證明 系1ニヨリ $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$

及ビ $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}$

邊々相加フレバ

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{p_{n-2}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}+\frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_{n-2}}=(-1)^{n-1}\left\{\frac{-1}{q_nq_{n-1}}+\frac{1}{q_{n-1}q_{n-2}}\right\}$$

$$=(-1)^{n-1}\frac{-q_{n-2}+q_n}{q_nq_{n-1}q_{n-2}}$$

然ルニ $q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$

$$\therefore\quad \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=(-1)^{n-1}\frac{(a_nq_{n-1}+q_{n-2})-q_{n-2}}{q_nq_{n-1}q_{n-2}}=\frac{(-1)^{n-1}a_n}{q_nq_{n-2}}$$

系1及ビ2ハ頗ル重要ナルモノニシテ，コレヨリ次ノ三ツノ定理ヲ得。

定理 10. 連分數ノ偶數番目ノ漸近分數ハソノ値ハ次第ニ減少シ，奇數番目ノ漸近分數ハソノ値次第ニ增加ス。 (系2) ヨリ

定理 11. 各偶數番目ノ漸近分數ハ，何レノ奇數番目ノ漸近分數ヨリモ大ナリ。

(系1) ヨリ

定理 12. アル數ヲＮトシソレヲ連分數ニ直ストキ其漸近分數ヲ $\dfrac{p_n}{q_n}$ トスレバ次ノ不等式アリ。

$$\frac{p_1}{q_1}<\frac{p_3}{q_3}<\frac{p_5}{q_5}<\cdots\cdots<\mathrm{N}<\cdots\cdots<\frac{p_6}{q_6}<\frac{p_4}{q_4}<\frac{p_2}{q_2}$$

コノ定理ニヨルト任意ノ連分數ハ必ズ偶數番目ノモノト奇數番目ノモノトノ間ニ挾マレ且ツ n ヲ次第ニ大ニスレバスルホド漸近分數ノ値ハ與ヘラレタル連分數ニ近ヅクコトヲ知ル。

183. 吾人ハ前節ニヨリテ連分數ノ值ハ奇數番目ト偶數番目トノ漸近分數ノ間ニ存在スルコトヲ知レルガ，更ニ本章ニ於テハ一步ヲ進メテ連分數ノ値ハソノ何レノ方ニ接近セルヤヲ考察セントス。

任意ノ數Ｎヲ連分數ニ化スルトキハ

$$\mathrm{N}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+\cdots\cdots}$$

而シテ $\dfrac{1}{a_{n+2}+\cdots}$ ハ1ヨリモ小ナル眞分數ナルガ故ニ之レヲ a トスレバ

$$\mathrm{N}=\frac{(a_{n+1}+a)p_n+p_{n-1}}{(a_{n+1}+a)q_n+q_{n-1}}$$

即チ

$$\mathrm{N}=\frac{(a_{n+1}p_n+p_{n-1})+ap_n}{(a_{n+1}q_n+q_{n-1})+aq_n}=\frac{p_{n+1}+ap_n}{q_{n+1}+aq_n}$$

$$\therefore\quad \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}-\mathrm{N}=\frac{a(p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1})}{q_{n+1}(q_{n+1}+aq_n)}=\frac{(-1)^{n+1}a}{q_{n+1}(q_{n+1}+aq_n)}$$

然ルニ又

$$\mathrm{N}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{q_n(p_{n+1}+ap_n)-p_n(q_{n+1}+aq_n)}{(q_{n+1}+aq_n)q_n}$$

$$=\frac{p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}}{(q_{n+1}+aq_n)q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{q_n(q_{n+1}+aq_n)}$$

然ルニ $q_{n+1}=a_{n+1}q_n+q_{n-1}$ ナルガ故ニ $q_{n+1}>q_n$ ニシテ且ツ $a<1$ ナルガ故ニ $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ トＮトノ差ハ $\dfrac{p_n}{q_n}$ ト Ｎ トノ差ヨリモ小ナリ。從ツテ次ノ定理アリ。

定理 13. 漸近分數ハソノ番目進ムニ從ヒ漸次眞ノ値ニ近迫ス。

注意 コレニヨリテ之レヲ觀レバ第一漸近分數ヨリハ第二漸近分數ノ方ガ眞ノ値ニ近ク，第二漸近分數ヨリモ第三漸近分數ノ方ガ眞ノ値ニ近シ。一般ニ第 n 漸近分數ヨリモ第 $(n+1)$ 漸近分數ノ方ハ更ニ眞ノ値ニ近シ，コレ漸近分數ノ名稱ヲ得タル所以ナリトス。

184. **定理 14.** $\dfrac{1}{q_n(q_n+q_{n+1})}<\left|\mathrm{N}-\dfrac{p_n}{q_n}\right|<\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$ ナリ。

證明 前ノ定理ニヨリ ~~(系二)~~ ~~(定理6)~~ 誤差

$$\mathrm{N}-\frac{p_n}{q_n}=\frac{(-1)^{n+1}}{q_n(q_{n+1}+aq_n)}\qquad\therefore\quad \left|\mathrm{N}-\frac{p_n}{q_n}\right|=\frac{1}{q_n(q_{n+1}+aq_n)}$$

然ルニ $a<1$ ナルガ故ニ定理ハ容易ニ證明セラル。

系 $q_{n+1}>q_n$ ナルガ故ニ

$$\frac{1}{2q^2_{n+1}}<\left|\mathrm{N}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q^2_n}$$

例 圓周率ハ $3+\dfrac{1}{7+}\ \dfrac{1}{15+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{292+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{1+}\cdots\cdots$ ナリトイフ。コノ漸近分數ヲ求ム。

不等

解　第一漸近分數　$a_1=3$　∴　$p_1=3$　$q_1=1$

第二　〃　$a_2=7$　$p_2=22$　$q_2=7$

第三　〃　$a_3=15$　$p_3=333$　$q_3=106$

第四　〃　$a_4=1$　$p_4=355$　$q_4=113$

第五　〃　$a_5=292$　$p_5=103993$　$q_5=33102$

第六　〃　$a_6=1$　$p_6=104348$　$q_6=33215$

…………………………

故ニ求ムル漸近分數ハ*

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \frac{104348}{33215}\cdots\cdots$$

注意　定理 12 ニヨリテ $\frac{3}{1}$, $\frac{333}{106}$ …… 等ノ如ク奇數番目ノモノガπノ不足ナル近似値, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$ …… 等ノ如ク偶數番目ノモノガπノ過剩ナル近似値ニシテ, 何レモソノ番目ガ進ムニ從ヒ漸次πノ眞値ニ近迫ス。

定理 15. 單純連分數ノ漸近分數ハ, ソノ分母ヨリ小ナル他ノ如何ナル已約分數ヨリモ眞値ニ近キモノナリ。

證明　連分數ノ眞値ヲNトシ, $\frac{p_n}{q_n}$ ハ n ノ如何ニ關セズ q_n ヨリ小ナル分母ヲ有スル已約分數例ヘバ $\frac{p}{q}$ ヨリモNニ近キモノナルコトヲ證セントス。

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \sim \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n-1}}$$

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \sim \frac{p}{q} = \frac{p_{n-1}q \sim pq_{n-1}}{q_{n-1}q}$$

サテ p, q, p_{n-1}, q_{n-1} ハ正ノ整數ナルガ故ニ $p_{n-1}q \sim pq_{n-1}$ ハ零又ハ整數ナリ, モシ零ナルトキハ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p}{q}$ ナルガ故ニ前定理注意ニヨリテ $\frac{p_n}{q_n}$ ハ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ 卽チ $\frac{p}{q}$ ヨリモ眞値ニ近シ。次ニ $p_{n-1}q \sim pq_{n-1}$ ハ零ナラザル場合ヲ考フルニ

* $\frac{22}{7}$ ハあるきめです (Archimedes 287B.C.?–212B.C.) ニヨツテ, $\frac{355}{113}$ ハめちうすニヨツテ與ヘラル。支那ニテハ前者ヲ約率トイヒ後者ヲ密率トイヒタリ。くらいんガ古今ヲ通ジテ最モ偉大ナル數學者ハ三人アリトイヒ, あるきめです, にゆーとん, がうすヲ推セリ。

∴ $q_n > q$ ナルガ故ニ $q_n q_{n-1} > q_{n-1} q$ ナリ。ヨツテ

$$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \sim \frac{p}{q} > \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \sim \frac{p_n}{q_n}$$

而シテNハ $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ ト $\frac{p_n}{q_n}$ トノ間ニ存在スルガ故ニコレ等ノ數ハ次ノ二ツノ中何レカノ順序ナリ。卽チ

(A)　$\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \mathrm{N},\ \frac{p_n}{q_n},\ \frac{p}{q}$

(B)　$\frac{p}{q},\ \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \mathrm{N},\ \frac{p_n}{q_n}$

故ニ何レノ場合ニモ定理ハ證明セラル。

第二章　問題

1. $\frac{48}{17}$ ヲ連分數ニ直セ。

2. $\frac{91}{53}$ ヲ連分數ニ直シ且ツソノ漸近分數ヲ求メヨ。

3. $\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}$ ヲアル連分數ノ最初ノ三ツノ漸近分數トスルトキハ $(p_3-p_1)q_2=(q_3-q_1)p_2$ ナルコトヲ證セヨ。

4. 上ノ問題ヲ擴張シテ一般ニ次ノ等式アルコトヲ證セヨ。

$$(p_{n+1}-p_{n-1})q_n=(q_{n+1}-q_{n-1})p_n$$

5. $\sqrt{17}$ トノ差 0,00001 ヨリモ小ナル分數ノ中分母ノ最モ小ナルモノヲ見出セ。

解　連分數ニ化スレバ, $4+\frac{1}{8+}\ \frac{1}{8+}\ \frac{1}{8+}\cdots\cdots$

故ニ　第一漸近分數 $\frac{4}{1}$,　第二漸近分數 $\frac{33}{8}$

第三　〃　$\frac{268}{65}$,　第四　〃　$\frac{2177}{528}$

第五　〃　$\frac{17644}{4289}$,

サテ定理 14 ニヨレバ

$$\frac{1}{528(528+4289)} < \left|\sqrt{17}-\frac{2177}{528}\right| < \frac{1}{528\times 4289}$$

然ルニ $528(528+4289)$ 及ビ 528×4289 ハ何レモ 100000 ヨリモ大ナルガ故ニ $\sqrt{17}$ ト $\frac{2177}{528}$ トノ差ハ 0.00001 ヨリモ小ナリ。ヨツテ $\frac{2177}{528}$ ハ要件ニ適スル分數ナリ。

然ルニコレヨリモ分母ノ小ナル $\frac{268}{65}$ ヲ用フレバ如何ニトイフニ

$$\frac{1}{65(65+523)}<\left|\sqrt{17}-\frac{268}{65}\right|<\frac{1}{65\times528}$$

然ルニ $65(65+528)$ 及ビ 65×528 ハ共ニ 100000 ヨリモ小ナルガ故ニ用フベカラズ。

6. $\frac{62}{35}=1+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{x+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2}$ ナルコトヲ知リテ x ヲ求メヨ。

7. 1哩ハ1.609きろめーとるナリトス。然ルトキコノ二ツノ量即チ1哩ト1きろめーとるトヲ比較シテ18:29トスレバ殆ンド正シク，289:465トスレバ更ニ精密ナルコトヲ證セヨ。

8. $p_nq_{n-1}+p_{n-1}q_{n-2}=p_{n-1}q_n+p_{n-2}q_{n-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

9. $\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\cdots\cdots$ ニ於テ　$p^2_n+p^2_{n+1}=p_{n-1}p_{n+1}+p_np_{n+2}$ ナルコトヲ證セヨ。

10. $\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots\cdots$ ニ於テ　$q_{2n}=p_{2n+1}$ 及ビ $q_{2n-1}=\frac{a}{b}p_{2n}$ ナルコトヲ示セ。

11. $\frac{p_n}{q_n}$ ハ $a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\cdots\cdots$ ノ第 n 漸近分數ナル時，p_{n-2} ト p_n トニ共通ノ因數アル時ハソレハ必ズ a_n ノ約數ナルコトヲ證セヨ。

解　定理9系2ニヨリテ $p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^{n-1}a_n$ ナリ。ヨツテ容易ニ證スルコトヲ得。

12. $\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_n}$ ナリトスレバ

$$\frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_1}\ \text{ト}\ \frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2}$$

トノ差ハ $\frac{1}{pq}$ ナルコトヲ證セヨ。

解　$\frac{p}{q}$ ノ漸近分數ヲ $\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\cdots\cdots,\ \frac{p_n}{q_n}$ トスレバ $\frac{p}{q}=\frac{p_n}{q_n}$ ナリ。

定理7ニヨレバ $\frac{p_n}{p_{n-1}}=\frac{p}{p_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_1}$

$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=\frac{q}{q_{n-1}}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}+}\ \frac{1}{a_{n-2}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2}$$

$\therefore\ \frac{p_{n-1}}{p_n}=\frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_1}$ ニシテ

$\frac{q_{n-1}}{q_n}=\frac{1}{a_n+}\ \frac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_2}$ ナリ。

サテ題意ニヨリテ二ツノ連分數ノ差ハ $\frac{p_{n-1}}{p}\sim\frac{q_{n-1}}{q}$ ナリ。然ルニ定理8ニヨリテ $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$，而シテ本題ニ於テハ $p_n=p$，$q_n=q$ ナルガ故ニ

$$pq_{n-1}-p_{n-1}q=(-1)^n$$

ヨツテ

$$\frac{p_{n-1}}{p}\sim\frac{q_{n-1}}{q}=\frac{1}{pq}$$

即チ證明セラレタリ。

13. $\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2},\cdots\cdots$ ヲ單純連分數 $1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{4+}\cdots\cdots$ ノ漸近分數ナリトスレバ $p_n=(n-1)p_{n-1}+(n-1)p_{n-2}+(n-2)p_{n-3}+\cdots\cdots+3p_2+2p_1+2$ ナルコトヲ證明セヨ。

14. 單純連分數ノ第一漸近分數ト第 p 漸近分數トノ差ハ

$\frac{1}{q_1q_2}-\frac{1}{q_2q_3}+\frac{1}{q_3q_4}-\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{q_{n-1}q_n}$ ナルコトヲ證セヨ。

15. $\frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{a+}\cdots\cdots$ ノ漸近分數ヲ $\frac{p_n}{q_n}$ トセバ，p_n 及ビ q_n ハ夫々 $\frac{x}{1-ax-x^2}$ 及ビ $\frac{ax+x^2}{1-ax-x^2}$ ノ展開ニ於ケル x^n ノ係數ニ等シキコトヲ證セヨ。

16. $\frac{P}{Q},\ \frac{P'}{Q'},\ \frac{P''}{Q''}$ ヲ夫々連分數 $\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\cdots\cdots,\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\cdots\cdots,\ \frac{1}{a_3+}\ \frac{1}{a_4+}\ \frac{1}{a_5+}$ ノ第 n，第 $n-1$ 第 $n-2$ ノ漸近分數ナリトスレバ

$$\mathrm{P}=a_2\mathrm{P}'+\mathrm{P}'',\qquad \mathrm{Q}=(a_1a_2+1)\mathrm{P}'+a_1\mathrm{P}''$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　題意ニヨリテ

$$\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}}\cdots\cdots\cdots(1)\qquad \frac{\mathrm{P}'}{\mathrm{Q}'}=\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{P''}{Q''}=\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cdots\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) ヨリ $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{1}{a_1+\dfrac{P'}{Q'}}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{P}{Q}=\dfrac{Q'}{a_1Q'+P'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

(4) ニ於テハ P, Q 及ビ P′, Q′ ハ共ニ互ニ素ナル數ナルガ故ニ，何レモ已約分數ナリ。

$$\therefore\quad P=Q' \qquad Q=a_1Q'+P'$$

同樣ニ (2), (3) ヨリ

$$P'=Q'' \qquad Q'=a_2Q''+P''$$

コノ四ツノ等式ヨリ容易ニ證明セラル。

17. $\dfrac{p_n}{q_n}$ ヲ $\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n+}\cdots\cdots$ ノ第 n 漸近分數トスル時ハ，

$\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_{n-1}+}\,\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_2+}\,\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{p_{n-1}q_{n-1}+p_nq_n}{q_{n-1}{}^2+q_n{}^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{q_n}{p_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$

故ニ $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$

然ルニ $\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}$ ナルガ故ニ，$\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_{n-1}+}\,\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}$ $\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$ ニ於テ，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$ ト見レバ $a_{n+1}=\dfrac{q_n}{q_{n-1}}$ ナルガ故ニ

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{\dfrac{q_n}{q_{n-1}}p_n+p_{n-1}}{\dfrac{q_n}{q_{n-1}}q_n+q_{n-1}}=\frac{q_np_n+p_{n-1}q_{n-1}}{q_n^2+q^2_{n-1}}\text{ ナリ。}$$

18. $\dfrac{\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}}{\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}}=\dfrac{\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_{n-1}}}{\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_2}}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{p^n}{q_n}=\dfrac{1}{a_1+}\,\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$ $\quad\therefore\quad \dfrac{q_n}{p_n}=a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_n}$

又 $\dfrac{q_n}{q_{n-1}}=a_n+\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$ 從ツテ $\dfrac{q_{n-1}}{q_n}=\dfrac{1}{a_n+}\,\dfrac{1}{a_{n-1}+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_1}$

然ルニ原式ノ左邊ニ $\dfrac{p_n}{q_n}\div\dfrac{q_{n-1}}{q_n}=\dfrac{p_n}{q_{n-1}}$， 右邊ニ $\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\div\dfrac{p_{n-1}}{n}=\dfrac{p_n}{q_{n-1}}$

ヨリテ左右兩邊兩相等シ。

19. $na_1+\dfrac{1}{na_2+}\,\dfrac{1}{na_3+}\cdots\cdots\cdots=n\left(a+\dfrac{1}{n^2a_2+}\,\dfrac{1}{a_3+}\,\dfrac{1}{n^2a_4+}\cdots\cdots\right)$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\dfrac{1}{na_4+}\,\dfrac{1}{na_5+}\cdots\cdots$ ヲ x_4 トスレバ

$$原式=na_1+\cfrac{1}{na_2+\cfrac{1}{na_3+x_4}}=n\left(a_1+\cfrac{1}{n^2a_2+\cfrac{n}{na_3+x_4}}\right)$$

同樣ニ $\dfrac{x_4}{n}=\dfrac{1}{n}\left(\cfrac{1}{na_4+\cfrac{1}{na_5+x_5}}\right)=\dfrac{1}{n^2a_4+}\,\dfrac{1}{a_5+}\,\dfrac{x_5}{n}$

之ノ方法ヲ繰リ返セバ

$$na_1+\frac{1}{na_2+}\,\frac{1}{na_3+}\,\frac{1}{na_4+}\cdots\cdots=n\left(a_1+\frac{1}{n^2a_2+}\,\frac{1}{a_3+}\,\frac{1}{n^2a_4+}\,\frac{1}{a_5+}\cdots\cdots\right)$$

20. 連分數 N ノ相連續スル二ツノ漸近分數ヲ $\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{p'}{q'}$ トスレバ $\dfrac{p}{q}\gtrless\dfrac{p'}{q'}$ ナルニ從ヒテ $\dfrac{pp'}{qq'}\gtrless N^2$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\lambda>1$ トスレバ $N=\dfrac{\lambda p'+p}{\lambda q'+q}$ ト書カル。

ソコデ
$$\frac{pp'}{qq'}-N^2=\frac{pp'(\lambda q'+q)^2-qq'(\lambda p'+p)^2}{qq'(\lambda q'+q)^2}$$
$$=\frac{\lambda^2p'q'(pq'-p'q)-pq(pq'-p'q)}{qq'(\lambda q'+q)^2}$$
$$=\frac{(pq'-p'q)(\lambda^2p'q'-pq)}{qq'(\lambda q'+q)^2}$$

然ルニ $\lambda>1$, $p'>p$, $q'>q$ ナルガ故ニ

$$\lambda^2p'q'-pq>0$$

ヨツテ $pq'-p'q>0$ 從ツテ $\dfrac{p}{q}>\dfrac{p'}{q'}$ ナラバ $\dfrac{pp'}{qq'}>N^2$ ニシテ，$pq'-p'q<0$ 從ツテ $\dfrac{p}{q}<\dfrac{p'}{q'}$ ナラバ $\dfrac{pp'}{qq'}<N^2$ ナリ。

第三章

循環連分數

185. 例 循環連分數〔1. $\overline{12}$〕ヲ計算セヨ。

解 $1+\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\cdots\cdots$ ヲ x トスレバ $\frac{1}{1+}\,\frac{1}{2+}\cdots\cdots=x-1$ ナリ。

$$\therefore\quad x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+(x-1)}}\qquad \text{従ツテ}\quad x^2=3$$

故ニ $x=\pm\sqrt{3}$ 然ルニ x ハ正ノ數ナルガ故ニ $\sqrt{3}$ ナリ (180節例3參照)

定理 1. $a+\frac{b}{c+}\,\frac{b}{c+}\cdots\cdots$ ノ連近分數 $\frac{p_n}{q_n}$ ハ $\frac{cp_{n-1}+bp_{n-2}}{cq_{n-1}+bq_{n-2}}$ ナリ。

證明 $\frac{p_n}{q_n}=\frac{cp_{n-1}+bp_{n-2}}{cq_{n-1}+bq_{n-2}}$ ヲ眞ナリトシ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{cp_n+bp_{n-1}}{cq_n+bq_{n-1}}$ ナルコトヲ證セントス。(數學的歸納法)

$$\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_{n-1}+\frac{b}{c}p_{n-2}}{q_{n-1}+\frac{b}{c}q_{n-2}}$$

ト書クコトヲ得。然ルニ $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ ハ $\frac{p_n}{q_n}$ ニ於テ $\frac{b}{c}$ ノ代リニ $\cfrac{b}{c+\cfrac{b}{c}}$ ト置キタルモノナリ。

ヨリテ
$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_{n-1}+\cfrac{b}{c+\cfrac{b}{c}}p_{n-2}}{q_{n-1}+\cfrac{b}{c+\cfrac{b}{c}}q_{n-2}}=\frac{c(cp_{n-1}+bp_{n-2})+bp_{n-1}}{c(cq_{n-1}+bq_{n-2})+bq_{n-1}}$$
$$=\frac{cp_n+bp_{n-1}}{cq_n+bq_{n-1}}$$

而シテ最初ノ數個ノ漸近分數ヲ見ルニ

$$\left.\begin{matrix}p_1=a\\ q_1=1\end{matrix}\right\}\quad \left.\begin{matrix}p_2=ac+b\\ q_2=c\end{matrix}\right\}\quad \begin{matrix}p_3=ac^2+ab+bc=cp_2+bp_1\\ q_3=c^2+b\qquad\quad =cq_2+bq_1\end{matrix}$$

故ニ $\frac{p_3}{q_3}=\frac{cp_2+bp_1}{cq_2+bq_1}$ ガ成立ス。即チ定理ハ一般ニ證明セラル。

注意 上ニ證明シタルガ如ク

$$\left.\begin{matrix}p_n=cp_{n-1}+bp_{n-2}\\ q_n=cq_{n-1}+bq_{n-2}\end{matrix}\right\}$$

ナルガ故ニ今

$$\begin{matrix}p_1+p_2x+p_3x^2+\cdots\cdots+p_nx^{n-1}+\cdots\cdots\\ \text{及ビ}\quad q_1+q_2x+q_3x^2+\cdots\cdots+q_nx^{n-1}+\cdots\cdots\end{matrix}$$

ナル級數ヲ作ラバ共ニ循環級數ニシテ，ソノ級數率ハ $1-cx-bx^2$ ナリ。故ニコノ二ツノ級數ノ母函數ハ夫々

$$\frac{p_1+(p_2-cp_1)x}{1-cx-bx^2},\qquad \frac{q_1+(q_2-cq_1)x}{1-cx-bx^2}$$

コレニ p_1, p_2, q_1, q_2 ノ値ヲ代入スレバ

$$\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}\ \text{及ビ}\ \frac{1}{1-cx-bx^2}$$

トナル。コレニヨリテ $\frac{a+bx}{1-cx-2x^2}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開スルトキハ x^{n-1} ノ係數ハ p_n ニシテ，$\frac{1}{1-cx-bx^2}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開スルトキ x^{n-1} ノ係數ハ q_n ナリ。ヨリテ次ノ定理アリ。

定理 2. $a+\frac{b}{c+}\,\frac{b}{c+}\cdots\cdots$ ナル循環連分數ノ第 n 漸近分數ノ分子及ビ分母ハ夫々 $\frac{a+bx}{1-cx-bx^2}$，$\frac{1}{1-cx-bx^2}$ ヲ x ノ昇冪ニ展開スルトキ生ズル x^{n-1} ノ係數ナリ。

186. **定理 3.** N ヲ平方數ニアラザル正ノ整數トスレバ，$\sqrt{N}$ ヲ連分數ニ化スルトキハ必バ循環連分數ナリ。

證明 三段ニ分チテ證明セントス。先ヅ第一段トシテ $\sqrt{N}$ ヲ連分數ニ化スル手續ヲ論ズベシ。

(A): $\sqrt{N}$ ニ含マル、最大整數ヲ a_1 トスレバ

$$\sqrt{N}=a_1+(\sqrt{N}-a_1)=a_1+\frac{N-a_1^2}{\sqrt{N}+a_1}=a_1+\frac{r_1}{\sqrt{N}+a_1}$$
$$=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}}\quad \text{玆ニ}\quad r_1=N-a_1^2$$

次ニ $\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}$ ニ含マ、ル最大整數ヲ b_1 トスレバ

$$\frac{\sqrt{N}+a_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}+a_1-b_1r_1}{r_1}=b_1+\frac{\sqrt{N}-a_2}{r_1}$$
$$=b_1+\frac{N-a_2^2}{r_1(\sqrt{N}+a_2)}=b_1+\frac{r_2}{\sqrt{N}+a_2}=b_1+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a^2}{r^2}}$$

茲ニ $a_2=b_1r_1-a_1,\quad r_2=\dfrac{N-a_2^2}{r_1}$

次ニ $\dfrac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}$ ニ含マル丶最大整數ヲ b_2 トスレバ

$$\frac{\sqrt{N}+a_2}{r_2}=b_2+\frac{\sqrt{N}+a_2-b_2r_2}{r_2}=b_2+\frac{\sqrt{N}-a_3}{r_2}$$

$$=b_2+\frac{N-a_3^2}{r_2(\sqrt{N}+a_3)}=b_2+\frac{r_3}{\sqrt{N}-a_3}=b_2+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_3}{r_3}}$$

茲ニ $a_3=b_2r_2-a_2,\quad r_3=\dfrac{N-a_3^2}{r_2}$

同様ノ方法ヲ繰リ返セバ

$$\frac{\sqrt{N}+a_{n-1}}{r_{n-1}}=b_{n-1}+\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}}$$

茲ニ $a_n=b_{n-1}r_{n-1}-a_{n-1},\quad r_n=\dfrac{N-a_n^2}{r_{n-1}}$

$$\therefore\quad \sqrt{N}=a_1+\frac{1}{b_1+}\;\frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\frac{1}{b_{n-1}+}\cdots\cdots\cdots$$

(B)：次ニ吾人ハ $a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$ 及ビ $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n\cdots\cdots$ ハ共ニ正ノ整數ナルコトヲ證セントス。

$\dfrac{p}{q}$ 及ビ $\dfrac{p'}{q'}$ ヲ連續セル第 $(n-1)$ 及ビ第 n 漸近分數トシ，$\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ヲ一般ニ $\dfrac{\sqrt{N}+a}{r}$ ト置ケバ

$$\sqrt{N}=\frac{\dfrac{\sqrt{N}+a}{r}p'+p}{\dfrac{\sqrt{N}+a}{r}q'+q}=\frac{(\sqrt{N}+a)p'+rp}{(\sqrt{N}+a)q'+rq}$$

$$\therefore\quad q'N+(aq'+rq)\sqrt{N}=p'\sqrt{N}+ap'+rp$$

左右兩邊ニ於テ有理數ハ有理數ニ，無理數ハ無理數ニ等シカルベキニヨリ

$$ap'+rp=q'N$$
$$aq'+rq=p'$$

r ヲ消去スレバ　$a(p'q-pq')=qq'N-pp'$ ……………………………………(1)

又 a ヲ消去スレバ　$r(p'q-pq')=p'^2-q'^2N$ ……………………………………(2)

(1) ナル公式ヲ更ニ吟味センニ

$\dfrac{p'}{q'}>\dfrac{p}{q}$ ナラバ $\dfrac{p'}{q'}>\sqrt{N}>\dfrac{p}{q}$ ニシテ而カモ $\sqrt{N}$ ハ $\dfrac{p}{q}$ ヨリモ $\dfrac{p'}{q'}$ ニ接近スルガ故ニ

$$N>\frac{p'p}{q'q}\qquad\therefore\quad q'qN-p'p>0.$$

之レニ反シテ $\dfrac{p'}{q'}<\dfrac{p}{q}$ ナラバ $\dfrac{p'}{q'}<\sqrt{N}<\dfrac{p}{q}$ ナルガ故ニ

$$N<\frac{p'p}{q'q}\qquad\therefore\quad q'qN-pp'<0$$

然ルニ $\dfrac{p'}{q'}>\dfrac{p}{q}$ ナルトキハ $p'q-pq'=1$ ニシテ，$\dfrac{p'}{q'}<\dfrac{p}{q}$ ナルトキハ $p'q-pq'=-1$ ナルガ故ニ，$\dfrac{p}{q}\lesseqgtr\dfrac{p'}{q'}$ ノ何レノ場合ニモ $a>0$ ナリ。而シテ p, p', q, q' ハ正ノ整數ナルヲ以ツテ a ハ正ノ整數ナリ。

次ニ (2) ヲ吟味センニ

$$\frac{p'}{q'}>\frac{p}{q}\ \text{ナルトキハ}\ \frac{p'}{q'}>\sqrt{N}>\frac{p}{q}$$
$$\therefore\quad p'^2-q'^2N>0$$
$$\frac{p'}{q'}<\frac{p}{q}\ \text{ナルトキハ}\ \frac{p'}{q'}<\sqrt{N}<\frac{p}{q}$$
$$\therefore\quad p'^2-q'N<0$$

ヨツテソノ何レノ場合ニモ r ガ正ノ數ニシテ且ツ (1) ノ場合ト同ジク正ノ整數ナリ。即チ $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ヲ n ノ如何ニ關セズ $\dfrac{\sqrt{N}+a}{r}$ ト置ケバ，a 及ビ r ガ正ノ整數ナルガ故ニ

$$a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\cdots\cdots$$
$$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n\cdots\cdots$$

ハ共ニ正ノ整數ナリ。

(C)：最後ニコノ連分數ハ循環ナルコトヲ論述セントス。$r_n=\dfrac{N-a_n^2}{r_{n-1}}$ ナルガ故ニ $a_n^2=N-r_{n-1}r_n$

然ルニ (B) ニ於テ r 及ビ a ハ正ノ整數ナルコトヲ證明シタルガ故ニ

$$a_n\leqq(\sqrt{N}\ \text{ニ含マル丶整數})$$

ナリトイフコトヲ得。サテ $\sqrt{N}$ ニ含マル丶最大整數ヲ a_1 トセルガ故ニ

$$a_n \leqq a_1$$

ナリ。即チ a_n ノトリ得ル値ハ n ノ凡テノ値ニ對シテ a_1 マデノ數ニ限ル。

次ニ又
$$a_n = b_{r-1} r_{n-1} - a_{n-1}$$
$$\therefore \quad r_{n-1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{b_{n-1}}$$

然ルニ
$$\left.\begin{array}{r} a_{n-1}+a_r \leqq 2a_1 \\ b_{n-1} > 1 \end{array}\right\}$$
$$\therefore \quad r_{n-1} \leqq 2a_1$$

故ニ r_{n-1} ノトリ得ル値ハ n ノ如何ニ關セズ $2a_1$ ヨリモ小ナリ。ソコデ一般ニ $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ハ幾通リノ値ヲ採リ得ルカヲ見ルニ $\sqrt{N}$ ハ常數ニシテ a_n ハ多クトモ a_1 ヨリ大ナラズ。又分母ニ於ケル r_n ハ多クトモ $2a_1$ ヲ超エズ。故ニ $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ハ多クトモ $a_1 \times 2a_1 = 2a_1^2$ 種ヨリモ多クノ異ナル値ヲトルコトヲ得ズ。然ルニ $\sqrt{N}$ ヲ連分數ニ化スルトキハ無限連分數トナルガ故ニ多クトモ $2a_1^2$ 種ノ異ナル値ヲトリタル後ハ必ズ同一ノ結果ヲ繰リ返スベシ。ヨリテ定理ハ完全ニ證明セラレタリ。

187. **定理 4.** 單純循環連分數ハ二次方程式ノ根ナリ。一最初ノ例

(i) 先ヅ純循環連分數ノ場合ヲ證明スベシ。

與ヘラレタル連分數ヲ
$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n+}\frac{1}{a_1+}\cdots\cdots$$
トシコレヲ x ニテ表ハセバ
$$x=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n+}\frac{1}{x}$$

$\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\dfrac{p_n}{q_n}$ ヲ夫々次ノ有限連分數ノ第 $(n-1)$, 第 n 漸近分數トセヨ。
$$a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n+}\frac{1}{x}$$

然ルトキハ
$$x=\frac{xp_n+p_{n-1}}{xq_n+q_{n-1}}$$
$$\therefore \quad x^2 q_n + x(q_{n-1}-p_n) - p_{n-1} = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) ナル二次方程式ノ根ノ中正ナルモノハ所設ノ連分數ノ値ナリ。

(ii) 次ニ混循環連分數ノ場合ヲ證明センニ
$$x=a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots\frac{1}{a_m+}\frac{1}{b_1+}\frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\frac{1}{b_n+}\frac{1}{b_1+}\cdots\cdots$$
トスベシ。

今 $b_1+\dfrac{1}{b_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{b_n}=\cdots\cdots y$ トシ, $\dfrac{r_{n-1}}{s_{n-1}}$, $\dfrac{r_n}{s_n}$ ヲ第 $(n-1)$ 及ビ第 n 漸近分數トスル時ハ
$$y=\frac{yr_n+r_{n-1}}{ys_n+s_{n-1}}$$

即チ
$$y^2 s_n + y(s_{n-1}-r_n) - r_{n-1} = 0$$

ヨリテ y ハ上ノ二ツノ根ノ中正ナルモノナリ。コレヲ $\dfrac{A+\sqrt{B}}{C}$ ト置クベシ

但シ $\quad A=r_n-s_{n-1}, \quad B=(s_{n-1}-r_n)^2+4s_n r_{n-1}, \quad C=2s_n$

又 $\dfrac{p_{m-1}}{q_{m-1}}$, $\dfrac{p_m}{q_m}$ ヲ $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_m}$ ノ最後ノ二ツノ漸近分數トスルトキハ
$$x=\frac{yp_m+p_{m-1}}{yq_m+q_{m-1}}$$

ナルガ故ニコレニ y ノ値ヲ代入シ且ツ整頓スレバ
$$x=\frac{(Ap_m+Cp_{m-1})+\sqrt{B}\,p_m}{(Aq_m+Cq_{m-1})+\sqrt{B}\,q_m}$$
$$\therefore \quad \sqrt{B}(q_m x - p_m) = (Ap_m+Cp_{m-1}) - x(Aq_m+Cq_{m-1})$$

兩邊ヲ平方シ且ツ整頓スレバ, x ニツキテ二次方程式トナル。ヨリテ與ヘラレタル混循環連分數ハソノ二ツノ根ノ中正ナルモノナリ。ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

第三章 問題

1. $\sqrt{19}$ 及ビ $\sqrt{23}$ ヲ連分數ニ直セ。

2. $\sqrt{a^2+1}$ 及ビ $\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}$ ヲ連分數ニ直セ。

3. $\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{3+}\dfrac{1}{2+}\dfrac{1}{3+}\cdots\cdots$ ノ値ヲ求メヨ。

$$a_n \leqq a_1$$

ナリ。即チ a_n ノトリ得ル値ハ n ノ凡テノ値ニ對シテ a_1 マデノ數ニ限ル。

次ニ又
$$a_n = b_{r-1}r_{n-1} - a_{n-1}$$
$$\therefore\quad r_{n-1} = \frac{a_{n-1}+a_n}{b_{n-1}}$$

然ルニ
$$\left.\begin{aligned} a_{n-1}+a_r &\leqq 2a_1 \\ b_{n-1} &> 1 \end{aligned}\right\}$$
$$\therefore\quad r_{n-1} \leqq 2a_1$$

故ニ r_{n-1} ノトリ得ル値ハ n ノ如何ニ關セズ $2a_1$ ヨリモ小ナリ。ソコデ一般ニ $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ハ幾通リノ値ヲ採リ得ルカヲ見ルニ $\sqrt{N}$ ハ常數ニシテ a_n ハ多クトモ a_1 ヨリ大ナラズ。又分母ニ於ケル r_n ハ多クトモ $2a_1$ ヲ超エズ。故ニ $\dfrac{\sqrt{N}+a_n}{r_n}$ ハ多クトモ $a_1\times 2a_1 = 2a_1^2$ 種ヨリモ多クノ異ナル値ヲトルコトヲ得ズ。然ルニ $\sqrt{N}$ ヲ連分數ニ化スルトキハ無限連分數トナルガ故ニ多クトモ $2a_1^2$ 種ノ異ナル値ヲトリタル後ハ必ズ同一ノ結果ヲ繰リ返スベシ。ヨリテ定理ハ完全ニ證明セラレタリ。

187. **定理 4.** 單純循環連分數ハ二次方程式ノ根ナリ。—最初ノ例

(i) 先ヅ純循環連分數ノ場合ヲ證明スベシ。

與ヘラレタル連分數ヲ

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n+}\;\frac{1}{a_1+}\cdots\cdots$$ トシコレヲ x ニテ表ハセバ

$$x = a_1+\frac{1}{a_2+}\;\frac{1}{a_3+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n+}\;\frac{1}{x}$$

$\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \dfrac{p_n}{q_n}$ ヲ夫々次ノ有限連分數ノ第 $(n-1)$, 第 n 漸近分數トセヨ。

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots\frac{1}{a_n+}\;\frac{1}{x}$$

然ルトキハ
$$x = \frac{xp_n+p_{n-1}}{xq_n+q_{n-1}}$$
$$\therefore\quad x^2q_n + x(q_{n-1}-p_n) - p_{n-1} = 0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

(1) ナル二次方程式ノ根ノ中正ナルモノハ所設ノ連分數ノ値ナリ。

(ii) 次ニ混循環連分數ノ場合ヲ證明センニ

$$x = a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots\frac{1}{a_m+}\;\frac{1}{b_1+}\;\frac{1}{b_2+}\cdots\cdots\frac{1}{b_n+}\;\frac{1}{b_1+}\cdots\cdots$$

トスベシ。

今 $b_1+\dfrac{1}{b_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{b_n}=\cdots\cdots y$ トシ, $\dfrac{r_{n-1}}{s_{n-1}},\ \dfrac{r_n}{s_n}$ ヲ第 $(n-1)$ 及ビ第 n 漸近分數トスル時ハ

$$y = \frac{yr_n+r_{n-1}}{ys_n+s_{n-1}}$$

即チ
$$y^2s_n + y(s_{n-1}-r_n) - r_{n-1} = 0$$

ヨリテ y ハ上ノ二ツノ根ノ中正ナルモノナリ。コレヲ $\dfrac{A+\sqrt{B}}{C}$ ト置クベシ

但シ　$A = r_n - s_{n-1},\quad B = (s_{n-1}-r_n)^2 + 4s_nr_{n-1},\quad C = 2s_n$

又 $\dfrac{p_{m-1}}{q_{m-1}},\ \dfrac{p_m}{q_m}$ ヲ $a_1+\dfrac{1}{a_2+}\cdots\cdots\dfrac{1}{a_m}$ ノ最後ノ二ツノ漸近分數トスルトキハ

$$x = \frac{yp_m+p_{m-1}}{yq_m+q_{m-1}}$$

ナルガ故ニコレニ y ノ値ヲ代入シ且ツ整頓スレバ

$$x = \frac{(Ap_m+Cp_{m-1})+\sqrt{B}\,p_m}{(Aq_m+Cq_{m-1})+\sqrt{B}\,q_m}$$
$$\therefore\quad \sqrt{B}(q_mx-p_m) = (Ap_m+Cp_{m-1}) - x(Aq_m+Cq_{m-1})$$

兩邊ヲ平方シ且ツ整頓スレバ, x ニツキテ二次方程式トナル。ヨリテ與ヘラレタル混循環連分數ハソノ二ツノ根ノ中正ナルモノナリ。ヨリテ定理ハ證明セラレタリ。

第三章　問　題

1. $\sqrt{19}$ 及ビ $\sqrt{23}$ ヲ連分數ニ直セ。

2. $\sqrt{a^2+1}$ 及ビ $\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}$ ヲ連分數ニ直セ。

3. $\dfrac{1}{2+}\;\dfrac{1}{3+}\;\dfrac{1}{2+}\;\dfrac{1}{3+}\cdots\cdots$ ノ値ヲ求メヨ。

4. $1+\frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{3+}\cdots\cdots$ ノ値ヲ求メヨ。

5. $\frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots$ ノ第 n 漸近連分數ヲ $\frac{p_n}{q_n}$ トスレバ $p_n-4p_{n-2}+p_{n-4}=0$ ナルコトヲ證セヨ。

6. $p+\frac{2}{1+}\ \frac{1}{p+}\ \frac{1}{1+}\ \frac{1}{p+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots=\sqrt{p^2+4p}$ ナルコトヲ證セヨ。

7. $\left(a+\frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots\cdots\right)\left(\frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\cdots\cdots\right)=\frac{a}{b}$ ナルコトヲ證セヨ。

8. $\left(\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{d+}\ \frac{1}{a+}\cdots\cdots\right)\left(d+\frac{1}{c+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{d+}\cdots\cdots\right)$

$=\frac{b+d+bcd}{a+c+abc}$ ナルコトヲ證セヨ。

解　$x=\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{d+}\ \frac{1}{a+}\cdots\cdots$ トスレバ

$$x=\frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{d+x}=\frac{b+d+bcd+x(bc+1)}{1+ab+ad+cd+abcd+x(abc+a+c)}$$

即チ　$x^2+\frac{abcd+cd+ad+ab-bc}{abc+a+c}x-\frac{bcd+b+d}{abc+a+c}=0$

ヨリテ與ヘラレタル連分數ハコノ二次方程式ノ正ノ根ナリ。次ニ

$$y=d+\frac{1}{c+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{d+}\cdots\cdots$$

トスレバ　$\frac{1}{y}=\frac{1}{d+}\ \frac{1}{c+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+\frac{1}{y}}$

ナルガ故ニ上ト同様ノ方法ニテ

$$y^2-\frac{abcd+ad+dc+ab-bc}{abc+a+c}y-\frac{bcd+b+d}{abc+c+a}=0$$

y ハコノ二根ノ中ノ正ノ根ナリ。而シテ二次方程式ノ簡單ナル性質ヲ利用スレバ

$$xy=\frac{bcd+b+d}{abc+a+c}\quad ナルコトヲ知ル$$

9. $x=\frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\ \frac{1}{a_1+}\ \frac{1}{a_2+}\cdots\cdots$

$y=\frac{1}{2a_1+}\ \frac{1}{2a_2+}\ \frac{1}{2a_1+}\ \frac{1}{2a_2+}\cdots\cdots$

$z=\frac{1}{3a_1+}\ \frac{1}{3a_2+}\ \frac{1}{3a_1+}\ \frac{1}{3a_2+}\cdots\cdots$

ナリトスレバ $x(y^2-z^2)+2y(z^2-x^2)+3z(x^2-y^2)=0$ ナルコトヲ證セヨ。

10. $x=y+\frac{1}{2y+}\ \frac{1}{2y+}\cdots\cdots$ ナルトキハ $y=x-\frac{1}{2x-}\ \frac{1}{2x-}\cdots\cdots$ ナルコトヲ證セヨ。

11. $a+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots$ ト $b+\frac{1}{1+}\ \frac{1}{a+}\ \frac{1}{b+}\ \frac{1}{1+}\cdots\cdots$ トノ比ハ $1+a:1+b$ ナルコトヲ示セ。

解　二ツノ連分數ノ値ヲ夫々 x, y トスレバ,

$x=a+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b+\cancel{x}}}$　　$\therefore\ x^2(b+1)-x(ab+a+b-1)-(a+1)=0$

同様ニ　$y^2(a+1)-y(ab+a+b-1)-(b+1)=0$

後者ヲ變形スルト

$$\left(\frac{a+1}{b+1}y\right)^2(b+1)-\left(\frac{a+1}{b+1}y\right)(ab+a+b-1)-(a+1)=0$$

トナル。コノ二ツノ方程式ヨリ

$$x:y=a+1:b+1\quad ナルコトヲ知ル。$$

12. $\left(\frac{1}{x+}\ \frac{1}{4x+}\ \frac{1}{x+}\ \frac{1}{4x+}\cdots\cdots\right)\div\left(\frac{1}{2x+}\cdots\cdots\right)$ ハ x ノ値ノ如何ニ關セズ一定ナルコトヲ證セヨ。

13. $\left(x+\frac{1}{2x+}\ \frac{1}{2x+}\cdots\cdots\right)^2-\left(x-\frac{1}{2x-}\ \frac{1}{x-}\cdots\cdots\right)^2=2$ ナルコトヲ證セヨ。

14. $x=\frac{3}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{3}{2+}\ \frac{1}{2+}\cdots\cdots$,　$y=\frac{1}{2+}\ \frac{3}{2+}\ \frac{1}{2+}\ \frac{3}{2+}\cdots\cdots$

ナルトキハ $x-y=1$ ナルコトヲ證セヨ。

第四章

一般連分數

188. 一般連分數

$$a_1+\frac{b_2}{a_2+}\ \frac{b_3}{a_3+}\ \frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

或ハ

$$a_1+\frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\ \frac{b_4}{a_4-}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)'$$

但シ $a_1, a_2, \cdots\cdots b_1, b_2 \cdots\cdots$ ハ何レモ正ノ整數ナリトス。

コノ分數ノ諸性質ニ關シテハ單純連分數ト同樣ニシテ研究セラル、モノアレドモ，多クハ甚ダ複雜ナリ。而カモ其應用弘カラズ。故ニ本書ニハ單純連分數ノ場合ニ於ケルト同一ナルカ，或ハコレヨリ誘導セラル、ガ如キモノハミヲ擧ゲントス。

定理 1. $a_1+\dfrac{b_2}{a_2+}\ \dfrac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$

ニ於テ

$$p_n=a_np_{n-1}+b_np_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}\cdots\cdots(1)$$

ナリ。

系 1. $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^nb_2b_3\cdots\cdots b_n\cdots\cdots(2)$

證明 本定理ニヨリ

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=-b_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})$$

コノ公式ノ n ノ値ヲ一ツ宛減少セシメ，且ツ

$$p_2q_1-p_1q_2=b_2=(-1)^2b_2$$

ナルコトニ注意スレバ所要ノ結果ヲ得ラル。

注意 コレニヨリテ $\dfrac{p_n}{q_n}$ ハ必ズシモ已約分數ニアラザルコトヲ知ル。コレ單純連分數ト異ナル點ノ一ツナリトス。

系 2. $p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n=(-1)^{n-1}a_nb_2b_3\cdots\cdots b_{n-1}\cdots\cdots(3)$

證明 (1) 及ビ (2) ヨリ p_{n-1}, q_{n-1} ヲ消去スレバ得ラル。

系 3. $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=(-1)^n\dfrac{b_2b_3\cdots\cdots b_n}{q_nq_{n-1}}\cdots\cdots(4)$

系 4. $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=(-1)^{n-1}\dfrac{a_nb_2b_3\cdots\cdots b_{n-1}}{q_nq_{n-2}}\cdots\cdots(5)$

系 5. $\dfrac{p_n}{q_n}=a_1+\dfrac{b_2}{q_1q_2}-\dfrac{b_2b_3}{q_2q_3}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{b_2b_3\cdots\cdots b_n}{q_{n-1}q_n}\cdots\cdots(6)$

證明 $\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{p_1}{q_1}+\left(\dfrac{p_2}{q_2}-\dfrac{p_1}{q_1}\right)+\left(\dfrac{p_3}{q_3}-\dfrac{p_2}{q_2}\right)+\cdots\cdots+\left(\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)$

ナルヲ以テ (4) ヲ之ニ代入スレバ直チニ得ラル。

系 6. $\left(\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)\div\left(\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}-\dfrac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)=-\dfrac{b_nq_{n-2}}{q_n}=-\dfrac{b_nq_{n-2}}{a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2}}$

證明 公式 (4) ヨリ直チニ得ラル。

定理 2. 連分數 $a_1+\dfrac{b_2}{a_2+}\ \dfrac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$ ニ於テハ奇數番目ノ漸近分數ハソノ値次第ニ增加シ，偶數番目ノ漸近分數ハソノ値次第ニ減少ス。而シテ奇數番目ノ漸近分數ハ直グソノ次ノモノヨリモ小ニシテ，偶數番目ノ漸近分數ハ之レニ反ス。コレ系 3 及ビ系 4 ヨリ容易ニ知ラル。

定理 3. 連分數

$$a_1+\frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\ \frac{b_4}{a_4+}\cdots\cdots$$

ニ於テ $a_n\geqq 1+b_n$ ナル時ハ，n ノ値ノ如何ニ拘ラズ p_n, q_n ハ共ニ正ニシテ且ツ之等ハ n ト共ニ增加ス。

系 連分數

$$a_1+\frac{b_2}{a_2-}\ \frac{b_3}{a_3-}\ \frac{b_4}{a_4-}\cdots\cdots$$

ニ於テ $a_n\geqq 1+b_n$ ナル時ハ，凡テノ漸近分數ハ正ナリ。

189. 有限連分數ノ値ニ就イテ一二ノ注意ヲ與フル所アラントス。元來有限連分數ニアリテハソノ收斂及ビ發散ヲ論ズル要ナケレバ只ソノ値ハ最後ノ漸近分數ニテ定ムト規約スベシ。故ニ若シソノ連分數ヲ組成スル元ニタトヒ無意義ノモノアリト雖モ，ソノ最後ノ漸近分數ガ有限確定ノ値ヲ有スルナラバ，ソレヲ以テ所設ノ連分數ノ値トナス。例ヲ以ツテ示サン。

例 1. $1-\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{0}}$ ニ於テハ最後ノ元 $\dfrac{1}{0}$ ハ本來ヨリイヘバ無意義ノモノナレドモ

$$p_3=a_1a_2a_3+a_1b_3+a_3b_2,\qquad q_3=a_2a_3+b_3$$

ナル公式ニ $a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0,\ b_2=-2,\ b_3=1$ ト置ケバ $p_3=1,\ q_3=1$ ヲ得ルガ故ニ，コノ連分數ノ値ハ 1 ナリトイフ。

例 2. $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1}}$ ニ於テハ元トシテハ何レモ有意義ナルモ上ノ如キ計算ヲ行ヘバ $p_3=1,\ q_3=0$ トナルガ故ニ連分數ハ無意義ノモノナリトイフ。

190. 次ニ無限連分數ノ値ニ就イテ言ハンニ，

$$a_1+\frac{b_2}{a_2+}\,\frac{b_3}{a_3-}\cdots\cdots \text{ ニ對シテ } \frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\cdots\cdots$$

ナル一群ノ漸近分數ノ中ニハ分母ノ零ナルモノアルベシ。然レドモソノ數有限箇ニシテ且ツ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$ ガ存在シ，而カモソノ値ガ有限確定ナル時ハ，コノ無限連分數ハ收斂ナリトイヒ，ソノ極限値ヲ以ツテ所設ノ連分數ノ値トナス。然ルニ若シ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$ ガ $\pm\infty$ ナル時ハ發散ナリトイヒ，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{q_n}$ ガ振動ナル時，コノ連分數ハ振動ナリトイフ。(場合ニヨリテハ $q_n=0$ ナルガ如キコト無限ニ多クアルトキアリコノ時モ又發散ナリトイフ。)

191. 無限級數ノ收斂モシクハ發散ヲ判定スルコトハ頗ル困難ニシテ，ソノ特種ノモノト雖モ未ダ完全ナラズ。故ニ本書ニ於テハソノ概要ヲ記述スルニ止メントス。

定理 1. 單純無限連分數 $a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\cdots$ ハ必ズ收斂ナリ。

證明 奇數番目ノ漸近分數ハソノ値次第ニ增大スル級數ニシテ，偶數番目ノ漸近分數ハソノ値次第ニ減少スル級數ヲナス。然ルニ奇數番目ノモノト雖モ a_1+1 ヨリ小ナルガ故ニドコマデモ增加スルニハアラズ。又偶數番目ノモノモ a_1 ヨリ小トナルコトナキヲ以ツテドコマデモ際限ナク減少スルモノニアラズ。故ニ奇數番目ノモノモ偶數番目ノモノモ共ニアル一定ノ極限値ヲ有ス，而シテ $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_nq_{n-1}}$ ナルガ故ニ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right)=0$ 故ニ偶數番目ノモノト奇數番目ノモノトハ共ニ同一ノ極限値ニ收斂スルコト明カナリ。

定理 2. $1-\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\,\frac{1}{1-}\cdots\cdots$ ハ振動ナリ。

證明　$a_1=a_2=\cdots\cdots=1$

$b_2=b_3=\cdots\cdots=-1$

故ニ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{p_1}{q_1}=\dfrac{1}{1}\\[2ex] \dfrac{p_2}{q_2}=\dfrac{0}{1}\\[2ex] \dfrac{p_3}{q_3}=\dfrac{-1}{0}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}\dfrac{p_4}{q_4}=\dfrac{p_3-p_2}{q_3-q_2}=\dfrac{-1}{-1}\\[2ex] \dfrac{p_5}{q_5}=\dfrac{p_4-p_3}{q_4-q_3}=\dfrac{0}{-1}\\[2ex] \dfrac{p_6}{q_6}=\dfrac{p_5-p_4}{q_5-q_4}=\dfrac{1}{0}\end{array}\right\}\quad \left.\begin{array}{l}〃\\[2ex] 〃\\[2ex] 〃\end{array}\right\}$$

卽チ　$n=3m+1$ ナラバ $\frac{p_n}{q_n}=1$, $n=3m+2$ ナラバ $\frac{p_n}{q_n}=0$

$n=3m$ ナラバ $\frac{p_n}{q_n}=\infty$

故ニ振動ナリ。

192. 定理 3. 級數 $\Sigma\frac{a_{n-1}a_n}{b_n}$ ガ發散ナラバ連分數 $a_1+\frac{b_2}{a_2+}\,\frac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$ ハ收斂ナリ。

證明

$$\begin{array}{ll} q_n=a_nq_{n-1}+b_nq_{n-2} & \\ q_{n-1}=a_{n-1}q_{n-2}+b_{n-1}q_{n-3} & \therefore\ q_{n-1}>a_{n-1}q_{n-2}\\ q_{n-2}=a_{n-2}q_{n-3}+b_{n-2}q_{n-4} & \therefore\ q_{n-2}>a_{n-2}q_{n-3}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ q_4=a_4q_3+b_4q_2 & \therefore\ q_4>a_4q_3\\ q_3=a_3q_2+b_3q_1 & \therefore\ q_3>a_3q_2\\ q_2=a_2q_1 & \end{array}$$

故ニ

$$\begin{array}{l} q_n>(a_na_{n-1}+b_n)q_{n-2}\\ q_{n-1}>(a_{n-1}a_{n-2}+b_{n-1})q_{n-3}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ q_4>(a_4a_3+b_4)q_2\\ q_3=(a_3a_2+b_3)q_1 \end{array}$$

逐々相乘ズレバ

$$q_nq_{n-1}>q_1q_2(b_3+a_2a_3)(b_4+a_3a_4)\cdots\cdots(b_n+a_{n-1}a_n)$$

而シテ $q_1q_2=1\times a_2=a_2$ ナルガ故ニ次ノ不等式ガ成立ス。

$$\frac{q_nq_{n-1}}{b_2b_3\cdots\cdots b_n}>\frac{a_2}{b_2}\left(1+\frac{a_2a_3}{b_3}\right)\left(1+\frac{a_3a_4}{b_4}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{a_{n-1}a_n}{b_n}\right)$$

然ルニ假定ニヨリテ $\Sigma\frac{a_{n-1}a_n}{b_n}$ ハ發散ナルガ故ニ無限乘積論ニ於ケル定理 6 ニヨリテ $\prod\limits_{n=3}^{\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}a_n}{b_n}\right)$ ガ發散ニシテソノ極限値ガ ∞ ナリ。

故ニ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q_nq_{n-1}}{b_2b_3\cdots\cdots b_n}=\infty$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{p_{2n}}{q_{2n}}-\frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{b_2b_3\cdots\cdots b_n}{q_{2n}q_{2n-1}}=0$$

故ニコノ連分數ハ振動セズ。而シテ百八十八節定理2ニヨリテ發散セザルヲ知ル。故ニ收斂ナリ。

系 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n-1}a_n}{b_n}>0$ ナルトキ連分數 $a_1+\dfrac{b_2}{a_2+}\ \dfrac{b_3}{a_3+}\cdots\cdots$ ハ收斂ナリ。

證明 何トナレバ $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{a_{n-1}a_n}{b_n}\right)$ ガ發散ナレバナリ。

系 2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}>0$ ニシテ且ツ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ ハ發散ナル時ハ連分數 $a_1+\dfrac{b_2}{a_2+}\ \dfrac{b_3}{a_3+}$ $\cdots\cdots$ ハ收斂ナリ。

證明 何トナレバ $\Sigma\dfrac{a_{n-1}a_n}{b_n}$ ハ比較判定法ニヨリテ發散シ從ツテ $\prod\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{a_{n-1}a_n}{b_n}\right)$ ハ發散スレバナリ。

系 3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}b_n}{a_{n-1}b_{n+1}}>1$ ナルトキハ連分數 $a_1+\dfrac{b_2}{a_2+}\cdots\cdots$ ハ收斂ナリ。

證明 だらんべるノ方法ニヨリテ $\Sigma\dfrac{a_na_{n-1}}{b_n}$ ガ發散ナレバナリ。

第十五編 不定方程式

193. 一ツヨリモ多クノ未知數ヲ含ム方程式ハソノ根ハ無數ニ存在ス。例ヘバ $2x+y=5$ ナル一次方程式アリトセンカ，吾人ハ x ニ任意ノ値ヲ與フルトキハ之レニ對應シテ y ノ値ハ $5-2x$ ヨリ得ラル。即チソノ解 (Solution) ハ不定ナリ。然レドモ若シコノ方程式ヲ滿足スル x, y ノ値ハ共ニ整數ナルベシトイフ制限ヲ設クル時ハ，全ク不定ヲ脱シテ確定的ノ問題トナルベシ。コレヲ不定方程式* (Indeterminate equation) ノ整數解 (Integral solution) トイフ。本編ニ於テ論ズルハソノ概要ナリ。

194. 二ツノ未知數 x, y ヲ含ム一次方程式ハ

$$ax+by=\pm c$$

及ビ

$$ax-by=\pm c$$

ノ四通リニ外ナラズ。(茲ニ a, b, c ハ正ノ整數トス，若シ分數ナルモノアリトスレバ，公分母ヲ乘ジテ此等ヲ整數トナスベシ)。

然レドモ吾人ハコノ四通リヲ悉ク研究スルニハ及バザルベシ。何トナレバ x ヲ $-x$ ニ，y ヲ $-y$ ニ置キ換フル時ハ，$ax+by=-c$ ハ $ax+by=c$ トナリ，$ax-by=-c$ ハ $ax-by=c$ トナルヲ以ツテ $ax+by=c$ 及ビ $ax-by=c$ ナル二ツノ形ニ關スル整數解ヲ求ムレバ可ナリ。

尙 a, b, c ニ共通ナル公約數ヲ有スルナラバ豫メコレ等ヲ通約シ置クベク又 a ト b トニ公約數アルトキハ c モ又ソノ數ノ倍數ナラザルベカラズ。何トナレバ x ト y トハ假定ニヨリテ整數ナルベキガ故ニ $ax\pm by$ ハ必ズソノ公約數ニテ整除セラルベク，從ツテ c モ又ソノ倍數ナラザルベカラザレバナリ。ヨツテ吾人ハ a ト b トハ互ニ素ナル數ナリト假定スベシ。

---

* 不定方程式ハ紀元330年頃歿セリト傳ヘラルヽちおふあんたす (Diophantus) ニ發ス。ちおふあんたすハあれきさんどりやノ最後ノ大數學者ナリ。

$ax \equiv c \pmod{b}$
ナル x ヲ求ム.

195. $ax-by=c$ ノ整數解

(i) a ト b トガ共ニ 1 ナラズト假定スレバ $\dfrac{a}{b}$ ハ必ズ單純連分數ニ直スコトヲ得。而シテソノ最後ノ漸近分數ハ $\dfrac{a}{b}$ ソレ自身ニシテ最後ヨリ二番目 (penultimate convergent) ノモノヲ $\dfrac{p}{q}$ トスレバ百八十二節定理 8 ニヨリ

$$aq-bp=\pm 1$$

c ヲ乘ジテ　　$$acq-bcp=\pm c$$

卽チ $acq-bcp=c$ ナルカ, $acq-bcp=-c$ ナリ。故ニ前者ノ場合ニアリテハ $x=cq,\ y=cp$ トスベク, 後者ノ場合ニアリテハ $x=-cq,\ y=-cp$ トスレバ確カニ與ヘラレタル方程式ヲ滿足ス。之レヲ不定方程式ノ特別解 (Particular solution) トイフ。

モシ a, b ノ中何レカ一ツ例ヘバ $a=1$ ナリトスレバ, $\dfrac{1}{b}$ ヲ連分數ニ直スコトハ能ハズ。ヨリテコノ解ガ無効ナリ。然レドモコノ場合ハ與ヘラレタル方程式ハ $x-by=c$ ナルガ故ニ, y ニ任意ノ整數ヲ與フレバ之レニ對應シテ x ノ値ハ $c+by$ ヨリ得ラル。($b=1$ ナル時モ亦同樣ナリ。)

(ii) 次ニ一般解 (general solution) ヲ求メンニ假リニ x, y ノ整數解ノ一ツヲ α, β トスレバ

$$\left.\begin{aligned} ax-by&=c \\ a\alpha-b\beta&=c \end{aligned}\right\}$$

$$\therefore\quad a(x-\alpha)=b(y-\beta)$$

然ルニ假定ニヨリテ a, b ハ互ニ素ナルガ故ニ $x-\alpha$ ハ b ノ倍數ナルベク, $y-\beta$ ハ a ノ倍數ナルベシ。

故ニ　　$$(x-\alpha)=bt$$
$$(y-\beta)=at$$

從ツテ $aq-bp=1$ ナルトキハ $x=cq,\ y=cp$ ハ一ツノ解ナルガ故ニ, 一般解トシテ

$$x=cq+bt, \qquad y=cp+at$$

ヲ得ベク, $aq-bp=-1$ ナルトキハ, $x=-cq,\ y=-cp$ ハ一ツノ解ナルガ故ニ, 一般解トシテ

$$x=-cq+bt, \qquad y=-cp+at$$

ヲ得ベシ。但シ t ハ任意ノ整數ナリトス。

上ニ得タルモノハ一般ノ整數解ナリシガ吾人ハ進ンデ正ノ整數解ヲ求ムル方法ヲ說明セントス。

(i) $\dfrac{a}{b}>\dfrac{p}{q}$ ナルトキ

コノ場合ハ $aq>bp$ ナルガ故ニ, $aq-bp=1$ ナラザルベカラズ。故ニ $x=cq+bt,\ y=cp+at$

サテ假定ニヨリテ $\dfrac{a}{b}>\dfrac{p}{q}$ ナルガ故ニ $\dfrac{cp}{a}<\dfrac{cq}{b}$ ナリ。故ニ x ト y トヲ共ニ正ノ整數トスルニハ t ヲシテ次ノ不等式ヲ滿足スルガ如キ整數ヲトラシムルヲ要ス。

$$-\frac{cp}{a}<t$$

故ニコノ場合ニハ無數ニ正ノ整數解アリ。

(ii) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{p}{q}$ ナル時

コノ場合ニハ $aq<bp$ ナルガ故ニ, $aq-bp=-1$ 從ツテ $x=-cq+bt,\ y=-cp+at$

假定ニヨリテ $\dfrac{a}{b}<\dfrac{p}{q}$ ナルガ故ニ $\dfrac{cp}{a}>\dfrac{cq}{b}$ ナリ。故ニ x ト y トヲ共ニ正ノ整數ナラシムルニハ, t ヲシテ次ノ不等式ヲ滿足スルガ如キ整數ヲトラシムルヲ要ス。

$$\frac{cp}{a}<t$$

ヨツテコノ場合ニモ無數ニ正ノ整數解アリ。

196. $ax+by=c$ ノ整數解

(i) a ト b トハ共ニ 1 ニアラズト假定スレバ前節ト同樣ニシテ

$$aq-bp=\pm 1$$

c ヲ乘ジテ　　$acq-bcp \doteq \pm c$

即チ $acq-bcp=c$ ナルカ，$acq-bcp=-c$ ナリ。前者ノ場合ニハ $x=cq$ $y=-cp$ トスベク，後者ノ場合ニハ $x=-cq,\ y=cp$ トスベシ。コレ與ヘラレタル方程式ヲ滿足スル特別解ナリトス。

次ニ a, b ノ中何レカ一ツガ 1 ナルトキハ前節ト同樣ニシテ解ヲ見出スコトヲ得ベシ。ヨリテ今之レヲ說カズ進ンデ一般解ヲ求メントス。

(ii) x, y ノ特別解ノ任意ノ一組ヲ α, β トスレバ

$$ax+by=c$$

$$a\alpha+b\beta=c$$

$$\therefore \quad a(x-\alpha)=-b(y-\beta)$$

然ルニ a ト b トハ互ニ素ナルガ故ニ次ノ式アリ

$$x-\alpha=-bt$$

$$y-\beta=at$$

從ツテ $aq-bp=1$ ナルトキハ，$x=cq-bt,\ y=-cp+at$ トスベク，$aq-bp=-1$ ナルトキハ $x=-cq-bt,\ y=cp+at$ トスベシ。コレ與ヘラレタル方程式ノ一般解ナリトス。但シ茲ニ t ハ整數トス。

最後ニ吾人ハ更ニ進ンデ正ノ整數解ニツキ吟味ヲナサントス。

(i) $\dfrac{a}{b}>\dfrac{p}{q}$ ナルトキ。

コノ場合ニ於テハ $aq>bp$ ナルガ故ニ $aq-bp=1$ ナルベシ。ヨリテ $x=cq-bt,\ y=-cp+at.$

サテ假定ニヨリテ $\dfrac{a}{b}>\dfrac{p}{q}$ ナルガ故ニ，x ト y トヲシテ共ニ正ノ整數ナラシメンガ爲メニハ t ヲシテ次ノ不等式ヲ滿足スルガ如キ整數ヲトラシメザルベカラズ。

$$\frac{cp}{a}<t<\frac{cq}{b}$$

ヨツテコノ場合ニハ有限個ノ解アルノミナリ。

(ii) $\dfrac{a}{b}<\dfrac{p}{q}$ ナル場合

コノ場合ニハ $aq-bp=-1$ ナルガ故ニ，$x=-cq-bt,\ y=cp+at$ トナル。故ニ x ト y トニ正ノ整數ヲトラシメンニハ t ニ次ノ條件ヲ附セザルベカラズ。

$$-\frac{cp}{a}<t<-\frac{cq}{b}$$

ヨツテコノ場合ニモ又正ノ整數解ノ個數ガ有限ナリ。*

197. 例 1.　$5x-9y=17$ ヲ解ケ。

解　本例ハ百九十五節ニ於ケル場合ニシテ，$\dfrac{5}{9}=\dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{4}$　故ニ最後ヨリ二番目ノ漸近分數ハ $\dfrac{1}{2}$ ナリ。從ツテ

$$5\times2-9\times1=1$$

コレ $aq-bp=1$ ナル場合ナリ。ヨツテ x, y ノ特別ノ解トシテ $x=17\times2$，$y=17\times1$ ヲ得。

然ルニ $\dfrac{5}{9}>\dfrac{1}{2}$ ナルガ故ニ $\dfrac{a}{b}>\dfrac{p}{q}$ ナル場合ニ相當ス。從ツテ一般解トシテ

$$x=34+9t,\quad y=17+5t \quad \text{但シ } t \text{ ハ整數ナリトス。}$$

次ニコレ等ノ無數ノ解ヨリ x, y ノ正ノ整數解ヲ得ント欲スルニハ t ヲ次ノ不等式ヲ滿足セシムル整數トスルヲ要ス。

$$\frac{-17\times1}{5}<t$$

即チ與ヘラレタル方程式ノ正ノ整數解ハ t ヲシテ $\dfrac{-17}{5}$ ヨリモ小ナラザル整數ヲ與フルコトニヨリテ得ラル。

例 2.　$9x+11y=200$ ノ整數解ヲ求メヨ。

解　$\dfrac{9}{11}=\dfrac{1}{1+}\ \dfrac{1}{4+}\ \dfrac{1}{2}$

故ニ最後ヨリ二番目ノ漸近分數ハ $\dfrac{4}{5}$

$$\therefore \quad 9\times5-11\times4=1$$

コレ即チ $aq-bp=1$ ナル場合ニ相當ス。從ツテ x, y ハ夫々 $x=200\times5$,

---

* 二次ノ不定方程式ニ就イテハ本書ニ於テ說カズ。複雜ナルト同時ニ冗長ヲ恐レテナリ。

$y=-200\times4$　故ニ一般解トシテ

$x=1000-11t,\ \ y=-800+9t$　但シ t ハ任意ノ整數トス。

次ニ進ンデ正ノ整數解ヲ求メンニ

$$\frac{9}{11}>\frac{4}{5}$$

ナルガ故ニ t ヲ次ノ不等式ヲ滿足スル正ノ整數トスルヲ要ス。

$$\frac{200\times4}{9}<t<\frac{200\times5}{11}$$

卽チ

$$88\frac{8}{9}<t<90\frac{10}{11}$$

故ニ $t=89$, 又ハ 90 ナリ。從ッテ求ムル正ノ整數解ハ

$$\left.\begin{aligned}x&=1000-11\times89=21\\ y&=-800+9\times89=1\end{aligned}\right\}$$

又ハ

$$\left.\begin{aligned}x&=1000-11\times90=10\\ y&=-800+9\times90=10\end{aligned}\right\}$$

ノ二組ナリトス。

198.　上ノ解法ヲ利用シテ三ツノ未知數ヲ有スル方程式ノ整數解ヲ求メンニ，與ヘラレタル方程式ヲ

$$ax+by+cz=d$$

トスレバ之レヲ移項シテ

$$ax+by=d-cz$$

故ニ z ニ順次 $0,1,2,3,\dots\dots$ ヲ與フレバ結局 $ax+by=c'$ ナル形ノモノトナル。コレ吾人ノ已ニ知レル所ナリ。

199.　次ニ三ツノ未知數ヲ含メル二ツノ聯立方程式

$$ax+by+cz=d$$

$$a'x+b'y+c'z=d'$$

ヲ解カントスルニ，先ヅ z ヲ消去スレバ結局

$$px+qy=r$$

ナル方程式ヲ得。ソコデコノ方程式ノ特別解ヲ夫々 α,β トスレバ

$$\left.\begin{aligned}x&=\alpha+qt\\ y&=\beta-pt\end{aligned}\right\}$$

ナル形ノモノヲ得。コノ値ヲ與ヘラレタル方程式ノ何レカ一ツニ代入スレバ

$$p't+q'z=r'$$

ナル形ノモノヲ得。而シテコノ方程式ノ $t,z,$ ノ特別解ヲ h,k トスレバ

$$t=h+q's$$

$$z=k-p's$$

ナル形ノモノヲ得。故ニ結局

$$x=\alpha+qh+qq's$$

$$y=\beta-ph-pq's$$

ナル形ノモノヲ得。玆ニ s ハ整數ヲ表ハスモノトス。

200.　例 1.　$3x+4y+2z=13$ ノ正整數解ヲ求メヨ。

解　$3x+4y=13-2z$

x 及ビ y ハ正ノ整數ナル爲メニハ，z ハ 3 ヨリ大ナルベカラザルコトヲ知ル。

ソコデ　$z=1$　トスレバ　$3x+4y=11$

$z=2$　トスレバ　$3x+4y=9$

$z=3$　トスレバ　$3x+4y=7$

コレヨリ上式ノ三ツノ方程式ヲ解クコトニヨリテ x ト y トノ正整數ノ解ヲ得。從ッテ z ノ値ト組合セテ求ムル解トスベシ。

例 2.　$\left.\begin{aligned}5x+4y+z&=74\\ 2x+3y+z&=52\end{aligned}\right\}$ ノ正整數解ヲ求メヨ。

解　z ヲ消去スレバ $3x+y=22$

コノ方程式ニ於ケル x,y ノ特別解ハ視察ニヨリテ $x=7,y=1$ ヲ得ルガ故ニソノ一般解ハ視察ニヨリテ

$$\left.\begin{aligned}x&=7-t\\ y&=1+3t\end{aligned}\right\}$$

ヲ得。コレヲ一ツノ方程式例ヘバ $2x+3y+z=52$ ニ代入スレバ

$$7t+z=35$$

コレヨリ又 t, z ノ一般解トシテ容易ニ

$$\left.\begin{aligned} z&=7-7s \\ t&=4+s \end{aligned}\right\}$$

茲ニ s ハ任意ノ整數ナリトス。然ルトキハ結局 x, y, z ノ整數解ハ次ノ如シ。

$$\left.\begin{aligned} x&=7-4-s=3-s \\ y&=1+12+3s=13+3s \\ z&=7-7s \end{aligned}\right\}$$

コレ x, y, z ノ一般解ナリトス。

次ニ吾人ハ正ノ整數解ヲ求メントスルニ，$z=7-7s$ ヨリ s ハ正ナルベカラザルコトヲ知リ，$y=13+3s$ ヨリ s ハ -4 ヨリモ大ナルコトヲ知ル。ヨリテ s ノトリ得ル値ハ $-4, -3, -2, -1$, 及ビ 0 ノ五種ナリトス。從ツテ x, y, z ノ正ノ整數解ハ

$$s=-4 \text{ノ時,}\quad \left.\begin{aligned} x&=7 \\ y&=1 \\ z&=35 \end{aligned}\right\} \qquad s=-3 \text{ノ時,}\quad \left.\begin{aligned} x&=6 \\ y&=4 \\ z&=28 \end{aligned}\right\}$$

$$s=-2 \text{ノ時,}\quad \left.\begin{aligned} x&=5 \\ y&=7 \\ z&=21 \end{aligned}\right\} \qquad s=-1 \text{ノ時,}\quad \left.\begin{aligned} x&=4 \\ y&=10 \\ z&=14 \end{aligned}\right\}$$

$$s=0 \text{ノ時,}\quad \left.\begin{aligned} x&=3 \\ y&=13 \\ z&=7 \end{aligned}\right\}$$

第十五編　問　題

次ノ各方程式ノ正ノ整數解ヲ求ム. (1–5)

1. $7x+16y=209$　　2. $2x+7y=34$　　3. $3x+8y=93$

4. $13x+19y=150$　　5. $5x+13y=72$

次ノ各方程式ノ整數解ヲ求メヨ

6. $7x-13y=15$　　7. $49x-69y=100$

8. $7x+4y+19z=84$ ノ正ノ整數解ヲ求メヨ。

9. $23x+17y+11z=130$ ノ正ノ整數解ヲ求メヨ。

10. $2x+3y+10z=31$ ノ正ノ整數解ヲ求メヨ。

11. $5x+y+7z=39$ ト $2x+4y+9z=63$ トヲ同時ニ滿足スル正ノ整數解ヲ求メヨ。

12. $ax+bx+cz=d$ ニ適スル x, y, z ノ整數解ハ三ツノ等差級數ヲナスコトヲ證セヨ。

13. 二位ノ數アリソノ二ツノ數字ノ積ニテ整除セラル、トイフ。コノ數如何。

解　二位ノ數ヲ假リニ $10x+y$ トスレバ假定ニヨリテ xy ニテ整除セラル。

故ニ

$$10x+y=mxy$$

$$\therefore\quad 10+\frac{y}{x}=my$$

ヨツテ $\dfrac{y}{x}$ ハ一ツノ整數ナラザルベカラズ。今

$x=y$ トスレバ $11=my$　$\therefore\ y=1.$　從ツテ $x=1.$

$2x=y$ トスレバ $12=my$ 從ツテ $6=mx.$ 故ニ m ノ値ハ 2, 3, 6 ノ三ツナリ。故ニ $x=3\ y=6,\ x=2\ y=4,\ x=1.\ y=2$ ノ三組アリ。

$3x=y$ トスレバ $13=my$, ヨリテ $y=13$ ナルカ，1 ナラザルベカラズ。然レドモコノトキニハ $3x=y$ ナラシムル x ノ整數値ナシ。卽チ不可能ナリ。

$4x=y$ トセバ $14=my$ 及ビ $7=2mx$ トナリ答ヲ成サズ，カクノ如キ手續ヲトレバ結局要件ニ適スル二位ノ數ハ 11, 36, 24, 12, 15, ノ五種ニ限ル。

14. $x=9p+7=16q+33=35r-4$ ニ適スル x ノ値ヲ求メヨ，但シ p, q, r ハ正ノ整數ナリトス。

第十六編　行列式

第一章

基本定理

201.　四ツノ文字 $a_1, a_2, : b_1, b_2$ ヲトリ，コレヲ下圖ノ如ク第一列ニ a_1, a_2 ヲ置キ第二列ニ b_1, b_2 ヲ置キ a_1, b_1 ハ第一行トナリ，a_2, b_2 ハ第二行トナルヤウニ配置ス。

$$\begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{array}$$

次ニ各列又ハ各行ヨリ各々一ツ宛組ミ合セテ乗積ヲ作ル（同ジ列或ハ行ヨリトルヲ許サズ）時ハ

$$a_1\, b_2 \quad 及ビ \quad a_2\, b_1$$

ヲ得。而シテソノ符號ヲ定ムルニ a, b ノ順序ニ並ベタル時，ソノ添加數(suffix)ガ 1 2 ノ順序ニアルモノニ「+」ヲトラシメ，ソノ逆ノ順序ニアルモノニ「−」ヲトラシムル時ハ $a_1b_2-a_2b_1$ トナル。コレヲ二次ノ行列式 (determinant) トイヒ。表ハスニ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2-a_2b_1$$

ヲ以ツテス。

202　次ニ三次ノ行列式ヲ作ランニハ九ツノ文字 $a_1, a_2, a_3; b_1, b_2, b_3; c_1, c_2, c_3$ ヲトリ，コレヲ前ト同樣ニ a ナル文字ヲ第一列ニ，b ナル文字ヲ第二列ニ，c ナル文字ヲ第三列ニ並ブルモノトス。即チ

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{array}$$

次ニ各列又ハ各行ヨリ一ツ宛トリタル有ラユル組合セノ乗積（同ジ行又ハ列ヨリ二ツ以上トルコトヲ許サズ）ヲ作ルト

$$a_1b_2c_3,\ a_2b_3c_1,\ a_3b_1c_2,\ a_3b_2c_1,\ a_1b_3c_2,\ a_2b_1c_3$$

ナル六ツヲ得　而シテ符號ヲ定ムルニ夫等ヲ a, b, c ノ順序ニ並ベタル時ソノ添加數ガ 1, 2, 3 ノ順序ト逆ニナリタルモノガ偶數個ナル時ハ「+」ヲトラシメ，奇數個ナル時ハ「−」ヲトラシムモノトス。

例ヘバ $a_1b_2c_3$ ハ其添加數ハ 1, 2, 3 ノ順序ト全ク一致ス。即チ逆ノ順序ニナルモノナシ。故ニ「+」ナリ。$a_2b_3c_1$ ハ 2 ノ次ニ 1, 3 ノ次ニ 1, 故ニ逆ノ順序ニナルコト 2 回ナリ。ヨツテ「+」ヲトラシム。$a_3b_1c_2$ ハ 3 ノ次ニ 1, 3 ノ次ニ 2, 故ニ逆ノ順序ニナルコト 2 回ナリ。ヨツテ「+」ヲトラシム。$a_3b_2c_1$ ハ 3 ノ次ニ 2, 3 ノ次ニ 1, 2 ノ次ニ 1, 故ニ逆ノ順序ニナルコト 3 回ナリ。故ニ「−」ヲトラシム。又 $a_1b_3c_2$ ハ 3 ノ次ニ 2, 故ニ逆ノ順序ニナルコト 1 回ナリ即チ「−」ヲトラシム。最後ニ $a_2b_1c_3$ ハ 2 ノ次ニ 1, 故ニ逆ノ順序ニナルコト 1 回ナリ。ヨリテ「−」ヲトラシム。故ニ三次ノ行列式ハ次ノ如シ。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2 \\ -a_3b_2c_1-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3 \end{array}$$

203.　一般ニ n 次ノ行列式ヲ作ランニ n^2 個ノ數ヲ次ノ如ク正方形ニ配置ス。

$$\begin{array}{|llll} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 \cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{array}$$

上ノ正方形ノ式ニ於テ同列同行ノ乘法ヲ許サズニ，各列又ハ各行ヨリ一ツ宛アラユル方法ニテ組合セタル乘積（二ツ以上同ジ列又ハ行ヨリトルヲ許サズ）ヲ a, b, c ……… ノ順序ニ並ベソノ添加數ノ順序ガ 1 2 3………n ノ順序ニ對シテ偶數回逆トナリ居レバソレニ「＋」ヲトラシメ，奇數回逆トナリ居レバ「－」ヲトラシムモノトスルトキ，コレ等ノ乘積ノ代數和ヲ n 次ノ行列式トイフ。

注意 n^2 個ノ文字ヲ行列式ノ元素 (element) トイヒ，a_1, b_2, c_3……ヨリ m_n ニ至ル直線ヲ主對角線 (principal diagonal) トイヒ，ソノ乘積 $a_1\ b_2\ c_3 \cdots\cdots m_n$ ヲ主項 (principal term) トイフ。時ニヨリテハ上記ノ行列式ヲ主對角線ニ沿フ元素ノミヲ用ヒテ次ノ如クニ表ハスコトアリ。

$$a_1\quad b_2\quad c_3\cdots\cdots m_n$$

204. 轉倒

n 個ノ物ノ順列ハ $n!$ 通リアリ。此中任意ノ一ツヲトリテ之ヲ標準ノ順列ト考フル時，他ノ順列ニ於ケル二物ノ順序ハコノ標準ノ順列ニ於ケル同ジ二物ノ順序ト同ジ時アルベク又異ナル時アルベシ，後者ノ場合ニハ其二物ノ間ニ一ツノ轉倒(inversion)アリトイフ。例ヘバ 1, 2, 3 ナル三ツノ物ノ順列ノ中1, 2, 3 ノ順序ニアルモノヲ標準ノ順列トスレバ 2 1 3 ナル順列ハ 1 ト 2 トノ順序ハ相反スル故ニ 2 1 3 ナル順列ニハ 1 ト 2 トノ間ニ一ツノ轉倒アリトイフ。若シ 2 1 3 ナル順列ヲ標準ニトル時ハ 3 1 2 ナル順列ハ 1 ト 2 トノ間ニ轉倒アリ，2 ト 3 トノ間ニ轉倒アリ，3 ト 1 トノ間ニモ又轉倒アリ。即チ 2 1 3 ヲ標準ノ順列トスル時ハ 3 1 2 ナル順列ニハ都合三個ノ轉倒アリ。

轉倒ノ數ガ偶數ナル順列ヲ偶順列 (even permutation) トイヒ，奇數ナル順列ヲ奇順列 (odd permutation) トイフ。例ヘバ 1 2 3 4 ヲ標準ノ順列トスル時，2 1 4 3 ナル順列ハ 1 ト 2, 3 ト 4 トノ間ニ一ツ宛都合二ツノ轉倒アルガ故ニ偶順列ニシテ，2 3 4 1 ナル順列ハ 1 ト 2, 1 ト 3, 1 ト 4 トノ間ニ一ツ宛都合三ツノ轉倒アルガ故ニ奇順列ナリ。又 $a\ b\ c\ d$ ヲ標準ノ順列トスレバ $a\ c\ d\ b$ ハ b ト c, b ト d トノ間ニ一ツ宛都合二個ノ轉倒アルガ故ニ偶順列ニシテ，$c\ a\ d\ b$ ハ a ト c, b ト c, b ト d トノ間ニ各一ツ宛都合三個ノ轉倒アルガ故ニ奇順列ナリ。

以下數字ノ順列ニアリテハ自然數ノ順序ニ並ベタルモノ，又「アルファベット」ノ順列ニアリテハ其順序ニ並ベタルモノヲ標準ノ順列トナス。而シテ次ノべずう (Bèzout) ノ定理ハ行列式ノ基礎トナルモノナリ。

定理 1. 順列中ノ二物ヲ交換スルト轉倒ノ數ハ奇數個ダケ增減ス。

例ヘバ 2 3 5 4 1 ニ於テハ 1 ト 2, 1 ト 3, 1 ト 4, 1 ト 5, 4 ト 5 トノ間ニ各一ツ宛ノ轉倒アルヲ以テ都合五個ノ轉倒アリ。今コノ中ノ二物例ヘバ 3 ト 1 トヲ交換スルト，2 1 5 4 3 トナリ，コノ中ニハ 1 ト 2, 3 ト 4, 3 ト 5, 4 ト 5 トノ間ニ各一ツ宛ノ轉倒アルヲ以テ都合四個ノ轉倒アリ。卽チ五個アリシモノハ一個(奇數)減ジテ四個トナレリ。

證明 二ツノ場合ニ分チテ證明セン。卽チ

(i) 相隣レル二物ヲ交換スル場合。コノ時ニハ轉倒ノ差ハ一個ダケナリ。何トナレバ相隣レル二物ヲ s, t トセヨ。$s\,t$ ハ轉倒ヲ有スレバ $t\,s$ ハ轉倒ヲ有セズ，$s\,t$ ハ轉倒ヲ有セザレバ $t\,s$ ハ轉倒ヲ有ス。何レニシテモ確カニ一個ノ轉倒ノ增減アリ。而シテ s, t 以外ノ物ハコノ二物ノ交換ニヨツテ少シモ位置的關係ヲ變ゼズ。從ツテ s, t 以外ノ物ノ間ニ於ケル轉倒ノ數ニ增減ナシ。故ニ此順列ノ轉倒ノ數ノ增減ハ一個ノミナリ。

次ニ相隣ラザル二物ヲ交換スルト假定シ p ト u トノ間ニ r 個ノ物 $p_1, p_2 \cdots\cdots p_r$ アリトセヨ。p ト u トヲ一度ニ交換スル代リニ一ツ宛交換スルモノトス。卽チ先ヅ p ト p_1 トヲ交換シ，次ニ p ト p_2 ト交換シ………p ト p_r ト交換ス。然ルトキハ r 回ノ交換ヲナシタルコトニナル。次ニ u ヲ先キノ p ノ位置ニ移サンニ，先ヅ u ト p ト交換シ，u ト p_r ト交換シ………u ト p_1 ト交換ス。卽チ $(r+1)$ 回ノ交換ヲナサヾルベカラズ。要スルニ p ト u トノ位置ヲ交換スルニハ相隣レル二物ノ交換ヲ $(2r+1)$ 回セザルベカラズ而シテ其一回ノ交換ニハ轉倒ノ數ハ一ツダケ增減スルガ故ニ結局奇數回ノ增減ヲ生ズ。

定理 2. n 個ノ物ノ順列 $n!$ 個ノ中，半分ハ偶順列ニシテ他ノ半分ハ奇順列ナリ。

證明 偶順列ノ凡テヲトリテコノ中ノ或特別ナル二物ヲ交換スル時ハ前定理ニヨリテ相異ナル奇順列ヲ得ベシ。故ニ奇順列ノ數ハ偶順列ノ數ヨリモ小ナラズ。

次ニ奇順列ノ凡テヲトリテコノ中ノ或特別ナル二物ヲ交換スル時ハ前定理ニヨリテ相異ナル偶順列ヲ得ベシ。故ニ偶順列ノ數ハ奇順列ノ數ヨリモ小ナラズ。コノ二ツノ事柄ヨリ偶順列ト奇順列トノ個數ハ相等シキヲ知ル。

205. 前節ノコトヨリ行列式ノ定義ヲ次ノ如クニ言ヒ表ハスコトヲ得。即チ

「二百三節ニ於ケル n^2 個ノ配置ニ於テ，各列ヨリ一ツ各行ヨリ一ツ宛（同ジ列又ハ行ヨリ二個以上トルヲ得ズ）ノ元素ヲトリコレヲ文字（或ハ數字）ノ順序ニ並ベタル時ハ添加數（或ハ文字）ガ偶順列ナル時ニハ「＋」ノ符號ヲ附ケ，奇順列ナル時ハ「－1」ノ符號ヲ附ケタル代數和ニ等シ」

而シテ定理 2 ニヨリテ行列式ノ項ノ半分ハ「＋」ニシテ他ノ半分ハ「－」ヲ附ケタルモノナリ。

206. **定理 1.** 行列式ノ行 (column) ト列 (row) トヲ交換スルモソノ値ハ變ゼズ。

即チ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \vdots & m_1 \\ a_2 & b_2 & \vdots & m_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & \vdots & m_n \end{vmatrix}$$

證明 第一ノ行列式ノ各項ヲ列ノ元素ノ順序ニ並ベ第二ノ行列式ノ各項ヲ行ノ元素ノ順序ニ並ブル時ハ全ク同一ナル結果ヲ得ベシ。ヨツテ相等シ。

注意 コノ定理ニヨリ列ニ關スル定理ヲ證明スレバ行ニ關スル定理ハ證明スルニ及バズ。行ニ關スル定理ヲ證明スレバ列ニ關スル定理ハ證明スルニ及バズ。

定理 2. 行列式ニ於テ二ツノ列（又ハ行）ヲ交換スレバソノ絕對値ヲ等シクシ符號ヲ異ニス。

證明 今假リニ第 r 列ナル h ノ文字ト第 s 列ナル k ナル文字トヲ交換セリトス。然ルトキハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_r \cdots a_s \cdots a_n \\ b_1 & b_2 \cdots b_r \cdots b_s \cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ h_1 & h_2 \cdots h_r \cdots h_s \cdots h_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k_1 & k_2 \cdots k_r \cdots k_s \cdots k_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 \cdots m_r \cdots m_s \cdots m_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_r \cdots a_s \cdots a_n \\ b_1 & b_2 \cdots b_r \cdots b_s \cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k_1 & k_2 \cdots k_r \cdots k_s \cdots k_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ h_1 & h_2 \cdots h_r \cdots h_s \cdots h_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 \cdots m_r \cdots m_s \cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證明セントス。

左邊ノ行列式ヲ $\varDelta$，右邊ノ行列式ヲ $\varDelta'$ トシ，コレ等ヲ列ノ元素ノ順序ニ並ベタリトスレバ

$$\varDelta = \Sigma(\pm a_\alpha b_\beta \cdots\cdots h_\lambda \cdots\cdots k_\mu \cdots\cdots)$$
$$\varDelta' = \Sigma(\pm a_\alpha b_\beta \cdots\cdots k_\lambda \cdots\cdots h_\mu \cdots\cdots)$$

但シ複符號ハ $\alpha\beta \cdots\cdots \lambda \cdots\cdots \mu$ ハ偶順列ナラバ「＋」ヲトリ，奇順列ナラバ「－」ヲトルモノトス

然ル時ハ $\varDelta$ 中ノ項 $a_\alpha b_\beta \cdots\cdots h_\lambda \cdots\cdots k_\mu \cdots\cdots$ ト $\varDelta'$ 中ノ項 $a_\alpha b_\beta \cdots\cdots k_\lambda \cdots\cdots h_\mu \cdots\cdots$ 即チ $a_\alpha b_\beta \cdots\cdots h_\mu \cdots\cdots k_\lambda \cdots$ トハ同ジ符號ヲ有ス。然ルニ添加數 $\alpha\beta \cdots\cdots \lambda \cdots\cdots \mu \cdots\cdots$ ト $\alpha\beta \cdots\cdots \mu \cdots\cdots \lambda \cdots\cdots$ トハ μ ト λ トノ位置交換セルヲ以テ，一ツハ偶順列ナラバ他ハ奇順列ナリ。故ニ $\varDelta$ 中ニ於テハ $a_\alpha b_\beta \cdots\cdots h_\lambda \cdots\cdots k_\mu \cdots\cdots$ ト $a_\alpha b_\beta \cdots\cdots k_\lambda \cdots\cdots h_\mu \cdots\cdots$ トハ符號相反ス。約言スレバ $\varDelta$ ノ中ノ凡テノ項ハ $\varDelta'$ ノ凡テノ項ト符號ヲ異ニス。即チ

$$\varDelta = -\varDelta'$$

定理 3. 二ツノ列（又ハ行）ノ相等シキ行列式ハ零ナリ。

證明 第 r 列ト第 s 列トハ全ク相等シキモノトセヨ，コノ二列ヲ交換スレバ定理 2 ニヨリテソノ符號ヲ變ズ。然ルニ假定ニヨリテコノ二列全ク相等

シキガ故ニ列ノ交換ニヨリテ行列式ハ變ゼズ。ヨツテ行列式ノ値ハ零ナリ。

例 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$ ナルコトヲ證セヨ。

解 a ノ代リニ b ト置ケバ二列相等シクナルガ故ニコノ行列式ノ値ハ零ナリ。即チ剩餘定理ニヨリテ $a-b$ ニテ割リ切ラル。同様ニ $(b-c)$ 及ビ $(c-a)$ モ又因數ナリ。然ルニコノ行列式ハ三次ナルガ故ニ，コレヨリ他ニ因數アルコトナシ。ソコデ係數ヲ考フルニ主項ハ bc^2 ニシテ $(a-b)(b-c)(c-a)$ ヨリモ bc^2 ヲ得。ヨツテ求ムル係數ハ 1 ナリ。即チ問題ハ解カレタリ。

207. 小行列式，行列式ノ或元素ヲ含ム行ト列トヲ取リ去ツテ作レル行列式ヲ其ノ元素ニ關スル小行列式 (Minor) トイフ。

例ヘバ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ニ於テ a_1 ニ關スル小行列式ハ $\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ニシテ，b_3 ニ關スル小行列式ハ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ ナリ。

前者ハ a_1 ニ關スル小行列式ナルガ故ニ之ヲ簡單ニ $\varDelta a_1$ ト記號シ，後者ハ b_3 ニ關スル小行列式ナルガ故ニ之ヲ $\varDelta_{b_3}$ ト記號ス。

定理 4.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix} = a_1\varDelta_{a_1} - a_2\varDelta_{a_2} + a_3\varDelta_{a_3} - \cdots\cdots + (-1)^{n-1}a_n\varDelta_{a_n}$$

ナリ。

證明 與ヘラレタル行列式ニ於テ a_1 ヲ含ム項ヲ考フルニ第二列以下ニ於テハ第一行ノ元ヲトルコトヲ許サザルニヨリ其和ハ $a_1\varDelta_{a_1}$ ナルコト明カナリ。

次ニ行列式ノ第一行ト第二行トヲ交換スルト

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_2 & b_1 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_2 & m_1 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナルヲ以テ a_2 ヲ含ム項ノ和ハ $-a_2\varDelta_{a_2}$ ナリ。

次ニ第三行ト第二行トヲ交換シ，更ニ第一行ト交換スルト。

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \cdots\cdots a_n \\ b_3 & b_1 & b_2 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_3 & m_1 & m_2 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナルヲ以テ a_3 ヲ含ム項ノ和ハ $a_3\varDelta_{a_3}$ ナリ。

同様ニシテ考フレバ與ヘラレタル行列式ハ

$$\varDelta = a_1\varDelta_{a_1} - a_2\varDelta_{a_2} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}a_n\varDelta_{a_n}$$

ナリ。

注意 上ノ定理ハ n 次ノ行列式ノ値ヲ求ムル代リニ $(n-1)$ 次ノ行列式ヲ求ムルコトニ歸スルコトヲ示スモノナリ。

系 行若シクハ列ノ交換ニヨリテ次ノ等式ヲ得

$$\varDelta = -b_1\varDelta_{b_1} + b_2\varDelta_{b_2} - \cdots\cdots + (-1)^n b_n\varDelta_{b_n}$$

$$\varDelta = a_1\varDelta_{a_1} - b_1\varDelta_{b_1} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}m_1\varDelta_{m_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

208. 行列式

$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 \cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2 & m_3 \cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$ ヲ屢々次ノ如ク展開スルコトアリ

$$\varDelta = a_1\mathrm{A}_1 + a_2\mathrm{A}_2 + a_3\mathrm{A}_3 + \cdots\cdots + a_n\mathrm{A}_n$$

$$\varDelta=b_1\mathrm{B}_1+b_2\mathrm{B}_2+b_3\mathrm{B}_3+\cdots\cdots b_n\mathrm{B}_n$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又ハ

$$\varDelta=a_1\mathrm{A}_1+b_1\mathrm{B}_1+\cdots\cdots+m_1\mathrm{M}_1$$

$$\varDelta=a_2\mathrm{A}_2+b_2\mathrm{B}_2+\cdots\cdots+m_2\mathrm{M}_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

卽チ A_1 トハ $\varDelta$ ニ含マル、a_1 ノ係數ノ代數和ニシテ，B_1 トハ b_1 ノ係數ノ代數和ナリ。ヨツテ小行列式トノ關係ハ次ノ如シ。

$$\mathrm{A}_1=\varDelta_{a_1}\qquad \mathrm{A}_2=-\varDelta_{a_2}\qquad \mathrm{A}_3=\varDelta_{a_3}\cdots\cdots$$

$$\mathrm{B}_1=-\varDelta_{b_1}\qquad \mathrm{B}_2=\varDelta_{b_2}\qquad \mathrm{B}_3=-\varDelta_{b_3}\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

是等 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3,\cdots\cdots,\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3,\cdots\cdots$ ヲ夫々 $a_1, a_2, a_3,\cdots\cdots,b_1, b_2, b_3\cdots\cdots$ ノ餘因數トイフ

定理 5. 或一列(又ハ一行)ノ元素ハ悉ク零ナル時ハ其行列式ハ零ナリ。

證明 第一列ノ元素悉ク零ナリト假定セン。定理 4 ニ示スガ如ク第一列ニ沿ヒテ展開スレバ

$$\varDelta=0\varDelta_{a_1}-0\varDelta_{a_2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}0\varDelta_{a_n}$$

ヨツテ零ナリ。

若シ第 r 列(又ハ第 r 行)ノ元素悉ク 0 ナル時ハ定理 4 ノ系ニヨリ行列式ノ値ガ零ナルコトヲ知ル。

定理 6. 或一列(又ハ一行)ノ各元素ニ同一ノ數 k ヲ乘ズレバ行列式モ亦 k 倍セラル。

證明 n 次ノ行列式ニ於テ，第 r 列ノ各元素ニ同一ノ數 k ヲ乘ジタリトセヨ。然ラバ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ kh_1 & kh_2\cdots\cdots kh_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ m_1 & m_1\cdots\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_2 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ h_1 & h_2\cdots\cdots h_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證セバ可ナリ。今左邊ノ行列式ヲ $\varDelta$ トスレバ

$$\varDelta=\Sigma(\pm a_\alpha b_\beta\cdots\cdots kh_\lambda\cdots\cdots m_n)$$
$$=k\Sigma(\pm a_\alpha b_\beta\cdots\cdots h_\lambda\cdots\cdots m_n)$$

玆ニ複符號ハ $\alpha\ \beta\cdots\cdots\lambda\cdots\cdots n$ ハ偶順列ナラバ「＋」ヲ附ケ，奇順列ナラバ「−」ヲ附ケルモノトス。故ニ

$$\varDelta=k\begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ h_1 & h_2\cdots\cdots\cdots h_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナリ。

定理 7. 行列式ノ一行(又ハ一列)ハ悉ク二個ノ數ノ和ヨリ成ル時ハ之ヲ二ツノ行列式ニ分ツコトヲ得。

證明

$$\begin{vmatrix} a_1+a'_1 & a_2+a'_2\cdots\cdots a_n+a'_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_1\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots m_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2\cdots a'_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證明セントス。

左邊ノ行列式ハ定理 4 ニヨリテ

$$(a_1+a'_1)\Delta_{a_1+a'_1}-(a_2+a'_2)\Delta_{a+a'_2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(a_n+a'_n)\Delta_{a_n+a'_n}$$

ヨツテ之ヲ二部ニ分ツト

$$a_1\Delta_{a_1+a'_1}-a_2\Delta_{a_2+a'_2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a_n\Delta_{a_n+a'_n}$$

及ビ

$$a'_1\Delta_{a_1+a'_1}-a'_2\Delta_{a_2+a'_2}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}a'_n\Delta_{a_n+a'_n}$$

コレハ定理 4 ニヨリ夫々

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix} \text{及ビ} \begin{vmatrix} a'_1 & a'_2\cdots\cdots a'_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix} \text{ナリ。}$$

注意 上ノ定理ノ逆トシテ二個ノ行列式ヲ 1 個ノ行列式ニ化スルコトヲ得。

定理 8. 行列式ニ於テ或列(又ハ行)ノ元素ニ他ノ列(又ハ行)ノ各々ノ元素ニ同一ノ數ヲ掛ケタルモノヲ加フルモ其ノ値ハ變ラズ。

證明

$$\begin{vmatrix} a_1+pb_1 & a_2+pb_2\cdots\cdots a_n+pb_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots\cdots\cdots m_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證明センニ定理 7 ニヨリ

$$\text{左邊ノ行列式} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pb_1 & pb_2\cdots\cdots pb_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix} + p\begin{vmatrix} b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ニシテ最後ノ行列式ハ同一ノ二列ヲ有スルガ故ニソノ値零ナリ。ヨツテ證明セラレタリ。

注意 上ノ證明ハ第一列ニ第二列ノ p 倍ヲノミ加ヘタルモノニ就キテ述ベシト雖モ，一般ニ任意ノ列(又ハ行)ニ他ノ幾ツカノ列(又ハ行)ニ夫々 $p, q, r \cdots\cdots$ ヲ乘ジタルモノヲ加フルモ尙其ノ値ハ變ゼズ。

例 1. $\begin{vmatrix} 18 & 13 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ナルコトヲ證セヨ。

解 第三列ニ -4 ヲ乘ジ，之ヲ夫々第一列ニ加フレバ第二列ト同一トナル。ヨツテ所設ノ行列式ハ零ナリ。

例 2. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 16 & -2 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$ ナルコトヲ證セヨ。

解 第三行ニ 2 ヲ掛ケ夫レニ第一行ニ -1 ヲ掛ケタルモノヲ加フレバ第二行ト全ク同一ノモノヲ得。ヨツテ行列式ノ値ハ零ナリ。

例 3. $\begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 11 & 5 \\ 13 & 3 & 2 & 16 \end{vmatrix} = 0$ ナルコトヲ證セヨ。

解 第三列ヨリ第二列ヲ減ジ，第四列ヨリ第一列ヲ減ズレバ，

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 12 & -12 & -12 & 12 \end{vmatrix} = 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

第四列ニ第三列ヲ加フレバ，一列悉ク零トナル。卽チ

$$\Delta = 48 \begin{vmatrix} 1 & 15 & 14 & 4 \\ 12 & 6 & 7 & 9 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

例 4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{vmatrix} = xyz$ ナルコトヲ證セヨ。

解 與ヘラレタル行列式ニ於テ $x=0$ ト置ケバ最初ノ二ツノ行ハ相等シクナルガ故ニ行列式ノ値ハ零トナル。故ニ x ナル因數アリ。同樣ニ y, z ノ因數アルコトヲ知ル。而シテ與ヘラレタル行列式ハ三次ノモノナルガ故ニ

$$\varDelta = \mathrm{L}xyz$$

而シテ xyz ノ係數ヲ比ブルコトニヨリ $\mathrm{L}=1$ ナルコトヲ知ル。

例 5. $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$ ヲ計算セヨ。

解 各列ヲ夫々 a, b, c, d ニテ除スレバ。

$$\varDelta = abcd \begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1, & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d}, & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

第一列ニ他ノ三列ヲ加ヘテ括ルト

$$\varDelta = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

第二, 第三, 第四列ニ夫々 b, c, d ヲ乘ズレバ

$$\varDelta = \frac{abcd}{bcd}\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

例4ニヨルト最後ノ行列式ノ値ハ bcd ナルヲ以テ, 所要ノ値ハ $abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$ ナリ。

例 6. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3+yzu \\ 1 & y & y^2 & y^3+zux \\ 1 & z & z^2 & z^3+uxy \\ 1 & u & u^2 & u^3+xyz \end{vmatrix} = 0$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 二ツノ行列式ノ和ニ直スニ

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & yzu \\ 1 & y & y^2 & zux \\ 1 & z & z^2 & uxy \\ 1 & u & u^2 & xyz \end{vmatrix}$$

第二ノ行列式ノ各列ニ夫々 x, y, z, u ヲ乘ジ第四行ヲ $xyzu$ ニテ除スレバ,

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 & 1 \\ y & y^2 & y^3 & 1 \\ z & z^2 & z^3 & 1 \\ u & u^2 & u^3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & z^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & u & u^2 & u^3 \end{vmatrix} = 0$$

例 7. $\begin{vmatrix} (b+c)^2 & a^2 & a^2 \\ b^2 & (c+a)^2 & b^2 \\ c^2 & c^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3$ ナルコトヲ證明セヨ。

解　各行ヨリ第三行ヲ減ズレバ

$$\varDelta = \begin{vmatrix} (b+c)^2-a^2 & 0 & a^2 \\ 0 & (c+a)^2-b^2 & b^2 \\ c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ c-a-b & c-a-b & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} b+c-a & 0 & a^2 \\ 0 & c+a-b & b^2 \\ -2b & -2a & 2ab \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a+b+c)^2}{ab} \begin{vmatrix} a(b+c-a) & 0 & a^2 \\ 0 & b(c+a-b) & b^2 \\ -2ab & -2ab & 2ab \end{vmatrix}$$

第一行，第二行ニ，第三行ヲ加ヘルト

$$\varDelta = \frac{(a+b+c)^2}{ab} \begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 & a^2 \\ b^2 & b(c+a) & b^2 \\ 0 & 0 & 2ab \end{vmatrix}$$

第三列ニ沿ヒテ展開スルト

$$\varDelta = \frac{(a+b+c)^2}{ab} 2ab \begin{vmatrix} a(b+c) & a^2 \\ b^2 & b(c+a) \end{vmatrix} = 2abc(a+b+c)^3$$

例 8. $\begin{vmatrix} a, & b, & b, & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -a(a-b)^3$ ナルコトヲ證セヨ。

解　各列ヨリ第二列ヲ減ズレバ

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b-a & 0 \\ a & b & a & b \\ 0 & a-b & b-a & a-b \\ b-a & 0 & b-a & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^3 \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ a & b & a & b \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

次ニ第一列ニ沿ヒテ展開スレバ

$$\varDelta = -(a-b)^3 \begin{vmatrix} a & b & b \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -a(a-b)^3$$

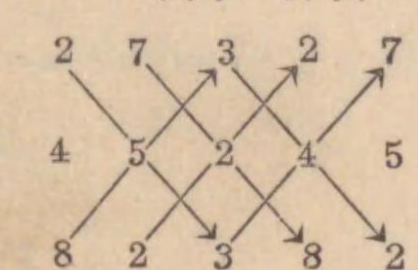
第一章　問題

1. $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ヲ計算セヨ。

解　定理 4 ニヨリ。

$$2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 2(15-4)-7(12-16)+3(8-40) = -46$$

別解　三次ノ行列式ニテハ簡單ニ算出スル方法アリ。



圖ニ於テ↘ノ積ヨリ↗ノ積ノ和ヲ減ズレバヨシ。

即チ　$30+112+24-120-8-84=-46$

コノ方法ヲさるーす (Sarrus) ノ展開法トイフ。

2. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix}$ ヲ計算セヨ。

3. $\begin{vmatrix} 10 & 8 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ヲ計算セヨ。

4. ω_1, ω_2 ヲ 1 ノ虚根ヲ含メル三乘根トスレバ

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega_1 & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 1 \\ \omega_2 & 1 & \omega_1 \end{vmatrix}=0$$ ナルコトヲ證セヨ。

5. 行列式 $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$

ヲ第一行ニ沿ヒテ展開スルモ第一列ニ沿ヒテ展開スルモ同一ノ結果ヲ得ルコトヲ示セ。

次ノ各行列式ノ値ヲ求メヨ。(6—13)

6. $\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$ 7. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+x \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & \omega^3 & \omega^2 \\ \omega^3 & 1 & \omega \\ \omega^2 & \omega & 1 \end{vmatrix}$ 10. $\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix}$

解 第一行ニ第二, 第三行ヲ加フレバ各元素ハ悉ク零トナル。仍ツテ行列式ノ値ハ零ナリ。

次ノ各行列式ノ値ヲ求メヨ。

11. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & 0 & 1 & a \\ a & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

解 第一行ニ各行ヲ加ヘルト

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+a+a^2 & a & a^2 & 0 \\ 1+a+a^2 & 1 & a & a^2 \\ 1+a+a^2 & 0 & 1 & a \\ 1+a+a^2 & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=(1+a+a^2)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & 0 \\ 1 & 1 & a & a^2 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 1 & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第一列ヨリ第二列ヲ, 第二列ヨリ第三列ヲ, 第三列ヨリ第四列ヲ減ズレバ,

$$\Delta=(1+a+a^2)\begin{vmatrix} 0 & a-1 & a^2-a & -a^2 \\ 0 & 1 & a-1 & a^2-a \\ 0 & -a^2 & 1 & a-1 \\ 1 & a^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

第一行ニ沿ヒテ展開スレバ

$$\Delta=-(1+a+a^2)\begin{vmatrix} a-1 & a^2-a & -a^2 \\ 1 & a-1 & a^2-a \\ -a^2 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

第一列ニ第三列ヲ加フルト

$$\Delta=-(1+a+a^2)\begin{vmatrix} -a^2+a-1 & a^2-a+1 & -a^2+a-1 \\ 1 & a-1 & a^2-a \\ -a^2 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

$$=-(1+a+a^2)(1-a+a^2)\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & a-1 & a^2-a \\ -a^2 & 1 & a-1 \end{vmatrix}$$

第一行ニ第二行ヲ加ヘ, 第二行ニ第三行ヲ加フレバ

$$\Delta=-(1+a^2+a^4)\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ a & a^2-1 & a^2-a \\ 1-a^2 & a & a-1 \end{vmatrix}=(1+a^2+a^4)\begin{vmatrix} a & a^2-1 \\ 1-a^2 & a \end{vmatrix}$$

$$=(1+a^2+a^4)(1-a^2+a^4)=(1+a^4+a^8)$$

12. $\begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ca \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ca & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$

解 第一行ニ沿ヒテ展開スレバ

$$\Delta=(b^2+c^2)\begin{vmatrix} c^2+a^2 & bc \\ bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}-ab\begin{vmatrix} ab & ca \\ bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}+ca\begin{vmatrix} ab & ca \\ c^2+a^2 & bc \end{vmatrix}$$

$$=a^2(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2)-a^2b^2(a^2+b^2-c^2)+c^2a^2(b^2-c^2-a^2)$$

$$=4a^2b^2c^2$$

13. $\begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac & ad \\ ba & b^2+1 & bc & bd \\ ca & cb & c^2+1 & cd \\ da & db & dc & d^2+1 \end{vmatrix}$

解 各列ヲ夫々 a, b, c, d ＝テ除スレバ

$$\varDelta=abcd\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c & d \\ a & b+\frac{1}{b} & c & d \\ a & b & c+\frac{1}{c} & d \\ a & b & c & d+\frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

第二列ヨリ第一列ヲ，第三列ヨリ第二列ヲ，第四列ヨリ第三列ヲ減ジ然ル後各行＝夫々 a, b, c, d ヲ乘ズレバ

$$\varDelta=abcd\begin{vmatrix} a+\frac{1}{a} & b & c & d \\ -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c} & \frac{1}{d} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

次＝第一行＝各行ヲ加フレバ

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2+1 & b^2 & c^2 & d^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

第一行＝沿ヒテ展開スレバ

$$\varDelta=(a^2+b^2+c^2+d^2+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=a^2+b^2+c^2+d^2+1$$

次ノ各行列式ヲ因數＝分解セヨ (14—18)

14. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$　15. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ yz & zx & xy \end{vmatrix}$　16. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$　18. $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$

解 先ヅ第一行＝他ノ行ヲ加ヘルト，$x+y+z$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル。次＝第一行＝第四行ヲ加ヘ第二，第三行ヲ引クト

$$\varDelta=\begin{vmatrix} z-x-y & x & y & z \\ x+y-z & 0 & z & y \\ x+y-z & z & 0 & x \\ z-x-y & y & x & 0 \end{vmatrix}$$

トナルヲ以テ $\varDelta$ ハ $x+y-z$ ナル因數ヲ有ス。次＝第一行＝第二行ヲ加ヘ第三第四行ヲ引クト $y+z-x$ ナル因數ヲ有スルコトヲ知ル。同樣＝ $z+x-y$ ナル因數ヲ有スルヲ以テ

$$\varDelta=\mathrm{L}(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)\cdots\cdots\cdots(1)$$

玆＝ $\varDelta$ ハ四次式ナルヲ以テ L ハ數係數ナリ。サテ L ヲ定メン＝，$x=1$, $y=0$, $z=0$ ト置クトキハ (1) ヨリ

$$-1=-\mathrm{L} \qquad \therefore\ \mathrm{L}=1$$

ヨツテ所要ノ答ハ

$$(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

ナリ。

19. a, b, c ハ何レノ二ツモ相等シカラズシテ

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4-1 \\ b & b^3 & b^4-1 \\ c & c^3 & c^4-1 \end{vmatrix}=0$$

ナル時ハ $abc(bc+ca+ab)=a+b+c$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 假設＝ヨリ二ツノ行列式＝直ス時ハ

$$\begin{vmatrix} a & a^3 & a^4 \\ b & b^3 & b^4 \\ c & c^3 & c^4 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a & a^3 & 1 \\ b & b^3 & 1 \\ c & c^3 & 1 \end{vmatrix}=0$$

然ル＝初メノ行列式ヲ $\varDelta$ トスレバ

$$\Delta=abc\begin{vmatrix}1 & a^2 & a^3\\ 1 & b^2 & b^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}=abc\begin{vmatrix}0 & a^2-b^2 & a^3-b^3\\ 0 & b^2-c^2 & b^3-c^3\\ 1 & c^2 & c^3\end{vmatrix}$$

$$=abc(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}a+b & a^2+ab+b^2\\ b+c & b^2+bc+c^2\end{vmatrix}$$

$$=abc(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)$$

又後ノ行列式ヲ Δ' トスレバ

$$\Delta'=\begin{vmatrix}a-b & a^3-b^3 & 0\\ b-c & b^3-c^3 & 0\\ c & c^3 & c\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)\begin{vmatrix}1 & a^2+ab+b^2\\ 1 & b^2+bc+c^2\end{vmatrix}$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

故ニ　$abc(a-b)(b-c)(c-a)(ab+bc+ca)=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

然ルニ假定ニヨリ $(a-b)(b-c)(c-a)\neq 0$ ナルニヨリ $abc(ab+bc+ca)=a+b+c$

20. $\begin{vmatrix}u+a^2x & w'+abx & v'+acx\\ w'+abx & v+b^2x & u'+bcx\\ v'+acx & u'+bcx & w+c^2x\end{vmatrix}=0$ ナル時ハ

$$x\begin{vmatrix}u & w' & v' & a\\ w' & v & u' & b\\ v' & u' & w & c\\ a & b & c & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u & w' & v'\\ w' & v & u'\\ v' & u' & w\end{vmatrix}$$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $$\begin{vmatrix}u+a^2x & w'+abx & v'+acx\\ w'+abx & v+b^2x & u'+bcx\\ v'+acx & u'+bcx & w+c^2x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}u & w' & v'\\ w' & v & u'\\ v' & u' & w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u & abx & v'\\ w' & b^2x & u'\\ v' & bcx & w\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}u & abx & acx\\ w' & b^2x & bcx\\ v' & bcx & c^2x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}u & w' & acx\\ w' & v & bcx\\ v' & u' & c^2x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2x & w' & v'\\ abx & v & u'\\ acx & u' & w\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2x & abx & v'\\ abx & b^2x & u'\\ acx & bcx & w\end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix}a^2x & abx & acx\\ abx & b^2x & bcx\\ acx & bcx & c^2x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a^2x & u & acx\\ abx & v & bcx\\ acx & u' & c^2x\end{vmatrix}$$

コノ八ツノ行列式ノ中第三，第六，第七，第八ノ四ツハ零トナルガ故ニ

$$\begin{vmatrix}u & w' & v'\\ w' & v & u'\\ v' & u' & w\end{vmatrix}+bx\begin{vmatrix}u & a & v'\\ w' & b & u'\\ v' & c & w\end{vmatrix}+cx\begin{vmatrix}u & w' & a\\ w' & v & b\\ v' & u' & c\end{vmatrix}+ax\begin{vmatrix}a & w' & v'\\ b & v & u'\\ c & u' & w\end{vmatrix}=0$$

サテ後ノ三ツノ行列式ヲ一ツニ纒メルト

$$-x\begin{vmatrix}u & w' & v' & a\\ w' & v & u' & b\\ v' & u' & w & c\\ a & b & c & 0\end{vmatrix}$$

トナルヲ以テ本題ハ解決ス。

21. $$\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & b_1 & b_2\end{vmatrix}$$ ナルコトヲ證セヨ。

22. 行列式ニ於テ二ツノ行(又ハ列)ノ相對應セル元ハ互ニ比例ヲナス時ハ其ノ行列式ハ零ナルコトヲ證セヨ。

互に正比例なす

23. $\begin{vmatrix}a & b & x\\ b & 2a+b & 2x\\ x & 2x & 3(a+b)\end{vmatrix}=0$ ニ適スル x ノ値ヲ求ム。

解 $$\Delta=\begin{vmatrix}x+a+b & 2x+2a+2b & 3x+3(a+b)\\ b & 2a+b & 2x\\ x & 2x & 3(a+b)\end{vmatrix}$$

$$=(a+b+x)\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ b & 2a+b & 2x\\ x & 2x & 3(a+b)\end{vmatrix}$$

第一行ノ二倍ヲ第二行ヨリ減ジ，第一行ノ三倍ヲ第三行ヨリ減ズレバ

$$=(a+b+x)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ b & 2a-b & 2x-3b\\ x & 0 & 3(a+b)-3x\end{vmatrix}$$

$$=(x+a+b)\begin{vmatrix}2a-b & 2x-3b\\ 0 & 3(a+b)-3x\end{vmatrix}=3(2a-b)(x+a+b)(a+b-x)=0$$

$\therefore$　$2a \neq b$ ナラバ $x=-(a+b)$ 又ハ $(a+b)$

$2a=b$ ナラバ　不定ナリ。

24. $\begin{vmatrix} a & a & x \\ b & b & b \\ c & x & c \end{vmatrix}=0$ ヲ解ケ

x=a
x=c

25. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & x & x \\ x & x & a & x \\ x & x & x & a \end{vmatrix}=0$　ハ等根ヲ有スルコトヲ證セヨ。

26. 行列式

$$\varDelta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2\cdots\cdots a_n \\ b_1 & b_2\cdots\cdots b_n \\ c_1 & c_2\cdots\cdots c_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ m_1 & m_2\cdots\cdots m_n \end{vmatrix}$$

ニ於テ $b_1, b_2\cdots\cdots c_1, c_2\cdots\cdots$ ノ係因數ヲ夫々 $B_1, B_2, \cdots$ $C_1, C_2, \cdots\cdots$ トスレバ

$$a_1B_1+a_2B_2+\cdots\cdots+a_nB_n=0,\quad b_1B_1+b_2B_2+\cdots\cdots+b_nB_n=\varDelta$$
$$c_1B_1+c_2B_2+\cdots\cdots+c_nB_n=0,\quad a_1C_1+a_2C_2+\cdots\cdots+a_nC_n=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

第二章

行列式ノ乘法

209. 先ヅ吾人ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+b_1\beta_1+c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2+b_1\beta_2+c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3+b_1\beta_3+c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1+b_2\beta_1+c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2+b_2\beta_2+c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3+b_2\beta_3+c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1+b_3\beta_1+c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2+b_3\beta_2+c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3+b_3\beta_3+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證セントス。

右邊ノ行列式ヲ分解シテ 27 個ノ行列式ノ和トナスコトヲ得。ソノ中

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & a_1\alpha_2 & a_1\alpha_3 \\ a_2\alpha_1 & a_2\alpha_2 & a_2\alpha_3 \\ a_3\alpha_1 & a_3\alpha_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}=\alpha_1\alpha_2\alpha_3\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 \end{vmatrix}=0$$

ノ如ク三行悉ク相等シキモノ都合 3 個アリ。何レモ零ナリ。又

$$\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}=\alpha_1\beta_2\beta_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & b_3 \end{vmatrix}=0$$

ノ如ク二行相等シキモノ都合 18 個アリ何レモ零ナリ。而シテソノ殘リハ次ノ6個ナリ。

(1) $\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & b_1\beta_2 & c_1\gamma_3 \\ a_2\alpha_1 & b_2\beta_2 & c_2\gamma_3 \\ a_3\alpha_1 & b_3\beta_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a_1\alpha_1 & c_1\gamma_2 & b_1\beta_3 \\ a_2\alpha_1 & c_2\gamma_2 & b_2\beta_3 \\ a_3\alpha_1 & c_3\gamma_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$

而シテソノ和ハ $(\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 & c_1\gamma_3 \\ b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 & c_2\gamma_3 \\ b_3\beta_1 & a_3\alpha_2 & c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$　　(4) $\begin{vmatrix} b_1\beta_1 & c_1\gamma_2 & a_1\alpha_3 \\ b_2\beta_1 & c_2\gamma_2 & a_2\alpha_3 \\ b_3\beta_1 & c_3\gamma_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}$

而シテソノ和ハ $(-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} c_1\gamma_1 & a_1\alpha_2 & b_1\beta_3 \\ c_2\gamma_1 & a_2\alpha_2 & b_2\beta_3 \\ c_3\gamma_1 & a_3\alpha_2 & b_3\beta_3 \end{vmatrix}$ (6) $\begin{vmatrix} c_1\gamma_1 & b_1\beta_2 & a_1\alpha_3 \\ c_2\gamma_1 & b_2\beta_2 & a_2\alpha_3 \\ c_3\gamma_1 & b_3\beta_2 & a_3\alpha_3 \end{vmatrix}$

而シテソノ和ハ $(\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_3\beta_2\gamma_1)\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ヨツテコレ等ノ總和ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\times(\alpha_1\beta_2\gamma_3-\alpha_1\beta_3\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_3\beta_2\gamma_1)$$

ニシテコレハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ニ等シク且ツ行ト列トヲ入レ換フルモソノ値ハ變ゼザルガ故ニ，結局ハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

ナリ。

同様ニシテ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+a_3\alpha_3 & a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3 & a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3 \\ b_1\alpha_1+b_2\alpha_2+b_3\alpha_3 & b_1\beta_1+b_2\beta_2+b_3\beta_3 & b_1\gamma_1+b_2\gamma_2+b_3\gamma_3 \\ c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+c_3\alpha_3 & c_1\beta_1+c_2\beta_2+c_3\beta_3 & c_1\gamma_1+c_2\gamma_2+c_3\gamma_3 \end{vmatrix}$$

ナルコトヲ證スルヲ得。前ノ方法ヲ行ト行トノ乘法トイヒ。此ノ方法ヲ列ト列トノ乘法トイフ。三次以上ノ行列式ノ乘積モ又同樣ナリ。

例 $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$ ヲ計算セヨ。

解 行ト行トノ乘法ヲ實行スレバ

$$\begin{vmatrix} 5+1, & -10, & 15+2-6 \\ 1-2, & -2, & 3-4-3 \\ 2-3, & -4, & 6-6-9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 6, & -10, & 11 \\ -1, & -2, & -4 \\ -1, & -4, & -9 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 6 & -5 & 11 \\ -1 & -1 & -4 \\ -1 & -2 & -9 \end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix} 6 & -5 & 11 \\ -1 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -5 \end{vmatrix}=84$$

210. 定理 1. $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\neq 0$ ニシテ $a_1, a_2\cdots\cdots$ ノ餘因數ヲ

$A_1, A_2\cdots\cdots$ トスレバ $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\Delta^2$ ナリ。

證明 列ト列トノ乘法ヲ施ストキハ

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3 & a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3 & a_1C_1+a_2C_2+a_3C_3 \\ b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_1C_1+b_2C_2+b_3C_3 \\ c_1A_1+c_2A_2+c_3A_3 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3 \end{vmatrix}$$

然ルニ

$$a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3=\Delta$$
$$b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3=\Delta$$
$$c_1C_1+c_2C_2+c_3C_3=\Delta$$

及ビ

$$a_1B_1+a_2B_2+a_3B_3=0$$
$$b_1A_1+b_2A_2+b_3A_3=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故ニ右邊ハΔ^3トナル。然ルニ與ヘラレタル行列式ガ零ナラザルガ故ニ，兩邊ヲΔニテ除スレバ

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=\Delta^2$$

211. 定理 2. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$ ナルトキハ

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$$

ナリ。

證明 $A_1=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$$\therefore\ A_1B_1B_2B_3=\begin{vmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ b_1B_1 & b_2B_2 & b_3B_3 \\ c_1B_1 & c_2B_2 & c_3B_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} B_1 & B_1 & 0 \\ b_1B_1 & b_1B_1+b_2B_2+b_3B_3 & b_3B_3 \\ c_1B_1 & c_1B_1+c_2B_2+c_3B_3 & c_3B_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} B_1 & B_1 & 0 \\ b_1B_1 & 0 & b_3B_3 \\ c_1B_1 & 0 & c_3B_3 \end{vmatrix}=B_1^2B_3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ b_1 & 0 & b_3 \\ c_1 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=-B_1^2B_3\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}=-B_1^2B_3\Delta a_2$$

然ルニ

$$\Delta a_2=-A_2$$

$\therefore\quad A_1B_1B_2B_3=B_1^2B_3A_2$ 從ッテ $A_1B_2=B_1A_2$

ヨツテ

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}$$

同樣ニシテ $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_3}{B_3}$

故ニ $\dfrac{A_1}{B_1}=\dfrac{A_2}{B_2}=\dfrac{A_3}{B_3}$

定理 3. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$ ナル時ハ $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=0$

ナリ。

證明 $\Delta=0$ ナルガ故ニ定理2ニヨリテ

$$\frac{A_1}{B_1}=\frac{A_2}{B_2}=\frac{A_3}{B_3}$$

$\therefore\quad A_1=B_1k\quad A_2=B_2k\quad A_3=B_3k$

$$\therefore\quad \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}=0$$

第二章　問題

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ナル積ヲ求メヨ。

2. $\begin{vmatrix} a, & b, & -c \\ -a, & b, & c \\ a, & -b, & c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x, & y, & -z \\ -x, & y, & z \\ x, & -y, & z \end{vmatrix}$ ナル積ヲ求メヨ。

3. $\begin{vmatrix} a & bi \\ bi & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} c & di \\ di & c \end{vmatrix}$ ヲ求メヨ。

4. $\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2$ ナル積ヲ求メヨ。

5. $\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{vmatrix}$ ハ又 $\begin{vmatrix} \mathrm{P} & \mathrm{Q} & \mathrm{R} \\ \mathrm{R} & \mathrm{P} & \mathrm{Q} \\ \mathrm{Q} & \mathrm{R} & \mathrm{P} \end{vmatrix}$ ノ形ニナルコトヲ證セヨ。

6. $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ -c+id & a-ib \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \alpha-i\beta, & \gamma-i\delta \\ -\gamma-i\delta, & \alpha+i\beta \end{vmatrix}$ ガ又 $\begin{vmatrix} \mathrm{A}-i\mathrm{B}, & \mathrm{C}-i\mathrm{D} \\ -\mathrm{C}-i\mathrm{D}, & \mathrm{A}+i\mathrm{B} \end{vmatrix}$

ノ形ニナルコトヲ示シ，併セテおいら一ノ定理ト呼バル、

$(a^2+b^2+c^2+d^2)(p^2+q^2+r^2+s^2)=(ap+bq+cr+ds)^2+(br-cq+as-dp)^2$
$+(cp-ar+bs-dq)^2+(aq-bp+cs-dr)^2$ ナルコトヲ證セヨ。

7. $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ca-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \Sigma a^3+abc$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & b^2 & c^2 \\ 2ca-b^2 & c^2 & a^2 \\ 2ab-c^2 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}\begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix}$

ニシテ $\begin{vmatrix} -a & c & b \\ c & -b & a \\ b & a & -c \end{vmatrix} = \Sigma a^3+abc$ ナルガ故ニ問題ハ容易ニ解決出來ル。

8. $\begin{vmatrix} x & y & z & w \\ a & b & c & d \\ d & c & b & a \\ w & z & y & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+w & y+z \\ a+d & b+c \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x-w & y-z \\ a-d & b-c \end{vmatrix}$ ナルコトヲ證セヨ。

9. $l^2+m^2+n^2=l'^2+m'^2+n'^2=l''^2+m''^2+n''^2=1$

$ll'+mm'+nn'=l'l''+m'm''+n'n''=ll''+mm''+nn''=0$ ナル時ハ

$\varDelta=\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}=\pm1$ ナルコトヲ證シ且ツ

$l=\pm\mathrm{L},\quad m=\pm\mathrm{M},\quad n=\pm\mathrm{N},\quad l'=\pm\mathrm{L}'\cdots\cdots\cdots$

ナルコトヲ證セヨ。但シ L, M, N, L'……ハ與ヘラレタル行列式ノ l, m, n, l'……ノ餘因數ナリトス。

解 $\varDelta^2=\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ l'' & m'' & n'' \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} l^2+m^2+n^2 & ll'+mm'+nn' & ll''+mm''+nn'' \\ l'l+m'm+n'n & l'^2+m'^2+n'^2 & l'l''+m'm''+n'n'' \\ l''l+m''m+n''n & l''l'+m''m'+n''n' & l''^2+m''^2+n''^2 \end{vmatrix}$

$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1$

故ニ　$\varDelta=\pm1$

次ニ　$\left.\begin{matrix} ll'+mm'+nn'=0 \\ ll''+mm''+nn''=0 \end{matrix}\right\}$

ヨリ

$$\frac{l}{\begin{vmatrix} m' & n' \\ m'' & n'' \end{vmatrix}}=\frac{m}{\begin{vmatrix} n' & l' \\ n'' & l'' \end{vmatrix}}=\frac{n}{\begin{vmatrix} l' & m' \\ l'' & m'' \end{vmatrix}}$$

即チ

$$\frac{l}{\mathrm{L}}=\frac{m}{\mathrm{M}}=\frac{n}{\mathrm{N}}=\frac{l^2}{l\mathrm{L}}=\frac{m^2}{m\mathrm{M}}=\frac{n^2}{n\mathrm{N}}=\frac{l^2+m^2+n^2}{l\mathrm{L}+m\mathrm{M}+n\mathrm{N}}=\frac{1}{\Delta}$$

$$\therefore\ l=\frac{\mathrm{L}}{\Delta},\quad m=\frac{\mathrm{M}}{\Delta},\quad n=\frac{\mathrm{N}}{\Delta}$$

然ルニ $\Delta=\pm1$ ナルヲ以テ

$$l=\pm\mathrm{L},\quad m=\pm\mathrm{M},\quad n=\pm\mathrm{N}$$

他モ同樣ニシテ證明スルコトヲ得。

10. 前題ノ假定ノ下ニ

$$l^2+l'^2+l''^2=m^2+m'^2+m''^2=n^2+n'^2+n''^2=1$$

$$lm+l'm'+l''m''=mn+m'n'+m''n''=nl+n'l'+n''l''=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $l\mathrm{L}+l'\mathrm{L}'+l''\mathrm{L}''=\Delta$ ニシテ且ツ前題ニヨリ

$$\mathrm{L}=\pm l\quad \mathrm{L}'=\pm l'\quad \mathrm{M}''=\pm l''\quad \Delta=\pm1$$

ヨツテ

$$l^2+l'^2+l''^2=\pm1$$

然ルニ左邊ハ正ノ數ナルガ故ニ複符號ハ「+」ヲトルベシ。

同樣ニシテ

$$m^2+m'^2+m''^2=n^2+n'^2+n''^2=1$$

又

$$lm+l'm'+l''m''=\pm(l\mathrm{M}+l'\mathrm{M}'+l''\mathrm{M}'')$$

而シテ行列式ノ性質ニヨリ

$$l\mathrm{M}+l'\mathrm{M}'+l''\mathrm{M}''=0$$

故ニ

$$lm+l'm'+l''m''=0$$

同樣ニ

$$mn+m'n'+m''n''=nl+n'l'+n''l''=0$$

第三章

行列式ノ應用

212. 本來行列式ハ方程式ノ解法トイフ方面ヨリ其ノ源ヲ發セルモノナリ、依ツテ茲ニ行列式ハ如何ニ方程式ニ應用セラルヽカニ就キテ其一班ヲ窺ハントス。

聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \cdots\cdots (1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \cdots\cdots (2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \cdots\cdots (3)$$

アリトセヨ。之等ニ夫々未知數ノ係數ニテ作レル行列式ノ小行列式 $\Delta a_1, -\Delta a_2, \Delta a_3$ ヲ掛ケテ加フレバ

$$(a_1\Delta a_1-a_2\Delta a_2+a_3\Delta a_3)x+(b_1\Delta a_1-b_2\Delta a_2+b_3\Delta a_3)y$$
$$+(c_1\Delta a_1-c_2\Delta a_2+c_3\Delta a_3)z=d_1\Delta a_1-d_2\Delta a_2+d_3\Delta a_3 \cdots\cdots (4)$$

然ルニ

$$b_1\Delta a_1-b_2\Delta a_2+b_3\Delta a_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

$$c_1\Delta a_1-c_2\Delta a_2+c_3\Delta a_3=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

ナルガ故ニ (4) ハ

$$(a_1\Delta a_1-a_2\Delta a_2+a_2\Delta a_3)x=d_1\Delta_{a_1}-d_2\Delta a_2+d_3\Delta a_3$$

從ツテ

$$x=\frac{d_1\Delta a_1-d_2\Delta a_2+d_3\Delta a_3}{a_1\Delta a_1-a_2\Delta a_2+a_3\Delta a_1}$$

然ルニ

$$a_1\Delta a_1-a_2\Delta a_2+a_3\Delta a_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d_1\Delta a_1-d_2\Delta a_2+d_3\Delta a_3=\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

故ニ

$$x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(5)$$

全ク同様ニシテ

$$y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}\div\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\cdots\cdots\cdots(7)$$

ナリ。

逆ニカクシテ得タル x, y, z ノ値ハ與ヘラレタル方程式 (1). (2) 及ビ (3) ヲ滿足ス。何トナレバ A_1, B_1 等ヲ夫々 a_1, b_1 等ノ餘因數トスレバ x, y, z ハ

$$x=\frac{d_1A_1+d_2A_2+d_3A_3}{\Delta}\qquad y=\frac{d_1B_1+d_2B_2+d_3B_3}{\Delta}$$

$$z=\frac{d_1C_1+d_2C_2+d_3C_3}{\Delta}$$

ト書カル、ガ故ニ，夫等ニ a_1, b_1, c_1 ヲ乘ジテ邊々相加ヘ且ツ

$a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1=\Delta$, $a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2=0\cdots\cdots$ ニ注意スレバ

$$a_1x+b_1y+c_1z=\frac{d_1(a_1A_1+b_1B_1+c_1C_1)}{\Delta}+\frac{d_2(a_1A_2+b_1B_2+c_1C_2)}{\Delta}$$

$$+\frac{d_3(a_1A_3+b_1B_3+c_1C_3)}{\Delta}=d_1$$

トナリテ方程式 (1) ヲ滿足スルヲ知ル。同様ニ (5), (6). (7) ナル値ハ (2) 及ビ (3) ヲ滿足ス。而シテ此理論ハ一般ノ多元聯立方程式ニモ適用セラル。

213. 聯立方程式ノ解ノ吟味

聯立方程式

$$a_1x+b_1y+c_1z=d_1\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$a_2x+b_2y+c_2z=d_2\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$a_3x+b_3y+c_3z=d_3\cdots\cdots\cdots(3)$$

ニ於テ未知數ノ係數ヨリ成ル行列式ガ零ナラザル時ハ一組ノ根ガ存在スルコト前節ニ於テ述ベタリ。今 $\Delta=0$ ナル場合ニ就キテ吟味セン。ソレニハ先ヅ

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

トシ，コレヨリ或一行一列ヲ同時ニ消シテ作ル二次ノ行列式又ハ或二行二列ヲ同時ニ消シテ作ル一次ノ行列式(卽チ係數)ヲ考ヘ之等ヲ A 系統ノ行列式ト名付クベシ。次ニ未知數ノ係數及ビ常數項ヨリ作ル四ツノ三次ノ行列式

$$\Delta,\quad\begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

及ビ之等ヨリ更ニ一行一列，二行二列ヲ同時ニ消去シテ二次，一次ノ行列式ヲ作リ之等ヲ假リニ B 系統ノ行列式ト名付クベシ。

然ル時次ノ重要ナル定理アリ。

定理 1. A 系統ノ中其値ガ零ナラザル行列式ノ中次數ノ最大ナルヲ求メヨ。同樣ニ B 系統ノ中ヨリ其値ガ零ナラザル行列式ノ中次數ノ最大ナルモノヲ求メヨ。然ル時此等ノ次數相等シキ時ハ解ハ不定ニシテ然ラザル時ハ不能ナリ。

證明 (i), B 系統ノ三次ノ行列式ノ中例ヘバ

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

ナル時ハ $\varDelta=0$ ナルヲ以テ，次數相等シカラズ故ニ不能ナリ。何トナレバ(1), (2), (3) ハ解 x', y', z' ヲ有スルト假定スレバ

$$a_1x'+b_1y'+c_1z'=d_1 \qquad a_2x'+b_2y'+c_2z'=d_2$$

$$a_3x'+b_3y'+c_3z'=d_3$$

ナルヲ以テ

$$\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x'+b_1y'+c_1z' & b_1 & c_1 \\ a_2x'+b_2y'+c_2z' & b_2 & c_2 \\ a_3x'+b_3y'+c_3z' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=x'\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+y'\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+z'\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

トナリテ (4) ナル假定ニ反ス。故ニ不能ナリ。

(ii) A, B ニ屬スル三次ノ行列式ハ凡テ零ニシテ，且ツ A 系統中ノ二次ノ行列式例ヘバ

$$\varDelta a_1 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

ナリトスレバ，コノ行列式ハ B 系統ノ中ニモ屬スル故ニ次數相等シキ場合ナリ。從ツテ解ハ不定ナリ。何トナレバ (2), (3) ノ x ニ任意ノ値 k ヲ代入シテ移項スレバ

$$b_2y+c_2z=d_2-a_2k$$

$$b_3y+c_3z=d_3-a_3k$$

而シテ $\varDelta a_1 \neq 0$ ナルガ故ニコレヨリ y, z ノ一組ノ値ヲ得ベシ。即チ

$$y=\frac{\begin{vmatrix} d_2-a_2k & c_2 \\ d_3-a_3k & c_3 \end{vmatrix}}{\varDelta a_1}, \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2k \\ b_3 & d_3-a_3k \end{vmatrix}}{\varDelta a_1}$$

而シテ此等ノ値ハ方程式 (1) ヲモ滿足ス。如何トナレバ假リニ $x=k$ 及ビ上ノ y, z ノ値ニ對シテ

$$a_1k+b_1y+c_1z \neq d_1$$

ナリトスレバ

$$(a_1k+b_1y+c_1z-d_1)\varDelta a_1 \neq 0 \cdots\cdots\cdots(5)$$

トナルベク，而シテコレハ書キカヘル時ハ，

$$(a_1k+b_1y+b_1z-d_1)\begin{vmatrix} b_2, & c_2 \\ b_3, & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1k+b_1y+cz-d_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1k+b_1y+c_1z-d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2k+b_2y+c_2z-d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3k+b_3y+c_3z-d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+y\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

トナリテ (5) ニ反スル結果ヲ得。故ニ此場合ニハ與ヘラレタル方程式ノ解ハ

$$x=k\ (k\ ハ任意)\quad y=\frac{\begin{vmatrix} d_2-a_2k & c_2 \\ d_3-a_3k & c_3 \end{vmatrix}}{\varDelta a_1}, \quad z=\frac{\begin{vmatrix} b_2 & d_2-a_2k \\ b_3 & d_3-a_3k \end{vmatrix}}{\varDelta a_1}$$

ナリ。ヨツテ不定ナリ。

(iii) A 系統ノ三次及ビ二次ノ行列式ハ凡テ零ニシテ B 系統ノ行列式ノ中例ヘバ

$$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} \neq 0 \cdots\cdots\cdots(6)$$

ナル時ハ行列式ノ次數ガ相等シカラザルヲ以テ不能ナリ。何トナレバ若シ少クトモ一ツノ解ガ存在スルトシ夫レヲ x', y', z' トスレバ

$$a_2x'+b_2y'+c_2z'=d_2 \qquad a_3x'+b_3y'+c_3z'=d_3$$

ナルガ故ニ

$$\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_2x'+b_2y'+c_2z' \\ a_3 & a_3x'+b_3y'+c_3z' \end{vmatrix} = x'\begin{vmatrix} a_2 & a_2 \\ a_3 & a_3 \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$+z'\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

トナリテ (6) ニ反スルヲ以テナリ。

注意 二次ノ行列式ハ悉ク零ナル場合ハ各自研究セヨ。

例
$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1 \\ ax+by+cz&=d \\ a^2x+b^2y+c^2z&=d^2 \end{aligned}\right\} \text{ヲ解ケ。}$$

解 前ノ公式ニヨリ x, y, z ノ分母ハ凡テ同一ニシテ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

$$x\text{ ノ分子} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ d & b & c \\ d^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (d-b)(b-c)(c-d)$$

$$y\text{ ノ分子} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & d & c \\ a^2 & d^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-d)(d-c)(c-a)$$

$$z\text{ ノ分子} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-d)(d-a)$$

$$\therefore \quad x = \frac{(d-b)(b-c)(c-d)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(d-b)(c-d)}{(a-b)(c-a)}$$

$$y = \frac{(a-d)(d-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(a-d)(d-c)}{(a-b)(b-c)}$$

$$z = \frac{(a-b)(b-d)(d-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = \frac{(b-d)(d-a)}{(b-c)(c-a)}$$

214. 未知數ヨリモ多クノ方程式ヲ有スルトキ，コレ等ノ方程式ハ同一ノ未知數ノ値ニ對シテ成立スルタメノ條件ヲ求メントス。例ヘバ三元一次方程式

$$a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$
$$a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$
$$a_3x+b_3y=c_3 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

ヲトリテ考フルニ (1) 及ビ (2) ヨリ

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

(1), (2) 及ビ (3) ガ同時ニ成立スルタメニハ (1), (2) ヨリ得タル x, y ノ一組ノ値ハ亦 (3) ヲモ滿足セザルベカラズ。即チコレ等ノ値ヲ (3) ニ代入スレバ

$$-a_3\frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} + b_3\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} = c_3$$

ナラザルベカラズ。分母ヲ拂ヒ移項スレバ

$$a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

即チ

$$\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

ナラザルベカラズ。ヨリテ次ノ頗ル重要ナル定理アリ。

定理 2.
$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1 \\ a_2x+b_2y&=c_2 \\ a_3x+b_3y&=c_3 \end{aligned}\right\}$$

ガ同時ニ成立スルタメニ必要ナル條件ハ*

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0$$

ナリ。

注意 此條件ハ必要條件ナルモ充分條件ニアラズ。例ヘバ

$$x+y+a=0,\quad x+y+b=0,\quad x+y+c=0$$

ニ於テ a, b, c ハ悉クハ相等シカラザル時ハ Δ ガ零ナルモ尚同時ニ成立スルコトナシ。

215. 第六十七節ニ於テ已ニ

$$ax^2+bx+c=0$$
$$px^2+qx+r=0$$

ヨリ x ヲ消去スル方法ヲ述ベタルガ，玆ニしるべすたー (1814—1897) ノ方法 (Sylvester's method) ニヨリ再ビ之レヲ求メントス。

偖テ二ツノ方程式ノ共通ノ根ハ次ノ四ツノ方程式ヲ同時ニ滿足スベシ。

$$\begin{aligned} ax^3+bx^2+cx &=0 \\ ax^2+bx+c &=0 \\ px^3+qx^2+rx &=0 \\ px^2+qx+r &=0 \end{aligned}$$

コノ一組ノ聯立方程式ニ於テ x^3 ヲ X ニ，x^2 ヲ Y ニ，x ヲ Z ニ置キ換フレバ

$$\begin{aligned} aX+bY+cZ &=0 \\ aY+bZ+c &=0 \\ pX+qY+rZ &=0 \\ pY+qZ+r &=0 \end{aligned}$$

コレガ同時ニ成立セザルベカラズ。故ニ前節ニヨリテ其消去式ハ

*條件式ノ左邊ヲ聯立方程式ノ終結式 (Resultant) 又ハ消去式 (eliminant) トイフ。

$$\begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ p & q & r & 0 \\ 0 & p & q & r \end{vmatrix}=0$$

ナリ。而シテコレヲ展開スレバ第六十七節ニ得タルモノニ全ク一致ス。

216. 次ニ二次方程式

$$ax^2+bx+c=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

2ax+b=0

ガ等根ヲ有スル條件ヲ考フルニ，假リニ α ヲ等根トスレバ ax^2+bx+c ガ $x-\alpha$ ニテ整除セラル，從ツテソノ商ヲ $ax+p$ ト置ケバ

$$ax^2+bx+c=(x-\alpha)(ax+p)=ax^2+(-a\alpha+p)x-\alpha p \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ノ兩邊ニ於テ x ノ係數相等シト置ケバ

$$b=-a\alpha+p \qquad \therefore\ p=b+a\alpha$$

即チ商ハ

$$ax+p=ax+(b+a\alpha) \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。然ルニ假定ニヨリテコノ方程式ハ等根ナルガ故ニ $ax+(b+a\alpha)$ ガ尙ホ $x-\alpha$ ニテ整除セラレザルベカラズ。ヨツテ (3) ニ $x=\alpha$ ヲ代入スレバ剩餘定理ニヨリ $2a\alpha+b=0$

要スルニ (1) ハ等根ナルトキハ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ナルト同時ニ又 $2a\alpha+b=0$ ナラザルベカラズ。而シテコノ二ツヨリしるべすたーノ消去法ヲ用ヒテ α ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix}=0$$

コレヲさるーすノ展開法ニテ計算スレバ

$$b^2-4ac=0$$

ヲ得。而シテコノ條件ハ已ニ初等代數學ニヨリテ能ク知ル所ナリ。

第三章 問題

次ノ各聯立方程式ヲトケ。

1. $\left.\begin{aligned} ax+by&=2a+3b \\ bx+ay&=3a+2b \end{aligned}\right\}$

2. $\left.\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ x+y+z&=0 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}\right\}$

3. $\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=a \\ bx+cy+az&=b \\ cx+ay+bz&=c \end{aligned}\right\}$

4. $\left.\begin{aligned} x+y+z+u+k&=0 \\ ax+by+cz+du+k^2&=0 \\ a^2x+b^2y+c^2z+d^2u+k^3&=0 \\ a^3x+b^3y+c^3z+d^3u+k^4&=0 \end{aligned}\right\}$

5. $\left.\begin{aligned} x+y+z&=a+b+c \\ ax+by+cz&=bc+ca+ab \\ (b-c)x+(c-a)y+(a-b)z&=0 \end{aligned}\right\}$

6. $\left.\begin{aligned} ax^2+2bxy+cy^2&=0 \\ a'x^2+2b'xy+c'y^2&=0 \end{aligned}\right\}$ ヨリ x, y ヲ消去セヨ。

解 y^2 ニテ除スレバ夫々

$$a\frac{x^2}{y^2}+2b\frac{x}{y}+c=0$$

$$a'\frac{x^2}{y^2}+2b'\frac{x}{y}+c'=0$$

ソコデ $\frac{x}{y}$ ヲ一ツノ未知數ト考フレバ，二百十五節ノ問題ニ歸ス。ヨツテ求ムル消去式ハ

$$4(ab'-a'b)(bc'-b'c)=(a'c-ac')^2$$

7. $\left.\begin{aligned} (z+x-y)(x+y-z)&=ayz \\ (x+y-z)(y+z-x)&=bzx \\ (y+z-x)(z+x-y)&=cxy \end{aligned}\right\}$ ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

解 邊々相乘ジ之レヲ平方ニ開ケバ

$$(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)=\pm\sqrt{abc}\,xyz$$

コレヲ第一式，第二式，第三式ニテ除シ，$\pm\sqrt{abc}$ ヲ便宜ノタメニ p ト置ケバ

$$y+z-x=\frac{p}{a}x \quad\cdots\cdots(1)$$

$$z+x-y=\frac{p}{b}y \quad\cdots\cdots(2)$$

$$x+y-z=\frac{p}{c}z \quad\cdots\cdots(3)$$

ヨリテ夫々

$$-\left(1+\frac{p}{a}\right)x+y+z=0 \quad\cdots\cdots(4)$$

$$x-\left(1+\frac{p}{b}\right)y+z=0 \quad\cdots\cdots(5)$$

$$x+y-\left(1+\frac{p}{c}\right)z=0 \quad\cdots\cdots(6)$$

(4), (5) 及ビ (6) ヨリ x, y 及 z ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} -\left(1+\frac{p}{a}\right) & 1 & 1 \\ 1 & -\left(1+\frac{p}{b}\right) & 1 \\ 1 & 1 & -\left(1+\frac{p}{c}\right) \end{vmatrix}=0$$

コレヲ展開シタル後分母ヲ拂ヘバ

$$p^3+(a+b+c)p^2-4abc=0$$

$$\therefore\quad p^3+(a+b+c)p^2-4p^2=0 \qquad (\because\ abc=p^2)$$

$$p+(a+b+c-4)=0$$

$$\therefore\quad p^2=(a+b+c-4)^2$$

ヨツテ求ムル消去式ハ

$$abc=(a+b+c-4)^2$$

8. $x=a+ls,\ y=b+ms,\ z=c+ns$ ニ於イテ s ノ代リニ p ト置キタル時，x, y, z ノ値ハ同時ニ $y-z=1,\ x=0$ ヲ滿足シ，q ト置キタル時ノ値ハ $z-x=1,\ y=0$ ヲ滿足シ，r ト置キタル時ノ値ハ $x-y=1,\ z=0$ ヲ滿足スル時ハ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。

解 $x=a+ls,\ y=b+ms,\ z=c+ns$ ニ於テ $s=p$ ト置カバ $y-z=1,\ z=0$ ヲ滿足スルガ故ニ

$$a+lp=0,\quad b-c+(m-n)p=1$$

コレヨリ p ヲ消去スレバ

$$(b-c-1)l-am+an=0 \quad\cdots\cdots(1)$$

次ニ $s=q$ ト置クコトヨリ上ト同様ノ結果ヲ得

即チ

$$bl+(c-a-1)m-bn=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

又 $s=r$ ト置クコトヨリ

$$-cl+cm+l(a-b-1)n=0 \quad\cdots\cdots(3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ l, m, n ヲ消去スレバ

$$\begin{vmatrix} b-c-1 & -a & a \\ b & c-a-1 & -b \\ -c & c & a-b-1 \end{vmatrix}=0$$

即チ $$a^2+b^2+c^2-2(bc+ca+ab)=1$$

第四章

種々ノ行列式

217. 本章ニ於イテアル特殊ナル行列式ヲ略記シ以ツテ本編ヲ終ラントス。

(i) **對稱行列式** (Symmetrical determinant)

例ヘバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & l \\ d & g & l & m \end{vmatrix}$$

ノ如ク各元素ガ主對角線ニツキテ對稱 (Symmetric) ニナリ居ルガ如キモノヲイフ。

コノ場合時トシテハ主對角線上ノ文字 a, e, h, m ハ悉ク 0 ナルコトアリ。

定理 1. 對稱行列式ニ於テハ $\Delta_a, \Delta_e, \Delta_h$……ハ皆對稱行列式ナリ。

(ii) **變體對稱行列式** (Skew symmetrical determinant)

例ヘバ四次ノモノニアリテハ

$$\begin{vmatrix} 0, & b, & c, & d \\ -b, & 0, & f, & g \\ -c, & -f, & 0, & l \\ -d, & -g, & -l, & 0 \end{vmatrix}$$

ノ如ク主對角線ハ皆零ニシテ且ツ對角線ニ就イテ互ニ共軛ナル元素ガソノ符號ヲ異ニスルモノナリ。

定理 2. 變體變稱行列式ニ於テハ主對角線ニ關スル小行列式モ又變體對稱行列式ナリ。

定理 3. 奇數次ノ變體對稱行列式ノ値ハ零ナリ。

證明 各行ニ -1 ヲ乘ズレバ行ハ列トナリ列ハ行トナルガ故ニソノ行列式ノ値ハ變ゼズ。

然ルニ又他ノ一面ヨリ考フレバ各行ニ -1 ヲ乘ズルタビニコノ行列式ハ -1 倍セラル。ヨリテ次ノコトアリ　$\Delta=(-1)^n\Delta$

而ルニコノ行列式ハ奇數次ナルガ故ニ $(-1)^n=-1$ ナリ。ヨツテ $\Delta=-\Delta$

$\therefore\ 2\Delta=0$　即チ　$\Delta=0$

(iii) **轉換行列式** (Cyclic determinant)

例ヘバ五次ノ行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{vmatrix}$$

ノ如ク各列ノ元素ガ循環シ居ルガ如キモノナリ。

(iv) **長年方程式** (Secular equation)

理論物理學等ニ要用ナルモノニシテ次ノ行列式

$$\begin{vmatrix} a+x & b & c & d \\ b & e+x & f & g \\ c & f & h+x & l \\ d & g & l & m+x \end{vmatrix}$$

ヲ零ニ等シト置キタル方程式ヲイフ。モシ a, b…… ハ實數ナルトキハコノ方程式ハ必ズ悉ク實根ヲ有ス。コレ頗ル興味アル性質ナリト雖モ茲ニハ說クコトヲ得ズ。*

* コノ證明ハ Kowalewski determinanten theoriê 126 頁ニ在リ。

(v) **縁附行列式** (Bordered determinant)

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ l & m & n & p \\ q & r & s & t \end{vmatrix} \text{ナル行列式ハ} \begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ l & m & n \end{vmatrix} \text{又ハ} \begin{vmatrix} f & g & h \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

ナル行列式ノ縁附行列式トイフ。

注意　一行一列ヲ添加スルニ限ラズ。同數ノ行ト列トヲ添加スルモ又縁附行列式トイフ。

(vi) **直對稱行列式**

例ヘバ

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & e \\ c & d & e & g \\ d & e & g & k \end{vmatrix}$$

ノ如ク點線ニテ書キタル對角線上ニハ同一ノ元素ヲ有スルモノナリ。

218. 玆ニ行列式ニ關スル歴史的沿革ノ大要ヲ述ブベシ。

抑々行列式ハ源ヲ遠クらいぷにっつニ發シ 1693 年 4 月 28 日ノ書信ヲ以ッテ．佛國ノろすぴたるニ一次方程式ノ終結式ノ發見ヲ告白セリ。ソノ後久シク研究中絶セラレシガ Cramer (18 世紀中葉) 出デ、添加數ノ順序ニ關スル法則ヲ研究スルニ及ビ其ノ發達ヲ促ガス氣運ヲ作レリ。卽チらぷらす (Laplace 1749—1827) らぐらんじゆ (Lagrange 1736—1813) 等ノ大家相次イデ出デ頗ル發展ヲ遂グルニ至リヌ。殊ニ近代ニ入リテヨリがうす，こーしーナド愈々精ヲ穿チ，續イテわいえるすとらす，くろねっける (1823—1891)，しるべすたー (1814—1897) ナドニヨリテ遂ヒニ一大分科ヲ作ルニ至リタリ。

第十七編　方程式諸論

第一章

根ト係數トノ關係

219.　第四編ニ於テ方程式ノ解法及ビ若干ノ定理ヲ證明セシガ尚本編ニ於テ一般ニ n 次ノ方程式ニ關スル重要ナル諸性質ヲ研究セントス。

整函數　n ガ正ノ整數ナルトキ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$

ナル多項式ヲ n 次ノ有理整函數又ハ單ニ整函數 (rational integral function) トイフ。以下特ニ斷リナケレバ係數ハ凡テ有理數トス。

整方程式　n ガ正ノ整數ニシテ係數ハ悉ク有理數ナルトキ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

ヲ n 次ノ有理整方程式又ハ單ニ整方程式 (rational integral equation) トイフ。

220.　**定理 1.**　n 次ノ整方程式ハ n 個ノ根ヲ有シ，n 個ニ限ル。

證明　與ヘラレタル方程式ヲ

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

トシ，α_1 ヲ其ノ一根ト假定スレバ $f(x)$ ハ $x-\alpha_1$ ニテ整除セラルベシ。

$$\therefore\qquad f(x)=(x-\alpha_1)f_1(x)=0$$

$f_1(x)=0$ ハ $n-1$ 次ノ方程式ナリ。其ノ一根ヲ α_2 トスレバ

$$f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x)=0$$

次ニ $f_2(x)=0$ ハ $n-2$ 次ノ方程式ニシテ其ノ一根ヲ α_3 トスレバ

$$f_2(x)=(x-\alpha_3)f_3(x)=0$$

追ツテカクノ如クスレバ

$$f(x)=p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0$$

故ニ $f(x)=0$ ノ根トシテ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots\cdots \alpha_n$ ノ n 個アリ。次ニ若シコノ方程式ハ上ノ n 個ノ根以外ニ α_{n+1} ナル根ヲ有スト假定スレバ

$$f(x)=p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_{n+1})$$

ガ成立スベキ筈ナリ。然ルニ右邊ハ x ニ就キテ $n+1$ 次ノ方程式トナル。故ニ n 個ヨリモ多クノ根ヲ有セズ。

注意 此定理ニハ重根ノ數ヲ其次數ダケニ計算セリ。以下之ニ準ズ。

221. 前節ニ於テ n 次ノ方程式ニハ少クトモ一ツノ根ガ存在スルトイフ定理ヲ假定セリ。而シテコレハ代數學ノ基本定理ノ一ツニシテだらんべるガ最初ニ證明セント企テタルガ之ヲ嚴格ニ證明セシハがうすナリトス。其後多クノ學者ニヨリテ種々ナル證明法ガ發見セラレタルガ何レモ多少難解ナリトス。次ニ揭グルハ比較的平易ナル證明法ナリ。

先ヅ $a_0, a_1, \cdots\cdots a_n$ ハ任意ノ實數又ハ複素數ナリトシ。

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

ナル函數アリトス。今 x ニ任意ノ値 x_0 ヲ與ヘタル時,

$$|f(x_0+h)|<|f(x_0)|$$

ナラシムルガ如キ實數又ハ複素數ナル h ヲ常ニ選ブコトヲ得ル所以ヲ說明セン。

サテ

$$f(x_0+h)=a_0(x_0+h)^n+a_1(x_0+h)^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$$

コレヲ h ノ昇冪ニ並べカヘルト

$$f(x_0+h)=f(x_0)+b_1h+b_2h^2+\cdots\cdots+b_nh^n$$

次ニ b_p ヲ $b_1, b_2, \cdots\cdots$ ノ中零ナラザル最初ノ係數トスレバ ($b_1, b_2, \cdots\cdots b_n$ ノ悉クガ零トナルコトナシ。何トナレバ b_n ガ a_0 ニ等シキガ故ニ少クトモ零ナラザルモノアレバナリ。)

$$f(x_0+h)=f(x_0)+b_ph^p+b_{p+1}h^{p+1}+\cdots\cdots+b_nh^n$$

玆ニ於テ

$$f(x_0)=r_0(\cos\alpha_0+i\sin\alpha_0)$$

$$b_p=r_p(\cos\alpha_p+i\sin\alpha_p)$$

$$b_{p+1}=r_{p+1}(\cos\alpha_{p+1}+i\sin\alpha_{p+1})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

トシ h ヲ

$$h=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

ト假定スレバどもあぶるノ定理ニヨリテ

$$f(x_0+h)=r_0(\cos\alpha_0+i\sin\alpha_0)+\rho^pr_p\{\cos(p\varphi+\alpha_p)+i\sin(p\varphi+\alpha_p)\}$$
$$+\rho^{p+1}r_{p+1}\{\cos[(p+1)\varphi+\alpha_{p+1}]+i\sin[(p+1)\varphi+\alpha_{p+1}]\}+\cdots\cdots\cdots$$

今 $f(x_0+h)$ ノ絕對値ヲ R トスレバ

$$R^2=\{r_0\cos\alpha_0+\rho^pr_p\cos(p\varphi+\alpha_p)+\rho^{p+1}r_{p+1}\cos[(p+1)\varphi+\alpha_{p+1}]+\cdots\cdots\}^2$$
$$+\{r_0\sin\alpha_0+\rho^pr_p\sin(p\varphi+\alpha_p)+\rho^{p+1}r_{p+1}\sin[(p+1)\varphi+\alpha_{p+1}]+\cdots\cdots\}^2$$

右邊ヲ ρ ノ昇冪ニ並ブレバ

$$R^2=r_0^2+c_p\rho^p+c_{p+1}\rho^{p+1}+\cdots\cdots+c_{2n}\rho^{2n}$$

但シ
$$c_p=2r_0r_p\{\cos\alpha_0\cos(p\varphi+\alpha_p)+\sin\alpha_0\sin(p\varphi+\alpha_p)\}$$
$$=2r_0r_p\cos(p\varphi+\alpha_p-\alpha_0)$$

ソコデ $p\varphi+\alpha_p-\alpha_0=\pi$ ナルヤウニ φ ヲ選ブト

$$c_p=-2r_0r_p$$

トナル。故ニ ρ ノ絕對値ヲ適當ニ小ニスレバ

$$c_p\rho^p+c_{p+1}\rho^{p+1}+\cdots\cdots+c_{2n}\rho^{2n}$$

ヲシテ負トナラシムルコトヲ得。故ニカヽル ρ ト φ トニ對シテハ

$$R^2<r_0^2 \quad 卽チ \quad |f(x_0+h)|<|f(x_0)|$$

ナリ。卽チ x ノ任意ノ値ニ對シテ $|f(x_0+h)|<|f(x_0)|$ ヲ滿足スル $h=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ ヲ選ブコトヲ得。故ニ x_0+h ヲ x_0' トスレバ

$$|f(x_0'+h')|<|f(x_0')|$$

ヲ滿足スル h' ヲ選ブコトヲ得。次第ニカクノ如クスレバ $h', h''\cdots\cdots$ ニ對シテ

$$|f(x_0)|>|f(x_0+h)|>|f(x_0+h+h')|>|f(x_0+h+h'+h'')|>\cdots\cdots$$

ガ成立スベシ。而シテ此數列ノ極限値ハ零トナルベシ。ヨツテ n 次ノ方程式ニハ少クトモ一ツノ根アルヲ知ル。

222. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ ハ n 次ノ方程式ノ根ナル時ハ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=$$
$$p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots\cdots(x-\alpha_n)$$

此ノ右邊ニ乘法ヲ實行シ且ツ左邊ニ於ケル x ノ同ジ冪ノ係數ヲ比較スレバ

$$\frac{p_1}{p_0}=(-1)(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_n)$$
$$\frac{p_2}{p_0}=(-1)^2(\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n)$$
$$\frac{p_3}{p_0}=(-1)^3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{p_n}{p_0}=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\cdots\alpha_n$$

ナリ。ヨリテ次ノ定理アリ。

定理 2. x ノ最高冪ノ係數1ナル n 次ノ整方程式ニ於テ

1° x^{n-1} ノ係數ハ n 個ノ根ノ和ト其ノ符號ヲ異ニシ

2° x^{n-2} ノ係數ハ n 個ノ根ヲ二ツ宛組合セタル積ノ和ニ等シ

3° x^{n-3} ノ係數ハ n 個ノ根ヲ三ツ宛組合セタル積ノ和ト其ノ符號ヲ異ニシ

4° 一般ニ x^{n-r} ノ係數ハ n 個ノ根ヲ r 個宛組合セタル積ノ和ニ $(-1)^r$ ヲ乘ジタルモノニ等シ。

系 1. n 次ノ方程式ノ實根ハ其ノ絕對項ノ約數ナリ。

系 2. n 個ノ根ハ悉ク正ナラバ方程式ノ係數ハ交番ニ正數，負數ナリ。

系 3. n 個ノ根ハ悉ク負數ナル時ハ方程式ノ係數ハ凡テ正數ナリ。

例 1. $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ三ツノ根ノ立方ノ和ヲ求メヨ。

解 α,β,γ ヲ三ツノ根トスレバ

$$\alpha^3-p\alpha^2+q\alpha-r=0$$
$$\beta^3-p\beta^2+q\beta-r=0$$
$$\gamma^3-p\gamma^2+q\gamma-r=0$$

邊々相加フレバ

$$\Sigma\alpha^3-p\Sigma\alpha^2+q\Sigma\alpha-3r=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ

$$\Sigma\alpha=p \qquad \Sigma\alpha\beta=q$$
$$\therefore \quad \Sigma\alpha^2=p^2-2q$$

此等ヲ (1) ニ代入スレバ

$$\Sigma\alpha^3-p(p^2-2q)+qp-3r=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ヨリ

$$\Sigma\alpha^3=p^3-3pq+3r$$

例 2. a, b, c, d ヲ異ナル正ノ數ナリトシ，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ヲ方程式

$\dfrac{x}{x-a}+\dfrac{x}{x-b}+\dfrac{x}{x-c}+x+d=0$ ノ根トスレバ

$$\frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}+\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}$$
$$+\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 方程式ノ分母ヲ拂ヘバ

$$x(x-b)(x-c)+x(x-a)(x-c)+x(x-a)(x-b)$$
$$+(x+d)(x-a)(x-b)(x-c)=0$$

コレハ最高冪ノ係數1ナル四次方程式ナリ。故ニ

$$x(x-b)(x-c)+x(x-a)(x-c)+x(x-a)(x-b)$$
$$+(x+d)(x-a)(x-b)(x-c)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)$$

コノ兩邊ニ $x=a$ ト置ケバ

$$a(a-b)(a-c)=(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)$$
$$\therefore \quad \frac{a^2}{(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)(a-\delta)}=\frac{a}{(a-b)(a-c)}$$

同様ニ

$$\frac{b^2}{(b-\alpha)(b-\beta)(b-\gamma)(b-\delta)}=\frac{b}{(b-a)(b-c)}$$

$$\frac{c^2}{(c-\alpha)(c-\beta)(c-\gamma)(c-\delta)}=\frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

然ルニおいらーノ公式ニヨレバ

$$\frac{a}{(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)}=0$$

ヨツテ證セラレタリ。

例 3. $x^n-1=0$ ノ根ヲ $1,\alpha,\beta,\gamma\cdots\cdots$ トスレバ

$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots\cdots=n$ ナリ。

解 $x^n-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots$

故ニ $$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\cdots$$

ソコデ兩邊ニ $x=1$ ト置ケバ

$$n=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\cdots\cdots$$

第一章問題

1. $f(x)=x^4+10x^3+39x^2+76x+300$ ナリトシ $f(x-4)$ ヲ作レ。

2. $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ トシテ $f(x+h)-f(x-h)$ ヲ求メヨ。

3. 二ツノ根ノ和ガ零ナルコトヲ知リテ，方程式 $x^3-5x^2-4x+20=0$ ヲ解ケ

解 三ツノ根ヲ α,β,γ トスレバ

$\Sigma\alpha=5\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$ $\Sigma\alpha\beta=-4\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$\alpha\beta\gamma=-20\cdots\cdots(3)$

然ルニ假定ニヨリテ $\beta+\gamma=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

∴ (1) ヨリ $\alpha=5$

(3) ヨリ $\beta\gamma=-4$

(4) ト組合セテ $\beta=2$ $\gamma=-2$

4. 二組ノ等根アルコトヲ知リテ方程式

$x^4-2x^3-3x^2+4x+4=0$ ヲ解ケ。

5. 三ツノ根ガ等差級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$x^3-9x^2+26x-24=0$ ヲ解ケ。

6. 三ツノ根ガ等比級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$x^3-7x^2+14x-8=0$ ヲ解ケ。

7. 二ツノ根ノ比ハ 3:2 ナルコトヲ知リテ方程式

$x^3-9x^2+14x+24=0$ ヲ解ケ。

8. 三ツノ根ガ調和級數ヲナスコトヲ知リテ方程式

$6x^3-11x^2+6x-1=0$ ヲ解ケ。

9. 方程式 $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ三ツノ根ガ調和級數ヲナス時ハソノ一根ハ $\frac{3r}{p}$ ナルコトヲ證セヨ。

10. 二ツノ根ノ乘積ハ2ナル時，方程式

$3x^4-25x^3+50x^2-50x+12=0$ ヲ解ケ。

11. $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ三ツノ根ハ等差級數ヲナス爲メノ條件ヲ求メヨ。

12. $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ三ツノ根ノ中二ツノ根ノ和ハ零ナル爲メノ條件ヲ求メヨ。

13. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ四ツノ根ノ中二ツノ乘積ハ他ノ二ツノ乘積ニ等シキ爲メニハ $p^2s-r^2=0$ ナラザルベカラズ。コレヲ證セヨ。

14. $x^3+px^2+qx+r=0$ ノ三ツノ根ヲ α,β,γ トスル時 $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2$ ノ値ヲ求メヨ。

15. $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ノ m 乘ノ和ヲ s_m, $(m-1)$ 乘ノ和ヲ s_{m-1}, $(m-2)$ 乘ノ和ヲ s_{m-2} トスレバ

$$as_m+bs_{m-1}+cs_{m-2}=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

16. $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$ トスレバ $\Sigma\alpha_1^2=p_1^2-2p_2$ ナリ。

17. $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ ノ根ヲ $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\cdots,\alpha_n$ トスレバ

$$\Sigma\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{p_1p_{n-1}}{p_n}-n \text{ ナリ。}$$

解 $\Sigma\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1\alpha_2}$ ヲ書キカヘルト

$$\alpha_1\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1$$
$$+\alpha_2\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\alpha_n\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-1$$

即チ

$$\Sigma\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}{\alpha_1\alpha_2}=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n)\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)-n$$

然ルニ

$$p_1=-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots\cdots+\alpha_n)$$
$$p_{n-1}=(-1)^{n-1}(\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-1}+\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{n-2}\alpha_n+\cdots\cdots)$$
$$p_n=(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_n$$
$$\therefore\quad \frac{p_{n-1}}{p_n}=-\left(\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$\therefore\quad \Sigma\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2}{\alpha_1\alpha_2}=\frac{-p_{n-1}}{p_n}\times(-p_1)-n=\frac{p_1p_{n-1}}{p_n}-n$$

ナリ。

第二章

方程式ノ變換

223. 與ヘラレタル方程式ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ヲ作ル方法ハ讀者ハ已ニ初等代數學ニ於テ幾多ノ例題ニヨリテ示サレタルコトナルベシト雖モ，玆ニハ所謂方程式ノ變換 (Transformation) トイフ方法ニテ最モ一般的ニ求メントス。

224. **方程式** $f(x)=0$ **ノ根ヲ** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ **トスル時** $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots\cdots\frac{1}{\alpha_n}$ **ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト。**

與ヘラレタル方程式ヲ

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレニ x ノ代リニ $\frac{1}{y}$ ト置クト

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=p_0\frac{1}{y^n}+p_1\frac{1}{y^{n-1}}+\cdots\cdots+p_{n-1}\frac{1}{y}+p_n$$
$$=p_0\left(\frac{1}{y}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{y}-\alpha_2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{y}-\alpha_n\right)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

トナル。(2) ヲ滿足スル y ノ値ハ明カニ $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \cdots\cdots\frac{1}{\alpha_n}$ ナルヲ以テ (2) ノ左邊ノ分母ヲ拂ヒタル方程式

$$p_ny^n+p_{n-1}y^{n-1}+\cdots\cdots+p_1y+p_0=0$$

ハ所要ノ方程式ナリ。

例 α, β, γ ヲ $x^3-px^2+qx-r=0$ ノ根トスル時，$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}$ ヲ計算セヨ。

解 x ノ代リニ $\frac{1}{y}$ ト置ケバ y ニ關スル三次方程式

$$ry^3-qy^2+py-1=0$$

ヲ得。而シテコノ根ハ夫々 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ ニ等シ。

故ニ $\quad \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{q}{r} \qquad \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{p}{r}$

$$\therefore\quad \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{q^2}{r^2}-2\frac{p}{r}=\frac{q^2-2pr}{r^2}$$

ナリ。

例2. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ノ一根ハ無限大ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

解 $x=\frac{1}{y}$ ト置ケバ$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$$\frac{a}{y^3}+\frac{b}{y^2}+\frac{c}{y}+d=0$$

卽チ $\quad dy^3+cy^2+by+a=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1) ヨリ x ガ無限大ナルタメニハ (2) ニ於テ $y=0$ ナルヲ要ス。故ニ所要ノ條件ハ $a=0$ ナルコトナリ。

225. **方程式** $f(x)=0$ **ノ根ヲ** $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_n$ **トスル時** $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots\cdots-\alpha_n$ **ヲ根トスル方程式ヲ作ルコト。**

與ヘラレタル方程式

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$

$$=p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0\cdots\cdots(1)$$

ニ於テ x ノ代リニ $-y$ ト置ケバ,

$$f(-y)=p_0(-y)^n+p_1(-y)^{n-1}+p_2(-y)^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}(-y)+p_n$$
$$=p_0(-y-\alpha_1)(-y-\alpha_2)\cdots\cdots(-y-\alpha_n)=0\cdots\cdots(2)$$

トナル。而シテ此方程式ヲ滿足スル y ノ値ハ $-\alpha_1, -\alpha_2, \cdots\cdots -\alpha_n$ トナル。故ニ (2) ノ右邊ヲ零ニ等シト置キタルモノハ所要ノ方程式ナリ。

例 $x^3-1=0$ ノ根ハ $1, \omega, \omega^2$ ナルガ故ニ

$x^3-1=(x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)$ ナルコト已ニ知ル所ナリ。ソコデコノ式ニ $x=-y$ ト置ケバ

$$-(y^3+1)=-(y+1)(y+\omega)(y+\omega^2)$$

故ニ $y^3+1=0$ ノ根ハ $-1, -\omega, -\omega^2$ ナリ。

226. 與ヘラレタル方程式ノ根ヨリ α ダケ大(又ハ小)ナル根ヲ有スル方程式ヲ作ルコト。

與ヘラレタル方程式ヲ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$$

トシ, $y=x+\alpha$ 卽チ $x=y-\alpha$ ヲ代入スレバ與ヘラレタル方程式ノ根ヨリ α ダケ大ナル根ヲ有スル方程式ヲ得, 卽チ

$$p_0(y-\alpha)^n+p_1(y-\alpha)^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}(y-\alpha)+p_n=0$$

ハ求ムルモノナリ。

例 1. $x^3-5x^2+6x=0$ ノ各根ヨリ 1 ダケ大ナル根ヲ有スル方程式ヲ作レ。

解 與ヘラレタル方程式ニ $y=x+1$ 卽チ $x=y-1$ ヲ代入スレバ

$$(y-1)^3-5(y-1)^2+6(y-1)=0$$

卽チ $y^3-8y^2+19y-12=0$ コレ求ムル所ノモノナリ。

例 2. $x^3-8x^2+19x-12=0$ ノ一根ハ他ノ一根ヨリ 2 ダケ大ナルコトヲ知リテコノ方程式ヲ解ケ。

解 與ヘラレタル方程式ノ三ツノ根ヲ $\alpha, \alpha+2, \beta$ トセヨ, 次ニ與ヘラ

レタル方程式ノ各根ヨリ 2 ダケ小ナル根ヲ有スル方程式ヲ作ルニ

$$(x+2)^3-8(x+2)^2+19(x+2)-12=0$$

卽チ $$x^3-2x^2-x+2=0$$

ハ $\alpha-2, \alpha, \beta-2$ ナル根ヲ有ス。故ニ少クトモ α ナル根ハコレ等ノ二ツノ方程式ノ共通根ナリ。

$1 \mid x^3-2x^2-x+2)\ x^3-8x^2+19x-12$
x^3-2x^2-x+2
$-6x^2+20x-10$

ソコデ

$$x^3-8x^2+19x-12 \text{ 及ビ } x^3-2x^2-x+2$$

ノ H.C.F. ヲ求ムレバ $x-1$ ヲ得。從ツテ與ヘラレタル方程式 $x^3-8x^2+19x-12=0$ ハ $x=1$ ナル根ヲ有ス。從ツテ $x^3-8x^2+19x-12=(x-1)(x^2-7x+12)=0$ 故ニ 1, 3, 4 ハ所要ノ三ツノ根ナリ。

例 3. $x^3+px^2+qx+r=0$ ヲ變形シテ x^2 ノ項ヲ除ケ。

解 與ヘラレタル方程式ノ x ニ $x=y-\alpha$ ト置ク時ハ

$$(y-\alpha)^3+p(y-\alpha)^2+q(y-\alpha)+r=0$$

整頓シテ

$$y^3+y^2(p-3\alpha)+y(3\alpha^2-2p\alpha+q)-\alpha^3+p\alpha^2-q\alpha+r=0\cdots\cdots(1)$$

故ニ $p-3\alpha=0$ 卽チ $\alpha=\frac{p}{3}$ トスレバ (1) ハ

$$y^3+y\left(3.\frac{p^2}{9}-2p\frac{p}{3}+q\right)-\frac{p^3}{27}+p\frac{p^2}{9}-q\frac{p}{3}+r=0$$

卽チ

$$27y^3+9(3q-p^2)y+2p^3-9pq+27r=0$$

而シテ此方程式ハ y^2 ノ項ヲ缺ク。コレ屢々用ヒラルヽ方法ニシテ已ニ第四編ニ於テ述ベシ所ナリ。

227. 與ヘラレタル方程式ノ各根ノ k 倍ノ根ヲ有スル方程式ヲ作ルコト。

方程式ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$ トスレバ

$$f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$$
$$=p_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n)=0\cdots\cdots(1)$$

コノ x ノ代リニ $\frac{y}{k}$ ト置クトキハ

$$f\left(\frac{y}{k}\right)=p_0\left(\frac{y}{k}\right)^n+p_1\left(\frac{y}{k}\right)^{n-1}+p_2\left(\frac{y}{k}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}\left(\frac{y}{k}\right)+p_n$$
$$=p_0\left(\frac{y}{k}-\alpha_1\right)\left(\frac{y}{k}-\alpha_2\right)\cdots\cdots\left(\frac{y}{k}-\alpha_n\right)=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

卽チ(2)ヲ滿足スル y ノ値ハ $k\alpha_1, k\alpha_2, \cdots\cdots k\alpha_n$ ナリ。故ニ所要ノ方程式ハ(2)ノ左邊ヲ整頓シ分母ヲ拂ヒタルモノ卽チ

$$p_0y^n+p_1ky^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}k^{n-1}y+p_nk^n=0$$

ナリ。

第二章　問題

1. $x^3-4x^2+5x-6=0$ ノ根ノ逆數ヲ根トスル方程式ヲ求メヨ。

2. $x^2-7x+12=0$ ノ各根ヨリ2ダケ大ナル根ヲ有スル方程式ヲ作レ。

3. $x^3+px^2+qx+r=0$ 根ヲ夫々 α, β, γ トスルトキ $\alpha\beta, \beta\gamma, \gamma\alpha$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

解 $y=\alpha\beta$ トスレバ $y=\frac{\alpha\beta\gamma}{\gamma}=\frac{-r}{\gamma}$　$\therefore\ \gamma=-\frac{r}{y}$

然ルニ γ ハ與ヘラレタル方程式ノ一ツノ根ナルガ故ニ求ムル方程式ハ

$$\left(\frac{-r}{y}\right)^3+p\left(\frac{-r}{y}\right)^2+q\left(\frac{-r}{y}\right)+r=0$$

卽チ

$$y^3-qy^2+pry-r^2=0$$

4. 前題ニ於テ次ノモノヲ根トスル方程式ヲ作レ。

(i) $\alpha+\beta,\ \beta+\gamma,\ \gamma+\alpha$

(ii) $\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha},\ \dfrac{\gamma+\alpha-\beta}{\beta},\ \dfrac{\alpha+\beta-\gamma}{\gamma}$

(iii) $\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2,\ \gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2,\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$

解 (i) $y=\beta+\gamma$ トスレバ

$y=\beta+\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)-\alpha=-p-\alpha$　$\therefore\ \alpha=-p-y$ 同樣ニ $\beta=-p-y,\ \gamma=-p-y$

然ルニ α, β, γ ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナルガ故ニ原方程式ノ x ノ代リニ $-p-y$ ト置ケルモノハ求ムル方程式ナリ。

$$\therefore\ (-p-y)^3+p(-p-y)^2+q(-p-y)+r=0$$

卽チ

$$y^3+2py^2+(p^2+q)y+pq-r=0$$

(ii) $y=\dfrac{\beta+\gamma-\alpha}{\alpha}=\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}{\alpha}=\dfrac{-r}{\alpha}-2$

$$\therefore\ \alpha=\frac{-r}{y+2}$$

同樣ニ　$\beta=\dfrac{-r}{y+2}$　$\gamma=\dfrac{-r}{y+2}$

然ルニ α, β, γ ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナリ。故ニ求ムル方程式ハ x ノ代リニ $\dfrac{-r}{y+2}$ ト置キタルモノ。卽チ

$$\left(\frac{-r}{y+2}\right)^3+p\left(\frac{-r}{y+2}\right)^2+q\left(\frac{-r}{y+2}\right)+r=0$$

之レヲ整頓シテ

$$ry^3+(6r-qr)y^2+(12r-4qr+p^3)y+8r-4qr-r^3=0$$

(iii) $\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2=(\beta+\gamma)^2-\beta\gamma$

$$=(-p-\alpha)^2+\frac{r}{\alpha}=(p+\alpha)^2+\frac{r}{\alpha}$$

同樣ニ他ノ二式ニ關シテモ夫々

$$(p+\beta)^2+\frac{r}{\beta},\qquad (p+\gamma)^2+\frac{r}{\gamma}$$

然ルニ α, β, γ ハ與ヘラレタル根ナルガ故ニ

$$y=(p+x)^2+\frac{r}{x}$$

ト置キ原方程式トノ間ニ x ヲ消去スレバ求ムル方程式ヲ得。ソレガ爲メニ原方程式トノ間ニ減法ヲ行ハヾ

$$px^2+(p^2-y-q)x=0$$
$$\therefore\ x=\frac{p^2-y-q}{p}$$

コノ x ノ値ヲ $y=(p+x)^2+\frac{r}{x}$ ニ代入スレバ結局

$$y^3+(3q-2p^2)y^2+(p^4-3p^2q+3q^2)y+q^3-p^2q^2+p^3r=0$$

ヲ得。コレ求ムルモノナリ。

5. $x^3+ax^2+bx+ab=0$ ノ根ノ立方ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

6. 方程式 $x^3+qx+r=0$ ノ三ツノ根ヲ α, β, γ トスル時，次ノモノヲ根トスル方程式ヲ作レ。

(1) $(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma),\ (\beta-\gamma)(\beta-\alpha),\ (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$

(2) $\dfrac{\beta}{\gamma}+\dfrac{\gamma}{\beta},\ \dfrac{\gamma}{\alpha}+\dfrac{\alpha}{\gamma},\ \dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}$

解　變換後ノ未知數ヲ y トスレバ (1) ハ

$$y=(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)=\alpha^2-(\beta+\gamma)\alpha+\beta\gamma$$
$$=\alpha^2-(\alpha+\beta+\gamma-\alpha)\alpha+\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}$$

然ル＝　$\alpha+\beta+\gamma=0,\quad \alpha\beta\gamma=-r$

故＝　$y=2x^2-\dfrac{r}{x}$ ……………………(1)

コノ關係式ト與ヘラレタル方程式トノ二ツヨリ x ヲ消去スレバ可ナリ。ソレニハ (1) ヨリ

$$x^3=\frac{1}{2}(xy+r)$$

コレヲ與ヘラレタル方程式＝代入スレバ

$$xy+r+2qx+2r=0$$

即チ　$x=\dfrac{-3r}{y+2q}$

コレヲ與ヘラレタル方程式＝代入スレバ

$$y^3+3qy^2-(4q^3+27r^2)=0$$

ヲ得。次＝ (2) ヲ解カン＝

$$y=\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\beta}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta\gamma}=\frac{(\beta+\gamma)^2-2\beta\gamma}{\beta\gamma}$$
$$=\frac{(\alpha+\beta+\gamma-x)^2}{\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\alpha}}-2=\frac{\alpha^2}{\dfrac{r}{\alpha}}-2\qquad(\because\ \alpha+\beta+\gamma=0)$$

故＝ y ト x トノ間＝ハ

$y=\dfrac{x^3}{r}-2$　ナル關係アリ。コレト與ヘラレタル方程式トヨリ x ヲ消去スレバ

$$r^2y^3+3r^2y^2-(3r^2+q^3)y+r^2+2q^3=0$$

ヲ得。コレ求ムルモノナリ。

7. 方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ根ヲ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ トスル時，次ノモノヲ根トスル方程式ヲ作レ。

(1) $1+\alpha^2,\ 1+\beta^2,\ 1+\gamma^2,\ 1+\delta^2$

(2) $\beta^2+\gamma^2+\delta^2,\ \gamma^2+\delta^2+\alpha^2,\ \delta^2+\alpha^2+\beta^2,\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

解　$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ハ與ヘラレタル方程式ノ根ナルヲ以テ $1+\alpha^2, 1+\beta^2,$ …… ヲ未知數ノ値トスレバ

$y=1+x^2$　ノ關係アリ。コレト與ヘラレタル方程式トノ間＝ x ヲ消去スレバ所要ノ方程式

$$\{y^2+(q-2)y+1-q+s\}^2=(y-1)\{py+(r-p)\}^2$$

トナル。次＝ (2) ヲ解セン＝

$$y=\beta^2+\gamma^2+\delta^2=(\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2\Sigma\alpha\beta-\alpha^2$$
$$=p^2-2q-\alpha^2$$

即チ

$$y=p^2-2q-x^2$$

コノ式ト與ヘラレタル方程式トヨリ x ヲ消去スレバ，所要ノ方程式ヲ得。即チ

$$\{(p^2-2q-x)^2+q(p^2-2q-x)+s\}^2=(p^2-2q-x)\{p(p^2-2q-x)+r\}^2$$

8. 方程式 $x^3+qx+r=0$ ノ三ツノ根ヲ α, β, γ トスル時 $\dfrac{\beta}{\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha}, \dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\gamma}{\beta}, \dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma}$ ヲ根トスル方程式ヲ求メヨ。

解　$\dfrac{\beta}{\alpha}, \dfrac{\gamma}{\alpha}$ ヲ根トスル方程式ハ

$$x^2-\frac{\beta+\gamma}{\alpha}x+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=0\quad 即チ\quad x^2+x+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=0\qquad(\because\ \alpha+\beta+\gamma=0)$$

同様＝ $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\gamma}{\beta}$ 及ビ $\dfrac{\alpha}{\gamma}, \dfrac{\beta}{\gamma}$ ヲ根トスル方程式ハ夫々

$$x^2+x+\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}=0,\qquad x^2+x+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=0$$

ヨツテ所要ノ方程式ハ

$$\left(x^2+x+\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)\left(x^2+x+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}\right)\left(x^2+x+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)=0$$

即チ

$$(x^2+x)^3+\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\right)(x^2+x)^2$$
$$+\left(\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\ \frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}\ \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\ \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\right)(x^2+x)+1=0\text{……(1)}$$

コノ方程式ノ係數ノ値ヲ求メンニハ $\dfrac{\beta\gamma}{\alpha^2}, \dfrac{\gamma\alpha}{\beta^2}, \dfrac{\alpha\beta}{\gamma^2}$ ヲ三ツノ根トスル方程式ヲ作リテ根ト係數ノ關係ヲ利用スベシ。ソレガ爲＝

$$y=\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=\frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha^3}=\frac{-r}{x^3}$$

ナル關係アルヲ以テ

$$r^2y^3-(3r^2+q^3)y^2+3r^2y-r^2=0$$

ヨツテ

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}=\frac{3r^2+q^3}{r^2}$$

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2}\ \frac{\gamma\alpha}{\beta^2}+\frac{\gamma\alpha}{\beta^2}\ \frac{\alpha\beta}{\gamma^2}+\frac{\alpha\beta}{\gamma^2}\ \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}=3$$

之等ヲ (1) ニ代入スレバ所要ノ方程式

$$(x^2+x)^3+\frac{3r^2+q^3}{r^2}(x^2+x)^2+3(x^2+x)+1=0$$

即チ

$$r^2(x^2+x)^3+(3r^2+q^3)(x^2+x)^2+3r^2(x^2+x)+r^2=0$$

或ハ

$$r^2(x^2+x+1)^3+q^3x^2(x+1)^2=0$$

9. 方程式 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ ノ第二項ト第四項トガ同一ノ變換ニヨリテ消失スル條件ヲ求メヨ。

解 $x=y+k$ ト置クト與ヘラレタル方程式ハ

$$y^4+(4k+p)y^3+(6k^2+3pk+q)y^2+(4k^3+3pk^2+2qk+r)y+k^4+pk^3+qk^2+rk+s=0$$

トナル。コノ方程式ニ於テ第二項ト第四項トヲ同時ニ消失セシメンガ爲メニハ

$$4k+p=0,\qquad 4k^3+3pk^2+2qk+r=0$$

ハ同時ニ成立セシメザルベカラズ。故ニ所要ノ條件ハ之等ノ二ツヨリ k ヲ消去シタルモノ即チ

$$p^3-4pq+8r=0$$

ナリ。

第三章

方程式ノ根

228. **定理 1.** 整方程式ハ $\alpha+\sqrt{\beta}$ ナル根ヲ有スレバソノ方程式ハ亦 $\alpha-\sqrt{\beta}$ ナル根ヲ有ス。但シ α ハ有理數ニシテ $\sqrt{\beta}$ ハ無理數ナリトス。

證明 與ヘラレタル方程式ヲ $p_0x^n+p_1x^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$ トセヨ。コノ左邊ノ x ニ $\alpha+\sqrt{\beta}$ ヲ代入スレバ, $\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{\beta}$ ナル形トナルベシ。而シテ假設ニヨリ $\alpha+\sqrt{\beta}$ ガ根ナルガ故ニ $\mathrm{A}+\mathrm{B}\sqrt{\beta}=0$, 而シテ A, B ハ共ニ有理數ナルガ故ニ

$$\mathrm{A}=0,\qquad \mathrm{B}=0$$

ナラザルベカラズ。次ニ與ヘラレタル方程式ノ左邊ノ x ニ $\alpha-\sqrt{\beta}$ ヲ代入スレバ $\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{\beta}$ トナル。然ルニ $\mathrm{A}=0$, $\mathrm{B}=0$ ナルガ故ニ $\mathrm{A}-\mathrm{B}\sqrt{\beta}=0$ 従ツテ $\alpha-\sqrt{\beta}$ ハ其根ナリ。

定理 2. $f(x)=0$ ハ實數ナル係數ヲ有シ且ツ $\alpha+i\beta$ ナル根ヲ有スレバ, ソノ方程式ハ亦コレト共軛ナル $\alpha-i\beta$ ヲ根ニ有ス。

證明 $f(x)=0$ ガ $\alpha+i\beta$ ナル根ヲ有スルトキ必ズ又 $\alpha-i\beta$ ナル根ヲ有スベキコトヲ證明セントス。

サテ $(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)=(x-\alpha)^2+\beta^2$ ナルガ故ニ $f(x)$ ヲコレニテ除スレバ

$$f(x)=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\mathrm{Q}+\mathrm{R}x+\mathrm{R}'\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

茲ニ Q ガ $f(x)$ ヲ $(x-\alpha)^2+\beta^2$ ニテ除シタル整商ニシテ $n-2$ 次ノモノ, R 及 R′ ハ夫々實數ナリ。サテ

$\alpha+i\beta$ ガ根ナルガ故ニ (1) ニ代入スレバ

$$0=\mathrm{R}(\alpha+i\beta)+\mathrm{R}'$$

$$\therefore\qquad \mathrm{R}\alpha+\mathrm{R}'=0,\quad 及ビ\quad \mathrm{R}\beta=0$$

従ツテ

$$\mathrm{R}=0,\qquad \mathrm{R}'=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ (1) ハ

$$f(x)=\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}\mathrm{Q}=(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta)\mathrm{Q}$$

トナル。即チ $f(x)=0$ ハ又 $\alpha-i\beta$ ナル根ヲ有ス。

例 $2+i$ ガ $x^4-9x^3+31x^2-49x+30=0$ ノ一ツノ根ナルコトヲ知リテコノ方程式ヲ解ケ。

解 定理ニヨリテ $2-i$ モ亦根ナリ。故ニ $x^4-9x^3+31x^2-49x+30$ ハ $(x-2-i)(x-2+i)$ 即チ x^2-4x+5 ニテ整除セラル。即チ

$$原方程式=(x^2-4x+5)(x^2-5x+6)=0$$

ナリ。ヨツテ $2+i$, $2-i$, 2, 3 ノ四ツハ求ムル根ナリ。

系 1. $\alpha+i\beta$ ガ n 次ノ整方程式 $f(x)=0$ ノ r 次ノ等根ナル時ハ $\alpha-i\beta$

モ亦 r 次ノ等根ナリ。

證明 $\alpha+i\beta$ ガ $f(x)=0$ ノ r 次ノ等根ニシテ $\alpha-i\beta$ ハ k 次ノ等根ナリトシ且ツ假リニ $k>r$ ナリトセヨ。サスレバ $f(x)$ ハ $\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}^r$ ニテ割リ切ラレ而カモ其商 $\varphi(x)$ ハ實係數ヲ有スル $(n-2r)$ 次ノ整式ナリ。而シテ假定ニヨリテ $\varphi(x)=0$ ハ $\alpha-i\beta$ ナル根ヲ $k-r$ 個ダケ有ス。而シテ之ト共軛ナル $\alpha+i\beta$ ナル根ガ一ツモナキコトニナル。コレ反理ナリ。故ニ $k>r$ ナラズ。同樣ニ $k<r$ ナラザルコトヲ證スルコトヲ得。故ニ $k=r$ ナリ。

系 2. 整方程式 $f(x)=0$ ニ虛根アル時ハ其數ハ必ズ偶數ナリ。

系 3. 整方程式 $f(x)=0$ ハ奇數次ノ時ニハ，少クトモ一ツノ實根アリ。

證明 若シ悉ク虛根ナリトスレバ其數ハ偶數個ナラザルベカラズ。然ルニ奇數次ノ方程式ナルヲ以テ其根ノ數ハ奇數個ナリ。ヨツテ少クトモ一ツノ實根アルコトヲ知ル。

系 4. 實數ノ係數ヲ有スル整式ハ一次若シクハ二次ノ實因數ノ積ニテ表ハスコトヲ得。玆ニ實因數トハ實數ヲ係數トスル因數ナリ。

證明 與ヘラレタル整式ヲ $f(x)$ トスル時，方程式 $f(x)=0$ ガ實根 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots\cdots$ ヲ有スル時ハ $f(x)$ ハ一次ノ實因數 $(x-\gamma_1), (x-\gamma_2)\cdots\cdots$ ヲ有シ，$f(x)=0$ ハ虛根 $\alpha_1+i\beta_1, \alpha_2+i\beta_2, \cdots\cdots$ ヲ有スル時ハ必ズ夫等ト共軛ナル虛根 $\alpha_1-i\beta_1, \alpha_2-i\beta_2\cdots\cdots$ ヲ有スルガ故ニ，$f(x)$ ハ

$$\{x-(\alpha_1-i\beta_1)\}\{x-(\alpha_1+i\beta_1)\}=(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2$$
$$\{x-(\alpha_2-i\beta_2)\}\{x-(\alpha_2+i\beta_2)\}=(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

等ノ二次ノ實因數ヲ有ス。ヨツテ證明セラレタリ。

系 5. $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$ ハ適當ナル x ノ正ノ値ニ對シテ p_0 ト同ジ符號ヲ有ス。

證明 系 4 ニヨリ

$$f(x)=p_0(x-\gamma_1)(x-\gamma_2)\cdots\cdots\{(x-\alpha_1)^2+\beta_1^2\}\{(x-\alpha_2)^2+\beta_2^2)\}\cdots\cdots$$

玆ニ $\gamma_1, \gamma_2,$ ハ實根ニシテ $\alpha_1+i\beta, \alpha_2+i\beta_2\cdots\cdots$ ハ虛根ナリトス。然ル時ハ實根ノ最大ナルモノヨリモ尙大ナル正ノ値ヲ x ニ與フレバ $f(x)$ ハ常ニ p_0 ト同ジ符號ヲ有スルコト明カナリ。

系 6. $f(x)=p_0x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$ ハ x ノ負ナル値ニ對シテハ其絕對値ヲ適當ニ大ナラシムレバ $(-1)^np_0$ ト同ジ符號ヲ有ス。

證明 $f(-x)=(-1)^np_0x^n+(-1)^{n-1}p_1x^{n-1}+(-1)^{n-2}p_2x^{n-2}+$
$\cdots\cdots+(-1)p_{n-1}x+p_n$

ヲ作ル時ハ，此整式ノ x ニ適當ニ大ナル正ノ値ヲ與フル時ハ系 5 ニヨリテ $(-1)^np_0$ ト同ジ符號ヲ有ス。從ツテ $f(x)$ ハ x ノ適當ナル絕對値ヲ有スル負ノ値ニ對シテ $(-1)^np_0$ ト同ジ符號ヲ有スルコト明カナリ。

229. 定理 3. 整函數ハ連續函數ナリ。

證明 x ノ整函數ヲ $f(x)=p_0x^n+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n$ ナリトセヨ。ε ヲ正ナリトシ且ツ $|h|<\varepsilon$ ナル h ヲトラバ

$$f(x+h)=p_0(x+h)^n+p_1(x+h)^{n-1}+\cdots\cdots+p_{n-1}(x+h)+p_n$$

ナリ。故ニ

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)=&h\{np_0x^{n-1}+(n-1)p_1x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}\}\\ &+h^2\left\{\frac{n(n-1)}{2!}p_0x^{n-2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2!}p_1x^{n-3}+\cdots\cdots+p_{n-2}\right\}\\ &+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &+h^np_0 \end{aligned}$$

$|h|<\varepsilon$ ナルガ故ニ上ノ等式ニ於ケル $h, h^2\cdots\cdots$ ノ係數ノ絕對値ヲ夫々 $\lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots$ ト置ケバ

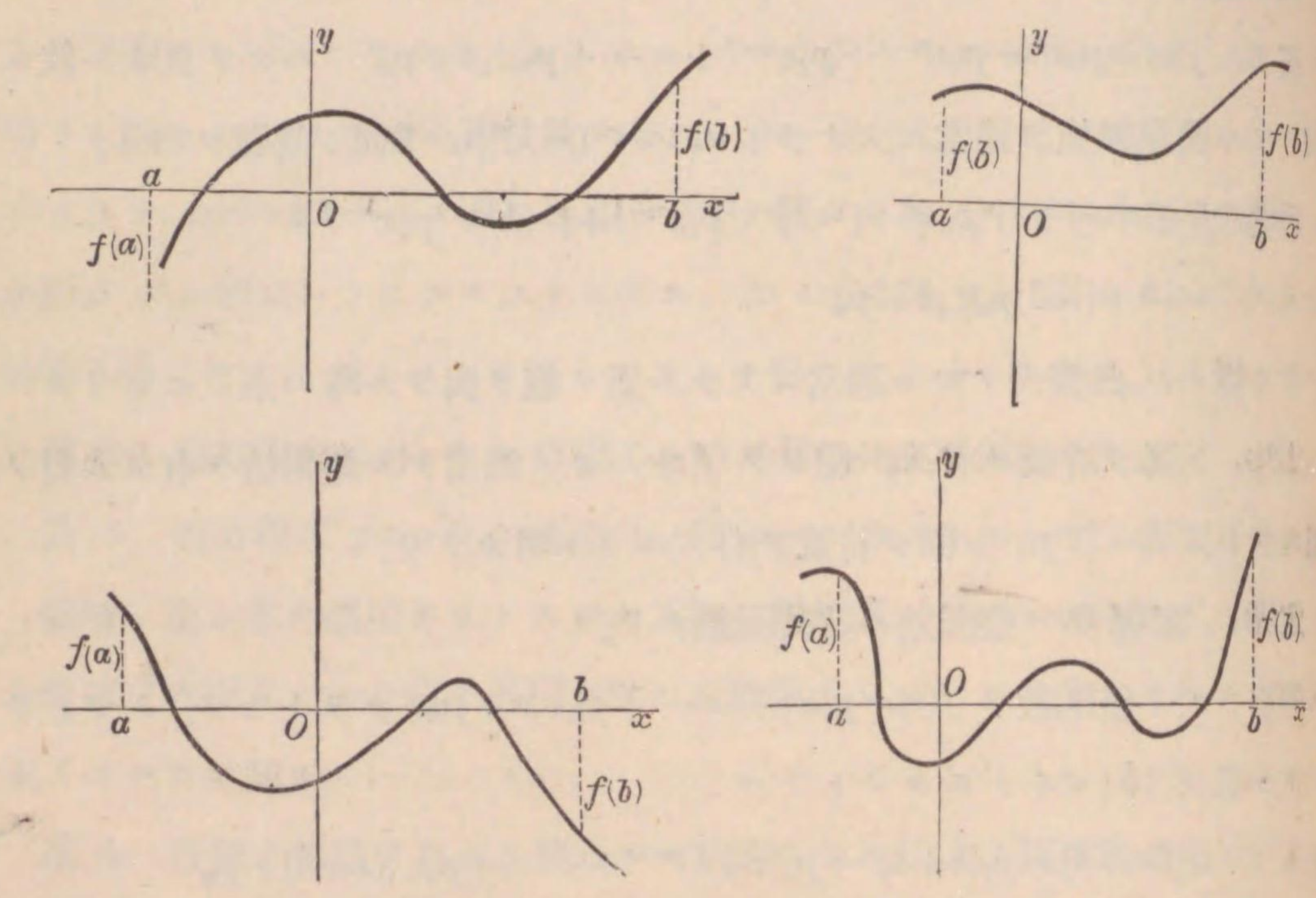
$$|f(x+h)-f(x)|<\varepsilon(\lambda_1+\varepsilon\lambda_2+\cdots\cdots)$$

即チ右邊ハ ε ヲ小ニスルコトニヨリテ如何ホドニテモ其ノ絕對値ガ小トナル。ヨツテ $f(x)$ ハ x ノ連續函數ナリ。

系 1. 任意ノ二ツノ實數 a, b ニ對シ $f(a)$ ト $f(b)$ トノ符號相反スル時ハ $f(x)=0$ ハ a ト b トノ間ニ奇數個ノ實根ヲ有ス。

系 2. $f(a)$ ト $f(b)$ トハ同符號ナル時ハ $f(x)=0$ ハ a ト b トノ間ニ實根ヲ有セザルカ又ハ偶數個有ス。

上ノ二ツノ系ハ整函數 $f(x)$ ガ x ノ連續函數ナルコトヲ利用シ幾何學的ニ考フレバ容易ニ了解スルヲ得ベシ。



定理 4. 最高冪ノ係數正ナル奇數次ノ整方程式ハ少クトモ絕對項ト異符號ナル一ツノ實根ヲ有ス。

證明 $f(x)=p_0x^{2n+1}+p_1x^{2n}+\cdots\cdots+p_{2n+1}=0 \quad p_0>0$

ヲ與ヘラレタル方程式トス，(若シ $p_0<0$ ナル時ハ方程式ニ -1 ヲ乘ズレバ良シ) 然ル時方程式ノ左邊ニ於ケル

x ノ代リニ $-\infty$ ト置ケバ $f(-\infty)=$負 (前節定理2系6)

x 〃 0 〃 $f(0)=p_{2n+1}$

x 〃 $+\infty$ 〃 $f(\infty)=$正 (前節定理2系5)

故ニ $p_{2n+1}>0$ ナル時ハ $-\infty$ ト 0 トノ間ノ x ノ或値ニ對シテ少クトモ一度ハ $f(x)=0$ トナルベク，從ツテ少クトモ一ツノ負根アリ。又 $p_{2n+1}<0$ ナル時ハ 0 ト $+\infty$ トノ間ノ x ノ或ル値ニ對シ少クトモ一度ハ $f(x)=0$ トナルベク，從ツテ少クトモ一ツノ正根アルベシ。

定理 5. 絕對項ノ負ナル偶數次ノ方程式 (最高冪ノ係數ハ正) ハ少クトモ二ツノ實根ヲ有シ一ツハ正ニシテ他ハ必ズ負ナリ。

證明 $f(x)=p_0x^{2n}+p_1x^{2n-1}+\cdots\cdots+p_{2n-1}x+p_{2n}=0$

ヲ與ヘラレタル方程式トス然ル時コノ左邊ニ

$x=-\infty$ ト置ケバ $f(-\infty)=$正

$x=0$ 〃 $f(0)=p_{2n}<0$

$x=+\infty$ 〃 $f(\infty)=$正

ヨツテ $-\infty$ ト 0 トノ間ニ少クトモ一ツ，0 ト $+\infty$ トノ間ニ少クトモ他ノ一ツノ根ヲ有ス。

230. でかるとノ符號規則 (Descartes' rule of sign) **ト呼バル、定理ヲ證明スベシ。**

定理 6. $f(x)=0$ ニ於ケル正根ノ數ハ其各項ノ係數ノ符號ノ變化ノ數ヨリモ多カラズ。

例ヘバ $f(x)=2x^4-3x^3+4x^2+7x-6=0$ ニ於テハ各項ノ係數ノ符號ノミヲ記セバ

$$+\quad-\quad+\quad+\quad-$$

卽チ $+-$ ノ變化ノ數ハ3個ナリ。故ニ正根ハ三ツヨリ多カラズト斷ズル定理ナリ。

證明 證明スルニ先ダチテ或多項式ニ $x-\alpha$ (α ヲ正トス) ヲ乘ズレバ其ノ乘積ノ符號ノ變化ハ原多項式ノ符號ノ變化ヨリモ少クトモ1個增スコトヲ證明スベシ。

例ヘバ多項式ノ係數ノ符號ヲ

$$+---+-+--$$

トセヨ。コレニ $x-\alpha$ ヲ乘ズルニハ符號ノ變化ノミヲ考フルガ故ニ $+-$ ヲ乘ズレバ可ナリ。然ル時運算ノ結果ハ次ノ如クナル。

$$\begin{array}{c} +---+-+-- \\ -+++-+-++ \\ \hline +-\mp\mp+-+-\mp+ \end{array}$$

卽チ最初 x ヲ乘ズル時ハ其ノ符號全ク原式ト同一ナレドモ，$-\alpha$ ヲ乘ジタ

ル第二部分積ニ於テハ其ノ符號全ク相反シ，而カモ第一部分積ヨリモ壹ツ宛下ツテ配列セラル。

サテ乘積ニ於ケル第二項ハ共ニ「−」ナルガ故ニ原多項式ト異ラザルモ，第三，第四兩項ニテハ±ノ符號定マラズ。若シ第二,第三,第四項ガ−−−ナル時及ビ−−+ナル時ハコノ部分ノ符號ノ變化ノ數ハ原式ト異ラズ。−++ナル時モ第五項ハ「+」ナルガ故ニ異ラズ。然レドモ−+−ナル時ハ原多項式ヨリモ確カニ符號ノ變化ヲ增ス。

然ルニ乘積ノ最後ノ項ハ常ニ必ズ原多項式ノ最後ノ項ト其ノ符號ヲ異ニスルガ故ニ第九項ガ「+」ナルモ「−」ナルモ必ズ符號ノ變化ガ一ツ增スベシ。要約スレバ任意ノ多項式ニ $x-\alpha(\alpha>0)$ ヲ乘ズレバ常ニ少クトモ符號ノ變化ニ於テ1個增加ス。

上ニ述ベタル符號ノ變化ニ關スル理論ヲ利用シテ本定理ヲ證明センニ $f(x)=0$ ガ $\alpha,\beta\cdots\cdots$ ナル p 個ノ正根アリトシ，其他ノ根ヲ $\alpha',\beta'\cdots\cdots$ ナル $n-p$ 個トス。然ル時ハ

$$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots(x-\alpha')(x-\beta')\cdots\cdots$$

便利ノ爲メニ一部ノ乘積

$$(x-\alpha')(x-\beta')\cdots\cdots=\varphi(x)$$

トス。卽チ $$f(x)=\varphi(x)(x-\alpha)(x-\beta)\cdots\cdots$$

サテ $\varphi(x)$ ナル多項式ニ $(x-\alpha)$ ヲ乘ズレバ少クトモ一ツノ符號ノ變化ノ增加アリ。故ニ p 個ノ正根ニ應ズベキ p 個ノ因數 $(x-\alpha),(x-\beta),\cdots\cdots$ ヲ $\varphi(x)$ ニ乘ズル事ニヨリテ $\varphi(x)$ ノ符號ノ變化ヨリモ少クトモ p 個符號ノ變化ガ增加ス。約言スレバ $f(x)$ ノ符號ノ變化ハ最初 $\varphi(x)$ ニ有セシ符號ノ變化ヨリモ少クトモ p 個大ナリ。故ニ $f(x)=0$ ノ正根ハ $f(x)$ ノ符號ノ變化ノ個數ヲ超ユルコトヲ得ズ。

系 $f(x)=0$ ノ負根ハ $f(-x)=0$ ノ正根ナルガ故ニ $f(x)=0$ ノ負根ノ數ハ $f(-x)=0$ ノ符號ノ變化ノ數ヲ超ユルコトヲ得ズ。

注意 上ノ定理ニヨリ虚根ノ數ヲ推定スルコトヲ得。例ヘバ

$$f(x)=x^6+5x^5+2x^3+3x^2-x+1=0$$

ニ於テ正根ノ數ハ二個ヲ超ユルコトヲ得ズ。

又 $$f(-x)=x^6-5x^5-2x^3+3x^2+x+1=0$$

ニ於テハ符號ノ變化二ツナルガ故ニ $f(x)=0$ ノ負根ハ二個ヲ超ユルコトヲ得ズ。

ヨツテ原方程式ニハ少クトモ二個ノ虚根ヲ有ス。

231. n 次ノ整方程式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

ノ根ノ絕對値ハ $1+\mathrm{M}$ ヨリモ小ナリ。但シ M ハ $1,\ \left|\frac{a_1}{a_0}\right|,\ \left|\frac{a_2}{a_0}\right|\cdots\cdots\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$ ノ中ノ最大ナルモノトス。

證明 絕對値ガ1ヨリモ大ナル一ツノ根ヲ α トスレバ

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+a_2\alpha^{n-2}+\cdots\cdots+a_n=0$$

從ツテ $$\alpha^n=-\frac{a_1}{a_0}\alpha^{n-1}-\frac{a_2}{a_0}\alpha^{n-2}-\cdots\cdots-\frac{a_n}{a_0}$$

或ハ $$|\alpha|^n=\left|-\frac{a_1}{a_0}\alpha^{n-1}-\frac{a_2}{a_0}\alpha^{n-2}-\cdots\cdots-\frac{a_n}{a_0}\right|$$

假定ニヨリ $$|\alpha|^n\leqq\mathrm{M}\{|\alpha|^{n-1}+|\alpha|^{n-2}+\cdots\cdots+1\}=\frac{\mathrm{M}\{|\alpha|^n-1\}}{|\alpha|-1}$$

然ルニ假定ニヨリテ $|\alpha|-1>0$ ナルヲ以テ

$$|\alpha|^n<\frac{\mathrm{M}|\alpha|^n}{|\alpha|-1}$$

コレヨリ容易ニ $|\alpha|<\mathrm{M}+1$ ナル結果ヲ得。

第三章 問題

1. $x^3+3x^2+x+1=0$ ハ正根ヲ有セザルコトヲ證セヨ。
2. $x^3+2x+1=0$ ハ一ツノ負根ト二ツノ虚根トヲ有スルコトヲ證セヨ。
3. $2x^4+3x^2+6x-5=0$ ハ二ツノ實根ト二ツノ虚根トヲ有スルコトヲ證セヨ。
4. $x^4+4x^2+2x-15=0$ ハ一ツノ正根ト一ツノ負根ト二ツノ虚根トヲ有スルコトヲ證セヨ。

解 $f(x)=x^4+4x^2+2x-15$ ……………………………………(1)

$f(-x)=x^4+4x^2-2x-15$ ……………………………………(2)

(1), (2) ノ符號ノ變化ハ各一個ナルヲ以テ正根及ビ負根ノ數ハ各一個以上アラズ。從ツテ虚根ガ二個或ハ四個アルベシ。

又 $f(x)$ ハ四次式ナルヲ以テ x ノ適當ニ大ナル正ノ値又ハ適當ニ大ナル絶對値ヲ有スル負ノ値ニ對シテ共ニ正トナリ且ツ $f(0)$ ガ負ナルヲ以テ少クトモ一個ノ負根ト正根トヲ有ス。ヨツテ正根, 負根ハ各一個ニシテ虚根ハ二個アルヲ知ル。

5. $x^5-4x^2+5=0$ ハ少クトモ二ツノ虚根ヲ有スルコトヲ證セヨ。

6. $x^n-1=0$ ニ於テ n ガ偶數ナル時ハ二ツノ實根ト $(n-2)$ 個ノ虚根トヲ有シ n ガ奇數ナルトキハ 1 ツノ實根ト $(n-1)$ 個ノ虚根トヲ有スルコトヲ證セヨ。

7. $x^{2n}-x^4+2x^3-3x^2+4=0$ ハ少クトモ $2n-6$ 個ノ虚根ヲ有スルコトヲ證セヨ。

8. p, q ハ共ニ正ナル時ハ $x^3-px+q=0$ ハ必ズ一個ノ負根ヲ有シ他ノ二ツノ根ハ共ニ正根ナルカ共ニ虚根ナリ。

9. p, q ハ共ニ正ナル時ハ $x^3+px+q=0$ ハ一ツノ負根ト二ツノ虚根トヲ有スルコトヲ證セヨ。

10. x ノ奇數冪ノミヲ有シ且ツ其ノ係數悉ク正ナル方程式ニハ零以外ニ實根ヲ有セザルコトヲ證セヨ。

11. $\dfrac{p^2}{x-a}+\dfrac{q^2}{x-b}+\cdots\cdots=x-m$ ガ悉ク實根ナリ。

解　假リニ $\alpha+i\beta$ ナル虚根アリトスレバ $\alpha-i\beta$ ナル共軛虚數モ亦コノ方程式ノ根ナラザルベカラズ。

$$\therefore\quad \frac{p^2}{(\alpha+i\beta)-a}+\frac{q^2}{(\alpha+i\beta)-b}+\cdots\cdots=(\alpha+i\beta)-m$$
$$\frac{p^2}{(\alpha-i\beta)-a}+\frac{q^2}{(\alpha-i\beta)-b}+\cdots\cdots=(\alpha-i\beta)-m$$

邊々相減ズレバ

$$2i\beta\left(\frac{p^2}{(\alpha-a)^2+\beta^2}+\frac{q^2}{(\alpha-b)^2+\beta^2}+\cdots\cdots+1\right)=0$$

然ルニ括弧内ハ正ナリ。故ニ $\beta=0$ ナラザルベカラズ。ヨツテ虚根ヲ有セズ。

12. 方程式 $x^3-9x-m(x^2-1)=0$ ハ m ノ正, 負ニ關セズ三ツノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。

ヤ

解　$f(x)=x^3-9x-m(x^2-1)$

ニ於テ x ヲ絶對値ノ大ナル負數トスレバ $f(x)$ ノ値ハ負數トナリ, 又 x ヲ適當ニ大ナル正ナラシムル時ハ $f(x)$ ノ値ハ正ノ數トナル。而シテ

$$f(-1)=8,\qquad f(1)=-8$$

ナルヲ以テ少クトモ一ツノ負根ト, 一ツノ正根トヲ有ス。從ツテ殘リノ一ツノ根モ實根ナリ。(若シ虚根ナラバソレト共軛ナル虚根ヲ有スルコトニナルガ故ナリ)

13. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n=0$

ニ於テ絶對値ノ最大ナル負ノ係數ヲ $-\mathrm{N}$ トスレバ, $\mathrm{N}+1$ ハ此方程式ノ正根ノ何レヨリモ大ナルコトヲ證セヨ。

解　$x>0$ ナル時ハ (正根ヲ考フルガ故ニ)

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_n>x^n-\mathrm{N}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+1)$$
$$=x^n-\mathrm{N}\frac{x^n-1}{x-1}=\frac{(x-1)x^n-\mathrm{N}(x^n-1)}{x-1}$$

然ルニ $x\geqq \mathrm{N}+1$ ナル時ハ $x-1=\mathrm{N}+\mathrm{N}'$ トナル。玆ニ N' ハ正數ニシテ $\mathrm{N}+1=x$ ナル時ニ限リ零トナル。故ニ

$$\frac{(x-1)x^n-\mathrm{N}(x^n-1)}{x-1}=\frac{(\mathrm{N}+\mathrm{N}')x^n-\mathrm{N}(x^n-1)}{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}=\frac{\mathrm{N}'x^n+\mathrm{N}}{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}=\frac{\mathrm{N}'(\mathrm{N}+\mathrm{N}'+1)^n+\mathrm{N}}{\mathrm{N}+\mathrm{N}'}>0$$

即チ $x\geqq \mathrm{N}+1$ ナル凡テノ x ニ對シテ $f(x)>0$ トナリ $f(x)=0$ トナラズ。即チ $f(x)=0$ ハ $\mathrm{N}+1$ ヨリ大ナル根ヲ有セズ。ヨツテ證明セラレタリ。

14. 方程式 $x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n=0$

ニ於テ $p_1>0,\ p_2>0, \cdots\cdots p_{r-1}>0,\ p_r<0$ ニシテ絶對値ノ最大ナル負ノ係數ヲ $-\mathrm{N}$ トスレバ. $\sqrt[r]{\mathrm{N}}+1$ ハ此方程式ノ正根ノ何レヨリモ大ナルコトヲ證セヨ。

解　$x>0$ ナル時ハ

$$f(x)=x^n+p_1x^{n-1}+p_2x^{n-2}+\cdots\cdots+p_{n-1}x+p_n>x^n-\mathrm{N}(x^{n-r}+\cdots\cdots+1)$$

ナルコト明カナリ。然ルニ此右邊ハ

$$\frac{x^{n-r+1}\{x^{r-1}(x-1)-\mathrm{N}\}+\mathrm{N}}{x-1}$$

ナルヲ以テ, 前題ニ倣ヒ $\mathrm{N}'\geqq 0$ ナリトシ $x=\sqrt[r]{\mathrm{N}}+1+\mathrm{N}'$ ト置ク時ハ

$$\frac{\{\sqrt[r]{\mathrm{N}}+1+\mathrm{N}'\}^{n-r+1}\{x^{r-1}(\sqrt[r]{\mathrm{N}}+\mathrm{N}')-\mathrm{N}\}+\mathrm{N}}{\sqrt[r]{\mathrm{N}}+\mathrm{N}'}$$
$$=\frac{\{\sqrt[r]{\mathrm{N}}+1+\mathrm{N}'\}^{n-r+1}\{(\sqrt[r]{\mathrm{N}}+1+\mathrm{N}')^{r-1}(\sqrt[r]{\mathrm{N}}+\mathrm{N}')-\mathrm{N}\}+\mathrm{N}}{\sqrt[r]{\mathrm{N}}+\mathrm{N}'}>0$$

故ニ $x \geqq \sqrt[r]{N}+1$ ナルトキハ $f(x)>0$ トナル。ヨツテ $f(x)=0$ ハ $\sqrt[r]{N}+1$ ヨリ大ナル根ヲ有セズ。

15. $\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$ ガ方程式 $x^3+px+q=0$ ノ根ナル時ハ -2α モ亦コノ方程式ノ根ナルコトヲ證セヨ。

解 $\alpha+i\beta$ ガ一ツノ根ナル時ハ $\alpha-i\beta$ モ亦其根ナリ。而シテ第三ノ根ヲ γ トスレバ，(γ ハ實根ナルコト明カナリ) 之等ノ三ツノ根ノ和ハ x^2 ノ係數ト符號ヲ異ニス。然ルニ x^2 ノ係數ハ零ナリ。故ニ

$$(\alpha+i\beta)+(\alpha-i\beta)+\gamma=0$$

故ニ

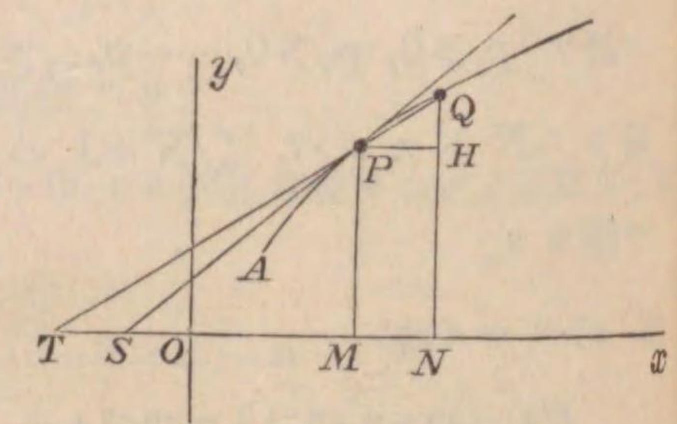
$$\gamma=-2\alpha$$

第四章

等根

232. 微係數

$f(x)$ ハ x ノ連續函數ナル時, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ナル極限値ヲ x ニ關スル $f(x)$ ノ微係數 (Differential coefficient) トイヒ, $f'(x)$ ヲ以ツテ表ハス。



コレヲ幾何學的ニ說明スルニ右圖ニ於ケル曲線 APQ ヲ函數 $f(x)$ ノぐらふトシ, P, Q ヲソノ上ノ任意ノ二點トス PM, QN ヲ夫々 x 軸上ヘノ垂線ナリトシ, P ヨリ QN ニ下セル垂線ノ足ヲ H トシ, MN ノ長サヲ h トスレバ

$$\mathrm{OM}=x, \qquad \mathrm{ON}=x+h \qquad ニシテ$$

ニシテ, $\qquad \mathrm{MP}=f(x), \quad \mathrm{NQ}=f(x+h)$

ナルガ故ニ $\qquad f(x+h)-f(x)=\mathrm{HQ}$

ナリ。ヨツテ $\qquad \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\tan \mathrm{Q\hat{P}H}=\tan \mathrm{P\hat{T}M}$

即チ割線 QP ノ x 軸トナス角ノ正切ニ等シ, 今 h ノ絶對値ヲ次第ニ小ニスレバ Q 點ハ P 點ニ近ヅキ割線 QP ハ漸次 P 點ニ於ケル切線ニ近ヅク, 故ニ微係數

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$$

ハ P 點ニ於ケル曲線ヘノ切線ノ x 軸トナス角 PSM ノ正切ニ等シ。

例 1. x^n ノ x ニ關スル微係數ヲ求メヨ。

解 定義ニヨリ微係數ハ

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+\dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2+\cdots\cdots}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left\{nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-1}h+\cdots\cdots\right\}$$

$$=nx^{n-1}$$

例 2. $x^4+3x^3+2x^2-x+8$ ノ微係數ヲ求メヨ。

解 $\quad f(x)=x^4+3x^3+2x^2-x+8$

$$f(x+h)=(x+h)^4+3(x+h)^3+2(x+h)^2-(x+h)+8$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=4x^3+9x^2+4x-1$$

例 3. $(x-a)(x-b)(x-c)$ ノ微係數ヲ求ム。

解 $\quad f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$

$$f(x+h)=(x+h-a)(x+h-b)(x+h-c)$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\{(x+h-a)(x+h-b)(x+h-c)-(x-a)(x-b)(x-c)\}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\left\{(x-a)\left(1+\frac{h}{x-a}\right)(x-b)\left(1+\frac{h}{x-b}\right)(x-c)\left(1+\frac{h}{x-c}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-(x-a)(x-b)(x-c)\right\}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{h}\left\{(x-a)(x-b)(x-c)\left(\frac{h}{x-a}+\frac{h}{x-b}+\frac{h}{x-c}+\cdots\cdots\right)\right\}\right]$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)$$

$$\therefore f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}$$

例 4. $(x-a)^r(x-b)(x-c)$ ノ微係數ヲ求メヨ。

解 上ト同ジ方法ヲ用フレバ

$$f'(x)=\frac{f(x)}{x-a}+\frac{f(x)}{x-a}+\cdots\cdots+\frac{f(x)}{x-b}+\frac{f(x)}{x-c}$$

$$=r(x-a)^{r-1}(x-b)(x-c)+(x-a)^r(2x-b-c)$$

ナリ。

233. 前節ヨリ次ノ定理ヲ得。

定理 1. $f(x)=0$ ハ悉ク相異ナル根ナル時ハ $f(x)$ ト $f'(x)$ トニ共通ノ因數ヲ有セズ。

定理 2. $f(x)=0$ ノ根ハ等根ヲ有スル時ハ $f(x)$ ト $f'(x)$ トノ間ニ一ツノ共通因數ヲ有シ，r 重根ヲ有スル時ハ $f(x)$ ト $f'(x)$ トノ間ニハ $r-1$ 個ノ共通ナル因數ヲ有ス。

第四章 問題

1. $x^3-12x+16=0$ ハ等根ヲ有スルコトヲ證セヨ。
2. $x^3-5x^2+3x+9=0$ ヲ解ケ。
3. $3x^4+16x^3+24x^2-16=0$ ハ三重根ヲ有スルコトヲ證セヨ。

解 $f(x)=3x^4+16x^3+24x^2-16$

トスレバ

$$f'(x)=12x^3+48x^2+48x$$

ニシテ且ツ此等ノ二ツノ最大公約數ヲ求ムレバ x^2+4x+4 ヲ得。而シテ $x^2+4x+4=0$ ハ -2 ナル等根ヲ有スルヲ以テ $f(x)=0$ ハ -2 ナル三重根ヲ有ス。

4. $x^3+qx+r=0$ ガ等根ヲ有スル爲メニハ $27r^2+4q^3=0$ ナラザルベカラズ。之ヲ證セヨ。
5. $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ガ二ツノ等根ヲ有スル時ハ之レ等ハ $\frac{1}{2}\frac{bc-ad}{ac-b^2}$ ナルコトヲ證セヨ。

第五章

根ノ近似値

234. 本章ニ於テ數字係數ヲ有スル方程式ノ實根ノ近似値ヲ求ムル二ツノ方法ヲ述ブベシ。前者ハほるなー氏ノ法則 (Horner's method) トイヒ，後者ハ連分數ノ理ヲ應用スルらぐらんじゅ (Lagrange) ノ解法ト稱セラル。

235. ほるなーノ方法

コノ方法ハ與ヘラレタル方程式ノ一ツノ實根ガ，何等カノ手段ニヨツテ連續二整數ノ間ニアルコトヲ確メタル後ニ用フル方法ナリ。

先ヅ最初ニ與ヘラレタル方程式ノ根ハ二ツノ連續整數ノ間ニアルコトヲ確メタル時ハ，變換法ニヨリテソノ方程式ノ各根ヨリ兩整數ノ中ノ小ナルモノヲ減ジタル數ヲ根トスル方程式ヲ作ルベシ。然ル時ハ新タニ出來タル方程式ノ根ハ 0 ト 1 トノ間ニ在ルベシ。

次ニコノ方程式ノ根ノ 10 倍ヲ根トスル方程式ヲ作ルベシ，然ル時ハ今出來タル方程式ノ根ハ 0 ト 10 トノ間ニアルベシ。

次ニ何等カノ手段ヲ加ヘテ二ツノ連續整數ノ間ニ在ルガ如キ根ヲ定ムベシ。然ル後マタ前ニ述ベシガ如クソノ根ヨリ連續二整數ノ中小ナルモノヲ減ズベシ，コノ方法ヲ繰リ返セバ漸次精密ナル値ヲ求ムルコトヲ得ベシ。

例 $x^3+2x^2-9=0$ ノ正根ヲ小數第二位マデ求メヨ。

解 試ミニ x ニ 1 ヲ入ルレバ -6 トナリ 2 ヲ入ルレバ 7 トナル故ニ二百二十九節定理 3 系 1 ニヨリコノ方程式ハ 1 ト 2 トノ間ニ一ツノ正根ヲ有ス。

先ヅ各根ヨリ 1 ダケ小ナル根ヲ有スル方程式ヲ作ランニハ x ノ代リニ $x+1$ ト置ケバ可ナリ。即チ $x^3+5x^2+7x-6=0$ ヲ得。次ニソノ根ノ 10 倍ヲ根トスル方程式ヲ作ル時ハ，$x^3+50x^2+700x-6000=0$ トナル。然ルニコノ方程式ニ $x=5$ ト置ケバ負トナリ，$x=6$ ト置ケバ正ト

ナル。故ニコノ根ハ5ト6トノ間ニアルベシ。

ヨリテ各根ヨリ5ヲ減ジタル數ヲ根トスル方程式ヲ作ル時ハ $x^3+65x^2+1275x-1125=0$ ヲ得。次ニ之等ノ根ヲ10倍シタル數ヲ根トスル第四ノ方程式 $x^3+650x^2+127500x-1125000=0$ ノ根ハ8ト9トノ間ニ在リ。故ニ求ムル根ハ 1.58…… ナリトス。

尙コレヨリモ更ニ精密ナルモノヲ得ンニハ最後ニ得タル方程式ノ根ヨリ8ヲ減ジタル數ヲ根トスル第五ノ方程式ヲ作リ。更ニ其根ノ10倍ヲ根トスル方程式ヲ作リ。以ツテソノ根ノ次ノ小數位ヲ定ムルナリ。

注意 上ノ方法ヲ用ヒテ虚根ヲ求ムル方法アリ。

例ヘバ $x^3+2x-4=0$ ノ虚根ヲ求メンニ假リニ $\alpha+i\beta$ トスレバ

$$(\alpha+i\beta)^3+2(\alpha+i\beta)-4=0$$

ナラザルベカラズ。整頓シテ

$$\alpha^3-3\alpha\beta^2+2\alpha-4+i(3\alpha^2\beta-\beta^3+2\beta)=0$$

故ニ

$$\alpha^3-3\alpha\beta^2+2\alpha-4=0 \cdots\cdots(1)$$

$$3\alpha^2\beta-\beta^3+2\beta=0 \cdots\cdots(2)$$

ナラザルベカラズ。(2) ヨリ $3\alpha^2-\beta^2+2=0 \cdots\cdots(3)$

(1) ト (3) トヨリ β ヲ消去スレバ

$$8\alpha^3+4\alpha+4=0 \cdots\cdots(4)$$

コノ方程式ノ中一ツノ實根ヲ求ムルコトヲ得バ，コレヲ (3) ニ代入シテ β ノ値ヲ得ベク從ツテ求ムル根 $\alpha+i\beta$ ハ得ラル。然レドモコノ方法ニテ虚根ヲ出サンニハ少クトモ二個ノ三次方程式ヲ解カザルベカラズ。ソノ手續甚ダ煩瑣ナリ。實用ニハ便ナラズ。

236. 實根ノ近似値ヲ求ムル第二ノ方法ハ連分數ヲ應用シ，ソノ根ヲシテ連分數ノ形ニテ出サントスルモノナリ。次ニ說明スベシ。

$f(x)=0$ ナル方程式アリトシ，二ツノ連續セル整數 p 及ビ $p+1$ ノ間ニ一ツノ實根アリト假定スベシ。然ル時ハソノ根ヲシテ $p+\frac{1}{x_1}$ ト置クヲ得ベシ，但シ x_1 ハ1ヨリ大ナル正數ナリトス。

故ニ與ヘラレタル方程式ハ $p+\frac{1}{x_1}$ ニヨリテ滿足スベキ筈ナリ。即チ

$$f\left(p+\frac{1}{x_1}\right)=0$$

コレヲ整頓シ且ツ x_1 ニ就イテノ方程式ニ直シ之ヲ $\varphi(x_1)=0$ トスレバ，コノ方程式ハ1ヨリモ大ナル根ヲ有ス。ソコデ x_1 ヲ $1, 2, 3, \ldots\ldots$ トシソノ符號ノ變化ニヨリテ根 x_1 ノ存在スベキ區間 (interval) $(q, q+1)$ ヲ知ルコトヲ得ベシ。

然ル時ハ $x_1=q+\frac{1}{x_2}$ $x_2>1$

ト置クヲ得ベシ。故ニ

$$\varphi(x_1)=\varphi\left(q+\frac{1}{x_2}\right)=0$$

コレヲ整頓シ x_2 ニ關スル方程式トシ夫レヲ $\psi(x_2)=0$ トスレバコノ方程式ハ1ヨリモ大ナル實根ヲ有ス。ソコデ x_2 ヲ $1, 2, 3, \ldots\ldots$ トシソノ符號ノ變化ニヨリテ根 x_2 ノ存在スベキ區間 $(r, r+1)$ ヲ求ム。

即チコノ方法ヲ繰リ返ス時ハ

$$x=p+\frac{1}{x_1}=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{x_2}}=p+\cfrac{1}{q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{x_3+\cdots}}}$$

ヲ得ベシ。

例 $x^3-5x+1=0$ ノ一ツノ實根ハ2ト3トノ間ニ在ルコトヲ知リテコレヲ求メヨ。

解 $f(x)=x^3-5x+1=0$

$$f\left(2+\frac{1}{x_1}\right)=\left(2+\frac{1}{x_1}\right)^3-5\left(2+\frac{1}{x_1}\right)+1=0$$

$$=-1+\frac{7}{x_1}+\frac{6}{x_1^2}+\frac{1}{x_1^3}=0$$

分母ヲ拂ヘバ

$$\varphi(x_1)=x_1^3-7x_1^2-6x_1-1=0$$

コノ方程式ヲ滿足スル x_1 ハ7ト8トノ間ニ在リ。故ニ $x_1=7+\frac{1}{x_2}$ ト置クコトヲ得ベシ。

$$\therefore\ \varphi(x_1)=\varphi\left(7+\frac{1}{x_2}\right)=\left(7+\frac{1}{x_2}\right)^3-7\left(7+\frac{1}{x_2}\right)^2-6\left(7+\frac{1}{x_2}\right)-1=0$$

$$=-43+\frac{43}{x_2}+\frac{14}{x_2^2}+\frac{1}{x_2^3}=0$$

$$\therefore \quad \psi(x_2)=43x_2^3-43x_2^2-14x_2-1=0$$

コノ方程式ヲ滿足スル x_2 ハ 1 ト 2 トノ間ニ在ルガ故ニ $x_2=1+\frac{1}{x_3}$ ト置クコトヲ得。故ニ求ムル實根ハ $2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}$ ナリ。

第五章　問　題

1. 30 ノ立方根ヲ求メヨ。
2. $x^3+3x^2-6=0$ ノ正根ヲ小數第二位マデ求メヨ。
3. $x^3+2x^2-7x-9=0$ ノ正根ヲ小數第二位マデ求メヨ。
4. $x^3-8x-40=0$ ノ正根ヲ小數第三位マデ求メヨ。
5. $x^3-x^2+12x+24=0$ ノ一ツノ根ハ -1 ト -2 トノ間ニアルコトヲ知リテ其根ノ値ヲ小數第二位マデ求メヨ。
6. $x^3-7x+7=0$ ハ $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}$ ナル根ヲ有スルコトヲ證セヨ。
7. $x^3-3=0$ ノ實根ハ $1+\frac{1}{2+}\,\frac{1}{3+}\,\frac{1}{1+}\cdots\cdots$ ナルコトヲ證シヨツテ以ツテ $x^3+3=0$ ノ一ツノ根ハ $-1.44\cdots\cdots$ ナルコトヲ證セヨ。

第十八編　數　　論

237. 數論ハ主トシテ正ノ整數ヲ論ズル數學ノ最高部門ノ一ニシテ，ソノ理論高尚ニシテ初學者ノ能ク堪ユル所ノモノニアラズ。サレバ本編ニ於テハソノ最モ重要ニシテ且ツ最モ簡單ナルモノノミニ限リテ說述セント欲ス。

定理 1. 素數ノ數ハ無限ニ存在ス。*

證明 モシ素數 (Prime number) ノ數ハ有限ナリトスレバコレ等ノ中ニテ最モ大ナルモノアルベシ，コレヲ p トス。

今 $p!$ ヲ作ラバ 1 ヨリ p マデノ凡テノ整數ニテ整除シ得ベキガ故ニ從ツテ 1 ヨリ p マデノ素數ノ凡テニテ整除セラル。

然ルニ $p!+1$ ハ p 又ハ p ヨリ小ナル素數ニテハ整除シ得ズ。何トナレバ剩餘トシテ常ニ 1 ヲ得ベケレバナリ。

ヨリテ $p!+1$ ハ p ヨリ大ナル素數ニテ整除シ得ルカ又ハソレ自身素數ナリ。何レノ場合ニモ p ヨリ大ナル素數ノ存在スルコトヲ知ル。ヨツテ證セラレタリ。

注意 11, 13 ノ如キ 17, 19 ノ如キ 29, 31 ノ如キソノ差 2 ナル素數ハ無限ニ存在スルコトニ關シテハ現今ニテモ尙確立セズ。

定理 2. p ガ ab ヲ整除シ且ツ a ト互ニ素ナル時ハ p ガ必ズ b ノ約數ナリ。

證明 $\frac{a}{p}$ ヲ有限單純連分數ニ化セヨ。ソノ第 n 漸近分數ヲ $\frac{a}{p}$ ソレ自身ナリトシ，第 $n-1$ 漸近分數ヲ $\frac{x}{y}$ トスレバ

$$ay-px=\pm 1$$

$$\therefore \quad aby-bpx=\pm b$$

然ルニ bpx ハ p ノ倍數ニシテ且ツ假定ニヨリテ ab ハ p ニテ整除セラル、

* ゆうくりつど (Euclid 330 B. C. ?–275 B. C. ?) ガ已ニ此定理ヲ知レリ。

ガ故ニ $aby-bpx$ ガ p ニテ整除セラル。從ツテ b モ亦 p ニテ整除セラレザルベカラズ，ヨツテ定理ハ證明セラレタリ。

注意 p ノ倍數トイフ代リニ $\mathrm{M}(p)$ ナル記號ヲ用フ。

系 1. 素數 p ハ $abcd\cdots\cdots$ ヲ整除スルトキハコレ等ノ因數ノ中何レカ一ツハ必ズ $\mathrm{M}(p)$ ナリ。

系 2. a 及ビ b ハ共ニ c ト互ニ素ナルトキハ ab ハ又 c ト互ニ素ナリ。

系 3. a ハ素數 $p_1, p_2, \cdots\cdots$ ノ各々ニテ整除セラルル時ハ a ハ必ズ $\mathrm{M}(p_1 p_2 \cdots\cdots)$ ナリ。

238. $\frac{a}{b}$ ナル分數ニ含マルル最大整數ヲ表ハスニ $\mathrm{I}\left(\frac{a}{b}\right)$ ナル記號ヲ用フ。

例ヘバ $\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$ ナルガ故ニ $\mathrm{I}\left(\frac{10}{3}\right)=3$ ニシテ，$\frac{12}{5}=2\frac{2}{5}$ ナルガ故ニ $\mathrm{I}\left(\frac{12}{5}\right)=2$ トスルガ如シ。（コノ記號ヲガウスノ記號トイフ）

定理 3. $n!$ ニ含マルル素數 p ノ最高冪ノ指數ハ

$$\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^3}\right)+\cdots\cdots \quad ナリ。$$

證明 p ヲ任意ノ素數トス。$n!$ ノ因數ノ中ニ於テ p ニテ整除シ得ベキ因數ハ

$$p, 2p, 3p, \cdots\cdots, \mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)p$$

ヨツテソノ數ハ $\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)$ ナリ。次ニ $n!$ ノ因數ノ中ニテ p^2 ニテ整除シ得ベキ因數ハ

$$p^2, 2p^2, 3p^2, \cdots\cdots, \mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)p^2$$

ヨツテソノ數ハ $\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)$ ナリ。以下同樣ノ理由ニヨリテ $n!$ ニ於テ素數 p ヲ含ム所ノモノハ總テニ於テ

$$\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^3}\right)+\cdots\cdots$$

個ナリ。

例題 $20!$ ハ 2 ノ幾冪ヲ含ムカ

解

$$\mathrm{I}\left(\frac{20}{2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{20}{4}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{20}{8}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{20}{16}\right)=10+5+2+1=18$$

$\therefore \quad 20!=\mathrm{A}\times 2^{18}$ （茲ニ A ハ整數ナリ）

定理 4. n 個ノ連續整數ノ乘積ハ $n!$ ニテ整除セラル。

證明 n 個ノ連續整數ヲ

$m+1, m+2, m+3, \cdots\cdots, m+n$ トセヨ。然レバ次ノ恒等式アリ

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+n)}{n!}=\frac{(m+n)!}{m!\,n!}={}_{m+n}\mathrm{C}_n$$

然ルニ ${}_{m+n}\mathrm{C}_n$ ハ組合セノ定義ニヨリテ必ズ整數ナリ。

ヨリテ $(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+n)$ ハ $n!$ ニテ整除セラル。

別證 コノ定理ハ前ノ定理ヲ用ヒテ證明スルコトヲ得。今 p ヲ $m+n$ ヨリ小ナル任意ノ素數ナリトセヨ，$(m+n)!$ ニ含マルル p ノ冪指數ハ

$$\mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p^3}\right)+\cdots\cdots$$

$m!$ 及ビ $n!$ ニ含マルル p ノ冪指數ハ夫々

$$\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{m}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{m}{p^3}\right)+\cdots\cdots$$

$$\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^3}\right)+\cdots\cdots$$

然ルニ $\quad \frac{m}{p}=\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+x \qquad$ 但シ $x<p$

$\frac{n}{p}=\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+y \qquad$ 但シ $y<p$

$\therefore \quad \frac{m+n}{p}=\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+x+y \qquad$ 但シ $x+y<2p$

ヨツテ $x+y<p$ ナラバ $\mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p}\right)=\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)$

$p<x+y$ ナラバ $\mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p}\right)=\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+1$

何レニシテモ $\quad \mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p}\right)\geqq\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)$

同樣ニ $\quad \mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p^2}\right)\geqq\mathrm{I}\left(\frac{m}{p^2}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)$

………………

$$\therefore\ \mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{m+n}{p^2}\right)+\cdots\cdots\geqq\mathrm{I}\left(\frac{m}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{m}{p^2}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p}\right)+\mathrm{I}\left(\frac{n}{p^2}\right)+\cdots\cdots$$

コノ不等式ハ m, n 及ビ p ノ如何ニ關セズ成立ス。ヨツテ $m+n$ ヨリ小ナル任意ノ素數 p ヲトルトキハ $(m+n)!$ ニ含マル、p ノ冪指數ハ $m!n!$ ニ含マル、ソレヨリモ常ニ小ナラズ。故ニ $(m+n)!$ ハ $m!n!$ ニテ整除セラル。ヨリテ $(m+1), (m+2)\cdots\cdots(m+n)$ ハ常ニ $n!$ ニテ整除セラルベシ。

例 $n(n+1)(n+5)$ ハ 6 ニテ整除セラル、コトヲ證セヨ。

$$n(n+1)(n+5)=n(n+1)(n+2)+3n(n+1)$$

然ルニ　$n(n+1)(n+2)=\mathrm{M}(3!)=\mathrm{M}(6)$

又　$n(n+1)=\mathrm{M}(2!)=\mathrm{M}(2)$ 從ツテ $3n(n+1)=\mathrm{M}(6)$

ヨツテ證明セラレタリ。

239. **定理 5** n ガ素數ニシテ $m\neq\mathrm{M}(n)$ ナル時ハ $m^{n-1}-1=\mathrm{M}(n)$ ナリ。

證明 吾人ハ已ニ第八編百十節ニ於テ n ガ正ノ整數ナルトキ $(a+b+c+\cdots\cdots)^n=\Sigma\dfrac{n!}{r!s!t!\cdots\cdots}a^rb^sc^t\cdots\cdots$ ナルコトヲ述ベタリ。卽チ $r, s, t\cdots\cdots$ ノ如何ニ關セズ $\dfrac{n!}{r!s!t!\cdots\cdots}$ ハ正ノ整數ナルベキナリ，然ルニ今 n ヲ素數トスレバ $r, s, t\cdots\cdots$ ト互ニ素ナルガ故ニ $\dfrac{(n-1)!}{r!s!t!\cdots\cdots}$ ハ正ノ整數タルベク，從ツテ $(a+b+c+\cdots)^n$ ノ展開式ニ於ケル $a^n, b^n, c^n\cdots\cdots$ 等ノ項ヲ除キタル他ノ諸項ノ係數ハ凡テ n ノ倍數ナルベシ。

$$\therefore\quad (a+b+c+\cdots\cdots)^n=a^n+b^n+c^n+\cdots\cdots+\mathrm{M}(n)$$

コノ式ニ於テ $a, b, c,\cdots\cdots$ ハ m 個アリトシ且ツ悉ク 1 ト假定スレバ

$$m^n=m+\mathrm{M}(n)$$
$$\therefore\quad m(m^{n-1}-1)=\mathrm{M}(n)$$
$$\therefore\quad m^{n-1}-1=\mathrm{M}(n)$$

注意 コノ定理ヲへるまー(Fermat 1608?—1665) ノ定理トイフ。へるまーハ佛國ノ法律家ニシテ餘暇ニ數學ヲ研究セシニモ拘ラズ曠古ノ大數學家トナリタリ。へるまーハ好ンデでぃおはんたすノ書ヲ讀ミ，所々ニ自己ノ發見セル定理ヲ記入セリ。

然レドモ餘白ナキ爲ニ證明ヲ記セザリキ。從ツテへるまーノ大定理ト呼バル、次ノ定理卽チ n ガ 2 ヨリ大ナル自然數ナルトキハ

$$x^n+y^n=z^n$$

ナルガ如キ自然數 x, y, z ハ存在セズ

トイフガ如キモノハへるまーガ興味アル問題ナリト手記セシニモ拘ラズ，證明ヲ記サザリシヲ以テ，後世ノ學者ガ證明セント努メシガ何レモ失敗ニ終リ，今日ニ於テモ未ダ完全ナル證明ヲ得ズ。くんめるガ之ヲ解決セントスル間ニ本來ノ目的ハ達セザリシモ理想數ナル概念ヲ得，別ノ方面ニ數論ヲ發展セシメタリ。

定理 6. a ト b トハ互ニ素ナル時ハ $a, 2a, 3a\cdots\cdots(b-1)a$ ヲ b ニテ除スレバソノ剩餘悉ク異ナルモノナリ。

證明 $a, 2a,\cdots\cdots(b-1)a$ ノ中ノ任意ノ二ツヲトリソレヲ ma, na トス。之ヲ b ニテ除シ同一ノ剩餘 r ヲ得タリトスレバ如何ナル矛盾ガ生ズルヤヲ見ンニ

$$ma=\mathrm{M}(b)+r\qquad na=\mathrm{M}(b)+r$$

邊々相減ズレバ $a(m\sim n)=\mathrm{M}(b)$ ナラザルベカラズ。

然ルニ a ト b トハ互ニ素ナルガ故ニ，$m\sim n=\mathrm{M}(b)$ ナラザルベカラズ。然ルニ m, n ハ共ニ b ヨリモ小ナル數ナルヲ以テ決シテカ、ルコト能ハズ。卽チ ma 及ビ na ヲ b ニテ除シテ同一ノ剩餘 r ヲ生ズルコトナシ。

定理 7. n ガ素數ナルトキハ $(n-1)!+1$ ハ $\mathrm{M}(n)$ ナリ。

證明　　$1, 2, 3,\cdots\cdots n-1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

ナル數列ノ各ニ n ヨリ小ナル任意ノ數 a ヲ乘ジテ第二ノ數列

$$a, 2a, 3a,\cdots\cdots(n-1)a\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヲ作レ，假定ニヨリテ a ハ n ヨリ小ニシテ n ガ素數ナルガ故ニ a ト n トハ互ニ素ナリ。

ヨツテ定理 6 ニヨリテ數列 (2) ヲ n ニテ除スルトキハソノ剩餘悉ク相異ナルガ故ニ，夫等ノ剩餘ハ

$$1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots n-1$$

ノ何レカナリ。卽チ (1) ナル數列ニ任意ノ數 a(n ヨリ小ナル) ヲ乘ズレバ之レニ對應シテ數列 (2) ヲ生ジ，而カモソレヲ n ニテ除スルトキ剩餘 1 ヲ得ルモノ

ハ只一ツナリ。コレヲ ma トス。卽チ

$$ma=\mathrm{M}(n)+1 \cdots\cdots\cdots (3)$$

(3) ヲ更ニ研究スルニ a ガ $n-1$ ナルカ又ハ 1 ナラザル限リハ a ハ m ニ等シカラズ。今ソレヲ說明センニ, 若シ $a=m$ ナラバ (3) ヨリ

$$a^2=\mathrm{M}(n)+1$$

卽チ

$$(a+1)(a-1)=\mathrm{M}(n) \cdots\cdots\cdots (4)$$

然ルニ假定ニヨリテ n ガ素數ナルガ故ニ (4) ガ成立スルガ爲メニハ $(a+1)=\mathrm{M}(n)$ ナルカ又ハ $(a-1)=\mathrm{M}(n)$ ナラザルベカラズ。然ルニ a ハ n ヨリ小ナリ。ヨツテ $a+1=n$ ナルカ又ハ $a-1=0$ ナラザルベカラズ。

コレニヨツテ數列 (2) ニ於テ a ヲ $n-1$ 又ハ 1 トセザル限リハ $m \neq a$ ナルガ故ニ m モ a モ共ニ

$$2,\ 3, \cdots\cdots n-2$$

ノ中ニテ各異ナル一對ヲ選バザレバ

$$ma=\mathrm{M}(n)+1$$

トスルコトヲ得ズ。而シテ $2, 3, \cdots\cdots n-2$ ハ $n-3$ 個アルガ故ニ偶數個ナリ。故ニ m ト a トヲ對ニトリテ ma ヲ $\mathrm{M}(n)+1$ ナラシムル方法ハ $\dfrac{n-3}{2}$ 通リナリ。ヨツテ之レ等ノ乘積ハ $\mathrm{M}(n)+1$ ノ乘積ナルガ故ニ

$$2,\ 3, \cdots\cdots n-2=\mathrm{M}(n)+1$$

$$\therefore\quad 1.2.3.\cdots\cdots n-1=(n-1)!=(n-1)\mathrm{M}(n)+(n-1)=\mathrm{M}(n)-1$$

卽チ $(n-1)!+1=\mathrm{M}(n)$ * ナリ。

240. n ヨリモ小ニシテ且ツ n ト互ニ素ナル數ノ個數ヲ $\psi(n)$ ナル記號ニテ示シ, コレヲおいらーノ函數 (Euler's function) トイフ。但シ茲ニハ 1 モ n ト互ニ素ナリトス。

例ヘバ 15 ト互ニ素ナル數ハ $1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$ ノ 8 個アルガ故ニ

* コノ定理ハうゐるそん Wilson ニ負フ所ノモノナリ。故ニ又うゐるそんノ定理トモイフ。

$\psi(15)=8$ ナリ。

定理 8. $p, q, r\cdots\cdots$ ハ凡テ素數ニシテ $n=p^a q^b r^c \cdots\cdots$ ナル時ハ

$$\psi(n)=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots\cdots \text{ナリ。}^{*}$$

證明 p ト互ニ素ナラズシテ且ツ n ヲ超エザル數ハ

$$p,\ 2p,\ 3p \cdots\cdots \frac{n}{p}p$$

ナルガ故ニ都合 $\dfrac{n}{p}$ 個アリ。ヨツテ p ト互ニ素ニシテ且ツ n ヲ超エザル數ノ個數ハ

$$n-\frac{n}{p}=n\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

次ニ p 及ビ q ト互ニ素ニシテ且ツ n ヲ超エザル數ノ個數ハ

$$n-\frac{n}{p}-\frac{n}{q}+\frac{n}{pq}=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

pqノ倍数
pqノ倍数ハ既ニ
第一回目ニ除カレアル故

一般ニ $p, q, r, \cdots\cdots$ ト互ニ素ニシテ且ツ n ヲ超エザル數ノ個數ハ

$$n-\left(\frac{n}{p}+\frac{n}{q}+\frac{n}{r}+\cdots\cdots\right)+\left(\frac{n}{pq}+\frac{n}{pr}+\cdots\cdots\right)$$
$$-\left(\frac{n}{pqr}+\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots$$
$$=n\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{r}\right)\cdots\cdots$$

注意 コノ定理ハ $p, q, r\cdots\cdots$ ニハ關係スルモ $a, b, c\cdots\cdots$ ニハ無關係ナリ。

系 1. $a=bc$ ニシテ且ツ b ト c トハ互ニ素ナル時ハ $\psi(a)=\psi(b)\times\psi(c)$ ナリ。

系 2. $a=bcd\cdots\cdots$ ニシテ且ツ $b, c, d\cdots\cdots$ ハ互ニ素ナルトキハ

$$\psi(a)=\psi(b)\times\psi(c)\times\psi(d)\times\cdots\cdots \text{ ナリ。}$$

241. 定理 $n=p^a q^b r^c\cdots\cdots$ ニシテ $p, q, r\cdots\cdots$ ハ悉ク素數ナルトキハ n ヲ整除シ得ル數ノ個數ハ $(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots\cdots$ ナリ。

證明 p^a ヲ整除シ得ルモノハ $1, p, p^2, \cdots\cdots, p^a$ ニシテソノ個數 $1+a$ ナリ。而シテコレ等ハ又 n ヲ整除ス。同樣ニ q^b ヲ整除シ得ル數ハ $1, q^2, q^2, q^3, \cdots\cdots, q^b$ ニシテソノ個數 $1+b$ ナリ。而シテコレ等ハ又 n ヲ整除ス。一般ニ n ヲ整除シ得ル數ハ

* コレおいらーニヨツテ與ヘラレタルモノナリ。

$$(1+p+p^2+p^3+\cdots\cdots+p^a)(1+q+q^2+q^3+\cdots\cdots+q^b)(1+r+r^2+r^3+\cdots\cdots+r^c)\cdots$$

ノ展開ニ表ハルヽ項ナリ。而シテソノ項數ハ $(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots$ ナルコト明カナリ。ヨツテ定理ハ證明セラレタリ。

注意 1. コノ定理ハ指數 $a\ b, c\cdots\cdots$ ニハ關係スルモ $p, q, r, \cdots\cdots$ ニハ無關係ナリ。

注意 2. 上ノ定理ニ於テ n ヲ整除シ得ルモノヽ數ノ中ニハ 1 及ビ n ソレ自身ヲモ含メリ。

$(1+p+p^2\cdots)(1+q+\cdots)(\quad)$

系 1. n ノ約數ハ前ニ記セル多項式ノ諸項ナルガ故ニ約數ノ總和ハ

$$\frac{1-p^{a+1}}{1-p}\ \frac{1-q^{b+1}}{1-q}\ \frac{1-r^{c+1}}{1-r}\cdots\cdots$$ ナリ。数値

系 2. n ヲ二ツノ因數ノ對ニ分チ且ツソレ等ヲ互ニ素ナラシムル方法ハ 2^{m-1} 通リナリ。但シ m ハ $p, q\ r\cdots\cdots$ ノ個數ナリトス。

證明 n ヲ互ニ素ナル因數ノ對ニ分ツニハ，一方ハ p ニテ整除セラルヽ時ハ他ハ p ニテ整除セラレザルコトヲ要ス。即チ一方ノ因數ハ p ヲ含ムトキハ他ノ因數ニ p ヲ含マシムベカラズ。$q, r\cdots\cdots$ ニ關シテモソノ理同一ナリ。

ヨリテ互ニ素ナル因數ハ次ノ連乘積ノ各項ニ表ハル。

$$(1+p^a)(1+q^b)(1+r^c)\cdots\cdots$$

然ルニ $p, q, r\cdots\cdots$ ノ個數ハ m ナリトスレバ上ノ乘積ノ項數ハ

$$(1+1)(1+1)(1+1)\cdots\cdots=2^m$$

ヨツテ之レヲ對ニ組ミ合スレバ $2^m\div2=2^{m-1}$ ナリ。即チ證明セラレタリ。

注意 上ノモノニハ 1 ト n トヲ互ニ素ナル一對トシテ算入セリ。

系 3. n ヲ二ツノ因數ニ分ツ方法ハ n ガ平方數ナラザルカ又ハ平方數ナルカニ從ヒテ

$$\frac{1}{2}(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots$$

ナルカ　$$\frac{1}{2}\{(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots+1\}$$ ナリ。

證明 n ヲ整除スル凡テノ因數ノ個數ハ

$$(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots$$

ナリ。ヨツテコレヲ二ツノ因數ノ群ニ分テバ

$$\frac{1}{2}(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots$$

ナリ。然ルニモシ n ガ平方數ナル時ハ $\sqrt{n}$ ニ對シテ $\sqrt{n}$ ガ對應スル一組アルガ故ニ

$$\frac{1}{2}\{(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots-1\}+1$$

$$=\frac{1}{2}\{(1+a)(1+b)(1+c)\cdots\cdots+1\}$$

ナリ。

第十八編　問　題

1. $n(n+1)(2n+1)$ ハ 6 ノ倍數ナルコトヲ證セヨ。

2. $x-y$ ハ偶數ナルトキハ $x^2-y^2=\mathrm{M}(4)$ ナルコトヲ證セヨ。

3. n ガ 3 ヨリ大ナル素數ナルトキハ $n(n^2-1)(n^2-4)=\mathrm{M}(360)$ ナルコトヲ證セヨ。

4. n ガ 5 ヨリ大ナル素數ナルトキハ $n^4-1=\mathrm{M}(240)$ ナルコトヲ證セヨ。

5. 2^n-1 ガ素數ナルトキハ $2^{n-1}(2^n-1)$ ノ凡テノ約數ノ和ハ（但シ 1 ヲ含ミソノ數自身ヲ省ク）ソノ數ニ等シキコトヲ證セヨ。数値

解 2^n-1 ガ素數ナルガ故ニ $2^{n-1}(2^n-1)$ ノ素因數ハ 2 及ビ 2^n-1 ナリ。ヨツテコノ數ノ凡テノ約數ハ

$$(1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1})(2^n-1)$$

ノ乘積ニ表ハルヽ項ノ凡テナリ。而シテソノ和ハ

$$\frac{1-2^n}{1-2}\{1+(2^n-1)\}=2^n(2^n-1)$$

然ルニコレニハソノ數自身ヲモ含メルガ故ニコレヲ減ズレバ

$$2^n(2^n-1)-2^{n-1}(2^n-1)=2^{n-1}(2^n-1)$$

即チ與ヘラレタル數ニ等シ。

注意 約數ノ凡テノ和ハソレ自身ニ等シキガ如キ數ヲ完全數 (Perfect number) トイフ。

6. n ガ奇數ナルトキハ $(n^2+3)(n^2+7)=\mathrm{M}(32)$ ナルコトヲ證セヨ。

7. p ガ 3 ヨリ大ナル素數ナルトキ $p^2-1=\mathrm{M}(24)$ ナルコトヲ證セヨ。

8. $3^{4n+2}+2\times 4^{3n+1}=\mathrm{M}(17)$ ナルコトヲ證セヨ。

9. 歸納法ニヨリテ $2^{2n+1}-9n^2+3n-2=\mathrm{M}(54)$ ナルコトヲ證セヨ。

10. 凡テノ平方數ハ $3m$ カ $3m+1$ ナル形ヲ有スルコトヲ證セヨ。

11. $a^2+c^2=2b^2$ ナルトキハ $a^2-b^2=\mathrm{M}(24)$ ナルコトヲ證セヨ。

解 前題ニヨリテ凡テノ平方數ハ $3m$ カ, $3m+1$ ノ形ヲナスガ故ニ $2b^2$ ハ $3m$ カ $3m+2$ ノ形ヲナス。

然ルニ $2b^2=a^2+c^2$ ヨリ $2b^2$ ハ $3m$ ナルトキハ a^2 モ c^2 モ共ニ $3m$ ナル形ニシテ, $2b^2$ ハ $3m+2$ ノ形ナルトキハ a^2 モ c^2 モ共ニ $3m+1$ ノ形ナラザルベカラズ。

然ルニ $2(b^2-a^2)=2b^2-a^2-a^2=c^2-a^2$ ナルガ故ニ常ニ 3 ノ倍數ナラザルベカラズ。從ツテ $b^2-a^2=\mathrm{M}(3)$

次ニ如何ナル數ニテモ $4m$ カ, $4m+1$ カ, $4m+2$ カ, $4m+3$ カナルガ故ニ, ソノ平方ハ $16m$ ナルカ, $16m+2$ ナルカ, $16m+4$ ナルカ, $16m+9$ ナル形ヲ有ス。ヨツテ $2b^2$ ハ $16m$ カ, $16m+2$ カ, $16m+8$ ナルカノ中ナリ。

然ルニ $2b^2=a^2+c^2$ ノ關係ヨリ a^2 モ c^2 モ共ニ $16m$ カ, $16m+1$ カ, $16m+4$ ナル形ノモノナラザルベカラズ。ヨツテ $2(b^2-a^2)=c^2-a^2$ ヨリ $2(b^2-a^2)=\mathrm{M}(16)$ ナルヲ知ル。即チ $b^2-a^2=\mathrm{M}(8)$ ナリ。ヨツテ b^2-a^2 ハ 3 ノ倍數ナルト同時ニ 8 ノ倍數ナリ。從ツテ 24 ノ倍數ナリ。

12. $a^2=b^2+c^2$ ナルトキハ $abc=\mathrm{M}(60)$ ナルコトヲ證セヨ。

13. x ト y トノ差 2 ナルトキハ 3^{2x} ト 2^{2y} トノ差ハ 5 ニテ整除セラルヽコトヲ證セヨ。

解

$$3^{2x}=(5-2)^{2x}=\mathrm{M}(5)-2^{2x}$$

$$2^{2y}=(5-3)^{2y}=\mathrm{M}(5)-3^{2y}$$

$$\therefore\ 3^{2x}\sim 2^{2y}=\mathrm{M}(5)+(2^{2x}\sim 3^{2y})$$

然ルニ

$$\begin{aligned}2^{2x}\sim 3^{2y}&=2^{2(y+2)}\sim 3^{2y}=2^4 2^{2y}\sim 3^{3y}\\&=16.2^{2y}\sim 3^{2y}=\{\mathrm{M}(5)+1\}2^{2y}\sim 3^{2y}\\&=\mathrm{M}(5)+2^{2y}\sim 3^{2y}\end{aligned}$$

然ルニ $2^{2y}\sim 3^{2y}$ ガ剩餘定理ニヨリテ $2+3$ ニテ整除セラル。

12. $2^x-1=\mathrm{M}(23)$ ナルベキタメニ x ノトルベキ最小値ハ 11 ナルコトヲ示セ。

13. n ガ素數ナルトキ $n!+n=\mathrm{M}(n^2)$ ナルコトヲ證セヨ。

16. $(mn)!$ ガ $(m!)^n$ ニテモ $(n!)^m$ ニテモ整除セラルヽコトヲ證セヨ。

解 定理 4 ニヨリテ $(m+n)!$ ガ $m!$ ニテモ $n!$ ニテモ整除セラル。

今 $mn=m+m(n-1)$ トスレバ

$$(mn)!=\{m+m(n-1)\}!=\mathrm{A}m!\{m(n-1)\}!$$

同樣ニ

$$\{m(n-1)\}!=\{m+m(n-2)\}!=\mathrm{B}m!\{m(n-2)\}!$$

....

$$(2m)!=(m+m)!=\mathrm{L}m!m!$$

邊々相乘ズレバ

$$(mn)!=\mathrm{AB}\cdots\cdots\mathrm{L}(m!)^n=\mathrm{M}(m!)^n$$

全ク同樣ニシテ

$$(mn)!=\mathrm{M}(n!)^m \quad ナリ。$$

17. a ガ素數ニシテ b ト c トハ共ニ a ト互ニ素ナル時ハ $b^{a-1}\sim c^{a-1}=\mathrm{M}(a)$ ナルコトヲ證セヨ。

解 へるまーノ定理ニヨリテ

$b^{a-1}-1=\mathrm{M}(a)$ 及ビ $c^{a-1}-1=\mathrm{M}(a)$ ナリ。

$$\therefore\ b^{a-1}-1\sim(c^{a-1}-1)=\mathrm{M}(a)$$

$$\therefore\ b^{a-1}\sim c^{a-1}=\mathrm{M}(a)$$

18. a, b ハ共ニ素數ナルトキへるまーノ定理ヲ用ヒテ $a^{b-1}+b^{a-1}-1=\mathrm{M}(ab)$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $a^{b-1}-1=\mathrm{M}(b)$ 及ビ $b^{a-1}-1=\mathrm{M}(a)$

$$(a^{b-1}-1)(b^{a-1}-1)=a^{b-1}b^{a-1}+1-a^{b-1}-b^{a-1}=\mathrm{M}(ab)$$

而シテ $a^{b-1}b^{a-1}=\mathrm{M}(ab)$ ナリ。

$$\therefore\ a^{b-1}+b^{a-1}-1=\mathrm{M}(ab)$$

19. p, q, r ハ共ニ素數ナルトキハ

$p(q^r-r^q)+q(r^p-p^r)+r(p^q-q^p)=\mathrm{M}(pqr)$ ナルコトヲ證セヨ。

20. 1000 ヨリ小ニシテコレト互ニ素ナル數ハ幾個アルカ。

21. 1800 ヨリ小ニシテコレト互ニ素ナル數ハ幾個アルカ。

22. n ガ 2 ヨリ大ナルトキ, コレト互ニ素ニシテ且ツ n ヨリモ小ナル數ハ偶數ナルコトヲ證セヨ。(但シ 1 ヲ含ム)

解 p ガ n ト互ニ素ナル時ハ $n-p$ モ n ト互ニ素ナルベシ。故ニ n ト互ニ素ナル數ハ常ニ一對宛アリ。ヨツテ偶數個ナリ。

23. うゐるそんノ定理ヲ用ヒ n ガ素數ナル時 $2(n-3)!+1=\mathrm{M}(n)$ ナルコトヲ證セヨ。

24. p ガ素數ナル時 $(p-2q)!(2q-1)!-1\}=\mathrm{M}(p)$ ナルコトヲ證セヨ。

25. $(n^p-1)!$ ニ含マル、n ノ最高冪ハ $\dfrac{n^p-np+p-1}{n-1}$ ナルコトヲ證セヨ。

26. $d_1, d_2, d_3, \cdots\cdots$ ヲ n ノ凡テノ約數ナリトスレバ $\psi(d_1)+\psi(d_2)+\psi(d_3)+\cdots\cdots=n$ ナルコトヲ證セヨ。

第十九編　確　率

242. 確率ノ數學的定義

今一個ノ貨幣ヲ無心ニ投グル時，表面カ裏面カ何レカヾ顯ハルベケレドモ果シテソノ何レガ顯ハル、ヤハ事前ニ於テハ全ク豫知スベカラズ。換言スレバ貨幣ハ等質，等密度ニシテ而カモ之ヲ投グル際何等ノ意志ヲ加ヘズ全ク不偏公正ナル時ハ，何レノ面モ顯ハル、事ニ就イテハ齊一ナリ。故ニ此場合表面ノ顯ハル、確率ハ $\frac{1}{2}$ ニシテ裏面ノ顯ハル、確率モ亦 $\frac{1}{2}$ ナリトイフ。要スルニ確率 (probability) トハカ、ル假定ノ下ニ於テ考究スルモノトス。一般ニイフト

一ツノ事象ガ起ル確率トハ其事象ノ起リ得ベキ場合ノ數ヲ凡テノ場合ニテ除シタル商ナリ，但シソノ事象ノ出顯及ビ不出顯ノ難易ハ全ク同一ナリトス。故ニ凡テノ場合ノ數ハ n 個ナル時，或事象ガ m 個ノ場合ニ起ル時ハ其事象ノ起ル確率（略シテ其事象ノ確率トモイフ）ハ $\frac{m}{n}$ ナリトス。從ツテ其事象ノ起ラザル確率ハ $\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}$ ナリ。（定理1參照）

此時 m 個ノ場合ヲ其事象ガ起ルニ都合ヨキ場合 (Favorable cases) トイヒ，他ノ $n-m$ 個ノ場合ヲ其事象ガ起ルニ都合惡キ場合 (Unfavorable cases) トイフ。

定理 1. 一事象ノ起ル確率ガ p ナル時ハ，其事象ノ起ラザル確率ハ $1-p$ ナリ。

證明 凡テノ場合ノ數ヲ n トシ，一事象ノ起ルニ都合ヨキ場合ノ數ヲ m トスレバ都合惡キ場合ノ數ガ $n-m$ ナリ。

$$\therefore \quad p=\frac{m}{n}$$

ニシテ，ソノ起ラザル確率ハ

$$\frac{n-m}{n}=1-\frac{m}{n}=1-p$$

トナル。ヨツテ證セリ。

注意 或事象ノ起ル確率ヲ p ニテ表ハスコトニ對シテ，ソノ事象ノ起ラザル確率ヲ q ニテ表ハスベシ，然ルトキハ

$$p+q=1$$

ナル關係ガ常ニ存在ス。

定理 2. 一ツノ事象ガ必ズ起ル時ハ其ノ起ル確率ハ 1 ニシテ，ソノ起ラザル確率ハ 0 ナリ。

例 1. 骰子ヲ投グル時 1°, 4 ノ目ノ出ヅル確率, 2° 奇數ノ目ノ出ヅル確率ヲ求メヨ。

解 1°, 骰子ヲ投グル時 4 ノ目ノ出ヅルコトモ，他ノ目ノ出ヅル事モ齊一ナリ。ヨツテ求ムル確率ハ $\frac{1}{6}$ ナリ。

2° 1 ノ目，3 ノ目，5 ノ目ノ何レカヾ出ヅル時共ニ題意ニ適スル故ニ求ムル確率ハ

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

ナリ。

例 2. 20 本ノ福引ノ中當リ籤 5 本アリ，之ヨリ 2 本ヲ引ク時，ソレ等ハ悉ク當リ籤ナル確率ヲ求メヨ。

解 20 本ノ福引ノ中ヨリ 2 本ヲ引キ抜ク總テノ場合ノ數ハ ${}_{20}C_2$ ナリ。

而シテ當リ籤ノミ 2 本ヲ得ルニハ 5 本ノ當リ籤ノ中ヨリノミ採ラザルベカラズ，ヨツテ其場合ノ數ハ ${}_5C_2$ ナリ。故ニ確率ハ

$$p={}_{20}C_2\div{}_5C_2=\frac{1}{19}$$

例 3. 3 個ノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ，ソノ目ノ和ガ 16 ヨリ以上出ヅル確率ヲ求メヨ。

解 3 個ノ骰子ヲ A, B, C トセン，ソノ目ノ和ガ 18 ナル爲メニハ 3 個トモ 6 ノ目ナラザルベカラズ，而シテカヽル場合ハタヾ 1 回起リ得ルノミ。

次ニソノ目ノ和 17 ヲ得ルニハ 6, 6, 5 ヲ得ルニアリ。而シテカヽル場合ハ 3 回起リ得ルノミ，即チ

$$\left.\begin{matrix}\text{A ガ } 6\\ \text{B ガ } 6\\ \text{C ガ } 5\end{matrix}\right\}\qquad \left.\begin{matrix}\text{A ガ } 6\\ \text{B ガ } 5\\ \text{C ガ } 6\end{matrix}\right\}\qquad \left.\begin{matrix}\text{A ガ } 5\\ \text{B ガ } 6\\ \text{C ガ } 6\end{matrix}\right\}$$

同様ニ目ノ和 16 ヲ得ルニハ 6, 6, 4 若クハ 6, 5, 5 ノ何レカヾ起ラザルベカラズ，而シテソノ場合ノ數ハ 3+3 ナリ。

ヨツテ都合ヨキ場合ノ凡テノ回數ハ

$$1+3+3+3=10$$

サテ 3 個ノ骰子ヲ同時ニ投グルガ故ニソレ等ノ骰子ノ目ノ變化ノ凡テノ場合ノ回數ハ $6^3=216$ ナリ。

故ニ求ムル確率ハ

${}_9C_4=$ $\boxed{}$

$$p=\frac{10}{216}=\frac{5}{108}$$

${}_7C_4$

例 4. 袋ノ中ニ 1, 2, 3, ……9 ナル番號ノ札アリ。此中ヨリ四枚ヲ取リ出シ其中ニ (1) 1 及ビ 2 ノ番號ノ全ク入ラザル確率, (2) 何レカ一方ノ入リ居ル確率 (3) 少クトモ一方ノ入リ居ル確率, (4) 二枚ヲ抜キ出シ番號ノ積ガ偶數ナル確率ヲ求メヨ。

解 (1) 凡テノ場合ハ ${}_9C_4$ ニシテ都合ノ良キ場合ハ九枚ヨリ 1, 2 ナル二枚ヲトリ去リタル殘リノ七枚ヨリ四枚ヲ取リ出ス場合ナルヲ以テ ${}_7C_4$ ナリ。故ニ所要ノ答數ハ

7×6×

$${}_7C_4\div{}_9C_4=\frac{5}{18}$$

(2) 何レカ一方ガ入リ居ル場合ハ明カニ ${}_7C_3\times 2$ ナルヲ以テ所要ノ確率ハ

$${}_7C_3\times 2\div{}_9C_4=\frac{5}{9}$$

(4)

(3) 番號ノ積ハ偶數ナル場合ノ確率ハ奇數ナル場合ノ確率ヲ 1 ヨリ減ジタルモノニ等シ。サテ積ハ奇數ナル爲ニハ 1, 3, 5, 7 及ビ 9 ナル五

枚カラ二ツヲ抜キ取ルヲ要ス。故ニ其場合ニハ ${}_5C_2$ ナリ。從ツテ奇數ナルコトノ確率ハ

$${}_5C_2 \div {}_9C_2 = \frac{5}{18}$$

故ニ求ムル確率ハ　　$1-\frac{5}{18}=\frac{13}{18}$

例 5. 二ツノ骰子ヲ投ゲ1ノ目ガ顯レズ且ツ同ジ目モ顯ハレザル確率如何。

解 次ノ場合ハ何レモ題意ニ適セズ。

(i) 第一ノ骰子ガ1ノ目顯ハレ第二ノ骰子ガ 2, 3, 4, 5, 6 ノ目顯ハル、場合(五通リ)

(ii) 第二ノ骰子ガ1ノ目顯ハレ第一ノ骰子ガ 2, 3, 4, 5, 6 ノ目顯ハル、場合(五通リ)

(iii) 二ツガ共ニ 1, 2, 3, 4, 5 及ビ 6 ノ目ノ顯ハル、場合(六通リ)

卽チ題意ニ適セザル場合ハ都合16通リアリ。故ニ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{36-16}{36}=\frac{5}{9}$$

例 6. 一ツノ袋ノ中ニ $(n+1)$ 枚ノ札ヲ入レソレニ $0, 1, 2, \cdots\cdots n$ ナル番號ヲ附ス。今一ツヲ取リ出シ之ヲ舊ニ戻シ以テ r 回試行スル時其取リ出シタル數ノ和ガ s ナル確率ヲ求メヨ。

解 何レノ札モ r 回連續シテ取リ出スモ差支ヘナキヲ以テ凡テノ場合ノ數ハ $(n+1)^r$ ナルコト明カナリ。

サテ取リ出シタル數ノ和ガ s トナル場合ノ數ハ

$$(x^0+x^1+x^2+\cdots\cdots+x^n)^r$$

ノ展開式ニ於ケル x^s ノ係數ニ等シ。サテ其係數ヲ求メンニ

$$(x^0+x^1+x^2+\cdots\cdots+x^n)^r=\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^r=(1-x^{n+1})^r(1-x)^{-r}$$

トスレバ

$$(1-x^{n+1})^r=1-rx^{n+1}+\frac{r(r-1)}{2!}x^{2(n+1)}+\cdots\cdots$$

$$+(-1)^s\frac{r(r-1)\cdots\cdots(r-s+1)}{s!}x^{s(n+1)}+\cdots\cdots$$

ニシテ $|x|<1$ ナル時ハ(實際本題ニテハ x ノ指數ノ研究ニアリテ x 其物ノ大小ニハ關係ナシ)

$$(1-x)^{-r}=1+rx+\frac{r(r+1)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{r(r+1)\cdots\cdots(r+s-1)}{s!}x^s+\cdots\cdots$$

ナリ。故ニ之等ノ二式ヲ乘ジ且ツ x^s ノ係數ヲ求ムレバ

$$\frac{r(r+1)\cdots\cdots(r+s-1)}{s!}-r\frac{r(r+1)\cdots\cdots(r+s-n-2)}{(s-n-1)!}$$

$$+\frac{r(r-1)}{2!}\frac{r(r+1)\cdots\cdots(r+s-2n-3)}{(s-2n-2)!}-\cdots\cdots\cdots$$

ナリ。故ニ之ヲ A トスレバ求ムル確率ハ

$$\frac{A}{(n+1)^r}$$

ナリ。

例 7. 三ツノ骰子ヲ同時ニ投グル時少クトモ一ツハ1ノ目ヲ出シ且ツ目ノ和ガ8ナル確率ヲ求メヨ。

解 先ヅ一ツノ骰子ノミガ1ノ目ヲ出ス場合ヲ考ヘンニ三ツノ骰子ヲ假リニ A, B, C ト名ヅケ A ダケガ1ヲ出シ B, C ノ二ツガ目ノ和7ヲ出スモノトスレバ其場合ノ數ハ

$$(x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^6)^2$$

ニ於ケル x^7 ノ係數卽チ六通ナリ。然レドモコノ中ニハ B ガ1ノ目, C ガ6ノ目ヲ出ス場合ト C ガ1ノ目, B ガ6ノ目ヲ出ス場合トガ含マレ居リ從ツテ二ツノ骰子ガ1ノ目ヲ出スコトニナル故除去セザルベカラズ。故ニ四通リナリ。ヨツテ A, B, C ノ何レカ一ツダケガ1ノ目ヲ出ス場合ハ $4\times3=12$ 通アル。

次ニ二ツノ骰子ガ共ニ1ノ目ヲ出シ第三ノ骰子ガ6ノ目ヲ出ス場合ハ明カニ3通ナリ。故ニ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{12+3}{6^3}=\frac{5}{72}$$

別解 目ノ和8ナル場合ハ 1, 1, 6; 1, 2, 5 及ビ 1, 3, 4 ノ三通ナリ。而シテ 1, 1, 6 ヲ表ハス場合ハ同ジモノヲ有スル場合ノ順列ニシテ其ノ數ハ $\frac{3!}{2!}=3$, 又 1, 2, 5 及ビ 1, 3, 5 ハ同ジ目ヲ有セザルヲ以テ其數ハ共ニ

3!＝6 ヨツテ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{3+6\times2}{6^3}=\frac{5}{72}$$

243. 經驗的定義

1ツノ骰子ヲ投ゲテ1ノ目ガ顯ハル、確率ハ$\frac{1}{6}$ナリトイフハ數學上ノ定義ヨリセル斷定ナリ。故ニ經驗的ニ60回投ゲシ時，果シテ1ノ目ガ10回起ルカ，起ラザルカハ不明ナリ，卽チ60回ノ試行ニ於テ偶然ニモ10回起ルコトモアラン，併シ次ノ60回ノ試行ニ於テハ9回トナリ或ハ11回トモナルベシ。然レドモ投ゲル回數ヲ多クシ600回，6000回トイフ風ニシテ行ケバ，漸次1ノ目ノ顯ハル、回數ハ100回，1000回ニ近ヅクコト實驗ノ示ス所ナリ。

從ツテ若シ試行回數Nヲ無限ニ增加シタリト假想シ（實際ニ行フコト不可能）1ノ目ノ出ヅル回數ヲnトスレバ

$$\lim_{N\to\infty}\frac{n}{N}=\frac{1}{6}$$

ナリト想像スルハ至當ノ事ナリトイフベシ，換言スレバ數學的定義ハ實際ノ試行回數ヲ無限回トセル極限ノ値ヲイフニ外ナラズ，故ニNガ非常ニ大ナル時（無限大ニアラズ）N回ノ試行中或事象ノ起リタル回數ヲnトスレバ分數$\frac{n}{N}$ハ略ボ一定ノ値ヲ有シ而カモソノ値ハ其次ノ試行ニ於テ其事象ノ起ルナラントイフ確率ヲ表ハスモノト想定シ得ベシ，ヨツテ此値ヲ以テ確率ヲ定義ス。コレ確率ノ經驗的定義ナリ。

一例ヲ英國ノ17個ノ保險會社ニテ作レル死亡生殘表ニヨツテ說明セン。（說明ニ必要ナルダケヲ抄錄セリ）

死亡生殘表

年齢	生存者數	年齢	生存者表
20	93268	50	69517
30	86292	60	55973
40	78653	70	35837

死亡生殘表（續キ）

年齢	生存者表	年齢	生存者表
80	13290	97	13
90	1319	98	4
95	89	99	1
96	37	100	0

コノ表ヲ利用スレバ某年齢ノ人ガ某年齢ニ達スルナラントノ確率ヲ求ムルコトヲ得ベシ，例ヘバ20才ノ人數ハ93268ニシテ60才ノ人數ハ55973ナルガ故ニ20才ノ人ガ今後40年間生存シ得ル確率ハ

$$p=\frac{55973}{93268}$$

ナリトイフヲ得ベシ，カクノ如キハ全ク確率ノ經驗的定義ニ立脚シテノ斷定ナリ。尙ホ興味アル問題ハ生存平均年齢ナリトス。卽チ20才ノ人ガ今後幾年生存シ得ベキカトイフ問題コレナリ，ソノ方法ハ20才ノ人數ノ半分ト21才ノ人數，22才ノ人數，……，99才ノ人數ヲ順次加ヘタル總計ヲ20才ノ人數ニテ除スレバ可ナリ，計算ヲ簡ニセンガ爲メ95才ノ人ガ今後幾年生存シ得ベキカヲ論ズベシ，ソレニハ上ニイヘル公式ヲ用フル時ハ

$$\frac{\frac{89}{2}+37+13+4+1}{89}=1.\frac{21}{178}$$

卽チ1年1ヶ月强生存シ得ベシ，ソノ理由ハ次ノ如シ。95才ノ人89人ノ中37人ダケハ96才ニ達シ，殘リノ52人ハ其一年間ニ死亡ス，而シテ52人ノ死ハ其一年間ニ平等ニ分布セラル、モノト假想ス，故ニ前半期ニ死セル人數ト後半期ニ死セル人數トハ相等シト見做サル，故ニ52人ガソノ年ニ生存セシ年數ハ26年ナリトイフヲ得ベシ，而シテ37人ハ完全ニ其一年間生存セシガ故ニ全體ニテ

$$\frac{52}{2}+37=\frac{89-37}{2}+37=\frac{89+37}{2}$$

次ニ96才ニ達セシ37人ノ中24人ガ死亡シ，13人ガ完全ニ一年間生存シテ97才ニ達シタルガ故ニソノ一ケ年間ニ生存セシ延年數ハ上ト同様ニシテ $\frac{37+13}{2}$ ナリ。同様ニシテ之等ノ和ヲ求ムレバ

$$\frac{89}{2}+37+13+4+1=99\frac{1}{2}$$

トナル。ヨツテ總年數ヲ89人ニ平等ニ配分スレバ平均生存年數 $1\frac{21}{178}$ ヲ得ベシ。

例 1. 60歲ノ人ガ70歲マデ生存スル確率ヲ $\frac{2}{3}$ トスルトキ 60歲ノ人五人中少クトモ三人ガ70歲マデ生存スル確率ヲ求メヨ。

解 五人ナガラ70歲マデ生存スル確率ハ

排反事象

$$p_1=\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

五人ノ中四人ダケガ70歲マデ生存スル確率ハ

$$p_2={}_5C_4\times\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}$$

五人ノ中三人ダケガ70歲マデ生存スル確率ハ

$$p_3={}_5C_3\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

ヨツテ所要ノ確率ハ

$$p_1+p_2+p_3=\frac{64}{81}$$

例 2. 今年20歲ノ人ガ50歲マデ生存スル確率ハ $\frac{8}{15}$ ニシテ30歲ノ人ガ60歲マデ生存スル確率ハ $\frac{7}{15}$ ナリトイフ。今後30年間ニ於テ此等兩人ノ中少クトモ一人ガ生存スル確率ヲ求メヨ。

解 二人ノ生存ハ互ニ獨立ナル事象ナルヲ以テ二人共ニ生存スル確率ハ $\frac{8}{15}\times\frac{7}{15}=\frac{56}{225}$ 又20歲ノ人ノミ生存スル確率ハ $\frac{8}{15}\times\left(1-\frac{7}{15}\right)=\frac{64}{225}$ ニシテ30歲ノ人ノミ生存スル確率ハ $\left(1-\frac{8}{15}\right)\times\frac{7}{15}=\frac{49}{225}$ ナリ。故ニ兩名ノ中少クトモ一人生存スル確率ハ $\frac{56}{225}+\frac{64}{225}+\frac{49}{225}=\frac{169}{225}$

244. 排反事象ノ確率

排反事象トハ同時共存ヲ許サザル事象ヲイフ。例ヘバ1ツノ骰子ヲ投ゲルトキ1ノ目ガ顯ハレタルトキハ2ノ目，3ノ目……6ノ目ガ顯ハルヽコト能ハザルガ如シ。故ニ此ノ場合1ノ目ノ出ヅル事象ト他ノ目ノ出ヅル事象トハ互ニ排反ス。

然レドモ二個以上ノ骰子ヲ投ゲル時ハ，1ツノ骰子ヨリ1ノ目ガ顯レタルトキ第二ノ骰子ヨリハ2ノ目ガ顯ハルヽ事アリ，故ニ此ノ場合1ノ目ノ顯ハルヽ事象ト2ノ目ガ顯ハルヽ事象トハ排反セズ。

定理 3. n 個ノ排反事象ノ確率ヲ夫々 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ トスレバ之等ノ事象ノ何レカゞ起ル確率ハ $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n$ ナリ。

證明 n 個ノ事象ヲ $E_1, E_2, \cdots\cdots E_n$ トシ，ソノ凡テノ場合ヲ N トスレバ E_1 ノ起リ得ベキ場合ノ數ハ Np_1 ニシテ

$$E_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Np_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$E_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots Np_n$$

故ニ都合ヨキ凡テノ場合ノ數ハ

$$Np_1+Np_2+\cdots\cdots+Np_n$$

ヨツテ定義ニ從ヒ $E_1, E_2, \cdots\cdots E_n$ ノ何レカ一ツガ起ル確率ハ

$$p=\frac{Np_1+Np_2+\cdots\cdots+Np_n}{N}=p_1+p_2+\cdots\cdots+p$$

注意 コノ定理ヲ確率ノ加法定理又ハ全確率ノ定理トイフ。

例ヘバ一ツノ骰子ヲ投ゲテ1ノ目カ2ノ目ノ出ヅル確率ヲ求メンニ1ノ目ノ起ルコトヽ2ノ目ノ起ルコトヽハ互ニ排反スルガ故ニ上ノ定理ニヨリ

$$p=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3} \quad ナリ。$$

例 二ツノ骰子ヲ同時ニ投ゲテ目ノ和6以下ヲ得ル確率ヲ求メヨ。

解 二ツノ骰子ヲ投ゲテ目ノ和6以下ヲ得ル爲メニハ

2. 3, 4, 5, 6,

ノ5通アリ，而シテコノ5個ノ事象ハ反排ナルガ故ニ上ノ定理ヲ用フルコトヲ得。

サテ都合ヨキ場合ノ數ヲ表示センニ

目ノ和	2	3	4	5	6
配合方法	(1. 1)	(1. 2) (2. 1)	(1. 3)(3. 1) (2. 2)	(1. 4)(2. 3) (4. 1)(3. 2)	(1. 5)(2. 4) (5. 1)(4. 2) (3. 3)
小計	1	2	3	4	5

即チ都合ノヨキ場合ノ數ハ合計

$$1+2+3+4+5=15$$

ニシテ凡テノ場合ノ數ハ $6^2=36$, ヨツテ求ムル確率ハ

$$p=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$$

245. 獨立事象ト從屬事象

二ツ以上ノ事象アリテ夫等ハ全ク無關係ナル時，換言スレバ一ツノ事象ガ起ルト起ラザルトニ關セズ他ノ事象ノ起ル確率ハ不變ナルガ如キ時ハ之等ノ事象ハ互ニ獨立 (independent) ナリトイヒ，然ラザル場合ニハ互ニ從屬 (dependent) ナリトイフ。

例ヘバ一ツノ袋ニ白球3個，黑球2個アリ，他ノ一ツノ袋ニ白球2個，黑球3個アルトキ第一ノ袋ヨリ白ノ出ヅルコト、第二ノ袋ヨリ白ノ出ヅルコトハ全ク獨立ナリ，然レドモ一ツノ袋ヨリ二回球ヲ出スニ最初白球ガ出ヅルカ黑球ガ出ヅルカニ從ヒ第二回ニ白球ノ出ヅル確率ガ變化スベシ，カヽル場合ニハ事象ガ相關係ス，即チ互ニ從屬ナリ。

注意 獨立事象ト從屬事象トヲ一括シテ複事象 (compound events) トイフ。

定理 4. n 個ノ獨立事象ノ確率ヲ夫々 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$ トスレバ之等ノ事象ガ悉ク起ル確率ハ積 $p_1 . p_2 . \cdots\cdots . p_n$ ナリ。

證明 證明ヲ簡ニセン爲メ二ツノ獨立事象 E_1, E_2 ニ就イテノミ論ズベシ。

偖テ E_1 ノ起ル凡テノ場合ノ數ヲ a_1 トシ，起ラザル凡テノ場合ノ數ヲ b_1 トスレバ，E_1 ノ起ル確率ハ

$$p_1=\frac{a_1}{a_1+b_1}$$

同樣ニ E_2 ノ起ル凡テノ場合ノ數ヲ a_2 トシ，起ラザル凡テノ場合ノ數ヲ b_2 トスレバ E_2 ノ起ル確率ハ・

$$p_2=\frac{a_2}{a_2+b_2}$$

サテ二ツノ事象 E_1, E_2 ノ凡テノ場合ヲ考フルニ a_1+b_1 ノ各ニ a_2+b_2 ガ對應スルガ故ニ，凡テノ組合セノ數ハ

$$(a_1+b_1)(a_2+b_2)$$

又 E_1 ト E_2 トガ同時ニ起ル場合ノ凡テノ數ハ a_1 ノ各々ニ a_2 ガ對應スルガ故ニ，ソノ數ハ a_1a_2 ナリ。

ヨツテ二ツノ事象 E_1E_2 ノ同時ニ起ル確率ハ

$$p=\frac{a_1a_2}{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}=\frac{a_1}{a_1+b_1}\times\frac{a_2}{a_2+b_2}=p_1p_2$$

上ト同樣ニ證明スレバ n 個ノ事象ガ悉ク起ル確率ハ

$$p_1p_2\cdots\cdots p_n$$

ナリ。

系 1. 二ツノ事象ノ起ル確率ヲ p_1, p_2 トスレバ二ツトモ起ラザル確率ハ

$$(1-p_1)(1-p_2)$$

ナリ。

系 2. 第一ノ事象ガ起リ，第二ノ事象ノ起ラザル確率ハ $p_1(1-p_2)$ ニシテ第一ノ事象ガ起ラズ第二ノ事象ノ起ル確率ハ $p_2(1-p_1)$ ナリ。

定理 5. $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ ヲ n 個ノ從屬事象トシ，E_1 ノ確率ヲ p_1, E_1 ガ起リタル後之ニ應ジテ E_2 ガ起ル確率ヲ p_2, E_1 及ビ E_2 ガ起リタル後之ニ應ジテ E_3 ガ起ル確率ヲ $p_3, \cdots\cdots$ トスレバ $E_1, E_2, \cdots\cdots E_n$ ガ悉ク起ル確率ハ積 $p_1 . p_2 \cdots\cdots p_n$ ナリ。

證明 本定理ニ於テモ證明ヲ簡ニセムガ爲メ二ツノ從屬事象 E_1 及ビ E_2 ノミニ就キ論述スベシ。

E_1 ガ起リ續イテ E_2 ガ起ル場合ノ數ヲ a ト假定シ，E_1 ガ起リ續イテ E_2 ガ

起ラザル場合ノ數ヲ b ト假定シ，E_1 ガ起ラズ，續イテ E_2 ガ起ル場合ノ數ヲ c ト假定シ，$E_1 E_2$ ガ共ニ起ラザル場合ノ數ヲ d ト假定スベシ。

然ルトキハ凡テノ場合ノ數ハ

$$a+b+c+d$$

ニシテ E_1 及ビ E_2 ガ共ニ起ル場合ノ數ハ a ナルガ故ニ E_1 及ビ E_2 ハ共ニ起ル確率ハ

$$p=\frac{a}{a+b+c+d} \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナリ。

サテ E_1 ノ起ル凡テノ場合ヲ考フルニ上ノ假定ニヨリテ $a+b$ ナルベシ，故ニ E_1 ダケ起ル確率 p_1 ハ

$$p_1=\frac{a+b}{a+b+c+d} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

次ニ E_1 ガ起レリト假定セル後，E_2 ノ起ル場合ヲ考フルニ，ソノ確率ヲ p_2 トスレバ

$$p_2=\frac{a}{a+b} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

(1), (2) 及ビ (3) ヨリ

$$p=p_1 p_2$$

注意 1. 之ヲ n 個ノ場合ニ擴張センニハ數學的歸納法ニヨルヲ可トスベク，又定理 4 ハ上ノ方法ニテモ證明スルヲ得ベシ。

注意 2. 上ノ二ツノ定理ヲ確率ノ乘法定理又ハ複事象ノ定理トイフ。

例 1. 一ツノ骰子ヲ五度投ゲテ少クトモ 6 ノ目ガ一度出ル確率ヲ求メヨ。

解　最初ニ投ゲテ 6 ノ目ノ出ヅルコトト，第二回ニ投ゲテ 6 ノ目ノ出ヅルコトヽハ無關係ナリ。

サテ題意ニヨルト 6 ノ目ガ 1 度出ヅルモ，2 度出ヅルモ，……5 度ナガラ出ヅルモ差支ヘナキモ，5 回共 6 ノ目ガ出デズトイフコトヲ得ズ，故ニ求ムル確率ハ 1 ヨリ 5 回共 6 ノ目ノ出デザル場合ノ確率ヲ減ズレバヨシ，然ルニ一回投ジテ 6 ノ目ノ出デザル確率ハ $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ ナリ。

故ニ乘法定理ニヨリ 5 回共 6 ノ目ノ出デザル確率ハ $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ ヨツテ所

要ノ確率ハ

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^5$$

例 2. 白球 3 個，黑球 7 個ヲ入レタル袋アリ，今一個ヅヽ二回トリ出シ，共ニ白球ナル確率ヲ求メヨ。

解　最初白球ガ出ヅルコトヽ第二回ニ又白球ガ出ヅルコトヽハ關係アリ。

サテ最初ニ白球ノ出ヅル確率ハ $\frac{3}{10}$ ニシテ，白球ガ出デシ後更ニ又白球ノ出ヅル確率ハ $\frac{2}{9}$ ナリ，ヨツテ定理 5 ニヨリ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$$

例 3. 同ジ技倆ノ八人ノ力士ガ抽籤ニテ敵手ヲ選ビテ勝負ヲナシ，其勝負ニ勝チタル四人ガ又抽籤ニテ敵手ヲ選ビテ勝負ヲナシ，第二回ノ勝負ニ勝チタル二人ガ最後ノ手合ヲ爲スモノトス。特別ノ二人ガ手合ヲナス確率ヲ求メヨ。

解　$a, b, c, \cdots$ ヲ八人ノ力士ナリトシ a, b 二人ガ手合セヲナス確率ヲ求メンニ，第一回ニテ手合スル確率ハ $\frac{1}{7}$ ナルコト明カナリ。次ニ第二回ニ手合スルニハ第一回ニ手合セズシテ而カモ共ニ勝チ居ラザルベカラズ。而シテ殘リシ四人ノ中 b ト手合スルニハ結局

$$\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{14}$$

同樣ニ第三回ニテ手合セスルニハ

$$\frac{6}{7}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{28}$$

ヨツテ求ムル確率ハ

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}$$

246. 重複事象

一ツノ袋ニ 3 個ノ白球ト 5 個ノ黑球トヲ入レアリ，今コレヨリ一球ヲ取リ出シタル後之ヲ袋ニ戻ス。カクノ如キ試行ヲ n 回繰リ返ストキ，第一回ニ白球ヲ出スコトヽ第二回ニ白球又ハ黑球ヲ出スコトヽハ互ニ獨立ナリ。カヽル

同一ノ事情ニアル獨立事象ノ重複試行ヲ行フトキ之等ノ諸事象ヲ重複事象トイフ。

定理 6. 或事象ノ起ル確率ヲ p, 起ラザル確率ヲ q（實ハ $q=1-p$ ナリ）トスレバ n 回ノ試行ニ於テ r 回ダケ其事象ノ起ル確率ハ

$$ {}_nC_r p^r q^{n-r} $$

ナリ。

何トナレバ一ツノ事象ノ起ル確率ハ p ニシテ起ラザル確率ハ q ナルヲ以テ r 回起リ, $(n-r)$ 回起ラザル確率ハ

$$ p^r q^{n-r} $$

ナリ。但シ n 回ノ試行ニ於テ r 回起ルベキ方法ノ凡テノ數ハ ${}_nC_r$ ナリ, ヨッテ所要ノ確率ハ

$$ {}_nC_r p^r q^{n-r} $$

ナリ。

例ヘバ前節例 2 ニ於テ球ヲ元ニ戻スモノトスレバ三回ノ試行ニ於テ白球二回出ヅル確率ハ

第一回	白	第二回	白	第三回	黑
〃	白	〃	黑	〃	白
〃	黑	〃	白	〃	白

ノ三通リノ場合アリ, 即チ ${}_3C_2=3$

又白球ノ出ヅル確率ハ $\frac{3}{10}$ 黑球ノ出ヅル確率ハ $\frac{7}{10}$ ナレバ所要ノ確率ハ

$$ p={}_3C_2\times\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{189}{1000} $$

系 1. 二項定理ニヨリ $(p+q)^n$ ヲ展開スレバ

$$ p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}_nC_rp^{n-r}q^r+\cdots\cdots+q^n $$

コノ式ニ於テ初項ハ n 回トモ起ル確率, 第二項ハ n 回ノ試行ニテ $n-1$ 回起ル確率, 第三項ハ $n-2$ 回起ル確率ナリ。以下之ニ準ズ。

系 2. n 回ノ中, 少クトモ r 回起ル確率ハ

$$ p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+\cdots\cdots+{}_nC_rp^rq^{n-r} $$

系 3. 確率ガ p ナル事象ヲ n 回試行スル時, 如何ナル場合ハ最大確率ナルカヲ論ゼンニ

$$ (p+q)^n=p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+{}_nC_rp^{n-r}q^r+\cdots\cdots+q^n $$

ニ於テ如何ナル項ガ最大ナルカトイフ問題ニ歸スベシ。

今假リニ ${}_nC_rp^{n-r}q^r$ ヲ最大ナリトスレバ

$$ {}_nC_{r-1}p^{n-r+1}q^{r-1}<{}_nC_rp^{n-r}q^r<{}_nC_{r+1}p^{n-r-1}q^{r+1} $$

計算スレバ

$$ rp<(n-r+1)q $$
$$ (n-r)q<(r+1)p $$

ナル二ツノ不等式ヲ滿足スル r ノ値ヲ定ムルコトニ歸ス。

然ルニ　　$q=1-p$

ナルニヨリコノ關係ヲ代入スルト

$$ (n+1)p<n-r+1 $$
$$ n-r<(n+1)p $$

故ニ

$$ (n+1)(1-p)-1<r<(n+1)(1-p) $$

故ニ $(n+1)(1-p)$ ガモシ整數 a ニ等シケレバ r ノ値ハ a ト $a-1$ トニシテ, コノ場合ノ確率ハ相等シク共ニ最大ナリ, 若シ $(n+1)(1-p)$ ガ整數ナラザル時ハ I[$(n+1)(1-p)$] ヲ b トスレバ r ノ値ハ b ナルトキ確率ハ最大ナリ。

247. 期望金額

或事象ノ起ル確率ヲ p トシ, 其事象ガ起リシ時 m 圓ヲ貰フ約束ヲナシタル人ノ期望金額 (expectation) ハ mp 圓ナリトイフ。

コノ定義ヲ擴張シテ次ノ如ク述ブベシ。

一般ニ反排スル n 個ノ事象 $E_1, E_2,\cdots\cdots, E_n$ アリテ, ソノ起ル確率ヲ夫々 $p_1, p_2,\cdots\cdots p_n$ トシ E_1 ガ起ラバ m 圓, E_2 ガ起ラバ n 圓, $\cdots\cdots, E_n$ ガ起ラバ x 圓ヲ貰フ約束ヲナシタル人ノ期望金額ガ

$$ (mp_1+np_2+\cdots\cdots+xp_n)\text{圓} $$

ナリトイフ。

期望金額ト密接ナル關係ヲ有スルハ福引ナリトス，例ヘバ寄宿舍等ニテ記念祝日ナドニ福引ヲ行フト假定セヨ，百人ノ舍生ヨリ各々二十錢ヲ據金シテ二十圓ヲ集メ

1等	50錢	10本	2等	30錢	20本
3等	20錢	20本	4等	10錢	50本

ヲ作ルトキハ

一等ガ當ル確率 $p_1=\frac{10}{100}$ 　　二等ガ當ル確率 $p_2=\frac{20}{100}$

三等〃　〃 $p_3=\frac{20}{100}$ 　　四等〃　〃 $p_4=\frac{50}{100}$

ヨツテ定義ニヨリ各人ノ期望金額ハ

$$50\text{錢}\times\frac{10}{100}+30\text{錢}\times\frac{20}{100}+20\text{錢}\times\frac{20}{100}+10\text{錢}\times\frac{50}{100}=20\text{錢}$$

卽チ各人ノ期望金額ハ各人ノ出金高ニ一致ス，福引ハ數學上ヨリ見テ公正ナル一種ノ分配ナリ。

尙福引ノ順序ニ就キテ少シク述ブベシ。茲ニ3人ガ當リ籤2本ヲ有スル3本ノ籤ヲ引クニ甲先ヅ引クモノトスレバソノ當ル確率ハ$\frac{2}{3}$ナリ，次ニ乙ガ引クモノトシ乙ノ當ル確率ヲ求メンニ次表ノ如シ

$$\text{乙ノ場合}\begin{cases}\text{甲當ラズシテ乙當ルトキ} & \frac{1}{3}\times\frac{2}{2}=\frac{1}{8}\\ \text{甲當リ乙モ當ルトキ} & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\end{cases}$$

卽チ $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ ニシテ甲ノ場合ト同ジク，丙ガ最後ニ引クモノトシテ其ノ當ル確率ヲ求メンニ

$$\text{丙ノ場合}\begin{cases}\text{甲當リ，乙當リ，丙當ルトキ} & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times0=0\\ \text{甲當ラズ，乙當リ，丙當ルトキ} & \frac{1}{3}\times\frac{2}{2}\times1=\frac{1}{3}\\ \text{甲當リ，乙當ラズ，丙當ルトキ} & \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{3}\end{cases}$$

卽チ丙ノ場合モ$\frac{2}{3}$トナル，ヨツテ福引，抽籤等ニハ順序ノ前後ニヨツテ損得ナシ。從ツテ先キヲ爭フハ全ク意味ナキコトナリ。

248. 原因ノ確率

以上論ゼシ所ハ凡テ事項ノ起，不起ノ原因ヲ知リテソレヨリ其事象ノ起ルベキ確率ヲ求ムルニアリタリ。

然レドモ之ト反對ニ已ニ起リタル事象ヨリ判斷シテ其事象ノ原因ヲ考究スルコトヲ得，例ヘバ茲ニ白球3個，黑球5個ヲ入レアル袋ヨリ一球ヲ取リ出シ，ソレガ白球ナル確率ヲ求メヨトイフハ原因ヲ知リテ後確率ヲ求メントスル方法ナルモ，一ツノ袋ニ8個ノ球入レアルモソノ中幾個ハ白球ニシテ幾個ハ黑球ナルカヲ知ラザル時，偶然手ヲ入レテ取ルトキ白球ヲ得，第二回ニ手ヲ入レテ取リシニ黑球ヲ得タリシ時，袋ノ中ニ幾個ノ白球ト幾個ノ黑球ガアリトスルハ最モ信頼スベキ判斷ナルカヲ究ムルガ如キハ原因ノ確率(Probability of causes) ヲ求ムル問題ナリ*。

249. 一ツノ事象ヲ起サシムル原因ハ數多ノ原因 $c_1, c_2, \cdots\cdots$ 中ノ唯一ツニノミ限ラレタル時，之等ヲ互ニ排反スル原因トイヒ，一ツノ事象ハ c_1 ニモ c_2 ニモ$\cdots\cdots$，因ルナラバ，$c_1, c_2, \cdots\cdots$ ヲ互ニ從屬ナリトイフ。本書ニハ專ラ前者ノ場合ニ就キテ說明スベシ。

定理 7. 互ニ排反スル原因 $c_1, c_2 \cdots\cdots c_n$ アリ，之等ガ起ル確率（事象ノ起ラザル前ニ判斷スル）ヲ $p_1, p_2 \cdots\cdots p_n$ トシ一ツノ事象ガ原因 c_1 ヨリ起ルベキ確率ヲ P_1 トシ，原因 c_2 ヨリ起ルベキ確率ヲ $P_2, \cdots\cdots$ トスレバ，コノ事象ガ原因 c_r ヨリ起リシナラントノ確率 e_r ハ

$$e_r=\frac{p_rP_r}{p_1P_1+p_2P_2+\cdots\cdots+p_nP_n}$$

ナリ。

注意 コノ定理ヲベーず (Bayes) ノ定理トイヒ p_r ヲ原因 c_r ノ事前確率 (a priori probability) トイヒ，e_r ヲ事後確率 (a posteriori probability) トイフ。

證明 證明スルニ先ダチ，一ツノ例ヲ示スベシ。

---

* コノ場合原因ノ數ガ有限ナルアリ，無限ナルアリ，後者ノ場合ハ代數學ノ範圍ヲ脫スベケレバ茲ニ說クコトヲ得ズ。

例 袋ノ中ニ白黒合セテ三球アリ，其中幾個黒球ナルカ不明ナリトス，今一ツヲ取リ出シタルニ黒球ヲ得タリトイフ。然ラバコノ事實ヨリ袋ノ中ニ二個ノ黒球ガアルコトノ確率ヲ求メヨ。

題意ヲ尚明瞭ナラシメンガ爲メニ說明センニ，袋ノ中ニハ一ツダケ黒球ナリシカ，二ツダケ黒球ナリシカ，或ハ三ツナガラ黒球ナリシカハ不明ナリ。然レドモ手ヲ入レテ一球ヲ無心ニ出セシニ偶然ニモ黒球ナリトイフ事實ヨリ袋ノ中ニ二個黒球アリシト判斷スル時（ソノ判斷ハ或ハ誤ルカモ知レズ）ソノ判斷ノ確カサヲ數學的ニ求ムルコトナリ。

サテ上ニモ述ベシ如ク黒球ノ存在スルナラン原因ハ三ツナリ，卽チ

黒1個ナル時 (c_1)　　黒2個ナル時 (c_2)　　黒3個ナル時 (c_3)

而シテ之等ノ原因ハ黒球ガ出デザル以前ニテハ凡テ均齊ニ起ルベシト考ヘラル丶ガ故ニ

$$p_1=p_2=p_3=\frac{1}{3}$$

サテ黒球1個ナル時，之ヨリ黒球ノ出ヅル確率ハ$\frac{1}{3}$ニシテ，黒球2個ナル時之ヨリ黒球ノ出ヅル確率ハ$\frac{2}{3}$，黒球3球ナル時之ヨリ黒球ノ出ヅル確率ハ1ナリ，卽

$$P_1=\frac{1}{3}\qquad P_2=\frac{2}{3}\qquad P_3=1$$

故ニ2個ノ黒球ガ存スベシトノ確率ヲ e_2 トスレバ

$$e_2=\frac{\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$$

ナリ。

コレヨリ定理ヲ證明センニ事象ハ（上ノ例ニテハ黒球ガ出デタリトイフ事）第 r 番目ノ原因 c_r（上ノ例ニテハ原因 c_2）ヨリ起ル確率ハ從屬事象ノ定理ニヨリテ

$$p_rP_r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。

故ニ事象ハ n 個ノ原因ノ中何レカヨリ起ルトイフ確率ハ加法定理ニヨリ

$$p_1P_1+p_2P_2+\cdots\cdots p_nP_n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

コレ事象ノ起ル凡テノ場合ノ確率ナリ（何レノ原因ヨリ起ルトモ差支ヘナシト見タル時）。

サテ e_r ヲ事象ガ起リシ時，其事象ガ c_r ナル原因ノミヨリ起ル確率ヲ示スモノトスレバ事象ガトニカク起リ，シカモ其事象ハ原因 c_r ヨリ起リシ時ノ確率ハ

$$(p_1P_1+p_2P_2+\cdots\cdots+p_nP_n)e_r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナリ。

而シテ (1) ト (2) トハ同一ノ値ヲ與フルコト明カナルガ故ニ

$$e_r=\frac{p_rP_r}{p_1P_1+p_2P_2+\cdots\cdots+p_nP_n}$$

ナリ。

例 1. 先キノ例ニ於テ白球ト黒球トノ入ル狀態ガ齊一ナリト考フル時ハ少シク複雜トナル，何トナレバ黒一球ナル原因 c_1 ト黒二球ナル原因 c_2 黒三球ナル原因 c ノ事前確率 p_1, p_2, p_3 ハ各齊一ニシテ$\frac{1}{3}$ナリト考フルヲ得ズ，カヽル場合黒ノ存在ト存在セザルトハ各$\frac{1}{2}$ナリト考ヘバ定理6系1ニ於テ

$$p=q=\frac{1}{2}$$

ト置ケバ

$$p_1={}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad p_2={}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad p_3={}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

ナルガ故ニ

$$e_2=\frac{{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{3}}{{}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{3}+{}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{2}{3}+{}_3C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

トナルベシ。

例 2. 一ツノ袋ノ中ニ n 個ノ球アリ，一ツヅヽ m 回取出シ毎回之ヲ元ニ戻

シタルニ常ニ白球ナリトイフ，然ルトキ其袋ノ中ニr個ノ白球ノ存在スル確率如何。

解 原因ノ數ガn個アリ，即チ袋ノ中ニ白球1個ナルトキ白球2個ナル時……白球n個ナルトキニシテ之ヲ $c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n$ トス

原因c_rノ事前確率ヲp_rトス，原因c_r(白ガn個ノ內r個アルコト)ガ眞ナリトシタル時m回續イテ白ガ出ヅル確率P_rハ

$$P_r=\left(\frac{r}{n}\right)^m$$

ナリ。故ニ定理ニヨリ

$$c_r=\frac{p_r\left(\frac{r}{n}\right)^m}{p_1\left(\frac{1}{n}\right)^m+p_2\left(\frac{2}{n}\right)^m+\cdots\cdots+p_n\left(\frac{n}{n}\right)^m}$$

$$=\frac{p_r r^m}{p_1+p_2 2^m+\cdots\cdots+p_n n^m}$$

ナリ。

例 3. 一ツノ袋ノ中ニ白黑ノ球合セテ四個アリ，今一個ヲ取リ出セシニ白球ヲ得タリ，然ラバ三白一黑ナルベキコトノ確率ヲ求メヨ。

解 白球ハ少クトモ一ツアルコト明カナルガ故ニ，原因ノ數4ナリ，即チ白4黑0,白3黑1,白2黑2,白1黑3ノ場合コレナリ，之ヲc_1, c_2, c_3, c_4トスベシ。

今白ガ袋ノ中ニアルヤ否ヤノ確率ハ$\frac{1}{2}$ナルガ故ニ，四ツノ原因ノ事前確率ハ定理6系1ニヨリ

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$$

ヨリ，

$$p_1=\frac{1}{16},\quad p_2=\frac{4}{16},\quad p_3=\frac{6}{16},\quad p_4=\frac{4}{16}$$

ヨツテベーずノ定理ニ倣ヒ

$$c_2=\frac{\frac{3}{4}\times\frac{4}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{3}{4}\times\frac{4}{16}+\frac{1}{2}\times\frac{6}{16}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{16}}=\frac{3}{8}$$

250. 證言ノ確率

原因ノ確率ニ關係アルモノニ證言ノ確率ナルモノアリ，例ヲ以テ示サン。

例 1. 甲乙二人アリ，甲ハ云ヒ當テル確率ヲp,乙ガ言ヒ當テル確率ヲqトス，今甲乙二人ガ共ニ起レリト云ヒタル事象ノ眞ニ起リタル確率如何。

解 事象ガ實際起リタルカ，實際ニ起ラザルカ二ツノ中何レカナリ。

今甲乙二人ガ一致セル證言ヲナス時ニ事象ノ起ル確率ハpqナリ。

甲乙二人ガ一致セル證言ヲナス時ニ事象ノ起ラザル確率ハ$(1-p)(1-q)$ナリ。

故ニ實際起リシ確率ハ

$$\frac{pq}{pq+(1-p)(1-q)}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。

注意 1. 實際起ラザリシ確率ハ

$$\frac{(1-p)(1-q)}{pq+(1-p)(1-q)}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナリ。

注意 2. 證言ヲナス人ガ幾人モアル場合ニモ上ノ公式ガ適用セラル，例ヘバ3人ガ共ニ起リタリトイフトキ，ソノ事象ハ眞ニ起リシコトノ確率ハ

$$\frac{pqr}{pqr+(1-p)(1-q)(1-r)}$$

ナリ。

例 2. 甲乙丙等n人ガ順次ニ或事項ヲ傳達スルアリ。甲ヨリ乙ニ，乙ヨリ丙ヘト順次ニ傳ヘ行ク時，最後ニ達スル報告ノ眞ナル確率ヲ求メヨ。

解 各人ノ眞ヲ傳フル確率ヲpトスレバ虛ヲ傳フル確率ハ$q=1-p$ナリ。

今二項定理ニヨリ

$$(p+q)^n=p^n+{}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_2p^{n-2}q^2+\cdots\cdots+q^n$$

ヲ作ラバ

$p^n,\ {}_nC_2p^{n-2}q^2,\ {}_nC_4p^{n-4}q^4\cdots\cdots$ 等ハ眞ヲ傳フル確率トナリ

${}_nC_1p^{n-1}q,\ {}_nC_3p^{n-3}q^3\cdots\cdots$ 等ハ虛ヲ傳フル確率トナル，何トナレバ

p^n ハ n 人共ニ眞ヲ傳フルコトニシテ，${}_nC_2\,p^{n-2}q^2$ ハ $n-2$人ハ眞ヲ傳

ヘ他ノ二人ハ間違フ場合ナリ，然ルニ2人ガ間違ヘバ循環ノ理法ヨリ虚ヨリ眞ニ移ルベケレバナリ，故ニ求ムル確率ハ

$$p^n+{}_nC_2p^{n-2}q^2+{}_nC_4p^{n-4}q^4+\cdots\cdots$$

注意 $\quad {}_nC_1p^{n-1}q+{}_nC_3p^{n-3}q^3+\cdots\cdots$

ハ虚ヲ傳フル確率ナリ。

例3. 甲ガ眞ヲ話ス確率ヲ$\frac{3}{4}$，乙ガ眞ヲ話ス確率ヲ$\frac{5}{6}$トス。今1ヨリ10マデノ番號ヲ附セル球ヲ入レタル袋ヨリ一個ヲ取リ出セシニ甲，乙共ニ1ノ番號ノ球ガ出デタリト證言セリ。眞ニ1ノ番號ノ球ノ出デタル確率如何。

解 c_1ヲ1ガ出デタルコトヽシ c_2 ヲ1ガ出デザリシコトヽス。然ルトキハ c_1, c_2 ノ事前確率ハ夫々

$$P_1=\frac{1}{10}, \qquad P_2=\frac{9}{10}$$

ナリ。サテ c_1 ガ眞ナリトスレバ甲，乙共ニ1ガ出デタリトスル證言ノ確率ハ

$$\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{8}$$

ニシテ c_2 ガ眞ナリトスレバ甲，乙ガ言ヒ外ヅレシ場合ナルガ故ニ二人トモ誤レル證言ヲナス確率ハ

$$\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{24}$$

ナルヲ以テ眞ニ1ノ出デタル確率ハ

$$\frac{\frac{5}{8}\times\frac{1}{10}}{\frac{5}{8}\times\frac{1}{10}+\frac{1}{24}\times\frac{9}{10}}=\frac{5}{8}$$

ナリ。

251. 幾何學的確率

幾何學的圖形ニ關スル確率ハ最モ興味アルコトナレドモソノ精細ハ高等數學ノ助ヲ籍ル必要アルベケレバ，今ハタヾ初等幾何學ニノミ關係セル確率ヲ論ゼン。而シテ其根本ハ次ノ三ツノ規約ニ從フモノトス。

長サaナル線分上ニ一點ヲトル凡テノ方法ノ數ハ無限ニアルモ便宜ノタメ

aニテ表ハスコトヽス。

又平面上ニ一點ヲトル凡テノ方法ノ數ハ無限ニアルモソノ面積ヲ以テ代表セン，故ニ横a，縱bナル矩形内ニ點ヲトル方法ノ數ハabニテ表ハスコトニスベシ。

全ク同樣ニシテ立體内ニ點ヲトル凡テノ方法ノ數ハソノ體積ニテ表ハスコトニスベシ。

例1. 線分ABノ長サaナルトキ，ソノ上ニ任意ノ一點ヲトリ此點ガBヨリモAニ近キ確率ヲ求メヨ。

解 點ヲトリ得ル凡テノ場合ハ規約ニヨリテa，點ガBヨリモAニ近キ場合ハ點ガA點トABノ中點トノ間ニアル場合ナレバ其數ハ$\frac{a}{2}$ナリ。故ニ求ムル確率ハ

$$\frac{a}{2}\div a=\frac{1}{2}$$

例2. 長サaナル線分ヲ三ツニ分チ，ソノ各片ガ一定ノ長サbヲ超エザル確率ヲ求メヨ，但シ$2b>a$ナリトス。

解 三ツノ部分ノ長サヲx, y, zニテ表ハセバ

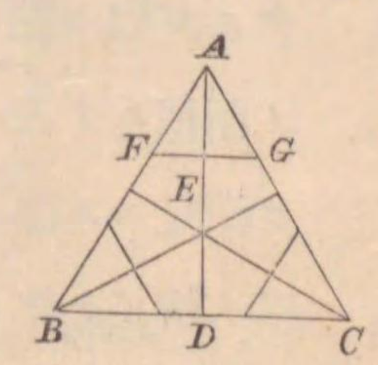
$$x+y+z=a$$

$$x\leqq b,\quad y\leqq b,\quad z\leqq b$$

ナルヤウニx, y, zヲ定ムルヲ要ス。

ソレニハaヲ高サトスル正三角形ABCヲ作リ，ソノ高サノ一ツヲADトス。

AD上ニ一點EヲトリDE$=b$トシ，Eヲ過リ底邊ニ平行ニ引ケル直線ヲFGトシ，ABトFニテ，ACトGニテ交ラシムレバ△AFGハ正三角形ナリ，



コノ方法ヲ三ツノ高サニ就イテ施セバ三ツノ正三角形ヲ得ルト雖モ$2b>a$ナルガ故ニ三ツノ三角形ガ互ニ相交ルコトナシ。

而シテ△AFG内ノ點ハ三邊ニ至ル距離ノ和ガaナルモ底邊BCニ

至ル距離ハ b ヨリ大ナルベケレバ要件ニ適セズ，サレドモ △ABC ヨリ三ツノ正三角形ヲ除ケル部分内ノ點ハ各邊ニ至ル距離ハ共ニ b ヨリ小ニシテシカモ其和ハ a ナルベシ。

故ニ求ムル確率ハ

$$1-\frac{3\triangle AFG}{\triangle ABC}=1-\frac{3(a-b)^2}{a^2}$$

例 3. 與ヘラレタル線分ヲ三分シテ，此三ツノ部分ハ三角形ヲ作ル確率ヲ求メヨ。

解 線分ノ長サヲ l トシ，三ツノ部分ノ長サヲ夫々 x, y, z トスレバ

$$x+y+z=l \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ三角形ヲ作ルタメニハ

$$\left.\begin{array}{l} x<y+z \\ y<z+x \\ z<x+y \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルヲ要ス。(2) ヲ變形スレバ

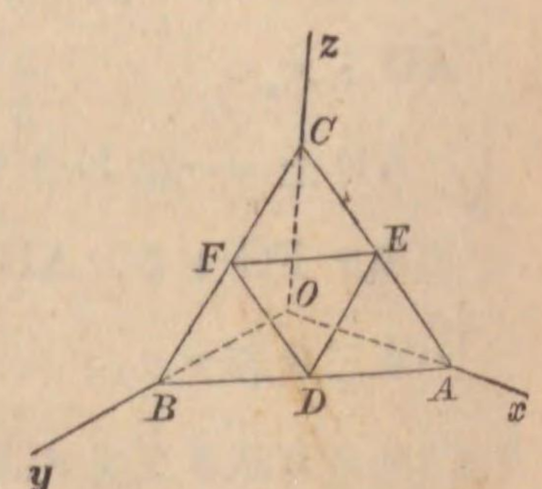
$$\left.\begin{array}{l} 2x<x+y+z \\ 2y<x+y+z \\ 2z<x+y+z \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

即チ　$x<\frac{l}{2},\ \ y<\frac{l}{2},\ \ z<\frac{l}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

ナルヲ要ス。サテ x, y, z ハ 0 ヨリ l マデトリ得ルガ故ニ凡テノ場合ノ數ハ三ツノ直交軸上ニ於テ

$$OA=OB=OC=l$$

ナルガ如キ點 A, B, C ヲ過ル平面 ABC ノ面積ニテ表ハサル，然ルニ(4)ノ條件ヲ滿足スル點ハ平面 ABC ノ各邊ノ中點ヲ結ビテ作レル三角形 DEF ノ面積ニテ表ハサル，故ニ求ムル確率ハ



$$\frac{\triangle DEF}{\triangle ABC}=\frac{1}{4}$$

第十九編　問題

1. 白球 5 個，黑球 7 個ヲ入レタル袋ヨリ一個ヅヽ二回トリ出ス時，二回トモ白ナル確率如何。

2. 四個ノ骰子ヲ投ゲテ目ノ和 10 ナル確率如何。

解 骰子ニハ 6 面アリ，故ニ第一ノ骰子ノ或一面ガ出ヅル毎ニ第二ノ骰子ノ出ヅル場合 6 アリ，故ニ凡テニ於テハ 6^2 通リノ變化アリ。同樣ニシテ四ツノ骰子ヲ投ゲル時凡テノ變化ノ場合ハ 6^4 通リナリ。

サテ各骰子ニハ 1 ヨリ 6 マデアルガ 故ニ 4 個ヲ同時ニ投ゲテ 目ノ和 10 ナル場合ノ和ハ

$$(x^1+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^6)^4$$

ノ展開ニ於ケル x^{10} ノ係數ニ等シ。而シテ夫レハ 80 ナリ，

故ニ所要ノ確率ハ

$$\frac{80}{6^4}=\frac{5}{81}$$

3. 二ツノ正ノ整數アリ其和 100 ニシテ其積ガ 1000 ヨリ大ナルベキ確率ヲ求メヨ。

解 一ツノ數ノトリ得ル範圍ハ，1, 2, ……99 ナリ而シテ其積ガ 1000 ヨリ大ナルベキ爲ニハ一ツノ數ハ 11 ヨリ大ナルカ又ハ 89 ヨリ小ナラザルベカラズ。故ニ求ムル確率ハ

$$p=\frac{88-11}{99}=\frac{7}{9}$$

4. 一ツノ骰子ヲ五回投ゲテ少クトモ三回 1 ノ目ノ顯ハルヽ確率ヲ求メヨ。

解 一ツノ骰子ヲ五回投ゲテ五回共ニ 1 ノ目ノ顯ハルヽ確率ハ $\left(\frac{1}{6}\right)^5$ ニシテ四回顯ハルヽ確率ハ ${}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\frac{5}{6}$ 又三回顯ハルヽ確率ハ ${}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\times\left(\frac{5}{6}\right)^2$ ナリ。而シテ之等ハ互ニ獨立事象ナルガ故ニ所要ノ確率ハ

$$\left(\frac{1}{6}\right)^5+{}_5C_4\left(\frac{1}{6}\right)^4\frac{5}{6}+{}_5C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{23}{648}$$

5. 或事件ガ n 年間ニ n 回起ルトイフ。或一年ニ於テ其事件ガ起ラザル確率ヲ求メヨ。

解 或事件ガ或年ニ一回起ルコトアルベク二回起ルコトアルベク……n 回起ルコトアルベシ，故ニ起リ得ベキ凡テノ場合ハ n^n ナリ。

次ニ或年ニ其事件ガ起ラザル爲ニハ殘リノ $(n-1)$ 年間ニ起ルコトヲ要ス。而シテ其場合ノ數ハ $(n-1)^n$ ナリ故ニ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{(n-1)^n}{n^n}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

6. 1, 2, 3,……20 ナル番號ヲ附セル札 20 枚アリ，ソノ中ヨリ四枚ヲ取リ出ス時 1, 2 ナル番號ノ札アル確率ヲ求メヨ。

解 起リ得ベキ凡テノ場合ハ ${}_{20}C_4$ ニシテ題意ニ適スル場合ハ 3, 4, ……20 ナル 18 個ノ中ヨリ 2 個ヲ取ル場合ナルヲ以テ其數ハ ${}_{18}C_2$ ナリ。

ヨツテ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{{}_{18}C_2}{{}_{20}C_4}=\frac{3}{95}$$

7. 四ツノ骰子ヲ同時ニ投ゲ二ツダケガ一ノ目ヲ現ハス確率ヲ求メヨ。

解 本題ハ簡單ナレバ答數ダケ出スベシ。其理由ハ各自考ヘラルベシ。

$${}_4C_2\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{216}$$

8. 二ツノ骰子ヲ六回投ゲテ少クトモ四回 1,1 ノ目ヲ出ス確率ヲ求メヨ。

解 六回共ニ 1, 1 ヲ出ス確率ハ $\left(\frac{1}{36}\right)^6$ ニシテ，五回 1, 1 ヲ出ス場合ノ確率ハ ${}_6C_5\left(\frac{1}{36}\right)^5\left(1-\frac{1}{36}\right)$ ナリ，又四回 1, 1 ヲ出ス場合ノ確率ハ ${}_6C_4\times\left(\frac{1}{36}\right)^4\left(1-\frac{1}{36}\right)^2$ ナリ。ヨツテ所要ノ確率ハ

$$\left(\frac{1}{36}\right)^6+{}_6C_5\left(\frac{1}{36}\right)^5\frac{35}{36}+{}_4C_2\left(\frac{1}{36}\right)^4\left(\frac{35}{36}\right)^2=\frac{18586}{36^6}$$

9. 袋中ニ 1, 2, 3,……9 ナル番號ノ札アリ。此中ヨリ 3 枚ヲ拔キ出シ番號ノ積ガ偶數ナル確率ヲ求メヨ。

解 凡テノ數ハ奇數カ偶數カノ何レカナルガ故ニ，先ヅ積ガ奇數トナルガ如キ確率ヲ求メンニ都合貝キ場合ノ數ハ 1, 3, 5, 7, 9 ナル五個ヨリ三個トル組合ノ數ニシテ凡テノ場合ハ ${}_9C_3$ ナルヲ以テ

$$\frac{{}_5C_3}{{}_9C_3}=\frac{5}{42}$$

ヨツテ積ガ偶數アル確率ハ

$$1-\frac{5}{42}=\frac{37}{42}$$

注意 本題ヲ直接ニ解カンニ積ガ偶數トナルニハ 2, 4, 6, 8 ノ中ヨリ三ツ宛トル場合即チ ${}_4c_3=4$ ト 2, 4, 6, 8 ノ中ノ一ツト 1, 3, 5, 7, 9 ノ中ノ一ツトヲ組合ス場合即チ ${}_4C_2\times{}_5C_1=30$ ト 2, 4, 6, 8 ノ中ノ二ツト 1, 3, 5, 7, 8 ノ中ノ二ツトヲ組合ス場合即チ ${}_4C_1\times{}_5C_2=40$ 通リアリ。故ニ所要ノ答數ハ

$$\frac{4+30+40}{{}_9C_3}=\frac{37}{42}$$

トナル。

10. 甲乙二人ノ學生アリ，甲ガ問題ヲ解ク確率ハ $\frac{2}{3}$ ニシテ乙ハ $\frac{1}{4}$ ナリ二人共力シテ解キ得ル確率如何。

解 甲乙ガ問題ヲ解キ得ザル確率ハ夫々 $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$ ナリ。故ニ甲乙二人共ニ解キ得ザル確率ハ $\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

ヨツテ甲乙二人ノ中少クトモ一人ガ解キ得ル確率ハ $1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$ ナリ。

11. 五題中平均三題ヲ解キ得ル學生ガ或試驗ニ四題ヲ課セラレ其中二題ヲ解キ得バ及第ナリトイフ。此學生ノ及第スル確率如何。

解 此學生ガ四題共ニ解キ得ル確率ハ

$$p_1=\left(\frac{3}{5}\right)^4$$

四題ノ中三題解キ得ル確率ハ

$$p_1={}_4C_3\left(\frac{3}{5}\right)^3\times\frac{2}{5}$$

四題ノ中二題解キ得ル確率ハ

$$p_3={}_4C_2\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right)^2$$

之等ノ何レノ場合ニモ及第スルヲ以テ所要ノ確率ハ

$$p_2+p_2+p_3=\frac{513}{625}$$

12. 流行病アリ自然ノ儘ニ放任スレバ全快者 8 死亡者 5 ノ割合ナルガ醫師ガ手當ヲナセル爲メ全快者 10 死亡者 3 ノ割合トナレリトイフ。醫師ノ效能如何。

解 自然ニ全快スル確率ハ $\frac{8}{13}$ ナルガ故ニ殘リノ $\frac{5}{13}$ ノ中ニ醫師ノ効果ガ存

スベシ。

今求ムル効果ヲ p トスレバ

$$\frac{8}{13}+\frac{5}{13}\times p=\frac{10}{13}$$

ナリ。故ニ

$$p=\frac{2}{5}$$

ナリトス。

13. 袋中ニ n 個ノ球アリ。或人此中ヨリ一球ヲ取リ出シ之ヲ元ニ戻シテ又一球ヲ取リ出シ斯クスルコト n 回ナル時悉クノ球ヲ手ニセル確率如何。

解 最初ニ任意ノ球ヲ手ニスルコトノ確率ハ $\frac{n}{n}$ ナリ。次ニ第二回ノ試行ニ於テ他ノ $(n-1)$ 個ノ何レカヲ手ニスル確率ハ $\frac{n-1}{n}$ ナリ。同樣ニ考フレバ n 回ノ試行ニ n 個ノ球ヲ順次ニ手ニスル確率ハ

$$\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\cdots\times\frac{2}{n}\times\frac{1}{n}=\frac{n!}{n^n}$$

14. 同ジ技倆ノ二人碁戰ヲナシ先キニ三回勝チタル人ハ敵手ヨリ一圓ヲ受取ルコトヲ約セリ。然ルニ A ナル人ハ二回，B ナル人ガ一回勝チタル時碁戰ヲ中止セリ，B ハ何程ヲ A ニ與フベキカ。

解 A ガ二回 B ガ一回勝チ居ルヲ以テ第四回戰ニ A ガ勝ツ時ハ B ヨリ一圓ヲ得ベク其確率ハ $\frac{1}{2}$ ナリ。若シ A ガ第四回戰ニ負クルモ第五回戰ニ勝ツ時モ又 B ヨリ一圓ヲ得ベク其確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ナリ。故ニ A ノ期望金額ハ

$$100\text{錢}\times\left\{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=75\text{錢}$$

次ニ B ガ勝ツニハ第四，第五ノ兩回共ニ勝ツヲ要ス而シテ其確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ ナリ。故ニ其期望金額ハ

$$100\text{錢}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=25\text{錢}$$

故ニ B ガ A ニ 50 錢渡スヲ要ス。

注意 五回戰ニテ勝負ガ定マルコトニ注意スベシ。

15. A，B 二人碁戰ヲナス。前回ニ勝チタル人ハ次回ニ勝ツ確率ハ $\frac{2}{3}$ ナリトイフ。今最初ノ戰ニ A ガ勝チタリトスレバ次ノ五回ノ勝負ニ於ヲ少クトモ四回 A ノ勝ツ確率ヲ求メヨ。

解 A ガ最初ニ勝チタリトシ其後引續キ五回共ニ勝ツ確率ハ明カニ $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ ナリ。

又甲ガ四回マデ勝チ五回ニ負クル確率ハ $\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}$ ニシテ初メノ三回勝チ第四回ガ負ケ第五回ニ勝ツ確率ハ題意ニヨリ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$$

之等ノ次第ヲ表示スレバ下ノ如シ

第一回	第二回	第三回	第四回	第五回	確　率
勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5$
勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	負 $\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}$
勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	負 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$
勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	負 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$
勝 $\frac{2}{3}$	負 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$
負 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{1}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	勝 $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2$

ヨツテ所要ノ確率ハ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5+\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\frac{1}{3}+4\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{243}$$

注意 A ガ負ケタル時ハ B ガ勝ツガ故ニ其次ノ對局ニテハ B ノ勝ツ確率ハ $\frac{2}{3}$ ナリ。故ニ A ガ敗レタル後 A ガ勝ツ確率ハ $\frac{1}{3}$ ナルコトニ注意スベシ。

16. A, B 二人ノ碁戰ニ於テ A ノ技倆ハ B ノ技倆ノ二倍ナリトイフ。B ガ二回勝ツ前ニ A ガ三回勝ツ確率如何。

解 A ノ勝ツ場合ヲ考フルニ次ノ表ノ如シ。

第一回	第二回	第三回	第四回	確率
A勝ツ $\frac{2}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$		$\left(\frac{2}{3}\right)^3$
A勝ツ $\frac{2}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	B勝ツ $\frac{1}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}$
A勝ツ $\frac{2}{3}$	B勝ツ $\frac{1}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}$
B勝ツ $\frac{1}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	A勝ツ $\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}$

ヨツテ所要ノ確率ハ上ノ表ニ於ケル和即チ

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\times\left(\frac{2}{3}\right)^3\times\frac{1}{3}=\frac{16}{27}$$

17. 甲乙二人交互ニ二個ノ骰子ヲ投ゲ目ノ和8ヲ得ルモノヲ以テ勝トス。甲先ヅ始ムル時甲ガ勝ツ確率ヲ求メヨ。

解 甲ノ勝ツ確率ヲ求メンニ先ヅ最初ニ勝ツ確率ハ $\frac{5}{36}$ ナリ。次ニ第三回ニ於テ勝タンニハ第一回ニ失敗シ第二回ニ乙ガ失敗シ第三回ニ甲ガ成功スルコトヲ要ス。即チ $\frac{31}{36}\times\frac{31}{36}\times\frac{5}{36}$ 同様ニ考フル時ハ甲ノ勝ツ確率ハ結局

$$\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^2+\frac{5}{36}\left(\frac{31}{36}\right)^4+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル無限級數ノ和ナリ。故ニ所要ノ確率ハ $\frac{36}{67}$ ナリ。從ツテ乙ノ勝ツ確率ガ $\frac{31}{67}$ ナリトス。

18. 甲乙二人交互ニ二個ノ骰子ヲ以テ勝負ヲナス。若シ乙ガ7ヲ振ル前ニ甲ガ6ヲ振レバ甲ノ勝，甲ガ6ヲ振ル前ニ乙ガ7ヲ振レバ乙ノ勝トス。甲ヨリ初ムル時甲乙ノ勝ツ確率ヲ求メヨ。

解 甲ガ第一回ニ勝ツ確率ハ $\frac{5}{36}$ 第三回ニ甲ノ勝ツ確率ハ $\frac{31}{36}\times\frac{30}{36}\times\frac{5}{36}$ ナリ。ヨツテ甲ノ勝ツ全體ハ無限級數

$$\frac{5}{36}+\frac{5}{36}\times\frac{30}{36}\times\frac{31}{36}+\frac{5}{36}\times\left(\frac{30}{36}\right)^2\times\left(\frac{31}{36}\right)^2+\cdots\cdots\cdots$$

即チ $\frac{30}{61}$ ナリ。從ツテ乙ノ勝ツ確率ハ $\frac{31}{61}$ ナリトス。

19. 甲乙二人ガ甲乙ノ順序ニテ骰子ヲ投ゲ最初ニ1ノ目ヲ出シタルモノヲ勝トス。Aノ勝ツ確率ヲ求メヨ。

解 甲ノ勝ツ場合ヲ考ヘンニ

1° 第一回ニ1ノ目ヲ出ス時，其確率ハ $\frac{1}{6}$

2° 第一回ニ1ノ目ガ出デズ第二回ニ乙ガ1ノ目ヲ出サズ（乙ガ第二回ニ1ノ目ヲ出セバ甲ガ敗ルヽガ故ナリ。）第三回ニ甲ガ1ノ目ヲ出ス場合，其確率ハ

$$\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}$$

3° 第一回ニ1ノ目ガ出デズ第二回ニ乙ガ1ノ目ヲ出サズ第三回ニ甲ガ1ノ目ヲ出サズ第四回ニ乙ガ又1ノ目ヲ出サズ而シテ第五回ニ甲ガ1ノ目ヲ出ス場合ニシテ其確率ハ

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}$$

4° 以下之ニ準ズ。故ニ甲ノ勝ツ確率ハ

$$p=\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}+\cdots\cdots=\frac{6}{11}$$

注意 乙ノ勝ツ確率ハ $\frac{5}{11}$ ナリ。而シテ上ト同樣ノ方法ニヨリテ求メラル。尙本題ノ如キハ最初ニ振ルモノハ利益アリ。福引ノ場合ト其趣キヲ異ニス。

20. 三人ノ碁客アリ，最初二人勝負ヲナシ，負ケタル人ハ退キテ殘リノ人之ニ代リ，第二回ノ勝負ニ於テ負ケタル人ハ又退キテ殘リノ人之ニ代リ，之ヲ繰リ返ス中二回續ケテ勝チシ人ニ賞ヲ與フベシトイフ。各人ノ賞ヲ得ル確率如何。

解 本題ハ少シク難解ナリ。今三人ヲ假リニ甲，乙，丙ト名ヅケ第一回ニ甲乙二人ガ對局ヲナスト假定スレバ勝負ノ模樣ハ次ノ如シ。

第一回　甲乙　（甲勝ツモノトスル）

第二回　甲丙　（然ル時ハ甲勝テバ終局ニシテ丙勝テバ乙代ル）

第三回　丙乙　（丙勝テバ終局ニシテ丙負クレバ甲代ル）

第四回　甲乙　（形勢全ク元ニ復ス。）

サテ第二回ニ於テ甲勝ツ時ハ終局ニシテ甲，乙，丙ガ賞ヲ得ル確率ハ夫々 1, 0, 0 ナレドモ第二回ニ甲ガ勝ツコトガ保證スベカラズ。ソコデ此場合ノ三人ノ確率ヲ夫々 p, q, r トス。然ル時甲ガ負クル時ハ丙ハ勝チ而カモ今一度乙ニ勝テバ頁イ故ニ甲ガ負ケタル場合ニハ丙ハ第二回ノ初メニ於ケル甲ノ形勢ニアリ乙ハ第二

回ノ初メニ於ケル丙ノ形勢ニアルベシ，故ニ第二回ニ甲ガ負クル時ノ三人ノ確率ハ q, r, p トナルベシ。而シテ第二回ニ甲ガ勝ツカ負クルカノ何レカニシテ而カモ其確率ハ $\frac{1}{2}$ ナルヲ以テ

$$r=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times q$$

$$p=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times r$$

$$r=\frac{1}{2}\times 0+\frac{1}{2}\times p$$

故ニ　$p=\frac{4}{7}$　$q=\frac{1}{7}$　$r=\frac{2}{7}$

以上ハ第一回ニ甲ガ勝チタリト假定セリ。若シ乙ガ勝チタル時ハ同一ノ考ヘ方ニヨリテ

$$p=\frac{1}{7}\qquad q=\frac{4}{7}\qquad r=\frac{2}{7}$$

トナル。

而シテ第一回ニ於テ甲ガ勝ツカ又ハ負クルカ何レカニシテ其確率ハ $\frac{1}{2}$ ナルヲ以テ三人ノ勝ツ確率ハ結局次ノ如シ

甲ガ勝ツ確率	$\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$
乙　〃	$\frac{1}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{4}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{14}$
丙　〃	$\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}=\frac{4}{14}$

21. 或手紙ガ London 又ハ Clifton ヨリ來レルコトヲ知ル。而シテ消印中ニ相隣レル二字 on ダケ認メ得タリトイフ。London ヨリ來レル確率如何。

解　London トイフ語ニハ on ガ二ケ所アリ，而シテ相隣ル二ツノ文字ノ組合セハ Lo, on, nd, do, on ノ五通リナルガ故ニ London トイフ語カラ偶然 on ダケガ認メラレル確率ハ

$$p_1=\frac{2}{5}$$

ナリ。然ルニ clifton ヨリハ相隣ル二ツノ文字ノ組合ハ cl. li, if, ft, to, on ノ六ツニシテ on ノ並ビ居ルハ一ケ所ナルガ故ニ此場合ニハ

$$p_2=\frac{1}{6}$$

ヨツテ此手紙ガ London ヨリ來レルナラントノ確率ハべいずノ定理ニヨリ

OOTKY
TOOKY
TKOOY
TKYOO

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+\frac{1}{6}}=\frac{12}{17}$$

ナリ。

22. Tokyo ナル五ツノ文字ヲ任意ニ並ベル時 o o ガ並ブ確率如何。

解　T. o, k, y, o ナル五ツノ文字ヲ並ベル方法ハ (o, o ナル同一文字アルガ故ニ) $\frac{5!}{2!}=60$ 通ナリ。又 T, k, y ナル三ツノ文字ノ並ベル方法ハ $3!=6$ ニシテ之ニ 0, 0 ナル文字ヲ離サズニ並ブル方法ハ更ニ四通リアルガ故ニ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{6\times 4}{60}=\frac{2}{5}$$

23. とらんぷヨリ四枚トリ出シ悉ク異種類ナル確率ヲ求メヨ。

解　とらんぷハ全體ニ於テ 52 枚アリテ四種ヨリ成リ各 13 枚宛ナリ。

サテ最初ノ一枚ハ何レヲトルモ可ナルガ故ニ其確率ハ $p_1=1$ ナリ。次ニ殘リノ 51 枚ヨリ他ノ三種類ノ中ノ何レカ一枚ヲ取リ出ス確率ハ $p_2=\frac{13\times 3}{51}=\frac{39}{51}$ 次ニ殘リノ 50 枚ヨリ他ノ二種類ノ中何レカ一枚ヲ取リ出ス確率ハ $p_3=\frac{13\times 2}{50}=\frac{13}{25}$ ナリ。最後ニ殘リノ 49 枚ノ中他ノ一種類ヲ取リ出ス確率ハ $p=\frac{13}{49}$ ナリ。ヨツテ求ムル確率ハ

$$p_1p_2p_3p_4=1\times\frac{39}{51}\times\frac{13}{25}\times\frac{13}{49}=\frac{13^3}{17\times 25\times 49}\ \text{ナリ。}$$

24. 甲ノ袋中ニハ白球一個黒球四個，乙ノ袋中ニハ黒球三個アリ甲ヨリ三個ヲ取リ出シ乙ニ入レ然ル後乙ヨリ三個ヲ取リ出シ甲ニ入レルトキ甲ノ袋中ニ白球ノ存在スル確率ヲ求メヨ。
5　4

解　最初甲ノ袋ヨリ取リ出ス時白球ガ出デズシテ三ツトモ黒球ナル時ハ勿論甲ノ袋ニ白球ガ殘ルベシ而シテ其確率ハ明カニ

$$p_1=\frac{{}_4C_3}{{}_5C_3}=\frac{2}{5}$$

次ニ甲ノ袋ヨリ白球ガ出ヅル時其白球ガ乙ヨリ取リ出サレテ甲ニ復歸スル確率ヲ求メンニ

$$p_2=\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}\times\frac{{}_5C_2}{{}_6C_3}=\frac{3}{10}$$

故ニ所要ノ確率ハ

$$p=p_1+p_2=\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$$

25. 袋中ニ五ツノ球アリ，其中何程白アルカ分ラズ，今二球ヲ取リ出シタルニ二ツトモ白ナリシトイフ。五球悉ク白ナル確率ヲ求メヨ。

解 袋ノ中ノ球ハ五ツトモ白球ナルカ，四白一黑ナルカ，三白二黑ナルカ或ハ二白三黑ナルカナリ。(一白四黑又ハ五ツトモ黑ナドハ題意ヨリ見テアリ得ベカラズ。)

若シ五白ナルトキハ同時ニ二白ヲ出ス方法ハ ${}_5C_2=10$ ニシテ四白一黑ナルトキハ ${}_4C_2=6$，三白二黑ナルトキハ ${}_3C_2=3$，二白三黑ナル時ハ ${}_2C_2=1$ ナルヲ以テ，五球トモ白ナル確率ハ

$$\frac{{}_5C_2}{{}_5C_2+{}_4C_2+{}_3C_2+{}_2C_2}=\frac{10}{10+6+3+1}=\frac{1}{2}$$

26. 二ツノ袋アリテ其一ツハ白球 3，黑球 5 他ノ袋ニハ白球 2，黑球 2 ヲ含ム，今此中ノ一ツニ手ヲ入レテ一球ヲトリ出シタルニ白ナリ。次ニ其球ヲ元ニ戻シテ何レカノ袋ニ手ヲ入レ一ツノ球ヲ取リ出シタルニ黑ナリシトイフ二回トモ第一ノ袋ニ手ヲ入レシコトノ確率如何。

解 先ヅ第一，第二ノ袋ニ手ヲ入レシ確率ハ

$$P_1=P_2=\frac{1}{2}$$

ニシテ其場合ニ白球ノ出ヅル確率ハ $p_1=\frac{3}{8}$ $\quad p_2=\frac{2}{4}$

ナルヲ以テ

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}}=\frac{3}{7}$$

次ニ第二回ニ第一ノ袋ニ手ヲ入レシ確率ヲ求ムルニ此場合ニハ黑球ガ出デタルニヨリ

$$P_1=P_2=\frac{1}{2}$$

$$p_1=\frac{5}{8} \qquad p_2=\frac{2}{4}$$

ヨツテ

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{4}}=\frac{5}{9}$$

故ニ二回共ニ第一ノ袋ニ手ヲ入レシ確率ハ

$$p=\frac{3}{7}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{21}$$

27. 二ツノ袋アリ其一ツハ白球五個，黑球三個，他ノ袋ハ白球三個黑球五個ヲ含ム。此二ツノ袋ノ中何レカニ手ヲ入レ二球ヲ取リ出シタルニ二ツトモ白ナリシトイフ。第一ノ袋ニ手ヲ入レシコトノ確率ヲ求ム。

解 ベーずノ定理ニヨリテ解センニ，二ツノ原因アリ第一ノ原因 c_1 ハ第一ノ袋ニ手ヲ入レルコトニシテ第二ノ原因 c_2 ハ第二ノ袋ニ手ヲ入レルコトナリ。而シテ白球ノ出デザル前ニテハ第一ニ手ヲ入レシト思フコト丶第二ニ手ヲ入レシト思フコト丶ハ同等ノ確サラシサナルヲ以テ

$$P_1=P_2=\frac{1}{2}$$

サテ第一ノ袋ヨリ二球ヲトリ出シ二ツトモ白ナル確率ヲ p_1 トスレバ

$$p_1=\frac{{}_5C_2}{{}_8C_2}=\frac{5}{14}$$

第二ノ袋ヨリ二球ヲトリ出シ二ツトモ白ナル確率ヲ p_2 トスレバ

$$p_2=\frac{{}_3C_2}{{}_8C_2}=\frac{3}{28}$$

ヨツテ第一ノ袋ニ手ヲ入レシ確率ハ公式ニヨリテ

$$\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{14}}{\frac{1}{2}\times\frac{5}{14}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{28}}=\frac{10}{13}$$

28. 袋中ニ n 個ノ球アリ，其中何程白アルカ分ラズ。今一ツヲ取リ出シタルニ白ナリ。之ヲ舊ニ戻シテ第二回ニ一ツヲ取リ出シタルニ又白ナリシトイフ。然ラバ之ヲ再ビ舊ニ戻シテ第三回目ニ一ツヲ取リ出ストキ其球ガ白ナラザル確率如何。

解 本題ニ於テハ n 個ノ原因アリ。即チ

$$\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots\cdots\cdots\cdots & & c_n \\ \text{一白} & \text{二白} & \text{三白} & & & n\text{白} \end{array}$$

ソコデ之等原因ノ事後確率ヲ求メンニ原因 c_1 ノ時二回出シテ二回共ニ白球ガ出ヅルコトノ確率ハ

$$p_1=\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

同様ニ c_2, c_3, …… ノ時二回共ニ白球ガ出ヅルコトノ確率ハ

$$p_2=\left(\frac{2}{n}\right)^2 \qquad p_3=\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdots\cdots \qquad p_n=\left(\frac{n}{n}\right)^2$$

故＝原因 $c_1, c_2, \cdots\cdots\cdots c_n$ ノ事後確率ヲ $e_1, e_2, \cdots\cdots\cdots e_n$ トスレバ

$$e_1=\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^2}=\frac{6\times 1^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

同様＝

$$e_2=\frac{6\times 2^2}{n(n+1)(2n+1)} \qquad e_3=\frac{6\times 3^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad e_n=\frac{6\times n^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

サテ c_1 ガ若シ眞ノ原因ナリトスレバ，其次＝白球ノ出デザル確率ハ $\frac{n-1}{n}$ ＝シテ $c_2, c_3, \cdots\cdots$ ヲ眞ノ原因ナリトスレバ白球ノ出デザル確率ハ夫々 $\frac{n-2}{n}$, $\frac{n-3}{n}$ $\cdots\cdots$ナルヲ以テ所要ノ確率ハ

$$e_1\times\frac{n-1}{n}+e_2\times\frac{n-2}{n}+\cdots\cdots\cdots+e_2\times\frac{0}{n}$$

$$=(e_1+e_2+\cdots\cdots+e_{n-1})-\frac{1}{n}\left(\frac{6\times 1^3}{n(n+1)(2n+1)}+\frac{6\times 2^3}{n(n+1)(2n+1)}+\cdots\cdots \frac{6\times(n-1)^3}{n(n+1)(2n+1)}\right)$$

$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}-\frac{3(n-1)^2}{2(n+1)(2n+1)}=\frac{n-1}{2(2n+1)},$$

29. 一ツノ袋ノ中＝白又ハ黒ノ球四個アリ。今一球ヲ取リ出シタル＝白球ナリシトイフ。コノ袋ノ中＝三ツノ白球アルコトノ確率ヲ求メヨ。

解 四ツナガラ白球ナル事前確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ ナリ。何トナレバ一ツノ白球ガ袋中＝アルヤ否ヤノ確率ハ $\frac{1}{2}$ ナルヲ以テナリ。白球ガ三個＝シテ黒球ガ一個ナル事前確率ハ如何＝トイフ＝一ツノ白球ガ存在スルヤ否ヤノ確率ハ $\frac{1}{2}$ ＝シテ四ツノ球ノ中何レカ一ツハ黒ナレバ可ナルガ故＝其事前確率ハ $\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 4=\frac{4}{16}$ ナリ。一般＝四白，三白一黒，二白二黒，一白三黒，(四黒ナル場合ハナキコト＝注意スベシ。) ナルコトノ事前確率ハ

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}$$

ノ各項(最後ノ項ヲ除キタル)ノ値＝等シ。サテ四白ナルトキ之ヨリ白ノ出ヅル確率ハ1＝シテ，三白一黒ナルトキ之ヨリ白ノ出ヅル確率ハ $\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots\cdots$ ナリ。ヨツテ袋中＝三白一黒ナリシ事後確率ハベーずノ定理＝ヨリ

$$e=\frac{\frac{4}{16}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}\times 1+\frac{4}{16}\times\frac{3}{4}+\frac{6}{16}\times\frac{2}{4}+\frac{4}{16}\times\frac{1}{4}}=\frac{3}{10}$$

30. とらんぷ札 52 枚中一枚ヲ失ヘリ，殘リノ 51 枚中ヨリ二枚ヲ取リ出シタル＝二枚トモすぺーどナリシトイフ。失ヒタル札ガすぺーどナル確率ヲ求ム。

解 とらんぷ 52 枚ハ四種類ヨリ成リ各種13枚宛アリ。故＝すぺーどヲ失ヒシ事前確率ハ $\frac{1}{4}$ ＝シテ失ハザリシ事前確率ハ $\frac{3}{4}$ ナリ。而シテ失ハザリシ場合＝二枚トリ出シ二枚共＝すぺーどナル確率ハ

$$p_1={}_{13}C_2\div{}_{51}C_2$$

＝シテ失ヒシ場合＝ハ

$$p_2={}_{12}C_2\div{}_{51}C_2$$

ナリ。故＝失ヒシ札ガすぺーどナル確率ハ

$$e=\frac{\frac{1}{4}\times p_2}{\frac{3}{4}\times p_1+\frac{1}{4}\times p_2}=\frac{11}{50}$$

31. 袋ノ中＝白黒合セテ八個ノ球アリ，ソノ中ヨリ一球ヅヽ五回球ヲ出セシ＝三回ハ白＝シテ二回ハ黒ナリシトイフ。然ラバ此次＝取リ出ス球ガ白球ナル確率ヲ求メヨ。

解 三回ハ白球ガ出デ二回ガ黒球ガ出デシヲ以テ，袋ノ中＝アル白黒兩球ノ配合ヲ次ノ如ク假定スベシ。

原　因	c_1	c_2	c_3	c_4
白　球	6	5	4	3
黒　球	2	4	4	5

サテ原因 c_1 ガ眞ナル時ハ，三回ガ白球ガ出デ二回ガ黒球出ヅル事前確率ハ

$$p_1=\frac{6}{8}\times\frac{5}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}\times{}_5C_3=\frac{20}{56}$$

同様＝ c_2, c_3, c_4 ノ時＝ハ夫々

$$p_2=\frac{30}{56} \quad p_3=\frac{24}{56}, \quad p_4=\frac{10}{56}$$

故＝原因 c_1, c_2, c_3 及ビ c_4 ノ事後確率ハ

$$e_1=\frac{20}{84},\ e_2=\frac{30}{84},\ e_3=\frac{24}{84},\ e_4=\frac{10}{84}$$

サテ e_1 ノ時ハ殘リ三回ノ中白球三個＝シテ，e_2 ノ時ハ二個，e_3 ノ時ハ一個＝シテ e_4 ノ時＝ハ白球ガナシ。故＝所要ノ確率ハ

$$e_1\times\frac{3}{3}+e_2\times\frac{2}{3}+e_3\times\frac{1}{3}=\frac{4}{7}$$

ナリ。

注意 1. 本題ノ如キ＝アリテハ袋ノ中ノ球ノ個數＝ハ無關係＝シテ白球又ハ黑球ノ出デタル回數＝ヨツテ定マルモノナリ。ソノ理由ハ本題ヲ一般化スルコト＝ヨリテ說明スルコトヲ得ベシト雖モ，計算稍々煩瑣ナリ。故＝玆＝其結果ノミヲ述ブベシ。即チ一ツノ袋＝白黑合セテ m 個ノ球ヲ入レタリ，ソノ中ヨリ一個宛 $p+q$ 回取リ出シタル＝白球ガ p 個黑球ガ q 個出デタリトイフ。然ラバ其次ノ試行＝於テ白ノ出ヅベキ確率ハ $\dfrac{p+1}{p+q+2}$ ＝シテ黑ノ出ヅル確率ハ $\dfrac{q+1}{p+q+2}$ ナリ。

注意 2. 或婦人ハ二男一女ヲ產メリ。此次＝產マルベキ生兒ノ男ナルベキ確率ハ上ノ公式＝ヨリテ $\dfrac{3}{5}$ ＝シテ女子ノ產マルベキ確率ハ $\dfrac{2}{5}$ ナリ。

32. 二個ノ獨立事象 E, E′ アリ。或人ガ E ガ起ラバ a 圓ヲ得 E′ ガ起ラバ b 圓ヲ得ル約束ヲナシタリトス。E, E′ ノ起ル確率ヲ $p,\ q$ トスレバ此人ノ期望金額如何。

解 E ノ起ル確率ハ p ＝シテ且ツ起リシ時ハ a 圓ヲ受クル約束ナルヲ以テ其期望金額ハ ap 圓ナリ。E′ ガ起ル確率ハ q ＝シテ且ツ起リシ時ハ b 圓ヲ受クル約束ナルヲ以テ其期望金額ハ bq 圓ナリ。而シテ E ト E′ トガ互＝獨立ナルヲ以テ所要ノ金額ハ夫等ノ和

$$(ap+bq)\text{圓}$$

ナリ。

33. 或人最初＝二個ノ骰子ヲ投ゲ 7 ヲ出セバ 1 圓ヲ受取リ且ツ續イテ骰子ヲ投グル權利ヲ得，若シ第二回＝ 7 ヲ出セバ 1 圓ヲ受取リ更＝引キ續イテ投グル權利ヲ得，以下同樣ナル時此人ノ期望金額如何。

解 二個ノ骰子ヲ投ゲテ目ノ和 7 ヲ出ス確率ハ $\dfrac{1}{6}$ ナリ。故＝ 7 ヲ出シテ一圓ヲ受取ル期望金額ハ $\dfrac{1}{6}$ 圓ナリ。サテ引キ續キ第二回＝又 7 ヲ出ス確率ハ $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$ ナルヲ以テ期望金額ハ $\left(\dfrac{1}{6}\right)^2$ 圓ナリ。カクノ如ク＝シテ所要ノ期望金額ハ次ノ無限

級數ノ和ナリ。

$$\frac{1}{6}\text{圓}+\frac{1}{6^2}\text{圓}+\frac{1}{6^3}\text{圓}+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{答}\ 20\text{錢}$$

34. 袋中＝ 1 ノ番號ノ札一枚，2 ノ番號ノ札二枚……… n ノ番號ノ札 n 枚ヲ入ルヽアリ，此中ヨリ一枚ヲ拔キ出シ其番號 r ナラバ r 圓ヲ貰フコトヲ約束セラレタル人アリトス。此人ノ期望金額如何。

解 札ノ總數ハ

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

故＝ 1 ノ番號ノ札ヲ出ス確率ハ $\dfrac{2}{n(n+1)}$ ＝シテ 2 ノ番號ノ札ヲ出ス確率ハ $\dfrac{2\times2}{n(n+1)}$

一般＝ r ノ番號ノ札ヲ出ス確率ハ $\dfrac{2\times r}{n(n+1)}$

ヨツテ此人ノ期望金額ハ定義＝ヨリ

$$2\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{2^2}{n(n+1)}+\cdots\cdots\cdots+\frac{r^2}{n(n+1)}+\cdots\cdots\cdots+\frac{n^2}{n(n+1)}\right\}$$

$$=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)}=\frac{2n+1}{3} \qquad \text{答}\ \frac{2n+1}{3}\text{圓}$$

35. 1, 2, 3……… n ノ數ヲ記入シタル札 n 枚アリ。其中ヨリ二枚ヲトリタル時其記シタル數ノ積＝等シキ金額ヲ貰フモノトス。其人ノ期望金額如何。

解 n 枚ヨリ二枚ヲ取リ出シタル時ノ番號ノ乘積ノ和ヲ考ヘン＝先ヅ

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} rs=\frac{n(n+1)}{2}\sum_{s=1}^{n} s=\frac{\{n(n+1)\}^2}{4}$$

ヨリ $1^2, 2^2, \cdots\cdots\cdots\cdots n^2$ ノ和ヲ減ズレバ可シ。然ル時ハ

$$\frac{\{n(n+1)\}^2}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{12}$$

サテ此中＝ハ 1, 2, ト 2, 1 トヲ二ツトシテ算定セリ。故＝實際ハ其半分即チ $\dfrac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24}$ ナリ。ヨツテ求ムル期望金額ハ

$$\frac{\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{s=1}^{n}\sum_{\gamma=1}^{n} rs}{{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{n(n+1)(3n^2-n-2)}{24\,{}_n\mathrm{C}_2}=\frac{3n^2+5n+2}{12}$$

ナリ。

36. 袋ノ中＝ p 個ノ白球ト q 個ノ黑球トガアリ今一球ヲ取リ出シテハ元＝戾

シテ復トリ出スコトn回ニ及ブ時黑白黑ノ順序ニ三球ガ出デシナラバa圓ヲ貰フコトヲ得ベキ人ノ期望金額如何。

解 白球ノ出ヅル確率ハ $\frac{p}{p+q}$ ニシテ黑球ノ出ヅル確率ハ $\frac{q}{p+q}$ ナリ。故ニ一回ノ試行ニ於ケル期望金額ハ $\frac{apq^2}{(p+q)^3}$ ナリ。從ツテn回ノ試行ニ於テハ

$$\frac{napq^2}{(p+q)^3}$$

ナリトス。

37. 事前確率 $\frac{1}{5^9+1}$ ナル一事件アリ。眞ヲ話ス確率 $\frac{5}{6}$ ナル人 10 人ガ一致シテ此事件ノ起レルコトヲ證言スル時眞ニ此事件ノ起レル確率ヲ求メヨ。

解 此場合ニハ

$$P_1=\frac{1}{5^9+1} \qquad P_2=1-\frac{1}{5^9+1}=\frac{5^9}{5^9+1}$$

ニシテ

$$p_1=\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \qquad p_2=\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$$

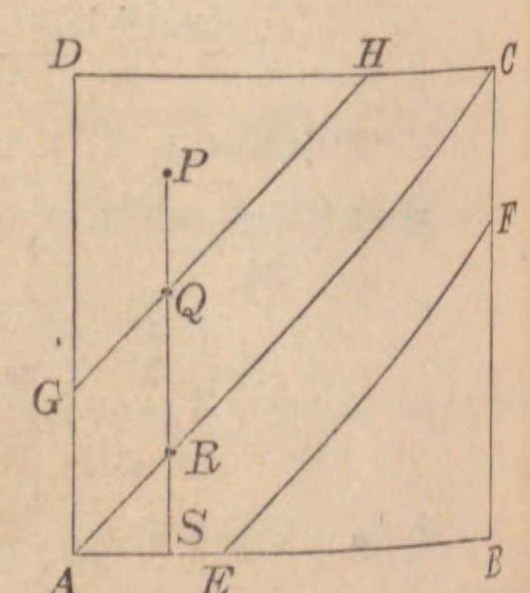
ナルヲ以テ所要ノ確率ハ

$$\frac{\frac{1}{5^9+1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10}}{\left\{\frac{1}{5^9+1}\times\left(\frac{5}{6}\right)^{10}+\frac{5^9}{5^9+1}\times\left(\frac{1}{6}\right)^{10}\right\}}=\frac{5}{6}$$

38. 長サlナル線分AB上ニ任意ノ二點ヲ取リ其二點間ノ距離ガ定長m $l \geqq m)$ヲ超ユル確率ヲ求メヨ。

解 一邊ノ長サガlニ等シキ正方形 ABCD ヲ作リ且ツ

$$AE=AG=CF=CH=m$$



ナリトス。今三角形 DGH ノ中ニ一點 P ヲ設ケ AD ニ平行ニ PQRS ヲ引クト

$$PS-RS \geqq m$$

故ニ所設ノ線分中ニ二點ヲトリ其線分ノ一端マデノ距離ヲ PS, RS ナルガ如クナラシムル時ハ夫等ノ二點間ノ距離ハ常ニ m ヨリ大ナリ。而シテカヽル條件ヲ滿足セシムルニハ點ガ三角形

HDG 又ハ三角形 EFB 中ニアルヲ要ス。ヨツテ所要ノ確率ハ

$$\frac{\text{三角形HDG}+\text{三角形EFB}}{\text{正方形}}=\frac{(a-b)^2}{a^2}$$

注意 本題ヲ若シ二點間ノ距離ガ定長 m ヲ超エザル確率ト改ムル時ハ

$$1-\frac{(a-b)^2}{a^2}=\frac{2ab-b^2}{a^2}$$

トナルベシ。

39. 任意ニトリタル三ツノ線分ガ三角形ヲナス確率ヲ求メヨ。

解 最初ニトリタル線分ノ長サヲlナリトシ，他ノ二ツノ線分ノ長サヲ m, n トスル時ハ之等ハ三角形ヲナス爲ニハ

$$\left.\begin{array}{l} m\sim n<l \\ n\sim l<m \\ l\sim m<n \end{array}\right\}$$

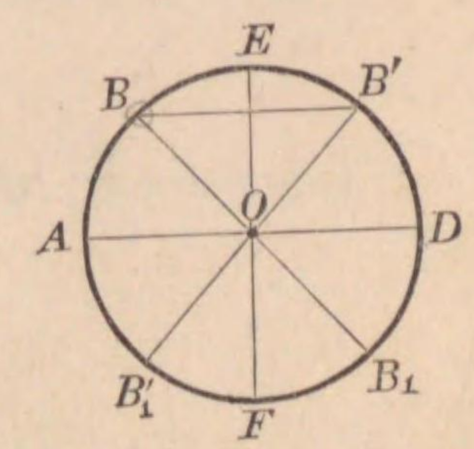
ナルコトヲ要ス。即チ任意ニトリタル二線分ノ差ガ他ノ線分ヨリモ小ナルコトヲ要ス。然シテ小ナル事ト大ナル事トハ一樣齊一ニ起ルモノナルヲ以テ所要ノ確率ハ $\frac{1}{2}$ ナリトイフヲ得ベシ。

40. 圓周上ニ任意ニ三點ヲ取リ，此三點ガ同一ノ半圓周上ニアル確率ヲ求メヨ。

解 最初 A ヲ圓周上任意ノ位置ニトリ（何レニトルモ結果ニハ影響セズ。）次ニ B ヲ他ノ位置ニトル時ハ C ノ取ルベキ範圍ハ

$\overparen{BAB_1}$ ト $\overparen{BB'D}$ トノ上ニシテ其和ハ

$2\pi r-\overparen{B_1D}$



BB′ ヲ AD ニ平行ニ引クトキ C ヲ $\overparen{B'BB_1'}$ 又ハ $\overparen{B'D}$ ノ上ニトル時ハ三點 A, B′, C ハ又半圓周上ニアルベシ。而シテ其和ハ $\pi r+\overparen{B'D}$ ニ等シ。

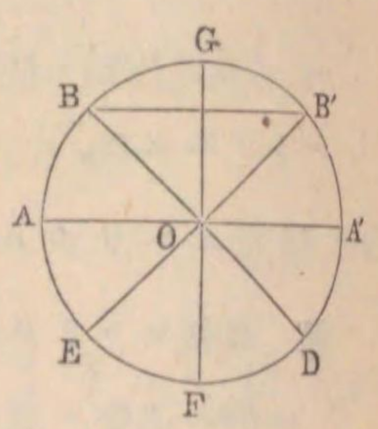
要スルニ B ヲ一ツ定ムルト B′ ガ之ニ對應シテ定マリ而カモ之等ノ二點ニ關シテ C ノ取ルベキ範圍ハ $3\pi\gamma$ トナル。而シテ B ノ動クベキ範圍ハ A ヨリ E マデト A ヨリ F ニ至ル間ナリ，ヨツテ要件ニ適スル凡テノ場合ハ $3\pi\gamma\times\pi\gamma=3\pi^2\gamma^2$ ニテ測ラレル。

最後ニ B, C ノ取ルベキ凡テノ場合ハ $(2\pi\gamma)^2$ ナルヲ以テ所要ノ確率ハ

$$p=\frac{3\pi^2r^2}{(2\pi r)^2}=\frac{3}{4}$$

41. 圓周上ニ任意ニ三點ヲトリ鋭角三角形ヲ作ル確率ヲ求メヨ。

解　一ツノ頂點 A ヲ圓周上ニトリ，中心 O ト結ビ圓周ト交ル第二ノ點ヲ A′ トス，今第二ノ頂點 B ヲトリ BOD ヲ作リ C ヲ弧 A′D 上ニトラバ △ABC ハ鋭角三角形ナリ。



次ニ BB′ ヲ直徑 AOA′ ニ平行ニ引キ B′OE ヲ作リ C ヲ弧 EA′ 上ニトラバ △AB′C ハ鋭角三角形ナリ.

而シテ弧 A′D ト弧 EA′ トノ和ハ弧 AFA′ 即チ半圓周ニ等シ，故ニ B ト B′ トヲ第二ノ頂點トスレバ第三ノ頂點 C ノトルベキ範圍ハ半圓周即チ $r\pi$ ナリ。

サテ B ノ動キ得ベキ範圍ハ弧 FAG，(B ハコノ上ヲ動クトキ B′ ハ FA′G 上ヲ動ク) 即チ $r\pi$ ナリ。

ヨツテ鋭角三角形ヲ作ルニ都合良キ凡テノ場合ノ數ハ $r^2\pi^2$ ニテ表ハサル。

サテ B ト C トガトル凡テノ場合ノ數ハ $(2r\pi)^2$ ナルガ故ニ求ムル確率ハ

$$p=\frac{r^2\pi^2}{(2r\pi)^2}=\frac{1}{4}$$

第二十編　總複習問題解答集

1. $abc=1$ ナル時ハ

$$\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　假定ニヨリ

$$\frac{1}{ab+a+1}=\frac{1}{\frac{1}{c}+a+1}=\frac{c}{ca+c+1}$$

$$\frac{1}{bc+b+1}=\frac{1}{\frac{c}{ac}+\frac{1}{ac}+1}=\frac{ca}{ca+c+1}$$

ヨツテ

$$\frac{1}{ab+b+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}=1$$

2. $yz+zx+xy=1$ ナルトキ次ノ算式ヲ證セヨ。

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}=\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

解　左邊ヲ通分シテ分子ノ移項ヲ行フトキハ

$$\frac{x(1-xy-xz)+y(1-yx-yz)+z(1-zx-zy)+xyz(yz+zx+xy)}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

然ルニ假定ニヨリテ

$$1-xy-xz=yz,\quad 1-yx-yz=zx,\quad 1-zx-zy=xy,\quad yz+zx+xy=1$$

ナルヲ以テ，結局左邊ハ

$$\frac{4xyz}{(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)}$$

トナル。

3. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$　　$0<a<1$

ナルトキ方程式 $\dfrac{X-x}{x^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{Y-y}{-y^{\frac{1}{3}}}$ ニ於テ $Y=0$ ナル時ノ X ノ値ヲ X_0，

又 $X=0$ ノ時ノ Y ノ値ヲ Y_0 ストルトキ $\sqrt{X_0^2+Y_0^2}$ ノ値ヲ a ヲ以テ表

ハセ。

解　$x^{\frac{1}{3}}=u,\ y^{\frac{1}{3}}=v$ ト置クト $x=u^3,\ y=v^3$ トナルガ故ニ與ヘラレタル方程式ハ

$$\frac{X-u^3}{u}=\frac{Y-v^3}{-v}$$

故ニ

$$X_0=u^3+uv^2=u(u^2+v^2)$$

$$Y_0=v^3+u^2v=v(u^2+v^2)$$

故ニ　$X_0{}^2+Y_0{}^2=(u^2+v^2)^3$　從ツテ　$\sqrt{X_0{}^2+Y_0{}^2}=(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}$,

サテ

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

ヨリ

$$u^2+v^2=(a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}})^{\frac{2}{3}}$$

然ルニ $0<a<1$ ナルヲ以テ $a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}<0$ ナリ。故ニ

$$\sqrt{X_0{}^2+Y_0{}^2}=(u^2+v^2)^{\frac{3}{2}}=a^{-\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}$$

4. $x=\sqrt{3+\sqrt{5}},\quad y=\sqrt{3-\sqrt{5}}$ ナルトキ次式ノ値ヲ小數第三位マデ求メヨ。

$$\frac{\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}}{1-\dfrac{x^2+y^2}{(x+y)^2}}$$

解　$x=\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}},\qquad y=\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2}}$

トナリ。且ツ與ヘラレタ式ヲ簡單ニスレバ $\dfrac{2(x+y)}{x-y}$ トナル。ヨツテ

$$\frac{2(x+y)}{x-y}=\sqrt{20}=4.472$$

5. $X=\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{24}}}+\sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}-\sqrt{\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^2}{24}}}$ ナルトキ X^3+pX+q ノ値ヲ求メヨ。

解　$X=a+b$ ト置クト

$$a=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^2}{27}}}\qquad b=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

デアルカラ

$$X^3=(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

$$=-q+3\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}(a+b)$$

$$=-q+3\sqrt[3]{\frac{-p^3}{27}}(a+b)$$

$$=-q-pX$$

故ニ

$$X^3+pX+q=-q-pX+pX+q=0,$$

6. $2x=a+\dfrac{1}{a},\ \ 2y=b+\dfrac{1}{b}$ ナル時, $xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$ ノ値ヲ求メヨ。

解　先ヅ乘法ニヨリテ

$$xy=\frac{1}{4}\left(ab+\frac{1}{ab}+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

$$x^2-1=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\qquad y^2-1=\frac{1}{4}\left(b-\frac{1}{b}\right)^2$$

故ニ

$a>1$ ナルカ $0>a>-1$ ナル時ハ $a-\dfrac{1}{a}>0$ ニシテ

$b>1$ ナルカ $0>b>-1$ ナル時ハ $b-\dfrac{1}{b}>0$ ナリ。

故ニカヽル時ニハ

$$\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)\ \text{ナルヲ以テ}$$

$$xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}=\frac{1}{2}\left(ab+\frac{1}{ab}\right)$$

ナリ。

吟味　$a-\dfrac{1}{a}$ 又ハ $b-\dfrac{1}{b}$ ノ何レカ一ツハ正ニシテ他ノ一ツハ負ナル時ハ

$$\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}=-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\left(b-\frac{1}{b}\right)$$

トセザルベカラズ。カヽル場合ニハ

$$xy+\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$$

トナル。

7. $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+d)^3+(d+a)^3+(a+c)^3+(b+d)^3$
$=3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$ ナルコトヲ證セヨ。

解　先ヅ剩餘定理ニヨリテ左邊ハ $(a+b+c+d)$ ニテ除シ得ルコトヲ示サンニ

$a+b+c+d=0$ トスレバ　$a+b=-(c+d)$, $b+c=-(d+a)$, $(a+c)=-(b+d)$

ナルヲ以テ左邊ハ零トナル。故ニ $a+b+c+d$ ニテ整除セラルヽ筈ナリ。

サテ左邊ハ又三次對稱式ナルヲ以テ $a+b+c+d$ ニテ除シタル商ハ二次ノ對稱式ナリ。故ニ

$$左邊=(a+b+c+d)\{L(a^2+b^2+c^2+d^2)+M(ab+bc+cd+da+ac+bd)\}$$

玆ニ於テ

$a=1,\ b=c=d=0$ トスレバ $L=3$

$a=b=1\quad c=d=0$ トスレバ $6=2L+M$ 從ツテ $M=0$

ヨツテ左邊ハ

$$3(a+b+c+d)(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

ナリ。

8. $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$ ナル時ハ

$$a=b=c=d$$

ナルコトヲ證セヨ。但シ a, b, c, d ハ正ノ定數ナリトス。

解　與ヘラレタル式ヲ變化スルニ

$$a^4-2a^2b^2+b^4+c^4-2c^2d^2+d^4+2a^2b^2+2c^2d^2-4abcd=0$$

即チ

$$(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2=0$$

然ルニ a, b, c, d ハ實數ナルヲ以テ

$$a^2=b^2\qquad c^2=d^2\qquad ab=cd$$

又　a, b, c, d ハ正數ナルヲ以テ

$a^2=b^2\quad c^2=d^2$ ヨリ $a=b,\ c=d$

之等ヲ第三ノ條件 $ab=cd$ ニ代入スレバ

$$a=b=c=d$$

ナルヲ知ル。

9. $a^2-\alpha^2=b^2-\beta^2=c^2-\gamma^2$ ナル時ハ

$$\frac{b\gamma-c\beta}{a-\alpha}+\frac{c\alpha-a\gamma}{b-\beta}+\frac{a\beta-b\alpha}{c-\gamma}=0$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　$a^2-\alpha^2=b^2-\beta^2=c^2-\gamma^2=k$

ト置ケバ

$$a+\alpha=\frac{k}{a-\alpha},\qquad b+\beta=\frac{k}{b-\beta},\qquad c+\gamma=\frac{k}{c-\gamma}\ .$$

故ニ

$$k\left\{\frac{b\gamma-c\beta}{a-\alpha}+\frac{c\alpha-a\gamma}{b-\beta}+\frac{a\beta-b\alpha}{c-\gamma}\right\}$$

$$=(a+\alpha)(b\gamma-c\beta)+(b+\beta)(c\alpha-a\gamma)+(c+\gamma)(a\beta-b\alpha)=0$$

仍ツテ證明シ得タリ。

10. $x^4+ax^3+bx^2+7x+2$ ガ $(x+1)^2$ ニテ整除シ得ル爲ニハ a 及ビ b ハ如何ナル値ナルベキカ。

解　被除數ハ四次式ニシテ除數ハ二次式ナルヲ以テ商ハ必ズ二次式ナリ。ヨリテ之ヲ x^2+px+q ト置ケバ視察ニヨリテ $q=2$ ナルヲ知ルガ故ニ次ノ等式アリ

$$x^4+ax^3+bx^2+7x+2=(x^2+2x+1)(x^2+px+2)$$

玆ニ p ハ所謂未定係數ナリ。兩邊ノ x ノ同ジ羃ノ係數ヲ比較シテ

$$a=p+2$$

$$b=2p+3$$

$$7=p+4$$

コレヨリ

$$p=3,\qquad a=5,\qquad b=9$$

ヲ得。ヨツテ求ムル結果ハ 5 及ビ 9 ナリ。

11. $\dfrac{y+z}{ay+bz}=\dfrac{z+x}{bz+cx}=\dfrac{x+y}{cx+ay}$ ニシテ $y, z, a+b$ ガ共ニ零ニアラザル時ハ此分數ハ $\dfrac{2}{a+b}$ ニ等シキコトヲ證セヨ。

解　與ヘラレタル分數ノ値ヲ k トスルト

$$k=\frac{(y+z)+(x+y)-(z+x)}{(ay+bz)+(cx+ay)-(bz+cx)}=\frac{2y}{2ay}=\frac{1}{a}\qquad(\because\ y\neq0)$$

同樣ニ

$$k=\frac{(y+z)+(z+x)-(x+y)}{(ay+bz)+(bz+cx)-(cx+ay)}=\frac{2z}{2bz}=\frac{1}{b}\qquad(\because\ z\neq0)$$

然ルニ $a+b\neq0$ ナルガ故ニ

$$k=\frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{2}{a+b},$$

12. 二數ノ和 S ト夫等ノ最小公倍數 L トノ最大公約數ヲ D トスレバ, 其二數ハ

$$x^2-Sx+LD=0$$

ノ根ナルコトヲ證セヨ。

解 先ヅ二數ノ和ト夫等ノ最小公倍數 L トノ最大公約數ハ此二數ノ最大公約數ニ等シキコトヲ述ベンニ，二數ヲ夫々 A, B トシ夫等ノ最大公約數ヲ D′ トスレバ

$$\mathrm{A}=\mathrm{A}'\mathrm{D}' \qquad \mathrm{B}=\mathrm{B}'\mathrm{D}'$$

$$\mathrm{L}=\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{D}'$$

ト置クコトヲ得。茲ニ A′ ト B′ トハ互ニ素ナル數ナリトス。然ルトキハ A+B=S ト L トノ最大公約數ハ D′ ナルヲ以ツテ D′=D ナルコトヲ知ル。

次ニ二數ノ積ハ夫等ノ最大公約數ト最小公倍數トノ乘積ニ等シキヲ以テ AB=LD ヨツテ A, B ハ方程式

$$x^2-(\mathrm{A}+\mathrm{B})x+\mathrm{AB}=0$$

即チ

$$x^2-\mathrm{S}x+\mathrm{LD}=0$$

ノ根ナコルト明カナリ。

13. ax^3+bx+c ト $a'x^3+b'x+c'$ トガ x ニ就キテ一次ノ最大公約數ヲ有スル爲ニハ，

$$(ac'-a'c)^3+(ab'-a'b)^2(bc'-b'c)=0$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

解 與式ヲ夫々 A, B トスレバ

$$a\mathrm{B}-a'\mathrm{A}=(ab'-a'b)x+(ac'-a'c)=\mathrm{A}' \cdots\cdots(1)$$

$$c'\mathrm{A}-c\mathrm{B}=x\{(ac'-a'c)x^2+(bc'-b'c)\}=\mathrm{B}' \cdots\cdots(2)$$

ト置クト

$$c\mathrm{A}'+a\mathrm{B}'=(ac'-a'c)\mathrm{A}, \cdots\cdots(3)$$

$$c'\mathrm{A}'+a'\mathrm{B}'=(ac'-a'c)\mathrm{B} \cdots\cdots(4)$$

ナルヲ以テ $ac'-a'c\neq0$ ナル時ハ A ト B トノ H. C. F. ハ A′ ト B′ トノ H. C. F. ニ等シ。故ニ $ac'-a'c\neq0$ ナル時ハ(1)ニテ(2)ノ第二項ヲ整除シ得ベキ筈ナリ。從ツテ(1)ヲ零トスル x ノ値ニテ(2)ガ滿足セラルベシ。即チ

$$(ac'-a'c)\left(-\frac{ac'-a'c}{ab'-a'b}\right)^2+(bc'-b'c)=0$$

即チ

$$(ac'-a'c)^3+(ab'-a'b)^2(bc'-b'c)=0$$

次ニ $ac'-a'c=0$ ナル時ヲ考ヘルニ，此場合ニハ，

$$\mathrm{A}'=x(ab'-a'b) \cdots\cdots(5)$$

$$\mathrm{B}'=x(bc'-b'c) \cdots\cdots(6)$$

ニシテ A ト B トノ公約數ハ A′ ト B′ トノ公約數ナルヲ以テ若シ A ト B トニ公約數ヲ有スルナラバソハ x ナラザルベカラズ。從ツテ c ト c' トガ同時ニ零ナラザレバ A ト B トニ公約數アルコト能ハズ。若シ $c=c=0$ ナル時ニハ

$$\mathrm{A}=x(ax^2+b)$$

$$\mathrm{B}=x(a'x^2+b')$$

ナルヲ以テ，ax^2+b ト $a'x^2+b$ トニ公約數アルベカラズ。(若シアリトスレバ二ツノ與式ハ少クトモ二次ノ公約數ヲ有スルコトニナル)故ニ

$$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'} \quad 或ハ\ ab'-a'b\neq0$$

ナルヲ要ス。ツマリ $ac'-a'c=0$ ナル時ニハ $c=c'=0$ ニシテ而カモ $ab'-a'b\neq0$ ナルコトガ必要ナリ。

14. ax^3+bx^2+cx+d ト $a'x^3+b'x^2+c'x+d'$ トガ x ニ就キテ二次ノ最大公約數ヲ有スルトキハ

$$\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$$

ナル關係アルコトヲ證セヨ。

解 與式ヲ夫々 A, B トシ

$$a'\mathrm{A}-a\mathrm{B}=(ba'-b'a)x^2+(ca'-c'a)x+(da'-d'a)=\mathrm{A}' \cdots\cdots(1)$$

$$d'\mathrm{A}-d\mathrm{B}=x\{(ad'-a'd)x^2+(bd'-b'd)x+(cd'-c'd)\}=\mathrm{B}' \cdots\cdots(2)$$

ト置クト

$$d\mathrm{A}'-a\mathrm{B}'=(da'-d'a)\mathrm{A} \cdots\cdots(3)$$

$$d'\mathrm{A}'-a'\mathrm{B}'=(da'-d'a)\mathrm{B} \cdots\cdots(4)$$

ナルガ故ニ $da'-d'a\neq0$ ナルトキハ A ト B トノ H. C. F. ハ A′ ト B′ トノ H. C. F. ニ等シ。而シテ與式ハ二次ノ H. C. F. ヲ有スルガ故ニ (1), (2) モ亦二次ノ公約數ヲ有スベキ筈ナリ。故ニ

$$\frac{ba'-b'a}{ad'-a'd}=\frac{ca'-c'a}{bd'-b'd}=\frac{da'-d'a}{cd'-c'd}$$

ナル關係アラザルベカラズ。次ニ $da'-d'a=0$ ナル時ヲ考フルニ此場合ニハ

$$\mathrm{A}'=x\{ba'-b'a)x+(ca'-c'a)\} \cdots\cdots(5)$$

$$\mathrm{B}'=x\{(bd'-b'd)x+(cd'-c'd)\} \cdots\cdots(6)$$

トナルヲ以テ與式ハ x ナル共通因數ヲ有セザルベカラズ。從ツテ

$$A=x(ax^2+bx+c)$$

$$B=x(a'x^2+b'x+c')$$

トナル。

故ニ $da'-d'a=0$ ナル時ニハ

$$ax^2+bx+c$$

ト

$$a'x^2+b'x+c'$$

トガ一次ノ公約數ヲ有セザルベカラズ。コレ已ニ四十九頁問題7ニ於イテ解決セシ所ナリ。(五十頁問題 8)

15. $x^2+y^2-1+k(x^2+2axy-y^2)$ ガ x 及ビ y ニ關スル一次式ノ積ニ分解セル、爲メノ條件ヲ求メヨ。

$f(x)=\phi(x)Q(x)+R_1(x)$

$\phi(x)=R_1(x)Q_1(x)+R_2(x)$

$R_1(x)=R_2(x)Q_2(x)+R_3(x)$

……

$R_{p-1}(x)=R_p(x)Q_p(x)+R_{p+1}$

$R_1(x)=\phi(x)Q(x)+f(x)$

$R_2(x)=\phi(x)-R_1(x)Q_1(x)$

$R_3(x)=R_1(x)-R_2(x)Q_2(x)$

……

$R_{p+1}=R_{p-1}(x)-R_p(x)Q_p(x)$

解 書キカヘルト

$$x^2(1+k)+(1-k)y^2+2akxy-1=0,$$

故ニ公式(三十七頁)ニ代入スルニ

$$h^2-ab>0$$

ニ相當スルモノハ

$$a^2k^2-(1+k)(1-k)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$af^2+bg^2+ch^2-2fgh-abc=0$$

ニ相當スルモノハ

$$-a^2k^2+(1+k)(1-k)=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

然ルニ(1)ト(2)トハ同時ニ兩立セズ。ヨツテ與ヘラレタ式ハ一次式ニ分解スルコトヲ得ズ。

16. $x^4+5x^3-10x+5$ ハ整數ヲ係數トスル因數ニ分解シ得ザルコトヲ證セヨ。

解 與ヘラレタル四次式ハ因數ニ分解セラレタリトスレバ其因數ハ一次式ナルカ二次式ナリ。(三次式ナル因數アル時ハ一次式ノ因數アル事ニナルヲ以テナリ。)

(i) 一次式ヲ因數ニ有スト假定スベシ。即チ

$$x^4+5x^3-10x+5=(x+a)(x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)$$

兩邊ノ x ノ同ジ羃ノ係數相等シト置ケバ,

$$a+b_1=5,\quad ab_1+b_2=0,\quad ab_2+b_3=-10,\quad ab_3=5$$

サテ此等文ノ字ハ悉ク整數ナルベキガ故ニ最後ノ式ヨリ a カ b_3 カハ5ノ倍數

ナラザルベカラズ。假リニ b_3 ガ5ノ倍數ニシテ a ガ5ノ倍數ナラズトスレバ b_2, b_1, ガ共ニ5ノ倍數トナル。從ツテ $a+b_1=5$ ヨリ a ガ5ノ倍數ナラザルベカラズ。コレ假定ニ反ス。

次ニ a ガ5ノ倍數ニシテ b_3 ガ5ノ倍數ナラズト假定スレバ $ab_2+b_3=-10$ ガ成立セヌコトニナル。故ニ $x+a$ ノ如キ一次ノ因數ヲ有スルコト能ハズ。

(ii) 二次式ヲ因數ニ有スル場合

コノ場合ニモ前ノ場合ト同樣ニ考フレバカヽル因數ノナキコトヲ知ル。

注意 次ノ問題ヲ各自試ミラルベシ。

a,b ガ整數ナルトキ

$$x^3+y^3+ax^2y+bxy^2$$

ガ有理係數ヲ有スル因數ニ分解シ得ルタメニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。(文檢問題)　　答 $(a-b)(a+b+2)=0$

17. 任意ノ正ノ整數ハ

$$p_1+p_2 2!+p_3 3!+p_4 4!+\cdots\cdots$$

ノ形ニ書クコトヲ得コレヲ證セヨ。但シ $p_1, p_2, p_3, \cdots\cdots$ ハ $p_1<2$, $p_2<3$, $p_3<4$ ナル正ノ整數ナリトス。

解 任意ノ數ヲNトシ之ヲ2ニテ除シタル商ヲ q_1 トシ剩餘ヲ p_1 トスレバ

$$N=p_1+q_1 2!$$

次ニ q_1 ヲ3ニテ除シタル商ヲ q_2 トシ剩餘ヲ p_2 トスレバ

$$N=p_1+(p_2+q_2\times 3)2!$$

$$=p_1+2!p_2+3!q_3$$

トナル。以下同樣ニ考フレバヨシ

18. $p=\dfrac{m^4+m^2n^2+n^4}{4m^2n^2}$ トスレバ

$$\sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p+\cdots\cdots}}}=\frac{m^2+mn+n^2}{2mn}$$

$$\sqrt{p-\sqrt{p-\sqrt{p-\cdots\cdots}}}=\frac{m^2-mn+n^2}{2mn}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $\sqrt{p+\sqrt{p+\sqrt{p+\cdots\cdots}}}=x$ ト置クトキハ

$\sqrt{p+x}=x$

ナルヲ以テ $p+x=x^2$, 即チ

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+4p}}{2}$$

然ルニ x ガ正ナルベキガ故ニ $x=\dfrac{1+\sqrt{1+4p}}{2}$

玆ニ於テ $p=\dfrac{m^4+m^2n^2+n^4}{2mn}$ ト置ケバ $x=\dfrac{m^2+mn+n^2}{2mn}$ 仍ツテ前半ヲ證明シタリ。後半モ亦同樣ナリ。

19. a, b, c ハ零ナラザル有理數ニシテ x ハ有理數ナラザル時ハ

$$\frac{ax}{bx+c}$$

ハ有理數ナリヤ否ヤヲ吟味セヨ。

解 假リニ與ヘラレタル分數ガ有理數ナリトシ之ヲ k ト置クト

$$(a-bk)x-ck=0$$

然ルニ x ハ有理數ナラザルヲ以テ $a-bk=0$, $ck=0$ ナラザルベカラズ。

然ルニ $c\neq0$ ナルヲ以テ $k=0$ トナルベク從ツテ $a-bk=0$ ヨリ $a=0$ トナラザルベカラズ。然ルニ假定ニヨリテ $a\neq0$ ナリ。ヨツテ與ヘラレタル分數ハ有理數ナルコトヲ得ズ。

20. 二ツノ有理數ノ和モ積モ共ニ整數ナルトキハ，此等ノ有理數ハ何レモ整數ナルコトヲ證モヨ。

解 二ツノ有理數ヲ m, n トシ

$$m+n=p \qquad mn=q$$

ト置ケバ，假定ニヨリテ p ト q トハ共ニ整數ナリ。サテ

$$(m-n)^2=p^2-4q$$

ガ整數ナルヲ以テ $m-n$ ハ整數ナルカ，無理數ナルカナリ。然ルニ假定ニヨリテ無理數ナラズ。故ニ整數ナリ。コレヲ r トスレバ

$$m+n=p, \qquad m-n=r$$

故ニ

$$m=\frac{p+r}{2}, \qquad n=\frac{p-r}{2}$$

然ルニ $p+r$ ト $p-r$ トノ差ハ偶數ナルヲ以テ，コレ等ハ共ニ偶數ナルカ或ハ共ニ奇數ナリ。然レドモ奇數ナルコト能ハズ。何トナレバ若シ然ルトキハ mn ナル乘積ハ整數ナルヲ得ザルガ故ナリ。故ニ共ニ偶數ナリ。從ツテ m モ n モ共ニ整數ナリ。

9.4.

21. x ガ實數ナル時，實係數ノ函數

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$$

ガ凡テノ實數値ヲトリ得ルタメノ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

解

$$\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}=y$$

ト置ケバ

$$(a-cy)x^2+b(1-y)x+(c-ay)=0$$

x ガ實數ナル爲メニハ

$$b^2(1-y)^2-4(a-cy)(c-ay)\geqq0$$

整頓スレバ

$$(b^2-4ac)y^2-(2b^2-4a^2-4c^2)y+b^2-4ac\geqq0$$

コレガ恒ニ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ガ y^2 ノ係數ハ正ニシテ且ツ判別式ガ負ナルコトナリ。

即チ

$$b^2-4ac>0,\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

及ビ

$$(2b^2-4a^2-4c^2)^2-4(b^2-4ac)^2<0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2) ヲ書キカヘルト

$$16(a-c)^2(a+b+c)(a-b+c)>0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヨツテ所要ノ條件ハ (1) ト (3) トガ同時ニ成立スルコトナリ。

22. $ax^4+hx^3+(2a+b)x^2+hx+a$ ガ x ノ凡テノ實數値ニ對シテ正ナルタメノ條件ヲ求メヨ。

解 與ヘラレタル式ハ相反式ナルコトニ注意スレバ

$$\begin{aligned}y&=ax^4+hx^3+(2a+b)x^2+hx+a\\&=x^2\left\{a\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+h\left(x+\frac{1}{x}\right)+b\right\}\end{aligned}$$

ソコデ

$$x+\frac{1}{x}=z$$

ト置クト，問題ハ

$$az^2+hz+b$$

ガ z ノ如何ナル實數値ニ對シテモ正ナル爲メニ如何ナル條件ヲ要スルカヲ求ムルコトニナル。故ニ

$$a>0, \qquad h^2-4ab<0$$

ナルコトナリ。

23. $x^3+qx+r=0$ ガ $x^4=(x^2+ax+b)^2$ ナル形ニ變形セラルヽ爲ニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メ，次ニ方程式

$$8x^3-36x+27=0$$

ヲ解ケ。

解 $x^4=(x^2+ax+b)^2$ ヲ整頓スレバ

$$x^3+\frac{a^2+2b}{2a}x^2+bx+\frac{b^2}{2a}=0$$

コレガ $x^3+qx+r=0$ ニ一致スル爲メニハ，

$$\frac{a^2+2b}{2a}=0,\quad b=q,\quad \frac{b^2}{2a}=r$$

ナラザルベカラズ。コレヨリ a, b ヲ消去スレバ

$$q^3+8r^2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

コレ必要ナル條件ナリ。逆ニ此關係アル時ニ與ヘラレタル方程式ニ $-\frac{8r}{q}$ ヲ乘ズレバ（$q<0,\ r>0$ トスル）

$$-\frac{8r}{q}x^3-8rx-\frac{8r}{q}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ (1) ヨリ

$$\sqrt{-2q}=-\frac{4r}{q},\quad q\sqrt{-2q}=-4r$$

ナル關係アルヲ以テ (2) ハ

$$(x^2+\sqrt{-2q}x+q)^2-x^4=0$$

トナル。故ニ (1) ハ又充分條件ナリ。

次ニ與ヘラレタル方程式ハ $q=\frac{-36}{8}=-\frac{9}{2},\ r=\frac{27}{8}$ ニ相當スルガ故ニ $-\frac{8r}{q}=\frac{6}{8}$ ヲ乘ズレバ，

$$6x^3-27x+\frac{81}{4}=0$$

故ニ $$\left(x^2+3x-\frac{9}{2}\right)^2-x^4=0$$

コレヨリ $$3x-\frac{9}{2}=0 \text{ 及ビ } 2x^2+3x-\frac{9}{2}=0,$$

ヨツテ $$x=\frac{3}{2},\quad \text{或ハ}\quad \frac{-3\pm\sqrt{-27}}{4}$$

24. 甲ハ自動車ニテ，乙ハ徒歩ニテ，同時ニ東地ヨリ西地ニ向ヒテ出發シ，甲ハ途中ニテ下車シ，其後徒歩ニテ西地ニ向ヒ自動車ハ直チニ引キ返シテ乙ニ出會ヒ乙ヲ乘セテ直チニ西地ニ向ヒタルニ出發後10時間ニシテ甲乙同時ニ西地ニ到着セリトイフ兩地間ノ距離ヲ求メヨ。

但シ自動車ノ速サハ毎時二十粁，甲乙ノ徒歩ノ速サハ相等シクシテ毎時四粁ナリトス。

解 甲ガ自動車ニ乘リシ時間ヲ x 時間トスレバ，徒歩ノ時間ハ $(10-x)$ 時間ナリ。

故ニ東西兩地間ノ距離ハ

$$\{20x+4(10-x)\}\ \text{粁} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナリ。次ニ乙ガ徒歩セシ時間ハ甲ガ自動車ニ乘リシ時間數ト甲ガ下車シテ後ノ自動車ガ乙ニ出會フマデノ時間トノ和ニ等シ。即チ

$$\left\{x+\frac{20x-4x}{20+4}\right\}\ \text{時間} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ乙ガ自動車ニ乘リシ時間數ハ

$$10-\left\{x+\frac{20x-4x}{20+4}\right\}$$

ヨツテ次ノ方程式ヲ得。

$$4\left(x+\frac{20x-4x}{20+4}\right)+20\left\{10-x-\frac{20x-4x}{20+4}\right\}=20x+4(10-x)$$

コレヨリ

$$x=\frac{15}{4}$$

(1) ニ代入スレバ兩地間ノ距離ハ 100 粁ナルコトヲ知ル。

25. a, b, c ハ凡テ相異ナルトキ

$$(a-\alpha)^2x+(a-\beta)^2y+(a-\gamma)^2z=(a-\delta)^2$$

$$(b-\alpha)^2x+(b-\beta)^2y+(b-\gamma)^2z=(b-\delta)^2$$

$$(c-\alpha)^2x+(c-\beta)^2y+(c-\gamma)^2z=(c-\delta)^2$$

ナラバ d ガ如何ナル値ナルモ常ニ

$$(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $(t-\alpha)^2x+(t-\beta)^2y+(t-\gamma)^2z-(t-\delta)^2=0$ ナル t ニ關スル二次方程式ヲ作ルト $t=a,\ t=b,\ t=c$ ナル三ツノ値ニヨツテ此方程式ハ滿足セラル。故ニ t ニ就キテノ係數ハ皆零ナルベキナリ (11 頁定理 3 參照)。故ニ

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z-1=0,\quad \alpha x+\beta y+\gamma z-\delta=0 \\ \alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2z+\delta^2=0 \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

然ルニ $(d-\alpha)^2x+(d-\beta)^2y+(d-\gamma)^2z=(d-\delta)^2$ ヲ書キカヘルト

$$d^2(x+y+z-1)-2d(\alpha x+\beta y+\gamma y-\delta)+\alpha^2x+\beta^2y+\gamma^2z+\delta^2=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

而シテ (1) ナル條件ノ下ニテハ (2) ハ d ノ如何ナル値ニ對シテモ成立ス。

26. $x^2+ax+b=0$ ノ根ト $x^2+ax+b'=0$ ノ根トノ差ノ絶對値ハ

$$\frac{|b-b'|}{|a|+2\sqrt{c}}$$

ヨリモ大ナルコトヲ證セヨ。但シ c ハ $|b|$ ト $|b'|$ トノ中ノ小ナラザルモノトス。

解 公式ニヨリテ二ツノ根ノ差ノ絶對値ハ明カニ

$$\left|\frac{\sqrt{a^2-4b}\pm\sqrt{a^2-4b'}}{2}\right|$$

今コレヲ $\varDelta$ ニテ表ハセバ

$$\varDelta=\left|\frac{-4(b-b')}{2(\sqrt{a^2-4b}\mp\sqrt{a^2-4b'})}\right|=\frac{2|b-b'|}{|\sqrt{a^2-4b}\mp\sqrt{a^2-4b'}|}$$

サテ

$$|\sqrt{a^2-4b}|=\sqrt{|a^2-4b|}\leqq\sqrt{|a^2|+4|b|}\leqq|a|+2\sqrt{|b|}$$

同様ニ

$$|\sqrt{a^2-4b'}|\leqq|a|+2\sqrt{|b'|}$$

故ニ

$$\sqrt{a^2-4b}\pm\sqrt{a^2-4b'}\leqq2(|a|+\sqrt{|b|}+\sqrt{|b'|})\leqq2(|a|+2\sqrt{c})$$

故ニ

$$\varDelta\geqq\frac{|b-b'|}{|a|+2\sqrt{c}}$$

仍ツテ證明セラレタリ。

27 二ツノ二次方程式 $ax^2+2bx+c=0$ ト $cx^2+2bx+a=0$ トガ唯一ツノ根ヲ共有スルトキ a, b, c ノ間ニ如何ナル關係アルベキカ。但シ a, b, c ハ何レモ正ノ數ナリトス。

解 共通ノ根ハ二ツノ方程式ヲ邊々相減ジタルモノヲ滿足ス。(コノ逆ガ必ズシモ眞ナラザルコトニ注意スベシ)

故ニ共通根ハ $x=1$ 或ハ $x=-1$ ナラザルベカラズ。若シ $x=1$ ガ共通根ナルトキハ與ヘラレタル方程式ニ代入スレバ

$$a+2b+c=0$$

ナラザルベカラズ。然レドモ a, b, c ハ共ニ正ナルヲ以テカヽルコト起ラズ。故ニ $x=-1$ ハ共通根ナラザルベカラズ。故ニ

$$a-2b+c=0$$

コレ必要條件ナリ。逆ニ與ヘラレタル方程式ニ $2b=a+c$ ト置ケバ

$$ax^2+2bx+c=(x+1)(ax+c)=0$$

$$cx^2+2bx+a=(x+1)(cx+a)=0$$

トナル。ヨツテ $2b=a+c$ ガ共通根ヲ有スル爲メノ充分條件ナリ。

28. 二ツノ方程式

$$x^2+ax+b=0\qquad x^2+a'x+b=0$$

ノ根ガ互ニ他ヲ分ツ爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ヲ求メヨ。

解 $x^2+ax+b=0\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$　　$x^2+a'x+b'=0\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

トシ, (1) ノ二ツノ根ヲ $\alpha, \beta(\alpha>\beta)$ トシ (2) ノ二ツノ根ヲ $\alpha', \beta'(\alpha'>\beta')$ トスルト, 一ツノ方程式ノ根ガ他ノ方程式ノ根ヲ分ツトイフコトハ

$$\alpha>\alpha'>\beta>\beta'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナルカ或ハ

$$\alpha'>\alpha>\beta'>\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナルコトナリ。(3) ナル場合ニハ

$$\alpha'^2+a\alpha'+b<0,\qquad \beta'^2+a\beta'+b>0$$

ニシテ (4) ノ場合ニハ

$$\alpha'^2+a\alpha'+b>0\qquad \beta'^2+a\beta'+b<0$$

何レノ場合ニモ

$$(\alpha'^2+a\alpha'+b)(\beta'^2+a\beta'+b)<0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ナラザルベカラズ。コレ必要ナル條件ナリ。

逆ニ (5) ハ充分ナル條件ナルコトヲ證センニ, a, b, a', b' ハ實數ナルガ故ニ (5) ナル條件ハ (1) ト (2) トガ共ニ相異ナル實根ヲ有ス。何トナレバ, (5) ヨリ $\alpha'=\beta'$ ナルコトナシ。故ニ相異ナル實根ヲ有スルカ又ハ互ニ共軛ナル虚根ヲ有ス。若シ共軛ナル虚數ナル時ハ $\alpha'^2+a\alpha'+b$ ト $\beta'^2+a\beta'+b$ トモ互ニ共軛ナルヲ以テ其積ハ正トナリテ負トナルコトナシ。故ニ相異ナル實根ナリ。然ルトキハ二ツノ實數 α', β' ニ對シテ方程式 (1) ノ左邊ガ相反スル符號ヲ有スルガ故ニ (1) ハ必ズ相異ナル二ツノ實根ヲ有スルコトヲ知ル。

又 (5) ナル條件アル時ハ二ツノ實根 α', β' ハ他ノ二ツノ實根 α, β ヲ分離スルコトぐらふノ考ニヨレバ容易ニ知ラルベシ。(八十三頁參照)

29. 聯立方程式

$$|x|+y^2=3$$
$$2|y|+x=4$$

ヲ解ケ。

解 先ヅ x ト y トノ値ガ正或ハ負トナリ得ルカラ

$$\left.\begin{matrix}x>0\\y>0\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}x>0\\y<0\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}x<0\\y>0\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}x<0\\y<0\end{matrix}\right\}$$

ノ四ツノ場合ヲ考フルヲ要ス。

(i) $x>0,\ y>0$ ナルトキハ與ヘラレタル方程式ハ

$$\left.\begin{matrix}x+y^2=3\\2y+x=4\end{matrix}\right\}$$

故ニ $x=2,\ y=1$ ヲ得

(ii) $x>0,\ y<0$ ナルトキハ $|y|=-y$ ナルガ故ニ與ヘラレタル方程式ハ

$$\left.\begin{matrix}x+y^2=3\\-2y+x=4\end{matrix}\right\}$$

ト同値ナリ。仍ツテ $x=2,\ y=-1,$

(iii) $x<0,\ y>0$ ナルトキハ

$$\left.\begin{matrix}-x+y^2=3\\y+x=4\end{matrix}\right\}$$

故ニ $x=2(3-2\sqrt{2}),\ y=-1+2\sqrt{2}$ 及ビ $x=2(3+2\sqrt{2}),\ y=-1-2\sqrt{2}$ ナル二組ヲ得ルモ $x<0,\ y>0$ ナル假定ニ反スルガ故ニ兩方共ニ採ルベカラズ。

(iv) $x<0,\ y<0$ ナルトキハ

$$\left.\begin{matrix}-x+y^2=3\\-2y+x=4\end{matrix}\right\}$$

コレヲ解クト

$x=2(3+2\sqrt{2})\qquad y=1+2\sqrt{2}$ 及ビ $x=2(3-2\sqrt{2}),\qquad y=1-2\sqrt{2}$ トナルガ $x<0,\ y<0$ ナル假定ニ反スルガ故ニ採ルベカラズ。

30. 次ノ聯立方程式ヲ滿足スル x 及ビ y ノ値ガ共ニ正ニシテ且ツ 1ヨリモ

小ナルガ爲メニ $a,\ b$ ニ對スル條件ヲ求メヨ。

$$x^2+y^2=a,\qquad xy=b,$$

解 $x,\ y$ ハ共ニ正ニシテ 1 ヨリモ小ナルガ爲メニハ, 先ヅ

$$0<a<2\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\qquad 0<b<1\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ナルヲ要ス。サテ

$$x^2+y^2+2xy=a+2b$$

ニシテ $x,\ y$ ハ共ニ正ナルベキニヨリ (1), (2) ノ條件ノ下ニハ

$$x+y=\sqrt{a+2b}$$

仍ツテ $x,\ y$ ハ次ノ方程式ノ根ナラザルベカラズ。

$$f(t)=t^2-\sqrt{a+2b}\,t+b=0\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

而シテ假定ニヨリ $x,\ y$ ハ共ニ 1 ト零トノ間ニアルヲ以テ

$$f(1)=1+b-\sqrt{a+2b}>0$$

或ハ

$$1+b^2>a\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

又 (3) ノ判別式ガ負ナラザルヲ要ス。即チ

$$a-2b\geqq 0\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(1), (2), (4) 及ビ (5) ヲ綜合スレバ

$$0<a<2,\qquad 0<b<1,\qquad 2b\leqq a<1+b^2$$

或ハ更ニ綜合スレバ所要ノ條件トシテ

$$0<b<1,\qquad 2b\leqq a<1+b^2$$

ヲ得。而シテコレハ又充分ナル條件ナルコト容易ニ證明セラルベシ。

31.
$$\left.\begin{matrix}ax+by+cz=3\\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=9\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}ax-by+cz=1\\ ax+by-cz=1\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=0\end{matrix}\right\}$$

ガ同一ノ根ヲ有スル時ハ $a,\ b,\ c$ ノ値如何。

解 與ヘラレタ六ツノ方程式ヲ次ノ如ク分ツ。

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=6\\ \dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{3}{z}=9\\ \dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=0\end{matrix}\right\}\qquad\left.\begin{matrix}ax+by+cz=3\\ ax-by+cz=1\\ ax+by-cz=1\end{matrix}\right\}$$

初メノ方程式ヲ $\frac{1}{x}=X,\ \frac{1}{y}=Y,\ \frac{1}{z}=Z$ トシテ解クト結局 $X=\frac{9}{11},\ Y=\frac{126}{11}$, $Z=-\frac{69}{11}$ ヨツテ

$$x=\frac{11}{9},\quad y=\frac{11}{126},\quad z=-\frac{11}{69}\cdots\cdots(1)$$

後ノ方程式ヲ ax, by, cz ニ就イテ解クト

$$ax=1,\quad by=1,\quad cz=1\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トカラ

$$a=\frac{9}{11},\quad b=\frac{126}{11},\quad c=-\frac{69}{11}$$

32. 次ノ聯立方程式ハ λ ノ如何ナル値ニヨツテ成立スルカ。

$$4x+3y+z=\lambda x$$
$$3x-4y+7z=\lambda y$$
$$x+7y-6z=\lambda z$$

解 コレ等ノ方程式ガ同時ニ成立スル爲メニハ

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -4-\lambda & 7 \\ 1 & 7 & -6-\lambda \end{vmatrix}=0$$

ナルコトヲ要ス。即チ

$$-\lambda^3-36\lambda^2+75\lambda=0$$

即チ $\qquad \lambda(\lambda^2+36\lambda-75)=0$

故ニ $\qquad \lambda=0$ 或ハ $-18\pm\sqrt{399}$

33. $x^3-a^3=y^3-b^3=z^3-c^3=xyz$

$$\frac{a^3}{x}+\frac{b^3}{y}+\frac{c^3}{z}=\frac{d^3}{x+y+z}$$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

解 初メノ方程式ヨリ

$$x^3-a^3=xyz \quad 從ツテ \quad x(x^2-yz)=a^3$$

即チ

$$\frac{a^3}{x}=x^2-yz$$

同樣ニ

$$\frac{b^3}{y}=y^2-zx \qquad \frac{c^3}{z}=z^2-xy$$

之等ヲ第二ノ方程式ニ代入スルト

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy=\frac{d^3}{x+y+z}$$

或ハ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=d^3$$

然ルニ右邊ハ初メノ方程式ヲ用フレバ

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=a^3+b^3+c^3$$

故ニ所要ノ結果ハ

$$a^3+b^3+c^3=d^3$$

34. $ax+yz=bc,\qquad by+zx=ca$

$cz+xy=ab,\qquad xyz=abc$

ヨリ x, y, z ヲ消去セヨ。

解 初メノ三ツヲ邊々乘ズレバ,

$$a^2b^2c^2=(ax+yz)(by+zx)(cz+xy)$$
$$=abcxyz+x^2y^2z^2+bcy^2z^2+caz^2x^2+abx^2y^2$$
$$+xyz(ax^2+by^2+cz^2)$$

之ニ第四ノ關係ヲ入レテ整頓スレバ

$$a^2b^2c^2+bcy^2z^2+caz^2x^2+abx^2y^2+abc(ax^2+by^2+cz^2)=0\cdots\cdots(1)$$

サテ第一ノ方程式ノ兩邊ヲ平方シ第四ノ方程式ヲ代入スレバ

$$a^2x^2+y^2z^2=b^2c^2-2a^2bc$$

兩邊ニ bc ヲ乘ズレバ

$$a^2bcx^2+bcy^2z^2=b^3c^3-2a^2b^2c^2$$

方程式 (2), (3) ヨリ同樣ニ

$$ab^2cy^2+caz^2x^2=c^3a^3-2a^2b^2c^2$$
$$abc^2z^2+abx^2y^2=a^3b^3-2a^2b^2c^2$$

邊々加フレバ

$$bcy^2z^2+caz^2x^2+abx^2y^2+abc(ax^2+by^2+cz^2)$$
$$=b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3-6a^2b^2c^2\cdots\cdots(2)$$

(1) ニ (2) ヲ代入スレバ

$$b^3c^3+c^3a^3+a^3b^3-5a^2b^2c^2=0$$

35. $\frac{x^2}{yz}+\frac{yz}{x^2}=l,\qquad \frac{y^2}{zx}+\frac{zx}{y^2}=m$

$$\frac{z^2}{xy}+\frac{xy}{z^2}=n$$ ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

解 $\frac{x^2}{yz},\ \frac{y^2}{zx},\ \frac{z^2}{xy}$ ヲ夫々 X, Y, Z ト置クトキハ

$$\mathrm{X}+\frac{1}{\mathrm{X}}=l,\qquad \mathrm{Y}+\frac{1}{\mathrm{Y}}=m$$

$$\mathrm{Z}+\frac{1}{\mathrm{Z}}=n,\qquad \mathrm{XYZ}=1$$

ヨリ X, Y, Z ヲ消去スル問題ニ變換セラル。ヨツテ其結果ハ容易ニ

$$l^2+m^2+n^2-lmn=4$$

ヲ得。

36. $$\left.\begin{aligned} bx^2+lx+c&=0\\ cy^2+my+a&=0\\ az^2+nz+b&=0\\ xyz&=1\end{aligned}\right\}$$

ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

解 初メノ三ツノ方程式ヨリ

$$bx+\frac{c}{x}=-l$$

$$cy+\frac{a}{y}=-m$$

$$az+\frac{b}{z}=-n$$

邊々相乘ズレバ,

$$-lmn=\left(bx+\frac{c}{x}\right)\left(cy+\frac{a}{y}\right)\left(az+\frac{b}{z}\right)$$

$$=abcxyz+\frac{abc}{xyz}+\frac{ac^2yz}{x}+\frac{ab^2x}{yz}+\frac{ba^2zx}{y}+\frac{bc^2y}{zx}+\frac{cb^2xy}{z}+\frac{ca^2z}{xy}$$

然ルニ $xyz=1$ ナルヲ以テ

$$-lmn=2abc+a\left(\frac{c^2}{x^2}+b^2x^2\right)+b\left(\frac{a^2}{y^2}+c^2y^2\right)+c\left(\frac{b^2}{z^2}+a^2z^2\right)$$

$$=a\left(bx+\frac{c}{x}\right)^2+b\left(cy+\frac{a}{y}\right)^2+c\left(az+\frac{b}{z}\right)^2-4abc$$

故ニ

$$-lmn=al^2+bm^2+cn^2-4abc$$

或ハ

$$al^2+bm^2+cn^2+lmn-4abc=0$$

37. $ax^2+by^2+cz^2=ax+by+cz=yz+zx+xy=0$

ヨリ $x,\ y,\ z$ ヲ消去セヨ。

解 與ヘラレタル式ヲ列記スレバ次ノ如シ。

$$ax^2+by^2+cz^2=0\cdots\cdots(1)$$

$$ax+by+cz=0\cdots\cdots(2)$$

$$yz+zx+xy=0\cdots\cdots(3)$$

(2) ニ x, y, z ヲ乘ジテ加フレバ

$$ax^2+by^2+cz^2+a(xy+zx)+b(yz+xy)+c(zx+yz)=0$$

(1) ト (3) トヲ之ニ代入スレバ,

$$ayz+bzx+cxy=0\cdots\cdots(4)$$

(3) ト (4) トヨリ

$$yz:zx:xy=b-c:c-a:a-b$$

即チ

$$x:y=c-a:b-c,\qquad y:z=a-b:c-a$$

故ニ

$$x:y:z=(c-a)(a-b):(a-b)(b-c):(b-c)(c-a)\cdots\cdots(5)$$

(2) ニ (5) ヲ代入スレバ所要ノ消去式ヲ得。即チ

$$a(c-a)(a-b)+b(a-b)(b-c)+c(b-c)(c-a)=0$$

38. $\sqrt{i}-\sqrt{-i}=i\sqrt{2}$ ナルコトヲ證セヨ。

解 $i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

ナルガ故ニ

$$\sqrt{i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$$

同樣ニ

$$\sqrt{-i}=\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}$$

故ニ $$\sqrt{i}-\sqrt{-i}=2i\sin\frac{\pi}{4}=i\sqrt{2}$$

39. 複素數 $z_1,\ z_2,\ z_3$, アリテ $\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ ガ實數ニ等シキ時ハ複素數平面上ニ

テ之等ガ表ハス三ツノ點ハ一直線上ニアルコトヲ證セヨ。

解　複素數平面ニ於テ z, z_2, z_3 ヲ表ハス點ヲ夫々 A, B, C トスレバ $amp\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ ハ AC ト BC トノナス角ニ等シ。然ルニ假定ニヨリテ $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ ハ實數ナルヲ以テ其偏角ハ零又ハ π ナリ。故ニ A, B, C ハ一直線上ニアラザルベカラズ。

40. 四ツノ複素數 $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ アリテ

$$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$$

ガ實數ニ等シキ時ニハ，之等ノ四ツノ複素數ヲ表ハス點 A, B, C, D ハ一ツノ圓周上ニアルコトヲ證セヨ。

解　假定ニヨレバ AC, BC ノナス角ト AD, BD ノナス角トハ相等シキカ又ハ二直角ナリ。

而シテ相等シキ時ハ A, B, C, D ハ同一ノ圓周上ニアリテ同一ノ弧 AB ノ上ニ立ツ二ツノ圓周角 $\widehat{ACB}$. $\widehat{ADB}$ ノ等シキ時ナリ。又二直角ナル時ハ A, C, B, D ガ同一ノ圓周上ニアリテ對角 $\widehat{ACB}$, $\widehat{ADB}$ ガ互ニ補角ヲナス場合ナリ。

41. $(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ ハ又 $X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$ ノ形ニ書キ得ルコトヲ證セヨ。

解　$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)(a+\omega^2b+\omega c)$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x+\omega y+\omega^2z)(x+\omega^2y+\omega z)$

然ルニ

$$(a+b+c)(x+y+z)=(ax+bz+cy)+(bx+ay+cz)+(cx+by+az)$$
$$(a+\omega b+\omega^2c)(x+\omega y+\omega^2z)=(ax+bz+cy)+\omega(bx+ay+cz)+\omega^2(cx+by+az)$$
$$(a+\omega^2b+\omega c)(x+\omega^2y+\omega z)=(ax+bz+cy)+\omega^2(bx+ay+cz)+\omega(cx+by+az)$$

ソコデ

$$X=ax+bz+cy$$
$$Y=bx+ay+cz$$
$$Z=cx+by+az$$

ト置ク時ハ，

$$(a^3+b^3+c^3-3abc)(x^3+y^3+z^3-3xyz)=(X+Y+Z)$$
$$(X+\omega Y+\omega^2Z)(X+\omega^2Y+\omega Z)=X^3+Y^3+Z^3-3XYZ$$

トナル。仍ツテ證明セラレタリ。(二百六十二頁問題 14

42. $z_1+z_2+z_3+z_4=0,\ \ |z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$ ナル時ハ夫等ノ複素數ガ表ハス四ツノ點ハ矩形ノ頂點ナルコトヲ證セヨ。

解　四ツノ複素數 z_1, z_2, z_3 及ビ z_4 ヲ表ハス點ヲ夫々 A, B, C 及ビ D トスレバ

$$|z_1|=|z_2|=|z_3|=|z_4|=1$$

ニヨリ之等ハ共ニ半徑 1 ナル圓周上ニアルコトヲ知ル。

次ニ第一ノ假定式ヨリ

$$z_1+z_2=-(z_3+z_4)$$

故ニ $z_1+z_2=0$ ナル時ハ z_3+z_4 モ亦零ナリ。サテ之等ノ絶對値ハ 1 ナルヲ以テ

$$z_1+z_2=(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)+(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=2\left\{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right\}=0$$

ナリトハ $\cos\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}=0$ ナルヲ以テ

$$\theta_1=\theta_2+\pi$$

即チ A ト B トハ圓ノ中心即チ原點ニ對シテ對稱ノ距離ニアリ。同樣ニ C ト D トモ原點ニ對シテ對稱ノ位置ニアル。ヨツテ ABCD ハ矩形ヲナス。

次ニ $z_1+z_2\neq0$ ナル時ハ又 $z_3+z_4\neq0$ ナリ。而シテ此場合ニハ

$$2\left\{\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+i\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right\}$$
$$=-2\left\{\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}+i\sin\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\right\}$$

故ニ

$$\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=-\cos\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}=-\sin\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cos\frac{\theta_3-\theta_4}{2}\cdots\cdots\cdots(2)$$

故ニ

$$\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2}=\tan\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

從ツテ

$$\frac{\theta_1+\theta_2}{2}+\pi=\frac{\theta_3+\theta_4}{2}\cdots\cdots\cdots(3)$$

(3)ヨリ　$\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}=-\cos\dfrac{\theta_3+\theta_4}{2}$

コレヲ(1)ニ代入スレバ

$$\theta_1-\theta_2=\theta_3-\theta_4\cdots\cdots\cdots(4)$$

即チ(3)ト(4)トガ同時ニ成立スベキ筈ナリ。ヨツテ

$$\theta_1+\pi=\theta_3 \quad 及ビ \quad \theta_2+\pi=\theta_4$$

故ニ A, B ヲ結ブ直線ト C, D ヲ結ブ直線トハ平行ナリ。ヨツテ A, B, C, D ハ矩形ノ頂點ヲナス。

43. $x^7-1=0$ ノ虚根ノ一ツヲ α トシ, $\alpha+\alpha^6$, $\alpha^2+\alpha^5$, $\alpha^3+\alpha^4$ ヲ根トスル方程式ヲ作レ。

解 求ムル方程式ハ

$$\{x-(\alpha+\alpha^6)\}\{x-(\alpha^2+\alpha^5)\}\{x-(\alpha^3+\alpha^4)\}=0$$

即チ

$$x^3-(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4+\alpha^5+\alpha^6)x^2+\{(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)$$
$$+(\alpha+\alpha^6)(\alpha^3+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)\}x-(\alpha+\alpha^6)(\alpha^4+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)=0,$$

サテ $x^7-1=0$ ノ根ハ $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \cdots\cdots\alpha^6$ ナルヲ以テ (考ヘテ見ヨ)

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots\cdots+\alpha^6=0$$

且ツ $\alpha^7=1$ ナルコトニ注意スレバ

$$\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots\cdots+\alpha^6=-1$$
$$(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)+(\alpha+\alpha^6)(\alpha^3+\alpha^4)+(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)=-2$$
$$(\alpha+\alpha^6)(\alpha^2+\alpha^5)(\alpha^3+\alpha^4)=1$$

ヨツテ所要ノ方程式ハ

$$x^3+x^2-2x-1=0$$

44. $x^m+ax^2+b=0$ ノ根ノ n 乘ノ和ヲ S_m トスレバ $S_{2m-1}=0$ ナルコトヲ證セヨ。但シ $m>5$ ナリトス。

解 $x^m+ax^2+b=0$ ノ根ヲ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots\alpha_m$ トスレバ

$$\Sigma\alpha_1=0, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2=0, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0, \quad \Sigma\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{m-1}=0$$

又與ヘラレタル方程式ニ x ヲ乘ジ

$$x^{m+1}+ax^3+bx=0$$

トスレバ,

$$\Sigma\alpha_1{}^{m+1}+a\Sigma\alpha_1{}^3+b\Sigma\alpha_1=0$$

然ルニ $\quad (\Sigma\alpha_1)^3=\Sigma\alpha_1{}^3+3\Sigma\alpha_1{}^2\alpha_2+6\Sigma\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

故ニ $\quad 0=\Sigma\alpha_1{}^3+3\Sigma\alpha_1(\Sigma\alpha_1\alpha_2)$

$\therefore \quad \Sigma\alpha_1{}^3=0$ 　從ツテ　$\Sigma\alpha_1{}^{m+1}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

又

$$x^{m-1}+ax+\frac{b}{x}=0$$

ヨリ

$$\Sigma\alpha_1{}^{m-1}+a\Sigma\alpha_1+b\Sigma\frac{1}{\alpha_1}=0$$

或ハ $\quad \Sigma\alpha_1{}^{m-1}+a\Sigma\alpha_1+b\Sigma\dfrac{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_{m-1}}{\alpha_1\alpha_2\cdots\cdots\alpha_m}=0$

故ニ $\quad \Sigma\alpha_1{}^{m-1}=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

同様ニ與ヘラレタル方程式ニ x^{m-1} ヲ乘ズルコトニヨリテ

$$\Sigma\alpha_1{}^{2m-1}+a\Sigma\alpha_1{}^{m+1}+b\Sigma\alpha_1{}^{m-1}=0$$

(1), (2) ヨリ $\quad \Sigma\alpha_1{}^{2m-1}=0$

即チ $\quad s_{2m-1}=0$

45. n ガ偶數ニシテ $p_0, p_1, p_2\cdots\cdots\cdots$ ガ凡テ正ナルトキ G ヲ $\dfrac{p_1}{p_0}, \dfrac{p_2}{p_1}\cdots\cdots\dfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}$ ノ最大ナルモノトシ, H ヲ $\dfrac{p_2}{p_1}, \dfrac{p_4}{p_3}\cdots\cdots\cdots\cdots\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$ ノ最小ナルモノトスレバ方程式

$$p_0x^n-p_1x^{n-1}+p^2x^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+p_n=0$$

ノ凡テノ實根ハ G ト H トノ間ニアルコトヲ證明セヨ。

解 與ヘラレタル方程式ヲ變形スレバ

$$p_0x^{n-1}\left(x-\frac{p_1}{p_0}\right)+p_2x^{n-2}\left(x-\frac{p_3}{p_2}\right)+\cdots\cdots+p_{n-2}x\left(x-\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)+p_n=0$$

茲ニ於テ $x=G$ トオケバ假定ニヨツテ (G>0 ナルコトニ注意セヨ)

$$p_0G^{n-1}\left(G-\frac{p_1}{p_0}\right)+p_2G^{n-2}\left(G-\frac{p_3}{p}\right)+\cdots\cdots+p_{n-2}G\left(G-\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}\right)+p_n>0$$

即チ x ノ値ヲ G 又ハソレヨリ大ニトルト與ヘラレタル方程式ノ左邊ハ恒ニ正ナルヲ以テ G ヨリ大ナル實根ガナシ。

同様ニ與ヘラレタル方程式ヲ

$$p_0x^n+p_1x^{n-1}\left(\frac{p_2}{p_1}-x\right)+p_3x^{n-2}\left(\frac{p^4}{p_3}-x\right)+\cdots\cdots+p_{n-1}\left(\frac{p_n}{p_{n-1}}-x\right)=0$$

トシ, コレニ $x=H$ ト置キテ且ツ H>0 ナルコトニ注意スレバ H ヨリモ小ナル實根ナキコト明カナリ。

46. 一次方程式 $\varphi(x)=0$ ノ根ガ二次方程式 $f(x)=0$ ノ二ツノ實根ノ間ニアル時ハ λ ガ如何ナル實數値ナリトモ方程式 $f(x)+\lambda\varphi(x)=0$ ハ實根ヲ有ス

ルコトヲ證明セヨ。 但シ $\varphi(x)$ 及ビ $f(x)$ ノ係數ハ悉ク實數ナリトス。

解 $\varphi'(x)=0$ ノ根ヲ β トシ, $f(x)=0$ ノ根ヲ α, γ トシ且ツ

$$\alpha>\beta>\gamma$$

ナリトセヨ。然ル時ハ $\varphi(\alpha)$ ト $\varphi(\gamma)$ トハ符號相反スベシ。

ソコデ $f(x)+\lambda\varphi(x)$ ノ $x=\alpha$ ト γ トヲ代入スレバ夫々

$$\lambda\varphi(\alpha), \qquad \lambda\varphi(\gamma)$$

トナリ夫等ハ λ ノ値ノ如何ニ關セズ符號相反ス。故ニ方程式 $f(x)+\lambda\varphi'(x)=0$ ハ α ト γ トノ間ニ一ツノ實根ヲ有ス。從ツテ他ノ一ツノ根モ實根ナルコト明カナリ。

47. 方程式 $f(x)=0$ ノ係數ガ悉ク整數ニシテ且ツ $f(0)$, $f(1)$ ハ共ニ奇數ナル時ハコノ方程式ハ整數根ヲ有セザルコトヲ證セヨ。

解 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n=0$ トセヨ。

然ル時ハ $f(0)=a_n$, $f(1)=a_0+a_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$ ナルヲ以テコレ等ハ共ニ奇數ナリ。

サテ與ヘラレタル方程式ニ偶數ナル整數ナル根アリトスレバ a^0x^n, a_1x^{n-1},……… …$a_{n-1}x$ ハ共ニ偶數ニシテ a_n ハ奇數ナルガ故ニコレ等ノ和ハ矢張リ奇數ニシテ零トナラズ故ニ偶數ナル根ガナシ。

次ニ奇數ナル根ヲ有スルト假定ス。即チ $2m+1$ ナル根ヲ有ストスレバ

$$f(2m+1)=a_0(2m+1)^n+a_1(2m+1)^{n-1}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$
$$=\text{偶數}+c_0+a_1+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n$$

トナルヲ以テ矢張リ奇數ナリ。 故ニ零トナラズ。從ツテ奇數ナル根ヲ有セズ。仍ツテ證明シ得タリ。

48. $\sqrt{a^2-x^2}>2x-a$ ヲ解ケ。

解 (i) $a>0$ ナル場合

根號內ハ負ナラザルガ爲メニハ $a\geqq x\geqq -a$ ……………………………(1)

然ル時ハ兩邊ハ負ナラザルヲ以テ, 兩方ヲ平方スルモ不等號ノ向キハ變ゼズ。

即チ平方シテ整頓スレバ

$$x(5x-4a)<0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ヨツテ

$$\frac{4a}{5}>x\geqq\frac{a}{2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナル時ハ(1)ト(1)トヲ滿足セシム。 故ニ x ノ一ツノ限界ナリ。 次ニ

$$\frac{a}{2}>x\geqq -a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ナル時ハ與ヘラレタ不等式ノ右邊ハ負ナルガ故ニ成立ス。

仍ツテ $a>0$ ナル場合ニハ所要ノ x ノ限界ハ

$$\frac{4a}{5}>x\geqq -a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(ii) $a<0$ ナル場合

根號內ハ負ナラザルガ爲メニハ $-a\geqq x\geqq a$ ……………………………(6)

サテ $-a\geqq x\geqq\frac{a}{2}$ ナル時ハ兩邊ハ負ナラザルヲ以テ平方スルモ不等號ノ向キハ變ゼズ。 故ニ平方シテ整頓スレバ

$$x(5x-4a)<0 \quad \text{即チ} \quad 0>x>\frac{4a}{5} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

又 $\frac{a}{2}>x\geqq a$ ナル時ハ右邊ハ負トナルヲ以テ成立ス。ヨツテ $a<0$ ナル時ハ (7) ト合セ考フレバ

$$0>x\geqq a \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

ナル時成立ス。

(iii) $a=0$ ナル場合

x ノ如何ナル實數ニ對シテモ成立セザルコト明カナリ。

49. x, y, z ガ實數ニシテ $z+zy\neq 0$, $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ ナルトキハ x ト y トノ絕對值ハ共ニ 1 ヨリモ大ナルカ又ハ共ニ 1 ヨリモ小ナルコトヲ證セヨ。

解 $z^2+2xyz+(x^2+y^2-1)=0$ ニ於テ z ガ實數ナルベキ條件ヲ求ムレバ

$$(xy)^2-(x^2+y^2-1)\geqq 0$$

即チ

$$(x^2-1)(y^2-1)\geqq 0$$

故ニ次ノ四ツノ中ノ何レカヾ成立スベキ筈ナリ。

$$\left.\begin{array}{l} x^2-1>0 \\ y^2-1>0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(1) \qquad \left.\begin{array}{l} x^2-1 \\ y^2-1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} <0 \\ <0 \end{array} \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$x^2-1=0 \cdots\cdots\cdots(3) \qquad y^2-1=0 \cdots\cdots\cdots(4)$$

(1) 及ビ (2) ハ共ニ題意ニ適スベク (3), (4) ノ時ハ

$$z=-xy\pm\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}$$

ヨリ $z+xy=0$ トナリテ假定ニ反ス。ヨツテ證明セラレタリ。

50. $0<x<1$ ナル時 $\frac{1}{1+x}$ ノ近似値トシテ $1-x$ ヲ用フル時ハ其誤差ハ $100x^2\%$ ナルコトヲ證セヨ。

解 誤差ハ明カ＝

$$\frac{1}{1+x}-(1-x)=\frac{x^2}{1+x}$$

故＝商 $\frac{1}{1+x}$ ＝對スル比率ハ x^2 ナリ。故＝其誤差ハ $100x^2\%$ ナルヲ知ル。

注意 i x ハ小ナレバナルホド誤差小ナルヲ知ル。モシ $x=0.1$ ナル時ハ $100x^2\%$ ハ 1% ＝スギザルヲ見ルベシ。

注意 ii $\frac{1}{1-x}$ ノ近似値トシテ $1+x$ ヲトル時モ誤差ハ同一ナリ。

51. $0<a<1$ ＝シテ且ツ $\sqrt{1-a}<b<b\sqrt{1-a^2}$ ナル時ハ $\frac{a^2}{2}<1-b<a$ ナルコトヲ證明セヨ。

解 與ヘラレタル假定ノ各邊ヲ 1 ヨリ減ズレバ,

$$1-\sqrt{1-a}>1-b>1-\sqrt{1-a^2}$$

即チ

$$\frac{a}{1+\sqrt{1-a}}>1-b>\frac{a^2}{1+\sqrt{1-a^2}}$$

然ル＝ $0<a<1$ ナルガ故＝

$$1+\sqrt{1-a}>1, \qquad 2>1+\sqrt{1-a^2}$$

故＝

$$a>\frac{a}{1+\sqrt{1-a}}, \qquad \frac{a^2}{1+\sqrt{1-a^2}}>\frac{a^2}{2}$$

ヨツテ

$$a>1-b>\frac{a^2}{2}$$

52. $a, b, c,$ ハ正ノ數＝シテ其二ツノ和ガ他ノ一ツヨリモ大ナル時, $ax+by+cz=0$ ナル時ハ $ayz+bzx+cxy$ ハ x ガ實數ナル時恒＝負ナルコトヲ證セヨ。

解 假定＝ヨリテ

$$z=-\frac{ax+by}{c}$$

故＝

$$ayz+bzx+cxy=-\frac{ax+by}{c}(ay+bx)+cxy$$
$$=-\frac{1}{c}\{abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2\}$$

然ル＝ $c>0$ ＝シテ且ツ

$$abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2$$

＝於ケル x^2 ノ係數 ab ガ正＝シテ判別式

$$(a^2+b^2-c^2)^2y^2-4a^2b^2y^2=-y^2(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)<0$$

ナルヲ以テ x ノ値ノ如何＝拘ハラズ

$$abx^2+(a^2+b^2-c^2)xy+aby^2>0$$

ヨツテ證明シ得タリ。

53. $a, b, c.\ a', b', c'$ ガ何レモ正ノ數＝シテ且ツ

$$b^2<4ac \qquad b'^2<4a'c'$$

ナル時ハ

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)<(ca'-ac')^2$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $b^2<4ac,\quad b'^2<4a'c'$ ＝シテ何レモ正ノ數ナルヲ以テ

ヨリ $bb'<4\sqrt{aa'cc'}$

サテ

$$(bc'-b'c)(ab'-a'b)=(ac'+a'c)bb'-ab'^2c-a'b^2c'$$
$$<(ac'+a'c)4\sqrt{aa'cc'}-8aa'cc'$$
$$=4(\sqrt{ac'}-\sqrt{a'c})^2\sqrt{aa'cc'}$$

但シ $4\sqrt{aa'cc'}<(\sqrt{ac'}+\sqrt{a'c})^2$

故＝ $(bc'-b'c)(ab'-a'b)<(\sqrt{ac'}-\sqrt{a'c})^2(\sqrt{ac'}+\sqrt{a'c})^2=(ca'-ac')^2$

仍ツテ證明シ得タリ。

54. n ガ正整ノ數ナル時ハ,

$$\frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots\sqrt{n}<\frac{2}{3}(n+1)^{\frac{3}{2}}$$

ナルコトヲ證明セヨ。

解 數學的歸納法＝ヨリテ證明セン＝先ヅ $n=1$ ナル時ハ成立スルコト明カナリ。次＝ n ノ或値例ヘバ r ノ時成立スルト假定シテ $(r+1)$ ノ時＝モ尙且ツ成立スルコトヲ證セントス。然ル時ハ假定＝ヨリテ

$$\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots+\sqrt{r}<\frac{2}{3}(r+2)^{\frac{3}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

兩邊＝ $(r+1)^{\frac{1}{2}}$ ヲ加フレバ

$$\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{r}+\sqrt{r+1}$$

然ルニ

$$\frac{2}{3}r^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\left\{r^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(r+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$>\frac{2}{3}\left\{r^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}r^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{r\left(r^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2r^{\frac{1}{2}}}\right)+(r+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$>\frac{2}{3}\left\{r\left(r^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{r^{\frac{1}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}}\right)+(r+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{r\left(r^{\frac{1}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}-r^{\frac{1}{2}}\right)+(r+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$>\frac{2}{3}\left\{r(r+1)^{\frac{1}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}\right\}=\frac{2}{3}(r+1)^{\frac{3}{2}}$$

故ニ

$$\frac{2}{3}(r+1)^{\frac{3}{2}}<\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{r}+\sqrt{r+1}$$

次ニ

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{r}<\frac{2}{3}(r+1)^{\frac{3}{2}}$$

ヲ假定シテ其兩邊ニ $\sqrt{r+1}$ ヲ加フレバ

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{r}+\sqrt{r+1}<\frac{2}{3}(r+1)^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}$$

然ルニ

$$\frac{2}{3}(r+1)^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}<\frac{2}{3}\left\{(r+1)^{\frac{3}{2}}+(r+1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(r+2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\left\{(r+1)^{\frac{1}{2}}(r+2)+\frac{1}{2}(r+2)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$<\frac{2}{3}(r+2)\left\{(r+1)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{(r+1)^{\frac{1}{2}}+(r+2)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(r+2)\left\{(r+1)^{\frac{1}{2}}+(r+2)^{\frac{1}{2}}-(r+1)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(r+2)^{\frac{3}{2}}$$

故ニ

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+\sqrt{r}+\sqrt{r+1}<\frac{2}{3}(r+2)^{\frac{3}{2}}$$

ヨツテ本題ハ完全ニ證明セラレタリ。

55. n ガ正ノ整數ニシテ且ツ $x>0$ ナル時ハ

$$(1+x)^n(1+x^n)>2^{n+1}x^n$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $1+x>2\sqrt{x}$ 故ニ $(1+x)^n>(2x^{\frac{1}{2}})^n$

又 $1+x^n>2\sqrt{x^n}$ 故ニ $1+x^n>2(x^{\frac{1}{2}})^n$

邊々相乘ズレバ

$$(1+x)^n(1+x^n)>2^{n+1}x^n$$

56. $(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+2n-1)<(m+n)^{2n-1}$

ナルコトヲ證セヨ。

解 $(m+1)(m+2n-1)<\left\{\dfrac{(m+1)+(m+2n-1)}{2}\right\}^2$

即チ

$(m+1)(m+2n-1)<(m+n)^2$

同樣ニ $(m+2)(m+2n-2)<(m+n)^2$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

$(m+2n-1)(m+1)<(m+n)^2$

乘法ニヨリテ

$$\{(m+1)(m+2)(m+3)\cdots\cdots(m+2n-1)\}^2<(m+n)^{2(2n-1)}$$

コノ兩邊ノ平方根ヲトルト本題ノ終結ヲ得ル。

57. $3,\ 2-x,\ \sqrt{x^2+8x+7}$ ガ一ツノ三角形ノ三邊ヲ表ハスタメニ x ハ如何ナル値ヲトルベキカ。

解 三角形ノ三邊ハ何レモ正ナルベキニヨリ

$$2-x>0 \qquad x^2+8x+7>0$$

ナルヲ要ス。即チ

$$2>x>-1 \quad 或ハ \quad x<-7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ナルヲ要ス。次ニ此等ハ三角形ノ三邊ヲ表ハスタメノ條件ハ或一邊ノ長サガ他ノ二邊ノ和ヨリモ小ニシテ且ツ差ヨリモ大ナルコトコレナリ。故ニ少クトモ

$$3+(2-x)>\sqrt{x^2+8x+7}>3\sim(2-x)$$

然ル時ハ各邊トモニ正ナルヲ以テ平方スルモ不等號ノ向キハ變ゼズ。故ニ前半ヨリ

$$25-10x+x^2>x^2+8x+7$$

即チ　　$x<1$

後半ヨリ

$$x^2+8x+7>x^2+2x+1$$

即チ　　$x>-1$

故ニ　　$1>x>-1$ ……………………………………………………(2)

ナルヲ要ス。(1) ト (2) トヨリ

$$1>x>-1$$

ヲ得。其他ノ場合ニ就キテハ各自研究セラレヨ。

58. $a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ 及ビ $a-x,\ b-y,\ c-z$ ガ何レモ正數ナル時 $(a-x)(b-y)(c-z)(ax+by+cz)$ ノ極大値ヲ求メヨ。

解 各因數ハ悉ク正ナリ。ソコデ初メノ三ツノ項ニ夫々 a $b,\ c$ ヲ乘ジテ相加フルト

$$a(a-x)+b(b-y)+c(c-z)+ax+by+cz=a^2+b^2+c^2$$

トナリテ常數ナルガ故ニ與ヘラレタル式ハ

$$a(a-x)=b(b-y)=c(c-z)=ax+by+cz$$

ナル時極大ナリ。故ニ

$$ax+by+cz=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

ヨツテ求ムル極大値ハ

$$\frac{1}{16abc}(a^2+b^2+c^2)^4$$

ナリ。

59. $3n$ 個ノ物ノ中 n 個ハ同ジモノニシテ其他ハコレニ異ナリ且ツ互ニ相異ナルトキコレ等ノ物ヨリ n 個宛トリタル組合セノ數ハ

$$2^{2n-1}+\frac{(2n)!}{2(n!)^2}$$

ナルコトヲ證セヨ。

解 所要ノ答數ハ次ノ如シ。

(1) 同ジ n 個ノ物ヨリ n 個トル場合……………………………………1 通リ

(2) 同ジ n 個ノ物ヨリ $(n-1)$ 個トル場合…………………………… ${}_{2n}C_1$ 通リ

(3) 同ジ n 個ノ物ヨリ $(n-2)$ 個トル場合…………………………… ${}_{2n}C_2$ 通リ

(4) 同ジ n 個ノ物ヨリ $(n-3)$ 個トル場合…………………………… ${}_{2n}C_3$ 通リ

……………………………………………

(n) 同ジ n 個ノ物ヨリ 1 個トル場合……………………………… ${}_{2n}C_{n-1}$ 通リ

$(n+1)$ 同ジ n 個ノ物ヨリ 1 個ヲモトラヌ場合…………………………… ${}_{2n}C_n$ 通リ

即チ所要ノ答數ハ

$$S=1+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{n-1}+{}_{2n}C_n$$

而シテ二項定理ニヨレバ

$$(1+1)^{2n}=1+{}_{2n}C_1+{}_{2n}C_2+{}_{2n}C_3+\cdots\cdots+{}_{2n}C_n+\cdots\cdots+{}_{2n}C_{2n}$$

故ニ　　$2^{2n}=2S-{}_{2n}C_n$

故ニ　　$S=2^{n-1}+\dfrac{(2n)!}{2(n!)^2}$

60. 五ツノ數字 1, 2, 3, 5 ヲ以テ作リ得ル凡テノ整數ノ和ヲ求メヨ

(第七編問題 3)

解 五ツノ數字デ作リ得ル數ノ個數ハ凡テニ於テ 5! 通リアリ。而シテ 1 ガ第一位, 第二位…………第五位ヲ占ムルハ其五分ノ一通リナルコト明カナルヲ以テ 1 ナル數字ガ作ル數ノ和ガ

$$(10000+1000+100+10+1)\times5!\div5$$

同樣ニ 2, 3, 4, 5 ナル數字ガ作ル數ノ和ガ夫々

$$(20000+2000+200+20+2)\times5!\div5$$

$$(30000+3000+300+30+3)\times5!\div5$$

$$(40000+4000+400+40+4)\times5!\div5$$

$$(50000+5000+500+50+5)\times5!\div5$$

總計スレバ次ノ如シ

$$\frac{(1+5)\times5}{2}\times11111\times4!=3999960$$

61. $2n$ 個ノ α, $2n$ 個ノ β, $2n$ 個ノ γ ヲ二人ニ $3n$ 個宛分配スルニハ幾通リノ方法アルカ。

解 先ヅ α ヲ $2n$ 個トル時, $(2n-1)$ 個トル時…………n 個トル時ヲ考フルコト次ノ如シ。

α	β	γ	α	β	γ		α	β	γ
$2n$	n	0	$2n-1$	0	$n+1$	…………	n	0	$2n$
	$n-1$	1		1	n			1	$2n-1$
	⋮	⋮		⋮	⋮			⋮	⋮
	0	n		$n+1$	0			$2n$	0

コノ場合ノ方法ノ數ハ

$$(n+1)+(n+2)+\cdots\cdots\cdots\cdots(2n+1)=\frac{(n+1)(3n+2)}{2}$$

次ニ α ヲ $(n-1)$ 個トル時, $(n-2)$ 個トル時…………1 個モトラヌ時ヲ考フルコト次ノ如シ。

α	β	γ	α	β	γ		α	β	γ
$n-1$	$2n$	1	$n-2$	$2n$	2	…………	0	$2n$	n
	$2n-1$	2		$2n-1$	3			$2n-1$	$n+1$
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$
	1	$2n$		2	$2n$			n	$2n$

此場合ノ方法ノ數ハ

$$2n+(2n-1)+\cdots\cdots\cdots\cdots+(n+1)=\frac{n(3n+1)}{2}$$

仍ツテ所要ノ總和ハ

$$\frac{(n+1)(3n+2)}{2}+\frac{n(3n+1)}{2}=3n^2+3n+1$$

62. 2ヨリ初マル連續 n 個ノ偶數ヲ r 個宛トリタル連乘積ノ和ヲ P_r トシ, 1ヨリ初マル連續 n 個ノ奇數ヲ r 個宛トリタル連乘積ノ和ヲ Q_r トスレバ

$$1+P_1+P_2+\cdots\cdots+P_n=1.3.5.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.(2n+1)$$

及ビ

$$1+Q_1+Q_2+\cdots\cdots+Q_n=2.4.6.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.2n$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　$(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3\cdots\cdots(1+a_n)=1+\Sigma a_1+\Sigma a_1a_2+\Sigma a_1a_2a_3+\cdots\cdots+a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n$

ナル公式アリ。今 $a_1=2,\ a_2=4,\ a_3=6,\cdots\cdots a_n=2n$ トスレバ

$$1+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_n=(1+2)(1+4)(1+6)\cdots\cdots(1+2n)$$
$$=3.\ 5.\ 7\cdots\cdots(2n+1)$$

又 $a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=5,\cdots\cdots\cdots\cdots a_n=2n-1$ トスレバ

$$1+Q_1+Q_2+Q_3+\cdots\cdots+Q_n=(1+1)(1+3)(1+5)\cdots\cdots(1+2n-1)$$
$$=2.\ 4.\ 6\cdots\cdots2n$$

ヲ得。

63. $n=m^2-2$ ナラバ $(1+x)^n$ ノ展開式ニ於ケル或引キ續ケル三項ノ係數ニシテ等差級數ヲナスモノ存在スルコトヲ證明セヨ。

解　$(1+x)^n$ ノ展開式ノ引キ續ケル三項ノ係數ヲ

$${}_nC_m=\frac{n!}{m!(n-m)!}\qquad {}_nC_{m+1}=\frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}\qquad {}_nC_{m+2}=\frac{n!}{(m+2)!(n-m-2)!}$$

故ニ此等ハ等差級數ヲナスニハ

$${}_nC_m+{}_nC_{m+2}=2{}_nC_{m+1}$$

ナラバ可ナリ。ソコデコレ等ヲ計算シテ

$$\frac{n!(4m^2-4mn-5n+8m+n^2+2)}{(m+2)!(n-m)!}=0$$

ヲ滿足スル正ノ整數 m ガ存在スルコトヲ證セバ可ナリ。

玆ニ於テ分子ニ $n=m^2-2$ ヲ代入スレバ

$$m^4-4m^3-5m^2+16m+16=0$$

即チ　$$(m-4)(m+1)\left(m-\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right)\left(m-\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)=0$$

即チ $m=4$　從ツテ $n=14$ ナル時 $(1+x)^{14}$ ノ第五 第六 第七項ノ係數ハ等差級數ヲナス。

64. 聯立方程式 $x^y=y^x,\ x^m=y^n$ ヲ滿足スル x ト y トノ實數ナル値ヲ求メヨ。

解　兩邊ノ對數ヲトラバ

$$y\log x=x\log y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$m\log x=n\log y\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1) ト (2) トヨリ $\log y$ ヲ消去スレバ

$$(ny-mx)\log x=0$$

故ニ　$$\log x=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ナルカ或ハ　$$y=\frac{m}{n}x\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(3) ヨリ $\log y=0$　故ニ $x=1\ \ y=1$

(4) ヨリ　$x^m=x^n\left(\dfrac{m}{n}\right)^n$　即チ $x=\left(\dfrac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m-n}}$

從ツテ　$$y=\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{m-n}}$$

65. 與ヘラレタル正ノ整數ヲ b ニテ表ハストキ, 逆數ノ常用對數ノ指標ガ $-b$ ナルガ如キ正ノ整數ハ幾ツアルカ。

解　求ムル數ヲ x トスレバ假定ニヨリテ

$$\log\frac{1}{x}=-b+(\text{正ノ小數})$$

即チ　　$-\log x=-b+$(正ノ小數)

故ニ　　$\log x=b-$(正ノ小數)

ヨツテ x ハ 10^b ト 10^{b-1} トノ間ノ凡テノ整數即チ

$$10^b-10^{b-1}=10^{b-1}(10-1)=10^{b-1}\times 9$$

注意　若シ問題ヲ常用對數ノ指標ガ b ナルガ如キ正ノ整數ガ幾ツアルカトイフニ變換スル時ハ $10^b\times 9$ トナルコトニ注意スベシ。

66. n ガ正ノ整數ナル時

$$\frac{1-a^n}{1-a}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})}{1-a^2}+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})(1-a^{n-2})}{1-a^3}$$

$$+\cdots\cdots\cdots+\frac{(1-a^n)(1-a^{n-1})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^n}=n$$

ナルコトヲ證明セヨ。

解　數學的歸納法ニテ證明セントス。先ヅ $n=1$ ナル時ハ

$$左邊=\frac{1-a}{1-a}=1 \qquad 右邊=1$$

ヨツテ成立ス。次ニ n ノ或値 r ノ時成立スルモノトシ, $r+1$ ノ時ニモ尙成立スルコトヲ證セントス。ソレニハ

$$s_r=\frac{1-a^r}{1-a}+\frac{(1-a^r)(1-a^{r-1})}{1-a^2}+\cdots\cdots+\frac{(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a)}{1-a^r}=r$$

ナリト假定シテ $s_{r+1}=r+1$ ナルコトヲ證セントス。ソレニハ

$$s_{r+1}-s_r=1$$

ナルコトヲ證明スレバヨシ。

サテ

$$s_{r+1}-s_r=\frac{a^r-a^{r+1}}{1-a}+\frac{(1-a^r)(a^{r-1}-a^{r+1})}{1-a^2}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a^2)(a-a^{r+1})}{1-a^r}+\frac{(1-a^{r+1})(1-a^r)\cdots\cdots(1-a)}{1-a^{r+1}}$$

$$=a^r+a^{r-1}(1-a^r)+a^{r-2}(1-a^r)(1-a^{r-1})+\cdots\cdots$$

$$+a(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a^2)+(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a)$$

ソコデ最後ノ二項ヲ加ヘルト

$$(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a^2)$$

コレニ最後ヨリ三番目ノ項ヲ加フレバ

$$a^2(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a^3)+(1-a^r)(1-a^{r-1})+\cdots\cdots(1-a^2)$$
$$=(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a^3)$$

トナル。コレニ最後ヨリ四番目ノ項ヲ加フレバ

$$(1-a^r)(1-a^{r-1})\cdots\cdots(1-a^4)$$

トナル。以下同樣ニシ最後ヨリ r 番目ノモノニ加レバ $1-a^r$ トナリ。最後ニ a^r ヲ加フレバ 1 ヲ得。即チ

$$s_{r+1}-s_r=1$$

ヨツテ本題ハ證明セラレタリ。

67. 數列 $a_1,\ a_2,\ a_3$……………………ニ於テ

$$a_{r+2}-3a_{r+1}+2a_r=0 \qquad (r=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ナル時 a_n ヲ $a_1,\ a_2$ ニテ表ハセ。

解　與ヘラレタル假定式ヲ變形スレバ

$$a_{r+2}-a_{r+1}=2(a_{r+1}-a_r)$$

コノ公式ノ r ニ順次 1, 2, 3,…… ト置ケバ

$$\left.\begin{aligned}a_3-a_2&=2(a_2-a_1)\\ a_4-a_3&=2(a_3-a_2)=2^2(a_2-a_1)\\ a_5-a_4&=2(a_4-a_3)=2^3(a_2-a_1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_n-a_{n-1}&=\qquad 2^{n-2}(a_2-a_1)\end{aligned}\right\}$$

邊々相加フレバ

$$a_n-a_2=(a_2-a_1)(2+2^2+2^3+\cdots\cdots+2^{n-2})$$

仍ツテ所要ノ結果ハ

$$a_n=a_2(2^{n-1}-1)-a_1(2^{n-1}-2)$$

68.
$$x_1=x_0+{x_0}^2+{x_0}^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_2=x_1+{x_1}^2+{x_1}^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナル時ハ,

$$nx_n=nx_0+n^2{x_0}^2+n^3{x_0}^3+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ナルコトヲ證セヨ。

解　$|x_0|, |x_1|\cdots\cdots|nx_0|$ ヲ 1 ヨリ小ナリトスレバ, 無限等比級數ノ總和ノ公式ニヨリテ