Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Riemannsche Flächen

Vorlesung 9

Verzweigung

Bei einer Überlagerung mit konstanter endlicher Blätterzahl sind die Fasern alle endliche diskrete Mengen zu dieser Anzahl. Bei der Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto z^n,$$

sind die Fasern zu $z \neq 0$ alle n-elementig, dagegen ist die Faser im Nullpunkt einelementig. Allerdings kann man diese Abweichung auffangen, indem man die Nullstellen der Ableitungen mitzählt. In diesem Sinne ist für jedes Polynom P vom Grad n und jeden Punkt a die Faser über a n-anzahlig, wenn man die Exponenten (Vielfachheiten) der Linearfaktoren von $P-a$ mitzählt. Dies gilt allgemeiner für holomorphe Abbildungen, die endlich sind, also endliche Fasern haben und eigentlich sind.

Definition 9.1. Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Es sei $x \in X$ ein Punkt mit $y = \varphi(x)$. Es sei z ein lokaler Parameter um y. Dann nennt man die Nullstellenordnung der (in einer offenen Umgebung von x definierten) holomorphen Funktion $z \circ \varphi$ im Punkt x den *Verzweigungsindex* von φ in x. Sie wird mit $\operatorname{Verz}(x|\varphi(x))$ bezeichnet.

Statt Verzweigungsindex sagt man auch Verzweigungsordnung, was insofern etwas problematisch ist, dass die Vielfachheit des Verzweigungsdivisor um 1 niedriger ist. Wenn in einem Punkt $x \in X$ der Verzweigungsindex ≥ 2 ist, so sagt man, dass dort Verzweigung vorliegt. Die Menge aller Verzweigungspunkte nennt man auch den *Verzweigungsort* und die Bildpunkte aller Verzweigungspunkte nennt man auch das *Verzweigungsbild*. Über einem Punkt des Verzweigungsbildes liegt also zumindest ein Verzweigungspunkt, es muss aber nicht jeder Urbildpunkt ein Verzweigungspunkt sein. Der Verzweigungsort ist eine diskrete Teilmenge, da Verzweigung lokal durch das Verschwinden der ersten Ableitung charakterisiert ist. Das Verzweigungsbild ist im endlichen Fall ebenfalls diskret. Wir werden später sehen, dass dieser Verzweigungsbegriff auch mit dem Verzweigungsbegriff für diskrete Bewertungsringe übereinstimmt.

Lemma 9.2. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y und sei $x \in X$. Dann stimmt der Verzweigungsindex von φ in x mit dem Exponenten einer lokalen Beschreibung von φ im Sinne von Satz 2.1 überein.*

Beweis. Wegen der Nichtkonstanz können wir nach Satz 2.1 davon ausgehen, dass eine Potenzierung $z \mapsto z^n$ auf einer Kreisscheibe vorliegt und dass x der Nullpunkt ist. Die Nullstellenordnung von z^n ist aber n. □

Korollar 9.3. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Dann ist φ genau dann unverzweigt, wenn φ ein lokaler Homöomorphismus ist.*

Beweis. Unverzweigt bedeutet nach Lemma 9.2, dass die Abbildung lokal in geeigneten Koordinaten die Form $z \mapsto z$ besitzt. Dabei handelt es sich um einen lokalen Homöomorphismus. Bei $z \mapsto z^n$ mit $n \geq 2$ liegt lokal keine Bijektion vor. □

Verzweigung bei endlichen Abbildungen

Satz 9.4. *Eine nichtkonstante Polynomfunktion*

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

ist eine endliche Abbildung.

Beweis. Das Polynom definiert eine holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, diese lässt sich nach Lemma 3.19 zu einer holomorphen Abbildung $\tilde{f}\colon \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ mit $\tilde{f}(\infty) = \infty$ fortsetzen. Diese Abbildung ist nach Lemma Anhang 3.3 eigentlich und somit endlich. Diese Eigenschaft überträgt sich nach Lemma Anhang X.Y auf f zurück. □

Lemma 9.5. *Es sei $f \in \mathbb{C}[Z]$ ein Polynom ohne mehrfache Nullstelle und sei $V = \{(z,w) \mid w^2 = f(z)\} \subseteq \mathbb{C}^2$ die zugehörige riemannsche Wurzelfläche mit der Projektion $p\colon V \to \mathbb{C}$, $(z,w) \mapsto z$. Dann ist p eine endliche holomorphe Abbildung, die genau in den Punkten (z,w) mit $f(z) = 0$ verzweigt ist.*

Beweis. Bereits in Korollar 2.8 wurde gezeigt, dass eine riemannsche Fläche vorliegt. Eine kompakte Teilmenge $T \subseteq \mathbb{C}$ ist nach dem Satz von Heine-Borel beschränkt und abgeschlossen. Das Urbild $p^{-1}(T)$ ist abgeschlossen in V wegen der Stetigkeit und auch abgeschossen in $\mathbb{C}^2$, da V abgeschossen in $\mathbb{C}^2$ ist. Aufgrund der Beschränktheit ist auch $\{f(z) \mid z \in T\}$ beschränkt und damit ist auch $\{w \in \mathbb{C} \mid w^2 = f(z),\, z \in T\}$ beschränkt. Also ist $p^{-1}(T)$ kompakt und p ist eigentlich, also endlich. Die Aussage über die Verzweigung folgt direkt durch eine lokale Betrachtung oder aus Satz 9.7. □

Satz 9.6. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen den riemannschen Flächen X und Y. Dann gibt es zu jedem $y \in Y$ eine offene Umgebung $y \in V \subseteq Y$ derart, dass das Urbild $U = \varphi^{-1}(V)$ eine disjunkte Zerlegung $U = \biguplus_{i \in I} U_i$ mit Kartengebieten U_i besitzt derart, dass* *die Einschränkung* $\varphi_i\colon U_i \to V$ *biholomorph zu einer Potenzabbildung* $z \mapsto z^{r_i}$ *ist.*

Beweis. Es sei $y \in Y$ fixiert. Die Endlichkeit bleibt erhalten, wenn man zu einer offenen Teilmenge $y \in V \subseteq Y$ übergeht und

$$\varphi^{-1}(V) \longrightarrow V$$

betrachtet. Wir können davon ausgehen, dass V ein Kartengebiet ist mit $y = 0$ und dass außerhalb von 0 keine Verzweigung vorliegt. Es liegt dann nach Satz 6.19 und Korollar 9.3 eine endliche Überlagerung

$$\varphi^{-1}(V) \setminus \varphi^{-1}(0) \longrightarrow V \setminus \{0\}$$

mit einer gewissen Blätterzahl vor. Es seien $x_1, \ldots, x_m$ die Urbildpunkte von 0. Durch Verkleinerung von V kann man annehmen, dass $\varphi^{-1}(V)$ die disjunkte Vereinigung von offenen Umgebungen U_i ist mit $x_i \in U_i$ ist. Würde es nämlich eine weitere disjunkte offene Menge U' im Urbild geben, die keinen Urbildpunkt von 0 enthält, so sei $x' \in U'$ mit dem Bildpunkt y'. Dann wäre die Liftung eines Verbindungsweges von y' nach 0, die es nach Satz 6.11 gibt, in U' nicht abgeschlossen, was der Eigentlichkeit widerspricht. Nach einer weiteren Verkleinerung können wir nach Satz 2.1 davon ausgehen, dass jede eingeschränkte Abbildung $U_i \to V$ nach einem Kartenwechsel eine Potenzierung $z \mapsto z^{r_i}$ ist. □

Zu einer holomorphen Abbildung $\varphi\colon X \to Y$ und einen Punkt $y \in Y$ nennt man die Summe $\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \operatorname{Verz}(x|y)$ (falls diese endlich ist) die *Gesamtordnung* von f über y, man sagt, dass y mit dieser Gesamtordnung angenommen wird. Speziell bei $Y = \mathbb{C}$ und $P = 0$ spricht man von der *Gesamtnullstellenordnung* von φ.

Satz 9.7. *Es sei* $\varphi\colon X \to Y$ *eine endliche holomorphe Abbildung zwischen den riemannschen Flächen* X *und* Y *mit* Y *zusammenhängend. Dann ist die Summe* $\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \operatorname{Verz}(x|y)$ *konstant, also unabhängig von* $y \in Y$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 9.6 und Lemma 9.2, wobei der Zusammenhang auf Y sichert, dass die Blätterzahl auf dem Überlagerungsort konstant ist. □

Aufgrund von dieser Aussage nennt man, den Sprachgebrauch von Überlagerungen erweiterend, bei einer endlichen holomorphen Abbildung die konstante Anzahl (wenn man die Verzweigungspunkte richtig zählt) der Elemente in der Faser die *Blätterzahl* der Abbildung. Solche Abbildung werden manchmal auch *verzweigte Überlagerungen* genannt. Die Begriffe *Decktransformation*, *Decktransformationsgruppe* und *normal* verwenden wir auch in dieser allgemeineren Situation.

Satz 9.8. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y mit X kompakt. Dann ist für jedes $y \in Y$ die Summe $\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \operatorname{Verz}(x|y)$ konstant.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma Anhang 3.3 und Satz 9.7. □

Korollar 9.9. *Es sei $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ eine nichtkonstante holomorphe Abbildung von der zusammenhängenden kompakten riemannschen Fläche X in die projektive Gerade. Dann ist für jedes $y \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ die Summe $\sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} \operatorname{Verz}(x|y)$ konstant.*

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 9.8. □

Satz 9.10. *Es sei $\varphi\colon X \to Y$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen den zusammenhängenden riemannschen Flächen X und Y. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *φ ist unverzweigt.*
(2) *φ ist ein lokaler Homöomorphismus.*
(3) *φ ist eine Überlagerung.*
(4) *Die Faseranzahl $\#\left(\varphi^{-1}(y)\right)$ ist konstant für $y \in Y$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich aus Korollar 9.3. Die Äquivalenz von (2) und (3) folgt aus Satz 6.19. Die Äquivalenz von (1) und (4) ergibt sich aus Satz 9.7. □

Beispiel 9.11. Wir betrachten die holomorphe Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \setminus \{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \frac{1}{3}z^3 - z.$$

Wegen

$$f'(z) = z^2 - 1 = (z-1)(z+1)$$

ist die Abbildung überall unverzweigt und nach Korollar 9.3 ein lokaler Homöomorphismus. Die entsprechende polynomiale Abbildung $\tilde{f}$ auf $\mathbb{C}$ ist surjektiv, sie hat an der Stelle 1 den Wert $-\frac{2}{3}$ und an der Stelle -1 den Wert $\frac{2}{3}$. Es ist

$$\frac{1}{3}z^3 - z + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(z^3 - 3z + 2\right) = \frac{1}{3}(z-1)^2(z+2)$$

und

$$\frac{1}{3}z^3 - z - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(z^3 - 3z - 2\right) = \frac{1}{3}(z+1)^2(z-2),$$

daher ist auch f selbst surjektiv. Es liegt keine Überlagerung vor, da über $\frac{2}{3}$ und über $-\frac{2}{3}$ je ein Punkt und sonst stets drei Punkte liegen. Aus Satz 9.10 folgt, dass f nicht endlich ist. Dies kann man auch direkt und explizit sehen. Die Folge $\frac{2}{3} + \frac{1}{n}$ konvergiert gegen $\frac{2}{3}$ und die Teilmenge $T = \left\{\frac{2}{3} + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \left\{\frac{2}{3}\right\} \subseteq \mathbb{C}$ ist kompakt. Die Urbildmenge von T unter der polynomialen Abbildung $\tilde{f}$ ist kompakt, durch die Herausnahme der beiden Punkte geht die Kompaktheit verloren.

Lemma 9.12. *Es sei $p\colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen den riemannschen Flächen X und Y. Es sei W eine offene Kreisscheibe, $\theta\colon W \to X$ eine holomorphe Abbildung und*

$$\tilde{\theta}\colon W \setminus \{0\} \longrightarrow Y$$

eine holomorphe Liftung von $\theta|_{U\setminus\{0\}}$ Dann gibt es eine eindeutige holomorphe Liftung von θ, die $\tilde{\theta}$ fortsetzt.

Beweis. Es sei $\theta(0) = P$. Über einer geeigneten offenen Scheibenumgebung $P \in U$ ist $p^{-1}(U)$ nach Satz 9.6 die disjunkte Vereinigung von Kreisscheiben $V_1, \ldots, V_m$, wobei die Einschränkungen $p|_{V_i}$ Potenzabbildungen mit dem Bild U sind. Wir können W durch eine kleinere Scheibenumgebung von 0 ersetzen und annehmen, dass $\theta(W) \subseteq U$ ist. Da das Bild $\tilde{\theta}(W \setminus \{0\})$ zusammenhängend ist, gilt

$$\tilde{\theta}(W \setminus \{0\}) \subseteq V_i =: V$$

für ein i. Es liegt also ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} W \setminus \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\theta}} & V \\ \downarrow & & \downarrow z^k \\ W & \xrightarrow{\theta} & U \end{array}$$

mit Kreisscheiben U, V, W vor. Da $\left|\tilde{\theta}(w)^k\right|$ für $w \in W \setminus \{0\}$ beschränkt ist, ist auch $\left|\tilde{\theta}(w)\right|$ selbst beschränkt und somit gibt es nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz eine eindeutig bestimmte holomorphe Fortsetzung von $\tilde{\theta}$ nach W. □

Lemma 9.13. *Es sei $p\colon Y \to X$ eine endliche holomorphe Abbildung zwischen den riemannschen Flächen X und Y. Es sei $D \subseteq X$ eine diskrete Teilmenge, wir setzen $X' := X \setminus D$ und $Y' := p^{-1}(X')$. Dann ist die natürliche Restriktionsabbildung zwischen den Decktransformationsgruppen*

$$\operatorname{Deck}(Y|X) \longrightarrow \operatorname{Deck}(Y'|X'),\ \varphi \longmapsto \varphi|_{Y'},$$

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft ist klar. Es ist Y' dicht in Y, daher ist die Abbildung injektiv. Zum Beweis der Surjektivität sei

$$\varphi\colon Y' \longrightarrow Y' \subseteq Y$$

eine Decktransformation über X'. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\varphi} & Y \\ \downarrow & & \downarrow p \\ Y & \xrightarrow{p} & X \end{array}$$

vor, wobei die vertikale Abbildung links die Einbettung von Y' in Y ist. Für jedem Punkt $Q \in p^{-1}(D)$ können wir Lemma 9.12 anwenden und erhalten eine Fortsetzung

$$\tilde{\varphi}\colon\ Y \longrightarrow Y.$$

$\square$

Abbildungsverzeichnis