計算種種,凡關於該問題前後各項之手續,皆當有具體的計畫。

除此三項外,當實行蒐集前,尚有宜注意之事件:——

(1)應詳審問題之性質,是否可以統計方法之手段,以解答之者。苟問題中已含有倫理的或宗教的意味,則決非統計所能闡發者也。

(2) 統計材料有爲初級者(卽粗料)，有爲半製成者(卽半成料)，有爲次級材料者(卽成料)，當蒐集之先，須詳爲硏究，俾凡有關之資料，完備無遺。

(3) 當蒐集之先，對於報告者應表示調查之真意，并保證不洩漏私人事件之責成。

(4) 應注意一切經費，時間，及組織種種問題。

(5) 應注意報告者屬於何方面，對於該問題有無利害之成見。

按上述各要件，作始之時，苟稍有疎懈，則其影響於結果者必鉅，學者可推想得之。

B. 蒐集材料之方法。　蒐集之方法，本隨統計之性質，與夫材料之繁簡而定，不可一概論之。玆爲敍述簡便起見，特將實際上應用之各種方法，分錄於次：

(1) 用原有之表册法(The Official Records)。　此法卽將被調查機關原有表簿單册之記錄，藉供統計之用。是爲蒐集次級材料之常法也。例如調查本城之小學兒童數目，卽將各校學生出席簿之數目，謄錄計算。又若蒐集上海各公司成本之資料，卽根據各個成本帳簿。如

此手續固屬便捷，而數目亦較真確。惟應用斯法時，有須注意之點三：——

a. 整理問題。因由斯法所得之材料，皆來自各個原有之記載，其性質格式，和單位種種，未必與我之統計，盡相符合。況吾國統計之政未舉，各界制度紊亂，是非經過適當整理之工作，不足以統一其性質，比較其異同。

b. 謄寫問題。因原有之記錄，格式不一，須謄寫以彙類之。惟是時最易蹈遺漏，妄增，誤入，及顛倒諸弊，倘非細心者，絕不能司其職。

c. 確度問題。由斯法所蒐集之材料，似較確切可靠。惟被調查者，往往以不明統計之用意，而發生種種之狐疑。則其記載亦常預爲做弊，以隱其真象焉。我國主管銀錢機關，每有一帳而用二簿者，即其實例。故當蒐集之前，應通告被查者該次調查之主旨，并表示嚴守私人事件之責成。使被查者完全了解，則其所得之資料，庶有可靠之確度。又當蒐集之後，亦必精密檢查，以免錯誤贋僞等弊。

(2) 實際調查法(The Method of Investigation)。此法爲統計界最普遍最常用之法。而其內容之手續,及類別亦至繁賾,姑摘其要者,分別論之:

a. 初級調查(Primary Investigation)。初級調查者,卽謂統計上原始之訪查也。此類方法,計約四種:曰親自調查法(Personal investigation);曰通信估計法(estimates from correspondents);曰被問人塡報法(schedules to be filled by the informants);曰僱員計查法(schedules in charge of enumerators)。蓋每値進行之始,卽應由主其事者,熟審統計事實之性質與目的,而擇定其最適用最經濟之方法。切不可預存成見,而有所顧忌也。茲復將各法之梗概,歷述如下:——

I. 親自調查法　此爲統計學上最精確之方法,卽從事統計者親身實地之調查也。然人每患其手續過繁,糜費較鉅;在範圍狹小,現象簡略時,或易行之。苟當繁複之事實,廣漠之區域,則殊不適用也。李樸萊(Le Play)所研究歐陸工人之預算

用費，卽採此法。其進行之始，係居住一工人家庭中，察之數月。然後再以同樣之手續，行之於其他若干家庭。如是十數年後，方得一較確之統計。然其被查之家數，亦復有限。由是觀之，實地之調查法雖尚矣，然亦須視統計之性質以爲衡。譬諸調查一地貿易之狀況，若特派人員以作實地之考察，固甚真確。苟統計全國各項實業之情形，或調查世界人口之現狀，則必非此法所能盡其事者。卽如上例，李樸萊所作之統計，亦祇能擇全體適宜代表之家庭 (a fair sample of the whole)。倘逐一查之，雖盡李氏畢生之時間與勞力，亦難於有成也。

(II) 通信估計法　此爲統計上最簡便而經濟之方法。故每於求相近的結果 (approximate result) 時，輒用斯法。其普通進行之手續，卽將應須調查之事實與現象，設適當之問題（設問之方法見後），用通信之辦法，以徵集其答案。然後由大量的事實中，以推測其近似之結果。據云此法用於農產物統計上，最爲有效。殆以其估計之結果，係得諸多數

之報告。縱有極少數不確之答案,然一置諸大量之現象中,影響必微。故其最後之結果,亦有近似正確之價值。至此法徵集之答案,除直接通信外,有時亦分派各地之代理人員,彙集其報告。

(III)被問人填報法　此法較第二法爲更可靠。因由第二法所得之報告,有時常不完整,故難求其正確之結果。若於此法行之,則各地被問人略有責成,對於應行搜查之現象,自當詳細報告。惟於此法中最宜注意之點,即在表格上問題之明晰該要。務使普通被問者,不難領悟,則其填寫時,方不至誤解而錯報。此法之優點,即在範圍廣大,現象繁複之統計中,可由各地報告員,擇其全體適當之代表,填寫通報。既可從此推測全部之結果,亦得節省大量之糜費。歐美工資,失業,教育,氣候等統計,常用斯法。

(IV)僱員計查法　此法係由總機關僱用專門職員,分任各區調查事務。故其優點,即在適於公家大量的調查。惟以耗費較鉅,私人常不易供給

之。例如美國方今人口之統計，與夫職業工資之調查，往往採用斯法者，即因經費由公家擔任之故。但實行此法時，表格內容固可詳密，然關於式樣之大小，行格之闊狹，以及標題之意義，均當特別注意。表式不宜過大，免難攜帶。縱可摺疊之，亦易破損，不若較小者之便利也。表式之行格，尤應寬狹適度，便於視察。標題之意義，必求明晰，俾閱者得以一目了然。茲舉一美國調查職業與工資之表式如下，以示其式樣，行格，與標題等之組織。

除上述四種外，尚有從調查範圍廣狹之區別，而得下列之分類:——

(V) 完全調查法 (Complete Investigation) 完全調查法者，凡所有事實之現象，一一調查，不使絲毫遺漏，故其結果自較他法爲更真確。政府調查，多用斯法。但若個人，或其他私立機關，往往因能力之難及，則不得不採用他法，總之斯法祇可應用於狹小範圍諸問題。

(VI) 抽樣調查法 (Sampling Method) 斯法

之進行，固較簡便。惟對於所抽出之代表事實，務期其有代表全體之資格。切不可預存成見，使所抽出之現象，爲全體中之特殊者，罕見者，而得無價值之結果也。故當抽樣之時，最宜循其自然，毫無定鵠 (at random)。或多派數人，多抽現象，以減少其或差 (probable error) 之機會，而得較確之答案。

設例：　假設調查某城人民之體格，完全調查法，自難採用，勢不得不以斯法代替之。惟當抽樣之時，尤須審愼，固不可僅以富庶官僚之體格，而例其餘。亦不宜專以貧窮之勞動者，而爲其代表。故歐美常用之法，卽於每街任抽三五家，詳細調查，然後就各街所得之報告而求得結果。如是，則每街之三五家中，旣非一律，而各街被查之家庭，又自不同。是其所得之結果，已可爲全城人民體格近似之代表 (approximate representation)。又或多派若干人，各自調查。然後再將各個之報告平均之，使彼此之成見互相衝消，亦補救之一法也。

此外又有從調查手續上之異同，而得下列之分類:——

(VII) 直接調查法 (Direct Method) 此法係由統計之機關直接從事者，故與實地調查，髣髴相同。

(VIII) 間接調查法 (Indirect Method) 此法適與上法相反，卽委託相當之個人或機關，代為查訪也。故亦名委託調查法，或代理調查法。各國外洋貿易之調查，往往委託領事者，卽此例也。

總之調查方法雖多，惟大別之，亦不外實地調查，通信調查，與夫委託調查三法而已。統計者對於各法之優劣，皆應悉心研究，盡力討論，至於應用時，則又須視統計之目的，事實之現象，以及有關之問題而定之。

b. 次級調查 (Secondary Investigation) 次級調查者，就他人或其他機關已有之成料，而利用之也。故其手續，較為簡便。如第一法用原有之表册者，即屬此例。斯種蒐集之來源，除一般雜誌，報章外，如

本章第二節所述各方面之來源，亦其主要者也。

當實行調查時，應行注意之點甚多。爰撮其重要者於次：

a. 關於初級調查者：——

(I) 調查方法上之注意。 初級調查時，手續最繁。當事者最忌有畏難就易之心，對於各種方法，固須澈底明悉，關於統計現象，尤當審愼周詳。務使所討論之問題，能藉統計之方法，表現其事實，闡發其蘊奧。至若各方法實施上之注意，則於各節中已略述其梗概，學者當熟玩之。

(II) 調查人員上之注意。 調查人員之選擇，悉依調查之性質而異。如係專門事業之調查，須以專門人才任之。若爲普通事業之調查，則可任用普通之人才。又如近世歐美調查全國或全區之人口戶籍，往往以各地警察分任，以其力衆而易舉也。惟我國警察之智識卑陋，對於調查之意義既未明瞭，所謂調查方法者，則更不知爲何物也。故其每年所得之報告，亦屬具文。近聞國內各法政學校有

特設戶籍講習會之動意，以培養人口調查上之專門人才。果爾，則將來或可得較確之結果。總之無論何種調查人員，皆應具下列資格:

第一須毫無成見。　調查人若預存成見，則其結果必屬人爲者，自無可信之價值。美諺云:"數字不能作僞，惟造謊者能作僞數目"。(Figures will not lie, but that liars will figure)。卽此意歟。故調查者當從事之先，固不宜有主觀的成見。卽於進行之時，尤不應存利害的偏見。如是，則其解答之結果，庶乎近矣。

第二須能守祕密。　調查人如當實業，資產，或其他有關個人(私人或法人)利害之調查時，皆應嚴守祕密，不可絲毫洩漏。設使此消息一經傳出，則被查者必蒙其損害。以後被查者定引爲前車之戒，非置之不答，卽僞報以失其真。如是，則調查上之困難甚多，故知嚴守祕密，亦屬調查人必要之資格。

第三須秉性精細。　統計上之事實，不外以

數字代表其現象。苟其頭緒紛繁，手續駁雜，要非有精細耐煩之腦筋，何以克稱厥職。

(III) 調查問題上之注意。 調查問題之當否，影響於材料方面者甚大。易言之，即對於統計最後之結果上，關係至密。特詳述之，以便參考。

第一問語須簡明。 問語務求簡單明晰，俾閱者毫無疑竇，免生誤會。故一般統計家多認"然""否"(yes or no)，及"單數"(simple number)之問題爲最良者，殆以其問語簡明而便於回答也(Questions must be very simple and easy to answer)。但於此處尤須注意者，即所謂問題不獨簡明，一切字句，意義，更當適合一般被查者之常識。不然，或因誤會而錯答；或感難解而不覆；玆引一實例以證之：

客冬南京某大學爲研究社會經濟問題起見，調查南京各業公所之情形。其中有數問語，似較不妥。如"本公所與社會之關係及影響"，"本公所有何創造"，等語，在吾人觀之，固

覺平易。惟調查者須知商人智識淺陋,對於此種名詞,不知作何解釋,其結果遂至相率不答而後已。此卽以問語不簡明不適合之所致也。

第二問題須經濟。 設問不可過少。過少,則不足供查訪之用。尤不可過多。過多,則徒增手續之煩瑣,經濟之糜費,殊不合算也。美統計家金氏曾云:"如國家人口之調查 (national census),多寫一無謂之問題,則必多濫費數千百元"。故當範圍廣大之調查,對於問題之數量,尤應審愼。

第三語句宜直接。 被查者對於答問之事,往往存有厭煩之心理。此種情形,在我國爲尤甚。故一切語句,皆須直接 (direct),便於答覆。不可含糊委婉,需人思索。

第四語意宜懇切。 設調查之事項,對於被查者關係綦重,則應將調查之理由,懇切說明,不可含有個人人格及干涉私權之意味(Personal interest and personal interference),免因誤會而生僞報之弊。

(IV)調查單表上之注意。　調查單表對於答覆之結果上，影響最大。除收回時，詳密檢查校核 (the checking, editing, and revising of schedules) 外，當製作單表之始，尤有必要之原則凡十：——

第一，調查事項，無論係按照法律規定，或屬私人主動，均當載明。俾被查者明瞭其意，而得有確實之保證，庶不致生僞報不覆諸弊。

第二，所有界說解釋之類，如能於單內適宜處插入最好，否則祇有附錄於單之首尾各端。

第三，設問宜簡單明晰（參看"問題上之注意"）。一切意義不可有兩歧之處，更不應窮詰隱私，使被查者多生狐疑。

第四，設問中應有互相證實之處，以杜絕各種詐僞答案或不正確之報告。

第五，設問前後均須銜接。一切問題，尤以有關研究主旨者爲限。

第六，測度單位須詳細說明，以能不背習慣上之意義爲最佳（參看"單位之研究"）。

第七,單表內容之編列,須合論理 (logical)。行格之廣狹,尤應適於填寫。蓋排列合法,其有裨於日後整理者,亦自不細。

第八,凡計算上所有總數,百分數,或平均數諸事項,不宜使填單者任之。

第九,單表之大小 (size),式樣 (form),以合於填寫,便於攜帶者爲標準。

第十,單表發出時,應附上郵票或有郵花之信封,以備填單者寄回之用。

此外如發散單表之日期,亦須各件相同。不然,稍有先後,則填單者往往易起狐疑,而生種種不快之感,是亦吾人所當審愼者也。

玆附上實際應用之單表數則,以資討論。

b.關於次級調查者　蓋此項調查,係蒐集一般成料。故其應行注意各點,自不能似初級者之多。惟有時各級注意之處,亦往往大同而小異。茲分臨事與事後二層述之:——

(I)臨事之注意　當調查製成次級材料時,應知下列各要件。

①所有成料,是否報告適當?準確程度若何?

②所得材料,對於問題運用上之關係若何?

③材料性質,是否普遍,概括?有無特別例外之處。

④材料在初級調查時,原有之目的何在?

⑤測算應用之單位,是否簡單抑龐雜?

⑥凡關調查次級材料時,對於從事者各方面之狀態,均須特別注意。

(II)事後之注意　即當成料已得之後,須精密整理,以檢核其真偽。下列數點,是其最要者。

①遺漏　係當記而不記也。

②誤入　係記錄地位之錯誤也。

③妄增　係任意增加其內容或數目也。

④顚倒　係記錄位置前後之不當也。

此數點爲塡表者易犯之病，吾人當收到回答時，極宜加意校對，以剔其弊。

(3)估計法(The Process of Estimates)　此法係用於統計事實中，不能以前兩法蒐集者，是誠出於不得已之代替法也。例如世界或一國藏煤量之統計，旣不可用計數之法，將所有未開出之煤礦，一一實計之；亦無從得原有之記載。故不得不用科學的救濟法，以估計之。惟引用斯法時，應注意下列二端:——

a.當有根據　因估計者，非憑空幻想之謂也。必賴有適當之根據，方有價値。其根據之方面有三:——

第一爲根據以前之統計或估計。　譬諸估計山西煤鐵蘊藏之量。多謂若盡量開採，足供世界二千年之用云云。此種約略數量，雖不必盡確，然亦須根據前人 F. von Richthofen 之估計也。再若我國秦漢對於國土之規劃疆界，測定里數，亦多借禹貢九州篇而推計之。近世對於世界人口礦產等統

計，仍多引用此法。

第二爲直接由取得之材料上推測之。　此估計之法，卽由所得材料之現象上，而直接推出之。例如人壽保險公司之死亡表 (death table)，卽從一般人民死亡之概況，及已往數十年(普通多以六十年爲度)死亡之比率，與年歲體魄等現象，求得其關係率 (correlation)，以定保壽營業之標準。此種估計，在近世保險界，卻已認爲科學的根據，其價值之高，概可見矣。若 1910 年籐策氏 (Raymond Tenney) 按中國已查之戶數，求得本部各省每家 (each family) 近似之平均數爲 5.5 人，奉天爲 8.38 人。於是推得全國人口之估計數爲342,639,000。當 1920 年，各郵局求得人口之估計總數爲 427,679,214。此爲最近之實例也。

第三爲間接由有關係之材料上推測之。　此法之運用，與前法略同。惟所取之材料，非直接有關係。例如按一地或一國消費糖之總額，用個人之平均食糖量除之，而得人口之估計是也。此種估

計,在金融界中,亦往往引用之。

b. 審查確度　估計上最大之困難,卽爲確度問題。蓋其結果價值之有無,亦全視乎確度之高低以爲衡。故當吾人應用之始,極宜注意下列諸點:

第一爲確度較高而有可信之價值者。　大凡由此項所得之估計,其確度常較可靠。今分述其方法於次:——

(I) 所根據從前之統計或估計,甚爲正確時,則此次之估計,亦當可靠。

(II) 估計材料之情形,苟非常變者,亦易正確。

(III) 估計一事實,同時經過多數人以推測其答案,倘屬相同者,則亦較有可信之價值。

(IV) 數人同時推算估計之結果,卽或微有差異,倘其差度 (probable error) 若能互爲衝銷時,則亦可信。

第二確度低微直無可信之依據。　此項估計之方法,亦有三種:

(I) 所用估計之方法或手續(The method or process of estimation) 不當者，自無可信之理由。

(II) 所採材料之標準，不能完全適合者，亦不足靠。

(III) 設有臆測之分子，攙雜其中者，亦無可信之價值也。

總之，估計之法，原爲統計上之下乘。亦不得已之救濟法耳。當引用時，最宜審愼周詳，務期估計之目的可達，勿生人爲臆造，毫無價值之結果。

本章實際之問題，業經詳述。惟關於材料本身上之觀察，尙未論及。作者特參考塞 (Secrist) 氏之意見，附錄於下。幷列舉實例，以資證明。

統計材料之考慮　以下所述者，均爲材料本身上之考慮，學者當用客觀的眼光，以討論之。

1. 材料是否適用之問題。　無論何事，均有相互關連之方面。矧以統計之工作，尤須從旁推測，藉已往之陳跡，推定目前之情形；按近今之事實，預

測將來之現象。故於材料之選擇上,當精密考慮,取其最適用者而研究之。

2. 材料是否全體應用, 抑一部應用之問題。此項問題之考慮,當視統計之性質以爲準。假設研究性質 (quality) 者, 則直可用一部分材料以推測之。若爲考察數量 (quantity) 者, 則絕非以全體之現象爲資料不可。請進例以言之,譬諸調查南京之戶口,苟僅欲測每家平均之人數, 則可於各區中任擇 (Choose at random) 數家,統計之,卽得每戶平均之人口。設使調查全邑之人口總數,則必非一部分之戶數所能代表者。自當完全調查,方可得其總數。

3. 單位之單式與複式問題。 單式的單位 (simple units), 如牛一頭, 馬一匹, 多以具體之一進,且屬自然而未經組織者。複式的單位 (composite units), 如工人之收入 (income), 商店之資本 (capital), 係業經人力組織而成者。統計時,最好利用自然的單位。卽於無已時, 而用複式單位。則必訂明

意義,劃一標準,以免誤會(詳見"單位之選擇")。

4. 材料確度之問題。　欲考慮材料確度之問題,當審慎下列諸端:——

第一當審查報告之確度如何? 此屬材料上原始之問題。設使報告,已屬不確,而反冀其結果之真實。是猶不揣其本而取其末,乃"不可能"(impossible)之事,吾人當審查之。

第二當審查計算之確度如何? 設調查之報告或屬絕對的可靠,而計算時,尤須精密注意。如計算之方法(the method of calculation),是否正確? 引用之機器(如計算機 adding machine),計算尺 slide ruler)是否合宜? 皆當審查。否則,其結果亦不足靠。

第三當審查報告上對於或差之度數如何? 倘調查報告上對於或差數(probable error)甚小,則其材料之確度,尚屬可靠。反是,則不足信也。

除上述三項當詳細審查外,尚有三點,為調查上

最易犯之病，學者應注意焉。

第四爲一部分事實真確他部分簡略者。譬如統計上海各業之情形，以測度全市實業之趨勢。設當時關於紗廠方面，雖已得真確之調查，然其他各業之報告，每易缺略。因此則其最後所得之結果，必不能有美滿之確度。

第五比較之部分與時間不當者。如比較兩公司營業之總額，一爲資本萬元者，一爲資本千元者，如是相比，雖或前者營業數量兩倍於後者，亦不足爲盛旺之證，此大小比較之不當也。又若以一月某貨進出之總額，與一年或數年者爲比較，則其結果亦必無真確程度之可言，此殆時期比較不當之故耳。

第六爲統計之預存成見者。統計上之要義，卽當不存偏見，不删逆意之事實，不下片面之評斷。今若故意造成之統計，則是預存成見(prejudice)，而其材料之僞謬，自不待言。

5. 材料代表的情形，是否常變之問題。　材料

固當有代表事實之性質，而其代表之情形，又常有久暫之不同。故不得不特加考慮，預測其影響也。今復分三項論之：

第一內部之變動。　蒐集材料時，內部往往生有變動。吾人若未慮及之，則必得荒謬之結果。例如以進口貨論，設去歲海關對於凡百貨物，所有進口者，均入此類。其數自較大。今年忽將復出口貨，減去不算，則本年之進口貨量，當然較少。苟不諳此內情，則必武斷今年之進口貿易，陡形減縮也。再如按歷年海關關稅之收入額，以測度逐歲進出貿易之興替。如是統計，原屬可靠。惟若近年以來，我國稅率忽增，則其收入總額，自較往歲者爲多，倘卽以此爲貿易發達之憑證，則大謬矣。

第二外部之變動。　今設研究商品之市價，以推測人民生活之程度 (standard of living)，則對於市場之真狀，極宜考察。譬如近世商場，因托辣斯 (Trust) 或加迭爾 (Cartel) 之壟斷，

(monopoly) 奸詐商術(manipulation)之影響，而使物價忽低昂忽，學者當悉此外部之變動，殊不足以代表真象，而爲人民生活程度之推測也。

第三分子之變動。　例如上海物價指數表，其中十數種之商品，本可代表一般之物價。今設有一新商品(卽新分子)，突起其間，則此指數表之內容上，必生變動。是原有之十餘種商品，已不足代表現今之物價，此卽分子變動之一例。

本章爲實際統計上原始之工作，故不厭煩瑣，詳細陳述。望學者精密以研究之。

摘　要

1. 統計材料分二類
   - A. 初級材料。
   - B. 次級材料。

2. 材料來源有四方面
   - A. 政府。
   - B. 團體。
   - C. 單獨機關。
   - D. 個人。

3. 材料之蒐集:——

A. 事前準備
- (1) 確定目的。
- (2) 規定範圍。
- (3) 預定計畫。

B. 蒐集方法:——

(1) 用原有之表册法。

(2) 實際調查法
- 初級調查
  - a. 親自調查法。
  - b. 通信估計法。
  - c. 被問人塡報法。
  - d. 僱員計查法。
  - e. 完全調查法。
  - f. 抽樣調查法。
  - g. 直接調查法。
  - h. 間接調查法。
- 次級調查
  - a. 用原有表册法。
  - b. 用他人製成之材料法。
  - c. 用一般書報雜誌之報告法。

(3) 估計法——注意點二
- a. 當有根據。
- b. 審查確度。

4. 調查上注意之點。

a. 關於初級者。

甲，方法上之注意。

乙，人員上之注意。

1. 毫無成見。

2. 能守祕密。

3. 秉性精細。

丙，問題上之注意。

1. 問題簡明。

2. 問題經濟。

3. 語意直接。

4. 語氣懇切。

丁，單表上之注意。

1. 調查主旨須載明。

2. 界說解釋，宜插入適當處。

3. 設問宜簡單明晰。

4. 問語應有互證之點。

5. 問題前後須銜接。

6. 單位應說明。

7. 編列須合理。

8. 單位須無計算工作。

9. 大小式樣須適宜。

10. 單內應附寄回之郵票。

11. 發散須同時。

b. 關於次級者。

甲，臨事之注意。

1. 成料須適合。

2. 材料對於問題運用上關係當密切。

3. 材料原有之目的應相近。

4. 材料應普遍。

5. 單位須簡明。

6. 各方面態度須公允。

乙，事後之注意，應檢查下列諸弊：

1. 遺漏。

2. 誤入。

3. 妄增。

4. 顛倒。

5. 統計材料之考慮上有五問題：

1. 材料適用問題。

2. 材料一部或全體應用問題。

3. 單位之單式或複式問題。

4. 材料確度問題。

5. 材料代表情形之變動問題。

問　　題

1. 試述對於初級與次級材料蒐集上之注意。

2. 我國今日實業統計材料之來源有幾方面，何者較正確？何者不足靠？

3. 我國人口或教育統計之狀況若何？

4. 試擬一職業學校畢業生出路之調查表。

5. 試蒐集本地主要實業之現狀，以爲統計之材料，藉供原始工作的練習。

6. 試根據本章所述之原則，批評下列調查表。

教員生活調查表

姓名（如此項不願塡寫亦可不塡）……………………………………

男女…………年歲…………籍貫……………………

履歷：是否科舉出身…………何種（如貢生廩生等）……………………

最後曾在何校畢業……………………………………………………

最後曾在何校修業……………………………………幾年…………

除本校外曾在何校擔任教職…………………………共幾年………

除學校教職外曾任其他職務否………何種………共幾年………

現在服務狀況：

現在何校服務……………………………………………………………

擔任何種科目………………每星期共若干時間……………………

教務外是否兼任職務………何種職務（如校長級任書記會計等）

在本校服務已有幾年………………………………………………

本校學生共若干人………………職教員共若干人………………

平時最喜研究者爲何………………………………………………………

課外常以何事爲消遣（如音樂網球小說等）………………………

現在全年薪水共若干元………………………………………………………

尚有其他收入否………何種……………每年約共若干元…………

每年個人用度須若干元………………………………………………………

須負擔家用否……………………每年約若干元…………………

已經結婚否……………………子女若干人…………………………

（表6）

參考書

1. Copeland: Business Statistics, Chap. I, pp. 4–17.
2. Yule: Introduction to Statistics, Chaps. XIII, and XIV.
3. Bowley: Elements of Statistics, Chaps. II and III.
4. Bowley: Elementary Manual of Statistics, Chap. VIII.
5. King: Elements of Statistical Method, Chap. VI and VII, pp. 47–63.
6. Secrist: An Introduction to Statistical Methods, Chap. II, pp. 14–58.
7. Meitzen, August: Statistics, pp. 120–129, 155–185.

第九章　統計材料之彙類與分析

本書自本章以後,均詳述材料整理與分析之方法,學者應特別注意。

表列法

第一節　表列之意義

表列者 (tabular presentation), 類別排列之謂也。係用科學的方法,整理,或解釋所有現象;更精密研究其同異之點, 而闡發其根本的原因。是即依據適當之判斷力, 與

夫正確之意義，而組成之者也。

第二節　表列之法則

表列一事，在初學者每輕忽視之。以爲能將各現象彙列一紙，便於查閱，則其功效乃見。然按諸實際，困難殊多。卽近今一般統計專家，對於此項工作，亦復認爲窮思竭力，方能入彀 (Statisticians looked upon the table as the "Ultima Thule" of their efforts)。矧一無經驗之學者乎？今摘述其普通之法則如下，以供參考：

A. 預備列表之手續　當實行列表之先，須經過種種預備之手續。絕不可從調查單 (schedules)，或其他原始之記錄 (primary records) 中，直接過入表內。例如一國工業之統計，亦須先將所有現象，經過多次之分類 (classification)，及總括 (summary)，然後方可列入正式表中。故此時最應注意二點：(1) 分類之範圍，要確定而明晰，(2) 過錄 (transcription) 之手續，須精細而無誤。切不可因彙類過錄之工作，而犧牲原始之意義。今欲免此弊，則又不得不用抽樣考驗法 (sample testing)，或校讀法 (check reading)，以稽核其當否。總之，當此整理之始，尤須視事

實現象之繁簡，以定其手續之進行。設爲單簡者，則可由人力以操作之。不然，非藉機器之工作，不足以彙類其繁複之現象。

(1)現象簡單時預備之手續。　當現象不甚繁複時,可僅由人力以任預備之手續。其始應將集得之材料,按其特點分爲數類——此時手續較煩瑣——然後用謄錄法 (writing method)，以作成初次的表列 (original tabulation)。預備之手續，卽止於此。

(a)謄錄法　斯法卽將初次彙類之現象，詳細謄寫，以爲正式表列之預備。今舉美國五千教員狀況調查之一例，以示其用途及利弊。

1. 五千教師狀況之原始事實表

個別	年齡	父母歲入	月數	月薪	開始服務年齡	鄉村學校	集鎮學校	都市學校	中學	師範學校	大學	籍貫	父的職業	兄弟姊妹數	家境	地位
51	28	5	10	65	18	1	4	2	3	1	4	2	0	6	2	6
52	28	2	10	59	20	0	0	8	4	3	0	2	5	5	1	5
53	25	9	10	50	20	0	0	5	4	3	0	1	4	4	1	2
54	53	9	9	100	19	10	15	9	2	2	0	1	1	8	1	10
55	35	4	10	55	19	2	4	10	2	2	0	1	5	6	3	3
56	49	4	10	65	16	1	14	16	4	0	0	1	3	6	1	3
57	25	6	9	74	18	0	0	7	3	1	0	1	3	3	1	3
58	44	0	10	85	17	0	4	21	0	2	1	2	5	5	1	17
59	20	8	9	55	19	0	0	1	3	0	0	1	3	3	1	5
60	31	1	9	40	16	7	0	7	1	0	0	2	5	1	1	4

(表 7)

此表記錄，至爲詳細。如關於“父母歲入”一項，係用“規定的數目” (code number)，若5,2,9,9,等，以代替 250 元以下，及 250 至 500 元，500 至750元等實際之金額。其目的在節省完全謄錄之勞力也。若干年齡家境等等，無不詳盡。此種謄錄之長處，亦卽在此。其弱點爲嫌手續過煩，殊不經濟。且對於各項概括之

結果,如平均 (average), 參差度 (measures of varibility) 種種,皆未能表出,故不合初次表列之原則。——初次表列,應便於總結 (totals) 平均等之計算。——應用時,宜注意此點。

(b)記號法　此法係用記號(如 X,△,V,•,○,十等)將同樣事實之現象,列於一欄,以便總結。今仍用前例以示之。

2. 教師年齡初次統計表

教員數	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	總數
一七——一九											
二○——二二									×		1
二三——二五			×					×			2
二六——二八	×	×									2
二九——三一										×	1
三二——三四											
三五——三七					×						1
三八——四○											
四一——四三											
四四——四六											1
四七——四九							×				1
五○——五二											
五三——五五					×						1
五六——五九											
六○——六二											
六三以上											

(表 8)

按此表，知各項現象已有結數。如20—22歲之教師，有 1×59 位；23—25 歲者，有 $1\times 53+1\times 57$ 位；由此則將各項結數加之，卽得總結。其他如平均數參差等度亦可從此求出。故當引用此法時，有利點三：(1) 因用記號的答案，則可免詳細謄寫之勞。(2) 因分行總結，則較迅速而正確。(3) 因從此原始之記錄中，卽可算出各事實之平均等數。

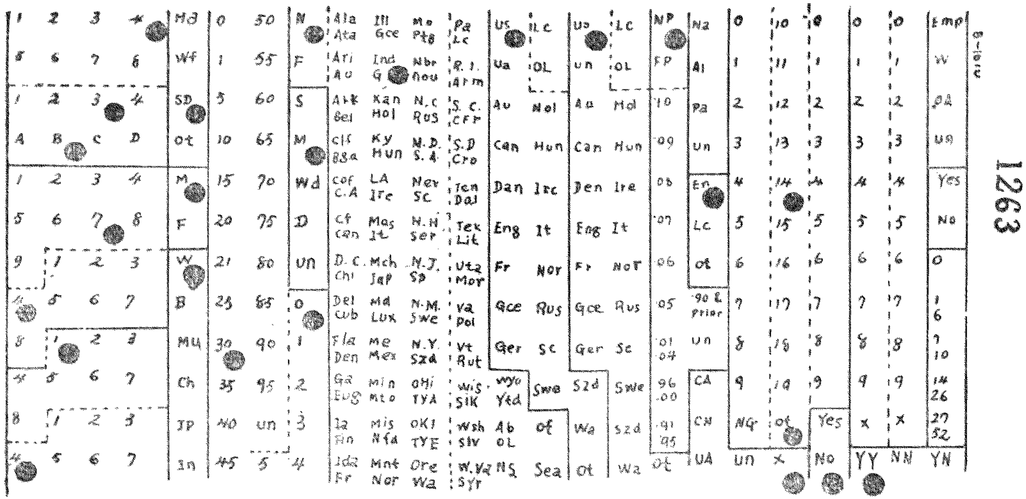
惟當運用此法之始，須擬定若干標題 (column headings)，以包含該問題各項之答案。卽若上表，年齡一項，所以有如是多格者，亦在表現其年齡之距度 (interval)。斯種距度問題，卻屬一重要之事件，學者亦當細心以求之。

(2) 現象繁複時預備之手續。當現象紛繁複雜時，則須用機械之力，幫助整理。茲就歐美統計界最新之預備手續，以及引用之機器，略述於次。

近今統計界對於繁複事實之現象，常用列表方片 (tabulating cards)，以整理之。其法係首將調查所得各種之事實，彙錄於片上，以爲正式表列之準備。平常對

於普通表格，往往印成空白行格之方片，以備應用。若為特種者，則須另製方片。在此方片上，對於各現象之答案，亦多採記號之法。(如記以X,○,△,・等)。設所有現象過繁，方片不敷記錄時，則可用"大方紙" (large ruled sheets) "方格簿" (ruled blank books) 以代之。

當事實已羅列於方片後，卽可按研究之主旨，依現象之特點，分為適當之類別。近世對於此項工作，每用分類機 (card-sorting machine)，——圖式見後。——將片上同類之現象，在同一之位置，打成同樣之孔。然後置諸向光之處，以鑑別其有無錯誤。如下圖者，卽為1910年美國政府人口統計之方片。今示其式，學者可細玩之，以求得其具體的觀念。

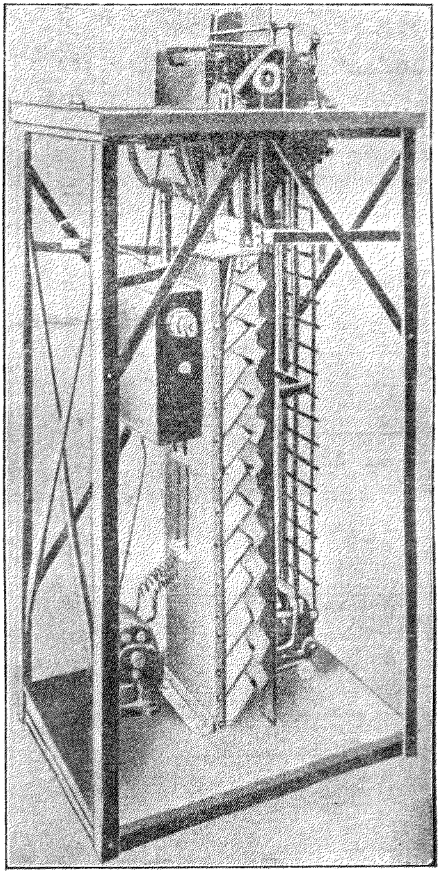


Punched Card Such as Was Used by the United States Government for Tabulating the 1910 Census by Electric Card-sorting and Tabulating Machines

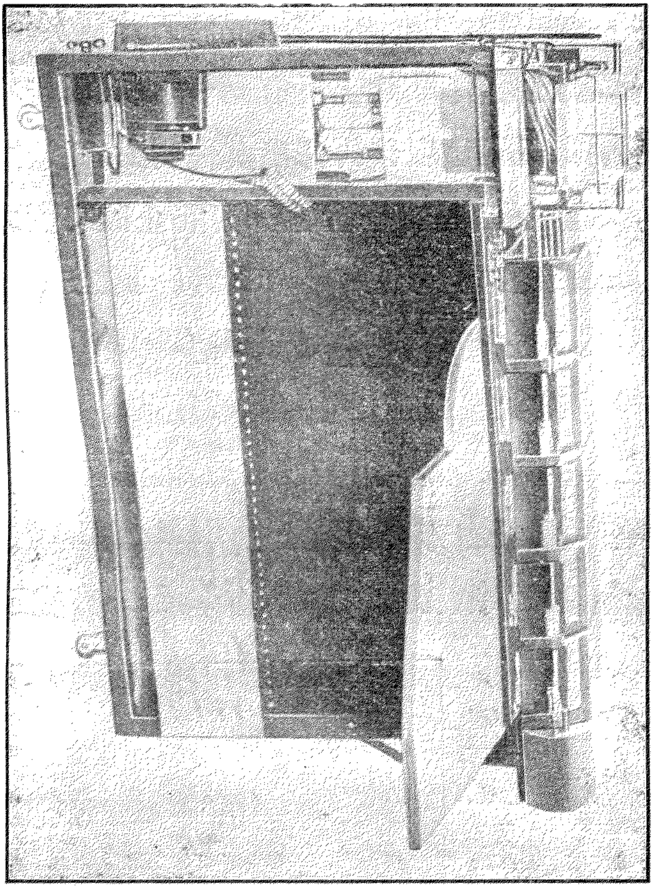
There was a card similar to this for each habitant of the country. Holes punched at different positions in various columns represented the answer to all questions asked by the census enumerator regarding race, place of birth, age, etc. Punched-card systems can often be used advantageously for the cost and statistical work of corporations.

(表 9)

霍勒銳斯分類機



(圖 1)



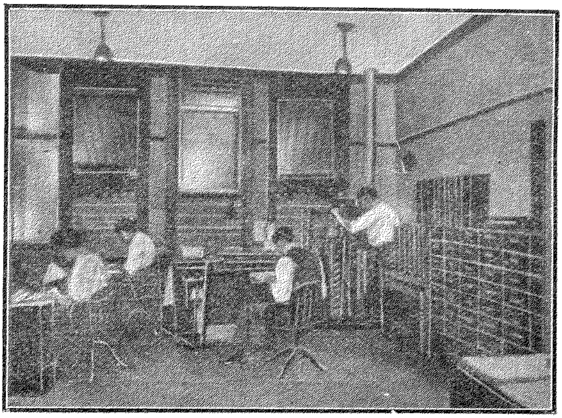
(圖 2)　霍勒銳斯記錄機

是時可將已打孔彙類之方片，置諸記錄機 (tabulating machine) 上，經過分類總括之工作，遂得各項之總數。詳細情形，見下列圖解。

圖 1　爲霍勒銳斯分類機 (Hollerith card-sorting machine)。其使用之法,係將方片置於機之上部。通以電流,須臾間,片上所有同一之特點,皆在相同之部分,打成圓孔。以後再擇出其他特點,經過同樣之工作,又鑽成孔狀。如是返復,卽可將全體事實之特點查出。此機工作之速率,每小時計達一萬二千片左右。

圖2 爲霍勒銳斯記錄機 (Hollerith tabulating machine)。此機之運用,卽將分類鑽成之方片,置於機之左部。通以電流,一一放入。俄而片上各特點之總數,卽呈現於右方計數盤上 (counting dials)。如上圖,最多可示五項特點。此機工作率,每時亦在三千片之譜。

今重將美國最完備統計處之情形,攝影如右,以供當事者之參考:



(圖 3)

當分類該括後,卽可依據統

計之目的,以計算各項結果。編組之,排比之,乃成初次的表列 (original tabulation)。此計算手續,有時亦以數目過煩,遂假機器之力,以代人工。如計算器(calculating machines),加法機 (adding machines),乘除法機 (multiplying and dividing machines),計算尺(slide rule),以及算盤 (abacus) 等具,皆爲常用而最有效者。(其詳細圖式與使用之法,當參閱 Brinton: Graphic Methods for Presenting Facts, Chap. XVI.)

B. 正式列表之手續　當各項總結分類,以及原始的表列作成後,則須經疊次之編組,修改,按研究之目的,與對手人之心理,將各個初次列表,併合之,以顯關係;分列之,以示特點;造成最有效最適用正式之表列。故此時之工作,專在修改編組。從手續上觀之,似不如目前預備時之繁。惟表列之式樣,內容,標題種種問題,則無不於此時解決之,是尤當審愼者矣。茲特分節敍述,以示其詳。

第三節　表列之類別

本節除按表列之種類,編製之式樣,分別論述外,幷附錄各表之用途,以資考鏡。

A. 按式樣構造(The Structure of Tables)之繁簡，可分四種:——

(1) 單項表(Single Tabular Form)　此種表，係專統計一重要事實之現象者。其式如下:

最近三年中國紅白糖進口總額統計表

民國十二年五月一日製(數目據海關貿易册)

年別	紅白糖進口量
總數	9277146擔
民國九年	1930936
民國十年	3862614
民國十一年	3483596

(表 10)

此表爲供普通商業統計參考起見，僅載歷年紅白糖進口之總額。故其式樣甚屬單簡。

(2) 二項表(Double Tabular Form)　此種表係彙列兩種重要之現象而成者。式樣見下:

最近三年中國紅白糖各進口總量統計表

民國十二年五月一日製(數目據海關貿易册)

年別	紅白糖進口量數		
	總數	紅糖	白糖
總數	9277146	4818456	4458690
民國九年	1,930,936	1,032,963	897,973
民國十年	3,862,614	1,995,237	1,867,377
民國十一年	3,483,576	1,790,256	1,693,340

(表 11)

此表之內容,除將歷年紅白糖進口總額編錄外,更按兩種糖各總數,分別彙列,藉以推求其差額之原由。

(3) 三項表(Trible Tabular Form)　此種表之內容,較上種爲更繁。今揭其式於次:

最近三年紅白糖進口各總額與價値統計表

年別	紅白糖進口量與價値					
	總數		紅糖		白糖	
	價値	量數	價値	量數	價値	量數
總數	海關兩 73573705	擔 9277146	海關兩 31297825	擔 4818456	海關兩 42275880	擔 4458690

民國九年	17382501	1930936	7770624	1032963	9611877	897973
民國十年	30828851	3862614	13099170	1995237	17729681	1867377
民國十一年	25362353	3483596	10428031	1790256	14934322	1693340

(表 12)

從此表,不獨可知歷年紅白糖進口之總額。更可知價值與總額之比較,而推測其市場之情形。

(4) 四項表 (Quadruple Tabular Form)　此種表較前尤詳,能將四項重要之現象,羅列於一表,俾閱者一目了然。玆仍用前例,以示其用途。

表列之項數,本無限制。如五項,六項,以至於十餘項,皆無不可。惟在統計家酌量採用之耳。至論表列實際之製法,雖無一固定之原則。惟與其合多項紛繁事實,作成一複雜之表。曷若抽其重要之現象,各列單表(但須各成一單位 Each table should be a unit),以便閱讀,而易記憶。

B. 按主要項目 (The Controlling Factor) 之組織,可分三種:

(1) 此種表之組織,係以時期(如年月等)爲主要項

目,根據事實現象發生之先後爲排列者。故含有歷史的意味。而其價値,亦僅在乎順序記錄。普通年表,季表,月表,週表等,皆屬此類。今略舉一例,以槪其餘。

民國十一年來茶類運往外洋總數統計表

(數目據海關貿易册)

年分	總數
民國元年	1,481,700擔
民國二年	1,442,109
民國三年	1,459,799
民國四年	1,782,353
民國五年	1,542,633
民國六年	1,125,535
民國七年	404,217
民國八年	690,155
民國九年	305,906
民國十年	430,928
民國十一年	576,073

(表 14)

(2) 此種表之組織,係將問題之內容,擇定主要項

目，用縱橫分錄法 (cross-section)，使事實上有關係之現象，得相互排比之作用。茲設例以說明之：

我國近三年來進出船隻統計表

(數目見1922年海關報告册)

年分	進出輪船數		進出篷船數		合計	
	隻數	噸數	隻數	噸數	隻數	噸數
九年	121338	99642210	89271	4624485	210609	104266695
十年	125432	109319714	89134	5299830	214566	114619544
十一年	123401	119354968	63027	4776393	186428	124131361
共計	370171	328316892	241432	14700708	611603	343017600

(表 15)

上表所列之事實，除將每年輪船及篷船隻數與噸數表現外。更用縱橫對照法，俾各年船隻噸數與隻數，得縱比之，以示各年同項之差度；橫比之，以見同年異項之差度；斯卽本表之優點。而一般實業教育諸統計家所以多喜採用之者，職此之故也。

(3) 此種表之組織，係綜合或任擇一切事實之現象，在同一期間內所呈之狀態，而求得其集中之趨勢，或

代表之性質。例如測度華人之身長，可任選若干人，順序排列之，以發現其代表之長度是也(normal or typical height)。再若一般自然或經濟現象之研究，每根據此分配常同之規律(similar regularity of distribution)，以解答種種問題。故斯種表，多屬常數之表列 (frequency tables)。玆特舉一實例，以顯其作用。

1912年墨色殊賽斯省各項工人每週勞金分類常數表

（見墨省工業統計第二十七次年終報告）

工資分組	各組工人數與百分數	
	人數	百分數
總數	681,383	100.0
每週工資在三元以下者	2,266	0.3
每週工資在三元及四元以下者	5,792	0.9
每週工資在四元及五元以下者	16,909	2,5
每週工資在五元及六元以下者	34,070	5.0
每週工資在六元及七元以下者	52,604	7.7
每週工資在七元及八元以下者	63,879	9.4
每週工資在八元及九元以下者	68,787	10.1
每週工資在九元及十元以下者	75,006	11.0

每週工資在十元及十二元以下者	103,160	15.1
每週工資在十二元及十五元以下者	107,677	15.8
每週工資在十五元及二十元以下者	104,585	15.3
每週工資在二十元及二十五元以下者	32,536	4.8
每週工資在二十五元及其以上者	14,112	2.1

(表 16)

從上表可知墨省各項勞金之高下，雖確有不同。惟此種差度，均爲暫時的，其真實勞金數額，自有一定之趨勢。普通經濟界現象之起伏升降，亦不外求其集中恆常之趨勢。學者於此，當不難明其作用之所在。此種表更有將其現象之分配，歸併其常度，以發見顯明集中之趨勢者，例如下：

1911年英格蘭及魏耳斯男子人數之統計 （表 17）

（按年齡以分類數見該地人口統計報告）

年齡別	城區 實數	城區 成數	城區 小計	鄉區 實數	鄉區 成數	鄉區 小計	城鄉全境 實數	城鄉全境 成數	城鄉全境 小計
5歲以下者	1,517,432	11.3		418,681	10.6		1,936,113	11.1	
5歲至10歲以下者	1,431,900	10.6	41.2	415,395	10.5	41.2	1,847,295	10.6	41.2
10歲至15歲以下者	1,341,586	9.9		406,045	10.3		1,747,631	10.0	
15歲至20歲以下者	1,267,500	9.4		387,395	9.8		1,654,895	9.5	
20歲至30歲以下者	2,332,135	17.3		626,300	15.9		2,958,435	17.0	
30歲至40歲以下者	2,094,934	15.5	44.4	542,370	13.7	40.9	2,637,304	15.1	43.6
40歲至50歲以下者	1,556,818	11.6		444,360	11.3		2,001,178	11.5	
50歲至60歲以下者	1,042,868	7.7		333,368	8.4		1,376,236	7.9	
60歲至70歲以下者	612,741	4.5	14.4	230,306	5.8	17.9	843,047	4.8	15.2
70歲以上者	296,246	2.2		147,228	3.7		443,474	2.5	
總計	13,494,160	100.0		3,951,448	100.0		17,445,608	100.0	

讀上表成數欄，第一排百分數，如11.3，可知每組年齡以內者，在城區，或鄉區約佔幾分之幾。從第二排百分數(如41.2)，可知在較大範圍內，如自5歲以下至20歲以內者，約佔41.2%。此外又從城鄉全境成數欄第一排百分數，得知全境每組年齡內之成數。更自第二排百分數中，知5歲至20歲以內者之成數。此表之優點有三：便於察覺實數者一也；求得各組成數二也；合併數小組成數，而求出一大組之成數者三也。

此外尚有用符號列表者，其式如下頁：(天氣狀況報告表。)

第四節　表列之內容

表列之方法與種類，雖已如上述。惟其內容之組織，現象之排列，以及其他各方面注意之要點，均當詳爲研究，以增表列之效率。茲分論之：

表列內容之繁簡，固須視乎事實現象以爲準。惟每次研究之問題，其周圍與旁及的事實，必甚繁賾。列表時，如欲賅括淨盡，自屬難能。縱令勉强爲之，亦無何等之價值，

天氣狀況

（十二年六月份）　（觀測所報告）

符號／日次	雨 ●　雪 ✱　電雷 ⊠　電光 <　霰 △　雷聲 T　雹 ▲　霧 ≡　霜 ⊔　露 ⌐　樹冰 ∨　凝霜 ~　吹雪 ⤉　細冰 ↑　地震 ◷　日光環 ⊕　月光環 ◒　月暈 ヨ　日暈 ○　暴風 ⟋　虹 ⌒　極光 ⩋　煙霧 ∞
一	● 6—7 A.M., 4—5 P.M. T 4—5 P.M.
二	T 6 P.M.
三	
四	⟋ 1—4 P.M
五	T 9 P.M. ⊠ 10—11 A.M. ● 10—11 A.M., 2 P.M.
六	⌐ 1—7 A.M. T 6 P.M. < 8—10 P.M.
七	
八	< 8—10 P.M. ⊠ 11—12 P.M. ● 12 P.M
九	● 1—4. 8—9 A.M., 7. 10 P.M.
十	● 4 A.M., 2, 6—7, 11 P.M. T 6 P.M.
十一	⟋ 11—12 P.M.
十二	
十三	● 5 P.M.
十四	
十五	● 1 A.M.
十六	
十七	⟋ 12 A.M.—3, 5 P.M.
十八	
十九	
二十	
二十一	
二十二	
二十三	
二十四	
二十五	⟋ 12 A.M.—7 P.M. ⊠ 11—12 P.M. ● 11—12 A.M.
二十六	● 4, 7—8 A.M., 9—10 P.M. ⊠ 9—10 P.M. < 11 P.M.
二十七	● 7, 11 A.M.—1, 3—4 P.M.
二十八	● 8—10 A.M., 5—7 P.M.
二十九	
三十	
三十一	

（表 18）

宜切忌之。他若專務美觀,將無甚關係之現象,一並列入。其意固在炫耀人目,而其實則往往反使重要之事實,含混不顯,是大失表列之主旨也。要之,表列之第一要素,在以數字的表現。用簡明扼要之法,以顯明一時間或相當時期內所有現象。至於內容各項,與總額欄之額,當然相符。惟有時因單位的關係,而常不同者,是尤應審愼之。統計家所以常用縱横對照法(cross-check),如近三年進出船隻統計表,即欲免此錯誤諸弊。學者於此,尤當注意。百分數之計算,切不可草率將事,致生荒謬之結果。此外如表上有縮寫字句,必備註於旁,以便閱讀。又若表之內容過繁時,固可按其事實,性質,天然之界限,截爲數表。附於總表之下,以顯明各性質之特點。例如中國教育統計表,第一表爲總表,首將全國各種教育現象之概況,表列之。以下或按天然習慣之界限,就省別分立各表;或按教育之性質,就幼稚,國民,中等,職業,專門,及大學等教育的區別,分立各表。又若一般人口,實業等調查,亦往往採用此法。但有時表之內容雖較繁,苟能用科學的排列法,亦得將所有現象畢呈於一紙,是爲最經濟之辦法。

列表時往往發生有不倫不類之事實,考其原因,非由於調查忽略之故;卽因其他種種手續不完備之所致。是時最好將此等事實,列入『雜項』("miscellaneous," "not state," or unclassified," items) 或『其他』等項中,庶較真確。惟此項成分,必須佔最小數。反是,恐難得完美之效果。

列表之內容,苟有重要之事實,除用複線 (double lines) 及闊線區別外;可將其標題 (title) 斜寫之,或大寫之,以引閱者之注意。

總之,製表時對於內容之組織,務期便於閱讀,易於記憶。而尤以合乎論理 (logical) 的排列爲準則。

第五節　表列之標題

表列標題之界說,必須明確。意義宜完全。尤以不需他種解釋者爲最良。茲爲記憶便利起見,分錄其規定上之要則於次:

(1) 標題須簡短。

(2) 標題須明晰。

(3) 標題須採慣用者。

(4) 標題意義不得有兩種之解釋。

他若標題之次序 (the order of titles), 則須就各事實性質之輕重, 而先後之。譬諸各業工資統計表, 自應按每點,每日,每週,每月,諸工資而排列之。倘或前後顚倒,次序紊亂,則閱讀時,必覺無理解之可尋,殊屬不當。

A. 普通標題應用上常犯之弊, 約有六種:

(1) 標題省略之不當　下列表式,卽因省略標題,而使全體意義不明者。

全國各種學校概況總表

(式見中華教育改進社十一年度全國中等以上學校概況)

	男校	女校	總數	男教職員	女教職員	總數	男生	女生	總數	全年經費數(以一元為單位)
大學及專門學校	105	1	106	4,933	103	5,036	30,903	665	31,568	10,647,075
師範學校	200	66	266	4,518	384	4,518	33,501	8,566	42,067	4,933,127
中學校	467	28	495	8,668	225	8,893	98,843	3,600	102,443	6,461,351
甲種實業及職業學校	130	15	145	2,736	146	2,882	18,000	1,868	19,868	2,692,457
附屬小學校	143	58	201	1,705	568	2,273	30,241	14,387	44,628	692,075
教會及外人立各種學校	113	49	162	2,141	704	2,845	21,149	7,385	28,534	5,335,137
總計	1,158	217	1,375	24,317	2,130	26,447	232,637	36,471	269,108	30,761,242

(表 19)

上表乍視之,固不覺有何等標題之錯誤。惟仔細察之,則對於第一欄『學校種類』數字,似不應省略。又關於第二,三,四各欄,亦當各冠以總名。今修正其表式如下:

全國各種學校概況總表

學校種類	學校數			教職員數			學生數			全年經費 以大洋一元爲單位
	男	女	總	男	女	總	男	女	總	
大學及專門學校										
師範學校										
中學校										
甲種實業及職業學校										
附屬小學校										
教會及外人立各種學校										
總計										

(表 20)

(2) 標題過繁之不當　下列一表，即標題繁瑣，應用失當之例：

中國各省私立實業及職業學校概況表

省區	學校名	校址		成立時期			職員數			教員數			學生數			全年經費			每生佔平均數	備註
		縣名	街巷等名	年	月	日	男	女	總	男	女	總	男	女	總	經常	臨時	總額		

(表 21)

上表爲一概況表，故當擷其要項，萬不可節目過繁，支離破碎，使人生厭。茲修正之如次：

中國各省私立實業及職業學校概況表

省區及學校	校址	教職員數			學生數			全年經費數			每佔均 生年費	備註
		男	女	總	男	女	總	經常	臨時	總數		
京師												
北洋商業學校	牛壁街	10	—	10	75	29	104	2300	150	2450	23.6	成立年月等事實可列入此欄
……………	……	…	…	…	…	…	…	……	……	……	……	
……………	……	…	…	…	…	…	…	……	……	……	……	

（表 22）

(3)標題位置之不當　標題之位置，雖無一定之限制。但必按事實性質之輕重，而作合乎理論的 (logical) 排列。否則，定失統計表格之功效。今示例以說明之：

某工廠受傷工人統計表

受傷原由	受傷總數	斷指總數	斷臂者	斷指者				
				四指者	三指者	二指者	一指者	傷手者
各項受傷者	45	38	2	3	12	8	15	5
………	………	………	………	………	………	………	………	………

(表 23)

上表對於斷指者之總數，不列於斷指者各欄之首，而插於受傷總數與斷臂者兩欄之中。又若斷手者不與斷臂者各欄並列，而附於斷指諸欄之末。是皆失其適當之位置。閱者亦往往因此發生誤會。茲修改其式如下：

某工廠受傷工人統計表

受傷原由	受傷總數	斷臂者	斷手者	斷指者				
				總數	4指	3指	2指	1指
總數	45	2	5	38	3	12	8	15
......	......	......	......	......	......	......	......	......

(表 24)

總數欄"Total"之位置,或列於各分項之首;或列於各分項之末,皆無不可。惟按晚近統計界之習慣,每視夫作表時之主旨以爲定。設此表之要意,在顯明其總數,則當置之於首位。反是,亦可附於各項之尾(詳論見後)。

(4) 標題格線應用之不當　格線之用途,原在區別各項之事實。但有時爲複線;有時爲單線;更有時爲細線或粗線者。皆藉格線之區別,以示各項之特性也。故應用格線時,尤宜注意。茲舉一普通之例,以示其不當。

1916—1918年美國五大省產穀總量比較表

(000 省略)

1918			1917			1916		
省別	產量*(單位斗)	佔全美百分數	省別	產量*(單位斗)	佔全美百分數	省別	產量*(單位斗)	佔全美百分數
美國	2,582,814	100.0	美國	3,065,233	100.0	美國	2,566,927	100.0
衣阿華	375,624	14.5	奕省	418,000	13.6	衣省	366,825	14.3
奕倫諾爾	351,450	13.6	衣省	410,700	13.4	奕省	300,900	11.7
英的安納	169,554	6.6	內布拉士加	249,480	8.1	內省	192,400	7.5
密蘇爾釐	133,860	5.2	密省	241,500	7.9	英省	174,658	6.8
倭海阿	133,200	5.2	英的省	196,776	6.4	密省	132,112	5.1
五省共計	………	45.1	共計	………	49.4	共計	………	45.4

* Bushels　　　(表 25)

上表之格線，完全不當。所有單，複，粗，細，各線

之效用，均未能表見。且因其應用之失宜，反使讀者常由錯覺，以生誤解。今改作之如次：

美國五大省穀類產量比較表

(1916—1918) (000 省略)

1918			1917			1916		
省別	產量（以斗爲單位）	佔全美百分數	省別	產量（以斗爲單位）	佔全美百分數	省別	產量（以斗爲單位）	佔全美百分數
美國	2,582,814	100.0	美國	3,065,233	100.0	美國	2,566,927	100.0
衣阿華	375,624	14.5	奕省	418,000	13.6	衣省	366,825	14.3
弈倫諾爾	351,450	13.6	衣省	410,700	13.4	弈省	300,900	11.7
英的安納	169,554	6.6	內布拉士加	249,480	8.1	內省	192,400	7.5
密蘇爾釐	133,860	5.2	密省	241,500	7.9	英省	174,658	6.8
倭海阿	133,200	5.2	英的省	196,776	6.4	密省	132,112	5.1
五省共計	·········	45.1	共計	·········	49.4	共計	·········	45.4

(表 26)

上表之作法，學者應詳細閱讀，庶可以明瞭單複粗細各線之用途。

(5)標題等字體應用之不當　標題之字體，無論中文或外國文，皆有數種。對於普通標題，當用普通字體；對於特種事實標題，自應用特體字。蓋如是，所以示輕重之區別耳。今舉一例，以供學者之批評。

(6)標題寫法之不當　標題之寫法，亦分中西文兩種。其主要原則，不外顯明特性，與節省空間 (economic space)。今仍用實例以述之。

(a)中文式　茲將十一年十月份農商公報所載觀測所徵候簡表，揭錄於次，以資批評。

觀29表『項目』欄，乃使吾人眼簾自上至下，如第七格從『最』觀至『底』，復向上『之』字讀至『差』。第八格之讀法，亦須如是煩瑣。第一格『日次』欄，又使吾人自左至右讀之。及至本表度數諸欄，則在各欄本身，固須自右向左讀；而各欄之次序，又須自左至右看。如此左右顛倒，來往反復，對於讀者之精神一層，殊覺不經濟。著者以為當修如次：

觀測所徵候簡表

11年10月份

項目／日次	氣壓平均	氣壓最高	氣壓最低	氣溫平均	氣溫最高	氣溫最低	最高與最低之較差	水蒸氣漲力平均	濕度平均
1	762.80	766.1	761.4	11.95	20.1	7.6	12.5	8.35	76.0
2	765.77	768.0	764.4	13.40	22.8	2.6	20.2	8.34	73.1
3	764.86	766.0	763.2	14.48	23.1	5.4	17.7	9.27	76.3
4	764.61	765.5	763.6	16.20	24.1	4.0	20.1	10.06	79.5
5	763.61	764.5	762.3	14.78	24.3	4.1	20.2	10.13	78.8
6	760.98	764.0	758.2	14.07	23.0	6.0	17.0	10.33	85.8
7	758.38	759.1	757.8	14.57	21.4	10.4	11.0	10.21	83.4
8	760.64	762.0	759.1	12.23	18.0	7.9	10.1	8.43	80.8
9	765.49	767.3	762.2	7.65	10.8	1.6	9.2	5.29	70.5
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
……	……	……	……	……	……	……	……	……	……
平均									

(表 30)

如為迎合中國一般閱讀中文之習慣，亦當如下列之表式：

1912 年各國輸入雙城子貨物之統計　(表 31)

貨別 ╲ 量數 國別	以普得爲單位 中國	日本	美國	其他國	統計
糧食	四、八五〇	二一、五六〇	二〇九、五五五		二三五、九六五
米	一三、五七〇	一七五、一六七		一、七一四	一九〇、四五一
麵粉	七、〇七〇	六、五五〇	一六、一二三	二、一六〇	三一、九〇三
掛麵及糕糊	四、九六〇	三、二〇〇			八、一六〇
菜蔬	一一〇、七〇〇	二〇八、二三八			三一八、九三八
果品	六一、六〇〇	一三九、五〇〇			二〇一、一〇〇
糖	一、三二〇	六四、二六九		五七、九八〇	一二三、五六九
鹽	三二七、七〇〇	一七、六四三			三四五、三四三
魚及魚子		一六、五〇三			一六、五〇三
食品	九、二七〇	五、八〇〇			一五、〇七〇
植物	一〇、二四〇	三、五〇〇			一三、七四〇
編織物	二八、七五〇	三、二五四			三二、〇〇四
建築物		六六、〇〇〇			六六、〇〇〇
玻璃器		一一、八〇一			一一、八〇一
煤塊	一六、一〇〇	六二四、三四〇			六四〇、四四〇
火油及他種油		一一、七〇〇	二六、〇〇〇		三七、七〇〇
顏料		一一、七五八			一一、七五八
鐵	五、三八九	四三、三〇二	四、二〇〇	三、〇〇〇	五五、八九一
馬口鐵	一四、五六〇	九、三〇〇		八、九〇〇	三二、七六〇
鋼		六、五〇〇			六、五〇〇
鋼鐵製品		三一、三三〇		一七、一四九	四八、四七九
農具		一五、六〇〇		二四〇	一五、八四〇
紙張	四、五〇〇	二八、二〇〇	三、〇〇〇		三五、七〇〇
繩		六、七〇〇			六、七〇〇
統計					二、五〇二、三三五

(b)英文式　請參看 Bowley 氏人口統計表。(式見原書)。

第六節　表列之效用

表列之種類，以及製作之方法，業經詳述於前。今復進論其優點與效用，藉明其重要。

設所製表列，均極合法。則其效用，約有六種：——

A. 因排列有序，得發現其一定之規律。　事實之現象，往往雜糅紛錯，無系統之可尋。今若借表列排比之方法，而彙類之，則必能發現其規律之狀態。譬諸依事實數量之多寡，發現時間之先後；以及地位上種種次序，而排列之是也。普通排列之程序，不外二法：第一爲增進法 (ascending)，就現象逐漸排列，以示其由簡入繁，自輕而重，或時期早遲等，遞次增進之規律。第二爲遞減法(descending)，按現象之多寡鉅細，以及今昔之次第，一一排比，而顯明其遞減之規律。總之，事實的排列，最忌雜亂。縱令所有現象，性質相同，毫無軒輊，但其排列，亦必有相當之次第。例如在歐西遇有各地，或各公司之統計時，每依其名稱上主要字之第一字母，而定先

後（如 David Lane Co.）應置於 Edward Evans & Son Co. 之前是）。在我國統計上，則按主要名稱上第一字筆畫之多寡爲序。惟各種排列之方法，均應就研究問題之性質，而擇定適宜之次序。務使各項答案，畢呈於表上，則其功效乃見。

B. 因排列合理，可節省記憶之勞力。　事實之現象，既彙列合理 (logical arrangement)，則必能引起閱者之興味。且因有聯念 (association) 的作用，故便於記憶。統計者亦當視此爲根本之條件。萬不可長篇累幅，徒增閱讀之困難。當一九一三年，美國曾有某鐵道公司 (The Railroad Commission of Oregon) 作一全年營業概況表，約有八十頁之多。嗣後傳爲統計界之笑談。是即不知選擇主要代表之事實，而作合理之排列，以節省記憶力之實例也。

C. 因排列得當，可發見各個或各組相互之關係。由相類之事實，類別排比，組成適當之表列。閱讀者自能易於觀察，悉其要領，而發覺各個或各組相互之關係 (relation)，此亦其功效之一。

D. 因類別排比，最易顯明其同異之點。　凡有關之事實，均列於相近之欄。閱讀時比較自易，且能闡發其同異之關係。

E. 因排列合法，易得總數。　總數一項，原可由他法計算之。惟若表列得當，則其總數 (summation) 更易表現。殆以其排列整齊，數字明晰也。

F. 因標題之賅括，能將繁賾之事實，畢呈於一紙。統計之現象，每甚紛雜。如以文字敍述之，自屬繁瑣，今藉表列各項標題之意義，以賅括所有之現象。則閱者得有抽象的觀念 (指閱讀每項言)，及具體的概念 (指閱讀全表言)，是爲最有效之工作。

總之，表列之工作，原屬統計上最重要之手續。故製表時，務以"合理" (logical) 與"系統"(systematic) 二層，爲組織上之準則。則其彙類排比，庶有充分之作用。本章敍述已完。茲重將實際列表時，最應注意各點，附錄於下。以便學者之記憶：

(1) 關於標題最少或最多時，行格空間之注意。行格空間 (rulings and spacings) 之比例，均以適稱爲原

則。重要之現象欄,宜稍廣之,以引注意。普通"總計欄"(total)所以常較寬者,此也。又若現象之數目過大者,亦宜稍闊,以便填寫。設在一標題下,又分爲兩小子目者,亦當較廣。總之,表面之空間,極宜經濟(economic space)。格線之應用,如粗線,複線,皆以之表示特性者,總結者,重要者,種種現象。反是,如細線,即用以示普通之現象耳。

(2)關於行格數目上之注意。　行格之多寡,固視乎事實內容之繁簡,惟所列諸格,均須有各個特別之性質。不然,可歸併之,再所有各欄,亦應有相互之關係。在歐西各邦列表時,常自左而右,故總計欄與各分項,每有至密之關係。普通詳表(detailed table)行格之數,常較繁複。以其能供各方面之參考也。至若簡表或概況表,祇在顯明其大較,故其欄數可稍減。

(3)關於總計欄位置上之注意。　近今統計界對於總額欄之位置,可分兩處:第一爲置於各分項之末,如1921年世界棉花銷費表。第二爲置於分項之首,如某工廠受傷工人統計表。此二式各有優點。第二式可使閱者

首見總額,印象必深。且因其距離標題 (titles) 甚近,閱讀時更藉聯念 (association) 之作用,而易記憶。或推解其他種種相關之原因。所以近世界統計界中每喜採用之。第一式之優點,在便於計算,且合乎閱讀上之心理,故亦屬良式。惟著者私意,以爲若能用縱橫對加法 (cross addition),則可將各項之總數,縱加之而得一種總計;橫加之,又得一種總計。復將各總數相加,則更得一種總額。故此式旣可明各項總合的現象;又可得全體的總數。且以其縱橫對加之故,得自相比照之便,於是一切錯誤,皆可免除。其式如 1921 年世界棉花銷費表。

(4) 關於表列大小適稱上之注意。 表列內容,無論如何繁複,必須限於一紙,方可一目瞭然。設現象特多時,則不妨用稍大之紙,摺成數層。標題之字句,若能用簡短之成語(如總數欄可以「計」字代是,設爲外國文可用縮寫字。)時,亦可用以代之。務使表列形式之大小,適稱於一紙。

摘 要

1. 表列之意義, 卽將應研究諸問題之答案, 排比適

宜，俾閱讀者易於察覺。

2. 表列之法則分二層：

A. 預備手續。其中又分現象之繁簡兩種：

B. 正式手續。卽將整理之各現象，正式立表也。

3. 表列之類別。

A. 按式樣繁簡之分類有四：——

(1) 單項式，

(2) 二項式，

(3) 三項式，

(4) 四項式。

B. 按主要項目組織之分類有三：——

(1) 以時期爲主要項目者，

(2) 擇定主要項目用縱横分錄法，

(3) 按一期中求其常數表。

C. 用符號之表式。

4. 表列之內容。表列內容，務求賅要。以能包括研究問題所有之答案爲宜。

5. 表列之標題。標題須簡明。如爲習慣而無兩意者

最良。

A. 標題應用上常犯之弊:

(1) 省略之不當,

(2) 繁瑣之不當,

(3) 位置前後之不當,

(4) 組織應用之不當,

(5) 字體應用之不當,

(6) 寫法之不當。

6. 表列之效用:

(1) 能發現一定之規律,

(2) 可節省記憶之勞力,

(3) 得發現各個或各組相互之關係,

(4) 易於比較其同異,

(5) 易於計算其總數,

(6) 使全體現象畢呈於一紙。

7. 實際列表時應行注意之要點:

(1) 行格空間。

(2) 行格數目。

(3) 總數位置。

(4) 表列大小。

問題

1. 表列之功用何在?

2. 試設數例，以證明標題應用不當之弊。

3. 試作各種之表列，以明其效用。材料可取自本年海關貿易報告册。

4. 我國農商統計各表（自元年至六年各册），常有不當之處。學者可根據本章所論諸原則，以批評之。

5. 試擬一中國人口統計表。

6. 學者可依據本章各原則，將下列禹貢九州表另改擬之。

禹貢九州表（表32）

州名	境域	土質	田	賦	植物	運輸	產物
冀州	帝都之地三面距河兗河之西雍河之東豫河之北	厥土白壤	厥田惟中中	厥賦上上錯	—	夾石碣石入於河	島夷皮服
兗州	濟河惟兗州	厥土黑墳	厥田惟中下	厥賦貞作十有三載乃同賦第九等	厥草惟繇厥木惟條	浮於濟漯達於河	厥貢漆絲厥篚織文
青州	海岱惟青州	厥土白墳海濱廣斥	厥田惟上下	厥賦中上	—	浮於汶達於濟	厥貢鹽絺海物惟錯岱畎絲枲鉛松怪石萊夷作牧厥篚檿絲
徐州	海岱及淮惟徐州	厥土赤埴墳	厥田惟上中	厥賦中中	草木漸包	浮於淮泗達於河	厥貢惟土五色羽畎夏翟嶧陽孤桐泗濱浮磬淮夷蠙珠暨魚厥篚玄纖縞
揚州	淮海惟揚州	厥土惟塗泥	厥田惟下下	厥賦下上上錯	篠簜既敷厥草惟夭厥木惟喬	沿於江海達於淮泗	厥貢惟金三品瑤琨篠簜齒革羽毛惟木島夷卉服厥篚織貝包橘柚錫貢
荊州	荊及衡陽惟荊州	厥土惟塗泥	厥田惟下中	厥賦上下	—	浮於江沱潛漢逾於洛至於南河	厥貢羽毛齒革惟金三品杶榦栝柏礪砥砮丹惟箘簵楛三邦底貢厥名包匭菁茅厥篚玄纁璣組九江納錫大龜
豫州	荊河惟豫州	厥土惟壤下土墳壚	厥田惟中上	厥賦錯上中	—	浮於洛達於河	厥貢漆枲絺紵厥篚纖纊錫貢磬錯
梁州	華陽黑水惟梁州	厥土青黎	厥田惟下上	厥賦下中三錯	—	西傾因桓是來浮於潛逾於沔入於渭亂於河	厥貢璆鐵銀鏤砮磬熊羆狐狸織皮
雍州	黑水西河惟雍州	厥土惟黃壤	厥田惟上上	厥賦中下	—	浮於積石至於龍門西河會於渭汭	厥貢惟球琳琅玕

7. 試批評下列諸表優劣之點。

(a)上海至漢口航路哩程表

(見招商局路程表)

上海至				
156 哩	鎮　江			
203 哩	47 哩	南　京		
456 哩	300 哩	253 哩	九　江	
596 哩	440 哩	393 哩	140 哩	漢　口

(表 33)

(b)我國國際貿易之淨值統計表

1915—1917

(見中華年鑑)

年　次	入口淨數	出口數	總　數	總數之百分比例	
				入口數	出口數
1915	454,475,719	418,816,164	873,336,883	52	48
1916	516,406,995	481,797,366	998,204,361	52	48
1917	549,518,774	462,931,630	1,012,450,404	54	46

(表 34)

（c）一九二三年各省及各通商口岸華人人數約計表

省分		口岸	
省名	人口	口岸名	人口
東三省……	19,290,000	愛琿………	35,900
		哈爾濱……	103,400
		琿春………	39,700
		龍井村……	2,900
		安東………	94,300
		大連………	168,300
		牛莊………	65,600
直隸………	19,400,000	秦皇島……	5,000
		天津………	800,000
山東………	38,000,000	龍口………	5,900
		煙臺………	83,300
		青島………	44,400
四川………	72,964,000	重慶………	508,800
		萬縣………	80,000
湖南………	22,040,000	長沙………	535,800
		岳州………	4,500
湖北………	24,989,000	宜昌………	60,000
		沙市………	161,000
		漢口………	1,474,400*
江西………	24,534,000	九江………	53,400
安徽………	37,000,000	蕪湖………	126,000
江蘇………	26,920,000	南京………	380,000
		鎮江………	102,200
		上海………	1,500,000
		蘇州………	500,000
浙江………	23,452,000	杭州………	892,100
		寧波………	270,800
		溫州………	201,300
福建………	20,000,000	三都澳……	8,000
		福州………	350,000
		廈門………	300,000
		汕頭………	83,000
廣東………	32,000,000	廣州………	900,000
		江門………	70,000
		三水………	7,300
		瓊州………	59,000
		北海………	25,000
廣西………	8,000,000	梧州………	50,000
		南寧………	67,300
		龍州………	18,000
雲南………	9,839,000	蒙自………	10,000
他省		思茅………	10,200
山西陝西 甘肅河南 貴州	55,000,000	騰越………	13,000
統共……	443,428,000		10,271,000

* 武昌漢陽併計在內

（表 35）

(d) 清光宣兩朝中國砂糖逐年輸出入數量比較表

年分	西暦年分	輸出數量	輸入數量	比較	
				輸出超過	輸入超過
光緒十七年	一八九一年	八九六、六一四担	三〇〇、四九四担	五九六、一二〇担	
光緒十八年	一八九二	八一三、九四八	五五〇、七八六	二六三、一六二	
光緒十九年	一八九三	七六三、〇〇〇	一、六〇五、一六七		八四二、一六七担
光緒二十年	一八九四	八〇八、二〇八	一、八八九、六六二		一、〇八一、四五四
光緒廿一年	一八九五	七五一、一四五	一、五三六、四八〇		七八五、三三五
光緒廿二年	一八九六	四四七、五七九	一、六九四、九九八		一、二四七、四一九
光緒廿三年	一八九七	五四〇、八二五	二、三八六、五八四		一、八四二、一五九
光緒廿四年	一八九八	七一三、八一一	一、七八八、三六一		一、〇七五、五五〇
光緒廿五年	一八九九	九一七、九五一	二、一五二、九三八		一、二三四、九八七
光緒廿六年	一九〇〇	八五九、九三二	一、三三七、五五七		四七七、六二五
光緒廿七年	一九〇一	八六〇、九六八	二、六五七、五〇〇		一、七九六、五三二
光緒廿八年	一九〇二	六九九、三四二	四、六三四、二九九		三、九三四、九五七
光緒廿九年	一九〇三	二九八、八〇七	三、一六六、八三七		二、八六八、〇三〇
光緒三十年	一九〇四	三六五、二四五	三、八二三、六九四		三、四五九、四四九
光緒三十一年	一九〇五	五一八、八四八	四、七八九、三三〇		四、二七〇、四八二
光緒三十二年	一九〇六	一七二、九三九	六、五四五、七四二		六、三七二、八〇三
光緒三十三年	一九〇七	二一〇、五一〇	五、七三三、九一一		五、六一三、四〇一
光緒三十四年	一九〇八				
宣統元年	一九〇九	一六九、三九八	五、四七八、一七九		五、三〇八、七八一
宣統二年	一九一〇	二六五、八八七	四、二一一、三二八		三、九四五、四四一
宣統三年	一九一一				

(表 36)

(e)中國各省荒地比較表

（見第五次農商統計）

地方		荒地面積		
		官有	民有	共計
直隸	遷安	2,900 畝	3,037 畝	5,937 畝
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	計	6,091,284	649,515	6,740,799
安徽	,, ,,	,, ,,	,, ,,	,, ,,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	計	1,533,880	3,093,286	4,627,166
江蘇	,, ,,	,, ,,	,, ,,	,, ,,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	計	808,144	1,528,140	2,336,284
山東	,, ,,	,, ,,	,, ,,	,, ,,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	, ,	, ,	, ,	, ,
	計	1,545,555	445,772	1,991,327
	餘	類	推	之

（表 37）

(f)全國甲種實業及職業學校概況總表

1923年

(見中華教育改進社刊行全國中等以上學校概況)

	學校數			教職員數			學生數			全年經費數
	男	女	總	男	女	總	男	女	總	
省立者	75	7	82	1871	76	1947	11617	862	12479	2,144,606
縣立者	28	—	28	353	—	353	2954	—	2954	193,081
私立者	27	8	35	512	70	582	3429	1006	4435	354,752
總計	130	15	145	2736	146	6882	18000	1868	19868	2,692,457

(表 38)

參考書

1. Bowley, A. L.: Elements of Statistics, Chap. IV, pp. 73–103.

2. Bowley, A. L.: An Elementary Manual of Statistics, Chap. VI, pp. 50–56.

3. Watkins, G. P.: "Theory of Statistical Tabulation," in Quarterly Publications American Statistical Association, Dec., 1915, pp. 742–757.

4. King, W. I.: Elements of Statistical Methods, Chap. IX, pp. 38–90.

5. Rugg, H. O.: Statistical Methods Applied to Education, Chap. III, pp. 57–73.
6. Horcal Secrist: An Introduction to Statistical Methods, Chap. V, pp. 116–157.
7. Horcal Secrist: Statistics in Business, Chap. IV, pp. 41–54.
8. Jones, D. C.: A First Course in Statistics, Chap. III, pp. 14–21.
9. Brinton, W. C.: Graphic Methods for Presenting Facts, Chap. XVI, pp. 321–328.

第十章　統計圖式

用適當單位，將若干零散事實，作合理之編置，以解答各項問題者，固爲表列之功效。惟若按閱讀者之一般心理 (the psychology of readers)，用最簡括的方法，說明此編置事實之現象，則又非圖式 (graphics) 不足以盡其事。故前者僅屬分析 (analysis) 的工作，後者則爲說明此分析之結果。誠相輔而行，互爲表裏者也。

第一節　圖式之意義

圖式者 (graphic presentation)，將表列所得之事實，

用適稱的指事象形諸法，以呈現其結果也。

第二節　圖表功效之不同

表之功用，在乎分析現象。圖之功用，在乎說明結果。前已言之。茲復條舉其異點如次：

A. 表之主旨，在整理繁雜之事實。按合理的順序 (logical order)，測度的單位 (the units of measurements)，作提綱挈領之編置，是即分析的過程 (the process of analysis)。至於圖式，則僅就表列分析所得之事實，而說明其結果的現象。

B. 表之工作在前；圖之工作在後。

C. 表之利點，在乎詳細；而其弱點，每嫌過煩。圖之利點，取其明白；至於間有不盡之處，即其弱點也。設使能合二者於一紙，俾讀者各得其適，乃稱善法。

D. 表列係用行格法，將各種事實，條分縷析，故能顯明各個之性質。圖式則僅呈現其賅括情形。對於各個之性質，每陷於含糊。

E. 表列之呈現，多屬抽象的 (abstract)。圖式之表示，每爲具體的 (concret)，且得顯明相互之關係。例如作

我國各省人口數與識字者之比較，若用表列，則或以人口數之多寡爲序，或以昔日直省上之習慣，而排其次第。如此對於各省本體之比例，固易察覺。惟甲丙戊三省識字者所佔之比率，何以特高。乙丁己三省人口之數雖繁盛，而識字者反少。其緣因何在，是不得不有山川海陸種種地理上 (geographical) 之關係。今若以圖式之表現，則不獨能明其比率之高低，且得察覺其高低之原由，以及相鄰諸省之關係。

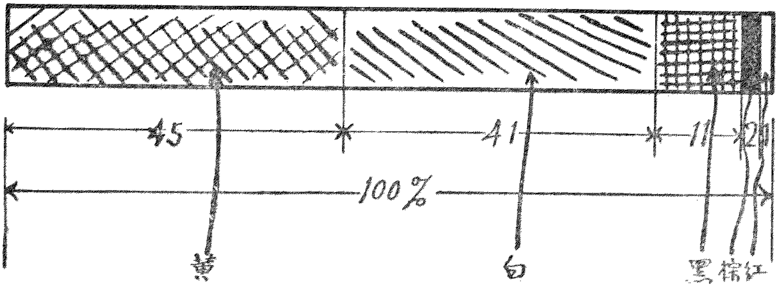
F. 表列主旨，係供專門家精密之考察，故貴詳細。圖式用途，每示於一般社會，自以明白爲主。此亦其不同之一端也。

第三節 圖式之製法

本節略將製圖上普通法則，設例說明。學者苟能熟玩之，當不難於類推也。

普通製圖法，係按表列所得事實之性質，先選定圖式之種類，然後作成第一次之初稿。待檢查無誤後，再造爲正式之圖。今以世界各種人數之統計爲一例。謹述其製作之程序及方法於次:

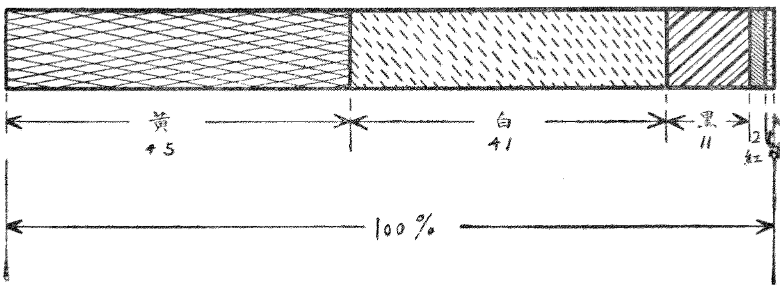
第一步,先檢閱全世界各種人數總表。然後審定圖式之種類,次則規定其標準的比度,復次則作成初稿如下頁:——



(圖 4)

從上式所作之草圖,詳細審查後,復用墨水筆(卽用器畫用之鴉嘴筆)精製之,卽成正式之圖如下:

世界各種人數百分比例圖



(圖 5)

以上所述,爲普通製圖之方法。至於實際各種圖式詳細之作法,須俟下節(圖式之類別)中,分別論之:

第四節　製圖之要件

製圖之主要功效,旣在"說明表列分析事實之結果,而闡發相互之關係" (relationship)。則實際製作時,對於下列四端,極當注意:

A. 選擇主要之事實　　統計之事實,每甚糅雜散漫。當事者必根據統計之法則,彙類之,排比之,使成合法之表列。此時事實之現象,雖已頗有科學的 (scientific) 論理的 (logical) 組織,而畢呈於一表。但其內容,有時仍嫌較繁。故吾人是時必首擇主要之事實(能代表全體者),以定製圖之標準。今設作我國各鐵道運輸成績比較圖,若就其淨益之盈絀較之;則運價旣有高低之異,營業用費亦復有豐嗇之殊。若就運載之總噸數相較,則運輸之距離,又或有遠近長短之不同。故最好以"總噸里"或"總車里"爲比較,庶可表示正確之成績。再如調查兩地生育率。徒就兩地產兒總數相較者,固不當。卽以其人口數與產兒數爲比例者,亦欠妥。倘能以兩地婦人(有

生育力者)數與產兒數作比例者,爲最精確。總之,材料蒐集時,固貴乎廣博。而製作圖式,則應按其宗旨精選主要之事實,以爲編製之準則。

B.細察聯帶之關係　製作圖表時,固應選擇主要之事實,以表現問題之本旨。惟有時因有密切聯帶之關係,而不能不旁及其他之事實者。例如研究工資問題,不獨調查工價之高低;尤當考察同時物價之漲落。非然者,絕不足以示其真象也。譬諸俄國當革命後,工資陡增十餘倍。乍聞之,殆莫不以爲惠工。其實則以圜法大壞,盧布之值,小於昔日者數百倍。故是時作圖者,除以曲線(curve)表示工資逐年之高低外,仍須將歷年同時物價之漲落,作一曲線,以供參考,或比較之用。再若我國對外貿易之數量,當歐戰告終時,以金計之,忽形暴增;以銀計之,則反大減。此兩種雖同爲事實,而所示之情形,乃相悖如斯。故製作者,對於此點,亟宜審愼。因我國向屬用銀之邦,仍當以銀兩爲主;復將其時金銀匯兌漲落之情形,列入圖中,則其真象,庶不難於表現也。

C.詳審對方之人物　當未製圖之先,須詳審對

方之人物。設對方爲普通社會，自以簡明醒豁爲主；若爲局部專家，則當以詳細精確爲貴。故圖式之類別雖多，如寓意者，色彩者，曲線者，長條者，種種不同。統計家須審查閱覽人程度之深淺，注意之精粗，而爲作圖之準則。是故製圖祕法，卽在適合閱者心理。縱稍有阿好之處，亦或借此以引其興味，而助其記憶，是烏足爲病。至於各圖之用法，容再詳論。

D. 精訂圖式之製法　製圖事前之要件，固已如上述。惟當實際進行時，不可不注意下列兩點：一曰精確，二曰整潔。數目無訛，比度適當，以及點畫明晰等事，皆屬於精確者。圖式端整，點線勻淨，以及字體比度劃一種種，則係整潔之事。製圖時關於此二端，固須特別注意。他若美觀顯明等要素，是亦當審慎者。

第五節　圖式之類別

圖式之種類頗多，須視應用上之主旨以爲衡。本節所述，僅就其大概者，列舉於下：

A. 直線圖(Line Diagrams)　斯種圖卽將應表顯之事實，按比例尺度，作成長線。然後依次排列，以供觀

察。其排列順序,非自上至下;卽從左而右(如圖6)。倘事實現象中,有相反之性質時,則不妨分爲上下或左右兩截(如圖7),而排列之,以示其反對之情形。

B. 長條圖(Bar Diagrams)　此圖之製法與效用,均同於(A)。惟將直線變作等闊之條狀,俾觀察時,比較更易耳。(如圖8是。)

(A)與(B)均爲單量數(one dimension),無闊狹之誤會。故製作及閱讀時,均覺簡易明確。而一般統計專家對於單純事實之表顯,最喜採用此圖式。

此外尙有將各長條分作數部者,名曰分段的條圖(sectioned bar diagrams),(如圖9及20)詳情見後。

C. 曲線圖(Curve Diagrams)　斯種圖簡單言之,卽將線圖或條圖各線條之末端,聯以直線,乃成此圖。若詳論之,則定事實之獨立變數,列爲經度(設爲x)。依賴變數,列作緯度(設爲y)。假使x已變,y亦當隨之而變。由是遂得$x_1x_2x_3$……,及$y_1y_2y_3$……諸相對之值。今設任取一點,向右延成一線,經過$x_1x_2x_3$……諸點。復向上作一線,過$y_1y_2y_3$……諸點。然後自各點作成諸垂直線。平

均其交點,迺聯爲一曲線。(如圖 13,29,30,31,等是。)曲線圖之優點,固在表示各事實變態之趨勢。而其缺點,卽對於微曲之變遷,不易顯出。例如比度之單位爲一千,而事實之差度僅有十,則在普通曲線上,往往難作顯明之區別。統計家固又有以百分數 (percent),爲其比例者,(如圖 16,25 等是)然仍不免數目失真之弊。近世所以常利用對數格 (logarithmic scale) 者,(如圖 17)蓋一方面既得顯露其變遷之率;一方面又可藉對數之比例,而示其真數;此誠完善之法也。惟斯種格度之應用,祇有一方,是不可不注意者。

曲線圖又有因其曲度之修勻與否,而得兩種:一曰修勻的曲線圖 (smoothed curve diagrams 如圖 15);二曰未修勻的曲線圖 (unsmoothed curve diagrams 如圖 14);詳見後。

D. 平面圖(Surface Diagrams) 此種圖形,又可分爲四大類:一曰矩形圖 (histogram 如圖 45);二曰圓形圖 (piediagrams 如圖 21,22);三曰扇形圖 (sector diagrams);四曰多邊圖 (polygon);是皆以形式不同,

而異名者。其應用之途，又分二法：第一以全形之大小爲而比較者。第二將全體分爲適當之比例或百分爲比較者。學者對於此圖之應用時，必須先知其區分之比度。

E. 立方圖(Cubic Diagrams)　此種圖之應用甚少，殆因其爲立方形，故閱讀時，每不能得精確明瞭之差度(如圖 18)。

F. 地圖(Maps)　卽將各地事實之現象，藉地形以表顯之耳。表顯之法，有四種：一曰色彩的地圖 (colored maps 如圖 34)，此法係用各種顏色以示各事實之現象者。二曰陰影的地圖 (shaded maps)，此法係用同一顏色，而以深淺陰影，以表顯各事實數量多寡之現象也。三曰花線的地圖 (cross-hatched maps 如圖 35)，此法係用各種交叉的斜直線，以示事實之不同。四曰點狀的地圖 (dot saps 如圖 36)，此法卽以點代線，而示事實之數量者，故與前法略同。惟其中又依點狀形式疏密種種不同之關係，分爲三種：第一種，係按點狀大小(Size)，而代表其數量者。斯項比度之規定，須視事實之性質而

酌定之。第二種，係以同式之圓點，塡著各樣相比之陰影，而表現其事實。其法每將圓形區作四等分，然後按數爲比。第三種，係以各點密度之稠薄，而示現象之多寡。點之大小，並無精確之規定。故此法專在顯相對的 (relative) 數量。——詳情請參閱 Brinton: Graphic Methods for Presenting Facts。

地圖之優點，在使事實與發現之場所，能同顯於一紙，而令閱者亦得生此適當之聯念。至於上述四種，則各具專長，爰分錄於次：色彩地圖之優點，在乎顯明與美觀。故最適於一般展覽之用。倘須印刷者，則靡費似嫌稍大，不宜常用之。影線與花線地圖之優點，固在工省而價廉（只須一色不必套版），且以陰影之深淺，或花線之單複，而表示事實之多寡，則尤其特長也。惟自某甲區稀少現象，至某乙區紛繁現象之趨勢，無從顯明，是即其缺點。若夫點狀地圖，第一二兩類者，固亦得明晰之便。第三類則可藉其疏密之度，以表示由簡入繁之趨勢，是尤其專長也。

G. 針圖 (Pin Diagrams)　統計上事實之現象，有

定期改動者，有時時變更者。前者固可按期作圖，後者則非用針圖，不足以勝其煩。其法係以針代點，而以絲條代墨線也。金融界與交通界，間有採用之者（如圖19）。

H. 實體圖(Figurative Diagrams)　此種圖卽將事實之原形，作成圖式，以爲比例也。故又名寓意圖（如圖 11,12 等）。其優點在引起閱者之興趣，而表現事實之本真。其弱點亦僅在喚起展覽之快感，而不能示人以正確之觀念，與夫明顯之實數。

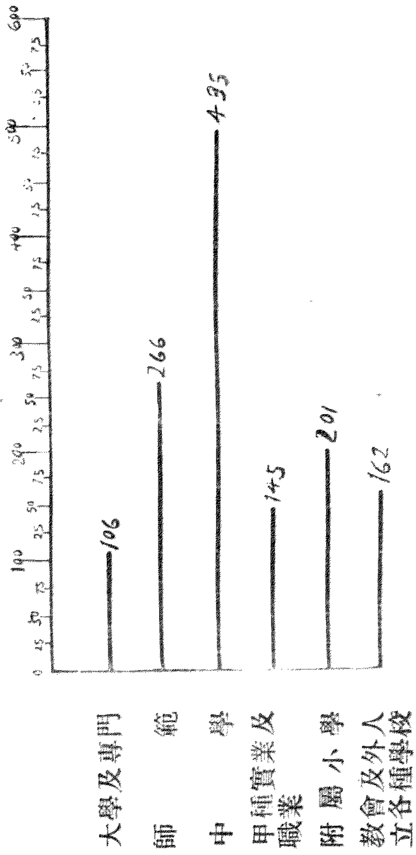
第六節　圖式之應用

圖式之種類，雖已如上述。惟當實際應用時，則尤須視事實之現象，與作圖之目的，而選擇適宜之圖式。茲條舉數法，以示一般。

A. 比較法(Comparison Methods)　凡事實現象與作圖目的，皆在比較者，則應用此法；如圖 6—圖 19。

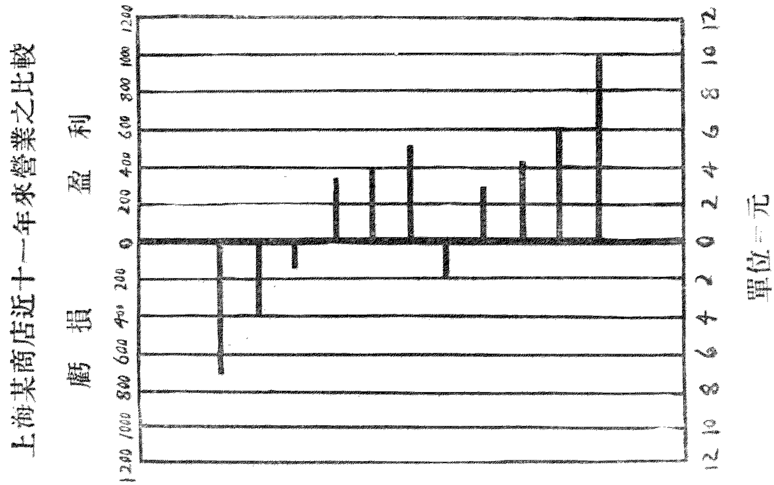
全國中等以上各種學校校數比較圖

（數見十一年中華教育改進社刊行之學校概況）



（圖 6）

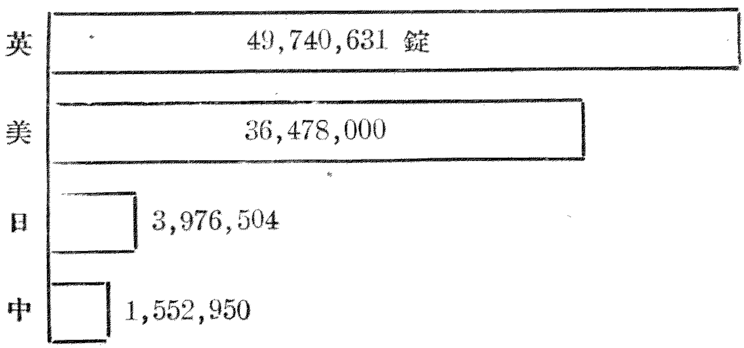
上圖以長線之度數，代表事實之現象。觀察旣便，比較亦確，洵屬善法。惟世人每嫌其簡單，而不樂用之，殊不可解。



(圖 7)

此圖係以垂直線爲零度。右方各線爲盈餘，左方各線爲虧損。如是左右兩方，既可示反對事實之現象；又得同項之比較，洵可爲法。

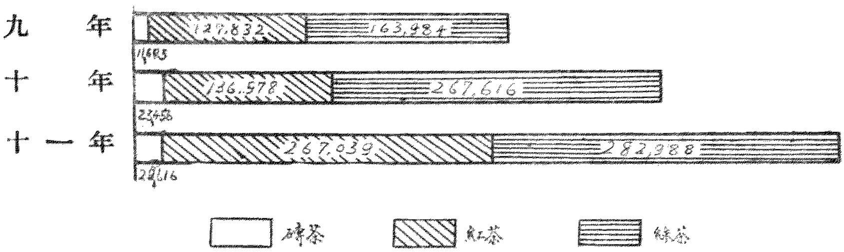
1921 年英美日中四國之紡織錠數



(圖 8)

前圖爲長條法,用於比較時,極爲清楚醒目。

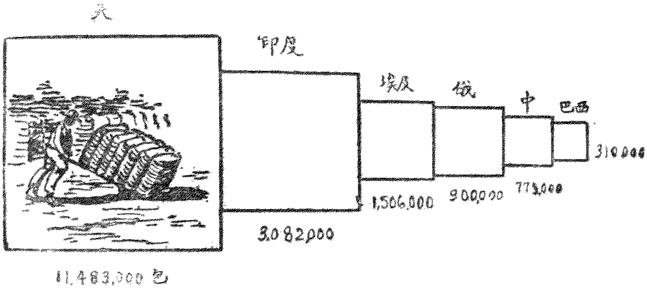
中國近三年紅綠茶及磚茶運往外洋擔數之比較



(以擔爲單位)　　(圖 9)

上圖之製法,不僅在歷年總數之比較,且得比較紅綠茶,及磚茶,在同年內之輸出量,或各年同類茶之輸出量。斯法之用途,極其廣大。故統計家喜採用之。

1910年世界六大國產棉之比較



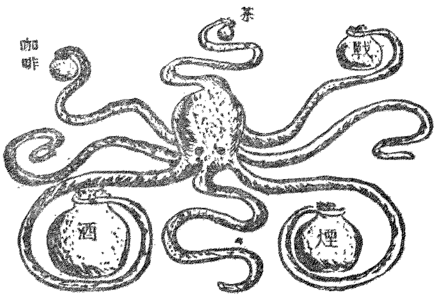
(每包＝500磅)　　(圖 10)

上圖爲平面圖之一種。於第一方形內,繪一推棉

花圖者，在表示其產棉之意。惟作者以爲此圖觀察時，不易比較，當修改爲直線圖，或長條圖。使爲一面 (one dimension) 之比較，自更精確。

美國每年五大種銷耗比較圖

(見 The Independent)



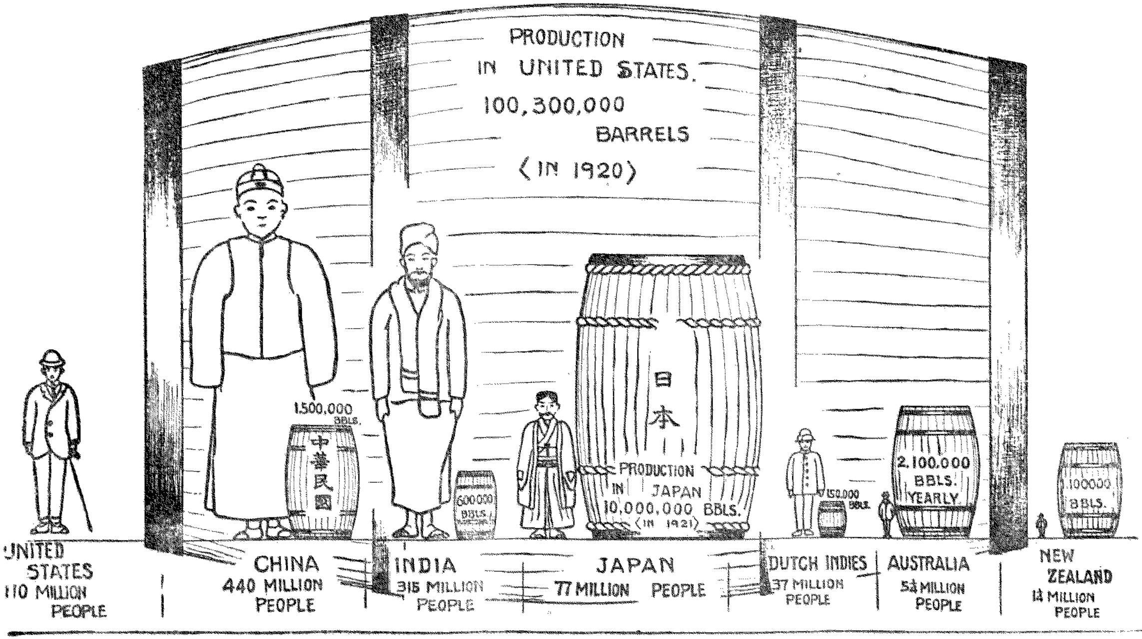
(圖 11)

此圖爲美國公共展覽之統計圖。其目的原在引起閱者之注意，喚醒一般之覺悟，故不必載精確之數目。惟此法究無正當統計之價值，應用時，尤當審慎。

下圖原爲遠東時報所載者。其對方人物，爲一般普通閱者；其目的亦祇在報告大概情形，故作此實體圖，以喚起閱讀之興味，而示以近似之概念。至論本圖弱點與上圖同，應用時，亦當注意。

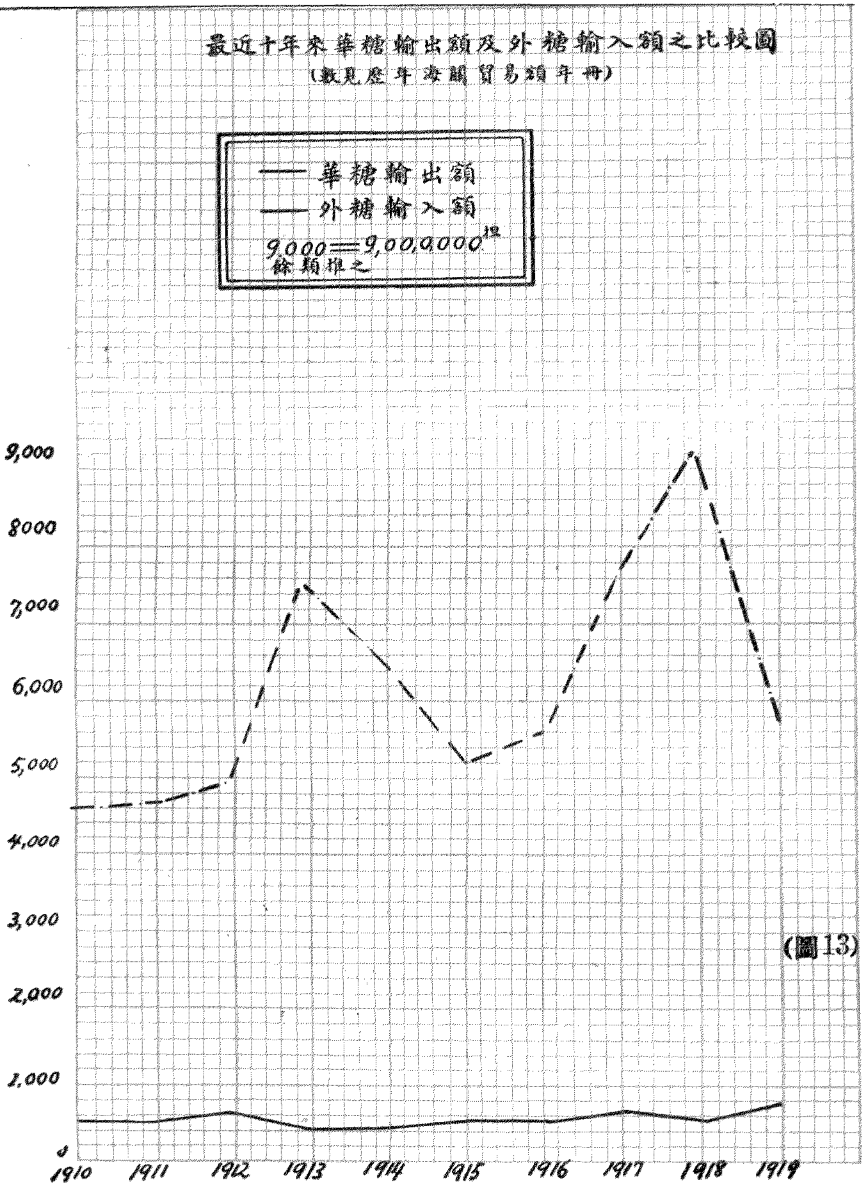
世界各國塞門土產量與人口數之比較

(圖式見 Far Eastern)



Comparison of Cement Production and Populations of Various Countries.

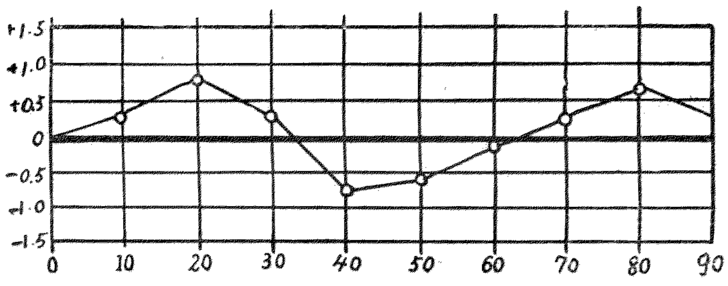
(圖 12)


最近十年來華糖輸出額及外糖輸入額之比較圖
(數見歷年海關貿易頒年冊)
華糖輸出額
外糖輸入額
9,000=9,00,0000担
餘類推之
9,000
8000
7,000
6,000
5,000
4,000
3,000
2,000
1,000
0
1910
1911
1912
1913
1914
1915
1916
1917
1918
1919

(圖13)

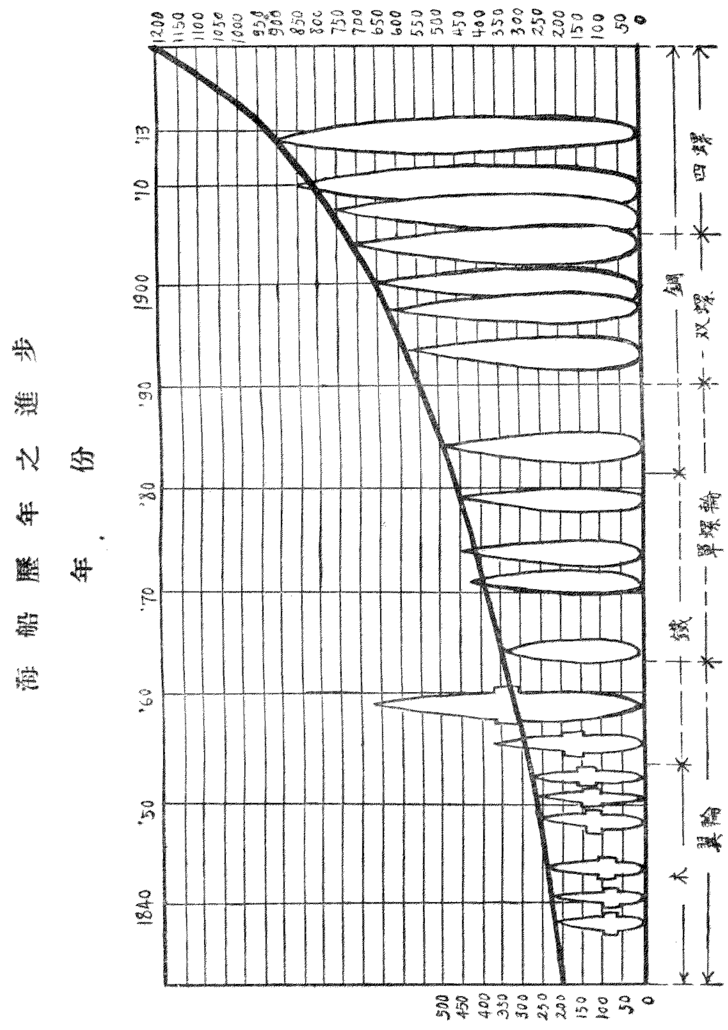
前圖爲著者在上海總商會月報上所發表者。其曲線比較法，係按事實現象之數量，將細格分作適當之度數，然後定年份爲經，額量爲緯，以示各年之輸出華糖，與輸入洋糖之比較。斯圖因年份爲獨立變數，故作經。數量爲依賴變數，故作緯。學者可以之爲法。

汽壓表之較準數



汽壓(磅方寸)　　(圖 14)

此圖爲不修勻之曲線 (unsmoothed curve)。其中除比較數量外，更分正負兩方。中界以較粗之線，藉示差別也。

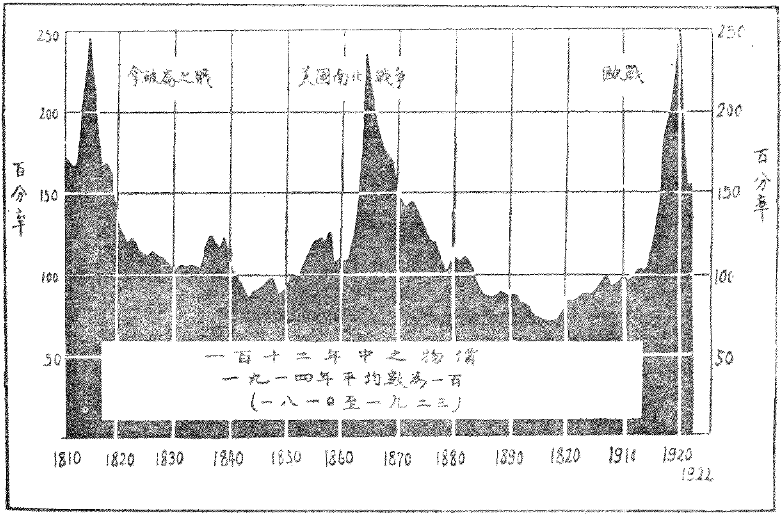


(圖 15)

本圖爲修勻曲線 (smoothed curve) 之一例。其中

所載事實有五點：第一船之長度，第二年份，第三製造材料，第四推進輪之類別，第五歷年變遷之比率。觀此區區方寸之圖，竟能得種種之消息，足證圖表之功用大矣。至於左右兩方所以均註明英尺度數者，專爲便於閱覽起見耳。

一百十二年中美國之物價

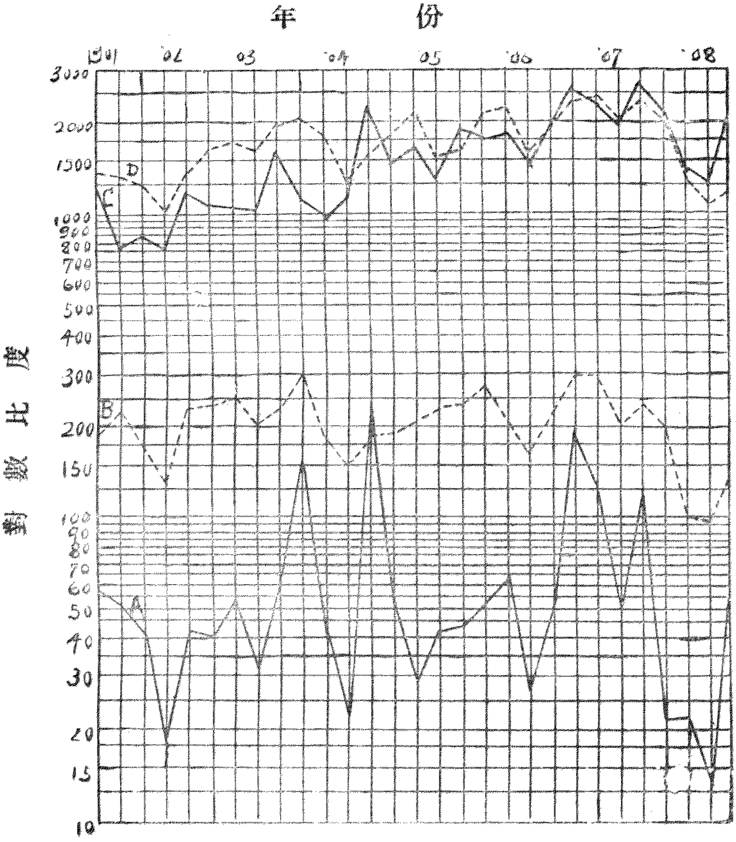


(圖 16)

上圖爲研究已往物價升降之歷史。故於特種現象時，必註明原因，以告閱者。再曲線之一方，又完全塗黑者，是欲藉兩方反映之分明，俾觀察時更易注

意。此外尚有以斜線法代之者。

1901—1908美國鐵路乘客及機工遇害與受傷人數比較圖

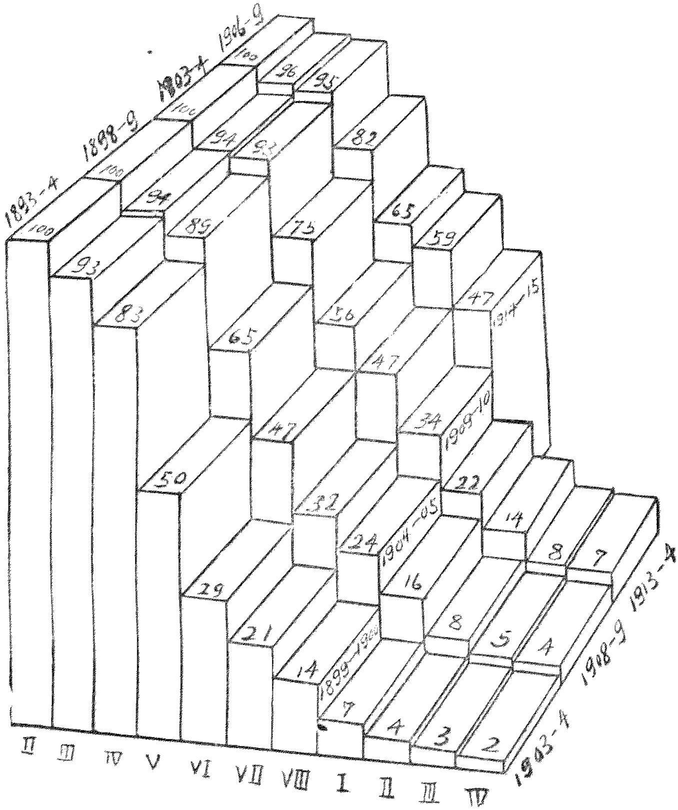


A 線為傷死乘客之人數
B 線為傷死機工之人數
C 線為受傷乘客之人數
D 線為受傷機工之人數

(圖 17)

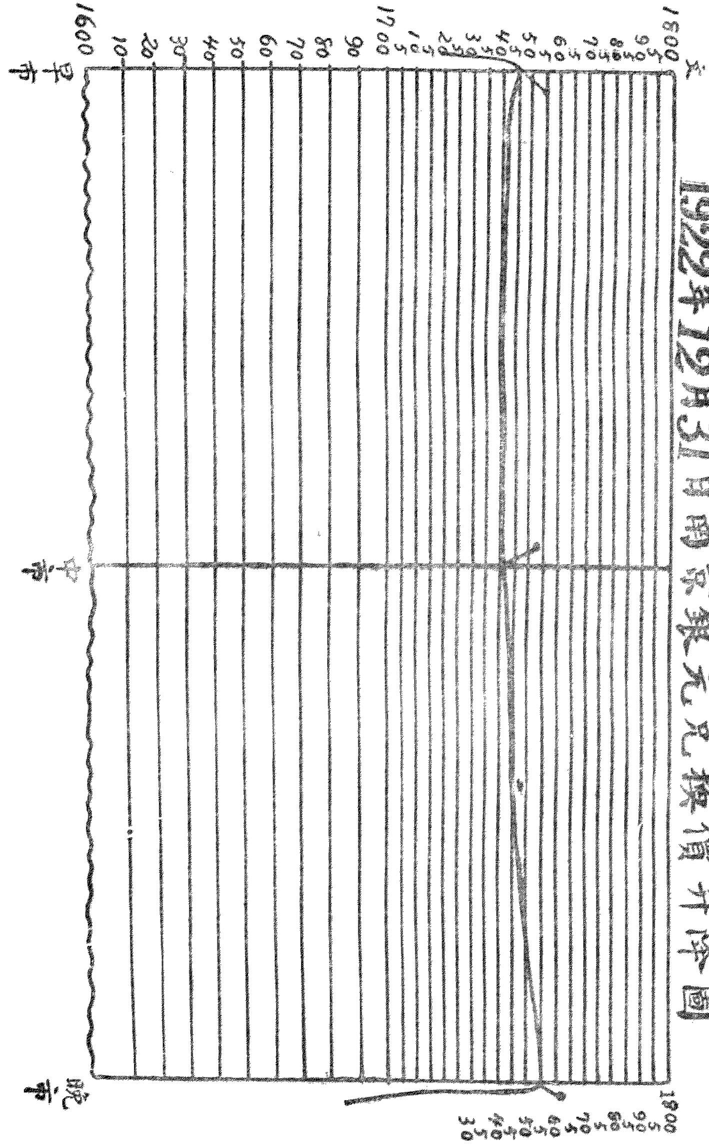
前圖爲用對數尺 (logarithmic scale) 比較之例。其專長,卽在當各項實數比度不同時,得用此法以表現之。茲查本圖工人一項,其傷死之數,僅爲二三百人。而受傷之數,則達數千以上。大小比度,如是懸殊,設非用對數尺之法,則此種曲線頗難顯明,又當對數比度格有闊窄疏密之變動時,曲線之起伏,亦隨之而有同一的表現。觀乘客受傷歷年之差數,約在千百人之譜。其曲度之起伏,固當然顯明。卽若乘客歷年傷死之差數,雖僅在數十人,而其曲線之比度,亦能明晰,此迺其特長也。再對數尺之起度,最少爲十,或百,或千,但向無以零數爲起點者,學者應注意之。

美國聖路易學校學生人數比較圖



初　　級　　高　　級　　(圖 18)

上圖爲立方比較之優良者。故閱讀時，尙易了解。惟此種立方圖，觀察上每感困難，究不若直線長條圖之易於比較也。

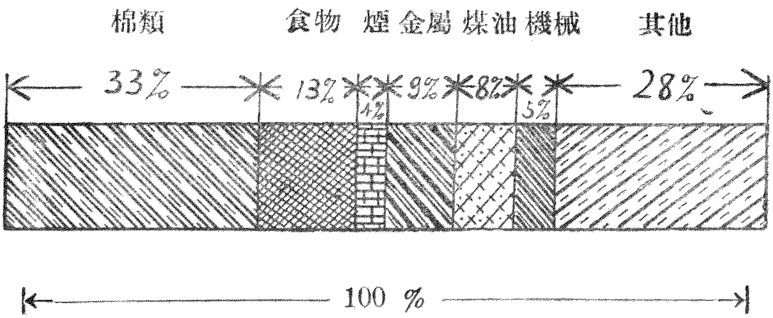


(圖 19)

前圖爲針圖之例,其用途詳情,見第五節下段。

B. 區分法(Component Methods)　凡事實現象既可分可合,而作圖之目的,又在表明各局部與全體之關係者,則用此法。以下六圖,皆屬此例。

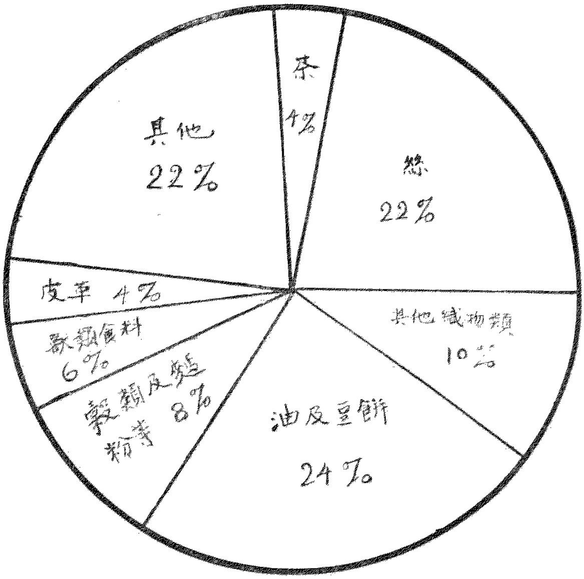
1919 年我國各種主要輸入貨物百分比例圖



(圖 20)

上圖以一定之長條爲百分,代表全體。然後將各部現象之多寡,按百分比區分之,簡便明晰,最稱善法。

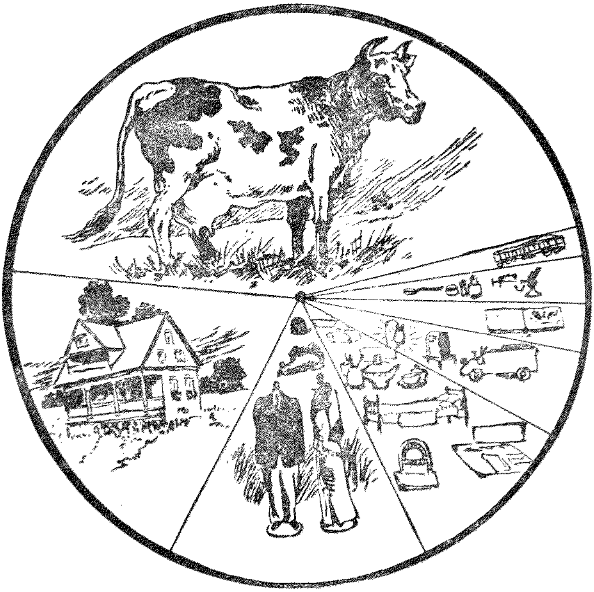
1919 年我國輸出物品百分比較圖



(圖 21)

上圖之作法與二十圖同。惟將長條改爲圓周。然世人每覺其式樣較奇,多喜用之。其實此圖之區分法,遠不若二十圖正確與明顯。

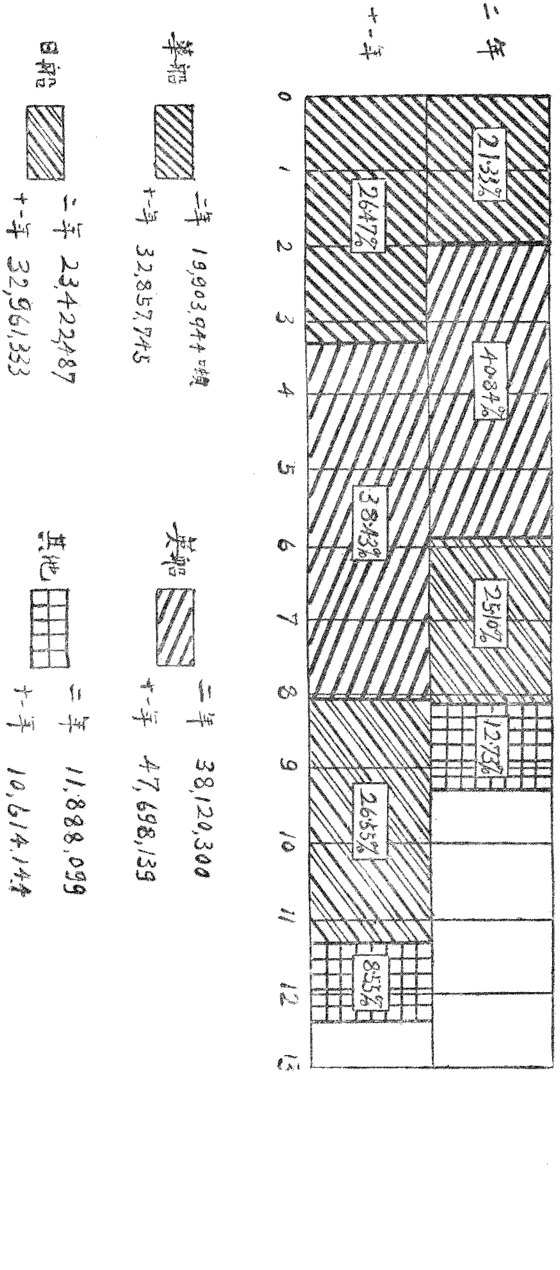
美國人收入在九百元至一千元之家庭用費支配圖



(圖 22)

此圖與上圖同。并在各分中，示以實物。按其數量之多寡，而大小之，此法似較易觀察。惟其比例，究難精確，故仍宜少用之。

民國二年及十一年主要旗號船隻噸數比較圖

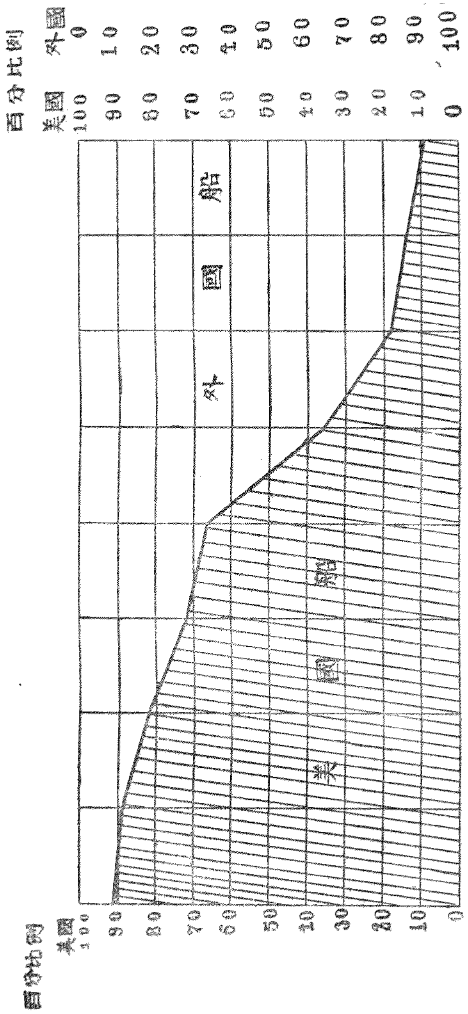


(圖 23)

前圖之區分法，雖與世界人數圖略同。惟其實

美國國際貿易の由本國船及他國船裝運之比較圖

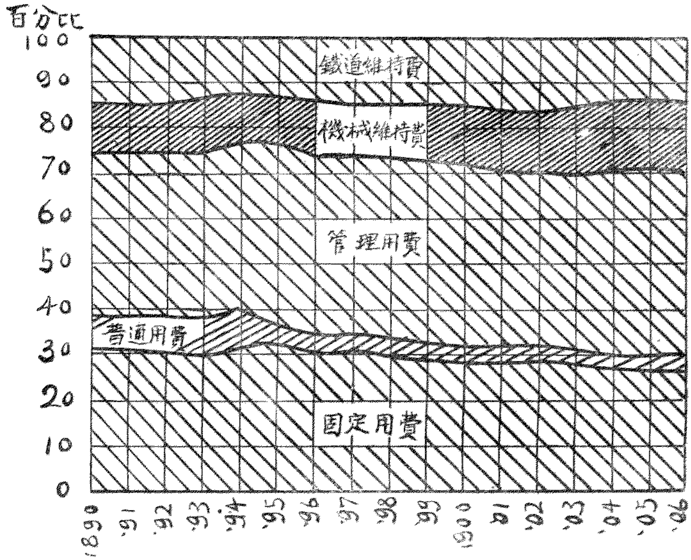
(見美國 Brinton 統計書)



(圖 24)

數，能於比例尺上觀出，而百分數又同時註明，良可爲法。再於圖說中，重將實數標出者，蓋便於查閱也。

美國鐵路營業用費分配圖

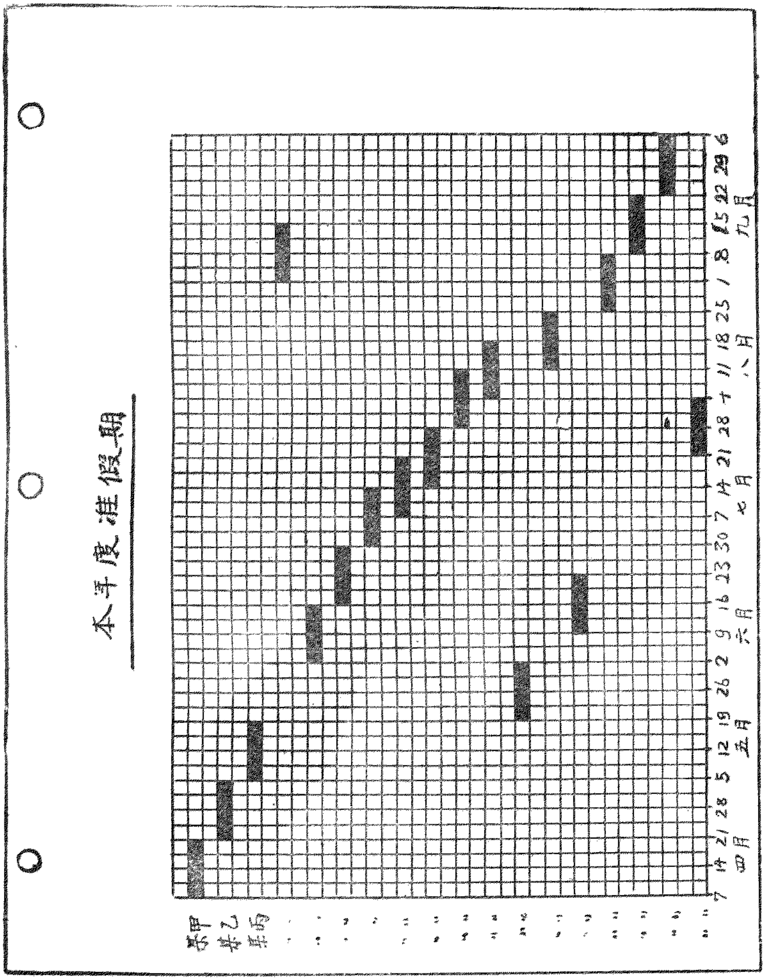


(圖 25)

以上兩圖爲曲線區分之例。今詳察其作用，蓋不獨由曲線之起伏，可知歷年之現象；更能從曲線間所分之廣狹，而得其百分之比例。

C. 時效法(Time Chart Methods)　凡事實現象與時間有特別關係，而作圖之目的，又專在表示時效者，則

當用此法。以下四圖皆屬之。



某大公司辦事人假期輪值圖

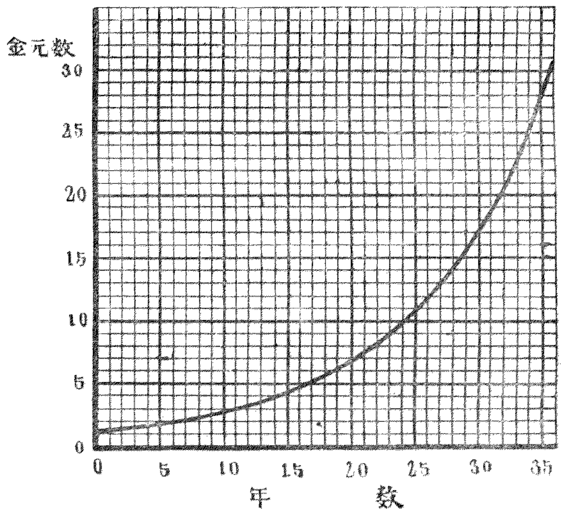
(圖 26)

此圖之作用，專在表明某甲某乙等各個假期間

之關係。蓋如是排列，無論何時，不得有二人請假者。他若工廠工人缺席諸表，亦多仿此例。

美國一金元在三十六年內十分複息統計圖

(見 Brinton 統計書)



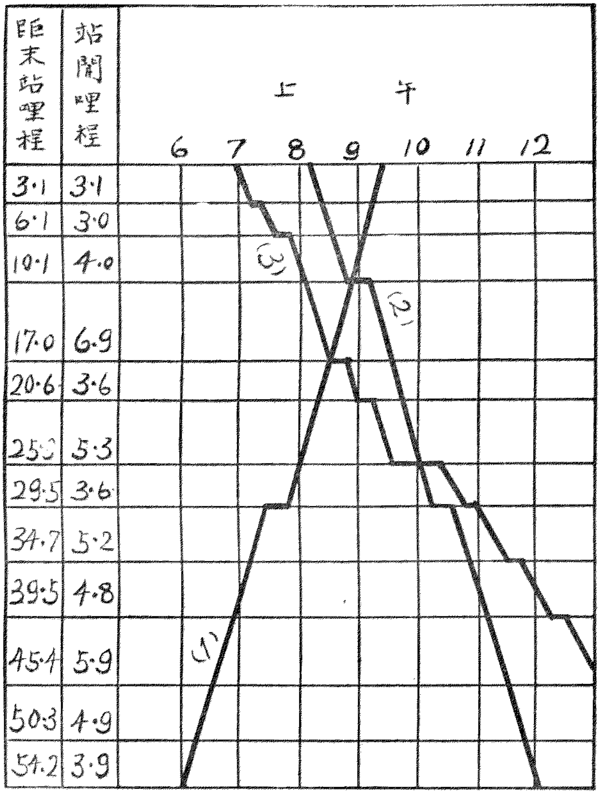
(圖 27)

上圖爲美金一元在三十六年中，利以十分計算之繁利圖。學者讀此圖，必甚奇之。蓋世人每苦複利計算之繁雜，而斯圖之製作，與逐年本利之合計，反甚容易。玆附錄其曲線之公式於下，學者自不難於了解也。

設 t = 利率，　　x = 年數，

則公式爲　$(1+t)^x$。

某鐵路公司火車開行時間圖



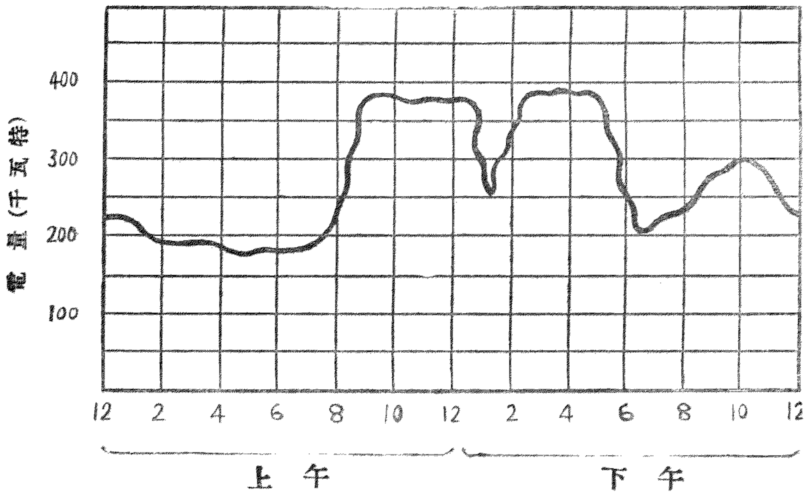
(1) 上行快車　　(2) 下行快車　　(3) 下行慢車

(圖 28)

此圖之優點，在能表示火車開行，及停站與到站

所有之時間。故車中人員常備之，以資參考。今觀圖中之斜線，係代表開行時間。橫線代表停站時間。設此路爲單軌時，則絕不應有斜線相交之處，否則，必有兩車相撞之險。學者細閱此圖，即明其理。

電量漲落圖

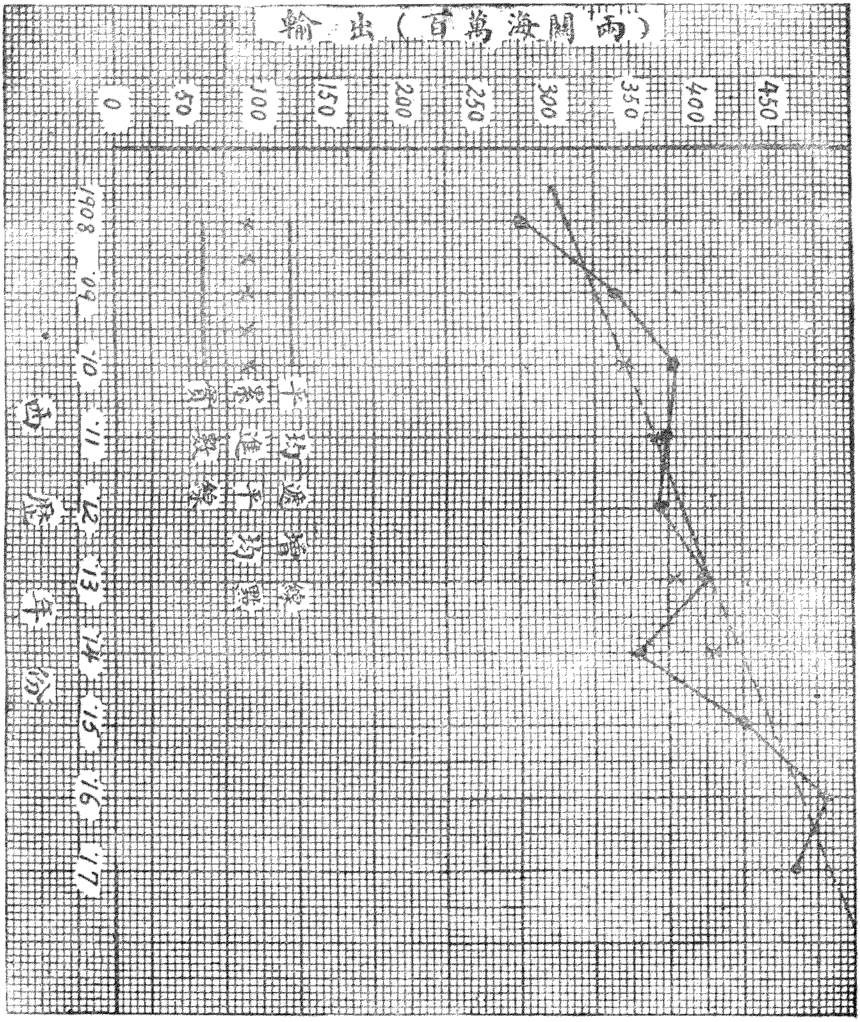


(圖29)

上圖之效用，不僅在表示電量漲落之數；且可從曲線下之面積，而測知總瓦特時 (watt hour)，與作業之數。

D. 平均法(Average Methods)　凡事實之現象，每含有變遷之定率。而作圖者又專欲闡發其平均之趨勢時，則當用此法。以下二圖咸屬之。

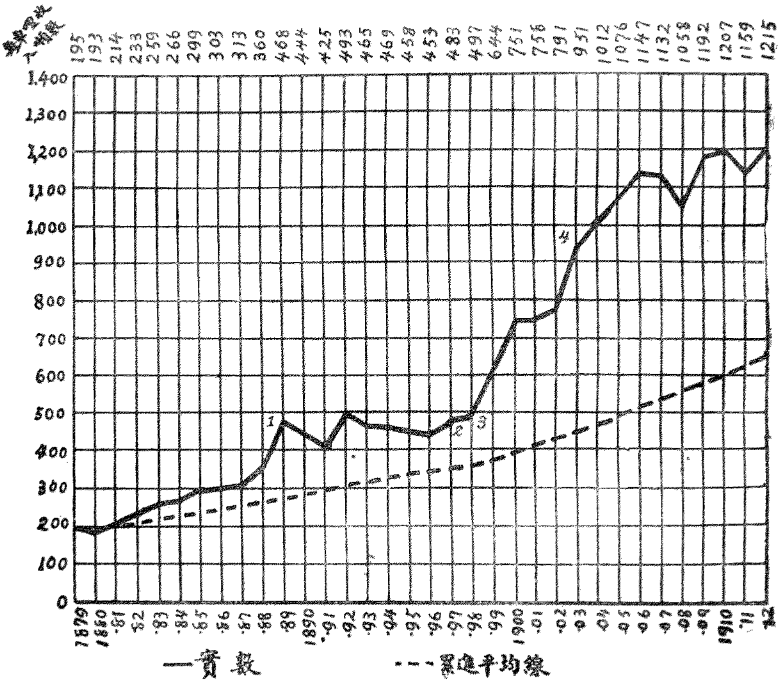
我國輸出貿易歷年遞增平均數量圖



(圖 30)

學者須知上圖之主要作用，非在示歷年輸出貿易增加之實數，而在求出逐歲增加平均之趨勢。故作圖時，當實數點與線連成後，卽須求出遞增平均點與平均遞增線。此線之作法，簡要言之，卽在使虛實二線間之面積上下相平耳。又平均之線，恒以虛線代表者。以其究非實在之現象。

美國畢沓堡至伊爾厘湖鐵路每年每車哩收入噸數平均圖



(圖 31)

上圖固亦爲平均法之一例。惟其作法特精良，爰分錄其優點於下，以資考鏡:

(1) 零度線特粗之，以示區別。

(2) 左右兩方之直線，不用粗線者，因此圖之起點與終點，爲截斷時間之一部。

(3) 圖上標字之寫法，均成橫式。又年份四字，除每十年全寫外，餘僅作兩字，是皆便於閱讀也。

(4) 圖之上方，載明實數，便於查閱。

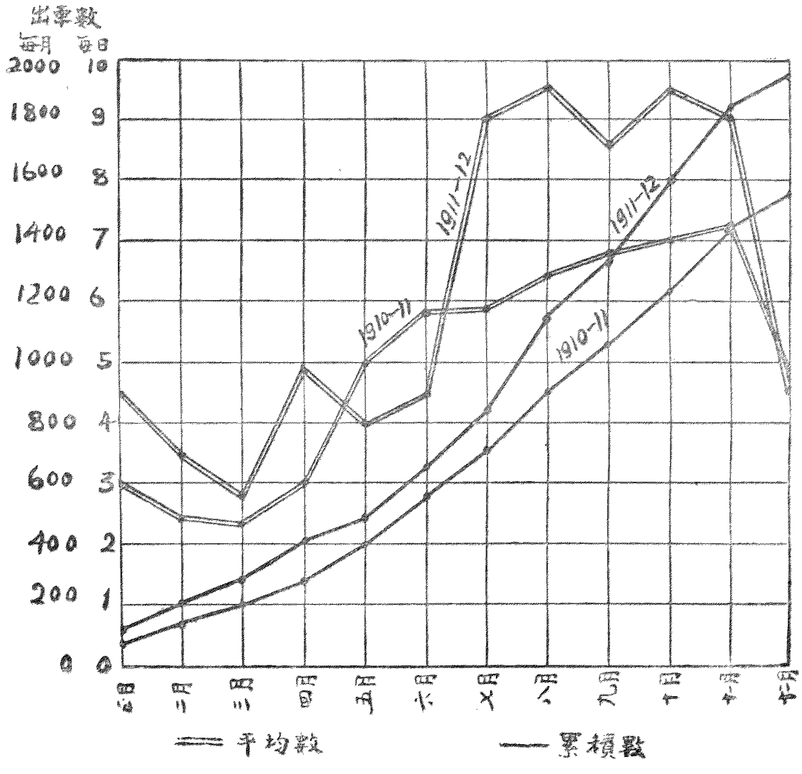
(5) 曲線旁，註有數字，以表示其特殊現象。圖下並附以備註 (本圖從略未加備註)，是皆足引起閱者之注意。

E. 積累法(Cumulative Methods)　凡事實現象與作圖目的，均在表明其積累之趨勢時，則當用此法。下二圖皆屬之。

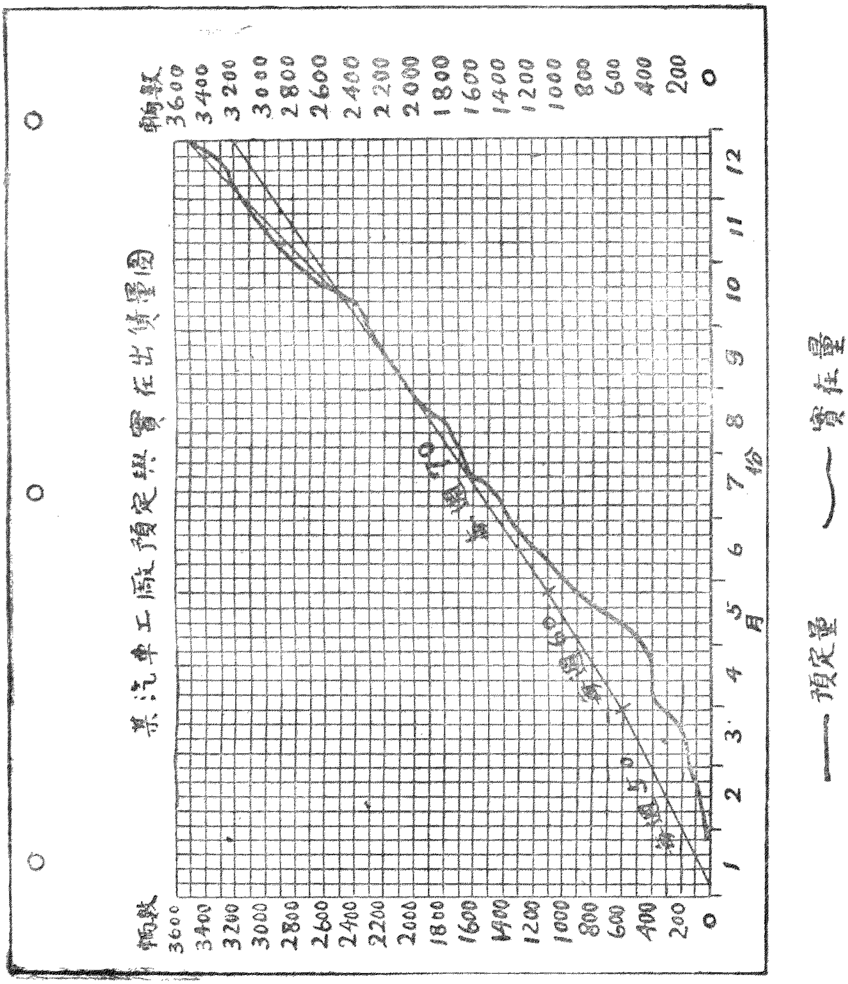
下圖之主要作用，在表示逐日產品之積累數。蓋從每月逐日之均數曲線，及每日遞增之均數曲線，僅能測知出貨之約略情形。至於確實之成貨，則非由積

累曲線不足表現其真狀。嘗聞美國某省造紙工廠之失敗，卽由於製造營業二部之隔閡，供求數量之不適合。設作有此圖，則兩部之消息溝通，其有裨於實際銷路上者，必匪淺鮮。

某造車工廠出貨統計圖



(圖 32)



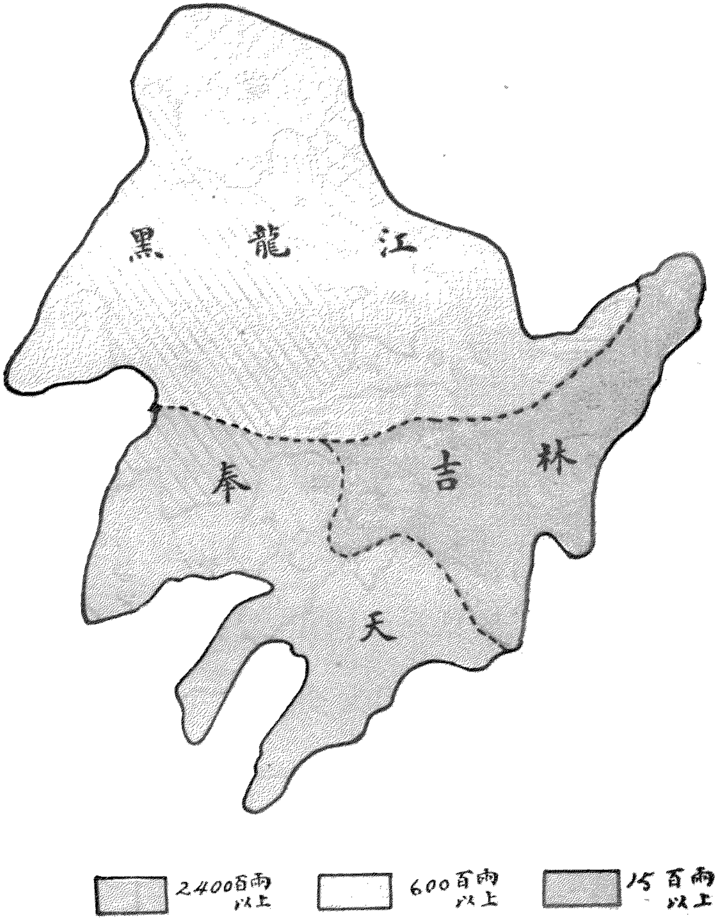
(圖 33)

前圖示明某汽車廠預定與實在出貨之量，斜直線代表預定量，曲線代表實在數。今詳察之，得悉某廠逐月實在出貨之量，及其與預定數不同之額，又從出貨量之多寡，而能推知其原因。如一月間，係因創辦伊始，正值佈置期中，故完全無出貨。待至七月以後，銷場大旺，而出貨亦隨日增加，竟與預定量相符，此亦積累線之一優點也。

F. 地位法(Position Methods) 凡事實之現象，均與發生場所有特殊關係時，則當用地位法以表示之。以下兩圖，皆屬其例：

東三省金鑛圖

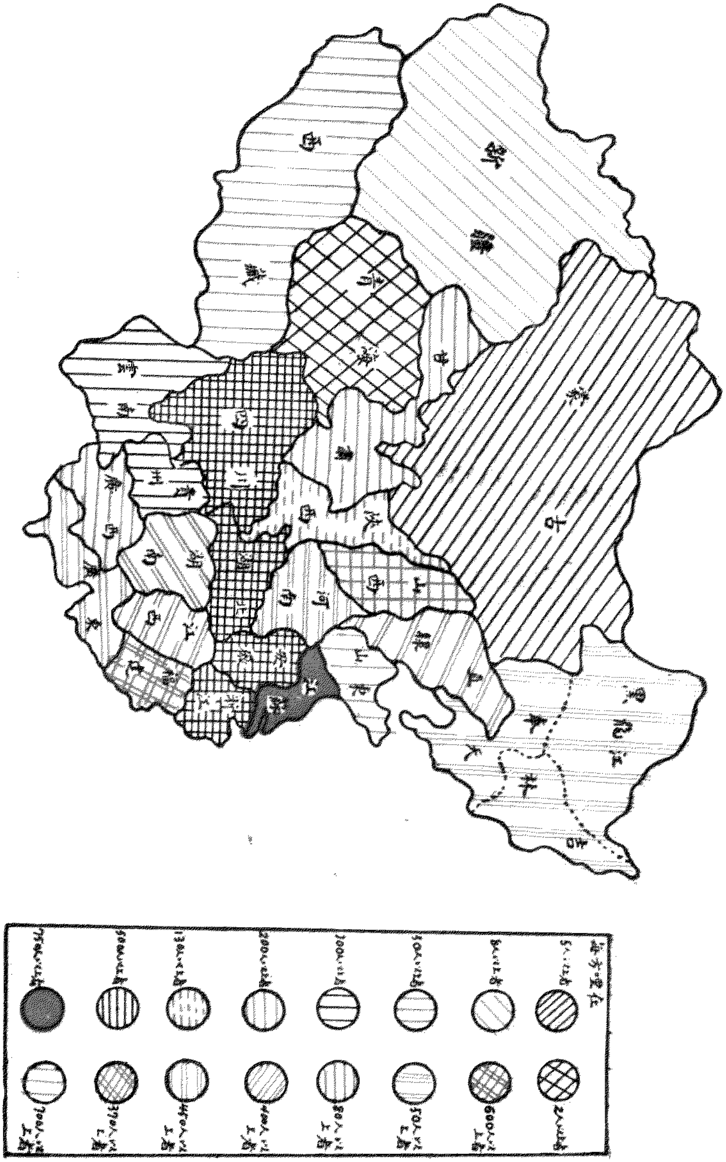
(1913 年調査)



(圖 34)

中國各省人口比較圖

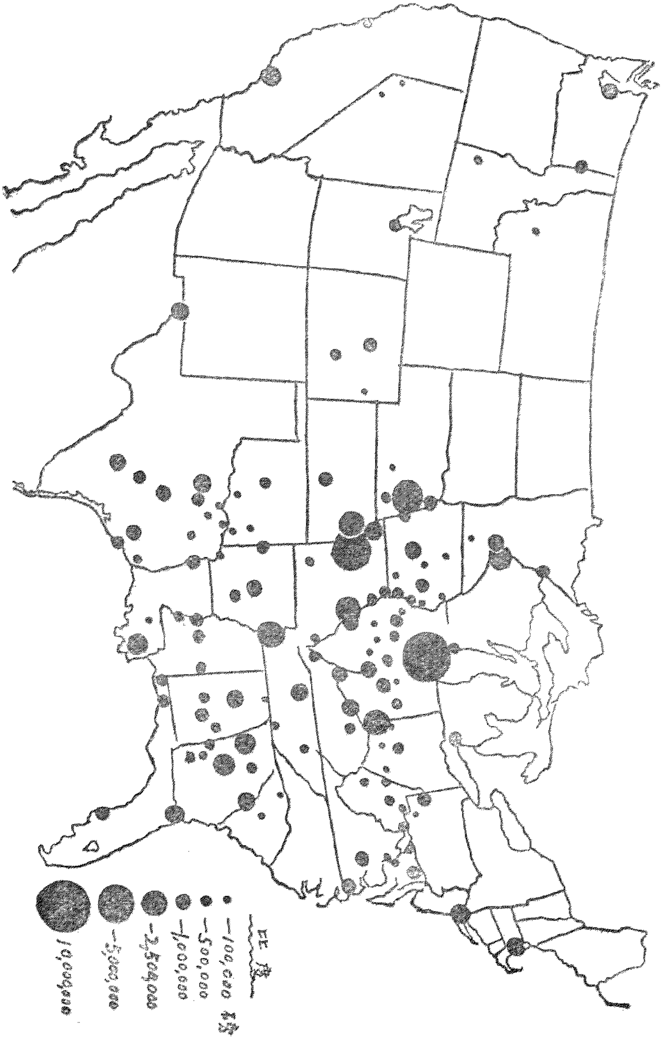
(數目見新地理書 1912 年調查)



(圖 35)

以上二圖固各具專長，然主要作用究不外喚起閱者對於事實現象，與發生場所之聯念，而增瀏覽之感情耳。學者對於此等圖形當注意二點：第一須知彩色不宜常用，非當區分繁複，或稠密之地圖界限難分時，切忌用之。因顏色之價值固貴，印刷上尤感不便。且含有暗示輕重之作用，故爲近世統計界所力避者。倘僅供一般瀏覽之用，或借顏色以引起閱讀之感情，殆無不可。第二須知設色無論平塗，色線，均以原色爲宜。若須印刷者，則尤貴簡單。否則，恐多錯誤。晚近統計家常採用白恩得法 (Ben Day Process) 以代之。蓋因其彩印既較勻淨，而取價亦可特廉也。

此外尚有用墨色交叉花線，或圓點之大小，疏密，(如下圖) 等分，諸法，以作地形圖者。詳情可參閱 Brinton-Graphic Methods for Presenting Facts, Chaps. XI and XII, pp. 208–253.

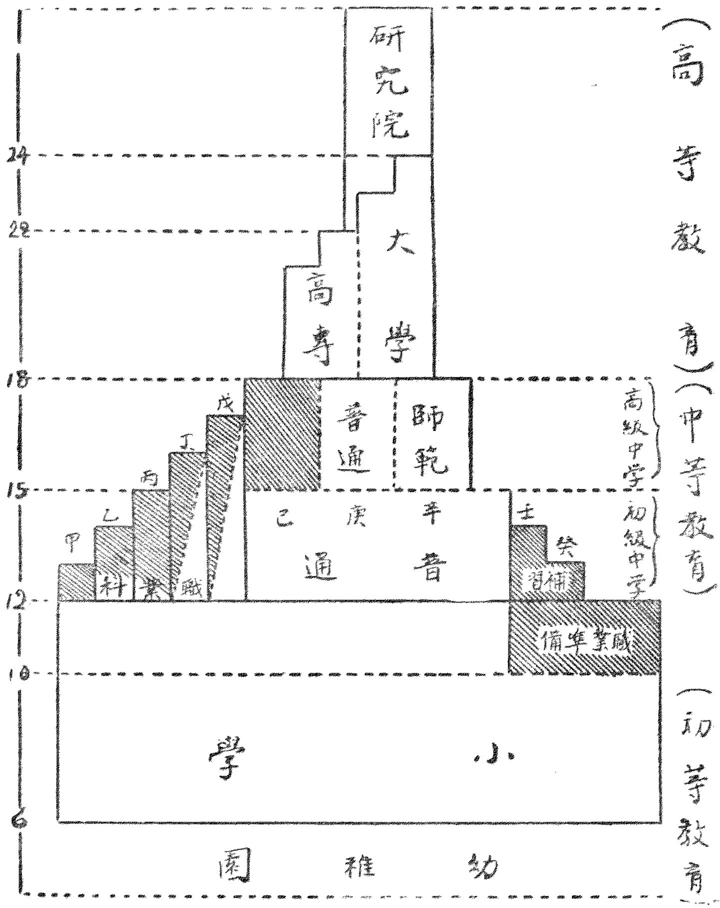


1911 年美國威士干遜牛乳餅在各大埠銷售數比較圖

(圖 36)

G. 系統或組織法 (Organization or Systematic Methods) 凡事實之現象,不重在數量,而重在相互之

我國學制系統圖



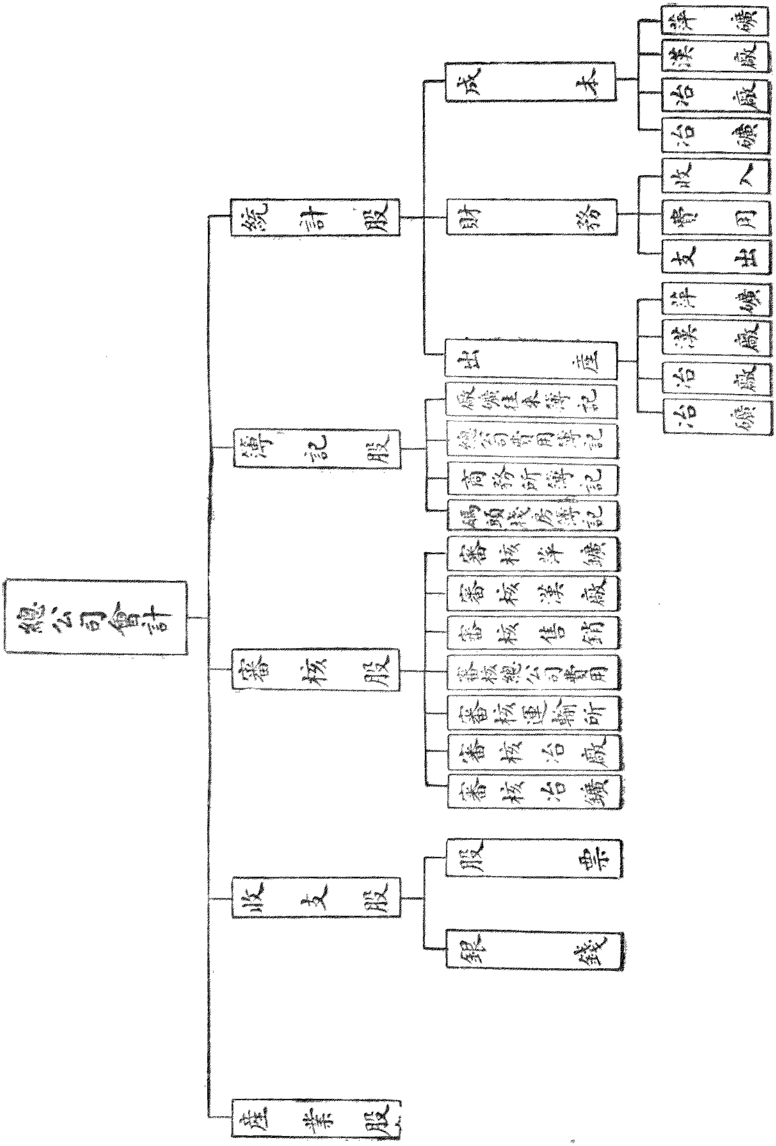
(圖 37)

關係，先後之次序者，則應用系統法以表示之。下列五例，皆屬之：

圖中之左方年齡，以示入學及升級之標準，故由少而長。各級學校之排列，由初而高。學術之內容，亦由淺而深。又圖內有斜線者，表示職業科。無者，表示普通科。如是組織，則閱者對於各種學校啣接相通之處，殆未有不明瞭者，斯卽本圖之功用。惟關於註字一層，尙嫌不一律。

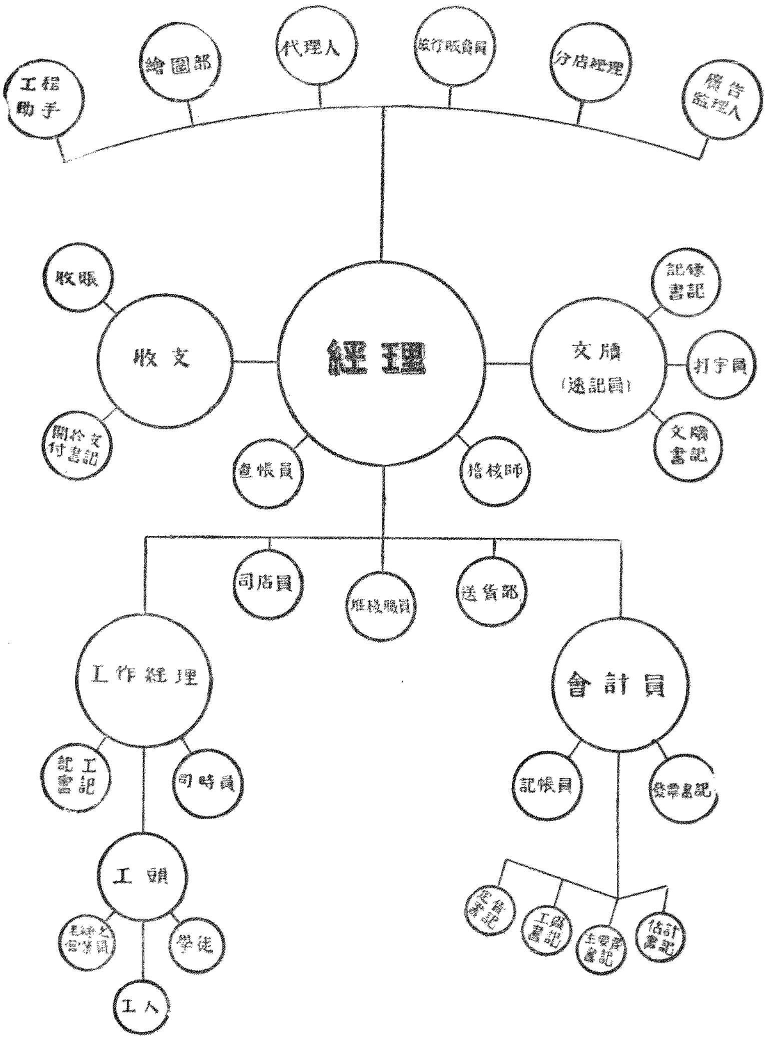
下圖係表示漢冶萍公司總會計處各種機關之組織。故採用系統法，以顯明各股之次序，以及各種人員職權上之關係。

漢冶萍總公司會計組織圖



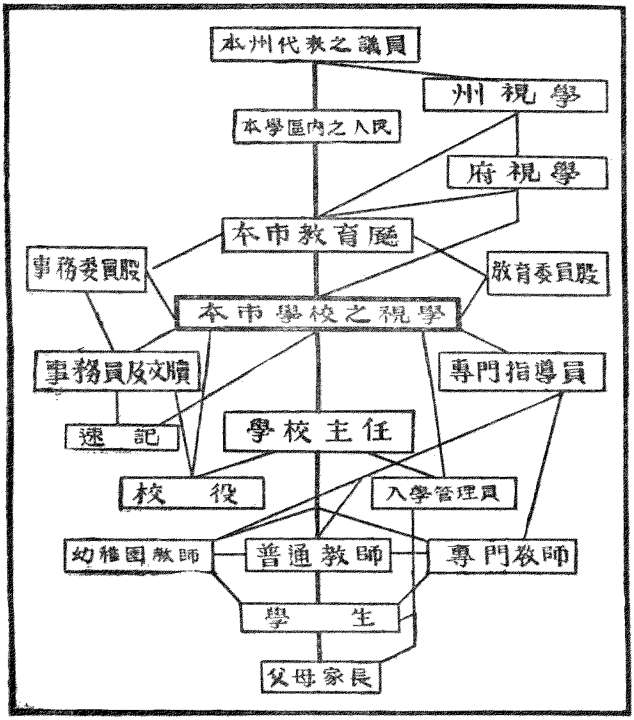
(圖 38)

我國某大工廠組織圖



(圖 39)

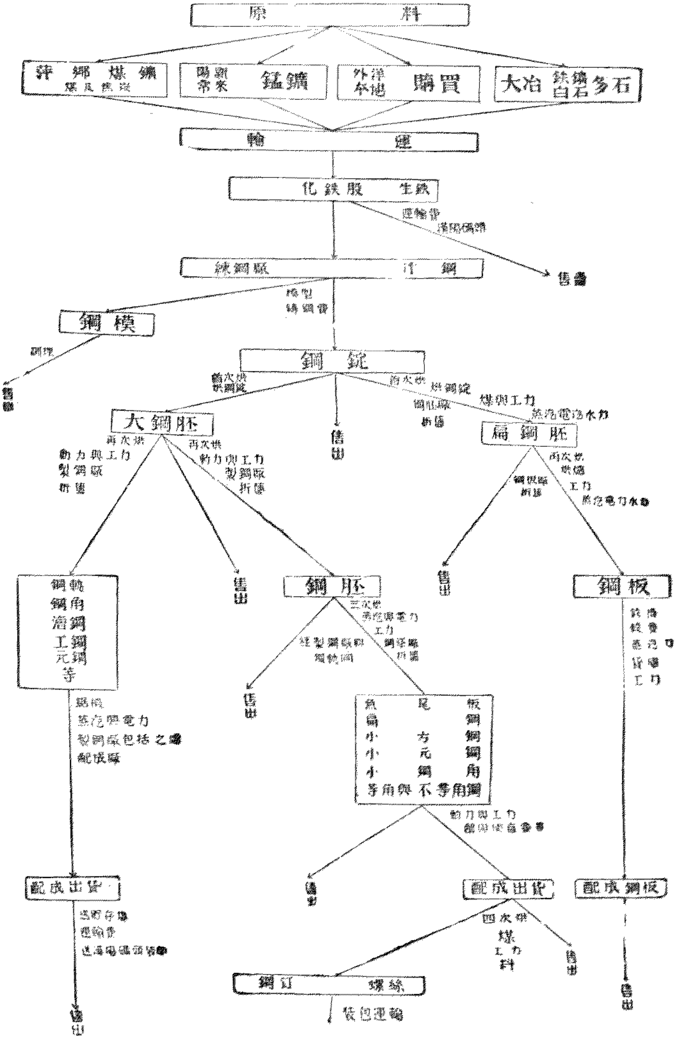
美國某小城教育組織圖



(圖 40)

觀以上兩圖，次序之編製，乃自中央向外分列。大有職權集中之表現，而無階級制度之意味，故亦爲近世統計界中所樂採用者。

漢陽鐵廠鋼鐵經過手續圖



(圖 41)

學者若詳察此圖，則漢陽鐵廠所有鋼鐵製造之程序，殆未有不瞭若指掌。同時且能悉其逐次之工作，以及銷售之方法。可見圖表之效用，實遠勝於文字也。

第七節　製圖應用之規則

(1) 圖式之選擇，務以簡明正確合乎事實之表現者爲宜。萬不可徒尚美觀，而冀新奇，反失作圖之本意。

(2) 事實之數目，若能從圖中顯出者最好，否則亦可將表列附錄圖旁，以資對照。

(3) 事實中之獨立變數(如年份期間等是)，應作爲經，依賴變數(如數目額量等是)，應作爲緯。

(4) 圖之底景 (back ground)，固須大小匀稱。所有格線，尤忌繁細。蓋當底線過複雜時，對於主要之曲線，反使含糊。不若簡明者之易於觀察也。

(5) 凡須印刷之圖，所有格線顏色，最好與主要曲線相同。不然套印時，若稍有出入，則其差度之誤，更不知幾何。

(6) 圖式之排列，多自左而右，以便閱讀。

(7) 橫形比度尺,普通常列於下方。所有度數,咸自左向右。直線形者,當置於左方,度數自下向上。但遇有必要時,橫形者亦可改列於上方,直形者改列於右方。

(8) 對數尺之起點,應爲十,或十以上之整數,如五十,百,千,等是。

(9) 直形比度尺下端起點,應自零度 (zero)。零線亦宜稍粗,藉示區別。又如遇有特別情形時,零度不能列入,則下方邊線,應稍作波狀。以表明下部未完,或屬截斷之圖。

(10) 百分比之起點 (零度) 與終點 (百分度),皆應作較粗之線。

(11) 主要曲線宜特粗,以引注意。

(12) 設以經線表示時期,則兩方直線,均不應稍粗。因此種圖式,多屬截斷一部者。

(13) 圖上曲線過多時,應於線旁註明符號 (symbols),或數字 (figures),(若爲外國文,更可註縮寫字 abbreviations) 以便檢閱。

(14) 曲線單簡時,不妨將各點之實數,附錄上方,以資

對照。

(15) 直線及長條圖之上方,應置適當之比例尺。若仍嫌比度不明時,不妨引以虛線,以便觀察。

(16) 當區分過繁時,得藉色彩以清界限。惟多以原色爲佳。

(17) 實體圖祇可供一般瀏覽之用,精確統計時,宜力避之。

(18) 圖中較度,以一方者 (one dimension) 爲最正確。而比尺之選定,以合乎圖中所有事實之用爲宜。

(19) 標題字眼,應採慣用者。旣可以免除誤會,且省解釋。

(20) 圖上之命名,宜完全而明晰。

摘　要

1. 按科學方法,說明表列分析所得事實之結果者,謂之曰圖。

2. 表之功用,在分析現象;圖之功用,在說明結果。

3. 表列能顯明各分子之現狀,故屬抽象的。圖式能呈現全部賅括之情形,故屬具體的。

4. 圖之製法，分初稿與精製二步。

5. 製圖之要件有四：——

(a) 選擇主要之事實，

(b) 細察連帶之關係，

(c) 詳審對方之人物，

(d) 精訂圖式之製法。

6. 圖之類別有八：——

(a) 直線圖，

(b) 長條圖，

(c) 曲線圖，

(d) 平面圖，

(e) 立方圖，

(f) 針圖，

(g) 地圖，

(h) 實體圖。

7. 圖式之應用，約有七法：——

(a) 比較法，專在比較事實之現象。

(b) 區分法，專在顯明事實各部與全體之關係。

(c)時效法,專在表明事實與時間之關係。

(d)平均法,專在表明事實平均的趨勢。

(e)積累法,專在顯明事實積年累月恆常之現象。

(f)地位法,專在表示事實與發生場所之關係。

(g)系統或組織法,專在顯明事實系統之次序,組織之關係。

8. 製圖應用之規律甚多,要言之,不外以簡明正確,合乎事實之表現者爲原則。

問　題

1. 圖表功效之異同爲何?

2. 製圖時若不注意 (1) 主要事實之選擇,或 (2) 聯帶關係之考慮,或 (3) 對方人物之審查,或 (4) 圖式製法之精緻,則其結果之影響,究屬如何?試各設一例以述之。

3. 試分述各種圖式之特點。

4. 我國教育界之統計,每喜作圓形圖,或扇形圖,或多角形等圖,其理由何在,利弊若何?

5. 試評論下列諸圖之優劣:——

(a)圓形圖,

(b)實體圖，

(c)曲線圖，

(d)立方圖，

(e)長條圖，

(f)直線圖。

6. 試作下列諸圖:——

(a)我國各省學生人數比較圖。

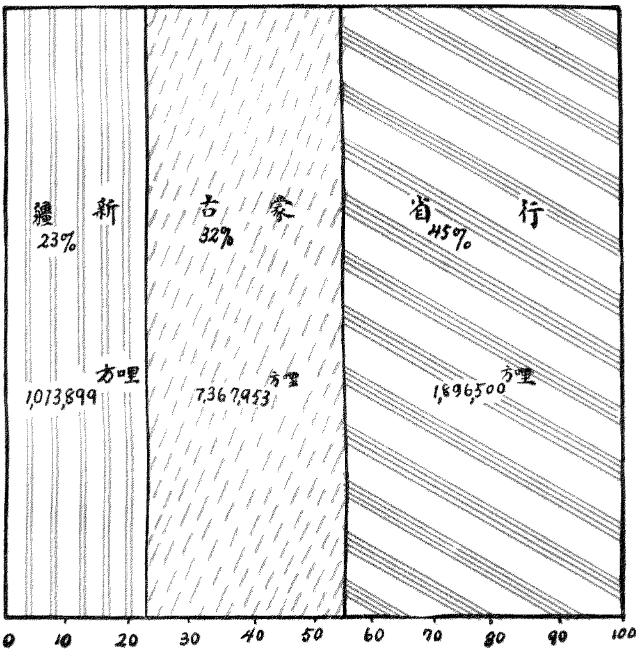
(b)歷年輸出輸入貿易總額圖。

(c)學者可任意選一實際之問題，製作適當之圖式。

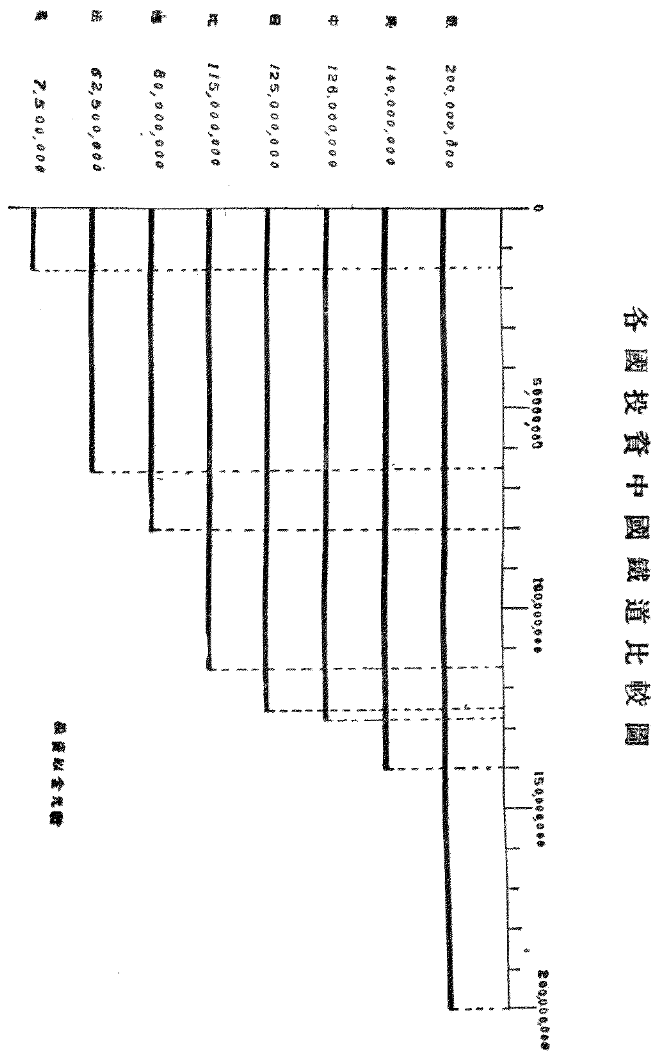
7. 玆將我國近今經濟統計五圖揭示於下，以供批評。

中國土地全面積統計圖

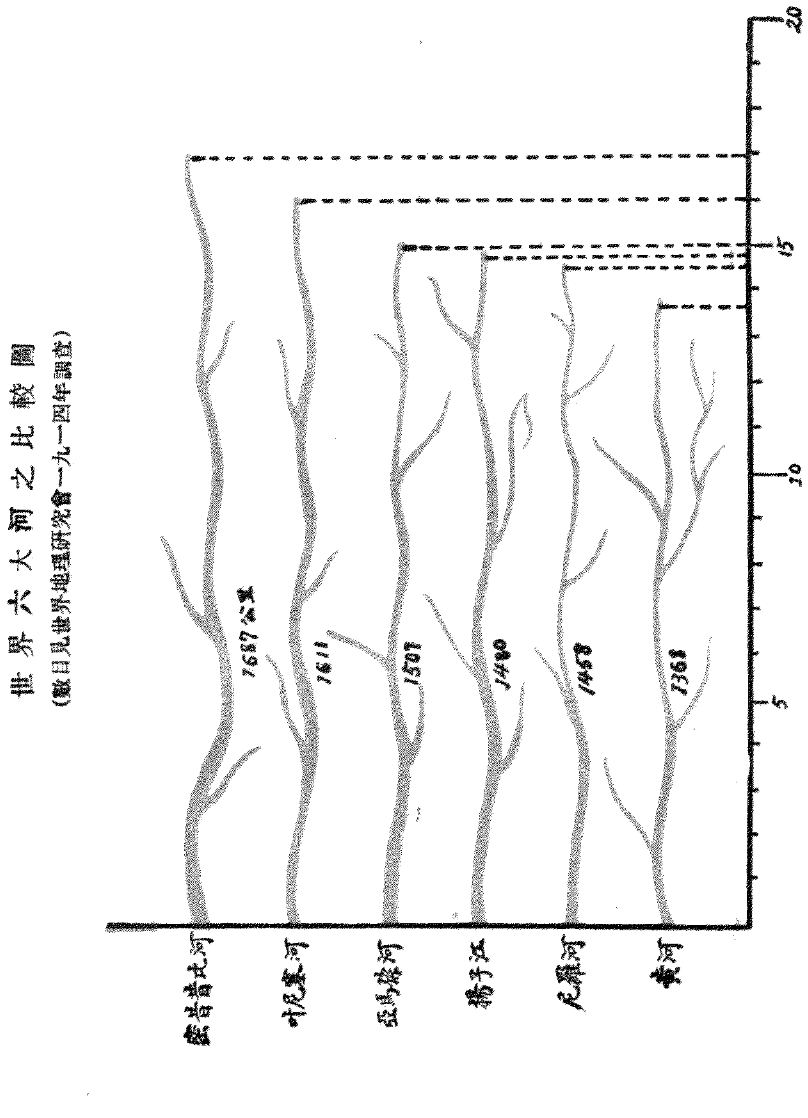
(數目見一九一九年中華年鑑)



(圖 42)


各國投資中國鐵道比較圖
200,000,000
140,000,000
128,000,000
125,000,000
115,000,000
80,000,000
62,500,000
7,500,000
0
150,000,000
200,000,000

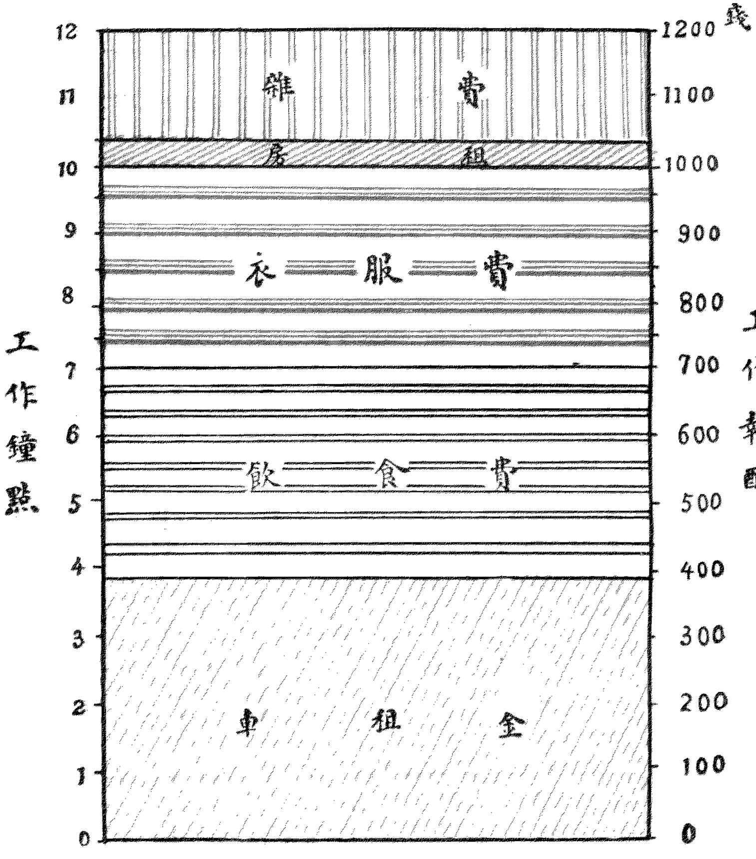
(圖 43)


世界六大河之比較圖
(數目見世界地理研究會一九一四年調查)
1687公里
1611
1501
1480
1458
1368
密昔昔比河
叶尼塞河
亞馬遜河
揚子江
尼羅河
黃河
5
10
15
20

(圖 44)

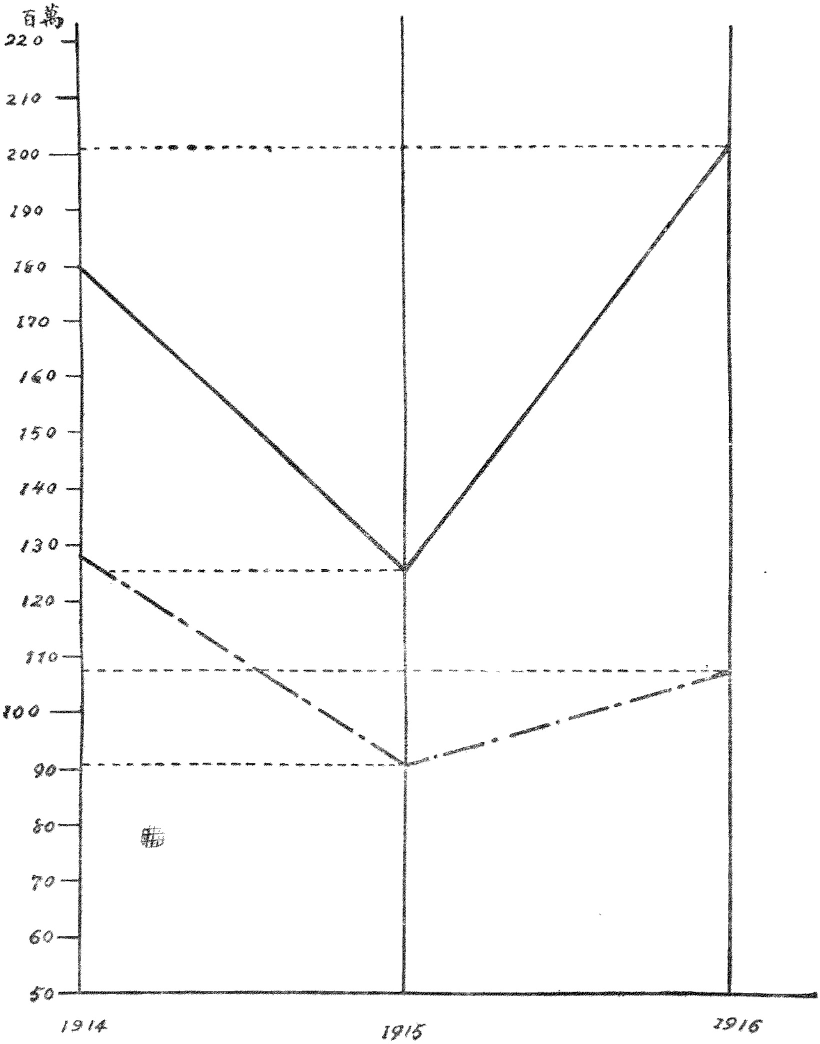
南京黃包車夫每日生活狀況圖

(一九二十年四月調查)



(圖 45)

中國豆類出產累年比較圖　(數目見五次農商統計)



—— 作物面積　—·— 收穫量數　(圖46)

參考書

1. King, W. I.: Elements of Statistical Method, pp. 91–97.
2. Brinton, W. C.: Graphic Methods for Presenting Facts, Chap. I, pp. 1–19; Chap. II, pp. 20–35; Chap. III, pp. 36–52; Chap. IV, pp. 53–68; Chap. V, pp. 81–83; Chap. VII, pp. 125–137; Chap. VIII, pp. 138–143; Chap. IX, pp. 149–163; Chap. XI, pp. 208–226; Chap. XII, pp. 227–253; Chap. XVI, pp. 321–333; Chap. XVII, pp. 344–363.
3. Secrist, J. M.: An Introduction to Statistical Methods, Chap. VI, pp. 158–192; Chap. VII, pp. 193–233.
4. Bowley, A. L.: Elements of Statistics, Chap. VII, Sections, 1, 2, 3, 4, 5, pp. 143–196.
5. Rugg, H. O.: Statistical Methods Applied to Education, Chap. X, pp. 310–360.

第十一章　論集中數量

圖表之作用,雖可表示事實大體結果之現象。而精確之關係,緻密之研究,則尤非由數字的計算,不足以盡其事。況乎圖表之工作,又往往由計算之結果,以為編制之材料。故本書自本章以後,卽分論統計計算法。

第一節　平均數

I. 平均之意義　平均之意義,有廣義與狹義二種。前者包括中數 (median) 衆數 (mode) 等而言;後者專指均數 (average or mean)。本章所論爲廣義。本節所述係狹義。

平均者,將所有事實之現象相加,以事實之個數除之卽得。例如某甲身長六尺一寸,某乙長五尺五寸,某丙長五尺二寸,此三人平均之長度,爲

$$\frac{6.1+5.5+5.2}{3}=\overset{\text{尺}}{5.6}。$$

II. 平均數之類別　平均數有三種,分述如下:

(A) 算術的平均數 (The Arithmetic Average or Mean)。

(1) 意義　此種平均,亦名普通平均數 (common average),又名簡單算術的均數 (simple arithmetic average),蓋以其計算單簡,而爲普通常用者也。此數之意義,卽從所有事實中,求出衡平均等之現象耳。

(2) 計算法

(a) 普通計算法 (The General Method)　此

法將各個事實現象相加,以事實項數除之即得。今舉算術的均數之公式於次:

令 A 爲平均數,N 爲項數, $x_1, x_2 \cdots\cdots x_n$ 爲各項數。

$$A=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+\cdots\cdots X_n}{N}。$$

或 $A=\frac{\Sigma X}{N}\cdots\cdots$($\Sigma$ 爲相加之符號,Σx 爲各項數相加之和)。

〔設例〕 某工廠包裝部工人七名,其工資之數,各個不同。茲欲知其一均等之勞銀,則當用算術的平均法,以求得之。

某工廠包裝部工人勞銀表

每週勞銀數	得每等勞銀工人數
$ 31.50	7
$ 2.00	1
5.00	1
3.50	1
3.00	1
6.50	1
7.50	1
4.00	1

(表 39)

代入公式

$$\frac{2.00+3.00+3.50+4.00+5.00+6.50+7.50}{1+1+1+1+1+1+1}$$

$$=\frac{31.50}{7}=4.50。$$

四元五角卽從此七工人中，求得相等之勞銀也。惟斯例對於事實各個之項數，均同爲一 (equal weights) 耳。倘其各項數，略有懸殊，則此法卽不適用。

(b)簡便計算法 (The Short Cut Method)

此法卽於事實中，任擇一數爲假定均數 (assumed average)。次查各項與此數之差數 (deviations)。再次加得各差之總數，而以項數除之。最後以除得之商數 (quotient)，加於假定均數之上，卽得眞正均數 (the true average)。茲取實例以說明之。

〔設例〕　某城有學校六所。甲校學生計三百三十人，乙校計三百三十五人，丙校計三百三十六人，丁校計三百三十八人，戊校計三百四十二人，己校計三百四十七人。今用簡便法求

其算術的均數。

各項	假定均數	各項與假定均數之差額
330	340	−10
335	340	− 5
336	340	− 4
338	340	− 2
342	340	+ 2
347	340	+ 7
		總差−12

(表 40)

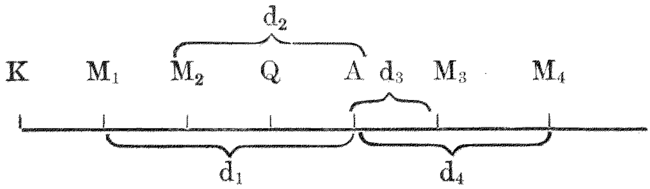
項數 =6,

則 $-12\div6=-2$。

$\therefore\ 340+(-2)=338$,卽真正均數。

學者觀此法計算之簡便,必甚異之。茲復以數學之原則,證明此理。設下列圖中之 KM_1, KM_2, KM_3 及 KM_4 爲 n 項中之四項。若 KA 爲真正算學的均數,而 KQ 爲假定均數。又令各項與算術的均數 KA 之差,爲 $d_1,d_2,d_3,\cdots\cdots d_n$。

$QA=X$。



(圖 47)

$$\therefore\quad \frac{\text{各項與 KQ 之總差}}{n}+KQ=KA。$$

$$\text{而}\quad \frac{\text{各項與 KQ 之總差}}{n}$$

$$=\frac{-(d_1-x)-(d_2-x)+(d_3+x)+(d_4+x)\cdots\cdots+(d_n+x)}{n},$$

$$=\frac{-d_1-d_2+d_3+d_4+\cdots\cdots d_n+nx}{n},$$

$$=\frac{nx}{n}=x。$$

又因各項與數學的均數之總差 $=0$。

而　$x+KQ=KA$,

$$\therefore\quad \frac{\text{各項與 KQ 之總差}}{n}+KQ=KA。$$

學者詳察此圖證,則對於簡便法之計算,自不難解悟。

(3) 特點　算術的平均數有特點四:

(a)所有事實之現象,均列入計算中。

(b)所有事實之現象,雖各個不同,但均分時,皆受同一除數(divisor)之支配。

(c)所有事實之現象,對於此均數皆有多少之關係。

(d)所有事實與此均數差額之總數,必等於零。今附圖例以證之。

(圖 48)

設圖中 KM_1, KM_2, 與 KM_3 爲各事實之諸項,而 KA 爲平均數。按公式則

$$\frac{KM_1+KM_2+KM_3\cdots\cdots KM_n}{n}=KA。$$

代入法

$$\frac{(KA-AM_1)+(KA-AM_2)+(KA+AM_3)+\cdots\cdots+(KA+AM_n)}{n}$$

$$=KA,$$

$$\therefore\ KA-AM_1+KA-AM_2+KA+AM_3\cdots\cdots+KA+AM_n=n\overline{KA}。$$

又 $n\overline{KA}-AM_1-AM_2+AM_3+\cdots\cdots AM_n=n\overline{KA}$,

∴ $-AM_1-AM_2+AM_3\cdots\cdots+AM_n=0$。

觀此證,固可知各項與均數差額確為零,而又足證算術的均數,實堪為各項之代表也。

(4)算術的平均作諸項代表時之優劣:

(a)優點:——

(I)算術的平均,係由全體之現象求出者。故與事實中各項皆有至密關係,較諸其他者(如中數,衆數,)更富有代表之價值。

(II)算術的平均之計算,不外加除二法。且無需作圖或順序分類的編組,故較他數為更易。

(III)算術的平均之意義,既簡單而普通。故應用時無須解釋。

(IV)算術的平均之求法甚易,即當各項大數已知,而各項之細數不明時,亦可求出。例如僅知中國每年進口及本國自製紙煙之總數,即可以人口數除之,而得每人銷費紙煙之平均數。按諸實際吾人並非知個人實銷之數。此亦為算

學的均數之特長。

(b)缺點:

(I) 算術的均數最大之缺點,卽在所求出之現象,往往非實際之事實。譬如各國每方哩內人口平均之密度,常有奇零小數。如爲 100.4, 其實絕無此理者。

(II) 算術的均數,對於統計者之貢獻,僅在報告一臆度的公母。若夫全體之現狀或趨勢,則絲毫不能表出。

(III) 算術的均數係將全部事實雜糅一處,任求其均數。對於目前所硏究問題之現狀,固無從表現; 對於將來此項事實之趨勢, 亦難於推測。假定某事實中 4 的現象有十個, 70 的現象有一個。今若以此種均數法求之,則得 10。試問此求出 10 數,與本問題之事實有表示何等現狀之作用。至若將來之趨勢,更莫可言。

(b)觭重的平均數 (The Weighed Average or Mean)

(1) 意義　畸重的平均數者，非若普通均數之單簡。乃將各項事實中 (items) 之重量 (weights) 乘原項，以其結果相加，最後再以項數除得其均數也。故其計算方法，自較前稍繁。

(2) 計算法

令諸項爲 $x_1, x_2, \cdots\cdots\cdots x_n$,

各重量爲 $f_1, f_2, \cdots\cdots\cdots f_n$,

W. A. 爲畸重平均數。

公式爲

$$W.A. = \frac{x_1f_1 + x_2f_2 + \cdots\cdots\cdots + x_nf_n}{f_1 + f_2 + \cdots\cdots\cdots + f_n}。$$

〔設例〕　某學校有學生八十七人，各生所得外國語試驗分數如下表。今以 A, B, 兩種均數法，求得其普通之現象。

學生姓名	分數	各組分數學生數	每組學生數設爲 1
張王………等	66.0	9	1
吳陳………等	58.5	10	1
劉蔣………等	56.9	17	1
江沈………等	52.3	14	1
金林………等	53.4	7	1

趙任………等	63.7	10	1
呂戈………等	64.8	4	1
彭朱………等	62.0	10	1
余許………等	51.7	6	1
均　數	……	58.4	58.8

(表 41)

上表第三欄所得之均數，卽觭重平均數。係以各組分數乘各組之學生數，然後以其所有學生總數除得者。其算法如下:——

$$\frac{9(66.0)+10(58.5)+\cdots\cdots\cdots\cdots+6(51.7)}{9+10+\cdots\cdots\cdots\cdots+6}=58.4。$$

上表第四欄所得之均數，係一算術的均數。僅將組數除分數總數而得者。其算法如下:——

$$\frac{66.0+58.5+\cdots\cdots\cdots\cdots+51.7}{1+1+\cdots\cdots\cdots+1}=58.8。$$

(3) 觭重的平均作諸項代表時之優劣:

(a) 優點:——

(I) 觭重的平均數對於事實的表現，有時較更精確。譬如某工廠調查工作的統計時，非用此種均數不可。假令有男工三百人，女工二百人，童

工百人。每日出產有六百件。今若統計其工作,決不可由 $600\div(300+200+100)$,而得每人日製一件之結果。蓋男工一人工作效率設為 1,* 女工工作效率僅等於$\frac{3}{4}$,* 童工工作效率僅等於$\frac{1}{2}$。* 茲混同計之,求得算術的均數。是違反單位 (units) 統一之原則,故不足表示公允的現象。茲若以男工為工作單位,則當按觭重均數法求之。如

$$\frac{600}{(300\times1)+(200\times\frac{3}{4})+(100\times\frac{1}{2})}=$$

$$\frac{600}{300+150+50}=1\frac{1}{5},$$ 此卽每日工作效率。

學者閱此,對於觭重均數之優點,庶不難於了解也。其他諸優點及缺點皆與前同。

(C) 幾何的平均數 (The Geometric Average or Mean)

(1) 意義　幾何的平均數者,卽將 n 項相乘之積,而求其 n 次根也。

(2) 計算法　茲揭其公式於下:

* 此等比率,係從經驗上而得,非任意定之者。

令 g 爲幾何的平均數，

$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots$ 爲諸項之數，

n 爲項數，

$$g = \sqrt[n]{x_1 x_2 x_3 \cdots\cdots x_n}。$$

〔設例〕 譬如鐵機彩緞之市價，各年不同。民國九年時每尺二元，十年時價三元，十一年時價四元，今求其幾何的均數，爲

$$\sqrt[3]{2\times3\times4} = \sqrt[3]{24} = 2.89。$$

此外尚有一計算之簡便方法，即利用對數也 (logarithms)。其手續分三層：(1) 查出各數之對數；(2) 查出各組對數之算術的平均數；(3) 查出此算術的均數相對之數目 (the number corresponding to the arithmetic mean of the original series of measures)。此即原數之幾何的均數。今復示其公式於次，以供學者之參考：——

$$\log Mg = \frac{\Sigma \log x}{N}。$$

(3) 幾何的平均數之特點，及其作諸項代表時之

優劣：幾何的均數之優點，在表示增進之平均率時 (the averaging rates of increase)，較爲確當。其缺點亦僅在計算較煩。對於數學無研究者，常厭其難，而不易領悟也。其餘優劣諸點同前。至於幾何的均數之特性，卽其數較算術的均數稍小，學者試察上例卽明矣。

(D) 倒數平均數 (The Harmonic Average or Mean)

(1) 意義　倒數平均數者，卽其各組所有數目倒數之算術平均數之倒數也。(The harmonic mean is the reciprocal of the arithmetic mean of the reciprocals of the individual measures of the series) 此意義乍見之，覺甚冗贅含糊。今若參閱下列作法與設例，諒不難解悟。

(2) 計算法　茲揭其公式於次：

令　H＝倒數平均數，

N＝組數或級數，

x＝各數＝$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots\cdots\cdots$。

公式爲

$$\frac{1}{H}=\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{X}\right)。$$

或為

$$\frac{n}{H}=\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdots\cdots\cdots。$$

〔設例〕　美國某校曾以學生五人，在一定時間內作代數演題之測驗，其結果如次:——

每分鐘算成之題數	每分鐘算成題數之倒數	算成每題所需之分數
A生…………12	.08333	5
B生…………10	.10000	6
C生………… 8	.12500	7.5
D生………… 6	.16667	10
E生………… 4	.25000	15
5)40(8	5).72500(.1450	5)43.5(8.7秒
$\frac{60}{8}=7.5$ 每題平均所需秒數。此即按照算術的平均數法，以求出每題計算之速率也。	$\frac{1}{.1450}=6.897$ 此即在每分鐘算成題目之速率也。$\frac{60}{6.897}=8.7$ 每題平均所需秒數。此即按照倒數平均數法以求出每題計算之速率也。	8.7 = 每題平均所需之秒數。6.897為按照算術的平均法求出每分鐘作成題數之速率也。

(表 42)

上例即以

$$\frac{n}{H}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

公式求之,

$$H=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots\cdots\cdots\cdots}{n}。$$

代入,

$$H=\frac{\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}}{5},$$

$$=\frac{.72500}{5}=.1450。$$

再以此數除一分鐘得每分鐘內算成題目之速率 $\frac{1}{.1450}=6.897$。

再以此數除六十分鐘得每題算成所需之秒數,

$$\frac{60}{6.897}=8.7。$$

(3) 倒數的平均數作諸項代表時之優劣。 倒數的平均數之特長,即在表現時間之平均率 (the averaging time rates)。其他優劣諸點,均同前。

第二節　中數

(1) 意義　中數者 (median), 即將所有事實之現象, 順序排列, 擇其上下兩方相等之中間者而言也。

(2) 計算法　中數之計算法甚多。大別之, 約有六種:

第一法　爲$\frac{n+1}{2}$=中數。

〔設例〕　某校常識測驗之結果如下; 今以此法求其中數。

學生姓氏	張	王	李	趙	江	沈	韓	楊	陳	朱	葉	吳	彭	許	秦
作正題數	6	7	10	11	4	13	7	3	10	12	13	5	5	11	10

(表 43)

該表係任意排列, 不加思考而成者。(at random) 故稱曰粗表, 或原始表。但計算中數法之初步手續, 仍須按各生所作正題數目之多寡, 順序排列。其表式如下:

學生姓氏	作正題數
楊…………	3

江…………	4
吳…………	5
彭…………	5
張…………	6
王…………	7
韓…………	7
李…………	10
陳…………	10
秦…………	10
趙…………	11
許…………	11
朱…………	12
沈…………	13
葉…………	13

(表 44)

上表係順作對題多寡而排列者,故名曰成表。茲再引用公式,以求其中數。

學生總數 $=15$,

$$\frac{n+1}{2}=\frac{15+1}{2}=8。$$

由是第八位李生,即爲中央之學生。其所作之題數(10),即爲中數。

第二法 卽當事實項數爲偶數時,仍用$\frac{n+1}{2}$公式。惟其中數$=\frac{n+1}{2}=x.5-.5=x$。

〔設例〕 假令某校某級學生爲十六人,則其表(第二表)應如下:——

計算中數表

學生姓氏	作正題數
楊…………	3
江…………	4
金…………	4
吳…………	5
彭…………	5
張…………	6
王…………	7
韓…………	7
李…………	10
陳…………	10
秦…………	10
趙…………	11
許…………	11
朱…………	12
沈…………	13
葉…………	13

(表 45)

按上表之現象，引用公式則爲，

$$\frac{n+1}{2}=\frac{16+1}{2}=8.5-5.=8。$$

去 .5 以第八位韓生所作正之題數 (7)，或從下向上之第八位李生所作正之題數(10)，爲中央數。

第三法　亦當事實項數爲偶數時，仍用 $\frac{n+1}{2}$ 公式。惟其中數之求法，應如是；$\frac{n+1}{2}=x.5+.5=x+1$。

〔設例〕　例同上，公式應爲，

$$\frac{n+1}{2}=\frac{16+1}{2}=8.5+.5=9。$$

由是則知自上向下之第九位李生所作正題之數(10)，或自下向上之第九位韓生作正之題數(7)爲中數。

第四法　亦當事實項數爲偶數時，則用此公式 $\frac{n+1}{2}=x.5$. 然後將自上向下之 x 項所得數，加於自下向上之 x 項所得數，復以 2 除其和，遂得中數。

〔設例〕　仍上例，卽將自上向下之第八位韓生所作題數(7)，與自下向上第八位李生數(10)相

加,再以 2 除之,乃得中數 8.5。

第五法　當事實現象為連續時,如欲求其最合宜之中央位置,則應將事實現象間之距離顯出。譬如上例得十題正對者有三生,但此三生實際答案之程度,必仍有高低多寡之殊。假令李生對 10 題,而陳生對 10.45,秦生對 10.9,今特簡括之為皆正 10 題。倘若為精確起見,則應照第五法以表現各數之距離。其計算法見下例:

〔設例〕　假令某校常識測驗結果如下表:

中數計算表

學生姓氏	作正題數
陳…………	3
吳…………	4
周…………	4
鄭…………	5
張…………	5
呂…………	6
王…………	6
秦…………	6
倪…………	7
任…………	7
何…………	7

朱…………	8
程…………	9

(表 46)

今爲求較真確之中數，特重組之如下表：

中數計算表

作正題數	學生數
3——4	1
4——4.5	1
4.5——5	1
5——5.5	1
5.5——6	1
6——6.2	1
6.2——6.4	1
6.4——6.6	1
6.6——6.8	1
6.8——7	1
7——$7.33\frac{1}{3}$	1
$7.33\frac{1}{3}$——$7.66\frac{2}{3}$	1
$7.66\frac{2}{3}$——8	1
8——9	1
9——10	1

(表 47)

就上表可得其中數爲 6.4－6.6 之間(用第一法求者)。若精細核之，則其中點數應爲 6.5 (用第四法求者)。玆復爲簡便起見，而得下列一法。

中數計算表

作正題數	學生數
3－ 4	1
4－ 5	2
5－ 6	2
6－ 7	5
7－ 8	3
8－ 9	1
9－10	1
N	15

(表 48)

代入公式$\frac{n}{2}=\frac{15}{2}=7.5$。

由學生數欄向下數，

7.5＝1＋2＋2＋(6－7 之五個分數之) 2.5。

從此知中點數必在 6 之上及由 6 至 7 之$\frac{2.5}{5}$，

故中點數 $=6+(6-7$ 之$\frac{2.5}{5})$，

$=6+(1\text{之}\frac{2.5}{5})$,

$=6+.5$,

$=6.5$。

第六法　此法係慨雷(Kelley)氏所創者。其計算之手續,不外從第五法而變成者。玆揭其公式如下:

設 $n=$ 數量之總數,或各組次數之和,$\frac{n+1}{2}$ 爲數量所在之組,若 $\frac{n+1}{2}$ 數量在二組之中間時,卽以二組之鄰界爲中點數,勿再推算。

設　$f=$ 此組之次數,

$i=$ 組間距離,或中點數組所佔之距離,

$F=$ 在此組以下(或以上)各組次數之總數,

$V=$ 此組低界限(或高界限)之價值,

$M=$ 中點數之價值,

則　$$\mathbf{M}=\mathbf{V}+\frac{\frac{\mathbf{n}}{2}-\mathbf{F}}{\mathbf{f}}\mathbf{i}$$ (從下向上數,卽從小數值向大數值數。)。

又　$$\mathbf{M}=\mathbf{V}-\frac{\frac{\mathbf{n}}{2}-\mathbf{F}}{\mathbf{f}}\mathbf{i}$$ (從上向下數。)。

用此二式求中點數,其值自相等。茲以上例代入此公式則,

$n=15,$

中點數組為6−7題,

$f=5,$

$i=1.00,$

$F=5,\quad (1+2+2),$

$V=6.00。$

按公式

$$M=6.00+\frac{\frac{15}{2}-5}{5}1.00=\mathbf{6.50}。$$

此係由下向上數之中點數。

若反是,自上向下數時則,

$n=15,$

$f=5,$

$F=5,\quad (1+1+3),$

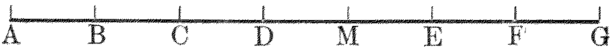
$i=1.00,$

$V=7.00,$

按公式

$$M = 7.00 - \frac{\frac{15}{2} - 5}{5} 1.00 = 6.50。$$

(3) 特點　中數者，即距離全體各項數最近之點也。(當順數排列時。) 易言之，即各項對於中數比差之和，當爲最小。玆特舉下圖，以說明之。



(圖 49)

設 AB, AC, AD, AM, AE, AF 與 AG 爲順序排列之七項，

AM 爲中數，

各項與 M 點比差之總數，等於 BM+CM+DM+ME+MF+MG。

今任取一項 AE，則其與各項之差爲，

(BM+ME)+(CM+ME)+(DM+ME)+ME+(MF−ME)+(MG−ME)=BM+CM+DM+MF+MG+2ME。

由是知其比差較與中數者多一 ME，故可證各項與中點數差之積爲最小。

〔設例〕　今於下列九家庭內求其人數之中數，并各

項與中數之比差。

中數計算表

家庭	人數
張家	2
李家	4
吳家	5
陳家	7
錢家	8
許家	9
任家	10
秦家	11
何家	13

(表 49)

按公式$\frac{n+1}{2}=\frac{9+1}{2}=5$,

由是錢家之人數8,卽爲中數。

今再依其特點而引證之,

各家與錢家中數之差積$=6+4+3+1+(-1)+(-2)+(-3)+(-5)=3$。

設任取秦家而求其與各家之差積 $=9+7+6+3+2+1+(-2)=26$。

再以吳家而求各家之比積 $=3+1+(-2)+(-3)+(-4)+(-5)+(-6)+(-8)=-24$。

從此可證明各項對於中數之差積，必爲最小也。

(4) 中數爲諸項代表時之優劣：

(a)優點：——

(I) 中數最大之長處，卽當代表諸項時較更正確。譬如平均數，其效用雖可作抽象均衡的代表，但常有失真之流弊。況當兩端中若有一二距離或差額特殊之數，則影響全局，必匪淺鮮。至若中數，乃順序排列，有顯明事實實際分配現象之特長。故對於工資及財富分配的統計上，功效尤著。

(II) 中數之計算法最稱單簡。

(III) 中數之計算，對於兩端之極數，無若何之關係。故計算時又多一種便利也。

(b)缺點：——

(I) 中數最大之缺點亦與平均數同。有時所求出者，全屬理論的，抽象的，不切實用。

(II) 中數之計算法，雖較簡便，但事前仍不免整

理排列之煩。

(III)中數之應用,對於兩端各項之重量(weight),每不能表示。

(IV)中數之應用,當不連續(discrete series)數量時,最宜審愼。常有因分組不當,對於各項間之距離(interval)忽落,使求得中數,不足爲他項代表。此亦中數缺點之一也。

第三節　衆數

(1)意義　衆數者(mode),卽指一事實各現象中之常見,或最普遍者而言也。故亦名範數。譬如南京戶籍之調查,以每戶人口在四人者爲最多,則此等家庭,卽爲南京之代表的家庭(modal family; representative family)。又若上海某年夏季疾病之統計,以患腸窒腹斯而死者爲最衆,故此種病卽稱曰流行症(modal disease)。再若民國八年夏季草帽營業的統計,以大東公司所製博士式草帽之銷路爲最廣,在是年大東草帽卽爲最時的草帽(fashionable or modal hats)。由是可知衆數者,乃事實中常現之事實也(the common thing)。

(2) 擇定法與計算法:

(a) 衆數之擇定法　衆數擇定法可分兩種: (1) 在歷史的級數事實擇定法 (The Location of the Modal in Historical Series), (2) 在次數的級數事實擇定法 (The Location of the Modal in Frequency Series)。

(I) 在歷史的級數事實擇定法　茲舉實例以說明之。

上海某錢鋪歷年營業統計

(順序排列以求出衆數)

年分	營業數量	設各數爲一	按數集爲千別合組	按數集爲萬別合組
1915	100,000元	1	2	5
1916	100,000	1		
1917	101,000	1	3	
1918	101,100	1		
1919	101,000	1		
1920	120,000	1	1	2
1921	121,000	1	1	
1922	118,000	1	1	2
1923	117,050	1	1	

(表 50)

觀上表從第一欄知各個年份, 第二欄知各年營

業數量，第三欄假設各數爲一，第四欄係按千元數别集成各組者。今於此欄中，得諳某錢鋪逐年營業之數量，以在十萬零一千元之譜者爲最多，斯卽其衆數也。再查第五欄係按萬元數別而分組者，於茲欄內又可見其營業數量在十萬元左右之組數得 5 組，在十二萬元上下者有 2 組，在十一萬元之譜者亦祇有 2 組，故知此次統計之衆數，卽在十萬元之譜。

(II)在次數的級數事實擇定法　茲仍用實例，以說明其方法。

1922 年某醫院目疾的統計

(順序排列以求出衆數)

月份	患病者人數					
1	48	100				
2	52		108	156		
3	56	116			168	
4	60		122	182		178
5	62	122				
6	60		118		180	
7	58	114		177		
8	56		119			174
9	63	123				
10	60		108		179	
11	48	88				171
12	40			148		

(表 51)

按上表次數欄第一行，知衆數在 9 月或 10 月，因其列入該組次數爲 123，係第二欄中之最大者。若查第三欄中衆數，在 4 月或 5 月。餘欄類推之。

又 例

某中學投考新生所得英文分數之統計

（分組排列，以求衆數。）

所得分數	考生數	所得分數	考生數
5分至7分者	10	21至23者	45
7至9者	17	23,,25	31
9,,11	35	25,,27	12
11,,13	56	27,,29	3
13,,15	47	29,,31	3
15,,17	108		
17,,19	74		
19,,21	73	總計	514人

（表 52）

查上表知得15分至17分之學生爲最衆，此卽本統計之衆數。但此數僅可爲衆數之範圍，確非真正的衆數。其計算之法見後。

(b) 衆數之計算法

第一法　此法爲最簡便而常用者。茲示其公式於下：

$$\text{衆數} = \text{平均數} - 3(\text{平均數} - \text{中數}),$$

簡寫之，

$$Mo = A - 3(A - M)。$$

此公式爲皮爾生 (Pearson's Empirical Rule) 多年經驗所得者，其結果極爲近似。有時雖或較真正衆數(the true mode)，稍有出入，但確足供統計之用。故晚近一般統計者，每採用之。兹取一例，以證明其確度。

漢口某商店工資統計

(按多寡順序排次)

店夥姓名	工資數	店夥姓名	工資數
張　成	5元	朱　益	15
李　璧	7	柏　眞	16
吳　興	9	黃　靈	16
陳　仁	10	秦　忠	18
周　祺	10	盧　志	19
許　廣	10	馮　發	22
王　和	12		
		總 13人	169元

(表 53)

從上表知其平均數(A)$=\frac{169}{13}=13$,

中數(M)$=\frac{13}{2}=$第7項,

即$=12$,

代入公式

衆數(Mo)$=13-3(13-12)=10$。

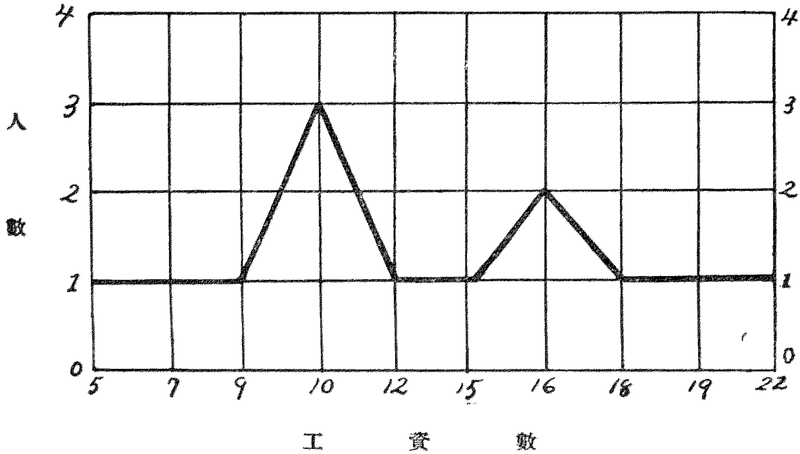
今用實際排列法或圖表法，以求其真正衆數。

漢口某商店工資統計

各種工資	每種人數	次數
得 5元者	1	1
,, 7,,,,	1	1
,, 9,,,,	1	1
,,10,,,,	111	3
,,12,,,,	1	1
,,15,,,,	1	1
,,16,,,,	11	2
,,18,,,,	1	1
,,19,,,,	1	1
,,22,,,,	1	1

(表 54)

漢口某商店工資統計圖



(圖 50)

據以上圖表,知該統計之衆數,確爲 10 元者。今若以之與皮爾生氏公式求得之結果相較,殆無有異焉。

第二法　此法爲求連續事實現象之近似衆數者。其公式如次:

令　L=衆數所在組中之最低限,

i=組間距離,

f_1=衆數所在組下方事實之項數,

f_2=衆數所在組上方事實之項數，

Mo=衆數，

則公式：

$$Mo = L + \frac{f_2 i}{f_2 + f_1}。$$

今應用此公式，以計算前頁某中學投考新生所得英文分數一例則：——

$$L = 15,$$

$$i = 2,$$

$$f_1 = 47,$$

$$f_2 = 74,$$

則 $$Mo = 15 + \frac{74 \times 2}{74 + 47},$$

$$= 15 + \frac{148}{121},$$

$$= 16.233\cdots\cdots。$$

(3) 衆數作諸項代表時之優劣：

(a) 優點：——

(I) 衆數最大優點，即在作諸項代表時，確有可靠之價值。例若某省戶口統計，按其算術的平均數，得

每家 $4\frac{1}{4}$。此數僅屬算學的意味，實不足爲該省家庭人數的代表。至於衆數一層，則得 4 人，此數既有代表該省戶口一般的現象之價值，且較他數（如中數，平均數等）爲更切實際也。

(II) 衆數之計算與擇定，係由其集中事實之一部份而求出者。對於上下兩端之極數，每不生若何之關係。

(III) 衆數之選擇，如從精密分組中求出者，其確度亦甚高。

(IV) 衆數之計算法，有時甚易，僅在察其次數 (frequency) 之多寡而已。

(b) 劣點：

(I) 衆數雖足爲一般事實之代表，但有時因分組方法變更，而使衆數亦隨之大改。是其確度，遠不如平均及中數之穩定也。

(II) 衆數計算法有時雖較容易，但事前猶難免排列組合之煩。苟事實爲不連續的，則仍須用較繁複之算法，以核計之。

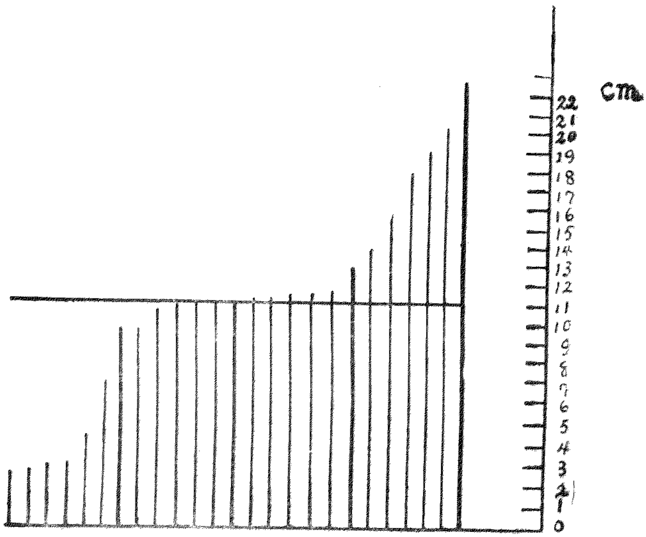
(III) 在現象複雜時，分組之法有幾種。而衆數亦隨之有幾個。吾人應用上，苟一不愼，則結果大錯。此亦其缺點也。

(IV) 衆數之用途，縱可表示事實大體的現象。惟對於兩端極限事實之重 (weight)，完全忽落，亦屬缺點。

第四節 百分點

(1) 意義　百分點者(percentile)，卽將全體事實總數區爲百份，而指定各點也。如中數 (median) 之上下兩方總積，均等於$\frac{50}{100}$，故亦稱之曰 50 百分點 (50 percentile)。再若當中點數與上下兩方極數 (extremes) 之中央點，名曰 25 百分點 (25 percentile)。又名四分差 (quartile)。其在上方者，爲 75 百分點，稱曰上百分點。常以 (U. Q. 或 Q_3) 代之。其在下方者，爲 25 百分點，稱曰下百分點。常以 (L. Q. 或 Q_1) 代之。在上百分點以上之數量，當有其以下數量三分之一。反是，在下百分點以上之數量，當等於其下數量之三倍。今舉圖例，以示明之:

25張栗樹葉之長度



Q_1	Median	Q_3
$10\frac{1}{5}$	11	$12\frac{3}{5}$

(圖 51)

學者細察此圖例,對於百分點之意義,及在 Q_1 以上之積＝在 Q_1 以下數之三倍;在 Q_3 以上之積＝在 Q_3 以下數之 $\frac{1}{3}$,諒不難於解悟也。

(2) 計算法　茲揭其公式於下:

設　　P＝百分點,

P_p＝百分點之值，

V_p＝含有百分點組低界限之值，

F_p＝含有百分點組以外次數之和，

N＝次數，

f_p＝含百分點組中之數量次數，

i_p＝組距數量，

則：

$$\mathbf{P}_p=\mathbf{V}_p+\frac{\frac{\mathbf{P}}{100}\mathbf{N}-\mathbf{F}_p}{f_p}i_p。$$

〔設例〕 某校有學生一百二十三人，本學期英文考試成績如下；今引用此公式以求其 25 百分點 (L. Q.)。

123 名學生英文成績

分數	人數
20——25	1
25——30	0
30——35	1
35——40	1
40——45	2

45——50	2
50——55	3
55——60	9
60——65	7
65——70	10
70——75	19
75——80	31
80——85	21
85——90	13
90——95	2
95——100	1
總　　計	123

(表 55)

代入公式,

$$P_p = 65 + \frac{\frac{25}{100} \times 123 - 26}{10} \times 5,$$

$$= 65 + \frac{4.75}{10} \times 5,$$

$$= 65 + 2.375,$$

$$= 67.375。$$

今若求其 75 百分點 (U. Q.) 則:

$$P_p = 80 + \frac{\frac{75}{100} \times 123 - 86}{21} \times 5,$$

$$= 80 + \frac{6.25}{21} \times 5,$$

$= 80 + 1.49$,

$= 81.49$。

(3) 功用　百分點之功用，在統計上比較爲少。但要言之，有時亦可表示全部事實分配之現象，而顯明集中之趨勢也。

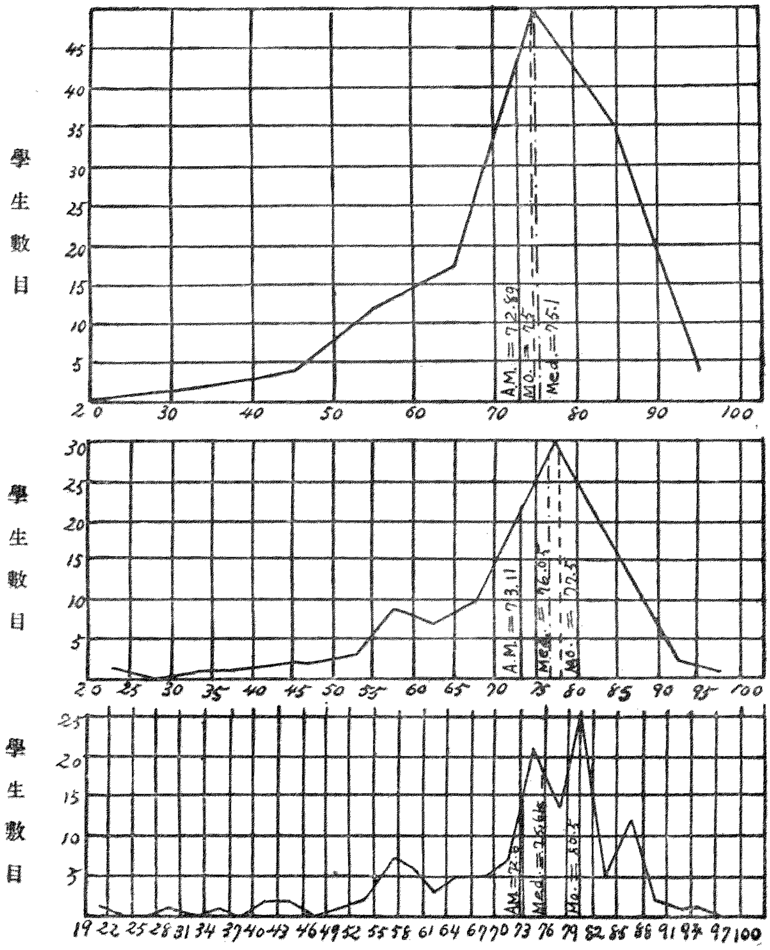
1. 附平均數中數及衆數之性質與功用比較表

平均數	中數	衆數
當數量察覺後，易於計算。	當事實排列就緒後，顯而易見。	當事實之次數分配未勻時，不易規定。
最便於數學的計算。	較爲不便。	較爲不便。
關於一二特殊事實，影響全體者甚大。	全體對於特殊之事實，絕無影響。	全體對於特殊之事實，毫無影響。
確度最高。	確度不及平均數。	確度更不及中數，每因分組方法不同，而隨之變動。
幾何的均數及倒數的均數對於一般人，較難解悟其意義。	意義易於了解。	意義易於了解。
因受極端數量或不合理數量之影響，其功用輒不及中數與衆數。	因受極端數量之影響甚小，故常不足以作代表數量。惟當極端數有不近情理時，謀減少其謬誤之效力，則以中數爲代表較宜。又當數量愈多，次數分配愈近對稱時，則中數之價值愈可靠。殆直與平均之值甚相近似耳。	因完全不受極端數量之影響，常於事實中現象最多處，以求代表之數量。

(表56)

2. 附錄平均數中數及衆數之分配圖數則以供學者之參考

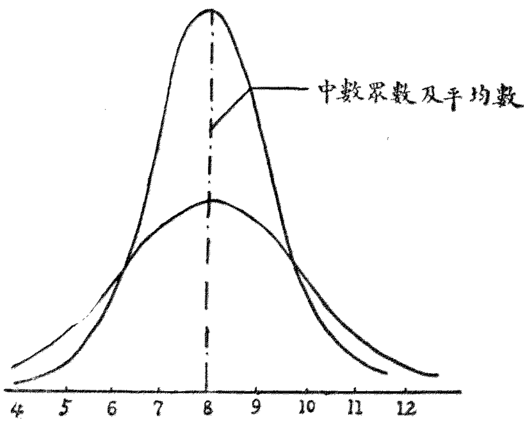
美國某校 123 學生英文成績



(圖52)

A.M.……算術的平均 MO.……衆數 Med.……中數

理想的事實曲線分配圖



(圖 53)

摘　　要

1. 平均數

I. 平均數之意義　平均數者，事實全體中均衡之現象也。

II. 平均數之種類　其種類有四:

A. 算術的平均數。

(1) 意義　即以事實各項數量相加，而以項數除之，即得算學的平均。

(2) 算法

(a)普通計算法

$$A = \frac{X_1+X_2+X_3+\cdots\cdots X_n}{n},$$

$$或 = \frac{\Sigma X}{n}。$$

(b)簡便計算法

$$A = A.Av + \frac{\Sigma d^*}{n}。$$

(3)特點　即全體事實與均數皆有多少之關係。又其與均數差額之積必爲零。

(4)作代表數量時之優劣。

(a)優點有四:

(I)有代表全體之價值,

(II)僅需算術的手續,

(III)意義淺明,

(IV)有時從已知之一部,而推測全部。

(b)劣點有三:

(I)有時求出者非實際的現象,

(II)不能表示全體現狀與趨勢,

* d = deviations from assumed average 即各項與假定均數之差額。

(III)更不能表示事實將來的傾向。

B. 畸重的平均數

(1)意義　卽注重事實之重(weight)，而求其均衡之現象。

(2)算法

$$W.A.=\frac{x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+\cdots\cdots x_nf_n}{f_1+f_2+\cdots\cdots+f_n}。$$

(3)作代表數量時之優劣:

(a)優點及劣點與前同。惟更能表示各項之重，是尤其特性。

C. 幾何的平均數

(1)意義　卽將n項相乘之積，而求其n次之根。

(2)算法

$$g=\sqrt[n]{X_1X_2X_3\cdots\cdots X_n}$$

(3)作代表數量時之優劣:

(a)優點及劣點，除表示事實之增進平均率較更精確外，餘皆同前。

D. 倒數平均數

(1) 意義 即將各組所有數目倒數之算術平均的倒數也。

(2) 算法 $\frac{1}{H}=\frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$,

或 $H=\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\cdots\cdots}{N}$。

(3) 作代表數量時之優劣:

(a) 優點及劣點除表現時間之平均率外,餘同前。

2. 中數

(1) 中數之意義 即當事實之中位點也。

(2) 中數之計算法有六種:

A. $M=\frac{n+1}{2}$。

B. $M=\frac{n+1}{2}=x.5-.5=x$。

C. $M=\frac{n+1}{2}=x.5+.5=x+1$。

D. $M=\frac{n+1}{2}=x.5$。

E.　$M=\frac{n}{2}$。

F.　$M=V\pm\frac{\frac{n}{2}-F}{f}i$。

(3) 中數之特點　中數者爲距離全體各項數最近之點也。

(4) 作代表數量時之優劣:

(a) 優點:——

(I) 有時能代表事實具體的現象,

(II) 易於計算,

(III) 當事實現象無確切單位時,惟中數可表示其現象,

(IV) 對於兩端極數無關,故稍疏忽,亦無妨礙。

(b) 劣點:——

(I) 有時中數全屬理論的,

(II) 有整理排列之難,

(III) 不能表示兩端極數之重,

(IV)每因分組錯誤,而使間距不勻,則失代表之資格。

3. 衆數

(1) 衆數之意義 衆數亦名範數。故其意義,即在表示事實之常見,而可爲全體模範者。

(2) A. 衆數擇定法分二種:

(a) 在歷史的級數擇定法。

(b) 在次數的級數擇定法。

B. 衆數計算法分二種:

(a) $Mo=A-3(A-M)$。

(b) $Mo=L+\frac{f_2 i}{f_2+f_1}$。

(3) 衆數作全體代表數量時之優劣:

A. 優點有四:——

(1) 有代表實際現象之資格,

(2) 從集中一組求出者,顯而易見,

(3) 分組愈繁,確度愈高,

(4) 計算甚易。

B. 劣點有四:——

(1) 因受分組變動之影響,確度不定,

(2) 當不連續事實時較爲煩瑣,

(3) 當分組時,稍一不愼,卽生謬誤。

(4) 對於極端數量,漠不相關,是亦缺點。

4. 百分點

(1) 百分點之意義　百分點卽將全體事實分作百分,而指定各點也。

(2) 百分點之計算法如下:

$$P_p = V_p + \frac{\frac{P}{100}N - F_p}{f_p} i_p \text{。}$$

(3) 百分點之功用　在表示全部事實分配現象,及其集中之趨勢。

問　題

1. 試設例以說明各種平均數之作用(題由教師指定,或由學者自設)。

2. 求下列二表之中數,衆數,及上下百分點。

某大學學生每月用費分配表

費額	人數
$ 25	106
20	110
15	115
10	122
5	20

(表 57)

144 位專門學校教員月薪分配表

月薪數	人數
$ 135.00——140.00	1
130.00——134.99	3
125.00——129.99	4
120.00——124.99	4
115.00——119.99	2
110.00——114.99	10
105.00——109.99	7
100.00——104.99	26
95.00——99.99	8
90.00——94.99	16
85.00——89.99	22
80.00——84.99	15
75.00——79.99	15

70.00—— 74.99	5
65.00—— 69.99	4
60.00—— 64.99	2
總　數	144

(表 58)

3. 試設實例,以比較中點數之各種計算法。

4. 按下表之事實,求答諸問:

(1) 計算早中晚三餐用費之算術的平均數。

(2) 求三餐用費之中點數。

(3) 求三餐用費之衆數。

某城男女三餐用費表

用費別(以分爲單位)	三餐及男女數											
	總計			早餐			中餐			晚餐		
	總	男	女	計	男	女	計	男	女	計	男	女
總計	6843	2897	3946	836	359	477	3235	1391	1842	2774	1147	1627
3至7	15	7	8	5	1	4	6	2	4	4	4	—
8,,12	188	64	124	84	25	59	57	12	45	47	27	20
13,,17	516	150	366	252	91	161	183	39	144	81	20	61
18,,22	763	230	533	220	87	133	356	98	258	187	45	142

23,,27	982	343	639	134	65	69	552	186	366	296	92	204
28,,32	849	345	504	70	42	28	497	211	286	282	92	190
33,,37	672	315	357	34	25	9	350	179	171	288	111	177
38,,42	758	334	424	19	11	8	336	174	162	403	149	254
43,,47	702	351	351	14	12	2	297	164	133	391	175	216
48,,52	563	307	256	2	—	2	224	120	104	337	187	150
53,,57	407	223	184	1	—	1	159	89	70	247	134	113
58,,62	179	106	73	—	—	—	77	47	30	102	59	43
63,,67	100	49	51	—	—	—	60	29	31	40	20	20
68,,72	75	37	38	—	—	—	38	23	15	37	14	23
73,,77	36	16	20	—	—	—	18	7	11	18	9	9
78,,82	17	11	6	—	—	—	9	5	4	8	6	2
83及以上者	21	9	12	1	—	1	14	6	8	6	3	3

(表 59)

5. 設知平均數爲 86.495，中數爲 87.690，試求衆數之值。

6. 試按本城本月逐日溫度最高者，以求其中數，及衆數。

7. 試調查本城或本省人民財富狀況，以求其衆數。

8. 試根據本地戶籍調查册，以求其中數，及衆數。

9. 試求本級學生年齡之中數，及衆數。

10. 試取實例,以比較平均數,中數,及衆數之功用。

參考書

1. Kelley, T. L.: Statistical Method, Chap. III, pp. 44–69.
2. McCall, W. A.: Teachers College Record, Vol. 2. 1. No. 2.
3. Jones, D. C.: A First Course in Statistics, Chaps. IV and V, pp. 22–41.
4. Yule, G. U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Chap. VII, pp. 106–132.
5. King, W. I.: The Elements of Statistical Method, Chap. XII, pp. 121–140.
6. Elderton, W. P. and E. M.: Primer of Statistics, Chaps. I. and II, pp. 1–22.
7. Bowley, A. L.: Elements of Statistics, Chaps. V, and VI, pp. 107–143.
8. Bowley, A. L.: An Elementary Manual of Statistics, Chaps. III and IV, pp. 15–35.
9. Rugg, H. O.: Statistical Methods Applied to Education, Chap. V, pp. 97–148.
10. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chap. VIII, pp. 234–293.

11. Secrist, H.: Statistics in Business, Chap. VI, pp. 97-111.

12. Secrist, H.: Readings and Problems in Statistical Methods, Chap. VII, pp. 318-349.

13. Copeland, M. T.: Business Statistics, Chap. I, 19-29.

第十二章　論差量

夫物之不齊，物之情也。故統計之工作，除從大量事實中發現其共相外，猶須就彼此不同之現象間，而求其差量也。

第一節　差量之意義及類別

差量者 (dispersion or variability)，即於一組事實中 (within a given group)，而求其各項相互之差異數量也。差量有兩種：一曰絕對的差量 (absolute dispersion)；一曰比較的差量 (relative dispersion)。

第二節　差量之量數及係數

差量之量數者 (measures of dispersion)，即在各事實中求其絕對的差量。差量之係數者(co-efficients of dispersion)，即在二種測量中求其比率。(如標準差與平均數平均差，四分差與中點數，各有相當之比率是。)

第三節　差量及係數之算法

差量測算法有四種:(A)距離,(B)四分差,(C)平均差,及(D)標準差。差量之係數,測算法有一種:(E)差量係數。

A. 距離(Range)

(1)意義與算法　距離爲表明次數或時間分配(frequency or time distribution)現象中差異之最簡便方法。卽將二端數目(最大數與最小數)相比之數廼得之。例如某鄉成人之高度,爲自四尺二寸至六尺四寸。今按次數分配,而求其距離。則先當組成下表:

高　　度	次　　數
6.4	2
6.3.5	5
6.3	7
6.2.5	14
6.2	22
6.1.5	46
6.1	54
⋮	⋮
4.2	4

(表60)

其計算公式爲

$$Rg = x_1 - x_n \quad 或 = x_n - x_1$$

按上表求其距離,則爲

$$6.4 - 4.2 = 2.2。$$

茲再舉一例,以說明時間分配中所求距離之方法:

美國歷年棉花進口數量表

(以磅爲單位)

年分	次數	磅數
總計	19	1,421,152,000
1895	1	49,332,000
1896	1	55,350,000
1897	1	51,899,000
1898	1	52,660,000
1899	1	50,158,000
1900	1	67,398,000
1901	1	46,630,000
1902	1	98,716,000
1903	1	74,874,000
1904	1	48,841,000
1905	1	60,509,000
1906	1	70,964,000
1907	1	104,792,000

1908	1	71,073,000
1909	1	86,518,000
1910	1	86,037,000
1911	1	113,768,000
1912	1	109,780,000
1913	1	121,852,000

(表 61)

按時間分配以求其距離,則應改成下表:

年分	進口數	
	磅數(000省去)	百分比
1895至1913	1,421,152	100.0
1895至1900	326,797	30.4
1895至1905	656,368	46.2
1895至1910	1,075,752	75.7

(表 62)

或爲

年分	進口數	
	磅數(000省去)	百分比
1895至1913	1,421,152	100.0
1910至1913	431,437	30.4

1905至1913	825,293	58.1
1900至1913	1,161,753	81.7

(表 63)

綜觀上列兩表,可知各年度間之距離矣。吾人統計時每慮距離之變動無常，且乏集中之程度，(如小數量或大數量略減一數，則距離卽隨之而變。) 故不宜取作差異數量之代表。

B. 四分差(Quartile Deviation 或 Semi-interquartile Range)

(1) 意義與算法　四分差亦爲表明次數分配現象差量之簡便方法。其計算,係將一組事實中之上百分點數 (upper quartile 或寫作 Q_3)，減去下百分點數 (lower quartile 或寫作 Q_1)，而取其半卽得四分差(可簡寫爲 Q)。故公式爲

$$Q=\frac{Q_3-Q_1}{2}。$$

玆舉例以說明其算法:

某校學生考試算術之成績

分數	人數	分數	人數
1——5	5	36——40	79
6——10	9	41——45	50
11——15	28	46——50	37
16——20	49	51——55	21
21——25	58	56——60	6
26——30	82	61——65	3
31——35	87	總計……	514

(表 64)

按上表知其下百分點應在$\frac{1}{4}$(514)位,卽第128.5學生。今查第91位學生所得分數,概爲20分。而第149位學生所得成績爲25分。緣是迺知128.5位學生之成績,必在20至25分之間。茲用數學法,求之如下:

(149−91) 學生間之差數爲 5 分,

(128.5−91)學生間之差數必爲 $5\times\frac{37.5}{58}$,

則下百分點 (Q_1) 卽 $=20+5\times\frac{37.5}{58}$,

$=20+3.23$,

$=23.23$。

以同理求其上百分點 (Q_3) 應在 385.5 位學生，

則　$Q_3 = 35 + 5 \times \frac{67.5}{79}$，

$= 39.27$。

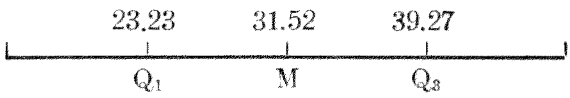
代入公式

則，　四分差　$Q = \frac{1}{2}(39.27 - 23.23)$，

$= \frac{1}{2}(16.04)$，

$= 8.02$。

學者詳察此例，當知 Q_1 之下，應佔全部數量 25%。Q_3 之上，亦佔全部數量 25%。故 $Q_3 - Q_1$ 必含有全數之 50%。因此更可推知 Q_1，Q_3 與 M 三點，必分全部爲四等分。如上例，則應成下圖：



(圖 54)

倘全體現象爲對稱的次數分配時，則 $M - Q_1 = Q_3 - M = Q$。通常事實，絕難如此。故 $M - Q_1$ 未必卽等於 $Q_3 - M$，

是非以 Q_3 減去 Q_1 所得之半數，不足表明 Q 之確度。觀上例，卽可證明。四分差之優點，在乎意義明晰，計算簡便。故當一般不須用精細數目代表時之測量，最宜用斯法。普通教育之測驗，卽其例也。

(2) 製作之次序

第一，將各數量組成次數分配表，求次數之和。如前表，$N=514$。

第二，求 Q_1 與 Q_3 之值。如例，$Q_1=23.23$，$Q_3=39.27$。

第三，求 Q 之值，卽 $\frac{Q_3-Q_2}{2}$。

C. 平均差 (Mean Deviation 或 Average Deviation)

(1) 意義　平均差數者，爲各項數量與中數，均數，或衆數，之差量之平均數。故此數對於各項事實，皆負有直接代表之關係。不似前二種之間接的，局部的可比。又各差量相加時，不計正負。否則總數以異號相抵之故，非爲零，必甚細，直無均數之可求矣。

(2) 算法　平均差數之製作，多用中數以求其差額。茲分普通與簡便兩法述之：

(a)普通法　其製作之次序如下:——

第一,組成次數分配表。

第二,按前章求中數法,求出中點之數。

第三,核查各項數量與中數之差(dM)。

第四,積成各差數之和(ΣdM)。

第五,求得各差數之平均數(即用次數除差積)。

按上述之次序,得公式爲。

$$\text{M. D. 或 } \delta_M = \frac{\Sigma(X-M)}{N},$$

$$\text{或 } = \frac{\Sigma d_M}{N}。$$

〔設例〕　例如張生旅行某地,每日行程之距離爲,

日次	里數
第一日	40
第二日	30
第三日	25
第四日	35
第五日	30
第六日	25
第七日	15

第八日	20
第九日	35
第十日	25
第十一日	20
第十二日	10
第十三日	20
第十四日	15

(表 65)

組成次數分配表後，再作第二，第三，第四，第五，諸手續，以求出其平均差。

里數 X	次數 F	距中差 d_M	二項之積 fd_M
10	1	-15	-15
15	2	-10	-20
20	3	-5	-15
25	3	0	0
30	2	$+5$	$+10$
35	2	$+10$	$+20$
40	1	$+15$	$+15$
	$n=14$		$\Sigma d_M=95$

(表 66)

$M=\frac{14}{2}=7$ 項卽為 25 里。

代入公式,

$$\delta_M=\frac{[(1\times15)+(2\times10)+(3\times5)+(2\times5)+(2\times10)+(1\times15)]}{14},$$

$$=\frac{(15+20+15+10+20+15)}{14},$$

$$=\frac{95}{14},$$

$=6.79$ 里。

(b)簡便法　當現象較繁時,每以簡便法計算之。其進行之次第如下:

第一,將各數量組成次數分配表。

第二,求次數之和及中點數。

第三,用含有中數一組之中值,爲假定中點數 (assumed median 簡寫爲 A. M.)。

第四,設各組距離爲 1,求各數與假定中數之差(d)。

第五,求各差數與次數相乘之積,(fd)。再求各積之總數(Σfd)。

第六,求實得中點數 (true median 簡寫爲 T. M.)。

第七，求更正數(correction 簡寫爲 C.)。——即查明實得中數與假定中數之差數。

第八，將在假定中數以上之各數，減去(c)；在假定中數以下之各數，增加(c)。

第九，將各數量及已更正之總積，以項數(N)除之。

第十，以真正之組距乘之，遂得應求之平均差。

按上述得公式，

$$\delta=\frac{\Sigma fd+c(Nb-Na)}{N}$$

例如求某鎮 263 戶每月進款之平均差額。今先由第一至第五各層手續，製成下表。

進款數 X	家數 f	距中差 d	二項之積 fd
55.00——60.00	18	3	54 } 77個數量
50.00——54.99	25	2	50
45.00——49.99	34	1	34
40.00——44.99	56	0	41
35.00——39.99	41	1	54

30.00——34.99	27	2	57	56+130
25.00——29.99	19	3	64	=186個數量
20.00——24.99	16	4	75	
15.00——19.99	15	5	72	
10.00——14.99	12	6		
	n=263		Σd=501	

(表 67)

$$\text{T. M.}=44.13,\qquad C=\frac{44.13-42.45}{5},$$

$$\text{A. M.}=42.45,\qquad =\frac{1.68}{5}=.34,$$

$$\text{M. D.}=\frac{501+(.34\times186)-(.34\times77)}{263}\times5,$$

$$=\frac{501+(.34\times109)}{263}\times5,$$

$$=\frac{501+37.06}{263}\times5,$$

$$=\frac{538.06}{263}\times5,$$

$$=2.04\times5,$$

$$=10.20\text{。}$$

由上表復經過第六層手續（照(B)四分差節中求算法)，求出實得中數爲 44.13。由第七求出C爲.34。由第八第九兩層手續，得其結果爲 2.04。此係以

組距爲一而求出者，故仍非正確之數。是必經第十層手續，將實在組距(5)乘之，得應求之平均差(10.20)。

再上列所述之法，係以中點數爲比較者。故計算簡易而應用普遍。且按數理上之關係，其差量亦屬最小，是尤其特長也。

玆復以均數及衆數爲比較，而求其平均差之公式，附錄於下。藉供參考：

設　X=各數量，　d=差數，

A=算術平均數，　N=項數，

從算術平均求出之平均差，其公式爲，

$$\delta_a=\frac{\Sigma(X-A)}{N}\text{ 或 }\frac{\Sigma d}{N}。$$

從衆數求出之平均差，其公式爲，

$$\delta_{Mo}=\frac{\Sigma(X-Mo)}{N}\text{ 或 }\frac{\Sigma d_{Mo}}{N}。$$

上述種種，均爲次數分配現象之事實。玆更進一例，以表明時間分配現象中所求平均差之方法。

近十年來華茶運往外洋之擔數

(單位爲千擔)

年分	擔數 X	次數 f	差 d 數 較之平均數1,066 −	差 d 數 較之平均數1,066 +	總數(符號不論)
總計	1,066(平均數)	10	2,435	2,435	4,870
民國元年	1,481	1		415	2,435
民國二年	1,442	1		376	
民國三年	1,459	1		393	
民國四年	1,782	1		716	
民國五年	1,542	1		476	
民國六年	1,125	1		59	
民國七年	404	1	662		2,435
民國八年	690	1	376		
民國九年	305	1	761		
民國十年	430	1	636		

(表 68)

代入公式則,

算術的平均差 $(\delta_a) = \dfrac{4870}{10}$,

$= 487$ 。

D. 標準差(Standard Deviation)

(1) 意義　標準差者，係由各差數（各數量與中數之差）之平方平均數中，求得之方根也。質言之，卽將各差數平方以去其負號，然後相加以得差數之總額。復用次數除之，得平方差數之平均。再開方之，卽得標準差。晚近學者有譯此爲均方差者，亦以其由平均開方而求得之故。

標準差之縮寫爲 S. D.，符號爲 σ。

(2) 算法　標準差之計算方法，亦分普通與簡便二種。玆分述於次：

(a) 普通法　其製作之次第如下：——

第一，按事實之現象，組成時間或次數分配表。

第二，求出平均數。

第三，求各數與平均數之差量（卽爲 d）。

第四，各差數平方，卽得 d^2 數。

第五，將各差數與相當之次數相乘、而得其積，卽爲 fd^2（此層有時不用）。

第六，將各差數相加，而得其總數。爲 Σd^2 或

Σfd^2。

第七，將差積除以次數，而得平方差數之平均數。即 $\frac{\Sigma d^2}{N}$，或 $\frac{\Sigma fd^2}{N}$。

第八，將所得之平均數開方，即得標準差 $\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$，或 $\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$。

按上述之次第，得公式爲，

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)。$$

或 $$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)。$$

例題仍前。

近十年來華茶運往外洋之擔數

(單位爲千擔)

年分	擔數 X	次數 f	差數 d 較之平均數1,066 −	差數 d 較之平均數1,066 +	差數 d 平方數 d^2
總計	1,066(平均數)	10	2,435	2,435	2774000
民國元年	1,481	1		415	172225

民國二年	1,442	1		376	141376
民國三年	1,459	1		393	154449
民國四年	1,782	1		716	512656
民國五年	1,542	1		476	226576
民國六年	1,125	1		59	3481
民國七年	404	1	662		438244
民國八年	690	1	376		141376
民國九年	305	1	761		579121
民國十年	430	1	636		404496

(表 69)

代入公式,

$$\sigma=\sqrt{\frac{2774000}{10}},$$

$$=\sqrt{277400},$$

$$=526.6^{+}。$$

此例為按時間分配而求出之標準差。至若次數分配中計算之法,亦復大致相同,其例見後。

(b)簡便法　倘遇事實紛繁時,則可引用此法,以省手續。其次第如下:——

第一,組成次數或時間分配表。

第二,在數量集聚最衆之處,擇出假定之平

均數(A. AV.)。

第三,求出各數與假定均數之差量(d)。

第四,將次數與差數相乘,而得其積(fd)。

第五,將此積(fd)依代數法相加,而得其和(Σfd)。

第六,以N除Σfd求更正數(C)。

(以上六層,與求平均數之簡便法相同。)

第七,以d乘fd,求出差數之平方與次數相乘之積(fd²)。再將各個fd²相加,而得其和(Σfd²)。

第八,以N除Σfd²,卽得由假定平均求出標準差之平方。

第九,減去更正數(C²),得標準差之平方(σ^2)。

第十,將σ^2開方,而得標準差數。

(但此時最宜注意組距,倘爲假定者,務以實在單位倍之,使其還原。)

按上述得公式爲,　(i=組距),

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-c^2}\times i\text{ 。}$$

玆用下例,以說明簡便之法,用某大學學生303

人目力幻覺測驗的成績，以表明由簡便法求出之標準差：

分數 m	次數 f	次差數 d	次差積 fd	次差平方積 fd^2
90.0−94.99	1	10	10	100
85.0−89.99	1	9	9	81
80.0−84.99	2	8	16	128
75.0−79.99	2	7	14	98
70.0−74.99	3	6	18	108
65.0−69.99	5	5	25	125
60.0−64.99	7	4	28	112
55.0−59.99	26	3	78	234
50.0−54.99	41	2	82	164
45.0−49.99	47	1	47	47
40.0−44.99	50	0	327	
35.0−39.99	32	−1	−32	32
30.0−34.99	31	−2	−64	124
25.0−29.99	18	−3	−54	162
20.0−24.99	16	−4	−64	256
15.0−19.99	11	−5	−55	275
10.0−14.99	3	−6	−18	108
5.0− 9.99	5	−7	−35	245
0.0− 4.99	2	−8	−16	128
	N＝303		−336	303) 2527 (8.34
			327	
			303) −9 (−.03	

(表 70)

$C=-.03,\qquad i=5,$

$C^2=-.001,$

代入　$\sigma=\sqrt{\frac{2527}{303}-(-.03)^2\times 5},$

$=\sqrt{8.34-.001\times 5},$

$=\sqrt{8.339\times 5},$

$=14.4$。

標準差之簡便計算法,除上述之十層外,尚有一法,其進行之次序如下:——

第一,排列次數或時間分配表。

第二,擇出假定平均數(A. Av. 更簡寫爲 A_A)。

第三,求出各個數量與次數之積(mf)。

第四,求出各數與假定均數之差($m-A_A$或d_x)。

第五,平方其差量($(m-A_A)^2$ 或 d_x^2)。

第六,將各差之平方,乘以次數,而得其積(fd_x^2)。

第七,將 mf 相加,而得其和(Σm)。

第八,將 fd^2 相加,而得其和(Σd_x^2)。

第九,將 N 除 Σm,而得算術的平均數(a)。

第十,將此平均數減去假定平均數,而得其差。

第十一,將此差平方,以 N 乘之。

第十二,於 Σd_x^2 減去 $N(a-A_A)^2$,復以 N 除之。

第十三,將上式開方,即得標準差。

從上述得公式為,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2 - N(a-A_A)^2}{N}}$$

舉例如次:

用 26 人行程之距離,以表明計算標準差之簡便法。

每鐘行里點進之數 m	人數 f	人與數里數積 mf	較假均差之定數量 d_x	差量平方 d_x^2	人與量方數差平積 fd_x^2
6	2	12	−3	9	18
7	4	28	−2	4	16
8	5	40	−1	1	5
9	7	63	0	0	0
10	4	40	+1	1	4
11	3	33	+2	4	12
12	1	12	+3	9	9
	N=26	Σm=228			$\Sigma d_x^2=64$

(表 71)

$$a = \frac{228}{26} = 8.77^{-},$$

$$a - A_A = 0.23^{+},$$

$$(a - A_A)^2 = 0.053,$$

$$N(a - A_A)^2 = 1.378,$$

代入公式

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2 - N(a - A_A)^2}{N}},$$

$$= \sqrt{\frac{64 - 1.378}{26}},$$

$$= \sqrt{2.4085},$$

$$= 1.55。$$

(3)特點及功用　標準差之測算，係根據全體之數量，故最公允。至於用平方法以取消負方符號，則尤合代數之理法。又計算時之手續，亦稱便捷，是皆其特點也。晚近統計家，心理試驗家，生物學家，經濟學家，每以標準差之確度較高，而用以測算差異之數量。又就多方經驗之結果，得一規則如下：

凡在對稱或偏斜不甚之次數分配現象時，其標準差之6倍數，大約包括全體數量$\frac{99}{100}$。

緣是，故可以之證明計算之正誤（但當數量過少之測量，斯種規則不能相符。），此卽其功用也。至於其他應用各方面之功效，茲不贅述。

〔附〕標準差與平均差及四分差之關係。當對稱或偏斜不甚次數分配之現象時，則

$$\delta=\frac{4}{5}\sigma$$

$$Q=\frac{2}{3}\sigma$$

但此種關係，亦必限於數量繁複之事實。反是，恐難符合。又當次數分配完全對稱時，則標準差與平均差之關係爲，

$$\sigma=1.2533\ \text{A. D.}$$

$$\delta=0.7979\ \text{S. D.}$$

E. 差量係數（Co-efficient of Variation）

(1) 意義　差量之係數者，卽求各測量差數之比率。例如標準差與平均差，平均差或四分差與中數，各有相當之比率是也。

(2) 算法　差量係數之算法，卽以皮爾生（Pear-

son）之公式求之。其式爲；

$$V=差量係數,$$

$$V=100\frac{S.D.}{mean}。$$

茲仍用前述近十年來華茶運銷外洋之數量爲例，以求其差量之係數。

$$mean=1066,$$

$$S.D.=526.6,$$

代入

$$V=100\frac{526.6}{1066},$$

$$=\frac{52660}{1066},$$

$$=49。$$

觀上例，可知此種係數，卽求出標準差與平均數之百分比率也。

(3) 功用　差量係數者，爲求比較的差異數量 (measures of relative variability) 之方法也。蓋欲比較二種測量參差之程度，斷不可僅就其絕對的 (absolute) 差異數量，直接相較。因其各種測量所用

之單位,既然不同;且其所得之結果,又復不一律,是烏可以之爲比較乎? 今若以各種測量比較的差量作比較, 則對於原用單位之種類, 大小, 均無直接間接的影響,故可得一適當之比率, 而表明其差異程度之高低也。茲請進實例,以證明之。西人皮爾(R. Pearl)及登巴 (T. J. Dunbar) 兩氏曾蒐集 504 個根足類之動物,研究其內外直徑之關係,所得結果如下:——

部　　別	平均數	標準差	差量係數
外部的……	55.79	5.73	10.27%
內部的……	15.91	2.17	13.66%

(表 72)

按上表平均數及標準差之比度觀之, 外部者實較大於內部。但若求此二種差量之比較,則又非以其係數爲測量不可。否則,各種單位未能同一, 如何相比。查表迺知其差量之係數, 內部者反較高於外部也。

摘　　要

1. 差量之意義　即於一組事實中, 求彼此相互之差

度也。

2. 差量之量數及係數　差異量數者，指其絕對的差量而言。差量係數者，指二種測量中所求出之比率而言。

3. 差量及係數之算法　共有五種:

A. 距離

(1) 意義與算法　從兩端數目比得之數，謂之距離。其算法，卽以多方之數減少方之數。

B. 四分差

(1) 意義與算法　將全體現象順次劃爲四組，各組之差，卽謂之四分差。其算法，係以上百分點減下百分點，以 2 除之卽得。

C. 平均差

(1) 意義　由各項數量與中數，均數，或範數之差量，求得之平均數，謂之平均差。

(2) 算法　有二種:——

(I) 普通法　其計算之公式爲，

$$M.\ D. = \frac{\Sigma(X-M)}{N},$$

或 $$= \frac{\Sigma d_M}{N}。$$

(II)簡便法　其公式爲,

$$\text{M. D.}=\frac{\Sigma fd+c(Nb-Na)}{N}。$$

〔附〕　從算術平均求出之平均差,公式爲,

$$\delta_a=\frac{\Sigma(X-A)}{N},$$

$$或\quad=\frac{\Sigma d}{N}。$$

從衆數求出之平均差,公式爲,

$$\delta_{Mo}=\frac{\Sigma(X-Mo)}{N},$$

$$或\quad=\frac{\Sigma d_{Mo}}{N}。$$

D. 標準差

(1)意義　從各差數之平方平均數中求得之方根,即爲標準差。

(2)算法　有二種:——

(I)普通法　其公式爲,

$$\text{S. D.}=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}},$$

$$或\quad=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}。$$

(II)簡便法　其公式爲，

$$S.\ D.=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}-C^2}\times i,$$

$$或\quad=\sqrt{\frac{\Sigma d_x{}^2-N(a-A_A)^2}{N}}。$$

(3)特點及功用　測算公允，適合術理，計算便捷，確度較高，考核正誤，皆是也。

(4)與平均差及四分差之關係。(但限於對稱及偏斜輕之次數分配現象。)

$$\delta=\frac{4}{5}\sigma。$$

$$Q=\frac{2}{3}\sigma。$$

E. 差量係數

(1)意義　從各測量差中求得之比率，即爲差量係數。

(2)算法　皮爾生之公式爲，

$$V=100\frac{S.\ D.}{mean}。$$

(3)功用　差量係數爲求比較二種測量差異程度之方法。

問　　題

1. 試將本級學生之身長,順次排列,求距離及四分差。

2. 試於下例中, 求 Q. 及 M. D.。

某冶鐵廠工人工資之數目

工資數	人數
$ 3.00至 3.99……	84
4.00至 4.99……	62
5.00至 5.99……	30
6.00至 6.99……	24
7.00至 7.99……	20
8.00至 8.99……	16
9.00至 9.99……	14
10.00至10.99……	8
11.00至11.99……	5
12.00至12.99……	3

(表 73)

3. 試就(2)題中,求其 V。

4. 試求下列十種測量之 V:

	a.	b.	c.	d.	e.	f.	g.	h.	i.	j.
A.	802	95.5	82	713	65.5	70	584	47	189	68
S. D.	103.4	7.3	6.4	12.8	10.51	10.32	81.7	53	12.3	5.4

(表 74)

5. 試就下列事實以證明。

a. 六倍 σ 大約包括全體數量 $\frac{99}{100}$；

b. $\delta=\frac{4}{5}\sigma$；

c. $Q=\frac{2}{3}\sigma$。

某中學校學生國文之成績

分數	人數
57	2
58	4
59	14
60	41
61	83
62	169
63	394
64	669
65	990
66	1223
67	1329
68	1230
69	1063
70	646
71	392
72	202

73	79
74	32
75	16
76	5
77	2

(表 75)

6. 試就上表事實,用簡便法以求 δ 及 σ。

7. 各就海關報告册,中華年鑑等籍內,任取一相當事實,以求 Q,δ 及 σ。

參考書

1. Elderton, W. P. and E. M.: Primer of Statistics, Chap. IV, pp. 40–55.
2. Yule, G. U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Chap. VIII, pp. 133–156.
3. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chap. XI. pp. 377–415.
4. Rugg, H. O.: Statistical Methods Applied to Education, Chap. VI, pp. 149–178.
5. King, W. I.: The Elements of Statistical Method, Chap. XIII, pp. 141–158.

6. Jones, D. C.: A First Course in Statistics, Chap. VI, pp. 42–51.

第十三章　論偏斜度

第一節　偏斜之意義

偏斜 (skewness) 者,即當次數分配不對稱時,其事實現象所呈之狀態也。易言之,即在衆數兩旁之數量不相等稱,則謂之曰:偏斜。

第二節　偏斜度之算法

偏斜度之算法 (measures of skewness) 有三種,今分述之:

令　　SK＝偏斜度。

(1) 其公式爲,

$$SK=\frac{A-Mo}{\sigma}。$$

(2) 以真確衆數,每難計算。遂根據 $M_o=A-3(A-M)$,將上列公式改爲,

$$SK=\frac{3(A-M)}{\sigma}。$$

(3) 其公式爲,

$$SK = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{Q},$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q}。$$

一般統計者多引用(1)或(2)之公式。以其較(3)式爲更精密，而尤易計算。至於該公式之數理，亦極淺顯。蓋當 $A-M$，或 $(Q_3-M)-(M-Q_1)$ 爲零時，則其分配之現狀必屬對稱。倘 M 或 $(M-Q_1)$ 之數小於 A，及 (Q_3-M)，則左方之次數較繁，其分配現象卽向該方偏斜。反是，則右方偏斜。

玆舉西人 Jones 所作一實例，以說明偏斜度之計算方法。

英格蘭及威爾士兩省 241 個大城

中居民患傳染病之比例額

(在十三個星期內止於 1914 年 4 月 4 日)

在每千人中患病者之比率 (X)	較7之差數 (d)	城數 (f)	次差積 (fd)	次數與差平方積 (fd^2)
0及少於 2……	−3	5	−15	45
2及少於 4……	−2	39	−78	156
4及少於 6……	−1	69	−69	69

6及少於 8……		41	……	……
8及少於10……	+1	29	+29	29
10及少於12……	+2	22	+44	88
12及少於14……	+3	16	+48	144
14及少於16……	+4	7	+28	112
16及少於18……	+5	5	+25	125
18及少於20……	+6	3	+18	108
20及少於22……	+7	4	+28	196
26及少於28……	+8	1	+10	100
,,	,,	241	+68	1172

(表 76)

$A=7.564$，　$M_o=5.50$，

$Q_1=4.47$，　$M=6.39$，

$Q_3=9.84$，　$\sigma=4.374$，

$Q=2.69$，

代入公式(1)，

$$SK=\frac{(A-Mo)}{\sigma}。$$

則

$$SK=\frac{(7.56-5.50)}{4.37},$$

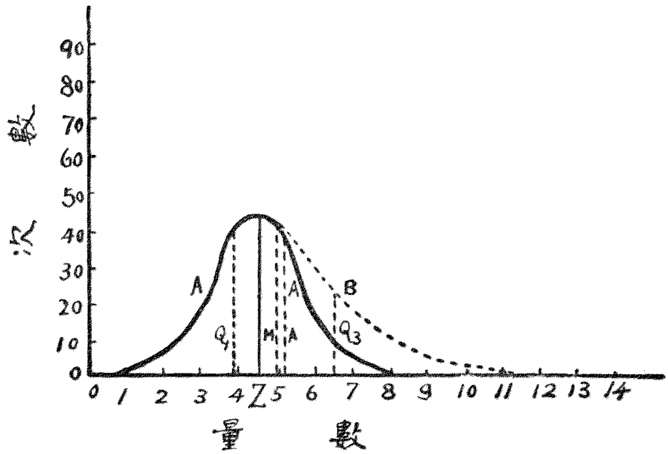
$$=\frac{2.06}{4.34},$$

$$=0.47。$$

若按(2)或(3)兩公式算之,則所得結果,各不相同。學者於此,當知以(1)公式求得者,為最精確。

第三節　偏斜對於各均數之影響

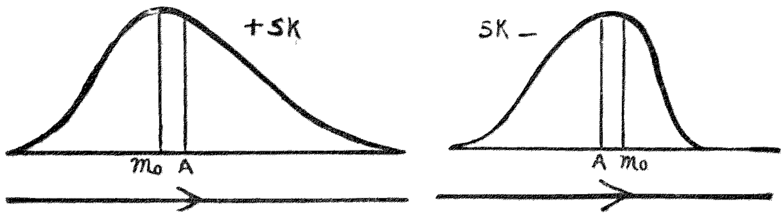
當次數分配對稱(symmetry)時,中點數,衆數,及平均數皆相合為一(理見前章),其關係固至密;但於不對稱偏斜態中,其對於各種均數之影響,亦頗重要。茲特揭示圖例於下,藉資說明:



(圖 55)

按上圖A之對稱的鐘形,平均數,中點數,及衆數三者,皆合於Z線上。再察B線上,則知其偏斜之

程度與影響。蓋衆數一項，雖仍在 Z 線上，地位未變。而平均數與中點數已大有變動，不復如前狀。爰再揭一圖，以示其影響。



(圖 56)

當平均數大於衆數時，卽左方之次數較多，則偏斜爲(+)。反是爲(−)。

從以上種種之關係與影響，復闡出一公式如下：

$$M=Z+\frac{2}{3}(A-Z)$$

該公式係一約略之規則，非可嚴密驗證者。

第四節　偏斜度之功用

偏斜度之功效，在應用方面本難概述。要言之，凡社會與自然之現象，經濟及實業之事實，能湊成對稱之次數分配者，原屬罕見。第偏斜之度，能藉其側倚之輕重，起伏

之高低，而推測集中之趨勢，則尤爲其特長。普通工資，死亡，遺傳，及溫度諸問題，殆莫不借助於斯者，其亦此歟？

摘　要

1. 偏斜之意義。　卽當次數分配不對稱時，在中數旁偏倚之度也。

2. 偏斜度之算法。　共有三種：——

(1)　$$SK=\frac{A-Mo}{\sigma}。$$

(2)　$$SK=\frac{3(A-M)}{\sigma}。$$

(3)　$$SK=\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q}。$$

3. 偏斜對於各均數之影響。　衆數始終無變動，均數及中數皆受偏斜之影響，而更移位置。

4. 偏斜度之功用。　在借其偏倚程式之高低，以推測事實集中之趨勢。

問　題

1. 試就下列之事實，求其偏斜之度。

英國100個大城內每生一千小兒中之死亡比率

(均在一週年內)

死亡率	城數	死亡率	城數
30——40	1	120——130	16
50——60	3	130——140	11
60——70	2	140——150	10
70——80	6	150——160	8
80——90	7	160——170	3
90——100	6	170——180	1
100——110	11	200——210	1
110——120	13	240——250	1

(表 77)

$A=118.9$ $\sigma=32.2$

$Md=120.9$ $Q=19.5$

2. 試就本地數十星期溫度之高低,以求其偏斜度。

參考書

1. King, W. I.: The Elements of Statistcial Method, Chap. XIV, pp. 159–166.
2. Yule, G. U.: An Introduction to the Theory of Statistics, Chap. VIII, pp. 133–156.
3. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chap. XI,

pp. 415–424.

4. Jones, D. C.: A First Course in Statistics, Chap. VII, pp. 61–67.

5. Rugg, H. O.: Statistical Methods Applied to Education, Chap. VI, Sec. III, pp. 178–180.

第十四章 論指數

斛,斗,升,石,爲測量五穀等容積之單位,尺,寸,丈,碼,爲度量布疋等長度之單位。汽機工作,則以馬力 (horse power) 計。氣候升降,則以溫度表 (thermometer) 計。於此可見當科學進步之時代,無論何事何物,均非有適稱之單位 (suitable units),不足以表現其變化。今吾人如欲察經濟界之變動,人民生活程度之趨勢,百物價格之高低,金錢購買力之漲縮,則尤非有一特殊之單位不可,此單位爲何?曰指數 (index number) 也。

本章所論,先就指數一般之定義原則類別及計算諸法,次述我國上海物價表之作法與現狀,以供學者之研究。

第一節 指數之意義及效用

指數者,卽以一時之物價爲基數 (the base),而以他

時物價與之相較所得平均之比率 (the average of their price relatives; ratio)。易言之,物價指數,乃表示此時與彼時物價平均百分比率之變更也。(An index number of prices shows the average percentage change of prices from one point of time to another) 學者於此,當知指數之用途,不僅在物價一方面而已。若夫工資,進出口貨量,以及其他各方面,皆可借指數法以表現其各時期變動之比率。

第二節　指數之編製與原則

A. 指數編製之方法　指數編製之方法,視其類別而異(詳見後節)。今就普通之手續而言,則約分四步:

(1) 擇定適當之基本時期。

(2) 選定應列之貨物。

(3) 釐訂貨物之實價。——此爲原價表。

(4) 求算各期間價格之比率。——此卽指數表。

* 實例見後。

B. 指數編製之原則　指數編製時,對於各步手續,亟宜考慮,務使採用之方法,最合於事理。且其結果,確有代表某事實相對變更之功效。此問題久爲歐美多數統計

專家之討論，惟迄今仍無一定之準則。茲爰將英人瓊氏(Jones)所主張編製上之原則,迻譯於後,藉資參考:

(1)對於基本時期之選擇，以經濟現象平恆 (normal) 時爲最宜。切不可任選經濟恐慌或有特種變動之時代爲基數。

(2)對於列入之貨物，以消費程度最普遍者爲宜。至若各種專門物價之指數，則自以關係重大之物品爲限。

(3)對於計算上，仍以算術平均數法爲最普遍。且其手續極稱簡便。若夫較量均數 (weighted average) 一層，多數統計家嘗認爲徒勞無功之舉。倘遇必要時，則視其重要之程度，而定其較量 (weight)。至於其他各種之貨物，可以其銷費量額之多寡，而得其較量。又所用之範數 (mode) 一層,縱有人主張引用中點數 (median, 此數詳細之用途，請參看上海總商會商業月報第五卷第五期,鄙箸『論中數』一文)。但從統計上之習慣,仍以算術的平均數 (arithmetic average) 與較量的平均數爲多。

(4)對於價格之選定，普通多取批發價格，以為指數。此實因零售貨價蒐集上甚不易得。惟就統計家之經驗，咸謂倘能有適當批發價格之指數，彙集稍久，亦足以推測物價盈朒消長之理。

第三節 指數之類別

指數既為平均數之一種，故凡前章所論各種，指數中亦皆備之。惟算術平均的指數，應用最廣，各國現行之物價指數，及我國上海物價指數，亦多採用之。今為讀者研究周密起見，特將各類，次第分述:——

A. 算術平均的指數(The Arithmetic Index Number)

(1)意義　算術平均的指數者，即用算術平均(arithmetic average)法，以求出之指數也。斯種指數最稱簡便，故亦稱單簡指數(simple index number)，或單簡算術的指數(simple arithmetic index number)。

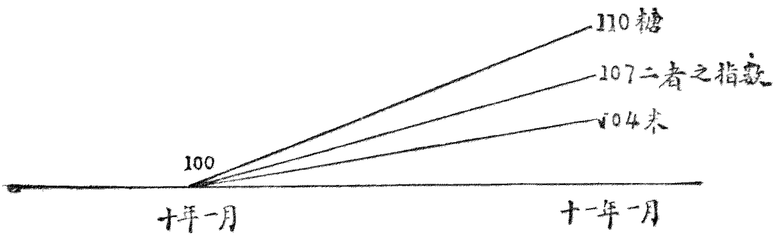
(2)作法　設民國十年一月米價，每斗1元。十一年一月陡漲至1元4角。又糖價在十年一月每斤1角，十一年一月又漲至1角1分。以十年米糖價為底數(the base)，假定為100%。十一年米價即為104%，糖

價卽爲 110%。 107% 爲根據斯兩種物價之指數而得者。至於製作時之表式應如下:——

貨物	十年一月	十一年一月
米…………………	100	104
糖…………………	100	110
算術的平均………	100	107

(表 78)

今復用圖式法以顯明此指數,



(圖 57)

學者讀上例之作法,諒易明悉。惟按諸實際製作指數時,項目常夥,絕非如上例之單簡。茲特重舉一較繁之實例,以明真像。

美國計算物價指數表之一例

(原價表)

貨物	每年平均價格		
	1912	1913	1914
穀　(每斗)………	$ .6855	$ .6251	$ .6953
棉　(每磅)………	.1150	.1279	.1210
燕麥 (每斗)………	.4380	.3758	.4191
乾草 (每噸)………	20.4104	16.0288	15.6863
皮革 (每磅)………	.1760	.1839	.1963
牛羊肉(每100磅)…	9.3585	8.9288	9.6520
豬肉 (每100磅)…	7.5954	8.3654	8.3608

(表79)

(指數表)

比率之總數	700	676.7	704.0
比率之指數	100	96.7	100.6
穀　(每斗)………	100	91.2	101.5
棉　(每磅)………	100	111.2	105.2
燕麥 (每斗)………	100	85.8	95.7
乾草 (每噸)………	100	78.5	76.8
皮革 (每磅)………	100	104.5	111.5
牛羊肉(每100磅)…	100	95.4	103.2
豬肉 (每100磅)…	100	110.1	110.1

(表80)

(3)算法　茲仍用前例以說明計算之公式於次:

令　P_0=民國十年一月米價,

P_1=民國十一年一月米價,

P_0'=民國十年一月糖價,

P_1'=民國十一年一月糖價,

則　算術平均的指數$=\dfrac{\dfrac{P_1}{P_0}+\dfrac{P_1'}{P_0'}}{2}$。

代入　$=\dfrac{4+10}{2}=7$,

即　$=107\%$。

上例爲求二項貨物之指數。今爲便利記憶起見,爰示一普遍之公式如下:

$$\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{n}$$

此公式爲求物價指數者,n 爲貨物項數。

同樣可變化此公式而求貨物數量 (quantity) 之指數,其公式應如下:

$$\Sigma\frac{\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}{n}$$

B. 倒數平均的指數(The Harmonic Index Number)

(1) 意義　倒數平均的指數者，應用倒數平均(harmonic average) 法以求出之指數。易言之，卽將算術的平均之分子分母相易，再除項數，而成之指數也。

(2) 作法　仍用上例以說明之。首先求該物價與底數比率之倒數的均數，(卽算術的平均數) 爲

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{10}=\frac{5+2}{20}=\frac{7}{20}。$$

然後再以項數 (2) 除之，爲

$$\frac{\frac{7}{20}}{2}=\frac{7}{40}。$$

今復顚倒還原得 $\frac{40}{7}=5.714$，卽 105.714%。

斯亦卽該米糖二物倒數平均的指數。從此可知製作倒數平均的指數之手續，約分三步:

第一步，先將本歲應求之物價與底數之比率(ratio) 顚倒。

第二步，由此倒數中，求其算術的平均。

第三步，使所得之倒數的均數，復行還原，卽得

倒數平均的指數。

今更舉一例，以示其進行手續之次序。如求$\frac{2}{5}$與$\frac{4}{7}$之倒數均數的指數。

第一步，先顚倒之，則得其倒數爲$\frac{5}{2}$與$\frac{7}{4}$。

第二步，求二數之算術的平均，爲

$$\frac{\frac{17}{4}}{2}=\frac{17}{8}。$$

第三步，即將求得算術的平均數，顚倒還原爲$\frac{8}{17}$，或$\frac{16}{34}$，即所求之倒數平均的指數。

(3) 算法　仍以米糖實例作證，今首揭其公式如下：

$$\frac{n}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}$$

按前例用代入法，則其倒數的指數，爲

$$\frac{2}{\frac{1}{4}+\frac{1}{10}}=\frac{2}{\frac{5+2}{20}},$$

$$=\frac{2}{\frac{7}{20}},$$

$$=\frac{40}{7},$$

$$=5.714。$$

即 $=105.714\%$

學者乍見此公式後，對於前節所述之作法，必稍有懷疑之處。惟若精密觀察，則其方法雖異，而結果實同，誠所謂殊塗而同歸也。

C．幾何平均的指數(The Geometric Index Number)

(1) 意義　幾何平均的指數者，應用幾何平均 (the geometric average) 法以求出之指數也。易言之，即將各物價與底數之比率相乘，而求其 n 次之根也。

(2) 作法　求幾何平均的指數法，亦分三步：

第一步，先求各物價與底數之比率。

第二步，將各物價與底數之比率連乘。

第三步，求其 n 次之根，即得指數。

〔設例〕　如民國十年十月豆價，每斗 1 元。麪粉價，每斤 1 角。十一月豆價，漲爲 1 元零 2 分。麪價，漲爲 1 角零 8 釐。今求其幾何平均的指

數，則第一步求二價之比率，爲$\frac{102}{100}$及$\frac{108}{100}$。質言之，卽十一月豆價漲2%，麪粉漲8%。第二步連乘之爲2×8。第三步求其二次根爲$\sqrt{2\times8}=4$。卽十一月之指數較十月漲至4%，亦卽十一月份該二物幾何平均的指數爲104%。

(3)算法　其計算公式如下：

$$\sqrt[n]{\frac{P_1}{P_0}\times\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\cdots\cdots(n\text{ 項})}$$

〔設例〕　茲重舉一實例，以證明此公式之應用。

令　P_0=民國元年豆油價每斤爲1角，

P_1=民國三年豆油價每斤爲1角1分8釐。

P_0'=民國元年麪粉價每斤爲1角，

P_1'=民國三年麪粉價每斤爲1角零4釐。

P_0''=民國元年木炭價每擔爲1元，

P_1''=民國三年木炭價每擔爲1元零6分。

P_0'''=民國元年黑煤價每擔10元，

P_1'''=民國三年黑煤價每擔10元零3角。

代入公式,則

$$\sqrt[4]{18\times4\times6\times3},$$

$$=\sqrt[4]{1296},$$

$$=6。$$

此卽當民國三年該四種物價，與民國元年物價相較,其幾何平均的指數,係增至 106%。

D. 中點平均的指數(The Median Index Number)

(1) 意義　中點平均的指數者,引用中數 (median) 法求得之指數也。卽於各個比率內，擇其居中者，定爲該時一般之指數。

(2) 作法　中點平均的指數之作法,亦分三步:

第一步,求各物價與底數之比率。

第二步,按比例之大小,順序排列。

第三步,引用前章求中數方法，發現中點平均的指數(詳細手續及實例,見算法節內)。

(3) 算法　卽以前算術平均的指數節中之美國物價表爲例。茲求其中點平均的指數。

第一步，先求1913年穀棉等物價與1912年 (the

base year) 物價之比率，得 91.2%，111.2%，…………
(1914 年物價之作法與此同，從略)。

第二步，按比率大小，順序排列，則爲

貨物	1912	1913
乾草…………	100	78.5
燕麥…………	100	85.8
穀…………	100	91.2
牛羊肉…………	100	95.4
皮革…………	100	104.5
豬肉…………	100	110.1
棉…………	100	111.2

(表 81)

第三步，按求中點數法 $\frac{n+1}{2}$ 公式，則 $\frac{7+1}{2}=4$。即 95.4% 爲 1913 年中點平均的物價之指數也。但學者於此，應參閱前章中數之各種計算法。蓋 n 項有時爲奇，有時爲偶。即令爲偶，其求中點法，亦有多種。務須斟酌情勢，斷不可拘泥一法。

E. 衆數平均的指數(The Mode Index Number)

(1) 意義　衆數平均的指數者，係引用衆數 (the

mode)法所求之指數。卽於各物價比率中，擇其最常見之比率而爲指數也。

(2)作法　斯種指數作法,亦分三步:

第一步,求各物價與底數之比率。

第二步,分組排列。

第三步,按衆數計算法,求此種指數。

詳情見下節算法內。

(3)算法　此種指數，須於多量貨物中求之，始生效力。下列之例，爲謀說明便利，及初學者易於領悟起見,特舉數種貨價,以示其梗概耳。

民國十年及十一年二十種物價平均表

號數	貨物	每年平均價	
		十年	十一年
1	米　(每石)………	$ 10.00	$ 10.20
2	茶　(每斤)………	1.00	1.03
3	炭　(每擔)………	2.00	2.06
4	牛肉(每擔)………	20.00	20.60
5	糖　(每斤)………	0.10	0.12
6	煤　(每擔)………	10.00	10.30

7	酒　(每擔)………	10.00	10.40
8	紙　(每捆)………	7.50	7.65
9	麪粉(每擔)………	10.00	10.30
10	雜糧(每擔)………	5.00	5.50
11	土布(每疋)………	2.00	2.06
12	綢緞(每疋)………	100.00	104.00
13	煤油(每石)………	10.00	10.70
14	肥皂(每箱)………	2.00	2.08
15	鐵　(每擔)………	25.00	25.08
16	豬肉(每擔)………	20.41	16.03
17	豆油(每擔)………	9.36	9.65
18	蝦米(每斤)………	.43	.41
19	錫　(每擔)………	75.95	83.65
20	燃料(每擔)………	.68	.69

(表 82)

茲按上表，求其比率。並依比率大小，分組排列如下：——

二十種物價指數分組表

號數	貨物	十年	十一年	次數
16	豬肉…………	100	52.7	1
18	蝦米…………	100	95.3	1
17	豆油…………	100	100.3	1
20	燃料…………	100	101.5	1

1	米……………	100	102	2
8	紙……………	100	102	
2	茶……………	100	103	6
3	炭……………	100	103	
4	牛肉…………	100	103	
6	煤……………	100	103	
9	麪粉…………	100	103	
11	土布…………	100	103	
15	鐵……………	100	103·2	1
17	酒……………	100	104	3
12	綢緞…………	100	104	
14	肥皂…………	100	104	
13	煤油…………	100	107	1
10	雜糧…………	100	110	1
19	錫……………	100	110·1	1
5	糖……………	100	120	1

(表 83)

查上表之現象，根據衆數方法，知 103%爲民國十年物價之衆數平均的指數。

F. 集合平均的指數(The Aggregation Index Number)

(1) 意義　集合平均的指數者，以總合 (Aggregation)法求出之指數也。即將各物價連乘，而以底數連乘之積除之，遂得此項指數。

(2) 作法　此種指數作法之手續，亦分三步：

第一步，將各物價連乘。

第二步，將底數年各物價連乘。

第三步，以底數年各物價連乘之積，除應求年物價連乘之積，即得之。

(3) 算法　其公式當如下：

$$\frac{P_1+P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots\cdots}{P_0+P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots\cdots},$$

即
$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}。$$

〔設例〕　民國九年米 10 元一石，炭 2 元一擔，鐵 25 元一擔。民國十年米 10 元零 2 角，炭 2 元零 6 分，鐵 25 元零 8 分。今求其集合平均的指數。

令　P_0 = 九年米價 = \$ 10,

　　P_1 = 十年米價 = 10.20,

P_0'=九年炭價= \$ 2.,

P_1'=十年炭價= 2.06,

P_0''=九年鐵價= 25.,

P_1''=十年鐵價= 25.08。

代入公式,

$$\frac{10.20\times 2.06\times 25.08}{10\times 2\times 25},$$

$$=\frac{526.98096}{500},$$

$$=1.05396\text{。}$$

卽民國十年該三物集合平均的指數,爲

105.396%。

此外尚有以其應用之對方,而分工資,生活用費,進出口貨,種種之物價者。惟其製作方法,大致相同,故亦從略。

第四節 指數之比量

指數之比量法 (the method of weighting) 者,卽按一時代各物價中,擇其與該統計主旨之影響較大者,與以一倍或數倍之重 (weights),不作一律看待,藉免鉅細失當,

輕重不勻諸弊。

前節所論各節之指數,皆係單簡的 (simple) 性質。今姑舉一算術平均的指數比量法,以例其餘。

〔設例〕 例題仍用前節算術平均的指數之實例,惟本統計之目的,在注重必需食料。不似前法(算術平均的指數)之一律平等,毫無軒輕者同。是則米之地位,必較重於糖。倘定米之重 (weights) 應二倍之,則其指數爲 $\frac{(4+4)+10}{3}=6$。卽106。反是,若重在糖,則爲 $\frac{4+(10+10)}{3}=8$,卽 108 也。其製作表式如下:

貨　　物	十年一月	十一年一月	重	以重乘出之數
米……………	100	104	2	208
糖……………	100	110	1	110
畸重算術平均的指數	100	107	3	* 106

(表 84)

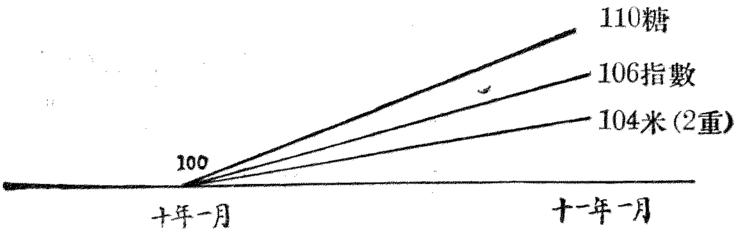
或

貨　　物	十年一月	十一年一月	重	以重乘出之數
米…………	100	104	1	104
糖…………	100	110	2	220
畸重平均的指數	100	107	3	* 108

(表 85)

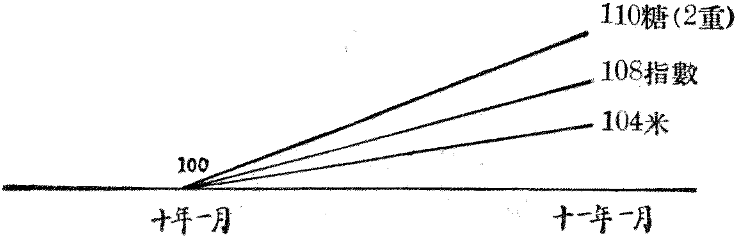
* 106 或 108 皆爲畸重算術平均的指數。

此兩畸重算術平均的指數圖式當如次:



(圖 58)

或



(圖 59)

其計算方法，當如下。茲先以前例說明，次揭公式。

令 P_0＝民國十年米價，

P_1＝民國十一年米價，

P_0'＝民國十年糖價，

P_1'＝民國十一年糖價，

W＝米重＝2，

W'＝糖重＝1，

則畸重算術平均的指數＝$\dfrac{2\left(\dfrac{P_1}{P_0}\right)+1\times\left(\dfrac{P_1'}{P_0'}\right)}{3}$。

代入為 $\dfrac{(2\times 4)+(1\times 10)}{3}$，

$=\dfrac{18}{3}$，

$=6$。

即 $=106\%$。

普通公式為

$$W\frac{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+W'\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)}{W+W'}。$$

此外尚有將基年 (base year) 及應求年 (given

year)之數量與價値,同時加入,則公式爲,

$$\frac{P_0q_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+P_0'q_0'\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)+\cdots\cdots\cdots}{P_0q_0+P_0'q_0'+\cdots\cdots\cdots}。$$

縮短之爲,

$$\frac{\Sigma P_0q_0\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{\Sigma P_0q_0}。$$

學者倘能細玩上列畸重算術平均的指數之作法,則其餘幾何平均的指數,倒數平均的指數等比量之法,庶不難類推之。爰爲研究便利起見,特揭其公式於次。(初學者可略去。)

畸重倒數平均的指數$=\frac{\Sigma P_0q_0}{\Sigma P_0q\frac{P_0}{P_1}}$。

畸重幾何平均的指數$=\sqrt[\Sigma P_0q_0]{\left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{P_0q_0}\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)^{P_0'q_0'}\cdots}$。

畸重中點平均的指數=卽以比率中項之重爲比量。

畸重衆數平均的指數=卽以各項中之最重者爲比量。

畸重集合平均的指數$=\frac{\Sigma P_1q_0}{\Sigma P_0q_0}$。

第五節 指數之基數

指數之基數(The Base)一層,最爲重要。當製作之始,即應審愼,否則,所得之結果,不足表示眞正的現象。玆分論其製作之方法,以證明重要。

A. 固定基數法 普通常用之指數,多採用固定基數(the fixed base method)。其法係擇定某時期(普通多指定某年或某月)之物價爲基數(the base),以其他各時期同樣之物價與之相較,而得百分比(percentage),卽爲指數。蓋如是,旣可借此以觀察一般物價漸次之升降,人民生活程度漸次之高低;且得從對方,推測金錢漸次之購買力(purchasing power),今設例以說明之。

本表爲採用固定基數法求出之指數

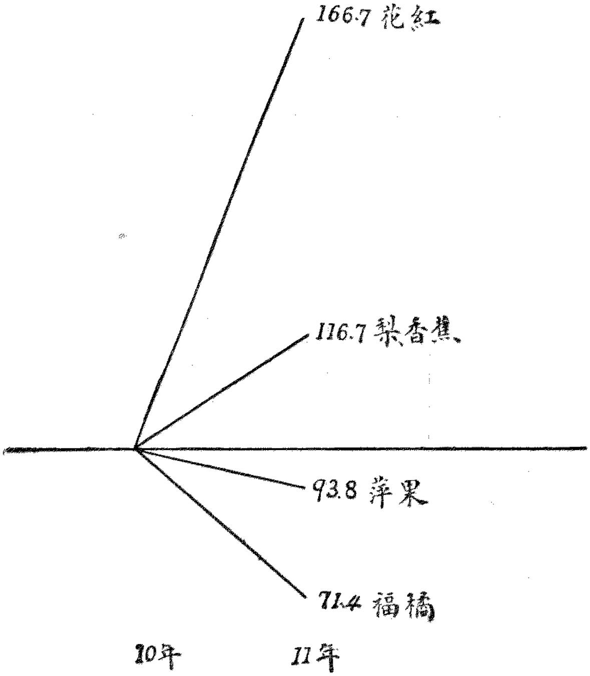
(以民國十年平均價爲基數)

物名	實價		指數	
	十年	十一年	十年	十一年
蘋果(每斤)………	$ .32	$ .30	100	93.8
梨(每斤)………	.24	.28	100	116.7
福橘(每斤)………	.35	.25	100	71.4

香蕉(每斤)········	.24	.28	100	116.7
花紅(每斤)········	.24	.40	100	166.7
總　　集	1.39	1.51	500	565.3

(表 86)

讀上表知以十年各物價爲固定的基數，命爲100。復以十一年各物價與之相比，得第五欄各個比率，卽應求之指數也。茲重以圖式，示其比率。



(圖 60)

B. 鏈環基數法　鏈環基數法 (the chain system) 者，卽以各時期物價疊爲基數，而求遞次之比率也。如此，旣可觀察前後毘連兩時期物價升降之近狀，及其比較之確度；更能推測各期間循環之趨勢，此其特長也。玆復舉例以說明之。

美國 1913—1918 三十六種商品物價表

(以金元爲單位)

號數	貨　物	1913	1914	1915	1916	1917	1918
1	醃豬肉…	.1236	.1295	.1129	.1462	.2382	.2612
2	大麥……	.6263	.6204	.7103	.8750	1.3232	1.4611
3	牛肉……	.1295	.1364	.1289	.1382	.1672	.2213
4	牛酪……	.2969	.2731	.2743	.3179	.4034	.4857
5	家畜……	12.0396	11.9208	12.1354	12.4375	15.6354	18.8646
6	塞門土…	1.5800	1.5800	1.4525	1.6888	2.0942	2.6465
7	白煤……	5.0636	5.0592	5.0464	5.2906	5.6218	6.5089
8	煙煤……	1.2700	1.1700	1.0400	2.0700	3.5800	2.4000
9	咖啡……	.1113	.0816	.0745	.0924	.0929	.0935
10	焦煤……	3.0300	2.3200	2.4200	4.7800	10.6600	7.0000
11	紫銅……	.1533	.1318	.1676	.2651	.2764	.2468
12	棉………	.1279	.1121	.1015	.1447	.2350	.3178
13	雞蛋……	.2468	.2660	.2597	.2945	.4015	.4827
14	乾草……	11.2500	12.3182	11.6250	10.0625	17.6042	21.8958
15	皮革……	.1727	.1842	.2076	.2391	.2828	.2144

16	豬………	8.3654	8.3608	7.1313	9.6459	15.7047	17.5995
17	鐵條……	1.5100	1.2000	1.3700	2.5700	4.0600	3.5000
18	生鐵……	14.9025	13.3900	13.5758	18.6708	38.8082	36.5340
19	白鉛……	.0676	.0675	.0698	.0927	.1121	.1271
20	鉛………	.0437	.0386	.0467	.0686	.0879	.0741
21	木材……	90.3974	90.9904	90.5000	91.9000	105.0400	121.0455
22	羊肉……	.1025	.1010	.1073	.1250	.1664	.1982
23	煤油……	.1233	.1200	.1208	.1217	.1242	.1695
24	豬肉……	.1486	.1543	.1429	.1618	.2435	.2495
25	橡皮……	.8071	.6158	.5573	.6694	.6477	.5490
26	絲綢……	3.9083	4.0573	3.6365	5.4458	5.9957	6.9770
27	銀………	.5980	.5481	.4969	.6566	.8142	.9676
28	生皮……	2.5833	2.6250	2.7188	4.1729	5.5208	5.5625
29	鋼軌……	28.0000	28.0000	28.0000	31.3333	38.0000	54.0000
30	生錫……	44.3200	35.7000	38.6600	43.4800	61.6500	87.1042
31	錫片……	3.5583	3.3688	3.2417	5.1250	9.1250	7.7300
32	小麥……	.9131	1.0412	1.3443	1.4165	2.3211	2.2352
33	羊毛……	.5883	.5975	.7375	.7900	1.2841	1.6600
34	香櫞……	1.2500	1.2500	1.2396	1.4050	1.7604	2.3000
35	熟豬肉…	.1101	.1037	.0940	.1347	.2170	.2603
36	燕麥……	.3758	.4191	.4958	.4552	.6372	.7747

(表 87)

本表爲採用鏈環基數法求出之指數

(以各年36物價平均者爲比例)

底數別 \ 年份別	1913	1914	1915	1916	1917	1918
1913年爲固定底數……	100.00	96.32	98.03	123.68	175.79	186.70
1914年爲1915之底數…		100.00	101.69			
1915年爲1916之底數…			100.00	127.97		
1916年爲1917之底數…				100.00	140.15	
1917年爲1918之底數…					100.00	110.11
以上各指數的鏈環底線之指數	100.00	96.32	97.94	125.33	175.65	193.42

(表 88)

詳察上列兩表，當知其算法係僅用算術的平均法，故稱簡便。惟有時須用別種指數；如倒數的，幾何的，集合的等等，均無不可。即其算法，亦大同小異。可參閱本章第三節。本指數表中之算法，第一橫行，係以1913年爲固定基數法，求出各年之指數。第二行，則以1914年爲1915之基數，而求出之比率。第三行，則以1915年爲1916之基數，而求出者。餘同此理。惟第六行之算法，則又有異者，切勿誤會之。今說

明其計算法如下:

當求 1914 年之指數時,其法仍同第一行。

1915 年者,則以 $96.32 \times 101.69 = 97.94\%$。

1916 年者,則以 $96.32 \times 101.69 \times 127.97 = 125.33\%$。

1917 年者,則以 $96.32 \times 101.69 \times 127.97 \times 140.15 = 175.65\%$。

1918 年者,則以 $96.32 \times 101.69 \times 127.97 \times 140.15 \times 110.11 = 193.42\%$。

又當計算每次得數時,須將小數點移下兩位。例 1916 連乘之積爲 1.2533, 卽應改爲 125.33%。此係百分比例之數理,讀者諒早了悟矣。

C. 二種基數之比較。

學者讀以上二種基數,關於其意義及功用,自甚明晰。爰爲便於初習者記憶起見,特示其製作手續與圖式,藉供比較。

(1) 製作手續之比較。

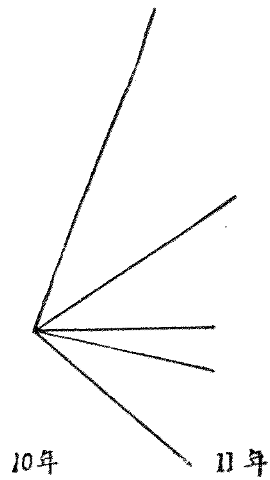
固定基數法之手續	相同者	鏈環基數法之手續
	第一步: 先求某時間各種或每種物價之平均數。	

第二步： 選定基數之時期。		第二步： 以甲年爲乙年之基數，以乙年爲丙年之基數，而求其比率。
第三步： 求各物或各時期物價與基數之比率，卽得指數。		第三步： 求以上各個比率間，鏈環之指數。

(表 89)

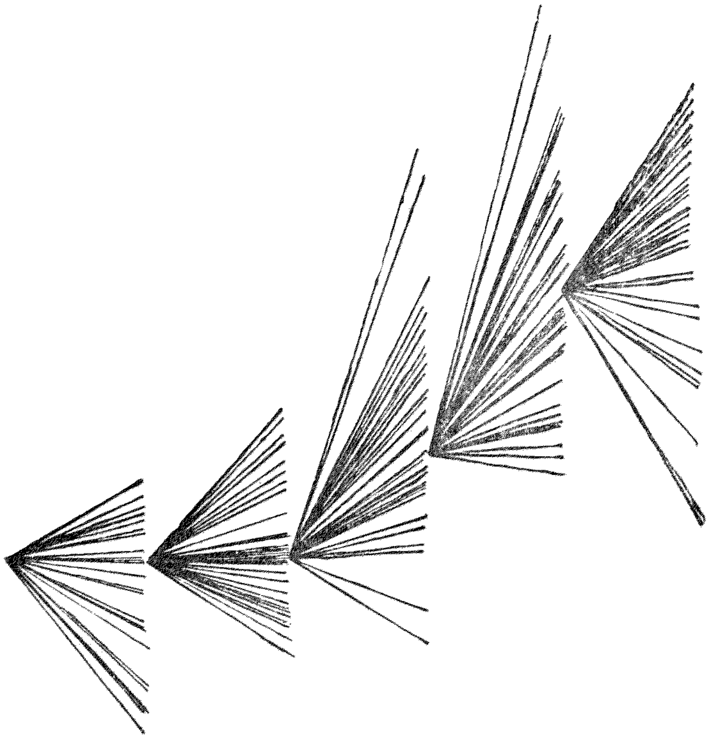
(2) 圖式表明之比較。

(a) 固定基數求得指數之圖式(例同前)。



(圖 61)

(b)鏈環基數求得指數之圖式(例仍前)。



(圖 62)

第六節　我國之物價指數

A. 上海批發物價指數之起因及現狀　中國統計之學,產生雖古,但向無研究之人。因此對於經濟調查,實業

報告，每多臆度者。而其結果亦遂乏正確可靠之價値。民國八年財部有鑒於此，特遂派專員在上海製作物價表，及指數表，每週披露一次。其實製作之目的，殆無非欲供學者或有心國民經濟者之參考云爾。今摘錄該處主辦盛俊所撰兩文於下，以見上海物價指數之起因幷現狀：

上海標準物價表旨趣書。『世界各國自歐戰開始以來，不問爲交戰國方面，或中立國方面；自媾和以來，不問爲戰勝之協約國方面，或戰敗之德奧方面；有一共同之現象。因此現象，而人民生活困難。因生活困難，而惹起政治革命，社會革命。國運阽危，不絕如縷者，如俄，德，奧，匈是。因生活困難，而市民屢行示威舉動，而勞動界同盟罷工。雖以戰勝之餘，而階級衝突，暗潮激盪，亦若儳焉不可終日者，如英，美，法，日本是。此現象卽物價騰貴之問題也。物價騰貴之原因，不一而足，其主要者有二：卽(一)由於供不敷求。淺言之，如歐戰以來，德國顏料價格之暴漲是。吾國恆言米珠薪桂；米如珠，薪如桂，言其量之少而價之貴。量少價貴，卽供不敷求之意也。(二)由於通貨澎

脹者。淺言之,如中交京鈔停兌以來,幣値下落,以致北京物價之增漲。是通貨之爲物,飢不可食,寒不可衣,其功用特爲百物交易之媒介。多則賤,賤則物價貴矣。夫物價騰貴,果於國民生活上有若何之影響耶?據經濟學家之研究,利於物價騰貴者,莫如完納定額地租利息之生產者,以及工資爲大宗支出之製造者。不利於物價騰貴者,莫如改業困難之勞動工人。物價下落時,反是。夫以多數利害衝突之分子,生息於同一社會之中,苟不早爲之所,一旦破裂,必致橫決潰爛,而不可收拾者勢也。此物價貴賤所以爲重要之社會問題,宜乎當世各國上自官廳下至經濟團體之不憚煩劇,從事研究,以冀消亂於未形,弭患於未然矣。我國統計之學久廢不講,物價問題尤視爲早晚不同,莫可究詰。海通以還,惟海關造冊處每年有洋土貨估價之印刷品。各日報有米豆麥粉花油紗布等行市單。所惜者,造冊處之估價表,係登記報單而成,非實地調查所得。旣欠翔實,各行市單亦多殘缺不完,不能認爲有統系之統計材料。昔者生活簡易,莫

或注意。今則因時勢之需要，漸爲社會視線所集，吾人欲考其真相，究其因果，決非此種斷片之材料，傳聞影響之報告，所能濟事，從可知矣。政府調查物價之舉，始於今年一月。半載以來，所得材料爲環境所限，缺憾尙多。特公布之旨趣，在引起社會之批評，供給統計之資料，邦人君子倘各就見聞所及，進而矯正之，或者各地各界聞風興起羣起而調查研究之，亦社會之福音也。各國物價表或由政府公布，或由商會及其他團體發表。詳略不一，有多至三百五十餘品者；亦有少至二十餘品者，在理此種標準，貨品無取過多。例如銅鉛煤鐵米肉雜糧棉花木材皮革等等原料，一經昂貴，則無數製品勢必連類俱漲，不問而知。惟我國經濟尙在幼稚時代，土產者，原料占多數。舶來者，製品占多數。上海爲通商大埠，一般消費，尤以舶來製品居大部分。所有標準貨物，不得不略事變通，以求適合於經濟現象。茲就調查所得五千餘種貨物中，擇其普通消費者，分爲八類，一百零五品一百五十四項，每週發表一次，以供世人之參考。其附屬之物價指數

表,亦將陸續披露。……(下略)。』

上海物價表修正理由書:『編製物價表之目的,在根據正確市價所得之平均數字,以表示一般物價之趨勢,或貨幣購買力之高下。故選擇物品,不可不求其賅要。而分類比量,不可不衷至至當。非賅與當,不足以爲一般物價之準繩。即無以測幣値變動之實況也。自英人伏亨氏(Rice Vaughan 十七世紀人)首創物價表,自是以來,後先述作,無慮以數十計。其最簡單者,爲意大利皇家統計局所編,祇米,穀,小麥,酒,橄欖油,牛肉六種。而美人福根納氏(Roland P. Falkner)爲其上院編製一表,兼收並蓄,多至二百二十有三種,可謂皇然鉅製已。其餘英法德日諸國所作,率自二十餘種至百餘種不等。究竟表列品目應以若干種爲度,各家學說紛歧,迄無定論。費希兒氏(Irving Fisher)據艾桀華(Edgeworth)諸家之批評,謂品目過多,理論上與實際上皆覺其不便。因以倫敦經濟週刊所編之二十二種,與蘇氏(Sauerbeck)之四十五種爲綱舉目張,而以美上院及勞働局所製二百

餘種之物價表,爲轉足泥其真確,此主張簡要者也。拉林氏 (J. Laurence Langhlin) 著貨幣原理一書, 其言乃適與相反。拉氏之評經濟週刋表曰:「品目太少,……不足以示一般物價之變動。」又評上院曰:「美國物價表之最重要者,斷推教授福根納氏之所作。……此表所列品目多至二百二十有三種。卽此一端,已足邁越古今已。」此主張繁複者也。蓋就性質而論,以編者之宗旨不同, 而所取之對象各殊。以所取之對象各殊, 故所取之標準不一。譬彼資本階級原料價格, 僱傭薪工, 均爲其支出之重要項目。其所驗之物價, 自不能外此二者於不顧, 而於工界無與也。工人之支出, 以生活費爲大宗。米帛油鹽以外, 若教育娛樂等費,率在可去之列。而中流以上,或以爲必須。是故物價表之成分,不惟其名,惟其質。物價表之性質,不惟其義,惟其用。美儒甄萊氏 (David Kinley) 曰:「某種社會欲測所費之幣値法, 當盡取所須一一開列其價目, 而後所測之結果,乃愈顯。事之至善,蓋莫過於每一階級,各審其費用之項目,而各製一表。」觀此足知

結果與內含之關係矣。本處所編一般物價表,始於去年九月。分類八,項目百有五,子目百五十有四。其間洋貨居三之一。率皆根據關册所載主要貨物,並益以居民生活所需之大宗用品,參互編製。一年以來,按週調查,以次公布,證以本埠物品貨幣二者需給之狀況。歷屆指數,似未爲大謬。特市場商品,月異而歲不同,以爲社會風尚之變遷,與新陳代謝之結果。昔之所見爲流行者,今或已視爲陳腐;而今之所目爲主要者,在昔或猶未發達。甄萊氏曰:「欲求物價表之切於實用,則凡新流行之貨物,不可不酌予採入。採入之道如何?曰隨時改正而已。」約翰遜(Joseph F. Johnson)曰:「人生好尙,與時俱變。疇昔重要之商品,迄今或不重視,浸假而問津無人者,所在多有。指數表內苟雜有此等物品,不能不隨時删去,而別以他物代之。」洵斯言也,則爲適合市情力求正確起見,物價表之修正,乃爲不可避免之事實。加以本處編査此表,事屬草創,挂漏滋多。迄今刋布期年,修正尤不容緩。爰本此意,略加損益。計新加入者,凡三十九品如左:——生仁,

生油,豆餅,鄉肉,食鹽,咖啡,醬油,紹酒,夾呢,駝絨,直貢呢,湖縐,杭緞,府綢,黃絲,羊毛,點銅,法西釘,白煤,柏油,石灰,松香,純碱,鹽酸鉀,巴拉非尼,品藍,品紅,玫瑰,靛油,烟葉,生漆,荆油,生牛皮,紅牛皮,豬鬃,草帽緶,籽油,蛋黃,蛋白,——剔除者凡二十九品如左:——青花魚,鴨,香蕉,橘,梨子,蘿蔔,馬鈴薯,黑參,黑胡椒,漂標,花旗釘,阿摩尼亞,淡輕四,綠鹽硝,泡花碱,鍁鐵,衰奶淡黃,潮藍米黃,柏半太。——此本表修正之點一也。抑物價表之所待商酌者,非徒物品之多寡而已。以魚翅與食米各列一類,形式極整,而其實偏頗特甚。何也?食米之交易千萬倍於魚翅也。又食米價格各級不等,設有五元六元八元九元十一元五種行盤。於此酌中計算,以七元八角爲通常米價,表面亦不可謂不均。特此爲算術法平均之結果。幾何法之平均爲七元五角,模範法之平均爲七元二角,中央法之平均爲八元。算法不同,結果迥異。統計物價,究以何法爲善乎?此亦經濟學家聚訟之點也。以理論言,算術法微嫌畸重,且易爲少數物件所皷動。但手

續單簡，推算較易，自來編製物價，率以此法爲正則。且彼幾何，模範，中央，諸法瑕瑜並見，亦未嘗無可議之點。而幾何法尤爲繁重，昔惟耶方斯 (W. Stanley Geoons) 之指數，曾略採其意與算術法參用，甄萊譏爲毫無意義。此外罕有援用之者。本處自編製此表以來，卽循各國多數之成軌，以算術平均法爲準。此後一仍其舊，不加更易。惟一年來編製方法，係調查一週市價，用算術法平均。期間事實易昧。查各國現行物價表，俱係指定晦朔兩日，酌選其一，分途調查，作爲一月之時價。如英之倫敦經濟週刊表，美之白拉資街週刊表(Bradstreet's)，皆其例也。今仿其意，特定調查時日，一律以水曜日爲限。一日之間，變動較少，庶易得切近之市價，此本表修正之點又一也。比量之法 (method of weighing)，所以矯輕重不勻之弊。夫一埠貨幣流通與貨物授受之總額，能於同一表內各占相當之分量，於以作成指數，窺測幣値。此於一般物價及貨幣相互之比率，自不難得切近之徵象。弁海氏 (Mulhall) 謂不經適當之比量，各種指數俱無徵信之

價值。其視比量，誠不免過重。而物物相與配合恰當，使大宗商貨不致與零星物品等量而齊觀，要爲物價表所應注意者也。本處現行指數與物價表，以燃料，建築材料，工業用品及其他物品，併爲雜貨一項。又各種主要商品其下，俱略系子目，自二三品至五六品不等。卽本此義。茲復刪其繁穢，補其缺漏，都爲子目一百四十七，項目一百十九，分類八。計新加入之子目凡五種，如左：——蘇州河下白米，北洋鹹帶魚，上海棉花，汽巴靛油，潮州靛油。——刻經刪去之子目凡三十種如左：——十三磅龍C原粗布，八四藍七字及牛童原布，四十磅電車，劉軍人面及雙童原細斜，四十二碼空城計，四十碼弓美人白布，四十碼藍象皮，及飛魚原粗斜芝川，PA113絨線，中下等白廠經老牌火油，蟠龍牌火柴，36×24日本玻璃片，A字漆油，和合酸性硃紅，25×47十七磅日本有光紙，31×43三十七磅日本報紙柏牛太，一至六號雙人牌洋針，百二十塊固本肥皂，五十支三礮臺前門大喜長城香煙，十支老車牌香煙，五百支大吉牌香煙。——上所增損，大

抵準據民八關册與社會消費之繁簡，斟酌輕重，重加釐正，與各國嚴格的比量表，微爲不同。蓋嚴格比量，可施諸少數特殊之商品，而不能施諸通常一般之貨物；可施諸額量明確之進出口貨，而不可施諸漫無稽核之日常用品。昔德人柏先 (Paasche) 以四十七品作一指數，自一八四七至一八七二年間，不加比量，釐然可觀。嗣後復重加比量，別求指數，所可比者，纔二十二品，餘皆汰去，此一證也。又福根納之物價指數，號爲精審。彼所編製，係根據二千五百六十一戶之家計簿記。綜其多寡，以定各物之比率，取材可謂甚宏。顧其食品，衣服，燃料各類，掛漏滋多。比量之法，迄未能普及於全體。暨一八九〇年加以修正，乃由二百二十三品删爲九十九品。可知精密比量，不易見之於事實。甄萊氏曰：「統觀各表，作法雖殊，而結果大致近似。然則衡量縱極精密，究無關於宏指。」本表此次修正，於力求精進之中，仍微寓略加變通之意，亦此旨也。此本表修正之點又一也。夫指數表之目的，所以比較今昔之物價而測其升降之度數。反面觀察，爲餙

值高下之標準，用以察社會生活之程度，供學者研究之資料。故各國公私機關，作者極夥。而吾國尤爲草創。此次以一年嘗試之結果，參以歐美各家之成規，準察情勢，悉心訂正，大體或尙無紕繆。而分類取材，發凡起例，在在足資研究。……(下略)。』

B. 上海物價指數表之計算及格式　　讀上節物價修正理由書，可知其計算之法，係採算術的平均。至於底數一層，則以八年九月者作之。茲舉出十八個月之指數，以見一斑。

上海物價指數表

類別 / 月別	糧食	其他食物	疋頭及其原料	金屬	雜貨：燃料	雜貨：建築材料	雜貨：工業用品	雜貨：其他物品	雜貨：雜貨平均	總平均
八年九月	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇	一〇〇、〇
八年十月	一〇一、四	一〇一、〇	一〇二、九	九六、三	一〇二、九	九九、七	九四、二	九九、四	九九、〇	一〇〇、一
八年十一月	一〇三、一	一〇二、九	一〇二、二	九八、四	一〇三、四	一〇二、三	九〇、五	九九、六	九八、九	一〇一、一

八年十二月	一〇二、七	九七、四	九六、八	九二、〇	九八、八	一〇三、二	八六、九	九七、四	九六、三	九七、〇
九年一月	一〇八、五	一〇三、二	九五、九	九二、八	一〇〇、〇	九五、四	八七、〇	九五、六	九四、五	九八、八
九年二月	一〇九、八	一〇六、二	九八、五	一〇〇、三	九九、〇	九五、三	九三、八	九五、九	九五、七	一〇三、一
九年三月	一一一、〇	一〇五、八	一〇五、五	一一〇、六	九七、〇	一一〇、四	九三、六	九九、四	九九、八	一〇六、五
九年四月	一〇七、二	一一七、〇	一〇三、五	一〇五、七	九九、五	一〇九、〇	九五、一	一〇一、四	一〇一、二	一〇六、九
九年五月	一〇五、〇	一一九、〇	一〇三、三	一〇八、九	九九、四	一一三、六	一〇〇、九	一〇四、二	一〇四、五	一〇七、九
九年六月	一一五、四	一〇六、四	一〇〇、八	一一八、一	九八、九	一三三、六	一〇六、六	一〇八、〇	一〇九、〇	一〇九、九
九年七月	一一四、七	一〇五、二	一〇〇、二	一一五、七	九七、二	一〇三、六	九九、三	一〇六、五	一〇五、九	一〇八、三
九年八月	一〇八、六	一〇三、四	九八、四	一一七、〇	九六、四	一一八、六	九八、三	一〇五、七	一〇四、七	一〇六、三
九年九月	一〇九、九	一〇七、七	九四、七	一一一、八	九七、二	一一四、六	九九、二	一〇三、九	一〇三、七	一〇五、五
九年十月	一〇三、二	一〇七、六	九四、九	一一〇、二	九九、二	一一六、二	一一三、五	九二、一	一〇五、二	一〇四、二

九年	十一月	九八、六	一二三、五	九三、二	一〇九、九	一〇三、四	一一八、六	一二三、四	一〇〇、四	一〇八、七	一〇四、六
九年	十二月	一〇三、一	一〇八、九	九一、八	一〇九、四	一〇三、〇	一二〇、六	一二五、三	一〇六、二	一一一、〇	一〇四、八
十年	一月	九六、九	一〇七、〇	九三、一	一〇九、六	一〇三、一	一一八、三	一一九、七	一一一、四	一一三、一	一〇三、九
十年	二月	九八、五	一一一、九	九四、五	一一三、四	一〇三、五	一一九、七	一二八、三	一一三、四	一一六、二	一〇六、九

(表 90)

查前表知上海物價之指數,實屬我國之創舉。惟詳察其編製各方面,覺尙有討論之點。如基本年月(the base year or month)一層,該表卽以編製之第一月(民國八年九月)內平均物價,爲基本物價。此法微嫌草率。蓋基本年月之規定,必經多方之調查與審定,方得適當。今忽以九月物價爲底數(the base),其用意何在?抑以該月物價確足爲一般之標準耶?抑以該月當編製之首,進行較易,殊屬不解。總之,吾人對於此種底數,最宜審愼,切不可隨意爲之。設底數之選擇,稍有牽强,則其結果必相背謬。學者如不信,可

將上列物價表任選一底數月，則其所得之百分比，必大不同矣。又此種底數如能推至歐戰前，則尤可見大戰前後物價之變動，與人民生活程度之升降，其價值當更大。最近倫敦統計週刊，所以批評本表者，亦在此點也。

第七節　指數製作時最應注意之各方面

指數製作時極宜注意之各方面如下：

A. 關於手續方面者：——

(1) 規定目的　指數之性質，大都雖同，而其目的，則各個相異。故當編製之始，即應立定目標，切忌任取他人或普通之指數，而得不適當之結果。

(2) 選定物品　物品宜多宜少之問題，業經歐美諸專家多方討論，其結果殆各有主張。惟就鄙意所見，無論何種指數，按其目的所在，察其關係 (correlation) 程度，精選主要有關係各物品。至於其餘次要或間接有關之物品，可摘抽其尤者亦足矣。若夫普通性質之指數，則品類貴多，而種數亦宜繁。

(3) 審定比量　每種指數中之各物品，其重要程

度，勢難一律。必待詳細調查，精密審定後，方可得其比量 (weight)。否則，往往在數年中各物之總值相同時，遂貿然謂此數年指數相等。其實則少數重要之物價已長，而多數不重要之物價反落。長落相抵，以致不變，安可謂其指數相同耶？

(4) 適合對方　一種指數固有一種之目的，而亦有一種對方之人物。製作指數者，務使所報告之答案，適合對方之需要與程度。否則，是徒勞而無益也。我國上海物價指數表，雖屬普通性質，每週每月登報披露，但閱讀者能有幾人諳其用意，更有幾何人知其功效而需要之，斯卽當討論者。

(5) 精密計算　指數之作用，原在驗物力之盈虛，幣值之消長。故計算方面尤須精確。依其性質，而作適當之平均。萬不可預存避難就易之心，草率將事，俾所得之結果，毫無可據之價值。

B. 關於屬性方面者：——

(1) 核查構造　指數之構造，須按其性質與目的而定。如爲普通者，則各方面之材料均宜採入。如爲

特殊者，則僅須取有關之材料，其他無關係者應去之。

(2) 訂定時期 指數之基本時期 (the base)，爲最重要。必經多方考察，精密審定後，始得適當。其他若各年或逐月之比較，則又須按製作之目的以訂定之。(詳見原則。)

(3) 擇定地點 指數之比較，往往有以甲地與乙地相比而得其指數之較量者；更有選定一國之數城，互爲比較，以得全國代表之指數者。總之編製指數時，倘含有地點問題，則務須選擇適宜。

C. 關於來源方面者：——

(1) 審愼搜集 製作指數難，搜集材料尤難。能有適當之物價統計，始得正確之指數。故當搜集物價時，最宜審愼。至若零賣物價 (retail price)，足以表現人民生活之情形，解決工業上之爭論。躉賣物價 (wholesale price) 足以表現貨幣價值之升降，推測國際貿易之趨勢。此外若市價 (market price) 約定物價 (contract price)，海關物價 (import and export value)

等，皆須斟酌情形，審慎搜集。

(2) 反覆驗證　我國物價統計，除上海財部所派駐滬調查之機關外，尚無特殊可靠者。故編製指數者，如欲借用他人或報章雜誌所披露之材料，均當重驗來源，精密考證。

此外如發表期間，調查時日，分類問題種種，亦皆須審慎考慮者。

摘　要

1. 指數之意義及效用　物價指數者，乃表示此時與彼時物價平均百分比率之變更也。其效用不僅在物價的片面，且可從此以推測生活程度，幣價實力，而爲各方面之指標。

2. 指數之編製與原則　編製方法分四層，原則亦分四項，詳見前。

3. 指數之類別　計可六種：——

A. 算術平均的指數

(1) 意義　卽以算術平均法求出之指數也。

(2) 算法

$$算術平均的物價指數=\frac{\Sigma\left(\frac{P_1}{P_0}\right)}{n}。$$

$$算術平均的物量指數=\frac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}{n}。$$

B. 倒數平均的指數

(1) 意義　卽用倒數平均法求出之指數。

(2) 算法

$$\frac{n}{\Sigma\frac{P_0}{P_1}}。$$

C. 幾何平均的指數

(1) 意義　用幾何平均法求出之指數。

(2) 算法

$$\sqrt[n]{\frac{P_1}{P_0}\times\frac{P_1'}{P_0'}\times\frac{P_1''}{P_0''}\times\cdots\cdots(n\text{項})}。$$

D. 中點平均的指數

(1) 意義　以中點平均法求出之指數。

(2) 算法　按各物價或量數與底數比率之大小，順序排列，再以 $\frac{n+1}{2}$ 公式來出之。

E. 衆數平均的指數

(1) 意義　以衆數平均法求出之指數。

(2) 算法　按各物價或量數與底數之比率，分組排列，再以衆數平均法求出其指數。

F. 集合平均的指數

(1) 意義　就總合法求出之指數。

(2) 算法

$$\frac{P_1+P_1'+P_1''+P_1'''+\cdots\cdots}{P_0+P_0'+P_0''+P_0'''+\cdots\cdots}。$$

即

$$\frac{\Sigma P_1}{\Sigma P_0}。$$

4. 指數之比量

(1) 意義　指數之比量者，即審定各種物價在該統計中重要之程度也。

(2) 計算公式

$$\frac{W\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+W'\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)}{W+W'}。$$

5. 指數之基數

A. 固定基數法　即擇定某適當時期之物價，爲其

基本之數目,而與以後或以前各期之物價相比。

B. 鏈環基數法　即以各時期物價，互爲基數，而求其遞次之比率也。

6. 我國之物價指數

(1) 上海批發物價指數,係民國八年九月財部有鑒於時勢之需要,特派專員赴滬,開始調查,編製指數。

(2) 上海物價指數之算法，係用算術的平均法，每月披露一次。(最初係每週公布一次，嗣後改爲一月一次。)

7. 指數製作時最應注意之各方面:

A. 關於手續方面:——

(1) 規定目的,

(2) 選定物品,

(3) 審定比量,

(4) 適合對方,

(5) 精密計算。

B. 關於屬性方面:——

(1) 核查構造,

(2) 訂定時期,

(3) 擇定地點。

C. 關於來源方面:——

(1) 審愼搜集,

(2) 反覆驗證。

問　　題

1. 就下表求算術的,倒數的,幾何的,中點的,衆數的,集合的諸平均指數。

民國十一年南京物品調查表

以一月爲底數

(下列數目爲著者個人調查估計之數)

物品	每月平均價					
	一月	二月	三月	四月	五月	六月
米　(每石)………	元 7.50	7.65	7.80	8.00	8.20	8.36
麪粉(每袋)………	1.75	1.84	1.90	2.00	2.40	2.55
牛肉(每斤)………	.15	.16	.165	.17	.17	.18
豬肉(每斤)………	.23	.28	.25	.26	.24	.24
柴　(每擔)………	.60	.65	.61	.58	.55	.56
糖　(每斤)………	.13	.14	.12	.12	.14	.12
炭　(每擔)………	2.05	2.10	2.12	2.00	1.95	1.90

(表 91)

2. 諸生各就海關册，或其他書報雜誌中所載之物價，任取一基本年月，求其指數。

a. 用固定基數法。

b. 用鏈環基數法。

3. 試根據本章所論各點，批評我國上海之物價指數表。

4. 比較固定基數與鏈環基數二法之優劣。

參考書

1. Bowley, A. L.: Element of Statistics, pp. 111–118; 217–229.

2. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chap. IX, pp. 294–331.

3. Secrist, H.: Readings and Problems in Statistical Methods, Chap. VIII, pp. 350–368.

4. Secrist, H.: Statistics in Business, Chap. VI, pp. 110–123.

5. Fisher, Irving: The Making of Index Numbers, Chaps. I, II, & III, pp. 1–16.

6. Copeland, M. T.: Business Statistics, Chap. II, pp. 52–97.

第十五章　論關係數

第一節　關係及關係係數之意義

A. 關係之意義　關係(relationship measures 或 correlation) 者，卽測算二種或數種事實彼此間相關之程度也。如年齡之遞長，對於記憶力强弱有無關係？年齡長至若何歲後，記憶力之强度是否漸減，抑漸增？又如某地某種物價之高低，與其供給之多寡，是否有直接之影響？再如其他種種事實，當甲種增長時，乙種是否隨之而增？甲種減少時，乙種是否亦隨之而減？抑兩者之增減，互爲相反？抑彼此間毫無影響？此其中必有一定相因之程度。斯卽其關係。

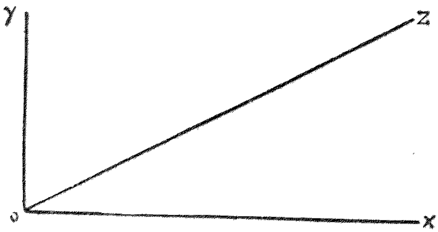
B. 關係係數之意義　關係係數(co-efficient of correlation) 者，卽以簡單之數字，表明各種事實相關之程度，是大是小，爲正爲負也。

第二節　關係之類別

茲按關係之性質，別爲三類：

A. 正關係　凡二種現象同爲增減時，則屬正關係

(direct correlation),亦名積極的關係(positive correlation)。例如美人曾作有製造品產量與僱用工人數目之統計 (見 W. M. Persons: Interpretation of the Index of General Business Conditions, 1922), 當品量增加時,工人之數亦增加; 品量減少時,僱工之數亦減少,斯卽爲正關係。今假令其關係程度竟屬完全 (perfect) 正的性質, 則可以下列圖式表明之。



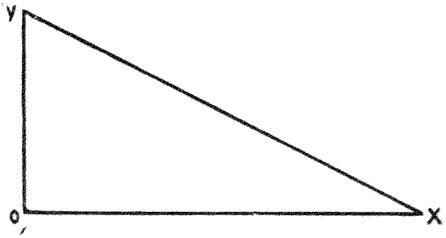
(圖 63)

OY, OX＝兩種事實的測量,

OZ＝此兩種事實的完全正關係線。

B. 負關係　凡二種現象性質相反時, 如甲種增加, 乙種減少; 甲種減少, 乙種增加。則屬負關係 (inverse correlation), 亦名消極的關係 (negative correlation)。例如美統計家曾作有波西米省婦女腦力與年齡之關係, 蓋

自二十歲以後,年齡愈加,腦力愈弱,顯呈負性的關係(見 Jones: A First Course in Statistics, pp. 105)。倘若此現象為完全的負關係時,則其關係線必如下圖:——

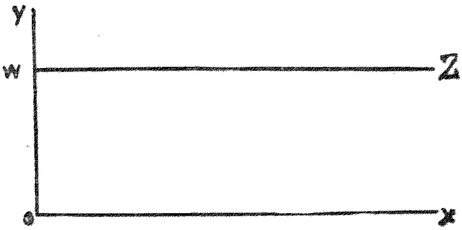


(圖 64)

OY, OX＝兩種事實的測量,

YX＝此兩種事實的完全負關係線。

C. 無關係　凡兩種現象,各自增減,毫不相關時,則謂之無關係(Zero Correlation)。譬如各地死亡率與出產量之多寡,是無關係,今苟以圖式表明之應如下:



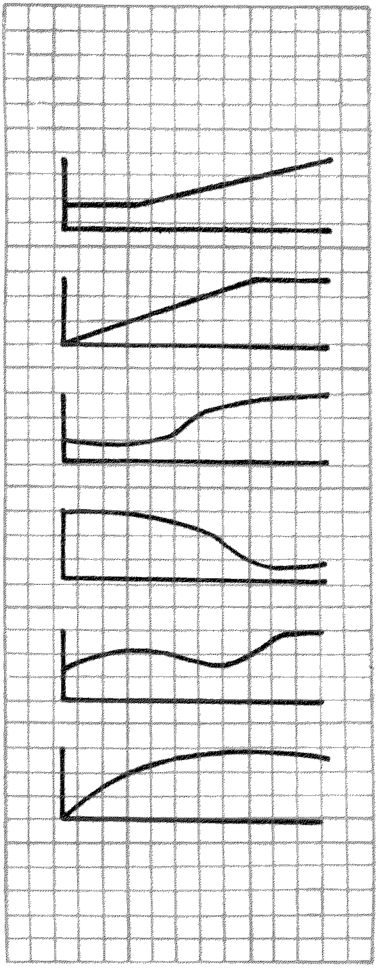
(圖 65)

OY, OX＝兩種事實的測量,

WZ＝此兩種事實無關係線。

按以上三種關係之圖形，均屬直線的，理想完全的性質。揆諸實際，殊難多覯。故普通之事實，其關係圖式，每成曲線。爰略舉數式，以示一斑。

各種關係線之形狀



(圖 66)

第三節 關係數之計算法

計算關係數之方法，約有七種。其手續固甚顯明，然因繁簡之分，而作用亦儼有精疏之別。特臚列呈述，藉資研究。

A. 普通法(The Common Method) 斯法進行之次第，首在組表，次在求算。

(1) 組表法 即將事實中兩種測得之價值，按其對數(x 與 Y; x_1 與 y_1 等等，)排列，以現次數 (frequency of the same values)。其編製雛形如下式，按 x_1 至 x_p 向右

	x_1	x_2	x_3		x_p
y	//				
y_2			卌		
y_q					

(表 92)

排列，按 Y_1 至 Y_q 向下排列，作成縱橫對照之方格。然後

就其現象,而記以符號(如1,·,—⋯等。)。設(x_1y_1)之現象有二次時,則在其格內作(//)。(x_3y_2)之現象有五次時,則在格內作(////)。俟所有現象記錄完備後,再調製正式之表(詳見下例。)。

依上述方法,得組表之手續如次:——

第一步,將所有事實,酌定組距。

第二步,將兩種測量,適按組距縱橫分列。

第三步,將各對數用符號記於格內。

第四步,將各現象之符號,用數字記於正式表內。

(2)求算法　卽應用皮爾生氏(Pearson's Formula)公式: $\gamma=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}$,以求出關係係數。但最先須就表上算出各種數目(如$\Sigma xy$; σ_x; σ_y; $N\sigma_x\sigma_y$等。),然後方可代入公式,以求其關係係數。玆復將其進行之手續,分步敍述:——

第一步,就組成之表上,將各縱橫行格數目相加,以得各項之和。爲 fy; fx 。

第二步,將 fy 與 fx 各項之和相加,而記其總次數(N)於縱橫相交角之方格中(fy 與 fx 之次數應相

同)。

以上兩步爲求項次數之手續。

第三步,假定兩種測量中含有平均數之組數,并將該格線加粗,以便鑒別。

第四步,將各項次數與假定均數之差額,記於表旁縱橫之 d 欄。

第五步,將各項次數與差量相乘,得 fd。此時最宜注意數目之正負。

第六步,將各項 fd 相加。

第七步,用次數之和 N,除 Σfd,求出更正數 C。

第八步,將 C_y 與 C_x 自乘,得 C_y^2; C_x^2。

第九步,將各個 fd 乘以 d,得 fd_y^2; fd_x^2。

第十步,將 fd^2 各項相加,得 Σfd_y^2; Σfd_x^2。

第十一步,用 N 除 Σfd_y^2 及 Σfd_x^2,求得標準差之平方(普通多寫作 S_y^2 及 S_x^2)。

第十二步,$S_y^2-C_y^2$ 及 $S_x^2-C^2_x$,即得 σ_y^2 及 σ_x^2。

第十三步,用開方法求 σ_y 及 σ_x。

以上十一步,爲求標準差之手續,學者於此,當諳

其計算係以組距爲1而得者。在理本應以原組距乘之，令其還原。惟是時仍須求 $\Sigma x'y'$，故可利用1之組距單位，以免數目過大之煩，而收計算捷便之利。

第十四步，將二量各格之 $x'y'$ 數求出，首記於各格之右角上。次將各列之 $x'y'$ 相加，記於表旁之 $\Sigma X'y'$ 欄中。再於該欄之下端，以代數法相加，而得各橫行 $X'y'$ 總數之總數 ($\Sigma X'y'$)。

以上一層，爲計算 $\Sigma X'y'$ 之手續。其方法係用二量與其假定均數之差數相乘之積，再乘以次數（詳情見後。）而得者。至於判定各 $\Sigma X'y'$ 之正負一節，其法既易，其理尤淺。茲舉四圖式於下，以說明之：

左上部	$x=-$ $y=-$ $-\times-=+$	$x=+$ $y=-$ $+\times-=-$
左下部	$x=-$ $y=+$ $-\times+=-$	$x=+$ $y=+$ $+\times+=+$

A圖

右上部	$x=+$ $y=+$ $+\times+=+$	$x=-$ $y=+$ $-\times+=-$
右下部	$x=+$ $y=-$ $+\times-=-$	$x=-$ $y=-$ $-\times-=+$

B圖

x=− y=+ −×+=−	x=+ y=+ +×+=+
x=− y=− −×−=+	x=+ y=− +×−=−

C圖

x=+ y=− +×−=−	x=− y=− −×−=+
x=+ y=+ +×+=+	x=− y=+ −×+=−

D圖

查 A,B 兩圖，知其左上方及右下方之 $x'y'$，必爲正號。左下方及右上方之 $x'y'$，必爲負號。又查 C,D 兩圖，則其正負號之地位，適與上反。至若在假定平均數格中各組之 $X'Y'$ 應爲零，故勿庸計算。

第十五步，將 $\Sigma x'y'$ 減去 NC_xC_y，得 Σxy。故此時可代入前述求 r 之公式爲，

$$r=\frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y}=\frac{\Sigma x'y'-NC_xC_y}{N\sigma_x\sigma_y},$$

或 $$r=\frac{\frac{\Sigma x'y'}{N}-C_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}。$$

茲錄本公式之證明於下：

設 M_x, M_y = 兩種測量之真實平均數，

E_x, E_y = 兩種測量之假定平均數，

x, y = 兩種測量之各數與 M_x, M_y 之差量，

x', y' = 兩種測量之各數與 E_x, E_y 之差量，

則 $x' = x + C_x$,

$y' = y + C_y$,

$\Sigma x'y' = \Sigma(x + C_x)(y + C_y)$,

$= \Sigma xy + C_y\Sigma x + C_x\Sigma y + \Sigma C_xC_y$。

因 Σx 及 Σy 皆爲由真實平均數求得之差量，故其和必 $=0$。

又以 $\Sigma x'y' = \Sigma xy + \Sigma C_xC_y$,

$\Sigma xy' = \Sigma x'y' - \Sigma C_xC_y$。

代入公式，

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_x\sigma_y},$$

則

$$r = \frac{\Sigma x'y' - NC_xC_y}{N\sigma_x\sigma_y},$$

$$= \frac{\dfrac{\Sigma x'y'}{N} - NC_xC_y}{\sigma_x\sigma_y}。$$

〔設例〕　今舉一例，以說明實際組表及求算之方法與手續。

某職業學校學生二百零七人圖畫課及商店實習之成績

圖畫分數 x	商店實習分數 y	x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
64	72	78	84	82	83	86	79	89	88	92	85
67	79	80	85	84	81	86	81	87	87	91	86
68	85	76	86	84	82	86	81	88	89	92	86
68	88	76	87	84	83	86	83	86	88	91	87
72	73	77	86	84	83	87	82	87	86	93	86
73	76	78	87	84	85	87	83	89	89	92	88
73	76	78	88	82	85	86	82	86	87	91	89
74	77	79	88	81	84	86	83	87	88	92	87
74	78	79	89	82	84	86	82	87	86	91	86
75	79	80	90	83	84	87	83	88	86	92	86
75	80	81	72	83	82	87	83	87	89	92	88
74	81	81	74	83	81	87	84	86	87	91	87
74	82	82	76	84	81	86	82	88	89	93	88
75	84	82	76	82	83	86	82	87	87	93	87
75	85	83	77	83	82	86	84	87	86	92	89
76	73	83	77	83	85	87	83	88	88	92	86
77	75	83	77	82	86	87	82	87	87	93	89
77	76	83	78	82	86	88	81	88	89	91	86
78	77	84	78	82	87	86	82	88	91	94	88
78	78	84	78	83	87	87	83	89	91	95	90
79	78	85	80	83	87	88	85	88	92	93	89
79	78	81	81	83	88	88	85	87	92	92	90
78	81	81	82	82	88	86	86	88	93	91	88
79	81	82	83	82	88	86	86	86	91	94	91
80	82	82	81	83	88	87	86	88	94	94	92
76	83	82	81	84	86	87	86	90	95	93	91
77	82	82	82	84	87	86	87	91	78	92	93
78	81	81	84	84	87	86	87	91	80	95	95
79	84	82	83	83	88	87	88	91	81	96	86
79	82	82	84	83	90	87	86	92	81	97	88
80	85	83	82	85	90	88	87	92	81	98	90
80	83	83	85	84	89	88	86	92	82	99	98
76	81	85	82	85	93	88	88	93	82		
76	83	83	81	86	76	87	89	91	83		
78	82	81	84	87	78	86	89	92	84		

（表93）

(1) 組表。

第一步，酌定組距爲 5。

第二步，按組數畫成方格表如下：

第三步，將同組之對數，用符號記於格中如下：

商店實習成績

圖書課成績	X_1 71—75	X_2 76—80	81—85	86—90	X_P 91—95
Y_1 100—96			|	||	|
95—91		||	卌 |||	卌 卌 卌 卌 ||	
90—86		|||	卌 卌 卌 卌 |	卌 卌 卌 卌 卌 卌 |	卌 |||
85—81	||	卌 ||||	卌 卌 卌 卌 卌 卌	卌 卌 卌 |	|
80—76	||	卌	卌 卌	卌 |||	
75—71	|	卌 |	||||		
70—66		|	|	|	
65—61	|				

(表 94)

第四步，將上列之符號表格，改作正式數碼之表

如下:——

		商店實習成績				
		71－75	76－80	81－85	86－90	91－95
圖畫課成績	100－96			1	2	1
	95－91		2	8	22	5
	90－86		3	21	31	8
	85－81	2	9	30	16	1
	80－76	2	5	15	8	
	75－71	1	6	4		
	70－66		1	1	1	
	65－61	1				

(表 95)

(2) 求算。

第一步,就上列組成之表格旁,求算 fy,fx。

第二步,記次數之和 (N) 於交角中。

自第三步至第十三步之手續,求出 σ_y 及 σ_x。

第十四步,求 $\Sigma x'y'$。

第十五步,求 r。

其格式及算法如下:——

B. 乘積率法(The Product-Moment Method)　斯法即利用積乘數理，以求 r，因名爲乘積率法。但世人以計算方法，係從皮爾生之公式(Pearson's formula)而得，故亦名皮爾生法(Pearson method)。其進行手續，亦分組表與求算二層：

(1) 組表法　即將 A. B. 兩種事實順序排列，——由大數而小數，或由小數而大數。——由各平均數，求得差量平方數及二量之積，以供求算之用。其編製格式與手續如次：——

第一步，整理 A. B. 兩事實之次序。

第二步，順序排列。

第三步，用算術平均法求出兩事實之平均數。

第四步，將各數與平均量之差數，記於表中之 x，y 兩欄內。

第五步，自乘 x，y 兩欄之差量，記於 x^2，y^2 欄中。

第六步，將 x，y 相乘之積，記於 x y 欄中。

第七步，x^2，y^2，xy 各欄相加，得 Σx^2，Σy^2 及 Σxy (詳情見下例)。

表格編製之格式，約分二種:

a 式

A 量	x	x^2	B 量	y	y^2	xy
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
平均數,,	$\Sigma x^2 =$,,		平均數,,	$\Sigma y^2 =$,,		$\Sigma(xy) =$,,

(表 97)

b 式

A 量	B 量	x	y	x^2	y^2	xy
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
,,	,,	,,	,,	,,	,,	,,
平均數,,	平均數,,			Σx^2,,	Σy^2,,	$\Sigma(xy)$,,

(表 98)

(2) 求算法　卽引用皮爾生氏(Pearson's formula)

之公式，

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}$$

有時亦可將此公式變爲，

$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}。$$

(因 $N\sigma_x\sigma_y=N\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}\cdot\frac{\Sigma y^2}{N}}=N\frac{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}{N}=\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}$。)

〔設例〕　求某地方夫婦年齡之關係率。

夫年 A	妻年 B	夫年 A	妻年 B
22	18	30	29
24	20	30	32
26	20	31	27
26	24	32	27
27	22	33	30
27	24	34	27
28	27	35	30
28	24	35	31
29	21	36	30
30	25	37	32

(表 99)

(1)組表　由第一步至第七步之手續，編製表式如下:——

A 夫　年	x 差數	x^2 差數平方	B 妻　年	y 差數	y^2 差數平方	xy 兩量差之積數
22	−8	64	18	−8	64	+64
24	−6	36	20	−6	36	+36
26	−4	16	20	−6	36	+24
26	−4	16	24	−2	4	+ 8
27	−3	9	22	−4	16	+12
27	−3	9	24	−2	4	+ 6
28	−2	4	27	+1	1	− 2
28	−2	4	24	−2	4	+ 4
29	−1	1	21	−5	25	+ 5
30	0		25	−1	1	0
30	0		29	+3	9	0
30	0		32	+6	36	0
31	+1	1	27	+1	1	+ 1
32	+2	4	27	+1	1	+ 2
33	+3	9	30	+4	16	+12
34	+4	16	27	+1	1	+ 4
35	+5	25	30	+4	16	+20
35	+5	25	31	+5	25	+25
36	+6	36	30	+4	16	+24
37	+7	49	32	+6	36	242
平均數30	$\Sigma x^2=324$		平均數26	$\Sigma y^2=348$		$\Sigma xy=+287$

(表 100)

(2) 求算　引用皮爾生之公式,

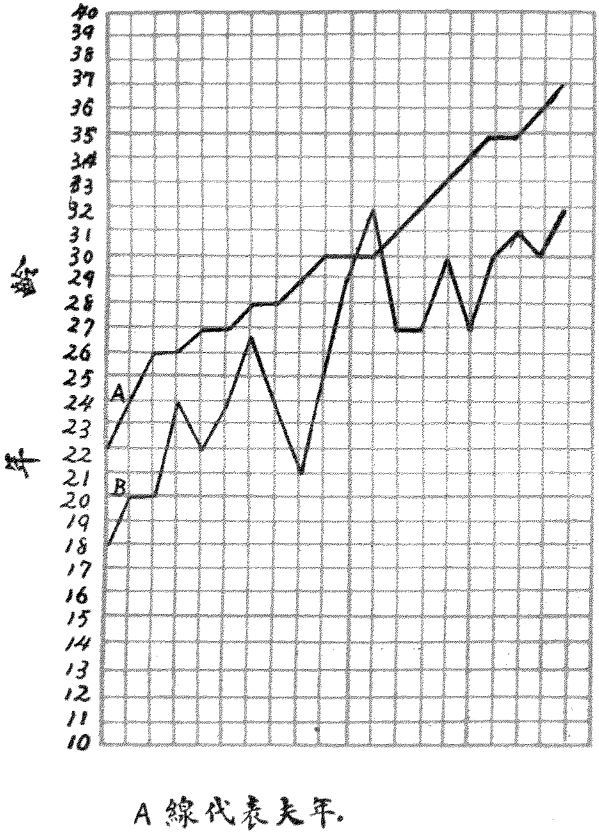
$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y},$$

$$=\frac{287}{20\times4.02\times4.17},$$

$$=\frac{287}{335.27},$$

$= +.856$。

茲恐學者猶有未窺全豹之憾，用將關係線圖附此，以資借鏡。



A 線代表夫年.

B 線代表婦年.

(圖 67)

C. 等級差異法(The Method of Rank-differences) 斯法卽用級差法，以求 r 之値。其計算手續，亦分組表與求算二層:

(1)組表法　卽按事實之數量，順序排列。復規定級差，以爲求算之準備。其進行之次第如下:——

第一步，按二種事實之多寡大小，順序排列。——由大數至小數，或由小數至大數。

第二步，酌定各數之等級。

第三步，比較兩量之等級，以定其差數爲(+)(−)，或爲(0)。

第四步，如應用公式(a)，則自乘各差數(d^2)，以得其積(Σd^2)。如應用公式(b)，則僅須求正號差數之和(Σg)。

(2)求算法　卽引用皮爾生氏法(Pearson's method)，以求算之。其公式有二:

(a) $r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$。

$$其\quad \rho=1-\frac{\dfrac{\Sigma d^2}{N(N^2-1)}}{6}，或\quad \rho=1-\frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}。$$

(b)　$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$。

其　$R=1-\frac{6\Sigma g}{N^2-1}$。

〔設例〕　茲用等級法，求某學校英文與數學測驗之關係數。其現象如下表:——

學生姓氏	A量 英文分數	B量 數學分數	A之等級	B之等級	二量等級之差 D +	0	−	差數平方
張某	35	70	10	5.5	4.5			20.25
陳,,	48	40	9	7.5	1.5			2.25
李,,	65	80	8	3.5	4.5			20.25
吳,,	70	30	7	9.5			−2.5	6.25
任,,	73	40	6	7.5			−1.5	2.25
朱,,	76	30	5	9.5			−4.5	20.25
馬,,	78	80	4	3.5	.5			.25
王,,	83	90	3	2	1			1
金,,	85	70	1.5	5.5			−4	16
趙,,	85	100	1.5	1	.5			.25
					12.5		−12.5	89.00

(表 101)

(1)組表　由第一步至第四步之手續，得其現象如上表。

(2) 求算　先引用公式(a)求出，

$$\rho=1-\frac{6\ D^2}{N(N^2-1)},$$

代入
$$\rho=1-\frac{6\times 89}{10\times 99},$$
$$=1-.54,$$
$$=.46\ 。$$

今由已求得之ρ值，再代入公式$r=2\sin(\frac{\pi}{6}\rho)$。

則，
$$r=2\sin(\frac{\pi}{6}\times.46),$$
$$=2\sin(\frac{180}{6}\times.46)$$
$$=2\sin(30\times.46),$$
$$=2\sin\ 13.8°,$$

查表得　$=2\times.23853$。　(表見附錄)

即　$r=.47706$。

在統計上普通應用時，每有『由ρ之值求r表』，以簡手續。茲仍用上例，以說明之。

因　$\rho=.46,$

則　$r=.477$。　(查附錄中由ρ值求r表得之。)

設引用公式(b)以求r，則首當求出R之值。次由

公式 $r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$，以解算之。或逕從『由 R 之值求 r 表』以查出之，均無不可。

如本例之 $\Sigma g=12.5$，　$N=10$，

則
$$R=1-\frac{6\times 12.5}{10^2-1},$$
$$=1-\frac{75}{99},$$
$$=1-.76,$$
$$=.24\text{ 。}$$

代入
$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-.24)-1,$$
$$=2\cos\frac{180}{3}(.76)-1,$$
$$=2\cos\{60\times .76\}-1,$$
$$=2\cos 45.^\circ-1,$$

查表得
$$=2\times .69966-1,\qquad \text{(表見附錄)}$$
$$=1.399321-1\text{ 。}$$

即
$$r=.39932\text{ 。}$$

今謀便利計算起見，即從『由 R 之值求 r 表』中，查對之，遂得　$r=.399$ 。

D. 異號對數法　(The Method of Unlike Signed

Pairs) 斯法係由各差數之正負對數而求 r。其進行手續，亦分兩層：

(1) 組表法 即將 A,B 二量之數，順次排列，求出差數及正負之對數，以供代入公式之用。其編製手續，分下列五步：——

第一步，整理 A,B 二量之次序。

第二步，順序排列後，求出平均數。

第三步，求各數與平均之差。

第四步，將 A,B 二量正負同號之對數，記於同號對數（普通咸以 L 表明之。）欄中。A,B 異號之對數，記於異號對數（普通以 U 表明之。）欄內。倘現象中有零之差數時，則將對數記於零差對數（普通以 d 表明之。）欄內。

第五步，總加之求上列各項對數之和，以得 N。

(2) 求算法 即引用 $r=\cos\pi U$ 公式，以求 r 之值。或借用『由 U 之值求 r 表——表見附錄』，以得其值亦可。

〔設例〕 今仍用積乘率法中夫婦年齡相關之例，以說明此法。

(1)組表　由第一步至第五步之手續,編組表式如次:——

A 夫　年	B 婦　年	D_A 夫年較均數之差	D_B 婦年較均數之差	L 同號對數	U 異號對數	d 零差對數
22	18	−8	−8	1		
24	20	−6	−6	1		
26	20	−4	−6	1		
26	24	−4	−2	1		
27	22	−3	−4	1		
27	24	−3	−2	1		
28	27	−2	+1		1	
28	24	−2	+2	1		
29	21	−1	−5	1		
30	25	0	−1			1
30	29	0	+3			1
30	32	0	+6			1
31	27	+1	+1	1		
32	27	+2	+1	1		
33	30	+3	+4	1		
34	27	+4	+1	1		
35	30	+5	+4	1		
35	31	+5	+5	1		
36	30	+6	+4	1		
37	32	+7	+6	1		
平均數 =30	平均數 =60	N=20		L=16	U=1	d=3

(表 102)

(2) 求算

令 $N=20,\quad d=3,$

$L=16,\quad u=1,$

先代入公式,

$$U=\frac{U+\left(\frac{\frac{U}{U+L}}{2}+\frac{1}{2}\right)d}{N},$$

$$=\frac{1+\left(\frac{\frac{1}{1+16}}{2}+\frac{1}{2}\right)\times 3}{20},$$

$$=\frac{1+\left(\frac{\frac{2+17}{34}}{2}\right)\times 3}{20},$$

$$=\frac{1+\frac{19}{68}\times 3}{20},$$

$$=\frac{68+19\times 3}{1360},$$

$$=\frac{68+57}{1360},$$

$$=\frac{125}{1360},$$

即 $=.092$。

再代入公式，

$$r=\cos\pi U,$$

$$=\cos\pi\times\frac{92}{1000},$$

$$=\cos\left(18\cancel{0}\times\frac{\overset{23}{\cancel{92}}}{\underset{25}{\cancel{1000}}}\right),$$

$$=\cos\frac{18\times 23}{25},$$

$$=\frac{414}{25},$$

$$=\cos 16.56^{\circ}.$$

查表 $r=.9584$。

今若用附錄中所載『由 U 之值求 r 表』，

則　$r=.9584^{*}$。

E. 變量相應法(The Method of Concurrent Deviations) 斯法係從二事實互相之變量，以求關係係數。其進行之手續，亦分兩層：

(1)組表法　卽按事實發現之時期，順次排列。然

* 因該表中無 .092 之 U 值，故引用比例法，以推測其結果。$\because 10:2=103:x$，$x=\frac{103\times 2}{10}=\frac{206}{10}=20.6$，$\therefore r=.9604-.00206=.9584$。

後依其逐期數量之增減，以定正負。其編製之步驟，計分兩項:——

第一步，將兩事實按期排列。

第二步，將所有數量比前期較大者，標以正號。反是，標以負號。若前後兩期相埒，並無起伏，則標以零號。以示中性的現象。

(2) 求算法　當代入公式 $r=\pm\sqrt{\pm\frac{2c-N}{N}}$ 之先，仍有數事。

第一步，查出現象之次數，得N。

第二步，查出(+,+)及(-,-)相符之對數，又(+,-)不符之對數，又(0)中性之次數。

第三步，倘現象中無(0)中性之項數，即比較相符或不符之對數，擇其大量者，定爲變量相應數(the number of concurrent deviation)。若一方有一(0)號，或兩方有一(0)號時，即在相符與不符對數中，各加 $\frac{1}{2}$。有兩(0)號時，則各方加一。餘類推。最後取相符不符兩量之較，大者令爲變量相應數(普通多以C字代

表。)

第四步,將以上三步求出之 N,C 二數,代入公式,

$$r=\pm\sqrt{\pm\frac{2C-N}{N}}。$$

〔設例〕　今取中國歷年國際貿易之淨值爲例證。

(1)組表　按第一第二兩步手續,製表如下:——

中國國際貿易之淨值

數目見中國年鑑　單位爲海關銀一千兩

年次	進口淨數	出口數	總數	進出口佔總數之百分比		各年較上年之增減	
				進口	出口	增 +	減 −
1908	394,505	276,660	671,165	58	42		
1909	418,158	338,992	757,150	55	45	−	+
1910	192,964	380,833	843,798	54	46	−	+
1911	471,503	377,338	848,842	56	44	+	−
1912	473,097	370,520	843,617	56	44	0	0
1913	570,162	403,305	937,468	59	41	+	−
1914	569,241	356,226	925,468	61	39	+	−
1915	454,475	418,816	873,336	52	48	−	+
1916	516,406	481,797	998,204	52	48	0	0
1917	549,518	462,931	1,012,450	54	46	+	−
1918	554,893	485,883	1,040,770	53	47	−	+
1919	646,997	630,809	1,277,807	51	49	−	+
1920	762,250	541,631	1,303,881	59	41	+	−

(表 103)

(2)求算　按第一第二第三各步手續得，

$$N=12,\qquad C=10+1,$$

第四步，代入公式則，

$$r=\pm\sqrt{\frac{2C-N}{N}},$$

$$=-\sqrt{\frac{2\times11-12}{12}},$$

$$=-\sqrt{\frac{22-12}{12}},$$

$$=-\sqrt{\frac{10}{12}},$$

$$=-\sqrt{.8333},$$

$$=-\ .91。$$ 此爲可靠之負關係。

F. 求消長係數法 (The Method of Regression Coefficients)　前述諸法，固可從 r 之值，以表明 A,B 二量相因之關係，惟其作用僅在測算各現象集中或分散之程度耳。至若二量中此量變動，彼量如何相應；彼量變動，此量又如何相應；斯等相應推演，從已知而及未知，由已往而測未來諸原理，則尤非用此法，不足以闡發其彼此消長之定律。其計算步驟，亦分兩層：——

(1) 組表法　其手續與乘積率法中之組表同。

(2) 求算法　其公式如下：

先用公式　$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}$ 求得 r 之值。

次令　x, y= 二種分配中特定之變量，

則　$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$。

$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$。

〔設例〕　仍用乘積率法中夫婦年齡之例，求其消長係數。

(1) 組表　其方法與形式，見乘積率法之例題內。

(2) 求算　用前法求得　$r=.85$，$\sigma_x=4.02$，$\sigma_y=4.17$。

代入公式，　$X=.85\frac{4.02}{4.17}Y$，

$=\frac{3.417}{.417}\ Y$，

$=.84\ Y$。

卽當夫年每變動一單位時，婦年相應之變化爲 .84。

又 $$Y = .85\frac{4.17}{2.02}x,$$

$$= \frac{3.5445}{4.02},$$

$$= .88。$$

卽當婦年每一單位變化時,夫年亦僅有相應 .88 之變化。

查本例可從夫年變化之現象，而推測婦年之變動。反是,亦可由婦年之變動,而推算夫年之變化。斯卽統計中由已知測未知之最要原則也。

G. 求相關比例法(The Method of Correlation-ratio)

以上所述各法（除求消長消數，等級差異及異號對數法外。），多適用於直線的關係。若其相互現象成曲線時，則非用皮爾生氏相關比例公式 (Pearson's correlation-ratio formula) 不可。其理由卽在求各行列之標準差量,與全體平均差量之比例也。至於所有進行手續,亦分組表與求算兩層:——

(1) 組表法　其方法及形式均與第一法同。

(2) 求算法　引用皮爾生之公式　$\eta = \frac{\Sigma}{\sigma_y}$，卽 =

$\dfrac{\sqrt{\dfrac{\Sigma\{n_x(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2\}}{N}}}{\sigma_y}$。　最先亦須將公式中各種代表數目求出，方可代入公式以計算之。今分步以述之：——

第一步，先將表中各縱行 (n_x) 與各橫行 (n_y) 之項數總加之(卽與求 r 表中之 f 同。)。

第二步，計算橫行所有 Y 之平均數，以 $\overline{Y}$ 表明之(卽求所有 Y 之算術的平均數。)

第三步，計算各縱行 y 之平均數，以 $\overline{Y}_x$ 表明之。

第四步，計算所有 Y 標準差量之平方，以 σ_y^2 表明之。

第五步，將各項 $\overline{Y}_x$ 減去算術平均數 $\overline{Y}$，得各縱行平均數對於全體平均數之差量。其各項差量以 $(\overline{Y}_x-\overline{Y})$ 表明之。

第六步，將上步所得之差量自乘，以 $(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2$ 表明之。

第七步，將各縱行 (n_x) 乘各項 $(\overline{Y}_x-Y)^2$。——卽與在標準差數中求 fd^2 之法同。

第八步，求各項之和得 $\Sigma\{n_x(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2\}$。—— 卽與

求 Σfd^2 之理同。

第九步,以 n 項數除之,求其方根,得各行平均數之標準變量,即 $\sqrt{\dfrac{\Sigma\{n_x(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2\}}{N}}$。

第十步,用 σ_y 除之,得相關比例。普通多以 η 表明之。

〔設例〕　茲就美國某城學生每人所佔教育費與每教師所授學生之關係,而求其相關比例。(例見 Rugg: Statistical Methods Applied to Education)。

(1)組表　依第一法將本例事實組表如下:——

(2) 求算 由第一步至第七步之手續，得 N_x, $\overline{Y}_x$, $\overline{(y_x-y)^2}$ 等數。惟因上列各數係從假定平均數 (5) 而求出者，故仍須用更正數法，以推測其確數。

則，
$$C\overline{Y}=\frac{59}{60}=.9833,$$

$$C\overline{Y}^2=.967,$$

$$\frac{\Sigma fd^2}{N}=\frac{335}{60}=5.5833,$$

$$\sigma_y^2=5.58-.97=4.61,$$

$$\sigma_y=\sqrt{4.61}=2.15,$$

而
$$Y=\text{假定平均數}+C\overline{Y},$$
$$=5+.983=5.983。$$

經過第八步手續得，

$$\Sigma\{N_x(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2\}=(4.08+9.12+116.15+33.66+7.45+.01+.46+.16+8.78+3.04+10.3+50.93)=244.14。$$

由第九步得，

$$\Sigma=\sqrt{\frac{\{N_x(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2\}}{N}},$$

$$=\sqrt{\frac{244.14}{60}},$$

$$=\sqrt{4.07},$$

$$=2.017。$$

由第十步得，

$$\text{相關比例}, \quad \eta=\frac{\sqrt{\dfrac{\{N_x(\overline{Y}_x-\overline{Y})^2\}}{N}}}{\sigma_y},$$

$$=\frac{2.017}{2.15},$$

$$=.94。$$

因相關比例既爲求各行標準差與全體平均差之比例，故常爲正數。卽在 0 與 1 之間。又當組表求得 r 之後，如何解決其相關現象爲直線與否，此亦屬一重要問題也。Blakeman 曾定有標準；謂如相關現象爲直線時，則 $\frac{\sqrt{N}}{.67449}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\eta^2-r^2}$ 必小於 2.5；如上例 $\frac{\sqrt{148}}{.67449}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(.83)^2-(.47)^2}=6.169>2.5$，故知其爲非直線相關。

第四節　實得 r 確度之考察法與更正法

前述各法，雖足測算二種事實相關之係數。然每以測算工作之精粗，觀察範圍之鉅細，則所得 r 值之可靠程度

(the degree of reliability)，輒有不同。爰揭考察及更正諸法於下，以資參考。

A. 考察法　斯法卽應用或有差誤之定律 (the law of probable error)，以考察實得 r 之可靠程度。其理係根據次數曲線 (frequency curves) 之原理，推測而得。倘令全部現象之分配爲集中對稱時，則在 (+P.E.) 與 (−P.E.) 之間，必含有全部項數之半。進一步言之，卽可依其計算之法則 (r±P.E.)，而規定關係係數變動之範圍也。

(1) 求算公式　用下列公式，以定或有差誤。(每簡爲「或差」。)

$$\text{P.E.}=\frac{.67449\,(1-r^2)}{\sqrt{N}}\ {}^{*}。$$

如上述商店實習與圖畫技能之例，其

$$r=.48,\qquad N=207,$$

代入公式，

$$\text{P.E.}=\pm\frac{.6745\,(1-.48^2)}{\sqrt{207}},$$

* 此公式爲多數數學家從經驗而得者。學者如欲討論其構成之原因，可參看 Bowley A. L., Elements of Statistics, Part II.

$$=\pm\frac{.6745\times.77}{14.39},$$

$$=\pm\frac{.52}{14.39},$$

$$=\pm.036\text{。}$$

又如上述教授學生數與每生所佔教育費之例，

其　　$N=60$，　　$\eta=.94$。

代入公式，

$$\text{P.E.}=\frac{.6745(1-\eta^2)}{\sqrt{N}},$$

$$=\frac{.6745(1-.94^2)}{\sqrt{60}},$$

$$=\frac{.6745(1-.8836)}{7.746},$$

$$=\frac{.0785}{7.746},$$

$$=.01+\text{。}$$

依統計上之數理，凡相關係數之真値，必在 r±P.E. 之限度以內。又係數之真値，至少不得小於 3P.E.。否則，必不可靠。晚近統計家從經驗之證明，輒謂 r 即等於 3P.E.，其相關之可靠程度亦甚微。若超過三倍愈多，則可靠程度愈高。能達 4P.E. 或 5P.E. 以上尤確。

易言之，P.E. 卽爲測算 r 之不可靠性者。蓋 r 之不可靠程度，乃與項數之平方成反比。

玆以上列二例爲證明，乃知相關之可靠程度甚高。

例 I.　$(r=.48)>(12\ P.E.=12\times.036)$

例 II.　$(\eta=.94)>(93\ P.E.=93\times.01)$

B. 更正法　上述考察法，係就已得 r 之值，而鑑別其可靠程度之高低，屬於消極的工作。若夫更正法，則就實得 r 值中，經過更正手段，以求真確之 r，屬於積極的工作。其方法分兩種:——

(1) 更正 r 受變差 (Variable Error) 之方法　斯法係指每次測算觀察偶然差誤之更正，其公式如下:

設 A.B. 爲二種相關之事實，

$P=A$ 之真確數量，

$Q=B$ 之真確數量，

$r_{pq}=A,B$ 之真確 r，

$P_1,P_2=A$ 之二種獨立數量，

$Q_1,Q_2=B$ 之二種獨立數量，

$r_{p.q1}$=A 之第一種數量與 B 之第一種數量之 r,

r_{p1q2}=A 之第一種數量與 B 之第二種數量之 r,

r_{p2q1}=A 之第二種數量與 B 之第一種數量之 r,

r_{p2q2}=A 之第二種數量與 B 之第二種數量之 r,

r_{p1p2}=A 之兩種數量之 r,

r_{q1q2}=B 之兩種數量之 r,

則 $$r_{pq}=\frac{\sqrt[4]{(r_{p1q1})(r_{p1q2})(r_{p2q1})(r_{p2q2})}}{\sqrt{(r_{p1p2})(r_{q2q1})}},$$

或 $$=\frac{\sqrt{(r_{p1q2})(r_{p2q1})}}{\sqrt{(r_{p1p2})(r_{q1q2})}}。$$

(2) 更正 r 受恆差(Constant Error)之方法　斯法係指更正兩量中一種或二種之恆有差誤而言。其公式有三:

設 r_{pq}=A,B 兩量之真確 r,

r'_{pq}=A,B兩量之實得 r,

r_{pv},r_{qv}=A,B 各與混入之第三量之 r,

r_{pw} =A,B 中又混入不合宜之 r,

(a) 更正 r 減縮(Constriction) 之量時,公式爲,

$$\mathbf{r}_{pq}=\frac{\mathbf{r}'_{pq}}{\sqrt{1-\mathbf{r}_{pv}^2}}。$$

(b)更正r脹大(Dilation)之量時,公式為,

$$\mathbf{r}_{pq}=\mathbf{r}'_{pq}\cdot\sqrt{1-\mathbf{r}_{pv}^2-\mathbf{r}_{pw}^2}。$$

(c)更正r偏僻(Distortion)之量時,公式為,

$$\mathbf{r}_{pq}=\frac{\mathbf{r}'_{pq}-(\mathbf{r}_{pv})(\mathbf{r}_{qv})}{\sqrt{(1-\mathbf{r}_{pv}^2)(1-\mathbf{r}_{qv}^2)}}。$$

〔註〕　凡由某一原因所生之恆差，其影響於任一列數量，而使r之值減少時,稱為『減縮』。反是,為『脹大』。設其差誤影響於兩列數量時,稱為『偏僻』。

以上兩種方法,雖有更正r真值之作用。但一般統計家嫌其手續煩瑣,難於計算,每謂與其經過更正之繁複，曷若精密觀察，審慎作始。是則尤為吾人所當注意者。

(3)審定r簡便之規律　除考察更正兩法外,對於實得r值尚有審定之規律如下:

(a)倘r值小於P.E.時,則完全無可靠之價值。

(b)倘r值大於P.E.六倍時，則必有實際可信之價值。

(c)倘 r 值小於 .30 時，則其相關程度，尚不能必。

(d)倘 r 值在 .50 以上時，則相關率已可決定。

第五節　評論 r 各種計算法之效用

A. 普通法　斯法係統計上最普遍之方法。其效用有四：(一)應用之範圍最廣。(二)計算上如有差誤，易於發現。(三)當數量繁複時，亦便計算。(四)能將各個數量分配之位置，在表中顯出。其弱點，卽在手續較煩。

B. 乘積率法　斯法係統計上常用之方法。其效用有三：(一)手續簡單。(二)計算便捷。(三)實業經濟等界當數量較少時，輒採用之。其弱點有二：(一)當事實繁重時，不便計算。(二)各數量分配之位置，不能表明。

C. 等級差異法　斯法在統計上應用之範圍甚狹。其效用有二：(一)專就相關各數量所居之等級，而求其兩量之關係。至於全部各數之差量，悉不計較。(二)計算手續，極爲便捷。其弱點卽在手續疏忽，且不普及。

D. 異號對數法　斯法在統計上應用之範圍亦甚狹。其效用僅爲計算簡易。而弱點亦在稍嫌疏忽。

E. 變量相應法　斯法亦爲統計上常用之方法。其效用有二:(一)當短期事實變動之比較,最宜用此法。以表現其起伏之關係。(二)計算手續甚簡便。其數理與皮爾生之公式同。其弱點亦在祇可表現其起伏之關係,不如第一二兩法之精密。

F. 消長係數法　斯法實爲精密統計中常用之法。其效用有二:(一)除察覺兩量關係係數外,猶能測彼此相互消長之程度。(二)因有(一)之效用,統計上即發生由已知推未知,從過去測將來之定律。其弱點在手續稍繁,數理稍深,初學者每畏避之。

G. 相關比例法　以上諸法,均可適用於直線關係現象中。至若非直線相關時,則必以該法計算,以示其相關比例。其弱點在手續繁難。

總之,吾人當研究一問題時,務須詳審其主旨,酌定方法。切忌預存成見,避難就易。

摘　要

1. 關係及關係係數之意義:

A. 關係之意義　兩種或兩種以上事實間相關之

現象，名之曰關係。

B. 關係係數之意義　用簡單之數字，表明兩量相關之程度，名之曰關係係數。

2. 關係之類別有三：

A. 正關係　兩種現象，同爲增減。

B. 負關係　兩種現象，增減相反。

C. 無關係　彼此增減，毫不相關。

3. 關係係數之計算法　共七種：

A. 普通法　分組表與求算兩層：——

(1) 組表手續計分四步。

(2) 求算公式

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}。$$

B. 乘積率法　分組表與求算兩層：——

(1) 組表手續計分七步。

(2) 求算公式

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y},$$

$$或=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}。$$

C. 等級差異法 分組表與求算兩層:——

(1) 組表手續分四步。

(2) 求算公式

$$r=2\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right),$$

$$\text{或}=2\ \cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1\text{。}$$

D. 異號對數法 分組表與求算兩層:——

(1) 組表手續分五步。

(2) 求算公式

$$r=\cos\pi U\text{。}$$

E. 變量相應法 分組表與求算兩層:——

(1) 組表手續分兩步。

(2) 求算公式

$$r=\pm\sqrt{\pm\frac{2C-N}{N}}\text{。}$$

F. 消長係數法 分組表與求算兩層:——

(1) 組表手續與第 2 法同。

(2) 求算公式

$$x=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y。$$

$$y=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x。$$

G. 相關比例法　分組表與求算兩層:——

(1) 組表手續與第2法同。

(2) 求算公式

$$\eta=\frac{\sqrt{\frac{\{N_x(\bar{y}-\bar{y})^2\}}{N}}}{\sigma_y}。$$

4. 實得 r 確度之考察法與更正法:

A. 考察法

(1) 用或有差誤之定律,以考察 r 不可靠之程度。

公式為,

$$P.E.=\frac{.67449(1-r^2)}{\sqrt{N}}。$$

B. 更正法

(1) 更正 r 受變差之方法。

公式為,

$$r_{pq}=\frac{\sqrt{(r_{p_1q_2})(r_{p_2q_1})}}{\sqrt{(r_{p_1p_2})(r_{q_1q_2})}}。$$

(2) 更正 r 受恆差之方法。

(a) 更正 r 減縮之公式，

$$r_{pq}=\frac{r'_{pq}}{\sqrt{1-r_{pv}{}^2}}。$$

(b) 更正 r 脹大之公式，

$$r_{pq}=r'_{pq}\cdot\sqrt{1-r_{pv}{}^2-r_{pw}{}^2}。$$

(c) 更正 r 偏僻之公式，

$$r_{pq}=\frac{r_{pq}-(r_{pv})(r_{qv})}{\sqrt{(1-r_{pv}{}^2)(1-r_{qv}{}^2)}}。$$

(3) 審定 r 簡便之規律　凡 r 之值必大於 P.E. 三倍以上，倘小於 .30，則不足靠。

5. 評論 r 各種計算法之效用　各種計算法之製作既不同，其效用亦自異。惟統計者應用適當，則功效遂見耳。

(1) 兩量事實中各數之絕對價值，與分配位置皆須察算者，則用普通法。

(2) 兩量事實中，僅計算各數之絕對價值者，則用乘積率法。

(3) 兩量中之計算，祇考察其地位等級，而不論

絕對數量者，則用等級差異法。

(4) 兩量中僅審查其變動之異同者，則用異號對數法，或變量相應法。

(5) 欲查覺兩量相互消長之係數者，則用消長係數法。

(6) 欲查覺非直線相關之比例者，則用相關比例法。

問　　題

1. 試就本班學生之年齡與高度，求其相關係數。

2. 試就海關貿易册中查出五十年來輸出輸入之總額，求其 r 。

3. 學者各於中華年鑑中，自選適當之材料，用本章所述諸法以求 r 。并比較其確度。

4. 由第三練習題求得之 r，用考察法及更正法，以求其可靠之程度。

5. 試用相關比例法，求下例之 η。

(表 105)

夫之年齡	婦之年齡 15—	20—	25—	30—	35—	40—	45—	50—	55—	60—	65—	70—	$N_y=f$
15—	8	3											11
20—	20	162	7	2	1								192
25—	17	184	364	28	6	1	1						601
30—	4	48	275	187	18	13	4	1	1				551
35—		16	124	165	176	28	18	6	2	1			536
40—		4	62	74	95	89	20	9	5	3	1		362
45—		1	14	20	15	76	66	14	8	5	2	1	222
50—			2	12	6	42	38	42	15	7	4	1	169
55—			1	3	1	23	17	31	34	8	5	3	126
60—				1	1	8	7	13	20	24	7	5	86
65—						2	3	5	6	10	16	2	44
70—								1	2	4	6	1	14
$N_x=f$	49	418	849	492	319	282	174	122	93	62	41	13	2914

6. 試求我國十年或二十年來棉花或絲茶出產額，與平均價格之 r。

7. 試就下列五十三名學生所作代數試驗 I 與試驗 II 之分數，而求其 r。

第一次試驗之分數	第二次試驗之分數	第一次試驗之分數	第二次試驗之分數
27	20	22	8
27	18	23	16
27	14	27	18
16	3	16	6
27	13	25	12
18	3	22	11
27	16	14	3
9	3	17	7
15	3	25	17
15	7	22	4
21	8	5	2
20	8	25	15
26	17	18	4
10	2	27	23
22	9	20	12
24	20	18	5
16	2	27	22
13	6	24	10
23	9	24	9
15	2	24	12
22	11	22	10
20	6		
17	8		
21	19		
20	7		
20	9		
15	5		

(表 106)

參考書

1. Elderton, W. P. and E. M.: Primer of Statistics, Chaps. V, VI, pp. 55-84.
2. King, W. I.: Elements of Statistical Method, Chap. XVII, pp. 197-215.
3. Pearson, Karl: The Grammar of Science, Chaps. IV and V.
4. Bowley, A. L.: Elememts of Statistics, Part II, pp. 316-334.
5. Yule, G. U.: Introduction to the Theory of Statistics, Chap. IX, pp. 157-190; Chap. X, pp. 191-206.
6. Secrist, H.: An Introduction to Statistical Methods, Chap. XII, pp. 425-469.
7. Rugg, H. O.: Statistical Methods Applied to Education, Chap. IX, pp. 233-309.
8. Jones, D. C.: A First Course in Statistics, Chap. X, pp. 102-114.

第十六章 勘校法

萬物現象，爲狀夥頤。苟欲盡量調查，常爲人力之所難能。故統計作用，卽在以估計或推算 (estimate) 之方法，而闡發其結果(倘所研究之問題，範圍狹小，則自以全體統計爲宜。)。例如統計我國煤礦地藏之量，則雖盡天下礦

學測量之專家，從事考察，亦無由得其確數。故中國地質考察會(The Geological Survey of China)，卽引用估計法，以推算各省煤田總量爲 23435000 噸 (見 1921 年 China Year Book)。大概凡此類礦產的統計，歐美各國亦多藉精密之估計，以定其數量。又如統計一國人口之死亡率，亦祇能根據大量的觀察，推得近似的 (approximate) 比率，而爲研究社會現象或保險事業之參考。繇是可知歐美統計家嘗謂完全的絕對的正確，爲統計界罕有之事 (perfect and absolute accuracy rarely attainable)，此說洵非虛語。故統計者當進行之先，卽應根據問題之性質，預定確度之標準 (the standard of accuracy)。然後循此求算，自可得相對的正確之結果 (relative accuracy is the desideratum)。譬如比較歷年進出口貨物之數量，倘爲精密之報告，自以海關兩爲單位 (今日我國海關貿易報告册卽如此。)。設爲研究其逐年起伏之變動，則不妨以百兩，千兩或萬兩爲單位，或用百分數以代表之，均無不可。又若統計各省人口之密度，普通咸以每方里內人口平均數爲比較。凡此種種，皆足證按照研究之主旨，而求獲其相當之確度也。

統計方法既假估計之手段,以推求相對的結果。故當估計時,尤須審慎。然人非機械,而事物綦詳,設使對於取材方面,稍覺失宜;計算手續,或略疏忽;則種種差誤*,遂潛伏於不知不覺之間,而影響所及,竟或有毫釐千里之訛。斯則非用精密之勘校法,不足以淘汰其差誤,而增其確度。本章所論者,卽將統計上各方面最易發生之差誤,以及勘校諸法,分類詳述,藉供參考。

第一節　關於推算結果上差誤之勘校

凡統計結果上之差誤,其構成原子,皆由於小部分內之差誤。至論其有效限度,卽在各小部分差誤之總數,愈小愈好。最多不能超過百分之五以上(此從統計經驗上之習慣。)。否則所推算之結果,必無可靠之價值。

茲假令　　$m=$推算總數,　　$n=$項數,

$E=$差誤總數,

* 〔差誤之意義〕差誤者 (error), 卽指估計或推算數 (estimate value) 與實在數 (true value) 相差之比例。如估計數小於實在數,則爲正差 (positive errors)。反是爲負差 (negative errors)。〔差誤之求算〕令 m 爲推算數, m′ 爲實在數,差數爲 E, 則 $E=\frac{m'-m}{m}$, 或 $m'=m(1\pm E)$。設推算數與實在數無差誤時,則 $E=o$。

則 $$m=m_1+m_2+m_3+\cdots\cdots m_n,$$

$$E=E_1+E_2+E_3+\cdots\cdots E_n,$$

實値之總数 $=m(1+E)$。

實値之各部 $=m_1(1+E_1),m_2(1+E_2)\cdots\cdots m_n(1+E_n)$。

公式爲,

$$m(1+E)=m_1(1+E_1)+m_2(1+E_2)+\cdots\cdots m_n(1+E_n)。$$

但因 $$m=m_1+m_2+\cdots\cdots m_n,$$

兩方減同量 $$mE=m_1E_1+m_2E_2+\cdots\cdots m_nE_n,$$

即 $$E=E_1\times\frac{m_1}{m}+E_2\times\frac{m_2}{m}+\cdots\cdots E_n\times\frac{m_n}{m}。$$

〔設例〕 某工會報告三工廠罷工人數:甲廠爲八百八十八,乙廠爲三百六十,丙廠爲二百四十。其實甲廠罷工工人爲八百九十,乙廠爲三百六十六,丙廠爲二百七十。依上列公式,

$$E=E_1\times\frac{m_1}{m}+\cdots\cdots E_n\times\frac{m_n}{m}$$

則差誤之總値

$$=\frac{1}{111}\times\frac{888}{1488}+\frac{1}{60}\times\frac{360}{1488}+\frac{1}{8}\times\frac{240}{1488},$$

$$=\frac{888}{165168}+\frac{360}{89280}+\frac{240}{11904},$$

$$=\frac{111}{20646}+\frac{6}{1488}+\frac{10}{496},$$

$$=\frac{81923328+61442496+307212480}{16228939008},$$

$$=\frac{450578304}{16228939008},$$

$$=\frac{2.7}{100}。$$

按此例之差誤總値，僅爲百分之二點七，故信其確度甚高。雖然，學者於此，或不免發生疑問，卽所定各項差誤之成分（如$\frac{1}{111}$；$\frac{1}{60}$；$\frac{1}{8}$是。），如何察覺。倘有徵求之法，何若將實値算出。著者曰：不然。因每次統計，往往不能將各項實値搜得，善從事者，可擇其現象尤鉅者，設法徵求，以勘校差誤，而考證其結果可靠之程度。例如統計一地一省或全國工廠罷工，或停業工人之數。當事者若慮各方面之報告或有差錯，則不妨將最大之數廠，切實調查，以顯明其差誤之度。倘爲數甚微，則其餘各小工廠之報告，縱有差誤，亦無甚影響，大可置之不問也。

第二節　關於各部計算手續上差誤之勘校

統計手續上最常用之計算，不外加,減,乘,除,平均，自乘，開方等等。而加減兩法，最稱簡便。如遇數目過繁複時,可利用計算機,旣準且速。若夫乘除各種,則計算時或有錯誤,今分述其勘校各法。

A. 乘法之勘校　玆首揭其公式,次示以實例。

令　m=乘數,

n=被乘數,

x=乘數之能差,*

y=被乘數之能差,

則　$(m+x)(n+y)=mn+my+nx+xy$,

或　$(m-x)(n-y)=mn-my-nx+xy$,

故乘積之實値爲

$$mn+xy\pm(my+nx)。$$

但普通因 xy 之値較諸 $my+nx$ 之值，佔極微之比例,每從略。以是上列公式,可簡爲,

$$mn\pm(my+nx)。$$

* 能差卽 possible errors。

〔設例〕　假令某事實調查之結果爲 646×12410,

$x=0.2$,

$y=40$,

$m=646$,

$n=12410$,

代入

$8016860+8\pm(646\times40+12410\times0.2)$,

$8016860\pm(25840+2482)$,

則乘積應 $=8016860\pm28322$,

即 $=8045190$ 或 7988546。

倘以 xy 之値過微而略之,則其積爲

$8016860\pm(646\times40+12410\times0.2)$,

$8016860\pm(25840+2482)$,

8016860 ± 28322,

即 $=8045190$ 或 79885.38,

故知此積之較確數量爲 8,000,000。

B. 除法之勘校　勘校公式如下:

令　$d=$除數,

$a=$被除數,

$x=$被除數之能差，

$y=$除數之能差，

按理知商數必立於下列二式之間，

$$\frac{a+x}{d-y}\text{ 及 }\frac{a-x}{d+y}。$$

但 $$\frac{a+x}{d-y}-\frac{a-x}{d+y}=\frac{(a+x)(d+y)-(a-x)(d-y)}{d^2-y^2},$$

$$=\frac{2dx+2ay}{d^2-y^2}。$$

因知能差量必與上數之半相近，卽爲

$$\frac{dx+ay}{d^2-y^2}。$$

所以商數大概等於

$$\frac{a}{d}\pm\frac{dx+ay}{d^2-y^2}。$$

〔設例〕 設某事實調查之報告爲 $5600\div4$。

$d=4$,

$a=5600$,

$y=.2$,

$x=3$,

代入公式則商數爲，

$$\frac{5600}{4} \pm \frac{4\times3+5600\times.2}{16-.4},$$

$$=1400\pm\frac{1132}{15.6},$$

$$=1400\pm79,$$

$$=1479^{+}，\text{或 } 1321^{-}。$$

按上解足證此結果之最高確度在千位數，百位數亦尙可靠，因能差數係在十位也。

C. 自乘數之勘校　其公式如次:——

令　　$n=$自乘數，

　　$E=$能差量，

按數理知正確自乘數必在下列二數之間，

$$(n+E)^2 \text{ 及 } (n-E)^2。$$

因　$(n+E)^2=n^2+2nE+E^2,$

　$(n-E)^2=n^2-2nE+E^2,$

故　自乘數 $=n^2+E^2\pm2nE$。

但平常多因 E^2 之値甚微小，每略去。其公式卽，

$$n^2\pm2nE。$$

〔設例〕　某種事實調查之結果爲$(4300)^2$。

即 $n=4300$,

$E=40$,

代入

$$(4300)^2=(4300)^2+(40)^2\pm(2\times4300\times40),$$
$$=18490000+1600\pm344000,$$
$$=18835600^+ \text{ 或 } 18147600\text{。}$$

如略去 E^2, 則爲

$$(4300)^2=(4300)^2\pm(2\times4300\times40),$$
$$=18490000\pm344000,$$
$$=18834000^+, \text{ 或 } 18146000^-\text{。}$$

D. 方根之勘校　其公式如下:——

令 $n=$求得之方根,

$E=$能差,

則真實方根必立於下列二數之間,

$$\sqrt{n+E} \text{ 及 } \sqrt{n-E}\text{。}$$

而能差之概量爲

$$\sqrt{n}-\sqrt{n-E}\text{。}$$

此値僅爲 $\sqrt{E}$ 之分數。故該差可由求得方根,而計算之。

〔設例〕 求某事實之方根，其數為 $\sqrt{14,400}$。

令　$E=50$，

開方後其數必列於 $\sqrt{14,450}$ 及 $\sqrt{14350}$ 之間。

代入，

$$E=\sqrt{14400}-\sqrt{14350},$$
$$=120.0-119.79,$$
$$=0.21^{-}。$$

但其原數之能差為 50，而其方根為 7^{+}。所以方根之能差較原數能差之方根為甚小。即以上例證之，0.21 自較小於 7+（約當 $\frac{3}{100}$）。

E. 平均數之勘校　平均數勘校之公式如下：——

令　$m_1, m_2, m_3\cdots\cdots=$各項推算數，

$n=$項數，

$E_1, E_2, E_3\cdots\cdots=$各項推算數之能差量，

從推算數求出之平均數$=\frac{\Sigma m}{n}$，

$$\text{真實平均數}=\frac{(m_1+E_1)+(m_2+E_2)+(m_3+E_3)\cdots\cdots}{n}。$$

簡書之，即　$\frac{\Sigma m+\Sigma E}{n}$。

或　$$\frac{\Sigma m}{n}+\frac{\Sigma E}{n}。$$

故求真確平均數之公式,

即　$$\frac{\Sigma m}{n}\pm\frac{\Sigma E}{n}。$$

〔設例〕 某事實調查之結果爲,

$$m_1, m_2, m_3=650, 846, 960,$$

$$E_1, E_2, E_3=6, 14, 20,$$

$$N\quad=3,$$

代入,

$$真實平均數=\frac{(650+846+960)}{3}\pm\frac{(6+14+20)}{3},$$

$$=832+, 或\ 805.3。$$

F. 總集之勘校　關於各項報告數量之總結,位數必須統一。倘當數量繁鉅時,其確度標準每在千數,萬數,甚至在百萬以上。統計者於事前必審訂標準,然後將各數相加,以去其奇零不整之數。例如十二年我國現有軍隊數如下:——

中央	400,000
京兆	8,000
直隷	30,000
東三省	140,000
山東	40,000
河南	55,000
山西	50,000
江蘇	60,000
安徽	30,000
江西	1,602,000
福建	30,000
浙江	35,000
湖北	30,000
湖南	40,000
廣東	151,000
廣西	60,000
雲南	45,000
貴州	50,000
四川	180,000
陝西	50,000
甘肅	50,000
新疆	20,000

熱河	9,000
察哈爾	12,000
川邊	6,000
阿爾泰	2,000
塔爾巴哈台	1,000
共計	3,186,000

上表係統計全國軍隊之概數，故凡千數以下各數，皆略而不計。今重舉一例，以明其詳。

設 A,B,C,D,E…… 各地人口額數如下：——

A 地	23874
B 地	8780
C 地	12640
D 地	14000
E 地	6500
總集之數	65,790
正確近似數	65,800

按本例可見統計之習慣，除根據各項之標準確

度(如該例在百位數,其餘如十位,個位,諸數均略去。)外,他如約計包數之法,亦從四捨五入之例。

總之凡彙集各方面之報告,其數量自有精粗之別。惟相加時,須詳審該問題之主旨,規定確度之標準,幷從多數之現象,以求得最近似之總值。若分論各項時,則不妨依據其詳細數目。

G. 關係係數之勘校 其勘校之法,卽計算或差數對於關係係數之比例,詳見第十五章第四節。

第三節 關於徵集上缺漏之勘校

本節首述徵集材料缺漏上之插補法 (method of interpolation),次論勘校法 (method of accuracy)。

A. 插補法

人口,戶籍,工資種種統計,其調查時期(各地固不統一,卽於同地而先後各次,調查之年月,亦未適同。),編製組距,往往而異。且其間尤易有缺漏之處。故非作合理之插補,不足以表明一般之趨勢也。

玆舉一例,以說明之。

歷年各縣泥水匠工資統計（每月工資數）

年別＼地別	甲縣	乙縣	丙縣	丁縣	平均
民國五年	8.70*	6.00	7.20	6.90*	7.20
民國六年	9.00*	6.60	7.50*	7.50	7.65
民國七年	9.30*	6.90*	7.80	8.40	8.10
民國八年	9.60	7.20*	8.40	8.70*	8.47
民國九年	9.90	7.50	9.00*	9.00	8.85
民國十年	10.20*	7.80*	9.60	9.30	8.24

凡數字上方署有*號者，皆係補插之數。

（表 107）

按上表各平均工資數，可見近五年來實有同一增多之傾向。

B. 勘校法

當搜集材料時，自以多方調查，完密無遺爲善。惟實際上常不免有缺漏之處，前已言之。統計者於是不得不根據各方面情形，而發現此隱微之事實。但學者對於此隱微事實，須知其推測有方，絕不可任意塡補。下列數則，極宜注意。一方面可用以審查他人插補材料之當

否;一方面尤足以勘校自己填入事實之確度。

(1)須熟諳該事實每次之變率。

(2)須詳察本事實與有關各方面之影響。

(3)須就各方面之關係,而擬訂隱微事實之假定的條件。

茲就上例而應用此三項規律,以勘校其確否。

第一,問統計當事者對於各縣歷年工資之變率,是否澈底明瞭?

第二,問統計者對於一般生活程度之狀況(間接的關係),及甲乙等各縣工資相互之影響(直接的關係),是否精密考察?

第三,問統計者對於規定隱微事實之條件,是否根據各方?

學者倘能詳查上表之內容,及該數年間社會一般之現象,則對於此三項問題,自不難於解答也。

第四節 關於圖表製作上之勘校

圖表之作用,固爲統計終結時簡括綜合的表現。其製作上種種規則,詳見第九,十兩章。惟本節所述,僅列舉勘

校之要則數條，以供驗證。

(1) 核校所作圖表對於研究問題之性質，是否最爲適宜？

(2) 審訂所製圖表，能否將應研究之事實，完全表示？

(3) 檢查圖表內容，是否精確？

(4) 勘校圖表中所分配之各部分，是否將各事實之關係，明白現出？

(5) 審查所命標題之意義，是否明瞭與周延？對於對方人物理解之程度，是否適合？

(6) 稽核比例度格，是否精確？所放位置，是否適宜？所訂比度，是否明晰？對於最後縮小之圖式，是否仍能精當？

(7) 表中位置與空間之應用，是否經濟？圖式各線與顏色之應用，是否得當？

(8) 審查圖表之解釋，有無引人誤會之點？

第五節 總說

統計勘校工作，本應順各步之程序而審訂之。如第一

步，在審查應行討論事實之內容，規定命題。第二步，當選訂該問題有關之要件及單位。第三步，當擬定搜集材料之方法。第四步，當整理所得之材料。如尚有缺漏，應設法補徵。第五步，當計算各材料之現象，用數字以表示其結果之概況。總之，主事者對於各步均應時時注意。完成之後，亦當按各步而勘校之，藉免貽誤。又當結果公布時，尤須將全部進行之計劃，及問題原式，徵答情形，附錄於旁，藉供閱者之審查。其他各方面勘校之詳情，已數見前章，茲故從略。

摘 要

1. 勘校法之意義與效用。因統計之工作，每借估計法以推算其結果。故與真實狀況，或有出入。今用勘校各法，卽所以發現其差數，而證實其確度也。

2. 關於推算結果上差誤之勘校公式爲，

$$E = E_1 \times \frac{m_1}{m} + E_2 \times \frac{m_2}{m} + \cdots\cdots E_n \times \frac{m_n}{m}。$$

3. 關於各部計算手續上差誤之勘校:

A. 乘法之勘校公式，

真實乘數　$=mn+xy\pm(my+nx)$，

或　$=mn\pm(my+nx)$。

B. 除法之勘校公式，

商數　$=\frac{a}{d}\pm\frac{dx+ay}{d^2-y^2}$。

C. 自乘之勘校公式，

自乘數　$=n^2+E^2\pm 2nE$。

D. 方根之勘校公式，

方根或差之概數　$=\sqrt{n}-\sqrt{n-E}$。

E. 平均之勘校公式，

真實平均數　$=\frac{\Sigma m}{n}\pm\frac{\Sigma E}{n}$。

F. 總集之勘校公式，卽按事實之性質，確度之標準，而求得其最近似之總值。

G. 關係係數之勘校法。 卽檢查或差量與關係係數之比率。

4. 關於徵集上缺漏之勘校規律：

(1) 須熟諳所應研究事實遞次之變率。

(2) 須詳審本事實與直接間接各方法之影響。

(3)須按各方面之關係，而擬定插補時假定的條件。

5. 關於圖表製作上之勘校規則計八條，均不外勘校圖表之確度與應用耳，詳情見前。

問　題

1. 試將本級學生年齡，身材，目力，智力等測驗之成績，而勘校之。

2. 試就前各章研究問題之結果，用各法以勘校之。

3. 試取各雜誌上之圖表，詳細勘校。

4. 試插補下表，并勘校其確度。

近五年各地生活費指數表

年別＼地別	A地	B地	C地	D地	E地	F地	平均
七年	98.5		95.2	100.1		93.4	
八年		105.2		103	102.5		
九年	110.3	110.1	108.2	108.2		107.9	
十年	112.5		112		111.8		
十一年		115.8	116.2	117.5		115.8	

(表 108)

5. 讀者各取一問題，擬訂全部進行之手續。

參考書

1. Bowley, A. L.: Elements of Statistics, Chap. VIII, pp. 266-270.
2. Bowley, A. L.: Elementary Manual of Statistics, Chaps. II, III, IV, pp. 10-25.
3. King, W. I.: Elements of Statistical Methods, Chap. VIII, pp. 64-82.
4. Brinton, W. C.: Graphic Method for Presenting Facts, Chap. XVII, pp. 360-363.

附　錄

一　本書所用之縮寫符號等字

A ……………平均數

a……………算術的平均數，被除數

A. Av.; A_A……假定平均數

A, B, …………代表兩種測算相關之事實

a, b, …………代表兩量，或在假定中數兩方之個數

A. M. ………假定中點數

C. ……………更正數，變量相應數

Cm. …………米達之百分之一

d. ……………差數，零差對數，除數

d_M ……………距中差

E. ……………差誤，能差量

F, f……………次數

F_p ……………含有百分點組以外數量次數之和

f_p ……………含有百分點組中數量次數之和

$f_1, f_2 \cdots\cdots f_n$……各項重量

fd ……………次數與差數之積

g………………幾何的平均數

Σg ……………正號差數之和

H. ……………倒數的平均數

i ………………組距

i_p ……………組距數量

L ……………衆數所在組中之最低限，兩量同號之對數

M ……………中數之值

m ……………各數量，推算總數，乘數

m_0 ……………衆數

M. D. 或 A. D. 平均差

N, n …………項數，項數之總數，被乘數，自乘數

P ……………百分點．A種事實之真確數量

P. E. …………或差

P_p ……………百分點之值

q……………… B種事實之真確數量

Q ……………四分差

Q_1 或 L. Q. …下百分點

Q_3 或 U. Q. …上百分點

r ………………關係係數

Rg ……………距離

S………………總集之數

S. D. …………標準差

SK……………偏斜態

T. M. …………實得中點數

U ……………兩量異號之對數

V ……………差量係數

v………………本組低界限或高界限之值

v_p ……………含有百分點組低界限之值

W. ……………重

W. A.…………畸重均數

x………………數量

x_1, x_2 …………各項數量

y………………數量

y_1, y_2 …………各項數量

Z………………平均數中數衆數相併合之線

δ ………………平均差

δ_M ……………從中數所得之平均差

δ_{mo} ……………從衆數

δ_a ……………從算術均數

η………………相關比例

σ………………標準差

Σ………………相加之意

π………………周率

二　本書所用之公式

1. 求算術的平均數之公式

$$A = \frac{X_1 + X_2 + \cdots\cdots X_n}{f_1 + f_2 + \cdots\cdots f_n} \text{或} \frac{\Sigma x}{N}$$

2. 求算術的平均數之簡便公式

$$A = A.\ Av. + \frac{\Sigma d}{n}$$

3. 求畸重的平均數之公式

$$W.\ A = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots\cdots x_n f_n}{f_1 + f_2 + \cdots\cdots f_n}$$

4. 求幾何的平均數之公式

$$g = \sqrt[n]{X_1X_2\cdots\cdots X_n}$$

5. 用對數法求幾何的平均數之公式

$$\text{Log } M_g = \frac{\Sigma \text{ Log } x}{N}$$

6. 求倒數的平均數之公式

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{N}\Sigma\left(\frac{1}{X}\right), \qquad \text{或} \ \frac{n}{H} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \cdots\cdots \frac{1}{X_n}$$

$$\text{或} \quad H = \frac{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + \cdots\cdots \frac{1}{X_n}}{N}$$

7. 求中數之公式有六:

(a) $M = \frac{n+1}{2}$

(b) $M = \frac{n+1}{2} = x.5 - .5 = x$

(c) $M = \frac{n+1}{2} = x.5 + .5 = x+1$

(d) $M = \frac{n+1}{2} = x.5$

(e) $M = \frac{n}{2}$

$$(f)\quad M = V \pm \frac{\frac{n}{2} - F}{f} i$$

8. 求衆數之公式

$$(a)\quad M_o = A - 3(A - M)$$

$$(b)\quad M_o = L + \frac{f_2 i}{f_2 + f_1}$$

9. 求百分點之公式

$$P = V_p + \frac{\frac{P}{100}N - F_p}{f_p} i_p$$

10. 求四分差之公式

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

11. 求平均差之公式

$$M.D. = \frac{\Sigma(x - M)}{N}$$

或 $$= \frac{\Sigma d_M}{N}$$

12. 求平均差簡便之公式

$$M.D. = \frac{\Sigma fd + C(Nb - Na)}{N}$$

13. 從算術平均求出平均差之公式

$$\delta_a = \frac{\Sigma(x-A)}{N}$$

14. 從衆數求出平均差之公式

$$\delta_{Mo} = \frac{\Sigma(x-m_o)}{N}$$

$$或 = \frac{\Sigma d_{mo}}{N}$$

15. 求標準差之公式

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

$$或 \quad = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

16. 求標準差簡便之公式

$$S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - C^2 xi}$$

$$或 \quad = \sqrt{\frac{\Sigma d_x^2 - N(a-A_A)^2}{N}}$$

17. 求差量係數之公式

$$V = 100\frac{S.D.}{A}$$

18. 求偏斜度之公式

$$(a)\ SK = \frac{A-Mo}{\sigma}$$

$$\text{(b)}\quad SK=\frac{3(A-M)}{\sigma}$$

$$\text{(c)}\quad SK=\frac{Q_3+Q_1-2M}{Q}$$

19. 求算術平均的物量指數之公式

$$\frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\right)}{N}$$

20. 求算術平均的物量指數之公式

$$\frac{\Sigma\left(\frac{q_1}{q_0}\right)}{N}$$

21. 求倒數平均的指數之公式

$$\frac{N}{\Sigma\frac{p_0}{p_1}}$$

22. 求幾何平均的指數之公式

$$\sqrt[n]{\frac{p_1}{p_0}\times\frac{p_1'}{p_0'}\times\frac{p_1''}{p_0''}\times\cdots\cdots\text{(N 項)}}$$

23. 求集合平均的指數之公式

$$\frac{p_1+p_1'+p_1''+\cdots\cdots}{p_0+p_0'+p_0''+\cdots\cdots}$$

即 $$\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}$$

24. 求畸重平均的物價指數之公式

$$\frac{W+\left(\frac{P_1}{P_0}\right)+W'\left(\frac{P_1'}{P_0'}\right)}{W+W'}$$

25. 用普通法求關係係數之公式

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N\sigma_x\sigma_y}$$

26. 用乘積率法求關係係數之公式

$$r=\frac{\Sigma(xy)}{N}$$

$$或=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}$$

27. 用等級差異法求關係係數之公式

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$$

$$或\ =2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1$$

28. 用異號對數法求關係係數之公式

$$r=\cos\ \pi U$$

29. 用變量相應法求關係係數之公式

$$r=\pm\sqrt{\pm\frac{2C-N}{N}}$$

30. 求消長係數之公式

$$x = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}y$$

$$y = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x$$

31. 求相關比例之公式

$$n = \frac{\sqrt{\frac{\{N_x(\bar{y}_x - \bar{y})\}}{N}}}{\sigma_y}$$

32. 用或差定律以考察 r 不可靠之程度之公式

$$P.\ E. = \frac{.67449(1 - r^2)}{\sqrt{N}}$$

33. 更正 r 受變差之公式

$$r_{pq} = \frac{\sqrt{(r_{p1q2})(r_{i2q1})}}{\sqrt{(r_{p1p2})(r_{q1q2})}}$$

34. 更正 r 受恆差之公式

(a) 更正 r 減縮之公式

$$r_{pq} = \frac{r'_{pq}}{\sqrt{1 - r_{pv}{}^2}}$$

(b) 更正 r 脹大之公式

$$r_{pq} = r'_{pq} \cdot \sqrt{1 - r_{pv}{}^2 - r_{pw}{}^2}$$

(c) 更正 r 偏僻之公式

$$r_{pq}=\frac{r_{pq}-(r_{pv})(r_{qv})}{\sqrt{(1-r_{pv}^2)(1-r_{qv}^2}}$$

35. 勘校推算結果上差誤之公式

$$E=E_1\times\frac{m_1}{m}+E_2\times\frac{m_2}{m}+\cdots\cdots E_n\times\frac{m_n}{m}$$

36. 勘校乘法之公式

真實乘數 $=mn+xy\pm(my+nx)$

或 $=mn\pm(my+nx)$

37. 勘校除法之公式

商數 $=\frac{a}{d}\pm\frac{dx+ay}{d^2-y^2}$

38. 勘校自乘之公式

自乘數 $=n^2+E^2\pm2nE$

39. 勘校方根之公式

方根或差之概 $=\sqrt{\ }n-\sqrt{n-E}$

40. 勘校平均之公式

真實平均數 $=\frac{\Sigma m}{N}\pm\frac{\Sigma E}{N}$

三 本書所用各計算表

A. 由 ρ 之值求 r 表

$$r = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right) \qquad \rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$$

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0833	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3935	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.65[illegible]7	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9173
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9269
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7368	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9009
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

B. 由 R 之値求 r 表

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1,\qquad R=1-\frac{6\Sigma g}{N^2-1}$$

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.598	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000
.25	.414						

C. 由 U 之百分比例數求 r 表

$$r = \cos \pi U$$

U 爲異號差數對數與對數總數之百分比例數若以 U 爲 1 之百分比例數則 r 之值爲負數是以當 U 過 .50 時可按 1 百分比例數求 r 之負數

U	r	U	r	U	r	U	r
.00	1.0000	.13	.9174	.26	.6848	.38	.3682
.01	.9966	.14	.9044	.27	.6615	.39	.3387
.02	.9982	.15	.8905	.28	.6375	.40	.3089
.03	.9958	.16	.8757	.29	.6129	.41	.2788
.04	.9924	.17	.8602	.30	.5877	.42	.2485
.05	.9980	.18	.8439	.31	.5620	.43	.2180
.06	.9826	.19	.8268	.32	.5358	.44	.1873
.07	.9762	.20	.8089	.33	.5091	.45	.1564
.08	.9688	.21	.7902	.34	.4819	.46	.1253
.09	.9604	.22	.7707	.35	.4542	.47	.0941
.10	.9510	.23	.7504	.36	.4260	.48	.0628
.11	.9407	.24	.7293	.37	.3973	.49	.0314
.12	.9295	.25	.7074			.50	.0000

D. 乘方及方根表

數	平方	立方	平方根	立方根	數	平方	立方	平方根	方立根
1	1	1	1,000	1,000	51	2,601	132,651	7,141	3,708
2	4	8	1,414	1,259	52	2,704	140,608	7,211	3,732
3	9	27	1,732	1,442	53	2,809	148,877	7,280	3,756
4	16	64	2,000	1,587	54	2,916	157,464	7,348	3,779
5	25	125	2,236	1,709	55	3,025	166,375	7,416	3,802
6	36	216	2,449	1,817	56	3,136	175,616	7,483	3,825
7	49	343	2,645	1,912	57	3,249	185,193	7,549	3,848
8	64	512	2,828	2,000	58	3,364	195,112	7,615	3,870
9	81	729	3,000	2,080	59	3,481	205,379	7,681	3,892

10	100	1,000	3,162	2,154	60	3,600	216,000	7,745	3,914
11	121	1,331	3,316	2,223	61	3,721	226,981	7,810	3,936
12	144	1,728	3,464	2,289	62	3,844	238,328	7,874	3,957
13	169	2,197	3,605	2,351	63	3,969	250,047	7,937	3,976
14	196	2,744	3,741	2,410	64	4,096	262,144	8,000	4,000
15	225	3,375	3,872	2,466	65	4,225	274,625	8,062	4,020
16	256	4,096	4,000	2,519	66	4,356	287,496	8,124	4,041
17	289	4,918	4,123	2,571	67	4,489	300,763	8,185	4,061
18	324	5,832	4,242	2,620	68	4,624	314,432	8,246	4,081
19	361	6,859	4,358	2,668	69	4,761	328,509	8,306	4,101
20	400	8,000	4,912	2,714	70	4,900	343,000	8,366	4,121
21	441	9,261	4,582	2,758	71	5,041	357,911	8,426	4,140
22	484	10,648	4,690	2,802	72	5,184	373,248	8,485	4,160
23	529	12,167	4,795	2,843	73	5,329	389,017	8,544	1,179
24	576	13,824	4,898	2,884	74	5,476	405,224	8,602	4,198
25	625	15,625	5,000	2,964	75	5,625	421,875	8,660	4,217
26	676	17,576	5,090	2,962	76	5,776	438,976	8,717	4,235
27	729	19,683	5,196	3,000	77	5,929	456,533	8,774	4,254
28	784	21,952	5,291	3,036	78	6,084	474,552	8,831	4,272
29	841	24,389	5,385	3,072	79	6,241	493,039	8,888	4,290
30	900	27,000	5,477	3,107	80	6,400	512,000	8,944	4,308
31	961	29,791	5,567	3,141	81	6,561	531,441	9,000	4,326
32	1,024	32,768	5,656	3,174	82	6,724	551,368	9,055	4,344
33	1,089	35,937	5,744	3,207	83	6,889	571,787	9,110	4,362
34	1,156	39,304	5,830	3,239	84	7,056	592,704	9,165	4,379
35	1,225	42,875	5,916	3,271	85	7,225	614,125	9,219	4,396
36	1,296	46,656	6,000	3,301	86	7,396	636,056	9,273	4,414
37	1,369	50,653	6,082	3,332	87	7,569	658,503	9,327	4,431
38	1,444	54,872	6,164	3,361	88	7,744	681,472	9,380	4,447
39	1,521	59,319	6,244	3,391	89	7,921	704,969	9,433	4,464
40	1,600	64,000	6,324	3,419	90	8,100	729,000	9,486	4,481
41	1,681	68,921	6,403	3,448	91	8,281	753,571	9,539	4,491
42	1,764	74,038	6,480	3,476	92	8,464	778,688	9,591	4,514
43	1,849	79,507	6,557	3,503	93	8,649	804,357	9,643	4,530
44	1,936	85,184	6,653	3,530	94	8,836	830,584	9,695	4,546
45	2,025	91,125	6,708	3,556	95	9,025	857,375	9,746	4,562
46	2,116	97,336	6,782	3,583	96	9,216	884,736	9,797	4,578
47	2,209	103,823	6,855	3,608	97	9,409	912,673	9,848	4,594
48	2,304	110,592	6,928	3,634	98	9,604	941,192	9,899	4,610
49	2,401	117,649	7,000	3,659	99	9,801	970,299	9,949	4,626
50	2,500	125,000	7,071	3,684	100	10,000	1,000,000	10,000	4,641

E. 三角函數之正弦及餘弦表

′	0°		1°		2°		3°		4°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	0000	1.000	0175	9998	0349	9994	0523	9986	0698	9976	60
5	0015	1.000	0189	9998	0364	9993	0538	9986	0712	9975	55
10	0029	1.000	0204	9998	0378	9993	0552	9985	0727	9974	50
15	0044	1.000	0218	9998	0393	9992	0567	9984	0741	9973	45
20	0058	1.000	0233	9997	0407	9992	0581	9983	0756	9971	40
25	0073	1.000	0247	9997	0422	9991	0596	9982	0770	9970	35
30	0087	1.000	0262	9997	0436	9990	0610	9981	0785	9969	30
35	0102	9999	0276	9996	0451	9990	0625	9980	0799	9968	25
40	0116	9999	0291	9996	0465	9989	0640	9980	0814	9967	20
45	0131	9999	0305	9995	0480	9988	0654	9979	0828	9966	15
50	0145	9999	0320	9995	0494	9988	0669	9978	0843	9964	10
55	0160	9999	0334	9994	0509	9987	0683	9977	0857	9963	5
60	0175	9999	0349	9994	0523	9986	0698	9976	0872	9962	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	89°		88°		87°		86°		85°		′

′	5°		6°		7°		8°		9°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	0872	9962	1045	9945	1219	9925	1392	9903	1564	9877	60
5	0886	9961	1060	9944	1233	9924	1406	9901	1579	9875	55
10	0901	9959	1074	9942	1248	9922	1421	9899	1593	9872	50
15	0915	9958	1089	9941	1262	9920	1435	9897	1607	9870	45
20	0929	9957	1103	9939	1276	9918	1449	9894	1622	9868	40
25	0944	9955	1118	9937	1291	9916	1464	9892	1636	9865	35
30	0958	9954	1132	9936	1305	9914	1478	9890	1650	9863	30
35	0973	9953	1146	9934	1320	9913	1492	9888	1665	9860	25
40	0987	9951	1161	9932	1334	9911	1507	9886	1679	9858	20
45	1002	9950	1175	9931	1349	9909	1521	9884	1693	9856	15
50	1016	9948	1190	9929	1363	9907	1536	9881	1708	9853	10
55	1031	9947	1204	9927	1377	9905	1550	9879	1772	9851	5
60	1045	9945	1219	9925	1392	9903	1564	9877	1736	9848	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	84°		83°		82°		81°		80°		′

′	10°		11°		12°		13°		14°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	1736	9848	1908	9816	2079	9781	2250	9744	2419	9703	60
5	1751	9846	1922	9813	2093	9778	2264	9740	2433	9699	55
10	1965	9843	1937	9811	2108	9775	2278	9737	2447	9696	50
15	1779	9840	1951	9808	2122	9772	2292	9734	2462	9692	45
20	1794	9838	1965	9805	2136	9769	2306	9730	2476	9689	40
25	1808	9835	1979	9802	2150	9766	2320	9727	2490	9685	35
30	1822	9833	1994	9799	2164	9763	2334	9724	2504	9681	30
35	1837	9830	2008	9796	2179	9760	2349	9720	2518	9678	25
40	1851	9827	2022	9793	2193	9757	2363	9717	2532	9674	20
45	1865	9825	2036	9790	2207	9753	2377	9713	2546	9670	15
50	1880	9822	2051	9787	2221	9750	2391	9710	2560	9667	10
55	1894	9819	2065	9784	2235	9747	2405	9706	2574	9663	5
60	1908	9816	2079	9781	2250	9744	2419	9703	2588	9659	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	79°		78°		77°		76°		75°		′

′	15°		16°		17°		18°		19°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	2588	9659	2756	9613	2924	9563	3090	9511	3256	9455	60
5	2602	9655	2770	9609	2938	9559	3104	9506	3269	9450	55
10	2616	9652	2784	9605	2952	9555	3118	9502	3283	9446	50
15	2630	9648	2798	9600	2965	9550	3132	9497	3297	9441	45
20	2644	9644	2812	9596	2979	9546	3145	9492	3311	9436	40
25	2659	9640	2826	9592	2993	9542	3159	9488	3324	9431	35
30	2672	9636	2840	9588	3007	9537	3173	9483	3338	9426	30
35	2686	9632	2854	9584	3021	9533	3187	9479	3352	9422	25
40	2700	9628	2868	9580	3035	9528	3201	9474	3365	9417	20
45	2714	9625	2882	9576	3048	9524	3214	9469	3379	9412	15
50	2728	9621	2896	9572	3062	9520	3228	9456	3393	9407	10
55	2742	9617	2910	9567	3076	9515	3242	9460	3407	9402	5
60	2756	9613	2924	9563	3090	9511	3256	9455	3420	9397	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	74°		73°		72°		71°		70°		′

′	20°		21°		22°		23°		24°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	3420	9397	3584	9336	3746	9272	3907	9205	4067	9135	60
5	3434	9392	3597	9331	3760	9266	3921	9199	4081	9130	55
10	3448	9387	3611	9325	3773	9261	3934	9194	4094	9124	50
15	3461	9382	3624	9320	3786	9255	3947	9188	4107	9118	45
20	3475	9377	3638	9315	3800	9250	3961	9182	4120	9112	40
25	3488	9372	3651	9309	3813	9244	3974	9176	4134	9106	35
30	3502	9367	3665	9304	3827	9239	3987	9171	4147	9100	30
35	3516	9362	3679	9299	3840	9233	4001	9165	4160	9094	25
40	3529	9356	3692	9293	3854	9228	4014	9159	4173	9088	20
45	3543	9351	3706	9288	3867	9222	4027	9153	4187	9081	15
50	3557	9346	3719	9288	3881	9216	4041	9147	4200	9075	10
55	3570	9341	3733	9277	3894	9211	4054	9141	4313	9069	5
60	3584	9336	3746	9272	3907	9205	4067	9135	4226	9063	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	69°		68°		67°		66°		65°		′

′	25°		26°		27°		28°		29°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	4226	9063	4384	8988	4540	8910	4695	8829	4848	8746	60
5	4239	9057	4397	8982	4553	8903	4708	8823	4861	8739	55
10	4253	9051	4410	8975	4566	8897	4720	8816	4874	8732	50
15	4266	9045	4423	8969	4579	8890	4733	8809	4886	8725	45
20	4279	9038	4436	8962	4592	8884	4746	8802	4899	8718	40
25	4292	9032	4449	8956	4605	8877	4759	8795	4912	8711	35
30	4305	9026	4462	8949	4617	8870	4772	8788	4924	8704	30
35	4318	9020	4475	8943	4630	8863	4784	8781	4937	8696	25
40	4331	9013	4488	8936	4643	8857	4797	8774	4950	8689	20
45	4344	9007	4501	8930	4656	8850	4810	8767	4962	8682	15
50	4358	9001	4514	8923	4669	8843	4823	8760	4975	8675	10
55	4371	8994	4527	8917	4682	8836	4835	8753	4987	8668	5
60	4384	8988	4540	8910	4695	8829	4848	8746	5000	8660	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	64°		63°		62°		61°		60°		′

′	30°		31°		32°		33°		34°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	5000	8660	5150	8572	5299	8480	5446	8387	5592	8290	60
5	5013	8653	5163	8564	5312	8473	5459	8379	5604	8282	55
10	5025	8646	5175	8557	5324	8466	5471	8371	5616	8274	50
15	5038	8638	5188	8549	5336	8457	5483	8363	5628	8266	45
20	5050	8631	5200	8542	5348	8450	5495	8355	5640	8258	40
25	5063	8624	5213	8534	5361	8442	5507	8347	5652	8249	35
30	5075	8616	5225	8526	5373	8434	5519	8339	5664	8241	30
35	5088	8609	5237	8519	5385	8426	5531	8331	5676	8233	25
40	5100	8601	5250	8511	5398	8418	5544	8323	5688	8225	20
45	5113	8594	5262	8504	5410	8410	5556	8315	5700	8216	15
50	5125	3587	5275	8496	5422	8403	5568	8301	5712	8208	10
55	5138	8579	5287	8488	5434	8395	5580	8299	5724	8200	5
60	5150	8572	5299	8480	5446	8387	5592	8290	5736	8192	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	59°		58°		57°		56°		55°		′

′	35°		36°		37°		38°		39°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	5736	8192	5878	8090	6018	7986	6157	7880	6293	7771	60
5	5748	8183	5890	8082	6030	7978	6168	7871	6305	7762	55
10	5760	8175	5901	8073	6041	7969	6180	7862	6316	7753	50
15	5771	8166	5913	8064	6053	7960	6191	7853	6327	7744	45
20	5783	8158	5925	8056	6065	7951	6202	7844	6338	7735	40
25	5795	8150	5937	8047	6076	7942	2614	7835	6350	7725	35
30	5807	8141	5948	8039	6088	7934	6225	7826	6361	7716	30
35	5819	8133	5960	8030	6099	7925	6237	7817	6372	7707	25
40	5831	8124	5972	8021	6111	7916	6248	7808	6383	7698	20
45	5842	8116	5983	8013	6122	7907	6259	7799	6394	7688	15
50	5854	8107	5995	8004	6134	7898	6271	7790	6406	7679	10
55	5866	8099	6007	7995	6145	7889	6282	7781	6417	7670	5
60	5878	8090	6018	7986	6157	7880	6293	7771	6428	7660	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	54°		53°		52°		51°		50°		′

′	40°		41°		42°		43°		44°		′
	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	
0	6428	7660	6561	7547	6691	7431	6820	7314	6947	7193	60
5	6439	7651	6572	7538	6702	7422	6831	7304	6957	7183	55
10	6450	7642	6583	7528	6713	7412	6841	7294	6967	7173	50
15	6461	7632	6593	7518	6724	7402	6852	7284	6978	7163	45
20	6472	7623	6604	7509	6734	7392	6862	7274	6988	7153	40
25	6483	7613	6615	7499	6745	7383	6873	7264	6999	7143	35
30	6494	7604	6626	7490	6756	7373	6884	7254	7009	7133	30
35	6506	7595	6637	7480	6767	7363	6894	7244	7019	7122	25
40	6517	7585	6648	7470	6777	7353	6905	7234	7030	7112	20
45	6528	7576	6659	7461	6788	7343	6915	7224	7040	7102	15
50	6539	7566	6670	7451	6799	7333	6926	7214	7050	7092	10
55	6550	7557	6680	7441	6809	7323	6936	7203	7061	7081	5
60	6561	7547	6691	7431	6820	7314	6947	7193	7071	7071	0
	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	cos	sin	
′	49°		48°		47°		46°		45°		′

F. 對數表

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—∞	00 000	30 103	47 712	60 206	69 897	77 815	84 510	90 309	95 424
1	00 000	04 139	07 918	11 394	14 613	17 609	20 412	23 045	25 527	27 875
2	30 103	32 222	34 242	36 173	38 021	39 794	41 497	43 136	44 716	46 240
3	47 712	49 136	50 515	51 851	53 148	54 407	55 630	56 820	57 978	59 106
4	60 206	61 278	62 325	63 347	64 345	65 321	66 276	67 210	68 124	69 020
5	69 897	70 757	71 600	72 428	73 239	74 036	74 819	75 587	76 343	77 085
6	77 815	78 533	79 239	79 934	80 618	81 291	81 954	82 607	83 251	83 885
7	84 510	85 126	85 733	86 332	86 923	87 506	88 081	88 649	89 209	89 763
8	90 309	90 849	91 381	91 908	92 428	92 942	93 450	93 952	94 448	94 939
9	95 424	95 904	96 379	96 848	97 313	97 772	98 227	98 677	99 123	99 564
10	00 000	00 432	00 860	01 284	01 703	02 119	02 531	02 938	03 342	03 743
11	04 139	04 532	04 922	05 308	05 690	06 070	06 446	06 819	07 188	07 555
12	07 918	08 279	08 636	08 991	09 342	09 691	10 037	10 380	10 721	11 059
13	11 394	11 727	12 057	12 385	12 710	13 033	13 354	13 672	13 988	14 301
14	14 613	14 922	15 229	15 534	15 836	16 137	16 435	16 732	17 026	17 319
15	17 609	17 898	18 184	18 469	18 752	19 033	19 312	19 590	19 866	20 140
16	20 412	20 683	20 952	21 219	21 484	21 748	22 011	22 272	22 531	22 789
17	23 045	23 300	23 553	23 805	24 055	24 304	24 551	24 797	25 042	25 285
18	25 527	25 768	26 007	26 245	26 482	26 717	26 951	27 184	27 416	27 646
19	27 875	28 103	28 330	28 556	28 780	29 003	29 226	29 447	29 667	29 885
20	30 103	30 320	30 535	30 750	30 963	31 175	31 387	31 597	31 806	32 015
21	32 222	32 428	32 634	32 838	33 041	33 244	33 445	33 646	33 846	34 044
22	34 242	34 439	34 635	34 830	35 025	35 218	35 411	35 603	35 793	35 984
23	36 173	36 361	36 549	36 736	36 922	37 107	37 291	37 475	37 658	37 840
24	38 021	38 202	38 382	38 561	38 739	38 917	39 094	39 270	39 445	39 620
25	39 794	39 967	40 140	40 312	40 483	40 654	40 824	40 993	41 162	41 330
26	41 497	41 664	41 830	41 996	42 160	42 325	42 488	42 651	42 813	42 975
27	43 136	43 297	43 457	43 616	43 775	43 933	44 091	44 248	44 404	44 560
28	44 716	44 871	45 025	45 179	45 332	45 484	45 637	45 788	45 939	46 090
29	46 240	46 389	46 538	46 687	46 835	46 982	47 129	47 276	47 422	47 567
30	47 712	47 857	48 001	48 144	48 287	48 430	48 572	48 714	48 855	48 996
31	49 136	49 276	49 415	49 554	49 693	49 831	49 969	50 106	50 243	50 379
32	50 515	50 651	50 786	50 920	51 055	51 188	51 322	51 455	51 587	51 720
33	51 851	51 983	52 114	52 224	52 375	52 504	52 634	52 763	52 892	53 020
34	53 148	53 275	53 403	53 529	53 656	53 782	53 908	54 033	54 158	54 283
35	54 407	54 531	54 654	54 777	54 900	55 023	55 145	55 267	55 388	55 509
36	55 630	55 751	55 871	55 991	56 110	56 229	56 348	56 467	56 585	56 703
37	56 820	56 937	57 054	57 171	57 287	57 403	57 519	57 634	57 749	57 864
38	57 978	58 092	58 206	58 320	58 433	58 546	58 659	58 771	58 883	58 995
39	59 106	59 218	59 329	59 439	59 550	59 660	59 770	59 879	59 988	60 097
40	60 206	60 314	60 423	60 531	60 638	60 746	60 853	60 959	61 066	61 172
41	61 278	61 384	61 490	61 595	61 700	61 805	61 909	62 014	62 118	62 221
42	62 325	62 428	62 531	62 634	62 737	62 839	62 941	63 043	63 144	63 246
43	63 347	63 448	63 548	63 649	63 749	63 849	63 949	64 048	64 147	64 246
44	64 345	64 444	64 542	64 640	64 738	64 836	64 933	65 031	65 128	65 225
45	65 321	65 418	65 514	65 610	65 706	65 801	65 896	65 992	66 087	66 181
46	66 276	66 370	66 464	66 558	66 652	66 745	66 839	66 932	67 025	67 117
47	67 210	67 302	67 394	67 486	67 578	67 669	67 761	67 852	67 943	68 034
48	68 124	68 215	68 305	68 395	68 485	68 574	68 664	68 753	68 842	68 931
49	69 020	69 108	69 197	69 285	69 373	69 461	69 548	69 636	69 723	69 810
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0° 1′ = 60″	S. 4.68 557	T. 4.68 557		0° 5′ = 300″	S. 4.68 557	T. 4.68 558
0 2 = 120	4.68 557	4.68 557		0 6 = 360	4.68 557	4.68 558
0 3 = 180	4.68 557	4.68 557		0 7 = 420	4.68 557	4.68 558
0 4 = 240	4.68 557	4.68 558		0 8 = 480	4.68 557	4.68 558

$L \sin a = \log a'' + S$,　$L \tan a = \log a'' + T$,　$L \cot a = 20 - \log a'' - T$;
$\log a'' = L \sin a - S = L \tan a - T = 20 - L \cot a - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	69 897	69 984	70 070	70 157	70 243	70 329	70 415	70 501	70 586	70 672
51	70 757	70 842	70 927	71 012	71 096	71 181	71 265	71 349	71 433	71 517
52	71 600	71 684	71 767	71 850	71 933	72 016	72 099	72 181	72 263	72 346
53	72 428	72 509	72 591	72 673	72 754	72 835	72 916	72 997	73 078	73 159
54	73 239	73 320	73 400	73 480	73 560	73 640	73 719	73 799	73 878	73 957
55	74 036	74 115	74 194	74 273	74 351	74 429	74 507	74 586	74 663	74 741
56	74 819	74 896	74 974	75 051	75 128	75 205	75 282	75 358	75 435	75 511
57	75 587	75 664	75 740	75 815	75 891	75 967	76 042	76 118	76 193	76 268
58	76 343	76 418	76 492	76 567	76 641	76 716	76 790	76 864	76 938	77 012
59	77 085	77 159	77 232	77 305	77 379	77 452	77 525	77 597	77 670	77 743
60	77 815	77 887	77 960	78 032	78 104	78 176	78 247	78 319	78 390	78 462
61	78 533	78 604	78 675	78 746	78 817	78 888	78 958	79 029	79 099	79 169
62	79 239	79 309	79 379	79 449	79 518	79 588	79 657	79 727	79 796	79 865
63	79 934	80 003	80 072	80 140	80 209	80 277	80 346	80 414	80 482	80 550
64	80 618	80 686	80 754	80 821	80 889	80 956	81 023	81 090	81 158	81 224
65	81 291	81 358	81 425	81 491	81 558	81 624	81 690	81 757	81 823	81 889
66	81 954	82 020	82 086	82 151	82 217	82 282	82 347	82 413	82 478	82 543
67	82 607	82 672	82 737	82 802	82 866	82 930	82 995	83 059	83 123	83 187
68	83 251	83 315	83 378	83 442	83 506	83 569	83 632	83 696	83 759	83 822
69	83 885	83 948	84 011	84 073	84 136	84 198	84 261	84 323	84 386	84 448
70	84 510	84 572	84 634	84 696	84 757	84 819	84 880	84 942	85 003	85 065
71	85 126	85 187	85 248	85 309	85 370	85 431	85 491	85 552	85 612	85 673
72	85 733	85 794	85 854	85 914	85 974	86 034	86 094	86 153	86 213	86 273
73	86 332	86 392	86 451	86 510	86 570	86 629	86 688	86 747	86 806	86 864
74	86 923	86 982	87 040	87 099	87 157	87 216	87 274	87 332	87 390	87 448
75	87 506	87 564	87 622	87 679	87 737	87 795	87 852	87 910	87 967	88 024
76	88 081	88 138	88 195	88 252	88 309	88 366	88 423	88 480	88 536	88 593
77	88 649	88 705	88 762	88 818	88 874	88 930	88 986	89 042	89 098	89 154
78	89 209	89 265	89 321	89 376	89 432	89 487	89 542	89 597	89 653	89 708
79	89 763	89 818	89 873	89 927	89 982	90 037	90 091	90 146	90 200	90 255
80	90 309	90 363	90 417	90 472	90 526	90 580	90 634	90 687	90 741	90 795
81	90 849	90 902	90 956	91 009	91 062	91 116	91 169	91 222	91 275	91 328
82	91 381	91 434	91 487	91 540	91 593	91 645	91 698	91 751	91 803	91 855
83	91 908	91 960	92 012	92 065	92 117	92 169	92 221	92 273	92 324	92 376
84	92 428	92 480	92 531	92 583	92 634	92 686	92 737	92 788	92 840	92 891
85	92 942	92 993	93 044	93 095	93 146	93 197	93 247	93 298	93 349	93 399
86	93 450	93 500	93 551	93 601	93 651	93 702	93 752	93 802	93 852	93 902
87	93 952	94 002	94 052	94 101	94 151	94 201	94 250	94 300	94 349	94 399
88	94 448	94 498	94 547	94 596	94 645	94 694	94 743	94 792	94 841	94 890
89	94 939	94 988	95 036	95 085	95 134	95 182	95 231	95 279	95 328	95 376
90	95 424	95 472	95 521	95 569	95 617	95 665	95 713	95 761	95 809	95 856
91	95 904	95 952	95 999	96 047	96 095	96 142	96 190	96 237	96 284	96 332
92	96 379	96 426	96 473	96 520	96 567	96 614	96 661	96 708	96 755	96 802
93	96 848	96 895	96 942	96 988	97 035	97 081	97 128	97 174	97 220	97 267
94	97 313	97 359	97 405	97 451	97 497	97 543	97 589	97 635	97 681	97 727
95	97 772	97 818	97 864	97 909	97 955	98 000	98 046	98 091	98 137	98 182
96	98 227	98 272	98 318	98 363	98 408	98 453	98 498	98 543	98 588	98 632
97	98 677	98 722	98 767	98 811	98 856	98 900	98 945	98 989	99 034	99 078
98	99 123	99 167	99 211	99 255	99 300	99 344	99 388	99 432	99 476	99 520
99	99 564	99 607	99 651	99 695	99 739	99 782	99 826	99 870	99 913	99 957
100	00 000	00 043	00 087	00 130	00 173	00 217	00 260	00 303	00 346	00 389
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

0 9′ = 540″	S. 4.68 557	T. 4.68 558		0° 13′ = 780″	S. 4.68 557	T 4.68 558
0 10 = 600	4.68 557	4.68 558		0 14 = 840	4.68 557	4.68 558
0 11 = 660	4.68 557	4.68 558		0 15 = 900	4.68 557	4.68 558
0 12 = 720	4 68 557	4.68 558		0 16 = 960	4.68 557	4.68 558

L cos a = log$(90° - a)''$ + S, L cotg a = log$(90° - a)''$ + T, L tang a = 20 − log$(90° - a)''$ − T;
log$(90 - a)''$ = L cos a − S = L cotg a − T = 20 − L tang a − T.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00 000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	860	903	945	988	*030	*072	*115	*157	*199	*242
103	01 284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	*036	*078
105	02 119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	*019	*060	*100	*141	*181	*222	*262	*302
108	03 342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	*021	*060	*100
110	04 139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	*038	*077	*115	*154	*192	*231	*269
113	05 308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	*032
115	06 070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	*004	*041	*708	*115	*151
118	07 188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	*027	*063	*099	*135	*171	*207	*243
121	08 279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	*026	*061	*096	*132	*167	*202	*237	*272	*307
124	09 342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	*003
126	10 037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	*025
129	11 059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	*024
132	12 057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	*001
135	13 033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	*019	*051	*082	*114	*145	*176	*208	*239	*270
139	14 301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	*014	*045	*076	*106	*137	*168	*198
142	15 229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	*017	*047	*077	*107
145	16 137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17 026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	384	377	406	435	464	493	522	551	580
150	609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	44	43	42
1	4,4	4,3	4,2
2	8,8	8,6	8,4
3	13,2	12,9	12,6
4	17,6	17,2	16,8
5	22,0	21,5	21,0
6	26,4	25,8	25,2
7	30,8	30,1	29,4
8	35,2	34,4	33,6
9	39,6	38,7	37,8

	41	40	39
1	4,1	4,0	3,9
2	8,2	8,0	7,8
3	12,3	12,0	11,7
4	16,4	16,0	15,6
5	20,5	20,0	19,5
6	24,6	24,0	23,4
7	28,7	28,0	27,3
8	32,8	32,0	31,2
9	36,9	36,0	35,1

	38	37	36
1	3,8	3,7	3,6
2	7,6	7,4	7,2
3	11,4	11,1	10,8
4	15,2	14,8	14,4
5	19,0	18,5	18,0
6	22,8	22,2	21,6
7	26,6	25,9	25,2
8	30,4	29,6	28,8
9	34,2	33,3	32,4

	35	34	33
1	3,5	3,4	3,3
2	7,0	6,8	6,6
3	10,5	10,2	9,9
4	14,0	13,6	13,2
5	17,5	17,0	16,5
6	21,0	20,4	19,8
7	24,5	23,8	23,1
8	28,0	27,2	26,4
9	31,5	30,6	29,7

	32	31	30
1	3.2	3,1	3,0
2	6,4	6,2	6,0
3	9,6	9,3	9,0
4	12,8	12,4	12,0
5	16,0	15,5	15,0
6	19,2	18,6	18,0
7	22,4	21,7	21,0
8	25,6	24,8	24,0
9	28,8	27,0	27,0

		S.	T.			S.	T.
0°	16′ = 960″	4.68 557	4.68 558	0°	21′ = 1260″	4.68 557	4.68 558
0	17 = 1020	4.68 557	4.68 558	0	22 = 1320	4.68 557	4.68 558
0	18 = 1080	4.68 557	4.68 558	0	23 = 1380	4.68 557	4.68 558
0	19 = 1140	4.68 557	4.68 558	0	24 = 1440	4.68 557	4.68 558
0	20 = 1200	4.68 557	4.68 558	0	25 = 1500	4.68 557	4.68 558

$L \sin a = \log a'' + S, \quad L \tan a = \log a'' + T, \quad L \cot a = 20 - \log a'' - T;$

$\log a'' = L \sin a - S = L \tan a - T = 20 - L \cot a - T.$

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17 609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	*013	*041	*070	*099	*127	*156
152	18 184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005
155	19 033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	*003	*030	*058	*085	*112
159	20 140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	952	978	*005	*032	*059	*085	*112	*139	*165	*192
163	21 219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22 011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019
170	23 045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005	*030
174	24 055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018
178	25 042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26 007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	951	975	998	*021	*045	*068	*091	*114	*138	*161
187	27 184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012	*035	*058	*081
191	28 103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29 003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	.645
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	*016	*038	*060	*081
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	29	28
1	2,9	2,8
2	5,8	5,6
3	8,7	8,4
4	11,6	11,2
5	14,5	14,0
6	17,4	16,8
7	20,3	19,6
8	23,2	22,4
9	26,1	25,2

	27	26
1	2,7	2,6
2	5,4	5,2
3	8,1	7,8
4	10,8	10,4
5	13,5	13,0
6	16,2	15,6
7	18,9	18,2
8	21,6	20,8
9	24,3	23,4

	25
1	2,5
2	5,0
3	7,5
4	10,0
5	12,5
6	15,0
7	17,5
8	20,0
9	22,5

	24	23
1	2,4	2,3
2	4,8	4,6
3	7,2	6,9
4	9,6	9,2
5	12,0	11,5
6	14,4	13,8
7	16,8	16,1
8	19,2	18,4
9	21,6	20,7

	22	21
1	2,2	2,1
2	4,4	4,2
3	6,6	6,3
4	8,8	8,4
5	11,0	10,5
6	13,2	12,6
7	15,4	14,7
8	17,6	16,8
9	19,8	18,9

0° 25′=1500″	S. 4.68 557	T. 4.68 558	0° 30′=1800″	S. 4.68 557	T. 4.68 559
0 26 =1560	4.68 557	4.68 558	0 31 =1860	4.68 557	4.68 559
0 27 =1620	4.68 557	4.68 558	0 32 =1920	4.68 557	4.68 559
0 28 =1680	4.68 557	4.68 558	0 33 =1980	4.68 557	4.68 559
0 29 =1740	4.68 557	4.68 559	0 34 =2040	4.68 557	4.68 559

$L\cos\alpha=\log(90^\circ-\alpha)''+S$, $L\,\mathrm{cotg}\,\alpha=\log(90^\circ-\alpha)''+T$, $L\,\mathrm{tang}\,\alpha=20-\log(90^\circ-\alpha)''-T$;
$\log(90^\circ-\alpha)''=L\cos\alpha-S=L\,\mathrm{cotg}\,\alpha-T=20-L\,\mathrm{tang}\,\alpha-T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30 103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006	*027	*048	*069	*091	*112	*133	*154
205	31 175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32 015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001	*021
214	33 041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005	*025
219	34 044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
220	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005
224	35 025	044	064	083	102	122	141	160	180	199
225	218	238	257	276	295	315	334	353	372	392
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965
229	984	*003	*021	*040	*059	*078	*097	*116	*135	*154
230	36 173	192	211	229	248	267	286	305	324	342
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	549	568	586	605	624	642	661	680	698	717
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	922	940	959	977	996	*014	*033	*051	*070	*088
235	37 107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003
240	38 021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
245	917	934	952	970	987	*005	*023	*041	*058	*076
246	39 094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777
250	794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	22	21
1	2,2	2,1
2	4,4	4,2
3	6,6	6,3
4	8,8	8,4
5	11,0	10,5
6	13,2	12,6
7	15,4	14,7
8	17,6	16,8
9	19,8	18,9

	20	19	18	17
1	2,0	1,9	1,8	1,7
2	4,0	3,8	3,6	3,4
3	6,0	5,7	5,4	5,1
4	8,0	7,6	7,2	6,8
5	10,0	9,5	9,0	8,5
6	12,0	11,4	10,8	10,2
7	14,0	13,3	12,6	11,9
8	16,0	15,2	14,4	13,6
9	18,0	17,1	16,2	15,3

P P

0° 33′=1980″	S. 4.68 557	T. 4.68 559	0° 38′=2280″	S. 4.68 557	T. 4.68 559
0 34 =2040	4.68 557	4.68 559	0 39 =2340	4.68 557	4.68 559
0 35 =2100	4.68 557	4.68 559	0 40 =2400	4.68 557	4.68 559
0 36 =2160	4.68 557	4.68 559	0 41 =2460	4.68 556	4.68 560
0 37 =2220	4.68 557	4.68 559	0 42 =2520	4.68 556	4.68 560

L sin a = log a'' + S,　L tang a = log a'' + T,　L cotg a = 20 − log a'' − T;
log a'' = L sin a − S = L tang a − T = 20 − L cotg a − T

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39 794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
251	967	985	*002	*019	*037	*054	*071	*088	*106	*123
252	40 140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257	993	*010	*027	*044	*061	*078	*095	*111	*128	*145
258	41 162	179	196	212	229	246	263	280	296	313
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263	996	*012	*029	*045	*062	*078	*095	*111	*127	*144
264	42 160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269	975	991	*008	*024	*040	*056	*072	*088	*104	*120
270	43 136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275	933	949	965	981	996	*012	*028	*044	*059	*075
276	44 091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	*010
282	45 025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288	939	954	969	984	*000	*015	*030	*045	*060	*075
289	46 090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295	982	997	*012	*026	*041	*056	*070	*085	*100	*114
296	47 129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297	276	290	305	319	334	349	363	378	392	407
298	422	436	451	465	480	494	509	524	538	553
299	567	582	596	611	625	640	654	669	683	698
300	712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	18	17	16	15	14
1	1,8	1,7	1,6	1,5	1,4
2	3,6	3,4	3,2	3,0	2,8
3	5,4	5,1	4,8	4,5	4,2
4	7,2	6,8	6,4	6,0	5,6
5	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0
6	10,8	10,2	9,6	9,0	8,4
7	12,6	11,9	11,2	10,5	9,8
8	14,4	13,6	12,8	12,0	11,2
9	16,2	15,3	14,4	13,5	12,6

0° 41′ = 2460″	S. 4.68 556	T. 4.68 560	0° 46′ = 2760″	S. 4.68 556	T. 4.68 560
0 42 = 2520	4.68 556	4.68 560	0 47 = 2820	4.68 556	4.68 560
0 43 = 2580	4.68 556	4.68 560	0 48 = 2880	4.68 556	4.68 560
0 44 = 2640	4.68 556	4.68 560	0 49 = 2940	4.68 556	4.68 560
0 45 = 2700	4.68 556	4.68 560	0 50 = 3000	4.68 556	4.68 561

$L\cos a = \log(90^\circ - a)'' + S$, $L\,\mathrm{cotg}\, a = \log(90^\circ - a)'' + T$, $L\,\mathrm{tang}\, a = 20 - \log(90^\circ - a)'' - T$;
$\log(90^\circ - a)'' = L\cos a - S = L\,\mathrm{cotg}\, a - T = 20 - L\,\mathrm{tang}\, a - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	**47 712**	**727**	**741**	**756**	**770**	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	**49 136**	**150**	**164**	**178**	**192**	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
315	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	*001	*014	*028	*041
324	51 055	068	081	095	108	121	135	148	162	175
325	188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331	983	996	*009	*022	*035	*048	*061	*075	*088	*101
332	52 114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007
339	53 020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
340	148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
341	275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342	403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343	529	542	555	567	580	593	605	618	631	643
344	656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345	782	794	807	820	832	845	857	870	882	895
346	908	920	933	945	958	970	983	995	*008	*020
347	54 033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348	158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349	283	295	307	320	332	345	357	370	382	394
350	407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	15	14	13	12
1	1,5	1,4	1,3	1,2
2	3,0	2,8	2,6	2,4
3	4,5	4,2	3,9	3,6
4	6,0	5,6	5,2	4,8
5	7,5	7,0	6,5	6,0
6	9,0	8,4	7,8	7,2
7	10,5	9,8	9,1	8,4
8	12,0	11,2	10,4	9,6
9	13,5	12,6	11,7	10,8

		S.	T.			S.	T.
0°	50′ = 3000″	4.68 556	4.68 561	0°	55′ = 3300″	4.68 556	4.68 561
0	51 = 3060	4.68 556	4.68 561	0	56 = 3360	4.68 556	4.68 561
0	52 = 3120	4.68 556	4.68 561	0	57 = 3420	4.68 555	4.68 561
0	53 = 3180	4.68 556	4.68 561	0	58 = 3480	4.68 555	4.68 562
0	54 = 3240	4.68 556	4.68 561	0	59 = 3540	4.68 555	4.68 562

$L\sin\alpha = \log\alpha'' + S$, $L\tan g\,\alpha = \log\alpha'' + T$, $L\cot g\,\alpha = 20 - \log\alpha'' - T$;
$\log\alpha'' = L\sin\alpha - S = L\tan g\,\alpha - T = 20 - L\cot g\,\alpha - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54 407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	*011
355	55 023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360	630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361	751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362	871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363	991	*003	*015	*027	*038	*050	*062	*074	*086	*098
364	56 110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365	229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366	348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367	467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368	585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
369	703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370	820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371	937	949	961	972	984	996	*008	*019	*031	*043
372	57 054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378	749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379	864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
380	978	990	*001	*013	*024	*035	*047	*058	*070	*081
381	58 092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	546	557	569	580	591	602	614	625	636	647
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	995	*006	*017	*028	*040	*051	*062	*073	*084	*095
390	59 106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	988	909	*010	*021	*032	*043	*054	*065	*076	*086
399	60 097	108	119	130	141	152	163	173	184	195
400	206	217	228	239	249	260	271	282	293	301
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	13		12		11		10
1	1,3	1	1,2	1	1,1	1	1,0
2	2,6	2	2,4	2	2,2	2	2,0
3	3,9	3	3,6	3	3,3	3	3,0
4	5,2	4	4,8	4	4,4	4	4,0
5	6,5	5	6,0	5	5,5	5	5,0
6	7,8	6	7,2	6	6,6	6	6,0
7	9,1	7	8,4	7	7,7	7	7,0
8	10,4	8	9,6	8	8,8	8	8,0
9	11,7	9	10,8	9	9,9	9	9,0

		S.	T.			S.	T
0° 58′	= 3480″	4.68 555	4.68 562	1° 3′	= 3780″	4.68 555	4.68 562
0 59	= 3540	4.68 555	4.68 562	1 4	= 3840	4.68 555	4.68 563
1 0	= 3600	4.68 555	4.68 562	1 5	= 3900	4.68 555	4.68 563
1 1	= 3660	4.68 555	4.68 562	1 6	= 3960	4.68 555	4.68 563
1 2	= 3720	4.68 555	4.68 562	1 7	= 4020	4.68 555	4.68 563

$L\cos a = \log(90°-a)'' + S$, $L \operatorname{cotg} a = \log(90°-a)'' + T$, $L \operatorname{tang} a = 20 - \log(90°-a)'' - T$;
$\log(90°-a)'' = L\cos a - S = L\operatorname{cotg} a - T = 20 - L\operatorname{tang} a - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60 206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
403	531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	638	649	660	670	681	692	703	713	724	735
405	746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	853	863	874	885	895	906	917	927	938	949
407	959	970	981	991	*002	*013	*023	*034	*045	*055
408	61 066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215	225	236	247	257	268
410	278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	752	763	773	784	704
415	805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	972	982	993	*003
417	62 014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315
420	325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
424	737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	941	951	961	972	982	992	*002	*012	*022	*033
427	63 043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
429	246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	448	458	468	478	488	498	508	518	528	538
432	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	849	859	869	879	889	899	909	919	929	989
436	949	959	969	979	988	998	*008	*018	*028	*038
437	64 048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
441	444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	542	552	562	572	582	591	601	611	621	631
443	640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	738	748	758	768	777	787	797	807	816	826
445	836	840	856	865	875	885	895	904	914	924
446	933	943	953	963	972	982	992	*002	*011	*021
447	65 031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	128	137	147	157	167	176	186	196	205	215
449	225	234	244	254	263	273	283	292	302	312
450	321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	11	10	9
1	1,1	1,0	0,9
2	2,2	2,0	1,8
3	3,3	3,0	2,7
4	4,4	4,0	3,6
5	5,5	5,0	4,5
6	6,6	6,0	5,4
7	7,7	7,0	6,3
8	8,8	8,0	7,2
9	9,9	9,0	8,1

1°	6′=3960″	S. 4.68 555	T. 4.68 563	1°	11′=4260″	S. 4.68 554	T. 4.68 564
1	7 =4020	4.68 555	4.68 563	1	12 =4320	4.68 554	4.68 564
1	8 =4080	4.68 555	4.68 563	1	13 =4380	4.68 554	4.68 564
1	9 =4140	4.68 555	4.68 563	1	14 =4440	4.68 554	4.68 564
1	10 =4200	4.68 554	4.68 563	1	15 =4500	4.68 554	4.68 564

$L \sin \alpha = \log \alpha'' + S$, $L \operatorname{tang} \alpha = \log \alpha'' + T$, $L \operatorname{cotg} \alpha = 20 - \log \alpha'' - T$:
$\log \alpha'' = L \sin \alpha - S = L \operatorname{tang} \alpha - T = 20 - L \operatorname{cotg} \alpha - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	65 321	331	341	350	360	369	379	339	398	408
451	418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
452	514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
453	610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
454	706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
455	801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
456	896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
457	992	*001	*011	*020	*030	*039	*049	*058	*068	*077
458	66 087	096	106	115	124	134	143	153	162	172
459	181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
460	276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
461	370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
462	464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
463	558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
464	652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
465	745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
466	839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
467	932	941	950	960	969	978	987	997	*006	*015
468	67 025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469	117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470	210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471	302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472	394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473	486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474	578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475	669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476	761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477	852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478	943	952	961	970	979	988	997	*006	*015	*024
479	68 034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484	485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485	574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486	664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487	753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488	842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489	931	940	949	958	966	975	984	993	*002	*011
490	69 020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	232	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888
500	897	906	914	923	932	940	049	958	966	975
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	10	9	8
1	1,0	0,9	0,8
2	2,0	1,8	1,6
3	3,0	2,7	2,4
4	4,0	3,6	3,2
5	5,0	4,5	4,0
6	6,0	5,4	4,8
7	7,0	6,3	5,6
8	8,0	7,2	6,4
9	9,0	8,1	7,2

1° 15′=4500″	S. 4.68 554	T. 4.68 564	1° 20′=4800″	S. 4.68 554	T. 4.68 565
1 16 =4560	4.68 554	4.68 565	1 21 =4860	4.68 553	4.68 566
1 17 =4620	4.68 554	4.68 565	1 22 =4920	4.68 553	4.68 566
1 18 =4680	4.68 554	4.68 565	1 23 =4980	4.68 553	4.68 566
1 19 =4740	4.68 554	4.68 565	1 24 =5040	4.68 553	4.68 566

$L \cos \alpha = \log(90° - \alpha)'' + S$, $L \operatorname{cotg} \alpha = \log(90° - \alpha)'' + T$, $L \operatorname{tang} \alpha = 20 - \log(90° - \alpha)'' - T$;
$\log (90° - \alpha)'' = L \cos \alpha - S = L \operatorname{cotg} \alpha - T = 20 - L \operatorname{tang} \alpha - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69 897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
501	984	992	*001	*010	*018	*027	*036	*044	*053	*062
502	70 070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	157	165	174	183	191	200	209	217	226	234
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	*003
513	71 012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	*008
525	72 016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
535	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	997	*006	*014	*022	*030	*038	*046	*054	*062	*070
538	73 078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540	239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	*005	*013	*020	*028
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	9
1	0,9
2	1,8
3	2,7
4	3,6
5	4,5
6	5,4
7	6,3
8	7,2
9	8,1

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

1° 23′ = 4980″	S. 4.68 553	T. 4.68 566	
1 24 = 5040	4.68 553	4.68 566	
1 25 = 5100	4.68 553	4.68 566	
1 26 = 5160	4.68 553	4.68 567	
1 27 = 5220	4.68 553	4.68 567	
1° 28′ = 5280″	S. 4.68 553	T. 4.68 567	
1 29 = 5340	4.68 553	4.68 567	
1 30 = 5400	4.68 553	4.68 567	
1 31 = 5460	4.68 552	4.68 568	
1 32 = 5520	4.68 552	4.68 568	

L sin a = log a'' + S,　L tang a = log a'' + T,　L cotg a = 20 − log a'' − T;
log a'' = L sin a − S = L tang a − T = 20 − L cotg a − T.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	74 036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
551	115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
552	194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
553	273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
555	429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
558	663	671	679	687	695	702	710	718	726	733
559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
560	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
561	896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
562	974	981	989	997	*005	*012	*020	*028	*035	*043
563	75 051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
565	205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
566	282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
567	358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
568	435	442	450	458	465	473	481	488	496	504
569	511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
570	587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
572	740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
575	967	974	982	989	997	*005	*012	*020	*027	*035
576	76 042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335
580	343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
581	418	425	433	440	448	455	462	470	477	485
582	492	500	507	515	522	530	537	545	552	559
583	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
584	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
585	716	723	730	738	745	753	760	768	775	782
586	790	797	805	812	819	827	834	842	849	856
587	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
588	938	945	953	960	967	975	982	989	997	*004
589	77 012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
590	085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
591	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225
592	232	240	247	254	262	269	276	283	291	298
593	305	313	320	327	335	342	349	357	364	371
594	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
595	452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
596	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590
597	597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
598	670	677	685	692	699	706	714	721	728	735
599	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808
600	815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	8
1	0,8
2	1,6
3	2,4
4	3,2
5	4,0
6	4,8
7	5,6
8	6,4
9	7,2

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

1° 31′=5460″	S. 4.68 552	T. 4.68 568	1° 36′=5760″	S. 4.68 552	T. 4.68 569
1 32 =5520	4.68 552	4.68 568	1 37 =5820	4.68 552	4.68 569
1 33 =5580	4.68 552	4.68 568	1 38 =5880	4.68 552	4.68 569
1 34 =5640	4.68 552	4.68 568	1 39 =5940	4.68 551	4.68 569
1 35 =5700	4.68 552	4.68 569	1 40 =6000	4.68 551	4.68 570

L cos α = log(90° − α)″ + S, L cotg α = log(90° − α)″ + T, L tang α = 20 − log(90° − α)″ − T;
log (90° − α)″ = L cos α − S = L cotg α − T = 20 − L tang α − T.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
600	77 815	822	830	837	844	851	859	866	873	880
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952
602	960	967	974	981	988	996	*003	*010	*017	*025
603	78 032	039	046	053	061	068	075	082	089	097
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168
605	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455
609	462	469	476	483	490	497	504	512	519	526
610	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880
615	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951
616	958	965	972	979	986	993	*000	*007	*014	*021
617	79 029	036	043	050	057	064	071	078	085	092
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232
620	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581
625	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927
630	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996
631	80 003	010	017	024	030	037	044	051	058	065
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271
635	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611
640	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949
645	956	963	969	976	983	990	996	*003	*010	*017
646	81 023	030	037	043	050	057	064	070	077	084
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285
650	291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	8	7	6
1	0,8	0,7	0,6
2	1,6	1,4	1,2
3	2,4	2,1	1,8
4	3,2	2,8	2,4
5	4,0	3,5	3,0
6	4,8	4,2	3,6
7	5,6	4,9	4,2
8	6,4	5,6	4,8
9	7,2	6,3	5,4

1° 40′=6000″	S. 4.68 551	T. 4.68 570		1° 45′=6300″	S. 4.68 551	T. 4.68 571
1 41 =6060	4.68 551	4.68 570		1 46 =6360	4.68 551	4.68 571
1 42 =6120	4.68 551	4.68 570		1 47 =6420	4.68 550	4.68 572
1 43 =6180	4.68 551	4.68 570		1 48 =6480	4.68 550	4.68 572
1 44 =6240	4.68 551	4.68 571		1 49 =6540	4.68 550	4.68 572

L sin α = log α''+S,　L tang α = log α''+T,　L cotg α = 20 − log α'' − T;
log α'' = L sin α − S = L tang α − T = 20 − L cotg α − T.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81 291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	757	763	770	776	783	700	796	803	809	816
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	954	961	968	974	981	987	994	*000	*007	*014
661	82 020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	249	256	263	269	276
665	282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	607	614	620	627	633	640	646	653	659	666
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	995	*001	*008	*014	*020	*027	*033	*040	*046	*052
677	83 059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	187	193	200	200	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	885	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	*004
692	84 011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	198	205	211	217	223	230	236	242	248	255
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	323	330	336	342	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504
700	510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

1° 48′ = 6480″	S. 4.68 550	T. 4.68 572		1° 53′ = 6780″	S. 4.68 550	T. 4.68 573
1 49 = 6540	4.68 550	4.68 572		1 54 = 6840	4.68 550	4.68 573
1 50 = 6600	4.68 550	4.68 572		1 55 = 6900	4.68 549	4.68 574
1 51 = 6660	4.68 550	4.68 573		1 56 = 6960	4.68 549	4.68 574
1 52 = 6720	4.68 550	4.68 573		1 57 = 7020	4.68 549	4.68 574

$L \cos a = \log(90° - a)'' + S$, $L \operatorname{cotg} a = \log(90° - a)'' + T$, $L \operatorname{tang} a = 20 - \log(90° - a)'' - T$;
$\log(90° - a)'' = L \cos a - S = L \operatorname{cotg} a - T = 20 - L \operatorname{tang} a - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84 510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
705	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
708	85 003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710	126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
715	431	437	443	449	455	461	467	473	479	485
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
719	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
724	974	980	986	992	998	*004	*010	*016	*022	*028
725	86 034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
729	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730	332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
731	392	398	404	410	415	441	427	433	439	445
732	451	457	463	469	475	481	487	493	499	504
733	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
734	570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
735	629	635	641	646	652	658	664	670	676	682
736	688	694	700	705	711	717	723	729	735	741
737	747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
738	806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
739	864	870	876	882	888	894	900	906	911	917
740	923	929	935	941	947	953	958	964	970	,976
741	982	988	994	999	*005	*011	*017	*023	*029	*035
742	87 040	046	052	058	064	070	075	081	087	093
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210
745	216	221	227	233	239	245	251	256	262	268
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326
747	332	338	344	349	355	361	367	373	379	384
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442
749	448	454	460	466	471	477	483	489	495	500
750	506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	7
1	0,7
2	1,4
3	2,1
4	2,8
5	3,5
6	4,2
7	4,9
8	5,6
9	6,3

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

		S.	T.			S.	T.
1°	56′ = 6960″	4.68 549	4.68 574	2°	1′ = 7260″	4.68 549	4.68 575
1	57 = 7020	4.68 549	4.68 574	2	2 = 7320	4.68 548	4.68 576
1	58 = 7080	4.68 549	4.68 575	2	3 = 7380	4.68 548	4.68 576
1	59 = 7140	4.68 549	4.68 575	2	4 = 7440	4.68 548	4.68 576
2	60 = 7200	4.68 549	4.68 575	2	5 = 7500	4.68 548	4.68 577

L sin a = log a'' + S, L tang a = log a'' + T, L cotg a = 20 − log a'' − T;
log a'' = L sin a − S = L tang a − T = 20 − L cotg a − T.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
750	87 506	512	518	523	529	535	541	547	552	558
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789
755	795	800	806	812	818	823	829	835	841	846
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961
758	967	973	978	984	990	996	*001	*007	*013	*018
759	88 024	030	036	041	047	053	058	064	070	076
760	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417
766	423	429	434	440	446	451	457	463	468	474
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981
776	986	992	997	*003	*009	*014	*020	*025	*031	*037
777	89 042	048	053	059	064	070	076	081	087	092
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	977
794	982	988	993	998	*004	*009	*015	*020	*026	*031
795	90 037	042	048	053	059	064	069	075	080	086
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304
800	309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

		S.	T.			S.	T.
2°	5′=7500″	4.68 548	4.68 577	2°	10′=7800″	4.68 547	4.68 578
2	6 =7560	4.68 548	4.68 577	2	11 =7860	4.68 547	4.68 579
2	7 =7620	4.68 548	4.68 577	2	12 =7920	4.68 547	4.68 579
2	8 =7680	4.68 547	4.68 578	2	13 =7980	4.68 547	4.68 579
2	9 =7740	4.68 547	4.68 578	2	14 =8040	4.68 546	4.68 579

$L \cos a = \log(90° - a)'' + S$, $L \operatorname{cotg} a = \log(90° - a)'' + T$, $L \operatorname{tang} a = 20 - \log(90° - a)'' - T$;
$\log(90° - a)'' = L \cos a - S = L \operatorname{cotg} a - T = 20 - L \operatorname{tang} a - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.
800	90 309	314	320	325	331	336	342	347	352	358	
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412	
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466	
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520	
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574	
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628	
806	634	639	644	650	655	660	666	671	677	682	
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736	
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789	
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843	
810	849	854	859	865	870	875	881	886	891	897	6
811	902	907	913	918	924	929	934	940	945	950	1 | 0,6
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	*004	2 | 1,2
813	91 009	014	020	025	030	036	041	046	052	057	3 | 1,8
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110	4 | 2,4
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164	5 | 3,0
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217	6 | 3,6
817	222	228	233	238	243	249	254	259	265	270	7 | 4,2
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323	8 | 4,8
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376	9 | 5,4
820	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429	
821	434	440	445	450	455	461	466	471	477	482	
822	487	492	498	503	508	514	519	524	529	535	
823	540	545	551	556	561	566	572	577	582	587	
824	593	598	603	609	614	619	624	630	635	640	
825	645	651	656	661	666	672	677	682	687	693	
826	698	703	709	714	719	724	730	735	740	745	
827	751	756	761	766	772	777	782	787	793	798	
828	803	808	814	819	824	829	834	840	845	850	
829	855	861	866	871	876	882	887	892	897	903	
830	908	913	918	924	929	934	939	944	950	955	
831	960	965	971	976	981	986	991	997	*002	*007	
832	92 012	018	023	028	033	038	044	049	054	059	5
833	065	070	075	080	085	091	096	101	106	111	1 | 0,5
834	117	122	127	132	137	143	148	153	158	163	2 | 1,0
835	169	174	179	184	189	195	200	205	210	215	3 | 1,5
836	221	226	231	236	241	247	252	257	262	267	4 | 2,0
837	273	278	283	288	293	298	304	309	314	319	5 | 2,5
838	324	330	335	340	345	350	355	361	366	371	6 | 3,0
839	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423	7 | 3,5
840	428	433	438	443	449	454	459	464	469	474	8 | 4,0
841	480	485	490	495	500	505	511	516	521	526	9 | 4,5
842	531	536	542	547	552	557	562	567	572	578	
843	583	588	593	598	603	609	614	619	624	629	
844	634	639	645	650	655	660	665	670	675	681	
845	686	691	696	701	706	711	716	722	727	782	
846	737	742	747	752	758	763	768	773	778	783	
847	788	793	799	804	809	814	819	824	829	834	
848	840	845	850	855	860	865	870	875	881	886	
849	891	896	901	906	911	916	921	927	932	937	
850	942	947	952	957	962	967	973	978	983	988	
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P. P.

2° 13′=7980″	S. 4.68 547	T. 4.68 579		2° 18′=8280″	S. 4.68 546	T. 4.68 581
2 14 =8040	4.68 546	4.68 579		2 19 =8340	4.68 546	4.68 581
2 15 =8100	4.68 546	4.68 580		2 20 =8400	4.68 545	4.68 582
2 16 =8160	4.68 546	4.68 580		2 21 =8460	4.68 545	4.68 582
2 17 =8220	4.68 546	4.68 580		2 22 =8520	4.68 545	4.68 582

L sin α = log α'' + S,　L tang α = log α'' + T,　L cotg α = 20 − log α'' − T;
log α'' = L sin α − S = L tang α − T = 20 − L cotg α − T.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
850	92 942	947	952	957	962	967	973	978	983	988
851	993	998	*003	*008	*013	*018	*024	*029	*034	*039
852	93 044	049	054	059	064	069	075	080	085	090
853	095	100	105	110	115	120	125	131	136	141
854	146	151	156	161	166	171	176	181	186	192
855	197	202	207	212	217	222	227	232	237	242
856	247	252	258	263	268	273	278	283	288	293
857	298	303	308	313	318	323	328	334	339	344
858	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
859	399	404	409	414	420	425	430	435	440	445
860	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	646
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697
865	702	707	712	717	722	727	732	737	742	747
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897
869	902	907	912	917	922	927	932	937	942	947
870	952	957	962	967	972	977	982	987	992	997
871	94 002	007	012	017	022	027	032	037	042	047
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196
875	201	206	211	216	221	226	231	236	240	245
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443
880	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689
885	694	699	704	709	714	719	724	729	734	738
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934
890	939	944	949	954	959	963	968	973	978	983
891	988	993	998	*002	*007	*012	*017	*022	*027	*032
892	95 036	041	046	051	056	061	066	071	075	080
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177
895	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371
899	376	381	386	390	395	400	405	410	415	419
900	424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	6
1	0,6
2	1,2
3	1,8
4	2,4
5	3,0
6	3,6
7	4,2
8	4,8
9	5,4

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

	4
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

		S.	T.			S.	T.
2° 21′	=8460″	4.68 545	4.68 582	2° 26′	=8760″	4.68 544	4.68 584
2 22	=8520	4.68 545	4.68 582	2 27	=8820	4.68 544	4.68 584
2 23	=8580	4.68 545	4.68 583	2 28	=8880	4.68 544	4.68 584
2 24	=8640	4.68 545	4.68 583	2 29	=8940	4.68 544	4.68 585
2 25	=8700	4.68 545	4.68 583	2 30	=9000	4.68 544	4.68 585

$L\cos\alpha = \log(90^\circ-\alpha)'' + S$, $L\,\mathrm{cotg}\,\alpha = \log(90^\circ-\alpha)'' + T$, $L\,\mathrm{tang}\,\alpha = 20 - \log(90^\circ-\alpha)'' - T$;
$\log(90^\circ-\alpha)'' = L\cos\alpha - S = L\,\mathrm{cotg}\,\alpha - T = 20 - L\,\mathrm{tang}\,\alpha - T$.

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95 424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
901	472	477	482	487	492	497	501	506	511	516
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
905	665	670	674	679	684	689	694	698	703	708
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899
910	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
911	952	957	961	966	971	976	980	985	990	995
912	999	*004	*009	*014	*019	*023	*028	*033	*038	*042
913	96 047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
914	095	099	104	109	114	118	123	128	133	137
915	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374
920	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609
925	614	619	624	628	633	638	642	647	652	656
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844
930	848	853	858	862	867	872	876	881	886	890
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932	942	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933	988	993	997	*002	*007	*011	*016	*021	*025	*030
934	97 035	039	044	049	053	058	063	067	072	077
935	081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308
940	313	317	322	327	331	336	340	345	350	354
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539
945	543	548	552	557	562	566	571	575	580	585
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768
950	772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

	4
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

		S.	T.			S.	T.
2°	30′=9000″	4.68 544	4.68 585	2°	35′=9300″	4.68 543	4.68 587
2	31 =9060	4.68 544	4.68 585	2	36 =9360	4.68 543	4.68 587
2	32 =9120	4.68 543	4.68 586	2	37 =9420	4.68 542	4.68 588
2	33 =9180	4.68 543	4.68 586	2	38 =9480	4.68 542	4.68 588
2	34 =9240	4.68 543	4.68 587	2	39 =9540	4.68 542	4.68 588

$$\text{L}\sin\alpha=\log\alpha''+\text{S},\quad \text{L}\tan\alpha=\log\alpha''+\text{T},\quad \text{L}\cot\alpha=20-\log\alpha''-\text{T};$$
$$\log\alpha''=\text{L}\sin\alpha-\text{S}=\text{L}\tan\alpha-\text{T}=20-\text{L}\cot\alpha-\text{T}.$$

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
950	97 772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
951	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859
952	864	868	873	877	882	886	891	896	900	905
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950
954	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996
955	98 000	005	009	014	019	023	028	032	037	041
956	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087
957	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132
958	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223
960	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268
961	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313
962	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
964	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448
965	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
966	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
969	632	637	641	646	650	655	659	664	668	673
970	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
973	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851
974	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896
975	900	905	909	914	918	923	927	932	936	941
976	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985
977	989	994	998	*003	*007	*012	*016	*021	*025	*029
978	99 034	038	043	047	052	056	061	065	069	074
979	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118
980	123	127	131	136	140	145	149	154	158	162
981	167	171	176	180	185	189	193	198	202	207
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
984	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339
985	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
987	432	436	441	445	449	454	458	463	467	471
988	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515
989	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559
990	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
991	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
993	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734
994	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778
995	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
996	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
998	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952
999	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996
1000	00 000	004	009	013	017	022	026	030	035	039
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	5
1	0,5
2	1,0
3	1,5
4	2,0
5	2,5
6	3,0
7	3,5
8	4,0
9	4,5

	4
1	0,4
2	0,8
3	1,2
4	1,6
5	2,0
6	2,4
7	2,8
8	3,2
9	3,6

2° 38′ = 9480″	S. 4.68 542	T. 4.68 588
2 39 = 9540	4.68 542	4.68 588
2 40 = 9600	4.68 542	4.68 589
2 41 = 9660	4.68 542	4.68 589
2 42 = 9720	4.68 541	4.68 590
2° 43′ = 9780″	S. 4.68 541	T. 4.68 590
2 44 = 9840	4.68 541	4.68 590
2 45 = 9900	4.68 541	4.68 591
2 46 = 9960	4.68 541	4.68 591
2 47 = 10020	4.68 540	4.68 592

$L\cos a = \log(90° - a)'' + S$, $L\operatorname{cotg} a = \log(90° - a)'' + T$, $L\tan a = 20 - \log(90° - a)'' - T$;
$\log(90° - a)'' = L\cos a - S = L\operatorname{cotg} a - T = 20 - L\tan a - T$

N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
1000	000 0000	0434	0869	1303	1737	2171	2605	3039	3473	3907	434
1001	4341	4775	5208	5642	6076	6510	6943	7377	7810	8244	434
1002	8677	9111	9544	9977	*0411	*0844	*1277	*1710	*2143	*2576	433
1003	001 3009	3442	3875	4308	4741	5174	5607	6039	6472	6905	433
1004	7337	7770	8202	8635	9067	9499	9932	*0364	*0796	*1228	432
1005	002 1661	2093	2525	2957	3389	3821	4253	4685	5116	5548	432
1006	5980	6411	6843	7275	7706	8138	8569	9001	9432	9863	431
1007	003 0295	0726	1157	1588	2019	2451	2882	3313	3744	4174	431
1008	4605	5036	5467	5898	6328	6759	7190	7620	8051	8481	431
1009	8912	9342	9772	*0203	*0633	*1063	*1493	*1924	*2354	*2784	430
1010	004 3214	3644	4074	4504	4933	5363	5793	6223	6652	7082	430
1011	7512	7941	8371	8800	9229	9659	*0088	*0517	0947	*1376	429
1012	005 1805	2234	2663	3092	3521	3950	4379	4808	5237	5666	429
1013	6094	6523	6952	7380	7809	8238	8666	9094	9523	9951	429
1014	006 0380	0808	1236	1664	2092	2521	2949	3377	3805	4233	428
1015	4660	5088	5516	5944	6372	6799	7227	7655	8082	8510	428
1016	8937	9365	9792	*0219	*0647	*1074	*1501	*1928	*2355	*2782	427
1017	007 3210	3637	4064	4490	4917	5344	5771	6198	6624	7051	427
1018	7478	7904	8331	8757	9184	9610	*0037	*0463	*0889	*1316	426
1019	008 1742	2168	2594	3020	3446	3872	4298	4724	5150	5576	426
1020	6002	6427	6853	7279	7704	8130	8556	8981	9407	9832	426
1021	009 0257	0683	1108	1533	1959	2384	2809	3234	3659	4084	425
1022	4509	4934	5359	5784	6208	6633	7058	7483	7907	8332	425
1023	8756	9181	9605	*0030	*0454	*0878	*1303	*1727	*2151	*2575	424
1024	010 3000	3424	3848	4272	4696	5120	5544	5967	6391	6815	424
1025	7239	7662	8086	8510	8933	9357	9780	*0204	*0627	*1050	424
1026	011 1474	1897	2320	2743	3166	3590	4013	4436	4859	5282	423
1027	5704	6127	6550	6973	7396	7818	8241	8664	9086	9509	423
1028	9931	*0354	*0776	*1198	*1621	*2043	*2465	*2887	*3310	*3732	422
1029	012 4154	4576	4998	5420	5842	6264	6685	7107	7529	7951	422
1030	8372	8794	9215	9637	*0059	*0480	*0901	*1323	*1744	*2165	422
1031	013 2587	3008	3429	3850	4271	4692	5113	5534	5955	6376	421
1032	6797	7218	7639	8059	8480	8901	9321	9742	*0162	*0583	421
1033	014 1003	1424	1844	2264	2685	3105	3525	3945	4365	4785	420
1034	5205	5625	6045	6465	6885	7305	7725	8144	8564	8984	420
1035	9403	9823	*0243	*0662	*1082	*1501	*1920	*2340	*2759	*3178	420
1036	015 3598	4017	4436	4855	5274	5693	6112	6531	6950	7369	419
1037	7788	8206	8625	9044	9462	9881	*0300	*0718	*1137	*1555	419
1038	016 1974	2392	2810	3229	3647	4065	4483	4901	5319	5737	418
1039	6155	6573	6991	7409	7827	8245	8663	9080	9498	9916	418
1040	017 0333	0751	1168	1586	2003	2421	2838	3256	3673	4090	417
1041	4507	4924	5342	5759	6176	6593	7010	7427	7844	8260	417
1042	8677	9094	9511	9927	*0344	*0761	*1177	*1594	*2010	*2427	417
1043	018 2843	3259	3676	4092	4508	4925	5341	5757	6173	6589	416
1044	7005	7421	7837	8253	8669	9084	9500	9916	*0332	*0747	416
1045	019 1163	1578	1994	2410	2825	3240	3656	4071	4486	4902	415
1046	5317	5732	6147	6562	6977	7392	7807	8222	8637	9052	415
1047	9467	9882	*0296	*0711	*1126	*1540	*1955	*2369	*2784	*3198	415
1048	020 3613	4027	4442	4856	5270	5684	6099	6513	6927	7341	414
1049	7755	8169	8583	8997	9411	9824	*0238	*0652	*1066	*1479	414
1050	021 1893	2307	2720	3134	3547	3961	4374	4787	5201	5614	413
N.	L. 0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

2° 46′ = 9960″	S. 4.68 541	T. 4.68 591	2° 51′ = 10260″	S. 4.68 540	T. 4.68 593
2 47 = 10020	4.68 540	4.68 592	2 52 = 10320	4.68 539	4.68 594
2 48 = 10080	4.68 540	4.68 592	2 53 = 10380	4.68 539	4.68 594
2 49 = 10140	4.68 540	4.68 592	2 54 = 10440	4.68 539	4.68 595
2 50 = 10200	4.68 540	4.68 593	2 55 = 10500	4.68 539	4.68 595

L sin a = log a'' + S,　L tang a = log a'' + T,　L cotg a = 20 − log a'' − T;
log a'' = L sin a − S = L tang a − T = 20 − L cotg a − T.

N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.
1050	021	1893	2307	2720	3134	3547	3961	4374	4787	5201	5614	413
1051		6027	6440	6854	7267	7680	8093	8506	8919	9332	9745	413
1052	022	0157	0570	0983	1396	1808	2221	2634	3046	3459	3871	413
1053		4284	4696	5109	5521	5933	6345	6758	7170	7582	7994	412
1054		8406	8818	9230	9642	*0054	*0466	*0878	*1289	*1701	*2113	412
1055	023	2525	2936	3348	3759	4171	4582	4994	5405	5817	6228	411
1056		6639	7050	7462	7873	8284	8695	9106	9517	9928	*0339	411
1057	024	0750	1161	1572	1982	2393	2804	3214	3625	4036	4446	411
1058		4857	5267	5678	6088	6498	6909	7319	7729	8139	8549	410
1059		8960	9370	9780	*0190	*0600	*1010	*1419	*1829	*2239	*2649	410
1060	025	3059	3468	3878	4288	4697	5107	5516	5926	6335	6744	410
1061		7154	7563	7972	8382	8791	9200	9609	*0018	*0427	*0836	409
1062	026	1245	1654	2063	2472	2881	3289	3698	4107	4515	4924	409
1063		5333	5741	6150	6558	6967	7375	7783	8192	8600	9008	408
1064		9416	9824	*0233	*0641	*1049	*1457	*1865	*2273	*2680	*3088	408
1065	027	3496	3904	4312	4719	5127	5535	5942	6350	6757	7165	408
1066		7572	7979	8387	8794	9201	9609	*0016	*0423	*0830	*1237	407
1067	028	1644	2051	2458	2865	3272	3679	4086	4492	4899	5306	407
1068		5713	6119	6526	6932	7339	7745	8152	8558	8964	9371	406
1069		9777	*0183	*0590	*0996	*1402	*1808	*2214	*2620	*3026	*3432	406
1070	029	3838	4244	4649	5055	5461	5867	6272	6678	7084	7489	406
1071		7895	8300	8706	9111	9516	9922	*0327	*0732	*1138	*1543	405
1072	030	1948	2353	2758	3163	3568	3973	4378	4783	5188	5592	405
1073		5997	6402	6807	7211	7616	8020	8425	8830	9234	9638	405
1074	031	0043	0447	0851	1256	1660	2064	2468	2872	3277	3681	404
1075		4085	4489	4893	5296	5700	6104	6508	6912	7315	7719	404
1076		8123	8526	8930	9333	9737	*0140	*0544	*0947	*1350	*1754	403
1077	032	2157	2560	2963	3367	3770	4173	4576	4979	5382	5785	403
1078		6188	6590	6993	7396	7799	8201	8604	9007	9409	9812	403
1079	033	0214	0617	1019	1422	1824	2226	2629	*3031	3433	3835	402
1080		4238	4640	5042	5444	5846	6248	6650	7052	7453	7855	402
1081		8257	8659	9060	9462	9864	*0265	*0667	*1068	*1470	*1871	402
1082	034	2273	2674	3075	3477	3878	4279	4680	5081	5482	5884	401
1083		6285	6686	7087	7487	7888	8289	8690	9091	9491	9892	401
1084	035	0293	0693	1094	1495	1895	2296	2696	3096	3497	3897	400
1085		4297	4698	5098	5498	5898	6298	6698	7098	7498	7898	400
1086		8298	8698	9098	9498	9898	*0297	*0697	*1097	*1496	*1896	400
1087	036	2295	2695	3094	3494	3893	4293	4692	5091	5491	5890	399
1088		6289	6688	7087	7486	7885	8284	8683	9082	9481	9880	399
1089	037	0279	0678	1076	1475	1874	2272	2671	3070	3468	3867	399
1090		4265	4663	5062	5460	5858	6257	6655	7053	7451	7849	398
1091		8248	8646	9044	9442	9839	*0237	*0635	*1033	*1431	*1829	398
1092	038	2226	2624	3022	3419	3817	4214	4612	5009	5407	5804	398
1093		6202	6599	6996	7393	7791	8188	8585	8982	9379	9776	397
1094	039	0173	0570	0967	1364	1761	2158	2554	2951	3348	3745	397
1095		4141	4538	4934	5331	5727	6124	6520	6917	7313	7709	397
1096		8106	8502	8898	9294	9690	*0086	*0482	*0878	*1274	*1670	396
1097	040	2066	2462	2858	3254	3650	4045	4441	4837	5232	5628	396
1098		6023	6419	6814	7210	7605	8001	8396	8791	9187	9582	395
1099		9977	*0372	*0767	*1162	*1557	*1952	*2347	*2742	*3137	*3532	395
1100	041	3927	4322	4716	5111	5506	5900	6295	6690	7084	7479	395
N.	L.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	d.

2° 55′ = 10500″	S. 4.68 539	T. 4.68 595	3° 0′ = 10800″	S. 4.68 538	T. 4.68 597
2 56 = 10560	4.68 539	4.68 595	3 1 = 10860	4.68 537	4.68 598
2 57 = 10620	4.68 538	4.68 596	3 2 = 10920	4.68 537	4.68 598
2 58 = 10680	4.68 538	4.68 596	3 3 = 10980	4.68 537	4.68 599
2 59 = 10740	4.68 538	4.68 597	3 4 = 11040	4.68 537	4.68 599

$L\cos a = \log(90° - a)'' + S$, $L\operatorname{cotg} a = \log(90° - a)'' + T$, $L\operatorname{tang} a = 20 - \log(90° - a)'' - T$;
$\log(90° - a)'' = L\cos a - S = L\operatorname{cotg} a - T = 20 - L\operatorname{tang} a - T$.