Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2017**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 43

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 43.1. Bestimme

$$[-3,2] \cap]-2,3[\,.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 43.2.*

Es sei $[a,b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K und es seien $x,y \in [a,b]$. Zeige

$$|y-x| \leq b-a.$$

Aufgabe 43.3.*

Schreibe die Menge

$$]-3,-2[\,\cup\{7\}\cup\left([-\frac{5}{2},-\frac{1}{3}]\setminus]-\frac{4}{3},-1]\right)\cup[1,\frac{7}{3}]\cup[-\frac{1}{2},\frac{6}{5}[\,\cup\,(\,]-7,-6]\cap\mathbb{R}_+)$$

als eine Vereinigung von möglichst wenigen disjunkten Intervallen.

Aufgabe 43.4. Zeige, dass der Durchschnitt von zwei abgeschlossenen Intervallen in einem angeordneten Körper K wieder ein abgeschlossenes Intervall ist.

Aufgabe 43.5. Zeige, dass der Durchschnitt von einem abgeschlossenen und einem offenen Intervall in einem angeordneten Körper offen, abgeschlossen und halboffen sein kann.

Aufgabe 43.6. Es seien I_1, I_2 Intervalle in einem angeordneten Körper K mit $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. Zeige, dass die Vereinigung $I_1 \cup I_2$ wieder ein Intervall ist.

Aufgabe 43.7. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $I \subseteq K$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen $a < b$. Zeige, dass es in I eine rationale Zahl gibt.

Aufgabe 43.8. Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und $I \subseteq K$ ein Intervall mit den Intervallgrenzen $a < b$. Zeige, dass es in I unendlich viele rationale Zahlen gibt.

Aufgabe 43.9.*

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K mit $0 \notin I$. Beschreibe die Menge

$$M = \{x \in K \mid -x \in [a, b]\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe 43.10.*

Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall in einem angeordneten Körper K mit $0 \notin I$. Beschreibe die Menge

$$M = \left\{x \in K \mid x^{-1} \in [a, b]\right\}$$

als ein Intervall.

Aufgabe 43.11. Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichungen sind.

a)

$$|4x - 3| < |2x - 3| .$$

b)

$$\left| \frac{x - 2}{3x - 1} \right| \leq 1.$$

Aufgabe 43.12.*

Führe die ersten drei Schritte des babylonischen Wurzelziehens zu $b = 7$ mit dem Startwert $x_0 = 3$ durch (es sollen also die Approximationen x_1, x_2, x_3 für $\sqrt{7}$ berechnet werden; diese Zahlen müssen als gekürzte Brüche angegeben werden).

Aufgabe 43.13. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 7 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 43.14. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von $\frac{1}{2}$ zum Startwert $x_0 = 1$.

Aufgabe 43.15. Es sei $c \in K_+$ ein Element in einem angeordneten Körper K und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$ mit dem Startwert x_0. Für ein Folgenglied gelte $x_n = \sqrt{c}$. Zeige, dass auch für alle weiteren Glieder die Folge konstant gleich $\sqrt{c}$ ist.

Aufgabe 43.16. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man die Quadratwurzel einer negativen Zahl $c \in K_-$ (mit einem positiven Startwert x_0) berechnen möchte?

Aufgabe 43.17. Was passiert beim babylonischen Wurzelziehen, wenn man mit einem negativen Startwert x_0 die Quadratwurzel von $c \in K_+$ berechnen möchte?

Aufgabe 43.18. Es sei

$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Es ist $f(-5) = 2 > 0$ und $f(-4) = -3 < 0$. Führe, ausgehend vom Intervall $[-5, -4]$, Intervallhalbierungen derart durch, dass der Wert der Funktion f an der linken Grenze des Intervalls positiv und an der rechten Grenze negativ ist, bis ein Intervall der Länge $\frac{1}{16}$ erreicht ist.

Aufgabe 43.19. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Abbildung

$$K \longrightarrow \operatorname{Mat}_n(K),\ a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a \end{pmatrix},$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

Aufgabe 43.20.*

Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon K \longrightarrow \operatorname{Mat}_2(K),\ a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche Eigenschaften eines Ringhomomorphismus erfüllt die Abbildung φ, welche nicht?

Aufgabe 43.21. Wir betrachten die Menge

$$R = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q}).$$

(1) Zeige, dass R eine Untergruppe von $\operatorname{Mat}_2(\mathbb{Q})$ (bezüglich der Addition) ist.
(2) Zeige, dass R unter der Matrizenmultiplikation abgeschlossen ist.
(3) Zeige, dass R die rationalen $\mathbb{Q}$ als Diagonalmatrizen enthält.
(4) Zeige, dass R ein kommutativer Ring ist.
(5) Zeige, dass R ein Körper ist.
(6) Zeige, dass R eine Quadratwurzel zu -1 enthält.

Aufgabe 43.22.*

Berechne
$$\left(\frac{7}{3}-\frac{3}{2}\sqrt{5}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{3}\sqrt{5}\right).$$

Aufgabe 43.23. Berechne
$$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\sqrt[3]{5}+\frac{2}{5}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right)\cdot\left(-4+\frac{1}{3}\sqrt[3]{5}+\frac{2}{3}\left(\sqrt[3]{5}\right)^2\right).$$

Aufgabe 43.24.*

Ein angeordneter Körper K enthalte die Wurzeln $\sqrt[3]{2}$ und $\sqrt[7]{2}$. Zeige, dass K auch $\sqrt[21]{2}$ enthält.

Aufgabe 43.25.*

Drücke
$$\sqrt[2]{5}\cdot\sqrt[3]{7}$$
mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe 43.26. Drücke
$$\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[4]{5}$$
mit einer einzigen Wurzel aus.

Aufgabe 43.27. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass
$$U = \{x \in K_+ \mid \text{Es gibt ein } m \in \mathbb{N}_+ \text{ mit } x^m \in \mathbb{Q}\}$$
eine Untergruppe von $(K_+, 1, \cdot)$ bildet.

Aufgabe 43.28. Wir betrachten auf $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N}_+$ die Relation $(p,m) \sim (q,n)$, falls $p^n = q^m$ gilt.

(1) Zeige, dass dies eine Äquivalenzrelation ist.
(2) Es sei
$$Q = (\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{N})/\sim$$
die zugehörige Quotientenmenge. Zeige, dass auf Q durch
$$[(p,m)]\cdot[(q,n)] := [(p^nq^m, nm)]$$
eine wohldefinierte Verknüpfung gegeben ist.
(3) Zeige, dass Q eine kommutative Gruppe ist.
(4) Es sei K ein angeordneter Körper, in dem es zu jedem $p \in \mathbb{Q}_+$ und jedes $m \in \mathbb{N}_+$ die Wurzel $\sqrt[m]{p}$ gibt. Zeige, dass die Zuordnung
$$Q \longrightarrow K_+,\ [(p,m)] \longmapsto \sqrt[m]{p},$$
ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 43.29. (2 Punkte)

Zeige, dass der Durchschnitt von zwei offenen Intervallen in einem angeordneten Körper K wieder ein offenes Intervall ist.

AUFGABE 43.30. (3 Punkte)

Bestimme die Intervalle in einem angeordneten Körper K, die die Lösungsmenge der folgenden Ungleichung bilden.

$$|5x - 8| < |11x - 6| .$$

AUFGABE 43.31. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 3 zum Startwert $x_0 = 2$.

AUFGABE 43.32. (3 Punkte)

Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von $\frac{1}{3}$ zum Startwert $x_0 = 1$.

AUFGABE 43.33. (4 Punkte)

Es sei

$$f(x) = x^2 + 4x - 3.$$

Es ist $f(0) = -3 < 0$ und $f(1) = 2 > 0$. Führe, ausgehend vom Intervall $[0, 1]$, Intervallhalbierungen derart durch, dass der Wert der Funktion f an der linken Grenze des Intervalls negativ und an der rechten Grenze positiv ist, bis ein Intervall der Länge $\frac{1}{16}$ erreicht ist.