

3

1-4P30
初中標準算學

算術

上 冊

孫宗莖 合編
胡爾康

上海中學生書局發行

初中標準算學

周佛海題



初中標準算學教本敘

我們編輯這一套初中標準算學教本的動機，是很簡單的。

當二十一年教育部於試行暫行課程標準期滿，正式頒佈新課程標準以後，所有已往的教科書，差不多都不能合用了。初中算學一科當然也不能例外。二十二年江蘇省教育廳要劃一教材，充實內容，更依照課程標準，訂發各科教學進度表與各校，以資遵守。但以初中算學一科言，其進度表所列頗為嚴整完備，於是各校的算學教師要求一冊能與此相吻合的課本，益不可得。即勉強以往昔的課本來遷就充數，則教學時，因次序不得不予以變更，材料不得不予以增損，弄得教者學者雙方都感受極大的困難。所以我們為謀教師們施教和學生們學習便利以增進教學的效率起見，特依照新課程標準及蘇教廳最近修訂之算學教學進度表來編成這一套算學教本。

在我們編輯的當兒，也曾顧慮到一般不須遵照蘇教廳進度表的學校採用本書的問題，並且有過很深切的討論。查

算學一科的標準，既由教育部規定頒發，各校自當遵守，現在我們以部頒新課程標準為經，蘇教廳的進度表為緯，各地學校各有其地方情形及學生程度，本書編輯時，特預留伸縮地步，一般學校採用本書，祇有量的問題而絕無質的問題；故對於教材方面，可聽教者之自由伸縮而無困難的。

這一套教本：算術、代數、幾何、各兩冊，數值三角一冊，計共七本，足供初中算學科三年之用。

茲將此教本編輯上的要點略舉如下：

1. 注重實驗方法，以引起教學雙方的興趣。
2. 以日常生活之所需為教材中心，而資實用。
3. 練習題選擇甚嚴而量亦特多，以便學生多所演習，俾達熟能生巧的目的。
4. 本書編制均由淺入深，以作進修之準備。
5. 自算術至數值三角，雖分科編制，而其中教材互相自有聯絡，兼收混合之效。
6. 本書教材，兼顧及地方情形及學生程度，預留伸縮地步而減少教學上的困難。

除上述六點外，其餘要點分別詳載於各教本之前。

當我們編輯的時候，參考過不少中外的教科書，其中優良教材，曾經我們教授過而收效甚著的，採入不少。但我們

不敢掠美，特書此誌謝！

我們教授算學，差不多都有十餘年的經驗，編輯是書，總希望牠能於初中算學教育上有少許貢獻，然終愧學識淺薄，不妥之處及誤植的地方，務請諸位算學教師們，於採用之後，隨加指正，以便改正，不勝感盼之至！ 廿三年夏

附： 部頒新課程標準初中算學時間支配表

時 學 程	學 期	第一學年		第二學年		第三學年	
		第一 學期	第二 學期	第一 學期	第二 學期	第一 學期	第二 學期
代數及算術		4	4				
代 數				3	3	2	2
幾何及 數值三角				2	2	3	3

蘇教廳初中算學進度表中時間支配表

時 學 程	學 期	第一學年		第二學年		第三學年	
		第一 學期	第二 學期	第一 學期	第二 學期	第一 學期	第二 學期
算 術		4	2				
代 數			2	2	2	2	2
幾何及 數值三角				3	3	3	3

編輯大意

1. 本書教材，完全依照最近教育部頒佈中學新課程標準，及江蘇省教育廳最近修訂初級中學算學科進度表編輯。
2. 本書解釋定理及算法，力求淺顯易解，使學者不感困難。
3. 本書凡論一理，舉一法，必設有多少例題，不嫌辭費，既以明其意義，復示學者以演題的模範。
4. 本書所用單位除複名數及中外度量衡章外，完全遵照部令採用本國度量衡制。
5. 本書習題，關於統計等材料，儘量引用史地上的事實，及社會上的現狀，以期引起學者習算興趣，並喚起學者救國觀念。
6. 本書對於應用問題搜集特多，分門別類，且每一類，必範示例題幾則，以啓發學者領悟題理和解法，使對於任何問題，迎刃而解，以收舉一反三之效。
7. 本書於理論外，尤注重應用一方面，以供給學生日常生活中的算術智識。
8. 本書對於省略算法，特作詳細的討論，務使用很簡的手續

得準確的結果，以解決多位數運算的麻煩。

9. 本書如有未妥及錯誤等處，敬希採用諸君隨時指正。

編者識

江蘇省教育廳頒布修訂初中算學科 教學進度表

第一學年第一學期“算術”教學進度表

週次	教 材	進 度	備 註
1	數的表示 1. 算術的目的 3. 命數法	2. 量, 單位, 數 4. 記數法	
2	整數四則 1. 加法運算律 3. 加法驗算 5. 加法應用題 7. 減法規則 9. 單位記載法 11. 乘法運算律 13. 乘法驗算 15. 乘法應用題	2. 加法規則 4. 單位記載法 6. 減法運算律 8. 減法驗算 10. 減法應用題 12. 乘法規則 14. 單位記載法	
3	1. 除法運算律 3. 除法驗算 5. 除法應用題 7. 式的計算	2. 除法規則 4. 單位記載法 6. 括弧計算	本週舉行試驗
4	速算法 1. 加法速算 3. 乘法速算	2. 減法速算 4. 除法速算	
5	整數應用題 1. 平均問題 3. 連續數問題 5. 定差問題	2. 和差問題 4. 定和問題	本週第一時舉行速算法測驗
6	1. 相遇問題 3. 盈不足問題 5. 植竿問題	2. 追及問題 4. 雞兔問題	
7	1. 方陣問題 3. 歸一算法	2. 還原問題 4. 其他問題	本週最後一時舉行試驗
8	整數性質 1. 整數 整除 3. 偶數及奇數 5. 連乘積與 _以 數	2. 倍數及約數 4. 質數及合數 6. 質因數檢驗法	

週次	教 材 進 度	備 註
9	1. 因數分解法 2. 公約數, 最大公約數的求法 3. 公倍數, 最小公倍數的求法	
10	1. 整數性質應用題 分數四則 1. 分數, 分數單位 2. 分數種類 3. 分數定律 4. 約分通分 5. 分數加減	本週舉行試驗
11	1. 分數乘除 2. 繁分數化法 *3. 分數的最大公約 *4. 分數的最小公倍 5. 分數應用題(除數問題, 工程問題)	
12	(時鐘問題, 寒暑表問題, 各部問題, 其他雜題)	本週最後一時舉行試驗
13	小數四則 1. 小數, 小數單位 2. 小數種類 3. 有限小數加 ₁₁ 及減法 4. 有限小數乘法及 ₁₂ 法	
14	循環小數 1. 循環小數的來源 2. 循環節的移動及擴展 3. 循環小數加法及減法 4. 化循環小數為分數 5. 循環小數乘法及除法	本週最後一時舉行試驗
15	省略算 1. 省略加法 2. 省略減法 3. 省略乘法 4. 省略除法	
16	中外度量衡 1. 複名數 2. 本國度量衡(公用制, 市用制, 營造尺庫秤制) 3. 英美度量衡 複名數 1. 複名數通法 2. 複名數命法	本週第一時舉行試驗
17	1. 複名數加法 2. 複名數減法 3. 複名數乘法 4. 複名數除法	

週次	教 材 進 度	備 註
18	1. 中外度量衡換算 2. 中國幣制 3. 外國幣制 4. 中外幣制換算 *5. 時間(平均太陽日, 陽曆與陰曆, 經度與時差, 分日線, 標準時)	本週最後一小時舉行試驗

第一學年第二學期“算術”教學進度表

週次	教 材 進 度	備 註
1, 2	比及比例 1. 比的定義 2. 正比與反比 3. 複比 4. 連比 5. 比例定義 6. 比例定律 7. 單比例	
3, 4	1. 複比例 2. 按分比例	複比例授完後舉行臨時試驗
5, 6	1. 連鎖比例 2. 混合比例	第六週最後一小時舉行試驗
7, 8	百分法及應用題 1. 百分法的定義 2. 百分法的公式 3. 內折與外耗 4. 百分法應用題(折扣, 賒賠)	
9 10	百分法應用題、酬金, 保險, 租稅, 稅則)	第十週最後一小時舉行試驗
11 12	利息 1. 利息的定義 2. 單利公式 3. 實利 4. 六厘法	
13 14	1. 複利公式 2. 複利表 銀行計算 1. 貸款及折扣	利息授完後舉行臨時試驗
15 16	1. 存款及儲蓄 2. 兌匯	十六週最後一小時舉行試驗
17 18	統計大意 1. 表列法 2. 圖示法 3. 平均數的求法 4. 中數的求法 5. 衆數的求法 *6. 差異數的求法 *7. 物價指數	

有*者可從略

算術 上冊

目次

第一章 數的表示1

1.算術的目的 2.量 3.單位 4.數 5.命數法 6.
記數法(習題一)

第二章 整數四則7

7.加法 8.加法運算律 9.加法規則(習題二) 10.加
法驗算 11.單位記載法 12.加法應用題(習題三)

13.減法 14.減法運算律 15.減法規則(習題四)

16.減法驗算 17.單位記載法 18.減法應用題(習題

五) 19.乘法 20.乘法運算律 21.乘法規則(習題

六) 22.乘法驗算 23.單位記載法 24.乘法應用題

(習題七) 25.除法 26.除法運算律 27.除法規則

(習題八) 28.除法驗算 29.單位記載法 30.除法

應用題(習題九) 31.括弧計算(習題十) 32.式的計

算(習題十一)

第三章 速算法39

33.加法速算(習題十二) 34.減法速算(習題十三)

35. 乘法速算(習題十四) 36. 除法速算(習題十五)

第四章 整數應用題.....49

37. 平均問題(習題十六) 38. 和差問題(習題十七)
 39. 連續數問題(習題十八) 40. 定和問題(習題十九)
 41. 定差問題(習題二十) 42. 相遇問題(習題二十一)
 43. 追及問題(習題二十二) 44. 盈不足問題(習題二十三)
 45. 雞兔問題(習題二十四) 46. 植竿問題(習題二十五)
 *47. 方陣問題(習題二十六) 48. 還原問題(習題二十七)
 49. 歸一算法(習題二十八) 50. 其他難題(習題二十九)

第五章 整數性質.....85

51. 整數, 整除 52. 倍數及約數 53. 倍數及約數的定則
 54. 偶數及奇數(習題三十) 55. 因數 56. 因數的觀察法
 57. 質數及合數 58. 連乘積與冪數 59. 質數表(習題三十一)
 60. 質因數 61. 質因數檢驗法(習題三十二) 62. 因數分解法(習題三十三)
 63. 公約數及最大公約數 64. 最大公約數的定則 65. 最大公約數的求法(習題三十四)
 66. 公倍數及最小公倍數 67. 最小公倍數定則 68. 最小公倍數的求法
 69. 應用問題(習題三十五)

第六章 分數四則129

- 70.分數 71.分數單位 72.分數種類 73.分數化法
(習題三十六) 74.分數定律 75.擴分和約分(習題三十七) 76.通分(習題三十八) 77.分數加法(習題三十九) 78.分數減法(習題四十) 79.分數乘法(習題四十一) 80.分數除法(習題四十二) 81.繁分數化法(習題四十三) *82.分數的約數及倍數 *83.分數的最大公約數 *84.分數的最小公倍數(習題四十四)

第七章 分數應用題167

- 85.餘數問題(習題四十五) 86.工程問題(習題四十六) 87.時鐘問題(習題四十七) 88.寒暑表問題(習題四十八) 89.各部問題(習題四十九) 90.其他雜題(習題五十)

第八章 小數四則183

- 91.小數 92.小數單位 93.小數種類 94.小數定則
95.有限小數加法(習題五十一) 96.有限小數減法(習題五十二) 97.有限小數乘法(習題五十三) 98.有限小數除法(習題五十四) 99.有限小數和分數的互化(習題五十五) 100.循環小數的來源 101.循環節的移動及擴展 102.化循環小數為分數(習題五十六) 103

-
- .循環小數通位法 104.循環小數加法(習題五十七)
105.循環小數減法(習題五十八) 106.循環小數乘除
法(習題五十九)

第九章 省略算203

- 107.省略算 108.省略加法(習題六十) 109.省略減
法(習題六十一) 110.省略乘法(習題六十二) 111.
省略除法(習題六十三)

第一章

數的表示

1. 算術的目的

算術是一切算學的初步，為進探算學門徑的關鍵，我們熟習了算術以後，就能明瞭基本的算法和數理，一方面可以樹立算學的基礎，為研究各種科學的預備；一方面可以練習處理數量的方法，以解決日常生活上應用的計算問題。

2. 量

可以用數量的叫做量，例如：—

多少的量——可以用個、枚、隻去量他；

長短的量——可以用公尺去量他；

輕重的量——可以用天秤去量他；

久暫的量——可以用鐘錶去量他；

冷熱的量——可以用寒暑表去量他。

3. 單位

我們計算人數時把一個人做標準，然後一個，二個，三個……去計算，把一日做標準，然後一日，二

日,三日……去計算,這樣計算事物的量時,要求一個量做標準,這個標準量叫做單位。依自然的標準,量出來的結果,人人一樣的,所以這種單位叫做自然單位。例如:—

多少的單位:一個人或一冊書。

至於人的長短,時的久暫,物的輕重,以及氣候的冷熱等,倘是沒有一定標準,那末各人量出來的結果,決不能相同,計算方面既不方便,又不準確。所以我們必須先定一種標準單位,這個標準單位叫做人為單位。例如:—

長短的單位: 一公尺的長或一公里的長,

輕重的單位: 一公分的重或一公斤的重,

久暫的單位: 一秒鐘的久或一年的久,

冷熱的單位: 攝氏表一度的熱或華氏表—

度的熱。

4. 數

問話時“幾個”“幾多?”“多少”的回答都是數,所以數是表明單位的多少倍或幾分之幾的。

聚合若干個一而成的數,叫做整數。

5. 命數法

用名稱表示數目的方法叫命數法。

最小的整數有九個,就是

一 二 三 四 五 六 七 八 九

比九多一的數叫做十。

二個十叫做二十,三個十叫做三十,依次類推到九十;合十個十所成的數,叫做百。一個百,二個百,以至九個百,各叫做一百,二百,以至九百;合十個百所成的數,叫做千。合十個千所成的數叫做萬。

萬以上的叫做十萬,百萬,千萬,萬萬,十萬萬,……

現在把數字位次的定名和位值列表如下:—

定名	千萬萬	百萬萬	十萬萬	萬萬	千	百萬	十萬	萬	千	百	十	個
位	十 倍 百 萬 萬	十 倍 十 萬	十 倍 萬	十 倍 千	十 倍 百	十 倍 萬	十 倍 千	十 倍 百	十 倍 十	十 倍 個	單 位	
值												

上表從右到左,每個名稱,都是從一到九爲止,滿十進位,所以叫他十進法。

6. 記數法

用記號記出數目的方法,叫記數法。

算術中所用數的記號,常用亞拉伯數字來表示。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

尋常記數,仍按上表的次序;不過把數字代數名而略去位名。在沒有數的地位,就寫 0 佔領。

例一: 二萬三千二百五十一,就記做 23251

例二: 八千六百三十三萬,就記做 86330000.

例三: 十萬八千零零四,就記做 108004.

用言語讀所計的數時,先從數的右端逐位向左,默誦一,十,百,千等以定位;然後從最左的位讀出來。例如 23251 讀做二萬三千二百五十一, 3025 讀做三千零二十五。

此外還有一種羅馬數字記數法,也可附帶說一下,這裏有七個基本數字:

<i>I</i>	<i>V</i>	<i>X</i>	<i>L</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>M</i>
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1	5	10	50	100	500	1000

其記法有五:

第一. 並記相同數字者,表示各數的和。

例如 II III XX XXX CC MMM
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots
 2 3 10 30 200 3000

第二. 記小數字於大數字的左面,表示大數減小數。

例如 IV IX XL XC CD CM
 4 9 40 90 400 900

第三. 記小數字於大數字的右面,表示大數加小數。

例如 VI XI LX DC $MLXI$ CL DXI
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots
 6 11 60 600 1061 150 511

第四. 兼用以前三法。

例如 $VIII$ XII $XLIII$ $XCIV$ $MMCDLXXIX$
 \vdots \vdots \vdots \vdots \vdots
 8 12 43 94 2479

第五. 數字上加一橫線表示數的千倍。

例如 \overline{L} \overline{M} \overline{XCIV}
 50000 1000000 94000

習 題 一

1. 一百個千是什麼數?一千個百是什麼數?
2. 一千個千是什麼數?一百個百是什麼數?

3. 一位數中最大的是什麼數?最小的是什麼數?

4. 二位數中最大的是什麼數?最小的是什麼數?

試記出下面各數。

5. 二百五十一,三百九十二,四千二百六十八。

6. 二十九萬五千一百六十一,三千二百九十萬,十三萬七千。

7. 八百零九,七千三十五,一萬五千四十一。

8. 今年是公歷幾年?試用數字記出來。

9. 喜馬拉雅山最高峯約高二萬九千尺。試用數字記出來。

試讀出下面各數。

10. *VIII, LXII, CCXVIII, LXIX, MCDXCIX,*

11. 80770, 70780, 78700, 77800,

12. 3560003, 3500036, 356300, 360503,

13. 5000000000300000, 3000200103,

14. *XIV, LXXXV, DCCLXXXV, MDCCC XLIII, MMXCI ν .*

第二章

整數四則

7. 加法

加法的意義如下：

第一：併合兩個數或兩個以上的數而成一個數叫加計。這兩個數中的第一數，叫被加數，其餘叫加數，所合成的一個數，叫和數或稱總數。

例 5, 3 之和是 8 或 $5+3=8$ 。

第二：於甲數增多少而成乙數，也叫加法，甲數叫被加數，加上的數，叫加數，乙數叫和數或稱總數。

例 5 增 3 是 8 或 $5+3=8$ 。

8. 加法運算律

在加法中，有兩條定律，非常重要，一叫可易律，一叫可羣律，這兩條定律增加運算上的便利很多，學者不可不加注意。

(1) 加法可易律。兩數或多數相加，加數次序無論如何顛倒，所得的

和總是一樣。

例 $18+25+30=18+30+25=25+18+30=73$.

(2) 加法可羣律。多數相加,先任意加攏幾數,再和餘數相加結果都同。

例 $7+5+3=(7+5)+3=7+(5+3)=5+(7+3)=15$.

9. 加法規則

(1) 記加數在被加數下面,排列同位數成一直行。

(2) 從右起,求各行的和數記入各行下面。

(3) 和數未滿十位的記入原加行下;滿十位的併入上位和數。

公式

(1) 被加數 + 加數 = 和數

(基本公式)

(2) 和數 - 被加數 = 加數

(從基本公式兩端各減被加數)

(3) 和數 - 加數 = 被加數

(從基本公式兩端各減加數)

例一. 求 712 及 230 的和。

$$\begin{array}{r} \text{式} \quad \quad \quad 712 \\ + 230 \\ \hline 942 \end{array}$$

$$712 + 230 = 942.$$

例二. 求 543, 287 及 398 的和。

$$\begin{array}{r} \text{式} \quad \quad \quad 543 \\ \quad \quad \quad 287 \\ + 398 \\ \hline 1228 \end{array}$$

$$543 + 287 + 398 = 1228.$$

例三. 求 8267, 51003, 27, 及 306801 的和。

$$\begin{array}{r} \text{式} \quad \quad \quad 8267 \\ \quad \quad \quad 51003 \\ \quad \quad \quad \quad 27 \\ + 306801 \\ \hline 366098 \end{array}$$

$$8267 + 51003 + 27 + 306801 = 366098.$$

習題 二

求下面各題中諸數的和：

1. 9384 61231.

2. 59832, 74316.
3. 98637, 23168 43219.
4. 86234 51896 2971867 253
5. 987, 876, 765, 654 543, 432.
6. 4987, 2165 9783 5218.
7. 52988 13673, 60211, 72010.
8. 28.09, 77986, 20811 30021.
9. 三千八百零一, 五萬二十三, 九十一萬五千.
10. 四十一, 二百五十八, 三千零二, 一萬九千五百.

10. 加法驗算

行加法的時候,不能必其沒有錯誤,所以要行驗算手續,驗算的方法,只要顛倒加的次序,再算一回,看兩個和數相同就是對的,不同就不對.

11. 單位記載法

同類單位的數,可以相加,異類單位的數,不能相加,而相加數同和數,必互為同類單位的數.所以在同類單位諸數相加時,只須把各位數字相加,然後附單位於和數後面.

同種類而異單位的數須化成同單位的數纔可相加。

例 5 馬, 6 羊, 不是同類單位的數, 不能相加的。

5 元, 6 元是同類單位的數, 加起來 11 元, 仍是同類單位的數。

$$76 \text{ 角} + 8 \text{ 元} = 76 \text{ 角} + 80 \text{ 角} = 156 \text{ 角}.$$

12. 加法應用題

例一. 有羊二羣; 第一羣 2514 頭; 第二羣 815 頭; 共有羊多少頭?

$$\begin{array}{r} \text{解} \quad \quad \quad 2514 \\ \quad \quad \quad + 815 \\ \hline \quad \quad \quad 3329 \end{array}$$

$$2514 + 815 = 3329$$

答 共有羊 3329 頭。

例二. 某初中學校一年級學生 174 人; 二年級學生 98 人; 三年級學生 70 人; 問該校共有學生多少人?

$$\begin{array}{r} \text{解} \quad \quad \quad 174 \\ \quad \quad \quad \quad 98 \\ \quad \quad \quad + 70 \\ \hline \quad \quad \quad 342 \end{array}$$

$$174 + 98 + 70 = 342$$

答 共有學生 342 人。

習 題 三

1. 求一丈二尺三寸,九尺八寸,八尺三寸的和。
2. 一人以其財產分給其三子:長子所得值銀 516 圓;次子所得值銀 259 圓;末子所得值銀 318 圓。這人的財產共值多少圓?
3. 四童子分菓:第一童得 231 枚;第二童得 125 枚;第三童得 98 枚;第四童所得等於第一第三兩童所得菓數的和。原有菓數共多少?
4. 289 後之第二十五數是什麼?
5. 平遼鐵路長 1714 里,平綏鐵路長 1000 里,今有瀋陽軍隊乘火車開拔到綏遠,共經多少里路?
6. 三十七歲的人,再過二十八年,則為幾歲?
7. 一人年十三歲,其兄大伊五歲,其母比其兄又大二十二歲,其父比其母又大三歲,

其祖父比其父又大二十一歲。此人祖父，父，母，兄的歲數各多少？

8. 山西恆山主峯天峯嶺，高出渾源縣平地 2560 尺；該縣地勢又高出海面 2560 尺，求恆嶽高出海面多少尺？
9. 前清同外國議和的賠款數如下，試求他的總數：

年代 (公元)	1842	1858	1860	1895	1901
約名	南京條約	天津條約	北京和約	馬關條約	辛丑和約
國別	英	英法	英法	日本	英日俄法 意奧德美
賠款 (兩)	二千一百 萬	四百萬	一千六百 萬	二萬萬	四萬五千 萬

10. 近十年來我國進口的糧食值銀兩數統計如下，試求他的總數：

類別 年份	小麥	米	麵粉	糧食
民11	30,577,807	79,874,788	16,740,497	325,224
民12	9,096,065	98,198,591	27,232,948	238,784
民13	17,688,749	63,248,721	30,097,693	352,627
民14	2,654,747	61,041,505	15,970,596	610,220

民15	17,965,194	89,844,423	24,820,480	23,622,770
民16	7,055,667	107,323,244	22,319,408	31,623,765
民17	3,338,886	65,039,232	32,801,936	29,830,454
民18	21,430,785	58,981,045	64,008,357	23,038,433
民19	12,830,690	121,234,193	31,926,220	23,260,664
民20	87,639,301	64,375,851	30,920,302	24,055,111

13. 減法

減法的意義如下：

第一：比較甲乙二數的大小，計算甲數比乙數大多少，叫減法，甲數叫被減數，乙數叫減數，所大的數叫差數。

例 3, 5 的差是 2 或 $5 - 3 = 2$

第二：從甲數中取去乙數，還有多少，也叫減法，甲數叫被減數，乙數叫減數，賸餘的數叫餘數或叫差數。

例 5 去 3 餘 2 或 $5 - 3 = 2$

14. 減法運算律

減法裏也有二個運算律，分述于下：

(1) 減法可易律 一數減去多

數減數次序,無論如何顛倒所得的差總是一樣。

例 $56-13-22=56-22-13=21$ 。

(2) 減法可羣律 一數減去多數先將各減數加攏來,再從被減數內減去,結果相同。

例 $84-28-14=84-(28+14)=42$ 。

15. 減法規則

(1) 記減數在被減數下面,排列同位數成一行。

(2) 從右起,求各行的差數記入各行下面。

(3) 倘有被減數不夠減時,就向上位被減數借十倍過來,併入本位再算。

公式:

$$(1) \text{ 被減數} - \text{減數} = \text{差數}$$

(基本公式)

$$(2) \text{ 減數} + \text{差數} = \text{被減數}$$

(從基本公式兩端各加減數)

(3) 被減數 - 差數 = 減數

(從基本公式兩端各減差數)

例一. 從 87 減 29,

$$\begin{array}{r} \text{式} \quad \quad \quad 87 \\ - 29 \\ \hline 58 \end{array}$$

$$87 - 29 = 58.$$

例二. 從 3124 減 698

$$\begin{array}{r} \text{式} \quad \quad \quad 3124 \\ - 698 \\ \hline 2426 \end{array}$$

$$3124 - 698 = 2426.$$

例三. 從 300801000 減 7193267.

$$\begin{array}{r} \text{式} \quad \quad \quad 300801000 \\ - 7193267 \\ \hline 293607733 \end{array}$$

$$300801000 - 7193267 = 293607733.$$

習 題 四

以下習題試從第一數減第二數而求其

差:

1. 312, 278.
2. 3965, 3154.
3. 56789, 23456.
4. 123456, 45678.
5. 80050, 69667.
6. 38265, 23406.
7. 386700012, 51009710.
8. 816300000, 2358176.
9. 四萬六千, 二千五百.
10. 五十萬八百, 三十二萬四千四百四十四.

16. 單位記載法

同類單位的數, 可以相減, 異類單位的數, 不能相減, 而相減數同差數, 必互為同類單位的數, 所以在同類單位諸數相減時, 祇須把各位數字相減, 然後附單位於差數後面。

同種類而異單位的數, 須化成同單位的數, 才可相減。

例 9 馬, 8 牛, 不是同類單位的數, 不能相減。

10 元, 7 元, 是同類單位的數, 差數是 3 元, 仍是同類單位的數。

$$3 \text{丈} - 145 \text{寸} = 300 \text{寸} - 145 \text{寸} = 155 \text{寸}.$$

17. 減法應用題

例一. 甲乙二農場,共養雞 3456 隻,已知甲場雞數是 2108 隻,問乙場雞數多少?

解 $3456 - 2108 = 1348.$

答 乙場養雞 1348 隻。

例二. 一人有財產洋四萬元,分給其子一萬五千六百元,捐助慈善院八千元,存入銀行一萬元,問這人尚餘財產多少?

解 $40000 - (15600 + 8000 + 10000) = 6400.$

答 這人尚餘洋 6400 元。

習 題 五

1. 山東濟南離北平約 960 里,甲由北平往濟南,乙由濟南往北平,已知甲已行 325 里,乙已行 220 里,這時甲乙相距多少里?
2. 甲乙丙三人,甲有銀 712 元,乙有銀 343 元,已知甲所有的元數,等於乙丙二人的和,問丙的圓數多少?
3. 某市人口共有 92346 人,其中 44572 人

- 是男人問女人多少?
4. 甲倉有米 1256 石,乙倉有米 798 石,今由甲倉取出米 85 石,求再取出多少石,那末餘米石數和乙倉等。
 5. 今年是西歷一千九百三十五年,距初創輪船時已屆九十七年,那末輪船創於西歷幾年?
 6. 哥崙布發見美洲在西歷一千四百九十二年,其時距現在多少年?
 7. 西人發見鐵在西歷紀元年前一千四百零六年,創行電報在西歷一千八百三十二年,二者相距多少年?
 8. 甲午之役,我國軍艦除被日本海軍所轟沉外,爲其所捕去者,有鎮遠,濟遠,平遠,海門,操江,鎮東,鎮西,鎮南,鎮北,鎮中,鎮邊,共十一艘,其噸數鎮遠七千三百三十五噸;濟遠比鎮遠少四千八百五十四噸,平遠比濟遠少二百九十六噸,海門比平遠又少八百十八噸,其餘七艘共三千二百八十三噸,問此役日本所得我國軍艦的總

噸數若何?

9. 中國和日本的面積人口如下表,試各求差數。

	面	積	人	口
中 國	11 482 464 方公里		474 487 000	
日 本	394 604 方公里		63 000 000	

10. 外國人在我國最初的五口通商埠如下表:

地 名	上 海		廈 門		廣 州	福 州	寧 波
名 稱	租 界		租 界		租界	居留地	居留地
	公共	法	日	美	英法	公共	公共
設立年代 (公元)	1843	1849	1900	1899	1861	1842	1844

從設立年代到現在,各有多少年?假使都是九十九年爲限,那麼再過幾年之後,纔可以收回?又滿期的時候各在民國幾年?

18. 減法驗算

倘差數同減數相加,所得的和等於被減數,就是結果正確。

例	3 6 2 4
	- 2 0 6 8
	1 5 5 6
驗	1 5 5 6
	+ 2 0 6 8
	3 6 2 4 ……………等於被減數。

19. 乘法

乘法的意義如下：

求一數的倍數的算法，叫乘法，原有數叫被乘數，倍他的數叫乘數，所得的結果叫積數，相乘數都叫積數的因數，三數或多數相乘的積叫連乘積。

例一， 4 的 3 倍是 12。 或 $4 \times 3 = 12$ 。

例二， 3 和 4 和 5 的連乘積是 60。 或 $5 \times 4 \times 3 = 60$ 。

20. 乘法運算律

乘法裏有幾個運算定律，分說如下。

(1) 乘法可易律 因數的次序，無論如何顛倒所得的積，總是一樣。

例 $18 \times 25 = 25 \times 18 = 450$ 。

(2) 乘法可羣律 在連乘式裏，任意先把幾個數結合起來求積，再和其他因數相乘所得的連乘積不變。

例 $7 \times (5 \times 3) = (7 \times 5) \times 3 = 5 \times (7 \times 3) = 105.$

(3) 乘法分配律 某數乘諸數的和同差,等於某數分乘各數,再求所得積的和同差。

例 $4 \times (12 + 3 - 5) = 4 \times 12 + 4 \times 3 - 4 \times 5.$

乘法分配律也是多位數乘法所根據的定律,看下面二例,便自然明白。

例一. $3 \times 597 = 3 \times (500 + 90 + 7)$

$$= 3 \times 500 + 3 \times 90 + 3 \times 7$$

$$= 1500 + 270 + 21$$

$$= 1791.$$

例二. $36 \times (597) = (30 + 6) \times (500 + 90 + 7)$

$$= 30 \times (500 + 90 + 7) + 6$$

$$\times (500 + 90 + 7)$$

$$= 30 \times 500 + 30 \times 90 + 30 \times 7 + 6$$

$$\times 500 + 6 \times 90 + 6 \times 7$$

$$= 15000 + 2700 + 210 + 3000 + 540 + 42$$

$$= 21492.$$

注意: 無論何數用 1 乘得原數用 0 乘得 0。

21. 乘法規則

- (1) 依次記被乘數在乘數上面。
 (2) 從乘數的最右位起挨次乘被乘數。
 (3) 各位數的乘積加起來,就得答數。

公式:

- (1) 被乘數 \times 乘數 = 積數。
 (2) 積數 \div 乘數 = 被乘數。
 (3) 積數 \div 被乘數 = 乘數。

例一.

求 7462 的 25 倍。

$$\begin{array}{r}
 7462 \dots\dots\dots \text{被乘數} \\
 \times 25 \dots\dots\dots \text{乘數} \\
 \hline
 37310 \dots\dots\dots 7462 \times 5 \\
 14924 \dots\dots\dots 7462 \times 2 \\
 \hline
 186550 \dots\dots\dots \text{積數}
 \end{array}$$

式

$$7462 \times 25 = 186550$$

例二.

求 1325×124 的積。

$$\begin{array}{r}
 1325 \dots\dots\dots \text{被乘數} \\
 \times 124 \dots\dots\dots \text{乘數} \\
 \hline
 5300 \\
 2650 \\
 1325 \\
 \hline
 164300 \dots\dots\dots \text{積數}
 \end{array}$$

$$\text{式} \quad 1325 \times 124 = 164300$$

例三. 求 $346 \times 56 \times 43$ 的積

$$\begin{array}{r} 346 \\ \times 56 \\ \hline 2076 \\ 1730 \\ \hline 19376 \end{array} \dots 346 \times 56 \text{的積}$$

$$\begin{array}{r} \times \quad 43 \\ \hline 58128 \\ 77504 \\ \hline 833168 \end{array} \dots 346 \times 56 \times 43 \text{的連乘積}$$

$$\text{式} \quad 346 \times 56 \times 43 = 833168$$

習 題 六

求下列諸數的積

1. 347×819
2. 8764×998
3. 94652×40300
4. 7852×10103
5. $5995 \times 97 \times 90$
6. $3211 \times 5112 \times 37$
7. $13345 \times 2763 \times 8764$

8. $407 \times 403 \times 605 \times 704$

9. $426 \times 795 \times 403 \times 80074$

10. $8674305 \times 40325 \times 907002$

22. 乘法驗算

交換被乘數同乘數,再乘一次,倘所得的積,與第一次所得的積相同,就是結果正確。

例

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 22 \\ \hline 36 \\ 36 \\ \hline 396 \end{array}$$

驗

$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 18 \\ \hline 176 \\ 22 \\ \hline 396 \end{array}$$

23. 單位記載法

被乘數是有單位的數,那末乘數必是沒有單位的數,所得的積數,必與被乘數同單位。

例

$$2 \text{ 斤} \times 3 = 6 \text{ 斤}。$$

被乘數和乘數都是有單位的數,那末不能相乘。

例 3斤 \times 2尺 或 3元 \times 2元都不合理。

24. 乘法應用題

例一： 每日有二十四時，每時四刻，每刻十五分，每分六十秒，一日有多少秒？

解 $24 \times 4 \times 15 \times 60 = 86400$

答 一日有 86400 秒。

例二： 一工匠每日得工銀五角六分，一個月能得多少？

解 $56 \times 30 = 1680$

答 一個月得 1680 分即十六元八角。

習 題 七

1. 鉛筆 12 枝叫一打，25 打共有幾枝？
2. 鋼筆尖 12 打叫一羅，20 羅共有幾個？
3. 紙 24 張叫一帖，20 帖叫一令，2 令共有幾張？
4. 什麼數中含 18 個 75？
5. 每件值 385 圓的貨物，28 件值多少？
6. 工人十八十五日可以做成的事，倘使一個人要做幾日？

7. 每升一角三分的白米,五斗六升價值多少?
8. 半圓銀幣,雙毫銀幣,和五分銅幣各 450 個,問共銀多少?
9. 某汽船的速率每小時行 12 公里,現在從甲港到乙港行 28 小時,乙港到丙港行 20 小時,丙港到丁港行 12 小時,問航路總長多少公里?
10. 一年共有 365 日 5 時 48 分 46 秒,問一日二十四小時,一小時六十分,一分六十秒,一年共有多少秒?

25. 除法

除法的意義如下:

第一: 求甲數是乙數的幾倍的算法,叫除法.
甲數叫被除數,乙數叫除數,所求的倍數叫商數.

例 12 是 4 的 3 倍 或 $12 \div 4 = 3$

第二: 把一數分成多少份,求其每份的數的算法,也叫除法,被分的數叫被除數,等分的份數叫除數,每份的數叫商數.

例 12 分成 4 份,每份的數是 3 或 $12 \div 4 = 3$

26. 除法運算律

除法本是乘法的逆運算,所以把除法改做乘法後,乘法的一切運算定律多可應用,但在除法本身,也有和乘法相似的一條定律,便是

除法分配律: 某數除諸數的和同差,等於某數分除各數,再求所得商的和同差。

例 $(24+48-20)\div 4=24\div 4+48\div 4-20\div 4$

或可寫成分數式,比較爽目。

$$\frac{24+48-20}{4}=\frac{24}{4}+\frac{48}{4}-\frac{20}{4}$$

注意. 無論何數除 0 得 0; 0 除任何數是沒有意義的。

27. 除法規則

- (1) 記除數在被除數左邊。
- (2) 從被除數左邊起,找尋那位數含有除數的最大倍數拿來做第一位商,記在那位數上面。
- (3) 求第一位商乘除數的積,記在那位數下面減去。
- (4) 移下位數與差數並列成新

被除數,依上法求第二位商。

(5) 挨次依法求到被除數的末位商爲止。

公式:

$$(1) \text{ 被除數} \div \text{除數} = \text{商數}.$$

$$(2) \text{ 被除數} \div \text{商數} = \text{除數}.$$

$$(3) \text{ 除數} \times \text{商數} = \text{被除數}.$$

除時沒有剩餘的,叫做除盡的除,其公式已如上述,若有剩餘的,叫做除不盡的除,其公式如下:

$$(1) \text{ 被除數} \div \text{除數} = \text{商數} + \text{剩餘}.$$

$$(2) (\text{被除數} - \text{剩餘}) \div \text{商數} = \text{除數}.$$

$$(3) \text{ 除數} \times \text{商數} + \text{剩餘} = \text{被除數}.$$

凡剩餘必比除數小,除法遇到有餘的時候,就把剩餘記于橫線上,除數記於橫線下,附于商數的後面。或增 0 於剩餘的後,再拿除數除,求出商數中的小數。

例一.

求 $1638 \div 6$ 的商數。

$$\begin{array}{r}
 273 \cdots \text{商數} \\
 \hline
 \text{除數} \cdots 6 \overline{) 1638} \cdots \text{被除數} \\
 \underline{12} \\
 43 \\
 \underline{42} \\
 18 \\
 \underline{18} \\
 0
 \end{array}$$

式

$$1638 \div 6 = 273.$$

例二.

拿 23 除 6785.

$$\begin{array}{r}
 295 \cdots \text{商數} \\
 \hline
 \text{除數} \cdots 23 \overline{) 6785} \cdots \text{被除數} \\
 \underline{46} \\
 218 \\
 \underline{207} \\
 115 \\
 \underline{115} \\
 0
 \end{array}$$

式

$$6785 \div 23 = 295.$$

例三.

3182 除以 7.

$$\begin{array}{r}
 454 \cdots \text{商數} \\
 \hline
 \text{除數} \cdots 7 \overline{) 3182} \cdots \text{被除數} \\
 \underline{28} \\
 38 \\
 \underline{35} \\
 32 \\
 \underline{28} \\
 4 \cdots \text{剩餘}
 \end{array}$$

式 $3182 \div 7 = 454\frac{4}{7}$

習 題 八

1. $574 \div 7$
2. $10947 \div 123$
3. $347956 \div 8092$
4. $35191776 \div 59473$
5. $? \div 6460 = 7250$
6. $? \times 152 = 22800$
7. $25284 \div ? = 501$
8. $9929790 \div 345 \div 234$
9. 用何數乘123可得40221?
10. 用何數除7781174可得商8216,餘622?

28. 除法驗算

在除得盡的除法,祇要用除數同商相乘,所得的積,倘等於被除數,就是結果正確。在除不盡的除法,祇要用除數同商相乘的積上再加上剩餘,倘所得的結果,等於被除數,就是結果正確。

26. 單位記載法

被除數和除數倘同是同單位的數,那末商數

必是沒有單位的數。

例 $14 \text{ 斤} \div 7 \text{ 斤} = 2$ 。

被除數是有單位的數,除數是沒有單位的數,
那末商數必是和被除數同單位的數。

例 $15 \text{ 元} \div 3 = 5 \text{ 元}$ 。

被除數和除數,倘不是同類單位的數,不能相
除的。

例 18 元和 3 斤不能相除的。

30. 除法應用題

例一. 鉛筆 1728 枝,每 12 枝算一打,共有多少打?

解 $1728 \div 12 = 144$

答 共有 144 打。

例二. 甲所有金,較乙的 7 倍還多 40 元。已知甲有
金 824 元,問乙有金多少元?

解 $824 - 40 = 784$

$$784 \div 7 = 112$$

答 乙有金 112 元。

習 題 九

1. 商人以股票集資,每股 125 元,今欲集五

百三十萬元應集多少股？

2. 銀幣一元,可購米 1 斗 2 升 5 合,米每斗的價多少?
3. 工人 6 名作工,4 天可成,現在限 3 天完工,應添多少人?
4. 一輪周圍長九尺六寸,走一路上,由這端到那端,已知路長二百九十九丈五尺二寸,求此輪旋轉的次數。
5. 地球距太陽 147250000000 公尺,光的速度每秒走 309000000 公尺,求光從太陽射到地面所需的秒數。
6. 機關砲每分鐘可發 60 次,現在五門機關砲同時發射,發 180000 次應費幾分鐘?
7. 地球圍繞太陽二日走 13546560 里,問一點鐘走幾里?但一日有二十四點鐘。
8. 一商人買帛十三丈,共價 65 圓,賣去後得利 39 圓,求這帛每尺的賣價。
9. 一人有銀 325250 兩,拿其中的 58130 兩給他的妻,其餘分給子姪九人,問子姪每人所得銀的兩數多少?

10. 一人坐自行車走路三十六里,計前後輪共轉16564次,已知前輪轉8644次,求每走一里路時後輪所轉的次數。

31. 括弧計算

括弧最通用的,有(), [], { }, 三種,有時還用括線——,都是用來表明裏面包括的數,應該當做一個數看待,換句話說,就是應該先把括弧裏的數算好,再和外邊的數去算。遇有幾層括弧的算式應該由內而外,先把內層括弧裏的數算好,隨把這個括弧去消,依次計算,依次去消,到最外層的括弧去消,最後的結果便可求得了。

例一. $126 - (78 - 32 + 6) = 126 - 52 = 74.$

例二. $126 - (78 - \overline{32 + 6}) = 126 - (78 - 38) = 126 - 40$
 $= 86.$

例三. $(555 + 362) \times (76 - 52) \div (109 - 16) =$
 $917 \times 24 \div 84 = 262.$

例四. $1 + 2 - [3 + 4 - \{5 + 6 - (3 + 2)\}] =$
 $1 + 2 - [3 + 4 - \{5 + 6 - 5\}] =$
 $1 + 2 - [3 + 4 - 6] = 1 + 2 - 1 = 2.$

習 題 一 ○

下面各題,先算好括弧裏面的數,再算到外面去:

$$1. \quad 9+7-\{(8+5)-(7-4)\}=?$$

$$2. \quad 26 - [25 - \{18 - (15 - \overline{9+3})\}] = ?$$

$$3. \quad 10 - (5+4) + (2+3-5) - (100 - 99) = ?$$

$$4. \quad 110 + [8 + \{100 - (75 + 25) + 6\} + 36] = ?$$

$$5. \quad [47 - (36 - 18) + 25] - 31 = ?$$

$$6. \quad 56 - \{38 - [17 + (12 - 9)] + 5\} = ?$$

$$7. \quad 72 + [19 + \{82 - (104 - 76)\}] = ?$$

$$8. \quad (114 \times 6) \times (96 \div 6) = ?$$

$$9. \quad 4536 \div (3 \times 4 \times 6 \times 7) = ?$$

$$10. \quad 972 \times 7 \div (9 \times 7) = ?$$

32. 式的計算

用 $+$, $-$, \times , \div ,各種運算符號,把幾個數連起來,來表示數和數間的關係,叫做式,式的計算慣例,常如下面的次序。

(1) 式中僅有加減號者

計算時可自左至右,順次進行,除第一數外,其

餘各數,可各附前面符號,任意變換次序,結果是一樣的。

$$\text{例} \quad 36-24+12-18=12+12-18=24-18=6,$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad 36-24+12-18 &= 36-18+12-24=18+12-24 \\ &= 30-24=6, \end{aligned}$$

(2) 式中僅有乘除號者

計算時也自左至右,順次進行,除第一數外,其餘各數,也可連同前面符號,任意變換次序,

$$\text{例} \quad 30 \div 6 \times 12 \div 4 = 5 \times 12 \div 4 = 60 \div 4 = 15,$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad 30 \div 6 \times 12 \div 4 &= 30 \times 12 \div 4 \div 6 = 360 \div 4 \div 6 \\ &= 90 \div 6 = 15. \end{aligned}$$

(3) 式中雜具加減乘除號者

計算時應當先算乘除,再做加減。

$$\text{例} \quad 30 \div 6 + 15 \times 2 - 15 \div 3 \times 2 = 5 + 30 - 10 = 25,$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad 30 \div 6 + 15 \times 2 - 15 \div 3 \times 2 &= (30 \div 6) + (15 \times 2) \\ &\quad - \{(15 \div 3) \times 2\} \\ &= 5 + 30 - 10 = 25. \end{aligned}$$

(4) 式中有括弧者

計算時,應當先把括弧內的數拚成一數,然後再合括弧外的數計算。

例 $87 \div [8 + 7 \times \{18 \div (5 + 1)\}] + 6 =$

$$87 \div [8 + 7 \times \{18 \div 6\}] + 6 =$$

$$87 \div [8 + 7 \times 3] + 6 =$$

$$87 \div [8 + 21] + 6 =$$

$$87 \div 29 + 6 =$$

$$3 + 6 = 9.$$

注意 1. 1 乘任何數或除任何數，結果等於原數。

注意 2. 任何數加 0 或減 0，結果等於原數。

注意 3. 任何數乘 0 或除 0，結果等於 0。

注意 4. 0 和 0 乘結果仍等於 0。

注意 5. 0 和 0 除結果不定。

注意 6. 0 除一數，是沒有意義的。

習 題 一 一

計算下列各式：

1. $28 - 19 + 34 - 9 = ?$

2. $49 - 26 - 13 + 12 = ?$

-
3. $1024 \div 8 \div 4 \div 2 = ?$
 4. $28 \div \{7 - (3 + 2)\} = ?$
 5. $\{42 \times (36 + 14) - 36 \div (4 \times 3)\} \times 15 = ?$
 6. $172 - 6 \times 7 + (16 + 32) \div 8 = ?$
 7. $(6142 \div 37 + 23 \times 83) \div (1903 - 1878) = ?$
 8. $18 - 12 \div 6) \times 7 - 5 \times (3 + 2 + \overline{7 - 5}) = ?$
 9. $767 \times 9 \times 8 \div (55224 - 11 \times 5000 - 223) = ?$
 10. $9 - [8 - (7 - 6) + 5 - \{4 - (3 - \overline{2 + 1})\}] = ?$

第三章

速 算 法

33. 加法速算

速算的方法很多,最普通的,有下面幾種:

(1) 分解加數中的一數。

例 $895+588=895+(583+5)=895+5+583$
 $=900+583=1483.$

(2) 把二個加數適當加減。

例 $674+256=670+260=930.$

(3) 二個數都加上適當數,於結果修正。

例 $352+357=360+360-(8+3)=720-11=709.$

(4) 加數是相近的數時,作為同數互加再於結果修正。

例 $342+347=342\times 2+5=684+5=689$

或 $342+347=340\times 2+2+7=689.$

(5) 適當組合加數。

例 $1+2+3+4+9+8+7+6=(1+9)+(2+8)$

$$+(3+7)+(4+6)=10+10+10+10=40.$$

(6) 加適當數於加數，於結果修正。

例 $1807+997=1807+1000-3=2807-3=2804.$

(7) 一般速加法。

1. 在同行內幾個數的和適成10的先相加。
2. 在同行內有二個以上的同數時先相加。
3. 在同行內遇有數字成一串等差的數，(如1, 3, 5, 7, …)且個數成單時，可把個數乘中間一數。

例 $24+26+28=26\times 3=78.$

4. 在同行內遇有數字成一串等差的數，且個數成雙時，任去一端的數，依前法計算，於其結果再加上所去的數。

例 $35+40+45+50=40\times 3+50=170.$

習 題 一 二

用速加法求下列各題的結果：

1. $495+380=?$
2. $3658+1997=?$

3. $38785 + 9997 = ?$
4. $564 + 296 = ?$
5. $790 + 480 = ?$
6. $536 + 539 = ?$
7. $9999 + 9998 + 9996 + 2 + 1 + 4 + 60 = ?$
8. $1001 + 960 + 950 + 999 + 40 = ?$
9. $11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 = ?$
10. $2748 + 3812 + 5432 + 1946 = ?$

34. 減法速算

(1) 加適當數於減數,於結果修正。

例 $7238 - 992 = 7238 - 1000 + 8 = 6238 + 8 = 6246.$

(2) 加適當數於被減數,於結果修正。

例 $652 - 456 = 656 - 456 - 4 = 200 - 4 = 196.$

(3) 適當分解減數。

例 $7654 - 5658 = 7654 - 5654 - 4 = 2000 - 4 = 1996.$

(4) 意大利法。

求以若何的一位數,加于減數的各位,方等于被減數的相當位或相當位加10

例

$$\begin{array}{r} 7654 \\ -783 \\ \hline 6781 \end{array}$$

$$3+1=4, 8+8=16, 1+7+7=15, 1+6=7.$$

習 題 一 三

用速算法求下列各題的結果：

1. $1236-844=?$

2. $1453-783=?$

3. $8852-3856=?$

4. $38785-9997=?$

5. $9999-7681=?$

6. $5160-2192=?$

7. $78569-9998=?$

8. $5540-2548=?$

9. $3125-1732+4875-468=?$

10. $328+693-28+7+336+42+77-19=?$

35. 乘法速算

(1) 乘數是 10, 100, 1000 等只要照乘數有幾個 0, 就在被乘數右邊添

幾個 0。

例

$$25 \times 10 = 250$$

$$234 \times 100 = 23400$$

$$357 \times 1000 = 357000$$

(2) 乘數是幾十,幾百,幾千等,只要先用幾乘再照乘數有幾個 0,就在右邊添幾個 0。

例

$$35 \times 30 = 1050.$$

$$43 \times 500 = 21500$$

$$234 \times 2000 = 468000.$$

(3) 乘數比幾百,幾千略大的,只要先用幾百,幾千等乘,再加上所大的數乘被乘數的積。

例

$$42 \times 102 = 42 \times 100 + 42 \times 2 = 4200 + 84 = 4284$$

$$36 \times 3005 = 36 \times 3000 + 36 \times 5 = 108000 + 180$$

$$= 108180$$

(4) 乘數比幾百,幾千略小的,只要先用幾百,幾千等乘,再減去所小的數乘被乘數的積。

例

$$84 \times 99 = 84 \times 100 - 84 \times 1 = 8400 - 84 = 8316$$

$$57 \times 98 = 57 \times 400 - 57 \times 2 = 22800 - 114 = 22686,$$

(5) 乘數是 5 的, 只要先用 10 乘, 再用 2 除。

例 $42 \times 5 = 42 \times 10 \div 2 = 420 \div 2 = 210$

(6) 乘數是 25 的, 只要先用 100 乘, 再用 4 除。

例 $425 \times 25 = 425 \times 100 \div 4 = 42500 \div 4 = 10625$

(7) 乘數是 125 的, 只要先用 1000 乘, 再用 8 除。

例 $324 \times 125 = 324 \times 1000 \div 8 = 324000 \div 8 = 40500$

(8) 乘數是兩個或許多個一位因數的積, 只要用各因數連續去乘。

例 $2788 \times 56 = 2788 \times (7 \times 8) = 2788 \times 7 \times 8$
 $= 19516 \times 8 = 156128$

(9) 把兩個乘數適當乘除。

例 $25 \times 488 = (25 \times 4) \times (488 \div 4) = 100 \times 122$
 $= 12200$

(10) 乘數的一部是他部的倍數。

$$\begin{array}{r}
 \text{例} \qquad \qquad \qquad 5644 \\
 \qquad \qquad \qquad \times 62 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 11288 \\
 \qquad \qquad 33864 \\
 \hline
 \qquad \qquad 349928
 \end{array}$$

6 是 2 的 3 倍,故求 6 與 5644 的乘積時,就把 3 乘 2×5644 的積 11288.

$$\begin{array}{r}
 \qquad \qquad \qquad 3912 \\
 \qquad \qquad \qquad \times 287 \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 27384 \\
 \qquad 109536 \\
 \hline
 \qquad 1122744
 \end{array}$$

28 是 7 的 4 倍,故求 28 兩位與 3912 的乘積時,就把 4 乘 7×3912 的積 27384.

習 題 一 四

用速乘法求下列各題的結果:

1. $21 \times 68 = ?$
2. $72 \times 25 = ?$
3. $44 \times 96 = ?$
4. $71 \times 200 = ?$
5. $25 \times 201 = ?$

6. $24 \times 125 = ?$

7. $73 \times 999 = ?$

8. $47 \times 198 = ?$

9. $305 \times 35 = ?$

10. $782 \times 45 = ?$

11. $98765 \times 5 = ?$

12. $125 \times 228 = ?$

13. $407389 \times 549 = ?$

14. $795412 \times 357 = ?$

15. $8111 \times 25 \times 9 \times 2 \times 4 \times 5 = ?$

36. 除法速算

(1) 除數是 10, 100, 1000 等只要照除數有幾個 0, 就把被除數個位移左幾位, 移剩的數, 就是剩餘。

例

$$5800 \div 10 = 580$$

$$5800 \div 100 = 58$$

$$5800 \div 1000 = 5 \text{ 餘 } 800$$

(2) 除數是幾十, 幾百, 幾千等, 只要先用幾除, 再照除數的 0 數, 把被除數的個位移左。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad 9000 \div 30 &= 9000 \div 10 = 300 \\ 9000 \div 300 &= 9000 \div 100 = 30 \\ 9000 \div 3000 &= 9000 \div 1000 = 3 \end{aligned}$$

(3) 除數是 5 的, 只要先用 2 乘, 再用 10 除。

$$\text{例} \quad 235 \div 5 = 235 \times 2 \div 10 = 470 \div 10 = 47.$$

(4) 除數是 25 的, 只要先用 4 乘, 再用 100 除。

$$\text{例} \quad 825 \div 25 = 825 \times 4 \div 100 = 3300 \div 100 = 33.$$

(5) 除數是 125 的, 只要先用 8 乘, 再用 1000 除。

$$\text{例} \quad 8500 \div 125 = 8500 \times 8 \div 1000 = 68000 \div 1000 = 68.$$

(6) 除數是兩個或許多個一位因數的積, 只要用各因數連續去除。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad 6615 \div 49 &= 6615 \div 7 \div 7 = 945 \div 7 = 135 \\ 21315 \div 105 &= 21315 \div 5 \div 3 \div 7 = 4263 \div 3 \div 7 \\ &= 1421 \div 7 = 203 \end{aligned}$$

(7) 被除數除數各除以同數。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad 19833 \div 33 &= (19833 \div 3) \div (33 \div 3) = 6611 \div 11 \\ &= 601 \end{aligned}$$

(8) 被除數除數末位都是 0. 可互相消去不用。

例 $54000 \div 50 = 5400 \div 5 = 1080$.

習 題 一 五

用速除法計算下列各式的結果：

1. $7562 \div 10 = ?$
2. $8125 \div 25 = ?$
3. $3786 \div 100 = ?$
4. $5325 \div 5 = ?$
5. $6330 \div 30 = ?$
6. $5673 \div 54 = ?$
7. $4785 \div 36 = ?$
8. $2640 \div 165 = ?$
9. $2875 \div 125 = ?$
10. $27036 \div 36 = ?$

第四章

整數應用題

37. 平均問題

例一. 某學生學期考試各科分數國文80分,英文85分,數學86分,自然78分,社會82分,公民89分,勞作70分,體育78分,問該生總平均成績多少?

解 把各科分數的總和求出,再用科目數(就是8)去除,就得總平均分數.

$$(80+85+86+78+82+89+70+78)\div 8=648\div 8=81.$$

答 該生總平均成績得81分.

例二. 上茶3斤,每斤8角;中茶5斤,每斤6角;下茶2斤,每斤4角;三種混和後,每斤的平均價是多少?

解 把茶的總價求出,再用斤數去除,就得平均價.

$$(80\times 3+60\times 5+40\times 2)\div (3+5+2)=$$
$$(240+300+80)\div 10=620\div 10=62.$$

答 每斤的平均價是 6 角 2 分。

習 題 一 六

1. 某校學生,分兩處旅行,到第一處去的有 45 人;共用 28 元 7 角,到第二處去的有 25 人,共用 38 元 5 角,問平均每人用了多少錢?
2. 一火車越過某山,上山時的速度為每小時 30 里,下山時為每小時 50 里,今上山費 3 小時,下山費 2 小時,問火車每小時平均速度多少里?
3. 某小學校檢查體格,男生 130 人,女生 120 人,其男生體重,平均一人為 18 公斤,男女全部體重平均為 17.52 公斤,問女生體重平均多少?
4. 上等酒 4 斤,每斤 3 角;中等酒 3 斤,每斤 2 角;下等酒 8 斤,每斤 1 角,混合出售,一共賺了 4 角,問每斤售價多少?
5. 某人第一個月用銀 364 元;第二個月用銀 487 元;第三個月用銀 508 元,問每月

平均用銀多少?

6. 童子10人,14歲的5人,16歲的2人,19歲的2人,10歲的1人,求這10人的平均年齡。
7. 甲乙丙三人競走,甲3小時行36里,乙2小時行18里,丙5小時行70里,求這三人的平均速度。
8. 新光電氣公司,第一次購煤45噸,計洋950元;第二次購煤33噸,計洋665元;第三次購煤72噸,計洋1635元,求煤每噸的平均價。
9. 某校畢業生36名紀念照相,各人一張,并校中留存一張,合為37張,這照相的定價,一組(三張)4元8角;外加印一張,添4角,照相費統由學生負擔,問每人應派多少?
10. 我國最近十年內輸入同輸出額如下表,求每年平均輸入輸出額:

年 度	輸入(關平銀千兩)	輸出(關平銀千兩)
1919	646 998	630 809
1920	762 250	541 631
1921	906 122	601 256
1922	945 050	654 892
1923	923 403	752 917
1924	1,018 211	771 784
1925	947 865	776 353
1926	1,124 221	864 295
1927	1,012 932	918 620
1928	1,150,720	884 668

38. 和差問題

例： 設有大小二數，他們的和爲108，差爲62，問二數各多少？

解 二數的差爲62，那末

$$\text{小數} + 62 = \text{大數}$$

或 $\text{大數} - 62 = \text{小數}$

但 $\text{大數} + \text{小數} = 108$

故 $\text{小數} + 62 + \text{小數} = 108$

即 $2\text{倍小數} + 62 = 108$

即 $2\text{倍小數} = 108 - 62$

故 $\text{小數} = (108 - 62) \div 2 = 23$

又 $\text{大數} + \text{大數} - 62 = 108,$

即 $\text{二倍大數} - 62 = 108,$

即 $\text{二倍大數} = 108 + 62,$

故 $\text{大數} = (108 + 62) \div 2 = 85.$

由是得和差問題的公式如下:

(1) $\text{大量} = (\text{和} + \text{差}) \div 2$

(2) $\text{小量} = (\text{和} - \text{差}) \div 2$

例一. 甲乙二人,分銀87元,甲比乙多得13元,問二人各得多少?

解 $(87 + 13) \div 2 = 50$

$(87 - 13) \div 2 = 37$

答 甲得銀50元,乙得銀37元。

例二. 一船順流航行的速度,是每小時28里,逆流航行的速度,是每小時16里,求這船在靜水內航行的速度,和水流的速度。

解 順流速度 = 船的速度 + 流的速度。

逆流速度 = 船的速度 - 流的速度。

$(28 + 16) \div 2 = 22$

$(28 - 16) \div 2 = 6$

答 船在靜水內的速度是每小時22里,水流

的速度是每小時 6 里。

習 題 一 七

1. 兄弟二人,分析家產 5324 元,兄多得 624 元,問二人各得多少?
2. 大小二數的和是 61,差是 7,求二數。
3. 兄比弟長 3 歲,兩人年齡的和為 35 歲,問兩人年齡各多少?
4. 米麥各 3 石,合價 105 元,各二石價值的差是 3 元,問米麥每石各價多少?
5. 書上下兩冊,合價 1 元 6 角,但上册比下冊貴 2 角,問各價多少?
6. 一人把財產 38000 元,分給二子,已知長子比次子多得 10000 元,問二子各得多少?
7. 甲乙二人在同地同時出發,甲往東,乙往西,5 分鐘後相隔 185 步;倘乙也往東,8 分鐘後,甲在乙前面 40 步,甲乙每分鐘各走幾步?
8. 甲乙二商人共有銀 6327 元;若甲虧本

- 2750 元,乙獲利 1577 元,那末二人所有的銀相等,求二人原有的銀數。
9. 甲乙二人同時同地出發,向同方向進,3 小時後,甲多行 1200 公尺,向相反方向進,2 小時後相隔 16800 公尺,求二人的速度。
10. 一船行於河中,逆流而上,二點半鐘行三里,順流而下,一點鐘行三里,求這船在靜水中的速度,及河流的速度。

3). 連續數問題

例一. 4 個連續數的和是 18,求最小的數。

解 連續數是遞次加 1 的數,倘把最小的作為第一數,那末第二第三第四諸數,就比第一數多 1, 2, 3, 所以 4 個連續數的和,就等於 4 個最小數加上 $(1+2+3)=6$ 。

$$\{18 - (1+2+3)\} \div 4 = (18-6) \div 4 = 12 \div 4 = 3$$

答 最小數是 3。

例二. 兄弟三人,年歲的和是 45,各人挨次小一歲,求各人的年歲。

解 次兄比弟長 1 歲,長兄比弟長 2 歲,兩兄共

比弟長 3 歲,所以 $45 - 3 = 42$ 歲,是弟年的 3 倍,

$$(45 - 3) \div 3 = 42 \div 3 = 14$$

$$14 + 1 = 15$$

$$14 + 2 = 16$$

答 弟年 14 歲,次兄年 15 歲,長兄年 16 歲.

公式:

(1) 普通的:

$$\text{連續數和} = \frac{\text{個數}(\text{首數} + \text{末數})}{2}$$

$$\text{首數} = \frac{2 \times \text{連續數和}}{\text{個數}} - \text{末數}$$

$$\text{末數} = \frac{2 \times \text{連續數和}}{\text{個數}} - \text{首數}$$

$$\text{個數} = \text{末數} - (\text{首數} - 1)$$

(2) 從 1 起首的連續數和:

(1, 2, 3, 4, ……)

$$\text{連續數和} = \frac{\text{個數} \times (\text{個數} + 1)}{2}$$

(3) 連續奇數的總和:

(1, 3, 5, 7, ……)

$$\text{連續數和} = (\text{個數})^2$$

(4) 連續偶數的總和:

(2, 4, 6, 8, ……)

連續數和

$$= \text{一個數} \times (\text{個數} + 1)$$

習 題 一 八

1. 4 個連續數的和是 74, 求各數.
2. 5 個連續數的和是 30, 求最大數.
3. 5 個連續雙數的和是 60, 求各數.
4. 4 個連續雙數的和是 44, 求最小數.
5. 相鄰三個整數的和是 186, 求這三數.
6. 從 1 起, 連續九十九個數, 總和是多少?
7. 從 2 起到 100 各連續偶數的總和, 比從 1 起到 81 各連續奇數的總和差多少?
8. 求 $1+3+5+7+9+11$ 的和.
9. 求 $3+4+5+6+7+8+9+10+11$ 的和.
10. 求 $58+54+50+46+42+38+34$ 的和.

10. 定和問題

例一. 兄有銀 68 元, 弟有銀 46 元, 要使兩人的銀數相等, 兄須給弟多少?

解 因兩人所有銀的和是一定, 所以在兩人銀數相等時, 各人所有的銀數是

$$(68+46)\div 2=57$$

$$68-57=11$$

答 兄須給弟 11 元。

例二. 大箕裝梨 67 只,小箕裝梨 23 只,要使大箕的梨數等於小箕的二倍,須勻給小箕多少?

解 兩箕梨數的和是一定,所以在在大箕梨數當小箕梨數 2 倍時,小箕所裝的梨數應是

$$(67+23)\div 3=30$$

$$30-23=7$$

答 大箕須勻給小箕 7 梨。

習 題 一 九

1. 甲有銀 253 元,乙有銀 179 元,問乙須給甲多少元,纔可使甲的金數等於乙的 5 倍。
2. 東倉有米 378 石,西倉有米 114 石,要使東倉石數是西倉石數的 2 倍,東倉須分給西倉多少?
3. 橘子三籃,第一籃盛 57 個,第二籃盛 41 個,第三籃盛 13 個,問從第一,第二兩籃,各勻

- 多少個至第三籃,才可使三籃橘數相等。
4. 大盒裝筆 85 枝,小盒裝筆 15 枝,要使大盒的筆數是小盒的 3 倍,大盒須勻給小盒幾枝?
 5. 一學校在甲乙二村中間,已知距甲村 17 里,距乙村 25 里,現在欲移于正中的地方,須向乙村移幾里?
 6. 甲有銀 182 元,乙有銀 94 元,問甲須給乙多少元,二人銀數就相等。
 7. 兄有田 82 畝,弟有田 48 畝,不均的數,兄須補給弟 408 元,求田每畝的價值。
 8. 某地主有一子一女,嫁女兒的時候,曾給與田 15 畝作為粧奩,餘下田 65 畝盡給他的兒子,後來按新法令,男女應平分家產,於是由兒子另補償 1200 元給女兒,問每畝田值價多少?
 9. 甲乙兩水槽,甲槽有水 1800 石,乙槽有水 240 石,甲每分鐘流入乙 88 石,問幾分鐘後,甲槽水量是乙槽水量的 2 倍。
 10. 甲乙丙三人旅行,甲出車費 6 元 8 角,乙

出雜費 3 元 7 角,丙出膳宿費 6 元 3 角,
現在要平均分配,三人應如何清算?

41. 定差問題

例一. 甲有銀 1500 元,乙有銀 970 元,兩人各出等
量資本合營一業,甲所餘是乙所餘的 2 倍,問二
人各出銀多少?

解 出資前二人所有銀的差是 $1500 - 970 = 530$
元

這差數於出資後並無變化,所以出資後,乙
所餘是 $530 \div (2 - 1) = 530$ 元

所以出資額是 $970 - 530 = 440$

答 二人各出資 440 元。

例二. 父年 35 歲,子年 7 歲,問子幾歲時,父的年齡,
恰是子的 3 倍

解 父的歲數恆比子大 $35 - 7 = 28$.

當父的歲數是子的 3 倍時,父所大的歲數
是子歲數的 $3 - 1 = 2$ 倍

在這時 2 倍子的歲數是 28

所以 1 倍子的歲數是 $28 \div 2 = 14$

答 子 14 歲時,父年是子年的 3 倍。

習 題 二 ○

1. 甲乙二人,甲所有銀數是乙所有銀數的3倍,兩人所有銀數的差是4元8角,求各人所有銀的元數。
2. 兄有銀5元5角,弟有銀1元3角,兩人各收等量的利,那末兄所有是弟的3倍,問二人各收利多少?
3. 東倉有米1500石,西倉有米1800石,現在各倉每日運出25石,問幾日後,一倉所餘的石數是他倉所餘的石數的3倍?
4. 父30歲,子6歲,問幾年後父年是子年的3倍?
5. 男子每日工資是女子每日工資的3倍,但知男女工資的差是6角,求各人的工資。
6. 父年41歲,長子12歲,次子9歲,幼子6歲,問幾年後父年恰等于三子年齡的和?
7. 甲有銀565元,乙有銀155元,二人買相同的書一部,甲又用去20元,那末甲所餘

銀是乙所餘的 4 倍,求書價,

8. 父年比子年大 27 歲,5 年前,父年是子年的 4 倍,求父子現年各多少?
9. 甲有銀 15000 元,乙有銀 8500 元,各把同數的銀存入銀行後,甲所有恰是乙的 6 倍,問二人各存入銀行多少?
10. 父年 44 歲,子年 8 歲,問幾年後父年是子年的 4 倍?

42. 相遇問題

公式:

$$(1) \text{ 距離} \div \text{時間} = \text{速度}$$

$$(2) \text{ 距離} \div \text{速度} = \text{時間}$$

$$(3) \text{ 速度} \times \text{時間} = \text{距離}$$

例一. 二村相隔 51 里,甲乙二人,各從一村同時相對走來,甲的速度是每小時 8 里,乙的速度是每小時 9 里,問幾小時後二人在路上相遇?

解 二人相對走去,所以相近的速度更大,這就是二人速度的和,即每小時

$$8+9=17 \text{ 里}$$

$$51 \div 17 = 3$$

答 二人相遇的時候,在動身後 3 小時。

例二. 甲乙二人從相隔 266 里的兩地走來,甲走 4 天,乙走 5 天相遇,甲比乙每天多走 8 里,問二人每天各走幾里?

解 甲 4 天比乙多走里數是 $8 \times 4 = 32$ 里

$(266 - 32) \div (4 + 5) = 26$ 是乙每天所走里數

$26 + 8 = 34$ 是甲每天所走里數

答 甲每天走 34 里,乙每天走 26 里。

習 題 二 一

1. 兩地相距 320 里,甲乙二人同時從兩地相對走來,甲每天走 19 里,經 10 日在中途遇乙,問乙每天走幾里?
2. 甲船比乙船每小時多走 3 里,兩船從相隔 329 里的兩地對面走來,走了 7 小時相遇,問二船每小時各走幾里?
3. 甲乙二輪相距 506 里,同時相對走來,甲輪每小時走 21 里,乙輪每小時走 25 里,問兩輪隔幾小時,可以相會?
4. 東西二鎮相距 144 里,甲從東到西要走

- 12日,乙從西到東要走9日,二人同時出發,問幾日後相會?
5. 工人兩隊,合築長250丈的堤岸,甲隊工人從左端築起每天築28丈;乙隊工人從右端築起每天築22丈,問這堤在離左端幾丈的地方合攏?
6. 甲乙二地相距214里,張君從甲地到乙地,每天走13里;趙君從乙地到甲地,每天走9里;二人同時出發,問十二日後二人的距離怎樣?
7. 甲乙兩地相距324里,一汽車以每時16里的平均速度,從甲出發,到乙即返;同時另一汽車,以每時20里的平均速度,從乙出發,到甲即返,問出發後隔幾點鐘二車於歸途相遇?
8. 甲乙二人同時由兩地相向走來,甲每天走50里,乙每天走60里,經5天二人相遇後,復隔70里,問兩地相隔幾里?
9. 長沙岳州相隔350里,甲從長沙往岳州,每天走80里,乙于次日往岳州,每天走44

里,甲到岳州後即回長沙,問二人相遇的地方距岳州多少里?

10. 二地相隔 120 步,甲乙二人同時相對走來,經 4 分鐘相遇,若各人每分的速加 5 步,那末相遇的地方比前差 3 步,求各人每分鐘的速度?

43. 追及問題

例一. 狗一分鐘可走 1732 尺,兔子一分鐘可走 720 尺,狗在兔子後面 7084 尺,追兔子,須隔幾分鐘才能追及?

解 狗和兔子相隔 7084 尺,即兔子比狗先走 7084 尺,也就是狗須追上 7084 尺,現在狗每分鐘可追兔子 $1732 - 720 = 1012$ 尺,那末狗和兔子各走一分鐘,相隔的路就少一個 1012 尺,所以

$$7084 \div 1012 = 7$$

答 7 分鐘後狗能追及兔子。

例二. 甲乙二人從同地同向旅行,甲於乙出發後 5 天而始出發,乙每天走路相同,甲第一天走 15 里,嗣後每天加 2 里,在出發後 10 天追及乙,問乙每天走路多少?

解 甲10天內所走的路爲

$$15+17+19+21+23+25+27+29+31+33 \\ =240 \text{ 里}$$

乙15天內所走的路和甲相等,所以

$$240 \div 15 = 16$$

答 乙每天走路16里。

習 題 二 二

1. 甲汽船每小時走36里,乙汽船每小時走28里,二船在同地同時相反出發,3小時後,甲船因事反追乙船,問須幾小時可以追到?
2. 兄每月存銀24元,5個月以後,弟也按月存34元,問隔多少時後,兄弟二人的存銀相等?
3. 甲車每時走48里,先開18里後,乙車隨後追上,6小時追及,求乙車的速度。
4. 貨車從上海開往南京,每小時行60里,過了30分鐘,有一快車也從上海開往南京,不過每小時他比貨車快20里,問隔多少

時快車可以追上貨車?

5. 甲船每小時走 6 里,乙船每小時走 2 里,同時由同地相背而行,7 小時後,甲因事反追乙,問需多少時追及?
6. 甲汽船每小時走 12 海里,乙汽船每小時走 14 海里,現在甲在乙前 6 海里,同時同向開行,問幾小時後乙追及甲?
7. 甲每天走 15 里,乙每天走 12 里,現在乙先走 48 里,甲追上去,問要多少天可以追到?
8. 長 300 里的道路,甲 25 天可走到,乙 20 天可走到,現在甲從其一端出發,4 天後,乙再出發追甲,問乙走多少里可追及甲?
9. 甲每小時走 15 里,乙每小時走 11 里,兩人同時從同地到某處,甲走 12 里,因有物忘却,回到原地,帶了再走,後和乙同時到某處,問兩地相隔幾里?
10. 甲乙二輪船相距 468 里,甲船每小時走 22 里,乙船每小時走 28 里,二船同時由二地同向出發,問幾時乙追及甲?

44. 盈不足問題

例一. 童子分桃,每人 3 個,多 2 個,每人 5 個,少 6 個,問童子幾人,桃幾個?

解 每人 5 個,比先時要多 $5-3=2$ 個

第二次添 6 個,連前多 2 個,恰可分盡,所以每人多分 2 個,須添桃 $6+2=8$ 個,那麼人數是 $8 \div 2=4$ 桃數是 $4 \times 3+2=14$.

答 童子 4 人,桃 14 個.

例二. 銀元若干元,分給若干人,每人分 12 元,不足 17 元;若 1 人分 9 元,其餘各得 10 元,恰好分盡,求銀元數及人數?

解 每人分 12 元,不足 17 元;每人分 9 元,其餘各得 10 元,恰好分盡,等於每人分 10 元,不足 1 元.

$$(17-1) \div (12-10) = 16 \div 2 = 8$$

$$12 \times 8 - 17 = 79$$

答 人數 8 人,銀元 79 元.

習 題 二 三

1. 把柿子分給兒童,每人 8 個,不足 3 個;每人 7 個,還餘 2 個,求兒童數和柿子數。
2. 蜜柑裝筭,每筭 5 個,多 5 個;每筭 7 個,少

7 個,問蜜柑有多少?

3. 一人抄書一節,每行 18 字,一頁多 16 字;每行 20 字,一頁少 16 字,問一頁有幾行?共有幾字?
4. 把糖果分給兒童,每人 5 粒,多 3 粒;若其中兩人各給 4 粒,餘各給 6 粒,恰好分盡,求兒童數和糖果數。
5. 把橘子分給兒童,其中 3 人,每人得 4 個,其餘各得 3 個,還剩下 9 個;若其中一人得 3 個,其餘各得 5 個,恰好分完,求兒童數和橘數。
6. 分水菓給小兒,每人 5 個,還餘 9 個;每人 8 個,不足 18 個,求水菓數及兒童數。
7. 若干人宴會,每人出會費 1 元 5 角,還少 1 元;倘每人出 1 元 6 角,可餘 2 角,問人數多少?
8. 某學校分配學生宿舍,每室 3 人,還餘 20 人;每室 5 人,還餘 2 室,求學生數及宿舍數。
9. 某校分配學生,每班 49 人,那麼有 42 個空

位,若每班 45 人,那麼多 30 人,求班數和人數。

10. 有人預定資本,招股經商,但知每股 70 元恰足預定資本額,每股 40 元,不足 1500 元。問股數資本各多少?

45. 雞兔問題

例一. 雞兔合籠,共有十三個頭,四十二隻脚,問雞兔各幾只?

解 雞 2 隻脚,兔 4 隻脚,所以一雞的脚數,比一兔的脚數少 $4-2=2$ 。

倘這 13 頭都是兔,那麼脚數應是 $13 \times 4=52$ 。

但題中的脚數是 42 相差是 $52-42=10$ 。

把一兔換一雞,就少脚 $4-2=2$ 。

現在要少去脚 10 只,須要換 $10 \div 2=5$ 次,

就是雞有 5 隻。

兔有 $13-5=8$ 隻。

答 雞數 5 兔數 8。

例二. 雞狗共 21 隻,狗的足數是雞的足數的 5 倍,問雞狗各幾隻?

解 一雞 2 足,一狗 4 足,現在要狗的足數為雞

的 5 倍,那麼 5 隻狗的足數,就 5 倍於 2 隻雞的足數,就是雞狗 7 隻中,必為 5 狗 2 雞,

$$\text{因 } 21 \div (5+2)=3,$$

所以狗數為 $5 \times 3=15$, 雞數為 $2 \times 3=6$

答 狗數 15 雞數 6.

習 題 二 四

1. 龜鶴合計 16 隻,共有脚 46 只,問龜鶴各幾只?
2. 雞兔同籠,頭數 18,脚數 46,問雞兔各幾只?
3. 某人把銀 269 元,換成 5 元鈔票同 2 元鈔票,共 100 張,問 5 元票,同 2 元票各幾張?
4. 某人出銀 280 元,買綢和緞共 20 丈,綢每丈價 8 元,緞每丈價 18 元,問綢緞各幾丈?
5. 某人有 2 角銀圓和 5 分銅圓,共十一個,計值 1 元 6 角,問銀圓銅圓各幾個?
6. 僧 100 人,食饅頭 100 個,長僧一人食 4 個,幼僧 4 人合食 1 個,問長僧幼僧各幾人?

7. 有九頭鳥和鷄,共有脚50只,頭129個,問九頭鳥和鷄各幾只?
8. 某工人搬運玻璃器100個,運到1個得銀6分;破壞1個,賠銀2角,後來共得銀4元7角,問破壞幾個?
9. 鷄兔共15隻,兔的足數比鷄的足數多18隻,問鷄兔各幾只?
10. 某人買鷄蛋二次,第一次每個價6分5厘,第二次每個價高5厘,共買100個,平均每個價6分7厘,問二次各買多少個?

46. 植竿問題

例一. 路長60丈,兩旁種柳,每隔5丈種一棵,一端起至他端止,問應種柳多少?

解 先除去一端的一棵,計算其餘的棵數,然後再求總數.

$$(60 \div 5) + 1 = 13 \quad 13 \times 2 = 26$$

棵數 = 段數 + 1



答 兩旁共種26棵。

例二. 方地一塊,每邊長 36 丈,每隔 3 丈種一樹,問每邊有多少樹?周圍有多少樹?

解. 每邊分成 $36 \div 3 = 12$ 段

每邊應有樹數 $12 + 1 = 13$

周圍應有樹數 $(36 \times 4) \div 3 = 48$

答. 每邊有 13 棵樹,周圍有 48 棵樹。

公式:

(1) 路長 = 每段距離 \times 段數

(2) 株數 = 段數 + 1

(3) 段數 = 株數 - 1

習 題 二 五

1. 園地的四周,有 138 尺長的籬笆,現在要拆去籬笆,換種楊柳,每隔 3 尺種一棵,問可以種楊柳幾棵?
2. 兩枝電桿相隔 345 尺,如要在中間再立 23 枝,離開一樣遠,問每枝應該離開幾尺?
3. 路燈每隔 3 丈裝一盞,這路連兩端共有 98 盞燈,問路長幾丈?
4. 四角形的地,四邊長 24 丈 32 丈 18 丈 45 丈,

- 要在四角四邊種樹,每隔 2 尺種一棵,可以種幾棵?
5. 長 180 丈的堤上種槐樹 37 棵,要離開一樣遠,問兩樹間的距離多少?
 6. 某路長 24 里,路旁每隔 2 里立電桿一枝,兩桿間又種梧桐 2 棵,楊柳 1 棵,問電桿和樹各多少?
 7. 某路每隔 1 丈 6 尺有一電桿,連兩端共有 64 枝;現在換立 73 枝新桿,問相鄰兩桿應隔多少?
 8. 路長 75 丈,兩旁種柳,從一端起至他端止,兩棵間的距離要相等,共種 62 棵,問二棵間的距離多少?
 9. 甲乙二村相隔 45 里,路中立亭,每隔 5 里一座,問亭數多少?
 10. 兵士 500 名,排成四列縱隊,前後兵士間的距離是 2 尺,問全隊長多少?

47. 方陣問題

- 例一. 許多兵排成一個空心方陣,外層每邊 11 人,共 3 層,問兵數多少?

解 左圖代表每邊11人的
實心方陣,從圖可見每
進一層,每邊的人數就
少2人。
3層的空心方陣,只要

把第三層以內小方陣抽去即得,

所抽去的小方陣每邊人數是 $11 - 3 \times 2 = 5$

所以抽去的人數是 $5 \times 5 = 25$ 人

假如不抽去,應有 $11 \times 11 = 121$ 人

所以實有 $121 - 25 = 96$ 人

答 兵數96人。

例二. 許多兵排成一個方陣,多49人,縱橫各添一層,不夠38人,問兵數多少

解 方陣縱橫各添一層,兵數須增加

$$49 + 38 = 87 \text{ 人}$$

那麼最外一層每邊的人數為

$$(87 + 1) \div 2 = 44 \text{ 人}$$

所以 $44 \times 44 - 38 = 1898$ 人

答 兵數為1898人。

習題二六

1. 許多兵排成一個空心方陣,外層每邊 10 人,共 4 層,問兵數多少?
2. 許多兵排成一個長方陣,共有 15 排,每排 30 人,問兵數多少?
3. 許多兵排成一個空心方陣,外層每邊 17 人,共 5 層,問兵數多少?
4. 兵 1296 人,排成一個空心方陣,共 12 層,問外邊每邊的人數多少?
5. 有一個每邊 14 人的空心方陣,裏面一層每邊 5 人,問人數多少?
6. 許多兵排成一個空心方陣,內層每邊 5 人,共 5 層,問兵數多少?
7. 許多兵排成一個空心方陣,共 6 層,只知外層共 92 人,問兵數多少?
8. 許多兵先列爲方陣,後改成長方陣,就減去 12 列,分加到其餘各列上去,每列恰添 30 人,問兵數多少?

48. 還原問題

例一. 某數減 3, 其餘以 3 除, 再加 3 於其商而乘 3, 得 21, 求某數.

解 3 倍得 21 的數是 7,

$7-3=4$ 是 3 除餘數的商數

$4 \times 3=12$ 是某數減 3 的餘數

所以某數是 $12+3=15$.

答 某數是 15.

例二 某人有桃若干個, 以其半又 1 個給甲, 把餘數的半又 2 個給乙, 還餘 3 個, 問原有桃多少?

解 把餘數的半又 2 個給乙, 還餘 3 個,

那麼餘數的半為 $2+3=5$ 個,

餘數為 $5 \times 2=10$ 個,

原數的半為 $10+1=11$ 個,

所以原數為 $11 \times 2=22$ 個.

答 原有桃 22 個.

習 題 二 七

1. 某數用 15 乘, 用 21 除其積, 再加 135, 得 155, 求某數.
2. 某數用 2 除, 從其商減 5, 再 3 倍其差, 更

- 加以 8, 得 20 求某數。
3. 從 450 減某數, 以 5 除其差, 加 12 於其商, 再以 7 除其和得 4, 求某數。
 4. 某數用 5 除, 所得的商數加 7, 用 5 乘, 再從所得的積減 35, 得數 100, 求某數。
 5. 某數用 4 除, 加 12 於其商, 5 倍後減去 3, 還餘 57, 求某數。
 6. 在某數同 25 的和內, 減去 52, 餘數用 21 乘, 再用 7 除所得的積, 商數是 123 求某數。
 7. 某數加 26, 從他們的和減 37, 再用 17 乘牠們的差, 更用 48 除牠們的積得 50, 餘 14, 求某數。
 8. 白糖 12 斤的價, 等於酒 2 斤的價; 酒 6 斤的價, 等於油 2 斤的價, 已知油 1 斤的價是 7 角 2 分, 問白糖 1 斤的價多少?
 9. 某人把果物若干個, 分給甲乙二人, 甲比總數的半多 1, 乙比其餘數的半多 2, 還餘 3 個, 問果物總數多少?
 10. 一人把鉛筆若干枝的半數又加一枝給長子, 把其殘數的半加二枝給次子, 還餘

三枝,求鉛筆的總數。

49. 歸一算法

例一. 有一工程,6人作,16日可以成功;現在4人作,問幾日可以成功?

解 6人作,須費16日,
 1人作須費 $16 \times 6 = 96$ 日;
 所以4人作須費 $96 \div 4 = 24$ 日。

答 24日可以成功。

例二. 有齒數48的齒輪,3秒鐘迴轉240次,現在要做一5秒鐘迴轉800次的齒輪,與其啣接,問應有齒數多少?

解 3秒鐘迴轉240次就是1秒鐘迴轉80次
 那末一秒鐘迴轉的齒數是 $48 \times 80 = 3840$ 個
 5秒鐘迴轉800次,就是1秒鐘迴轉160次
 所以齒數是 $3840 \div 160 = 24$

答 應有齒數24。

習 題 二 八

1. 布14疋;每疋長6丈,共值銀84元,問21疋布,每疋長5丈,可值銀多少?

2. 馬 2 匹,飼養 5 月,需費用 60 元;馬 3 匹,飼養 11 月,需費用多少?
3. 有一工程 75 人做 18 日可以成功 10 日後,因事停工 2 日,現在要如期做成,每日應增加工人幾人?
4. 米 585 石,甲廠需 15 日碾完,乙廠需 13 日碾完,二廠同碾,幾日可以碾完?
5. 田 720 方丈,男子,女子,童子三人合耕,6 日可完,若女子獨耕要 16 日,童子獨耕,要 48 日,問男子獨耕要多少日?
6. 有一工程 12 人做 20 日可以成功,現在有比前大 4 倍的工程,要 12 日做成,問應添工人幾人?
7. 有一工程,工人 16 人,每日做 8 小時,9 日成功,若添工人 1 倍,要 3 日內成功,問每日應做幾小時?
8. 溝長 100 尺,闊 4 尺,深 9 尺,4 人同掘,6 日可以成功,現在有溝闊 5 尺,深 8 尺,10 人同掘,16 日成功,問這溝長多少?
9. 32 人做工,26 日的工資是 374 元 4 角,問 40

人做16日的工資應該多少

10. 文稿 450 頁,托人謄清,甲要 25 小時,乙要 30 小時,現在甲乙二人謄 9 小時後,其餘由甲獨謄,問還要多少時

50. 其他雜題

例一. 長 60 丈的火車,每秒走 66 丈,經過一長 402 丈的橋,從車頭進橋到車尾出橋,需時間多少?

解 車頭出橋,車身還在橋上,須至車尾出橋,纔可說全部通過,所以車頭所走的路應比橋長多 60 丈,就是加了車身的長。

$$(402+60)\div 66=7 \text{ 秒}$$

答 需時 7 秒。

例二. 有大小二數,大數的 3 倍與小數的 2 倍的和是 31;大數的 4 倍與小數的 5 倍的和是 53,問二數是多少

解 大數 3 倍,小數 2 倍;與大數 4 倍,小數 5 倍的和,合共大小二數的和的 7 倍,

$$\text{所以大小二數的和是 } (31+53)\div 7=12$$

從大數 3 倍,小數 2 倍的和減去大小二數和的 2 倍,就得大數 :

所以大數是 $31 - 24 = 7$

因此小數是 $12 - 7 = 5$

答 大數是 7, 小數是 5.

習 題 二 九

1. 把小麥若干石換每石 2 元 8 角的大麥, 其石數多 5, 若換每石 4 元的米, 其石數少 7, 求小麥的石數及每石的價.
2. 長 40 丈的火車, 全部通過 200 丈的橋, 需時 4 秒, 求車每秒的速度.
3. 有人見車頭入一 240 公尺深的山洞, 後歷 8 秒鐘, 車始完全入洞, 共經 20 秒鐘, 車又完全出洞, 問車每秒的速度多少? 車長多少?
4. 有海船距港 40 公里, 船底破損, 每 12 分鐘浸入海水 3.75 公噸, 這船若浸入海水 60 公噸, 就要沉沒; 若用每時汲出 12 公噸的唧筒汲水, 那末船可恰沈於港口, 求這船向港進行的速度.
5. 東倉存米 504 袋, 西倉存米 396 袋; 現在

- 從東倉每日取出 8 袋,西倉每日取出 12 袋,問幾日後東倉存米恰是西倉的 2 倍。
6. 現在兄年是弟年的 5 倍,5 年後是弟年的 3 倍,問二人現年各多少?
7. 把一根繩的二分之一,量一根長竿,餘 15 尺,若把這繩的三分之一去量,不足 8 尺,問繩和竿各長多少?
8. 有人從日出到午前十時,走 19 里 125 丈,從日末到午後九時,走 7 里 140 丈,問晝長多少時?
9. 甲乙兩數,甲多於乙 20,乙的 2 倍多於甲 48,問兩數是多少?
10. 甲乙二地相隔 360 里,某人從甲地出發,六日達到乙地,前 4 日步行,後 2 日乘人力車,同時乘馬返到原地,已知人力車速度每日比步行多 30 里,馬的速度比步行多 70 里,問某人費多少時可返甲地?

第五章

整數性質

51. 整數, 整除

用單位計算數量,如一人,一尺,一斤,……這一人,一尺,一斤是數量的單位,聚攏許多個一,所成的數叫整數.

例 $1, 2, 3, 4, 5 \dots$ 都是整數。

從一個整數,加上一,又得另外一個整數,所以整數有無窮個,從 1 起,逐次加一所得的各整數叫自然數.

從第一章到本章所討論的數,都是指的整數
兩個整數相除,恰能除盡,而其商又是整數的
叫整除.

例 $12 \div 3 = 4$

3 除 12 得整數 4 的商,就是 3 能整除 12.

52. 倍數及約數

甲數能整除乙數,甲數就是乙數的約數,同時乙數就是甲數的倍數.

例 35 是 5 或 7 的倍數

5 或 7 是 35 的約數

注意一. 無論何數,用 1 去除,必得本數;用本數去除,必得 1,所以無論何數,都可用 1 同他的本身做約數,也可以說無論何數,必是本數同 1 的倍數.

注意二. 一數的倍數,可以有無窮個,但是他的約數,是有限的.

53. 倍數及約數的定則

(1) 甲乙兩數都是丙數的倍數時,甲乙兩數的和或差也是丙數的倍數.又丙數是甲乙兩數的約數時,也是甲乙兩數的和或差的約數.

例 81 是 9 的 9 倍

54 是 9 的 6 倍

那末 $81+54$ 是 9 的 $9+6=15$ 倍

$81-54$ 是 9 的 $9-6=3$ 倍

所以 81,54 的和或差,也是 9 的倍數.

又 9 是 81 的約數

9 是 54 的約數

那末 9 是 $81+54$ 的約數。

9 是 $81-54$ 的約數。

所以 9 也是 81 和 54 的和或差的約數。

(2) 甲數是乙數的倍數時,甲數的倍數,也是乙數的倍數。又乙數是甲數的約數時也是甲數倍數的約數。

例 28 是 7 的倍數

那末 28 的 5 倍— 140 —也是 7 的倍數

又 7 是 28 的約數

那末 7 也是 28 的 5 倍— 140 —的約數。

54. 偶數及奇數

凡是 2 的倍數的數,叫偶數 (又叫雙數)

凡不是 2 的倍數的數,叫奇數 (又叫單數)

例 $1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots$ 是奇數。

$2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots$ 是偶數。

注意一. 假設 n 為整數,那末任何偶數可用 $2n$ 表示,任何奇數可用 $2n+1$ 表示。

注意二. 0 也是偶數中的一個。

習 題 三 〇

1. 8 的 7 倍及 5 倍,是什麼數,其和及差各是 8 的幾倍?
2. 7 的 5 倍及 8 倍,是什麼數,其和及差各是 7 的幾倍?
3. 7 的 6 倍是什麼數,他的 5 倍是 7 的幾倍?
4. 15 是什麼數,的倍數,15 的 7 倍是他的幾倍?
5. 分別下面的奇數或偶數:
248, 365, 742, 884, 851, 3485.
6. 下面的數,那個是別個的約數?那個是別個的倍數?
54, 18, 36, 6, 5, 3, 105, 35.
7. 把從 1 到 50 當中的偶數寫出來,他們的末一位數字怎樣?
8. 把從 1 到 50 當中的奇數寫出來,他們的末一位數字怎樣?
9. 說明奇數同奇數,偶數同偶數的和或差

都是偶數。

10. 說明奇數同偶數,偶數同奇數的和或差
都是奇數。

55. 因數

一數是幾個數(2個或多個)連乘的積,那
末這幾個數都是那一數的因數。

例 $18=3 \times 6=2 \times 9=3 \times 3 \times 2$

所以 2, 3, 6, 9, 都是 18 的因數。

本章所論,都是整數,所謂因數也都是整因數。
因數和約數實際是一樣的。

56. 因數的觀察

有幾個簡單整數的因數,很容易觀察出來,現
在舉例如下:

(一) 2 凡數的末位是 0 或偶
數時,這數便有因數 2。

例 $578=2 \times 289, 360=2 \times 180.$

(二) 5 凡數的末位是 0 或 5
時,這數便有因數 5。

例 $835=5 \times 167, 3630=5 \times 726.$

(三) 4 凡數的末二位是 0 或

4 的倍數時,這數便有因數 4。

例 $24500=4 \times 6125, 27532=4 \times 6883,$

(四) 25 凡數的末二位是 0 或 25 的倍數時,這數便有因數 25。

例 $3700=100 \times 37=4 \times 25 \times 37$

$=25$ 的倍數的倍數 $=25$ 的倍數。

$$4675=4600+75=46 \times 100+75$$

$$=46 \times 4 \times 25+3 \times 25$$

$=25$ 的倍數 $+25$ 的倍數 $=25$ 的倍數。

(五) 8 凡數的末三位是 0, 或 8 的倍數時,這數便有因數 8。

例 $3000=1000 \times 3=8 \times 125 \times 3$

$=8$ 的倍數的倍數 $=8$ 的倍數。

$$3232=3000+232=3 \times 8 \times 125+8 \times 29$$

$=8$ 的倍數 $+8$ 的倍數 $=8$ 的倍數。

(六) 125 凡數的末三位是 0, 或 125 的倍數時,這數便有因數 125。

例 $6000=1000 \times 6=125 \times 8 \times 6$

$=125$ 的倍數的倍數 $=125$ 的倍數。

$$3750=3000+750=3 \times 8 \times 125+6 \times 125$$

$$=125 \text{ 的倍數} + 125 \text{ 的倍數} = 125 \text{ 的倍數}$$

(七) 10, 100, 1000 等 凡數的末一位是 0, 這數便有因數 10 末二位是 0, 這數便有因數 100 末三位是 0, 這數便有因數 1000, 餘類推。

例 $50 = 10 \times 5 = 10$ 的倍數。

$300 = 100 \times 3 = 100$ 的倍數。

$7000 = 1000 \times 7 = 1000$ 的倍數。

(八) 9 凡數的各位數字的和, 是 9 的倍數時, 這數便有因數 9。

例 7533 的各位數字的和, 是 $7+5+3+3=18$, 18 是 9 的倍數, 所以 7533 是 9 的倍數。

$$\text{因 } 7533 = 7000 + 500 + 30 + 3$$

$$= 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 3 \times 10 + 3$$

$$= 7 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 3 \times (9 + 1) + 3$$

$$= (7 \times 999 + 7) + (5 \times 99 + 5) + (3 \times 9 + 3) + 3$$

$$= (7 \times 999 + 5 \times 99 + 3 \times 9) + (7 + 5 + 3 + 3)$$

$$= 9 \text{ 的倍數} + (7 + 5 + 3 + 3)。$$

(九) 3 凡數的各位數字的和, 是 3 的倍數時, 這數便有因數 3。

例 4575 的各位數字的和是 $4+5+7+5=21$, 21 是 3 的倍數, 所以 4575 是 3 的倍數。

因 9 是 3 的倍數, 所以凡是 9 的倍數, 也就是 3 的倍數。

(十) 6 凡偶數的各位數字的和, 是 3 的倍數時, 這數便有因數 6。

例 312816 這數的末位數是偶數, 各位數字的和是 $3+1+2+8+1+6=21$, 21 是 3 的倍數, 所以 312816 是 6 的倍數。

(學者試說明他的理由)

(十一) 11 凡數中許多奇位數字的和同許多偶位數字的和相減, 倘所得的差, 是 0 或 11 的倍數時, 那麼這數必有因數 11。

例 81312 中, 奇位數字的和是 $8+3+2=13$

偶位數字的和是 $1+1=2$

$$13-2=11$$

所以 81312 是 11 的倍數。

因 $10=11-1$

$$100=11 \times 9 + 1$$

$$1000=11 \times 91-1$$

$$10000=11 \times 909+1$$

$$\text{所以 } 81312=80000+1000+300+10+2$$

$$=8 \times 10000+1000+3 \times 100+10+2$$

$$=8 \times (11 \times 909+1)+(11 \times 91-1)+3$$

$$\times (11 \times 9+1)+(11-1)+2$$

$$=(11 \text{ 的倍數}+8)+(11 \text{ 的倍數}-1)$$

$$+(11 \text{ 的倍數}+3)+(11 \text{ 的倍數}-1)+2$$

$$=11 \text{ 的倍數}+(8-1+3-1+2)$$

$$=11 \text{ 的倍數}+11$$

$$=11 \text{ 的倍數。}$$

57. 質數及合數

任何數必有兩個因數，一個是 1，一個就是本數，凡數除了 1 和本數外，沒有別個因數的叫質數。

例 2, 3, 5, 7, 11, 13 …………… 都是質數。

凡數除了 1 和本數外，還有別個因數的叫合數（或叫複數）

例 4, 6, 8, 9, 12, 15 …………… 都是合數。

58. 連乘積與冪數

三個或三個以上的因數接連乘出來的結果

叫做連乘積。例如：

$$3, 4, 5 \text{ 的連乘積便是 } 3 \times 4 \times 5 = 60$$

幾個相同因數的連乘積叫做冪，因數的個數叫做冪的次數。例如：

$$5 \times 5 \text{ 爲 } 5 \text{ 的二次冪}$$

$$5 \times 5 \times 5 \text{ 爲 } 5 \text{ 的三次冪}$$

$$5 \times 5 \times 5 \times 5 \text{ 爲 } 5 \text{ 的四次冪}$$

記時可僅記其一個因數，而於這數的右肩上，記其次數，這所記的次數叫做冪的指數。

$$5 \text{ 的二次冪是 } 5^2$$

$$5 \text{ 的三次冪是 } 5^3$$

$$5 \text{ 的四次冪是 } 5^4$$

注意一. 無論什麼數，都是本數的一次冪，一次冪可不記其指數。

注意二. 當各因數都是10時，連乘積裏所含零的個數，同次數相同，利用這點便可把位數很大的數用指數很簡單的記出來。

例一. $100,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

例二. $46,000,000 = 46 \times 1,000,000 = 46 \times 10^6$

注意三. 一數自乘幾次的積,又可叫做這數的方數,所以二次冪叫做二次方,三次冪叫做三次方,四次冪叫做四次方等,但二次方特叫做平方,三次方特叫做立方。

59. 質數表

質數也同整數一般,可以多至無窮,1000以內的質數,是我們所常用的,現在列表如下,以備檢查,這表叫質數表。

質 數 表

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
29	31	37	41	43	47	53	59	61	67
71	73	79	83	89	97	101	103	107	109
113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227
229	233	239	241	251	257	263	269	271	277
281	283	293	307	311	313	317	331	337	347
349	353	359	367	373	379	383	389	397	401
409	419	421	431	433	439	443	449	457	461
463	467	479	487	491	499	503	509	521	523

541 547 557 563 569 571 577 587 593 599
 601 607 613 617 619 631 641 643 647 653
 659 661 673 677 683 691 701 709 719 727
 733 739 743 751 757 761 769 773 787 797
 809 811 821 823 827 829 839 853 857 859
 863 877 881 883 887 907 911 919 929 937
 941 947 953 967 971 977 983 991 997

質數表造法

辨別質數法至煩瑣，希臘學者耶列多蘇氏 (Eratosthenes) 發明質數淘汰法來造質數表，以便檢查，這個方法又叫篩法，好像把所有的整數，用篩一篩，把那非質數都篩去，就得着質數，他的方法，先把一切數順次列出來，就是

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, ...

首定質數 1 爲元數，再以質數 2 爲元數，從 2 起，二二數去，把 2 的倍數消去。從 3 起，三三數去，把 3 的倍數消去，從 5 起，五五數去，把 5 的倍數消去。其他如自 7 起，每隔 6 數消去他的倍數，自 11 起，每隔 10 數消去他的倍數，餘均依次類推，所留的元數都是質數。質數英語 'Prime' 的意義，即取此元始的

一因。

習 題 三 一

1. 指出下列各數有 2, 4, 8, 5, 25, 125 諸因數的。
3864, 5268, 5375, 9375, 26500, 9300, 97125
3964, 7186, 59000, 725, 8936, 91600, 2850,
73000, 4825, 9375, 31600, 2195, 76750, 3274,
8360, 51250, 39870, 53750, 2910, 3680.
2. 指出下列各數,有因數 3, 6, 9 諸因數的。
528, 39636, 76206, 387, 5905, 712, 2175,
432918, 7317, 317781.
3. 指出下列各數,有 11 因數的。
36395, 319, 518727, 31608, 35497, 836, 5720,
598609, 80102, 51215.
4. 從 1 到 100 中取出 4 的倍數及 8 的倍數,
看其末位的數字怎樣?
5. 從 1 到 500 中取出 25 的倍數,看其末二位
的數字怎樣?
6. 從 1 到 2000 中取出 125 的倍數,看其末三

位的數字怎樣?

7. 3672 至少加何數,或減何數,才能給 25 整除。
8. 78509 至少加何數,或減何數,才能給 9 整除。
9. 一個數,至少有幾個因數?
10. 質數可以是偶數麼?質數是偶數的有幾個?

60. 質因數

凡合數必是幾個質數的相乘積,那麼這些質數就稱做這個合數的質因數。

例 $60=2 \times 2 \times 3 \times 5$, 所以 2, 2, 3, 5 都是 60 的質因數。

61. 質因數檢驗法

合數既不是質數,那末總含有質因數,前面已經講過因數的觀察法,所以要檢驗質因數 2, 3, 5, 11 時,祇須用前面所說的方法,至于要檢驗 7 以上的一切質因數如 7, 13, 17, 19 等時,那末另有一種方法,叫割去末位法,說明如下:

(一) 質因數 7. 凡一數,把他的

末位割去,再減那末位的 2 倍,得數又照同法割減,這樣繼續割減下去,(遇着減數大於被減數時,就反減,)最後所得的數若是 7,那麼原數至少有一個質因數是 7;最後所得的數若是 0,原數至少有兩個質因數是 3 和 7。

例一. 檢驗 10899 中有沒有質因數 7?

解	1 0 8 9	9	割去末位 9,
	1 8		減去 9 的 2 倍,
	1 0 7	1	割去末位 1,
	2		減去 1 的 2 倍,
	1 0 5		割去末位 5,
	1 0		減去 5 的 2 倍,
	0		這是最後所得的數.

所以 10899 至少有二個質因數是 7 和 3,

就是

$$10899 = 3 \times 7 \times 519$$

這種驗 7 的方法,實在是一種倒除法.

例二. 檢驗 9485 中有沒有質因數 7?

解	9 4 8	5	割去末位 5,
	1 0		減去 5 的 2 倍,
	9 3 8		割去末位 8,
	1 6		減去 8 的 2 倍,
	7 7		割去末位 7,
	1 4		反減 7 的 2 倍,
	7		這是最後所得的數。

所以 9485 至少有一個質因數 7, 就是

$$9485 = 7 \times 1355$$

(說明) 凡一數把他的末位割去, 再減那末位的 2 倍, 實在就是從原數減去原數末位的 $21 = 3 \times 7$ 倍。第二次割減的數就是這次末位的 $210 = 3 \times 7 \times 10$ 倍。第三次割減的數, 就是這次末位的 $2100 = 3 \times 7 \times 100$ 倍。

這樣繼續割減下去, 都是 $21 = 3 \times 7$ 的倍數, 所餘的數若是 0, 那原數就是 21 的倍數, 所以至少有兩個質因數 3 和 7。所餘的數若是 7, 那原數就是 7 的倍數, 所以至少有一個質因數 7。

不但如此, 並且照這說明, 7 以外, 那個與 7 相乘得原數的因數, 也可從

這各次的末位數看出來，因為原數就是每次末位數的三、七、等倍所合成的數。所以

$$\begin{aligned} \text{例一. } 10899 &= 3 \times 7 \times 9 + 3 \times 7 \times 10 \times 1 + 3 \times 7 \times 100 \times 5 \\ &+ 0 = 7 \times [3 \times (9 + 10 + 500)] = 7 \times [3 \times 519] \\ &= 3 \times 7 \times 519. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例二. } 9485 &= 3 \times 7 \times 5 + 3 \times 7 \times 10 \times 8 + 3 \times 7 \times 100 \times 7 \\ &- 7 \times 1000 = 7 \times [3 \times (5 + 80 + 700) - 1000] \\ &= 7 \times [3 \times 785 - 1000] = 7 \times 1355. \end{aligned}$$

(二) 質因數 13. 凡一數，把他的末位割去再加那末位的 4 倍，得數又照同法割加這樣繼續割加下去，最後所得的數，若是 13, 26, 39, 那麼原數至少有一個質因數是 13。

例一. 檢驗 325 中有沒有質因數 13?

$$\begin{array}{r|l} 325 & \text{割去末位 5,} \\ 20 & \text{加上 5 的 4 倍,} \\ \hline 52 & \text{割去末位 2,} \\ 8 & \text{加上 2 的 4 倍,} \\ \hline 13 & \text{這是最後所得的數.} \end{array}$$

所以 325 至少有一個質因數是 13, 就是

$$325=13 \times 25,$$

例二. 檢驗13是不是3705的質因數?

解

$$\begin{array}{r|l} 370 & 5 \text{ 割去末位 } 5, \\ \hline 20 & \text{加上 } 5 \text{ 的 } 4 \text{ 倍,} \\ \hline 390 & 0 \text{ 割去末位 } 0, \\ \hline 0 & \text{加上 } 0 \text{ 的 } 4 \text{ 倍,} \\ \hline 39 & \text{這是最後所得的數.} \end{array}$$

所以3705至少有一個質因數是13,就是

$$3705=13 \times 285$$

(說明) 凡一數把他的末位割去,再加那末位的4倍實在就是從原數加上原數末位的 $40-1=39=3 \times 13$ 倍.第二次割加的數就是這次末位的 $390=3 \times 13 \times 10$ 倍,第三次割加的數就是這次末位的 $3900=3 \times 13 \times 100$ 倍.

這樣繼續割加下去,都是13的倍數.若最後所得的數是13的倍數,(13, 26, 39,)那原數就是13的倍數,所以至少有一個質因數13.所以

$$\begin{aligned} \text{例一. } 325 &= 13 \times 100 - 3 \times 13 \times 10 \times 2 - 3 \times 13 \times 1 \times 5 \\ &= 13 \times (100 - 3 \times 10 \times 2 - 3 \times 1 \times 5) \end{aligned}$$

$$=13 \times (100 - 60 - 15) = 13 \times 25,$$

例二. $3705 = 39 \times 100 - 3 \times 13 \times 10 \times 0 - 3 \times 13 \times 1 \times 5$

$$= 13 \times (3 \times 100 - 3 \times 10 \times 0 - 3 \times 1 \times 5)$$

$$= 13 \times (300 - 0 - 15) = 13 \times 285$$

(三) 質因數 17. 凡一數把他的末位割去,再減那末位的 5 倍,得數又照同法割減,這樣繼續割減下去,(遇着減數大於被減數時,就反減,)最後所得的數,若是 17 或 0,那麼原數至少有一個質因數是 17。

例一. 檢驗 247605 中有沒有質因數 17?

解	2 4 7 6 0	5	割去末位 5,
	2 5		減去 5 的 5 倍,
	2 4 7 3	5	割去末位 5,
	2 5		減去 5 的 5 倍,
	2 4 4 8		割去末位 8,
	4 0		減去 8 的 5 倍,
	2 0 4		割去末位 4,
	2 0		減去 4 的 5 倍,
	0		這是最後所得的數。

所以 247605 至少有一個質因數是 17,就是

$$247605 = 17 \times 3 \times 5 + 17 \times 3 \times 10 \times 5 + 17 \times 3 \times 100 \times 8$$

$$+17 \times 3 \times 1000 \times 4 + 0 = 17 \times 3 \times (5 + 50 + 800 + 4000) = 17 \times 3 \times 4855 = 17 \times 14565.$$

例二. 檢驗 12937 中有沒有質因數 17?

解	1 2 9 3	7	割去末位 7,
		3 5	減去 7 的 5 倍,
	1 2 5 8	8	割去末位 8.
		4 0	減去 8 的 5 倍,
	8 5	5	割去末位 5,
		2 5	反減 5 的 5 倍,
	1 7		這是最後所得的數.

所以 12937 中至少有一個質因數是 17,
 就是 $12937 = 17 \times 3 \times 7 + 17 \times 3 \times 10 \times 8 + 17 \times 3$
 $\times 100 \times 5 - 17 \times 1000$
 $= 17 \times [3 \times (7 + 80 + 500) - 1000]$
 $= 17 \times [3 \times 587 - 1000]$
 $= 17 \times [1761 - 1000]$
 $= 17 \times 761.$

凡數如要檢驗 7 以上的質因數時都可用這末位割去法去檢驗他,但是這個方法很繁,實際上不能普遍通用.現在且把 7 到 29 的質因數求法,列表如下:

質因數	割去末位後再應 加減的末位倍數	最後所 得的數	加 減 末 位 若 千 倍 的 原 因
7	-2	0,7	$3 \times 7 = 21 = 20 + 1$
11	-1	0	$1 \times 11 = 11 = 10 + 1$
13	+4	13,26,39	$3 \times 13 = 39 = 40 - 1$
17	-5	0,17	$3 \times 17 = 51 = 50 + 1$
19	+2	19	$1 \times 19 = 19 = 20 - 1$
23	+7	23,46,69	$3 \times 23 = 69 = 70 - 1$
29	+3	29	$1 \times 29 = 29 = 30 - 1$

習 題 三 二

- 用因數檢驗法,檢驗下列各數中有沒有質因數 2? 3? 5? 11?
2345, 8654, 13585, 80619, 745300, 12345.
- 用割去末位法,求出下列各數中有沒有質因數 7 或 13?
2002, 5005, 5362, 107681.
- 用割去末位法說明下列各數,有沒有質因數 17?
266271, 2035, 434571, 4143.

4. 用割去末位法說明下列各數,有沒有質因數19?
247, 3706, 23446, 69768.
5. 用割去末位法檢驗下列各數中,那個是23的倍數?那個是29的倍數?
1242, 8729, 2829, 132240, 575, 1479.
6. 用質因數檢驗法,指出下列各數的最小質因數。
4746, 12903, 19734, 749455, 589, 16677.

62. 因數分解法

凡數若非質數,都可化做1以外許多質因數的連乘式,求這連乘式的方法叫質因數分解法,也叫因數分解法,說明如下:

在質數表內,從小到大,選出能夠整除原數的質數去除他,再照樣挨次除所得的商,直到商數也是質數為止,把每次的除數和最後的商連乘起來,就是質因數連乘式。

例一. 分解6930的質因數。

解

- $2 \mid 6930$ 末位是偶數,所以有質因數 2,
 $3 \mid 3465$ 各位數字和是 18,所以有質因數 3,
 $3 \mid 1155$ 各位數字和是 12,所以還有質因數 3,
 $5 \mid 385$ 末位是 5,所以有質因數 5,
 $7 \mid 77$ 7 可以除,所以有質因數 7,
 11 是質因數.

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } 6930 &= 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \\
 &= 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 11.
 \end{aligned}$$

例二. 分解 16632 的質因數.

解

- $2 \mid 16632$ 末位是偶數,所以有質因數 2,
 $2 \mid 8316$ 末位仍是偶數,所以還有質因數 2,
 $2 \mid 4158$ 末位仍是偶數,所以還有質因數 2,
 $3 \mid 2079$ 末位數字和是 18,所以有質因數 3,
 $3 \mid 693$ 末位數字和是 18,所以還有質因數 3,
 $3 \mid 231$ 末位數字和是 6,所以還有質因數 3,
 $7 \mid 77$ 7 可以除,所以有質因數 7,
 11 是質因數.

$$\begin{aligned}
 \text{所以 } 16632 &= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \\
 &= 2^3 \times 3^3 \times 7 \times 11.
 \end{aligned}$$

分解因數時,若原數或某次的商,歷用從小到大的質數試除,直到商數比除數小時,還不能整除的,就可斷定再沒有因數可以分解,這個原數本身

就是質數。

例一. 檢驗 1613 是不是質數

解 照因數觀察法,我們知道 1613 不能用 2, 3, 5, 11 等數去整除,再用質數中 7 以上的許多質數,一一去試除如下:

$$\begin{array}{r} 7 \overline{) 1613} \\ \underline{230} \quad \dots 3 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 13 \overline{) 1613} \\ \underline{124} \quad \dots 1 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 17 \overline{) 1613} \\ \underline{94} \quad \dots 15 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 19 \overline{) 1613} \\ \underline{84} \quad \dots 17 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 23 \overline{) 1613} \\ \underline{70} \quad \dots 3 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 1613} \\ \underline{55} \quad \dots 18 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 31 \overline{) 1613} \\ \underline{52} \quad \dots 1 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \overline{) 1613} \\ \underline{43} \quad \dots 22 \text{ 餘} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 1613} \\ \underline{39} \quad \dots 14 \text{ 餘} \end{array}$$

這樣依次用 7, 13, 17, … 等數去除時都不能整除,到 41 除時,所得的商 39,已小於除數,倘使再用 41 以上的數去除時,商數一定小於 39,倘使 1613 不是質數,那麼這商一定是 1613 的約數,但是小於 39 的數已試過都不能整除,所以 41 以上不必再去試,已可以決定 1613 是質數。

例二. 分解 3263715 的質因數.

解 $3 \overline{) 3263715}$ 各位數字和是 27, 所以 3 可整除,
 $3 \overline{) 1087905}$ 各位數字和是 30, 所以 3 可整除,
 $5 \overline{) 362635}$ 末位是 5, 所以 5 可整除,
 $7 \overline{) 72527}$ 驗 7 可整除,
 $13 \overline{) 10361}$ 驗過 7, 再驗 13 可整除.

797

$13 \overline{) 797}$

61 4 餘

$17 \overline{) 797}$

46 15 餘

$19 \overline{) 797}$

41 18 餘

$23 \overline{) 797}$

34 15 餘

$29 \overline{) 797}$

27 14 餘

用 29 除時, 所得的商 27, 已比除數小, 所以不必再用 29 以上的數去除, 已可決定 797 是質數, 所以

$$3263715 = 3^3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 797.$$

習 題 三 三

分解下列各數的質因數.

721, 289, 364, 792, 1309, 3731, 1039, 16443,

78665, 661, 161, 391, 2984, 6876, 5607, 9282

64215, 462462.

63. 公約數及最大公約數

一個約數能整除兩個或兩個以上的數時，這數就叫牠們的公約數。

例 5 是 15, 25, 35 的公約數。

兩個或兩個以上的數，如有幾個公約數，那末其中最大的一個，就叫牠們的最大公約數。

例 求 12, 18, 30 的公約數及最大公約數。

12 的約數是……1, 2, 3, 4, 6……12。

18 的約數是 … 1, 2, 3, 4, 6, 9……18。

30 的約數是…… 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15……30。

三數的公約數是 1, 2, 3……6。

三數的最大公約數是 6。

最大公約數在英文中是 Great Common Measure 或省寫 G. C. M.，所以我們常用符號 G. C. M. 代表最大公約數。

二個數除了 1 以外沒有別的公約數，那末這兩個數叫互質數。

例 10 和 13, 15 和 17, 40 和 49 都是互質數，而互質數自身不必是質數。

64. 最大公約數的定則

(1) 有大小兩數若小數是大數的約數那末小數就是兩數的最大公約數。

因小數也是本身的約數,所以就是兩數的公約數。

大於小數的數,決不能約小數,所以小數是兩數的最大公約數。

(2) 用小數除大數而得餘數那末這餘數同小數的最大公約數,就是小數同大數的最大公約數。

因餘數是從大數內減去商同小數的積所得的差,就是大數同小數的倍數的差,所以大小兩數的公約數,必是餘數的約數。

又因大數等於餘數同小數的倍數的和,所以餘數同小數的公約數,必是大數的約數。

所以大小兩數的公約數皆含於餘數內,餘數同小數的公約數,必是大小兩數的公約數。(引用53節第一項理由)

所以餘數同小數的最大公約數,就是小數同

大數的最大公約數。

65. 最大公約數的求法

(1) 分解因數法 凡容易分解質因數的數,求最大公約數時,可先分解各數的質因數,再把他們公有的質因數連乘起來,這連乘積就是最大公約數。

例 求 24, 36, 60 三數的最大公約數。

$$24=2^3 \times 3,$$

$$36=2^2 \times 3^2,$$

$$60=2^2 \times 3 \times 5,$$

三數共同的質因數是 2^2 及 3,

所以三數的最大公約數是

$$2^2 \times 3 = 4 \times 3 = 12.$$

(2) 檢驗公約法 先把各數的公約數除各數,再用公約數除所得的商,這樣繼續下去,直到沒有公約數時才止,然後把各公約數相乘,就得最大公約數。

例 求 48, 72, 120 三數的最大公約數。

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{)48 \ 72 \ 120} \\
 \underline{2 \overline{)24 \ 36 \ 60}} \\
 2 \overline{)12 \ 18 \ 30} \\
 3 \overline{)6 \ 9 \ 15} \\
 \underline{\quad 2 \ 3 \ 5}
 \end{array}$$

三數的最大公約數是 $2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$.

(3) 輾轉相除法 求兩數的最大公約數時,可先用小數除大數,倘使已能整除,那麼這小數就是最大公約數。倘使有餘數,那麼再用餘數除小數;如又得餘數,那麼再用來除第一次的餘數,這樣依次用餘數除除數到除盡時為止。那最後的除數,就是最大公約數。

例 求 429 及 1848 的最大公約數。

$$\begin{array}{r}
 429)1848(4 \\
 \underline{1716} \\
 132)429(3 \\
 \underline{396} \\
 33)132(4 \\
 \underline{132} \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

故所求的 $G.C.M. = 33$

上式太佔地位,所以實際計算時,常用下面二種排列,

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 3 & 429 & 1848 & 4 \\
 & 396 & 1716 & \\
 \hline
 & 33 & 132 & 4 \\
 & \text{G.C.M.} & 132 & \\
 & & 0 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 & 4 & 3 & 4 \\
 1848 & 429 & 132 & 33 \cdots \text{G.C.M.} \\
 1716 & 396 & 132 & \\
 \hline
 132 & 33 & 0 &
 \end{array}$$

(說明) 從 53 節第一項理由,可知 429 和 1848 的最大公約數,同於 132 和 429 的最大公約數,132 和 429 的最大公約數,又同於 33 和 132 的最大公約數,所以 429 和 1848 的最大公約數,同於 33 和 132 的最大公約數,現在 33 是 132 的約數,所以 33 是 33 和 132 的最大公約數,所以 33 就是 429 和 1848 的最大公約數。

轉輾相除時,倘某次的餘數是質數,仍不能整除除數的,不必再除下去,已可決定原二數是互質數。

例 求 202 及 1283 的最大公約數。

$$\begin{array}{r}
 202, 1283(6) \\
 1212 \\
 \hline
 71)202(2 \\
 \quad 142 \\
 \hline
 \quad \quad 60
 \end{array}$$

71 是質數，又不能整除 202，所以 71 同 202 沒有公約數；那麼 202 同 1283 一定也沒有公約數，就是互質數。

求三數以上的最大公約數，可以任意先取二數，依上法求得最大公約數後，再把這結果同第三數求最大公約數。這樣依次求去，到末後求得的最大公約數，就是原來各數的最大公約數。

例 求 5688, 4977, 6636 的最大公約數。

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 1 & 5688 & 4977 & 7 \\
 & 4977 & 4977 & \\
 \hline
 & 711 & 0 &
 \end{array}$$

5688, 4977 的最大公約數是 711。

再求 711 及 6636 的最大公約數。

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 3 & 711 & 6636 & 9 \\
 & 711 & 6399 & \\
 \hline
 & 0 & 237 &
 \end{array}$$

711, 6636 的最大公約數是 237.

故 5688, 4977, 6636 的最大公約數是 237.

求四數以上的最大公約數法做此。

習 題 三 四

1. 用分解因數法,求下列各組的 G.C.M.

- (1) 45, 60. (2) 80, 112.
 (3) 390, 672. (4) 192, 5760.
 (5) 24, 60, 96. (6) 30, 90, 96.
 (7) 50, 125, 250. (8) 32, 48, 96.

2. 用檢驗公約法求下列各組的 G.C.M.

- (1) 48, 72, 120. (2) 88, 132, 220.
 (3) 34, 51, 85. (4) 1760, 1100, 4444.
 (5) 808, 568, 1112. (6) 639, 873, 747.
 (7) 64, 96, 256, 72. (8) 24, 60, 84, 128.

3. 用輾轉相除法,求下列各組的 G.C.M.

- (1) 356, 623. (2) 17947, 26737.

- (3) 24501, 67347. (4) 7613, 8809, 9637.
(5) 492, 1476, 1763. (6) 148, 444, 592, 703.
(7) 235, 329, 423, 752. (8) 1068, 5073, 7565, 8311.

4. 一個數除 68130 餘 27, 除 107275 餘 49, 求這種數的最大的。
5. 一個數除 14490 和 31530, 各餘 6, 求其中最大的數。
6. 一個數除 193 餘 4, 除 1677 又不夠 3, 求這種數的最大的。
7. 證明 53477 和 68401 是互質數。
8. 用輾轉相除法, 求兩數的 $G.C.M.$, 最後的除數 35, 而第一, 第二, 第三, 第四各次的商是 1, 2, 1, 3, 求這兩個數。

66. 公倍數及最小公倍數

一個數能被兩個或兩個以上的數整除時, 那末這一個數就叫這幾個數的公倍數。

例 42 是 3 和 7 的公倍數。

兩個或兩個以上的數, 有無窮的公倍數, 其中最小的一個, 就叫牠們的最小公倍數。

例 求 4, 6 的公倍數及最小公倍數。

4 的倍數是 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ……

6 的倍數是 6, 12, 18, 24, 30, 36, ……

二數的公倍數是 12, 24, 36, ……

二數的最小公倍數是 12.

最小公倍數在英文中是 Least Common Multiple 或省寫 *L.C.M.*, 所以我們常用符號 *L.C.M.* 代表最小公倍數。

67. 最小公倍數的定則

(1) 兩數的積等於其最大公約數和最小公倍數的積。

例 設二數是 12 及 18

$$12 = 2 \times 2 \times 3, \quad 18 = 2 \times 3 \times 3.$$

最大公約數是 $2 \times 3 = 6$

最小公倍數是 $2^2 \times 3^2 = 36$

所以兩數的積是 $\overbrace{(2 \times 2 \times 3) \times (2 \times 3 \times 3)}^{\text{最大公約數}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{最小公倍數}}$

(2) 有大小二數, 若大數是小數的倍數, 那末大數就是兩數的最小公倍數。

因大數是小數的倍數,那末小數就是大數的約數。

所以小數就是兩數的最大公約數,從(1)可知大數必是兩數的最小公倍數。

68. 最小公倍數的求法

(1) 分解因數法: 先用因數分解法,將各數化做質因數的連乘式,再將各連乘式中重見的因數都去掉只留一個指數最大的那剩下來的因數連乘就是最小公倍數。

例 求 16, 18, 24 三數的最小公倍數。

$$16=2^4$$

$$18=2 \times 3^2$$

$$24=2^3 \times 3$$

最小公倍數是 $2^4 \times 3^2 = 144$ 。

上例 16, 18, 24 中含 2 的因數至多有 4 個,含 3 的因數至多有 2 個,故取這許多因數的積,則原三數中所含的約數,都包在裏面,所以把原三數中任何一數去除都能整除,即 $2^4 \times 3^2 = 144$ 是 16, 18, 24 的公倍數。

如於這積中任意取去一個因數,那麼原三數中至少有一數不能整除,所以16,18,24的公倍數中,最小的是 $2^4 \times 3^2$ 即144是16,18,24的最小公倍數。

(2) 檢驗公約法: 凡容易分解質因數的數求最小公倍數時,可先把中間任二數公有的質因數去除,那不能整除的,和各商並寫在第二列;再依前法用公有的質因數去除,到所得各商中,任二數不再有公約數時為止。然後把各次的除數同末列各數連乘起來,就是所求的最小公倍數。

例 求12,18,20,三數的最小公倍數。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12, 18, 20} \\ 2 \overline{) 6, 9, 10} \\ 3 \overline{) 3, 9, 5} \\ 1 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

最小公倍數是

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

在求諸數的最小公倍數時,若其中一數是別數的約數,這個約數可以棄去不算,結果也是一樣。

例 求12,18,24,27的最小公倍數

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 12, 18, 24, 27} \\
 \underline{3 \overline{) 9, 12, 27}} \\
 4 \quad 9
 \end{array}$$

因 12 是 24 的約數，那麼 12 中的諸約數，已盡含于 24 中，所以既有 24，可不用 12，同理既有 27，可不用 9。

(3) 先求最大公約數法：凡不容易分解質因數的數求最小公倍數時，可先求這二數的最大公約數；然後把求得的最大公約數除原二數的任一數，再用他一數乘他的商，就得所求的最小公倍數。

例 1120 及 896 的最小公倍數。

$$\left. \begin{array}{r|l}
 1 \quad 1120 & 896 \\
 \quad 896 & 896 \\
 \hline
 \quad 224 & 0
 \end{array} \right| 4$$

先求得兩數的 $G.C.M. = 224$

所以 $L.C.M. = (1120) \div 224 \times 896 = 4480$ 。

用這最大公約數除這兩數，得商 5 和 4，這商必是互質數。

求三數以上的最小公倍數時，可

依上法求任二數的最小公倍數再把這結果同第三數求最小公倍數。這樣挨次求去，到最後所得的最小公倍數，就是所求的最小公倍數。

例 求 2639, 2233, 4147 的最小公倍數。

先求得 2233, 2639 的最大公約數是 203,

那麼 2233, 2639 的最小公倍數是

$$2639 \div 203 \times 2233 = 28929.$$

但 28929 與 4147 是互質數，即他們的最大公約數是 1,

所以 28929, 4147 的最小公倍數是

$$28929 \times 4147 = 120049363,$$

即 所求的最小公倍數是 120049363.

習 題 三 五

1. 用分解因數法求下列各組的 *L.C.M.*
 - (1) 3, 5, 8. (2) 7, 14, 21. (3) 21, 30, 35.
 - (4) 33, 55, 231 (5) 12, 18, 24, 27. (6) 15, 20, 25, 75.
 - (7) $2^3 \times 3 \cdot 2^2 \times 3 \cdot 2 \times 3 \times 5^2$.
 - (8) $2 \times 5^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 2 \times 3 \cdot 5 \times 7$

2. 用檢驗公約法求下列各組的 $L.C.M.$
- (1) 26 30 39 65. (2) 56 64 70 84 112.
(3) 84 26, 65, 85, 51, 39. (4) 120 144 96 100.
(5) 14, 49 84 63. (6) 552 575 920.
(7) 18, 27, 36, 28. (8) 135 126 90 255.
3. 用先求最大公約法求下列各組的 $L.C.M.$
- (1) 1007 737. (2) 2813 3973.
(3) 313 424 795. (4) 7287 2776.
(5) 7613 8809 9637. (6) 252, 99, 504, 693.
(7) 354 531 649.
(8) 225 255, 289, 1023 4095.
4. 兩數的 $G.C.M.$ 及 $L.C.M.$ 的相乘積是 6688, 但知一數是 76, 求他數。
5. 兩數的相乘積是 6688, $G.C.M.$ 是 8, 求 $L.C.M.$
6. 兩數的 $G.C.M.$ 是 24, $L.C.M.$ 是 420, 已知一數是 84 求他數。
7. 某數用 7, 11, 13 除, 都餘 5, 求這種數的最小的。

8. 5115 和某數的 $G.C.M.$ 及 $L.C.M.$ 的積是 43042725, 求兩數的 $G.C.M.$ 及 $L.C.M.$

69. 應用問題

(1) 約數例題

例一. 禮堂長 36 尺, 寬 32 尺, 今用水泥鋪地, 並劃成正方塊式樣, 問最大方格可能有多少見方? 又塊數多少?

解 方格劃來均勻, 就是要方邊能均分長闊二邊, 那麼方邊必是長闊二邊的公約數。

因格子要最大就是方數要最少, 所以方邊的長必是兩邊尺數的 $G.C.M.$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)36 \ 32} \\ \underline{2 \ 18 \ 16} \\ 9 \ 8 \end{array}$$

故最大的方邊是 $2 \times 2 = 4$ 尺

$$\text{長邊可分} \quad 36 \div 4 = 9$$

$$\text{闊邊可分} \quad 32 \div 4 = 8$$

$$\text{所以塊數是} \quad 9 \times 8 = 72 \text{ 塊}$$

答 最大方格是 4 尺見方, 共有 72 塊。

例二. 一人有三繩, 一長 18 尺, 一長 24 尺, 一長 36 尺, 現在要分爲最長而相等的許多份, 問每份應長

多少尺?

解 各繩所分相等各份的長,就是繩長的約數,
三繩所分相等各份的長的尺數,就是三繩
的公約數。

各份要最長就是份數要最少,故所求各份
的長就是三繩的最大公約數。

現在18,24,36的 G.C.M. 是 6。

所以每份的長是 6 尺。

答 所求各份的長是 6 尺。

(2) 倍數例題

例一. 有磚三種,甲種厚 1 寸,乙種厚 6 分,丙種厚
7 寸 2 分,現在要把這三種磚分別疊至一樣高,
問每種至少要多少?

解 三種磚疊置一樣高時,這高就是三種磚的
公倍數。

現在要求三種磚的最少塊數,祇須求三種
磚第一次一樣高時的尺寸,就是求三種磚厚
的最小公倍數。

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 10 \text{分} \ 6 \text{寸} \ 72 \text{分}} \\ 3 \overline{) \ 5 \quad 3 \quad 36} \\ \hline \quad 5 \quad 1 \quad 12 \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 5 \times 12 = 360 \text{ 分}$$

第一次一樣高是 3 尺 6 寸。

所以甲種磚要 $360 \div 10 = 36$ 塊

乙種磚要 $360 \div 6 = 60$ 塊

丙種磚要 $360 \div 72 = 5$ 塊

答 甲種磚要 36 塊;乙種磚要 60 塊;丙種磚要 5 塊。

例二. 甲乙丙三人圍繞一圓池的周圍散步,甲繞一周,需 12 分鐘,乙繞一周需 18 分鐘,丙繞一周需 15 分鐘,現在三人同時從同地向同方向起走,問多少時後三人可同時回至原處?

解 從起身至回到原處所需的時間,甲必是 12 分鐘的倍數,乙必是 18 分鐘的倍數,丙必是 15 分鐘的倍數,所以三人從起身到同返原處所需的時間,是 12,18,15 的公倍數,那麼第一次同返原處所需的時間,就是 12,18,15 的最小公倍數。

求 12,18,15 的最小公倍數,得 180 分鐘即 3 小時。

答 經 3 小時後,三人同時回到原處。

習 題 三 六

1. 兵士 221 人,巡警 143 人,分班守衛,每班人數相等,問至少可分幾班?
2. 某會每五日開會一次,適逢日曜日開會,問再遇日曜日開會,須經過幾日?
3. 布三疋長 34 丈, 85 丈, 119 丈,要截成同樣長的布,問各得幾段?
4. 一車前輪周圍 15 尺,後輪周圍 17 尺,起行時前後二輪同時着地的點,到第二次同時着地時,這車已走路多少?
5. 從甲到乙,路長 1261 尺;從乙到丙路長 1105 尺,現在要於二路上建柱電竿,每二竿的距離要相等,路的兩端也有竿,問二竿間的距離最長是多少?
6. 學生一隊,三三數之,五五數之,七七數之,八八數之,都餘 2,問學生至少有多少?
7. 有米 1224 袋及麥 1068 袋,同時用車,運米入東倉,運麥入西倉,問平均分載,每車至多能裝載多少?

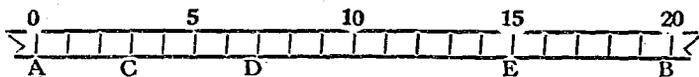
8. 甲乙丙丁時鐘四個,各隔 32 秒,35 秒,45 秒及 1 分鐘鳴一次,問第一次齊鳴後到第二次齊鳴須隔多少時?
9. 一地長 493 尺,闊 221 尺,周圍種植樹木,先在四角各種一棵,其餘等距離分種,問至少要種幾棵?
10. 甲乙二齒輪啣接在一起,甲輪有 48 齒,乙輪有 132 齒,問甲輪旋轉幾次後,二輪又在原齒地方啣接?

第六章

分數四則

70. 分數

當一種單位或一個全數被分爲若干等份,而取其中一個或幾個等份,那末這一個或幾個等份就叫是分數。



如上圖,設 AB 是一種單位,把牠分做 20 個等份,那末每個等份就是 AB 的‘二十分之一’,也就是這種單位的‘二十分之一’, AC , AD , AE 各含有 3 等份, 7 等份, 15 等份,所以各是代表這個單位的 3 個‘二十分之一’, 7 個‘二十分之一’, 15 個‘二十分之一’。

如把 AC , AD , AE 對於 AB 用分數的記法表示就是 $\frac{3}{20}$, $\frac{7}{20}$, $\frac{15}{20}$ 。

又如把 1 元定做一種單位,設 1 元被分爲 10 等份,一個等份就是 1 角,兩個等份就是 2 角,五個

等份就是 5 角,七個等份就是 7 角,那末反過來說, 1 角, 2 角, 5 角, 7 角就是 1 元的‘十分之一’, ‘十分之二’, ‘十分之五’, ‘十分之七’。

如把 1 角, 2 角, 5 角, 7 角對於 1 元用分數的記法表示就是 $\frac{1}{10}$ 元, $\frac{2}{10}$ 元, $\frac{5}{10}$ 元, $\frac{7}{10}$ 元。

分數常用二個數表示,中間夾着一線線下的一個數叫‘分母’,就是表明這個單位所有等份的總數,線上的一數叫‘分子’,就是表明所取等份的數,分母除分子的值得,叫分數值。分母分子叫做分數的兩項,有時兩數並列,中間斜隔一線,線右的數表示分母,線左的數表示分子,例如:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{10}, \frac{7}{8} \text{ 也可記爲 } 3/4 \ 5/10 \ 7/8.$$

分數和除法意義一樣,如下圖 5 個 $\frac{1}{5}$ 等於 1, 3 個 $\frac{1}{5}$ 等於 $\frac{3}{5}$; 那麼 5 個 $\frac{3}{5}$ 等於 3, 所以 $\frac{3}{5}$ 等於 5 除 3 的商,因此得分數和除法的關係如下:

$$1 \quad \frac{1}{5} \quad \frac{3}{5}$$

除數與分數中的分母相當,被除數與分子相當,商與全分數的數值相當,除號與分數兩項中的橫線相當。

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{被除數}}{\text{除數}} = \text{商} = \text{分數的值}.$$

例 $\frac{3}{5} = 3 \div 5, \quad \frac{5}{4} = 5 \div 4$

分母與分子相等的分數等於 1,
 分母大于分子的分數小於 1;
 分母小于分子的分數大於 1;
 整數可以看做分母是 1 的分數。

71. 分數單位

整數的單位就是 1, 把這個 1 任意分做幾等份, 這許多小份, 都是分數單位, 換句話說, 就是分子 1 的分數都是分數的單位, 所以整數單位只有一個 1, 分數單位却可多至無窮。

例 $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \dots$ 都是分數單位。

72. 分數種類

從分母分子形式和大小的不同, 可以類別分數為幾種。

(1) 真分數

分子比分母小, 分數的值小於 1,

例 $\frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{11}, \dots$

(2) 假分數

分子比分母大, 或分子和分母相等, 分數的值大於 1, 或等於 1,

例

$$\frac{3}{2}, \frac{15}{5}, \frac{3}{13}, \frac{3}{3}, \dots$$

(3) 帶分數

分數整數混合的,分數的值大於 1,

例

$$1\frac{1}{2}, 3\frac{4}{5}, 2\frac{10}{11}, \dots$$

(4) 繁分數

分子或分母含有分數,或分子分母都是分數

例

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{8}}, \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{5}}, \dots$$

73. 分數化法

凡假分數都可化做一個整數與一個真分數的和,換句話說,就是假分數可化成帶分數。(分子分母相等的假分數可化爲 1,分母能整除分子的假分數可化爲整數。)

例 $\frac{7}{5} = 7 \div 5 = 1 + \frac{2}{5} = 1\frac{2}{5}$ 假分數化做帶分數。

$\frac{35}{6} = 35 \div 6 = 5 + \frac{5}{6} = 5\frac{5}{6}$ 假分數化做帶分數。

$\frac{12}{3} = 12 \div 3 = 4$ 假分數化做整數。

凡帶分數都可化做假分數。

例

$$8\frac{2}{3} = \frac{3 \times 8 + 2}{3} = \frac{26}{3},$$

$$5\frac{3}{7} = \frac{7 \cdot 5 + 3}{7} = \frac{38}{7},$$

由是得假分數和帶分數的互化法如下。

化假分數成帶分數,用分母除分子的商做整數部分,餘數做分數部分的分子,原分母做分母。

化帶分數成假分數,用整數乘分母的積加上餘數做分子,原分母做分母。

公式:

$$\begin{array}{l} \text{化帶分數} \quad \text{分子} \div \text{分母} = \text{商} \frac{\text{餘數}}{\text{分母}} \\ \text{化假分數} \quad \frac{\text{整數} \times \text{分母} + \text{分子}}{\text{分母}} \end{array}$$

習 題 三 七

1. 36分鐘是一點鐘的幾分之幾?
2. 把五斤分做十六個等份,取他的一份,是一斤的幾分之幾?寫做分數是怎樣?
3. 把一斤分做十六個等份,取他的五份,是一斤的幾分之幾?寫做分數是怎樣?
4. 分母為定值,分子為零時,分數的值等於什麼?
5. 分別下列各分數為那種分數:

$$4\frac{7}{8}, \frac{1}{3}, \frac{8}{5}, \frac{8}{7}, 2\frac{1}{3}, \frac{29}{19}, \frac{13}{13}, \frac{49}{51}, 3\frac{5}{6}, \frac{12\frac{4}{3}}{17\frac{2}{5}}$$

6. 化下列各假分數爲帶分數或整數:

$$\frac{12}{3}, \frac{69}{21}, \frac{17}{5}, \frac{145}{31}, \frac{70}{29}, \frac{17}{11}, \frac{422}{111}, \frac{198}{61}, \frac{3254}{772}, \frac{96}{16}$$

7. 化下列各帶分數爲假分數:

$$1\frac{4}{5}, 2\frac{5}{6}, 3\frac{1}{8}, 3\frac{4}{9}, 5\frac{7}{12}, 7\frac{9}{16}, 31\frac{7}{8}, 50\frac{1}{2}, 46\frac{2}{3}, 19\frac{33}{102}$$

8. 化下列各整數爲分數,用各數後面括弧裏面的數作分母.

$$12(17), 5(21), 17(33), 19(20), 25(25),$$

$$61(11), 93(95), 105(150),$$

9. $\frac{?}{25}=5, \frac{?}{9}=11, \frac{?}{11}=8\frac{5}{11}$.

10. $\frac{63}{?}=7, 4\frac{?}{3}=\frac{14}{3}, 5\frac{9}{?}=\frac{64}{11}$

74. 分數定律

關於分數的算法,要用幾個重要的原則分述如下:

(1) 用某數乘分子,就等於用該數乘分數。

用某數乘分子,就是取的分子增多某倍,當然分數也多某倍。

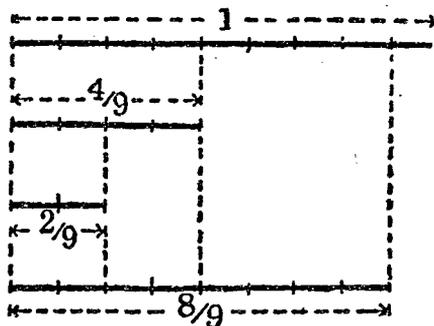
例 用 4 乘 $\frac{3}{7}$, 就是 3 個 $\frac{1}{7}$ 的 4 倍, 就是 12 個 $\frac{1}{7}$,
 即 $\frac{12}{7}$ 所以 $\frac{3}{7} \times 4 = \frac{3 \times 4}{7} = \frac{12}{7}$

(2) 用某數除分子, 就等於用該數除分數。

用某數除分子, 就是取的分數縮小某倍, 當然分數也就縮小某倍。

例 用 4 除 $\frac{8}{11}$ 就是 8 個 $\frac{1}{11}$ 分做 4 份, 每份得 2 個 $\frac{1}{11}$, 即 $\frac{2}{11}$ 。 所以 $\frac{8}{11} \div 4 = \frac{8 \div 4}{11} = \frac{2}{11}$ 。

注意一 (1) (2) 也可用線段來解釋如下圖。



線段 $\frac{8}{9}$ 是線段 $\frac{9}{4}$ 的二倍, 恰好 $\frac{8}{9} = \frac{4 \times 2}{9}$

線段 $\frac{9}{2}$ 是線段 $\frac{9}{9}$ 的一半, 恰好 $\frac{2}{9} = \frac{4 \div 2}{9}$

(3) 用某數乘分母, 就等於用該

數除分數。

用某數乘分母,就是分的分數增多某倍,那麼每分分數就要縮小某倍,所以分數也就縮小某倍。

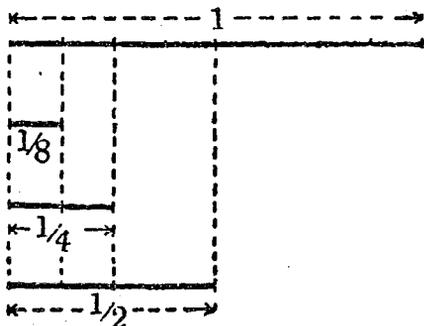
例 用 3 除 $\frac{1}{4}$,就是把 $\frac{1}{4}$ 再分做 3 份,每份得 $\frac{1}{12}$ 所以 $\frac{1}{4} \div 3 = \frac{1}{4 \times 3} = \frac{1}{12}$

(4) 用某數除分母,就等於用該數乘分數。

用某數除分母就是分的分數縮小某倍,也就是每分分數增多某倍當然分數也就增多某倍。

例 用 3 乘 $\frac{2}{9}$ 就是 2 個 $\frac{1}{9}$ 的 3 倍,就是 2 個 $\frac{3}{9}$,也就是 2 個 $\frac{1}{3}$,即 $\frac{2}{3}$ 。
所以 $\frac{2}{9} \times 3 = \frac{2}{9 \div 3} = \frac{2}{3}$

注意二 (3) (4) 也可用線段來解釋,如下圖:



線段 $\frac{1}{8}$ 是線段 $\frac{1}{4}$ 的一半，恰好 $\frac{1}{8} = \frac{1}{4 \times 2}$

線段 $\frac{1}{2}$ 是線段 $\frac{1}{4}$ 的二倍，恰好 $\frac{1}{2} = \frac{1}{4 \div 2}$

(5) 用某數同時乘分子分母，分數的值不變。

分子分母同時被某數乘，就是分數先增大某倍，又縮小某倍，等於不增不縮，所以大小不變。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad \frac{3}{5} &= \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = 0.6 \\ &= \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15} = 0.6 \\ &= \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20} = 0.6 \end{aligned}$$

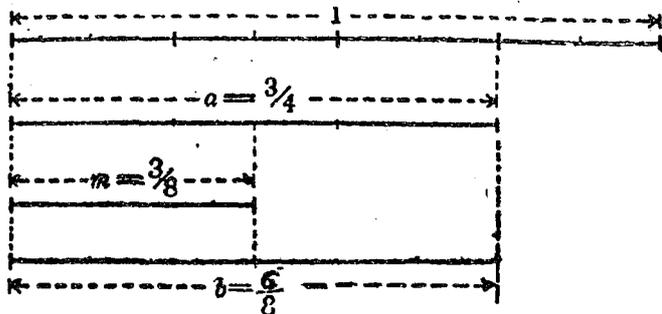
(6) 用某數同時除分子分母，分數的值不變。

分子分母同時被某數除，就是分數先縮小某倍，又增大某倍，等於不增不縮，所以大小不變。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad \frac{6}{10} &= \frac{6 \div 2}{10 \div 2} = \frac{3}{5} \\ \frac{9}{15} &= \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5} \\ \frac{12}{20} &= \frac{12 \div 4}{20 \div 4} = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

注意三 (5) (6) 也可用線段來解

釋如下圖：



$$a \text{ 的一半是 } m \quad \therefore \frac{3}{4 \times 2} = m$$

$$m \text{ 的二倍是 } b \quad \therefore \frac{3 \times 2}{4 \times 2} = b$$

$$\text{但 } a = b \quad \therefore \frac{3}{4} = \frac{3 \times 2}{4 \times 2}$$

$$b \text{ 的一半是 } m \quad \therefore \frac{6 \div 2}{8} = m$$

$$m \text{ 的二倍是 } a \quad \therefore \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = a$$

$$\text{但 } b = a \quad \therefore \frac{6}{8} = \frac{6 \div 2}{8 \div 2}$$

75. 擴分和約分

用某數同乘一個分數的分子分母，使這個分數的分子分母，擴大到某倍的方法叫擴分。用某數同除一個分數的分子分母，使這個分數的分子分母，縮小到某倍的方法叫約分。

擴分和約分,僅變化原分數的形式而不變其數值,所以通常遇到分子分母有公約數時,必須約分,約到分子分母成互質數為止,這時分數已成為最簡單的分數,叫最簡分數。

擴分的方法。 一個分數要擴大時,祇須看其原分母要擴大幾倍,原分子也要擴大幾倍。

例 擴分 $\frac{6}{7}$, 使他的分母, 等於 84

$84 \div 7 = 12$, 原分母要擴大 12 倍, 所以原分子也要擴大 12 倍。

$$\text{所以 } \frac{6}{7} = \frac{6 \times 12}{7 \times 12} = \frac{72}{84}$$

約分的方法。

(1) 分解分子分母的質因數而消去其公有的。

例 化 $\frac{48}{144}$ 為最簡分數

$$\frac{48}{144} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3} \text{ 是最簡分數。}$$

$$\begin{array}{r}
 3 \ (3) \\
 6 \ (2) \\
 12 \ (2) \\
 24 \ (2) \\
 48 \ (2) \\
 \text{或} \frac{111 \ (2)}{72 \ (2)} \\
 36 \ (2) \\
 18 \ (2) \\
 9 \ (3)
 \end{array}$$

(說明) 先用 2 約分子分母得 $\frac{24}{72}$, 累次再用 2 約到 $\frac{3}{9}$ 為止, 再用 3 約得最簡分數 $\frac{1}{3}$.

(2) 求分子分母的最大公約數, 再除分子分母。

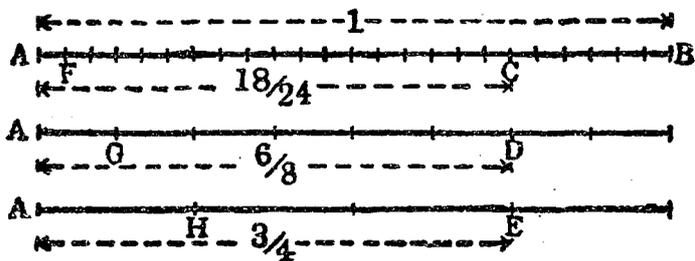
例 化 $\frac{9149}{32675}$ 為最簡分數。

先求 9149 及 32675 的最大公約數得 1307,

所以 $\frac{511}{32675} = \frac{9149 \div 1307}{32675 \div 1307} = \frac{7}{25}$ 是最簡分數。

約分也可用線段來解釋。

例如把 $\frac{18}{24}$ 約為最簡分數, 如下圖:



$$AB=1,$$

$$AC = \frac{13}{24}, \quad AD = \frac{18 \div 3}{24 \div 3} = \frac{6}{8}, \quad AE = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4},$$

因 $AC=AD=AE$, $\therefore \frac{18}{24} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{18 \div 6}{24 \div 6}$
 AH 是最大的分數單位, $\frac{3}{4}$ 是最簡分數.

習 題 三 八

I. 擴分下列各分數使他的分母等于括弧裏面的數:

$$(1) \frac{2}{3}(18), (2) \frac{3}{7} \cdot 42, (3) \frac{3}{5}(20), (4) \frac{4}{29}(87),$$

$$(5) 15(4), (6) \frac{39}{51}(204), (7) \frac{7}{12}(60) (8) 9(5),$$

$$(9) 21 \frac{1}{3}(15), (10) 30 \frac{3}{7}(14).$$

II. 約分下列各分數使成爲最簡分數:

$$(11) \frac{5}{30}, (12) \frac{21}{77}, (13) \frac{28}{84}, (14) \frac{42}{210},$$

$$(15) \frac{72}{280}, (16) \frac{39}{15}, (17) \frac{315}{420}, (18) \frac{324}{501},$$

$$(19) \frac{168}{1932}, (20) \frac{231}{3003}, (21) \frac{319}{5587}, (22) \frac{9475}{15619},$$

$$(23) \frac{24 \times 8 \times 45}{8 \times 60 \times 9}, (24) \frac{26 \times 33 \times 48}{5 \times 20 \times 40 \times 13}, (25) \frac{5^3 \cdot 7}{5^2 \times 7 \times 4^2}$$

76. 通分

分母相同的幾個分數,叫同母分數分母不同的幾個分數,叫異母分數,凡異母分數都可用擴分法,化做同母分數.把異母分數化做同母分數的方法叫通分.

例 $\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$ 是同母分數。
 $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$ 是異母分數。

通分以後，許多分數相同的分母叫公分母，或叫新分母，這分母應是幾個不同分母的公倍數，為計算簡便起見，總是取公倍數中的最小的，就是用諸分母的最小公倍數做公分母。這時所得的各分子叫新分子。

通分的方法。

求各分母的最小公倍數做公分母，把原分數的分母除這公分母，再把所得的商同原分子的積做新分子。

例 通分 $\frac{3}{8}, \frac{5}{12}, \frac{4}{18}$ 。

8, 12, 18 的最小公倍數是 72，用做公分母。

$$72 \div 8 = 9 \quad \frac{3}{8} = \frac{3 \times 9}{72} = \frac{27}{72},$$

$$72 \div 12 = 6 \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \times 6}{72} = \frac{30}{72},$$

$$72 \div 18 = 4 \quad \frac{4}{18} = \frac{4 \times 4}{72} = \frac{16}{72}.$$

注意一 諸分數的分母，若是互質數，那公分母就是諸分母的連乘積。

例 通分 $\frac{3}{11}, \frac{5}{40}$ 。

11,40 是互質數,所以最小公倍數是 11×40

$$\frac{3}{11} = \frac{3 \times 40}{11 \times 40} = \frac{120}{440}$$

$$\frac{5}{40} = \frac{5 \times 11}{40 \times 11} = \frac{55}{440}$$

公分母就是原分母 11,40 的相乘積。

注意二 諸分數中,若有不是最簡分數時,必先約為最簡而後通分。

例 通分 $\frac{25}{75}$, $\frac{98}{160}$, $\frac{24}{104}$, $\frac{81}{135}$ 。

先把各分數化成最簡分數。

$$\frac{25}{75} = \frac{1}{3},$$

$$\frac{98}{160} = \frac{49}{80},$$

$$\frac{24}{104} = \frac{3}{13},$$

$$\frac{81}{135} = \frac{9}{15}.$$

再求 3,80,13,15 的最小公倍數得 3120

$$\text{所以 } \frac{25}{75} = \frac{1}{3} = \frac{1 \times (3120 \div 3)}{3120} = \frac{1040}{3120}.$$

$$\frac{98}{160} = \frac{49}{80} = \frac{49 \times (3120 \div 80)}{3120} = \frac{1911}{3120}.$$

$$\frac{24}{104} = \frac{3}{13} = \frac{3 \times (3120 \div 13)}{3120} = \frac{720}{3120}.$$

$$\frac{81}{135} = \frac{9}{15} = \frac{9 \times (3120 \div 15)}{3120} = \frac{1872}{3120}.$$

注意三 要比較分數的大小,可把分數先通分,再比較其分子。

同分母分數,要比較大小,祇須看他的分子,就是分子大的分數大,分子小的分數小。

同分子分數要比較大小,祇須看他的分母,就是分母大的分數小,分母小的分數大。

分母分子都不同的分數,要比較大小,那麼只有先用通分法,把牠們化做同分子分數,或同母分數,再行比較,通常比較幾個異母異子的分數,是化做同母分數較為便利。

例 比較 $\frac{3}{4}$, $\frac{7}{9}$, $\frac{5}{6}$ 三分數,孰大孰小?

先把這三分數通分得公分母 36,

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 9}{36} = \frac{27}{36},$$

$$\frac{7}{9} = \frac{7 \times 4}{36} = \frac{28}{36},$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 6}{6} = \frac{30}{36}.$$

$$\text{因 } 30 > 28 > 27,$$

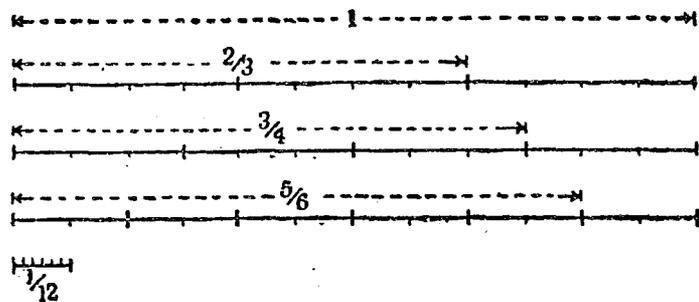
$$\text{故 } \frac{3}{4} > \frac{7}{9} > \frac{5}{6},$$

$$\text{故 } \frac{5}{6} > \frac{7}{9} > \frac{3}{4},$$

($>$,大於記號; $<$ 小於記號。)

通分也可用綫段來解釋。

例如把 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$ 通分,如下圖:



3, 4, 6 的最小公倍數為 12.

$$\therefore \frac{2}{3} = \frac{8}{12},$$

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12},$$

$$\frac{5}{6} = \frac{10}{12}.$$

$\frac{1}{12}$ 是各分數最大的公共單位, 這單位任意分做幾等分, 都可做公共單位.

如用分母連乘法得

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 4 \times 6} = \frac{48}{72},$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \times 3 \times 6}{4 \times 3 \times 4 \times 6} = \frac{54}{72},$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 6} = \frac{60}{72}.$$

公共單位為 $\frac{1}{72}$ 就是 $\frac{1}{12}$ 的六分之一.

習題三九

1. 通分下列各組分數。

$$(1) \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}. (2) \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}. (3) \frac{7}{12}, \frac{11}{16}, \frac{13}{20}.$$

$$(4) \frac{9}{18}, \frac{13}{20}, \frac{7}{12}. (5) \frac{8}{15}, \frac{23}{45}, \frac{31}{60}. (6) \frac{8}{11}, \frac{5}{6}, \frac{2}{17}.$$

$$(7) \frac{5}{6}, \frac{7}{11}, \frac{2}{19}. (8) \frac{3}{23}, \frac{52}{73}, \frac{13}{14}. (9) \frac{5}{12}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{4}{5}, \frac{1}{2}.$$

$$(10) \frac{56}{245}, \frac{78}{119}, \frac{120}{403}, 2\frac{5}{18}.$$

2. 比較下列各組分數的大小：

$$(1) \frac{7}{12}, \frac{8}{15}. (2) \frac{37}{60}, \frac{28}{48}. (3) \frac{5}{18}, \frac{11}{18}, \frac{7}{18}. (4) \frac{4}{9}, \frac{31}{42}.$$

$$(5) \frac{11}{17}, \frac{13}{21}. (6) \frac{3}{10}, \frac{5}{18}, \frac{9}{45}. (7) \frac{10}{1}, \frac{10}{27}, \frac{10}{35}.$$

$$(8) \frac{4}{15}, \frac{6}{25}, \frac{9}{35}. (9) \frac{5}{7}, \frac{19}{28}, \frac{11}{12}. (10) 2\frac{1}{8}, 3\frac{4}{7}, 2\frac{2}{9}.$$

77. 分數加法。

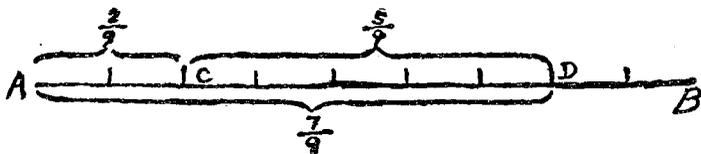
(1) 同分母分數的加法。求各分子和做分子，原分母做分母。

注意 1. 帶分數整數混合的求和，可把整數部分與分數部分，分別相加，然後併合記成帶分數。

注意 2. 和數應化成最簡分數，倘得假分數，又須化成帶分數。

同分母分數加法也可用線段來解釋：

例一. $\frac{2}{9} + \frac{5}{9} = ?$ 如下圖



$$AB=1, \quad AC=\frac{2}{9}, \quad CD=\frac{5}{9},$$

$$AD=AC+CD=\frac{2}{9}+\frac{5}{9}=\frac{7}{9}.$$

例二. $\frac{7}{6} + 1\frac{5}{6} + \frac{2}{6} + 2 = ?$

$$\frac{7}{6} + 1\frac{5}{6} + \frac{2}{6} + 2 = (1+2) + \left(\frac{7}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{6}\right)$$

$$= 3 + \frac{7+5+2}{6}$$

$$= 3 + \frac{14}{6} = 3 + 2\frac{2}{6} = 5\frac{1}{3}$$

(2) 異分母分數的加法。用通分法化成同母分數再依上法計算。

例 $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9} = ?$

把 $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{9}$ 三分數通分得公分母 36

$$\text{所以 } \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{9} = \frac{27}{36} + \frac{30}{36} + \frac{28}{36} = \frac{27+30+28}{36} \\ = \frac{85}{36} = 2\frac{13}{36}$$

習題四〇

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = ?$

2. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = ?$

3. $\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = ?$

4. $\frac{4}{9} + \frac{5}{18} + \frac{7}{24} = ?$

5. $\frac{3}{7} + \frac{2}{5} + \frac{2}{35} = ?$

6. $3\frac{2}{5} + 1\frac{1}{6} + \frac{4}{15} = ?$

7. $3 + \frac{7}{10} + \frac{8}{100} + \frac{9}{1000} = ?$

8. $\frac{13}{16} + \frac{15}{16} + \frac{11}{16} + \frac{8}{16} = ?$

9. $10\frac{1}{5} + 3\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + 9\frac{2}{15} = ?$

10. $1\frac{1}{18} + 3\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + 8 + 2\frac{3}{4} + 5\frac{5}{12} = ?$

78. 分數減法

(1) 同分母分數的減法。求各分子的差做分子，原分母做分母。

注意 1. 被減數是整數的化整數成同母分數。

注意 2. 帶分數、整數混合的求

差,可把整數部分與分數部分各自求差然後併合記成帶分數。

注意 3. 減數的分數部分大於被減數的分數部分時,可從被減數中取 1,化成同母分數加入分數部分而後相減。

$$\text{例一.} \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = ? \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{例二.} \quad 1 - \frac{2}{15} = ? \quad 1 - \frac{2}{15} = \frac{15}{15} - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$$

$$\text{例三.} \quad 3 - \frac{7}{16} = ?$$

$$3 - \frac{7}{16} = 2 + 1 - \frac{7}{16} = 2 + \frac{16}{16} - \frac{7}{16} = 2\frac{9}{16}$$

$$\text{例四.} \quad 4 - \frac{1}{4} - 1\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = ?$$

$$4 - \frac{1}{4} - 1\frac{2}{4} - \frac{3}{4} = 3\frac{4}{4} - \frac{1}{4} - 1\frac{2}{4} - \frac{3}{4}$$

$$= 2\frac{8}{4} - \frac{1}{4} - 1\frac{2}{4} - \frac{3}{4}$$

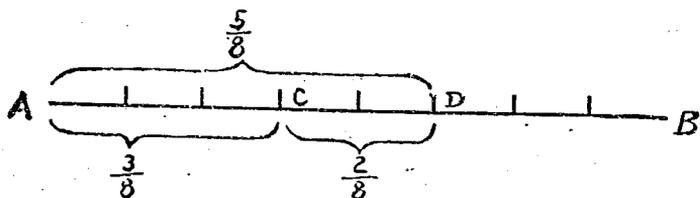
$$= (2-1) + \left(\frac{8}{4} - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4} \right)$$

$$= 1 + \frac{8-1-2-3}{4} = 1 + \frac{2}{4} = 1\frac{2}{4} = 1\frac{1}{2}$$

同分母分數加減法也可用線段

來解釋:

$$\text{例如} \quad \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = ? \text{ 如下圖:}$$



$$AB=1, \quad AD=\frac{5}{8}, \quad AC=\frac{3}{8}, \quad CD=\frac{2}{8},$$

$$AD-AC=\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{2}{8}=CD.$$

(2) 異分母分數的減法。用通分法化成同母分數再依上法計算。

例 $\frac{11}{12} - \frac{5}{36} - \frac{2}{27} = ?$

把 $\frac{11}{12}, \frac{5}{36}, \frac{2}{27}$ 三分數通分得公分母 108

$$\begin{aligned} \frac{11}{12} - \frac{5}{36} - \frac{2}{27} &= \frac{99}{108} - \frac{15}{108} - \frac{8}{108} = \frac{99-15-8}{108} \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

習 題 四 一

1. $\frac{11}{15} - \frac{7}{15} = ?$

2. $\frac{13}{10} - \frac{3}{10} = ?$

3. $\frac{1}{5} - \frac{1}{9} = ?$

4. $1 - \frac{5}{9} - \frac{7}{9} = ?$

$$5. \quad 6 - 4\frac{1}{3} = ? \qquad 6. \quad \frac{25}{8} - \frac{4}{7} - \frac{15}{56} = ?$$

$$7. \quad 10\frac{1}{5} - 3\frac{3}{5} - \frac{4}{5} = ? \quad 8. \quad 3 - \frac{9}{45} - \frac{6}{35} = ?$$

$$9. \quad 2\frac{3}{8} - 1\frac{10}{15} - \frac{6}{35} = ?$$

$$10. \quad 9\frac{5}{12} - 1\frac{9}{16} - 2\frac{21}{28} - 3\frac{11}{36} = ?$$

70. 分數乘法。

(1) 分數與整數相乘時，僅乘分子，不乘分母。

(2) 分數與分數相乘時，用各分母相乘的積做積的分母，各分子相乘的積做積的分子。

注意一 有帶分數的，必先化成假分數然後相乘。

注意二 許多分數相乘可寫分子，分母爲連乘式，再上下相約成最簡分數或帶分數。

$$\text{例一.} \quad 8 \times \frac{7}{12} = ?$$

$$8 \times \frac{7}{12} = \frac{8 \times 7}{12} = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$$

$$\text{例二.} \quad 2\frac{3}{4} \times 6 = ?$$

$$2\frac{3}{4} \times 6 = \frac{11}{4} \times 6 = \frac{11 \times 6}{4} = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2}$$

例三. $\frac{5}{16} \times 8 = ?$

$$\frac{5}{16} \times 8 = \frac{5}{16} \times \frac{8}{1} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$$

例四. $\frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = ?$

$$\frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{7}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1 \times 1}{3 \times 2} = \frac{1}{6}$$

例五. $\frac{5}{20} \times \frac{41}{75} \times \frac{3}{2} = ?$

$$\frac{5}{20} \times \frac{41}{75} \times \frac{3}{2} = \frac{5}{20} \times \frac{41}{75} \times \frac{3}{2} = \frac{1}{20} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{20 \times 5 \times 2} = \frac{1}{200}$$

例六. $5\frac{4}{9} \times 8\frac{1}{10} \times 6\frac{2}{3} = ?$

$$5\frac{4}{9} \times 8\frac{1}{10} \times 6\frac{2}{3} = \frac{49}{3} \times \frac{81}{10} \times \frac{20}{3}$$

$$= 49 \times 3 \times 2 = 294$$

例七. $\frac{3}{4} \times 16\frac{3}{7} = ?$

$$\frac{3}{4} \times 16\frac{3}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{115}{7} = \frac{345}{28} = 12\frac{9}{28}$$

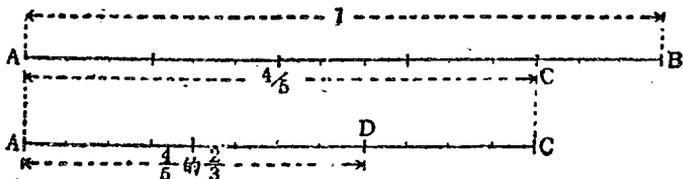
例八. $25\frac{1}{4} \times \frac{15}{50} \times \frac{1}{202} \times 8 \times \frac{20}{6} = ?$

$$25\frac{1}{4} \times \frac{15}{50} \times \frac{1}{202} \times 8 \times \frac{20}{6} = \frac{101}{4} \times \frac{15^3}{50} \times \frac{1}{202}$$

$$\times 8^2 \times \frac{20^2}{6^2} = 1.$$

分數乘分數也可用線段來解釋：

例如 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = ?$ 如下圖：



$AB=1$, 分作 5 份, 取出 4 份得 AC , 表示被乘數 5 分之 4, 把 AC 分作 3 份, 取出 2 份得 AD , 這 AD 就是 5 分之 4 之 3 分之 2, 就表示乘得的積, 從圖上一看, 就知道這乘積是 15 分之 8, 所以得 $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$

要找出 AD 所表示的分數是 15 分之 8, 祇要把 AB 分作 3×5 分, 就是 15 分, 使 5 分得盡, 3 也分得盡, 那麼 5 分之 4, 就變成 5 \times 3 分之 4 \times 3, 同時 5 分之 4 的 3 分之 2, 就變成了 5 \times 3 分之 4 \times 2, 所以

$$\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$$

求某數的幾分之幾, 就是把某數共分爲幾等

份而於其中取幾等份。如說 35 的 $\frac{3}{7}$ ，就是把 35 分爲 7 個等份，而於其中取 3 個等份；把 35 分爲 7 個等份，一個等份，就是 $35 \div 7 = 5$ ，取 3 個等份，就是 $5 \times 3 = 15$ 。所以 35 的 $\frac{3}{7}$ ，就是 $35 \div 7 \times 3 = \frac{35}{7} \times 3 = 35 \times \frac{3}{7}$ 。同理 37 的 $\frac{2}{5}$ 就是 $37 \times \frac{2}{5}$ ，81 的 $\frac{7}{9}$ 就是 $81 \times \frac{7}{9}$ 等。所以求某數的幾份之幾的，也是應用乘法。

公式：

(一數) \times (一數部分的分數)
= 部分積。

習 題 四 二

1. $\frac{11}{61} \times 36 = ?$

2. $49 \times 12 \frac{5}{8} = ?$

3. $\frac{13}{16} \times \frac{2}{5} = ?$

4. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{7}{8} = ?$

5. $\frac{7}{5} \times \frac{25}{14} \times \frac{4}{5} = ?$

6. $\frac{11}{18} \times \frac{27}{30} \times \frac{27}{40} = ?$

7. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} \times \frac{5}{6} \times 6 = ?$

8. $\frac{14}{21} \times 4 \frac{5}{6} \times \frac{42}{51} = ?$

9. $25 \frac{8}{15} \times 12 \frac{3}{8} = ?$

10. $5 \frac{4}{9} \times 8 \frac{1}{10} \times 6 \frac{4}{21} = ?$

11. $\frac{3}{4}$ 的 $\frac{2}{3}$ 是多少？

12. 244 的 $\frac{13}{16}$ 是多少？

13. $1 \frac{3}{4}$ 的 $\frac{2}{7}$ 是多少？

14. 1 點鐘的 $\frac{3}{5}$ 的 $\frac{1}{2}$ 是多少?

15. 1 里的 $\frac{4}{5}$ 的 $\frac{3}{7}$ 是 1 里的幾分之幾?

80. 分數除法。

(1) 整數除分數時祇要除分子或乘分母。

(2) 分數除分數時祇要把除數的分子分母顛倒而乘被除數。

注意一 兩數的積是 1 時,這兩數互稱倒數。

注意二 除數是帶分數的,必先化成假分數然後去除。

整數的倒數等於這數做分母,1 做分子的分數,分數的倒數等於原分數分子分母顛倒後的分數。

例 5 的倒數是 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$ 的倒數是 $\frac{5}{3}$,
 $\frac{1}{7}$ 的倒數是 7

所以除數是分數時,祇要用除數的倒數乘

被除數。

例一. $\frac{6}{11} \div 3 = ?$ $\frac{6}{11} \div 3 = \frac{6 \div 3}{11} = \frac{2}{11}$

例二. $\frac{3}{7} \div 2 = ?$ $\frac{3}{7} \div 2 = \frac{3}{7 \times 2} = \frac{3}{14}$

例三. $16 \div 3 \frac{5}{8} = ?$

$$16 \div 3 \frac{5}{8} = 16 \div \frac{27}{8} = 16 \times \frac{8}{27} = \frac{128}{27} = 4 \frac{12}{27}$$

例四. $2 \frac{3}{4} \div 1 \frac{2}{3} = ?$

$$2 \frac{3}{4} \div 1 \frac{2}{3} = \frac{11}{4} \div \frac{5}{3} = \frac{11}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{33}{20} = 1 \frac{13}{20}$$

例五. $23 \div \frac{1}{5} = ?$

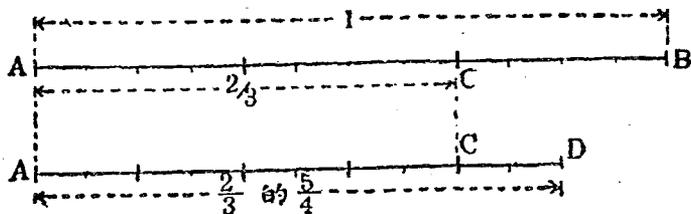
$$23 \div \frac{1}{5} = 23 \times 5 = 115$$

例六. $\frac{3}{8} \div \frac{9}{10} = ?$

$$\frac{3}{8} \div \frac{9}{10} = \frac{3}{8} \times \frac{10}{9} = \frac{1 \times 5}{4 \times 3} = \frac{5}{12}$$

分數除分數也可用線段來解釋:

例如 $\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = ?$ 如下圖。



$AB=1$, 分作 3 份, 取出 2 份得 AC, 表示被除數 $\frac{2}{3}$. 再把 AC 分作 4 份, 取出 5 份得 AD, 就是 $\frac{2}{3}$ 的 $\frac{5}{4}$, 就表示除得的商. 照圖上一看, 就知道這商是六分

之五,所以得

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$$

要找出 AD 所表的分數是 6 分之 5, 祇要把 AB 分作 3×4 , 即 12 份, 使 3 同 4 都可分得盡他; 那麼 3 分之 2 就變成 3×4 分之 2×4 , 同時 3 分之 2 的 4 分之 5, 就變成 3×4 分之 2×5 , 所以得

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{2 \times 5}{3 \times 4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

從某數的幾分之幾是多少, 也可求得某數如說 18 是某數的 $\frac{2}{3}$ 可知某數是 3 個等份合成的, 只要求出一個等份是多少, 再 3 倍起來; 18 既是某數的 $\frac{2}{3}$, 可知 18 就是某數的 2 個等份, 那末一個等份就是 $18 \div 2 = 9$. 所以某數就是 $18 \div 2 \times 3 = \frac{18}{2} \times 3 = 18 \times \frac{3}{2} = 18 \div \frac{2}{3}$. 同理, 某數的 $\frac{3}{5}$ 是 12, 某數就是 $12 \div \frac{3}{5}$. 所以從一數的分數求全數, 也是應用除法.

公式:

$$(\text{部分數}) \div (\text{一數部分的分數}) = \text{全數}.$$

習 題 四 三

1. $27 \div \frac{5}{6} = ?$

2. $2\frac{5}{11} \div 54 = ?$

3. $48 \div \frac{2}{3} = ?$

4. $\frac{8}{15} \div \frac{2}{25} = ?$

5. $9555 \div 7\frac{2}{9} = ?$

6. $\frac{1}{51} \div 7\frac{1}{17} = ?$

7. $16\frac{2}{3} \div 3\frac{17}{52} = ?$

8. $39\frac{3}{17} \div 6\frac{9}{17} = ?$

9. $\frac{38}{275} \div \frac{133}{355} = ?$

10. $6\frac{3}{4} \div 9\frac{1}{2} \div 1\frac{8}{19} = ?$

11. 某數的 $1\frac{2}{3}$ 是 45, 問某數多少?12. $4\frac{7}{8}$ 的幾份之幾是 $4\frac{1}{2}$?13. 某數的 $1\frac{5}{6}$ 是 $7\frac{1}{3}$, 問某數多少?14. 25 是什麼數的 $\frac{5}{6}$?15. 某數乘 $\frac{3}{5}$ 得 291, 問某數是多少?81. 繁分數化法。

化繁分數祇須照普通分數的加減乘除各法，依次運算，結果便可化成一個整數或一個最簡分數。

例一 $\frac{5\frac{1}{2}}{6} = ?$

$$\frac{5\frac{1}{2}}{6} = 5\frac{1}{2} \div 6 = \frac{11}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{12}$$

例二 $\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}} = ?$

$$\frac{\frac{7}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{7}{8} \div \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

例三

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{\frac{5}{6} - \frac{3}{4}} &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) \div \left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4} \right) \\ &= \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) \div \left(\frac{10}{12} - \frac{9}{12} \right) \\ &= \frac{5}{6} \div \frac{1}{12} = \frac{5}{6} \times 12 = 10 \end{aligned}$$

例四

$$\frac{5\frac{5}{9} \times \frac{11}{25}}{3\frac{1}{7} \div \frac{11}{14}} = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{5\frac{5}{9} \times \frac{11}{25}}{3\frac{1}{7} \div \frac{11}{14}} &= \left(5\frac{5}{9} \times \frac{11}{25} \right) \div \left(3\frac{1}{7} \div \frac{11}{14} \right) \\ &= \left(\frac{50}{9} \times \frac{11}{25} \right) \div \left(\frac{22}{7} \div \frac{11}{14} \right) \\ &= 4 \div \left(\frac{22}{7} \times \frac{11}{11} \right) = 4 \div 4 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{例五} \quad 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}} = ?$$

$$\begin{aligned} 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{5}}} &= 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{21}{5}}} = 3 + \frac{1}{3 + \frac{5}{21}} \\ &= 3 + \frac{1}{\frac{63}{21} + \frac{5}{21}} = 3 + \frac{21}{68} = 3\frac{21}{68} \end{aligned}$$

例六

$$\frac{(5\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{8}) \div 2\frac{2}{5}}{3\frac{1}{8} + 5\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}} = ?$$

$$\begin{aligned} &\frac{(5\frac{1}{5} \times 3\frac{1}{8}) \div 2\frac{2}{5}}{3\frac{1}{8} + 5\frac{1}{5} - 2\frac{3}{5}} = \frac{(\frac{26}{5} \times \frac{25}{8}) \div \frac{12}{5}}{\frac{25}{8} + \frac{26}{5} - \frac{13}{5}} \\ &= \frac{\frac{65}{4} \times \frac{5}{12}}{\frac{25}{8} + \frac{26}{5} - \frac{13}{5}} = \frac{\frac{325}{48}}{\frac{229}{40}} = \frac{325}{48} \div \frac{229}{40} \\ &= \frac{325}{48} \times \frac{40}{229} = \frac{325 \times 5}{6 \times 229} = \frac{1625}{1374} = 1\frac{251}{1374} \end{aligned}$$

習題四四

化簡下列各繁分數：

- $$1. \frac{\frac{3\frac{2}{5}}{4\frac{3}{7}}}{\frac{3\frac{2}{5}}{4\frac{3}{7}}}$$
- $$2. \frac{\frac{2}{5}}{5 - \frac{1}{6 + \frac{1}{9}}}$$
- $$3. \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}$$
- $$4. \frac{\frac{2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \times \frac{5}{6}}{\frac{2\frac{1}{3} - 1\frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}} \times \frac{5}{6}}$$
- $$5. (2\frac{3}{4} + 7 \times \frac{2\frac{1}{2}}{2\frac{4}{3}} - \frac{1\frac{3}{8}}{2\frac{1}{2}}) \div (2 - \frac{151}{228})$$
- $$6. \frac{\frac{3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}}{9\frac{1}{4} - 8\frac{4}{7}}}{\frac{3\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}}{9\frac{1}{4} - 8\frac{4}{7}}}$$
- $$7. \frac{2}{1 + \frac{\frac{3}{4}}{2 + \frac{\frac{1}{4}}{3 + \frac{1}{4}}}}$$
- $$8. 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}$$
- $$9. \frac{3}{8 - \frac{7}{2 - \frac{3}{4}}} + \frac{5}{6 - \frac{5}{2 + \frac{5}{6}}}$$
- $$10. \frac{\frac{2\frac{1}{5} \times \frac{13}{23}}{\frac{3}{7} \times 1\frac{2}{17}} \div \frac{1\frac{2}{5} \times \frac{11}{19}}{\frac{3}{13} \times 1\frac{6}{17}}}{\frac{2\frac{1}{5} \times \frac{13}{23}}{\frac{3}{7} \times 1\frac{2}{17}} \div \frac{1\frac{2}{5} \times \frac{11}{19}}{\frac{3}{13} \times 1\frac{6}{17}}}$$

82. 分數的約數及倍數。

甲分數除乙分數得商是整數的，那麼甲分數是乙分數的約數，乙分數是甲分數的倍數。

甲分數做乙分數的約數，那末甲分數的分母

必是乙分數中分母的倍數,乙分數的分子,必是甲分數中分子的倍數。

例
$$\frac{8}{5} \div \frac{2}{15} = \frac{8}{5} \times \frac{15}{2} = 12$$

用 $\frac{2}{15}$ 除 $\frac{8}{5}$, 得整數的商 12, 所以 $\frac{2}{15}$ 是 $\frac{8}{5}$ 的約數, $\frac{8}{5}$ 是 $\frac{2}{15}$ 的倍數, $\frac{2}{15}$ 的分母是 15, 是 $\frac{8}{5}$ 的分母 5 的倍數; $\frac{8}{5}$ 的分子是 8, 是 $\frac{2}{15}$ 的分子 2 的倍數。由是得

求分數的約數和倍數的方法:

(1) 取原分數分母的倍數做分母, 分子的約數做分子, 所得分數就是原分數的約數,

(2) 取原分數分母的約數做分母, 分子的倍數做分子, 所得分數就是原分數的倍數。

例一. 求 $\frac{5}{7}$ 的諸約數。

解 分母 7 的倍數是 7, 14, 21, 28 等。

分子 5 的約數是 5, 1。

所以 $\frac{5}{7}, \frac{1}{7}, \frac{5}{14}, \frac{1}{14}, \frac{5}{21}, \frac{1}{21}, \frac{5}{28}, \frac{1}{28}$ 等都是 $\frac{5}{7}$ 的約數。

例二. 求 $\frac{5}{7}$ 的諸倍數。

解 分母 7 的約數是 7, 1。

分子 5 的倍數是 5, 10, 15, 20 等。

所以 $\frac{5}{7}, 5, \frac{17}{7}, 10, \frac{15}{7}, 15, \frac{20}{7}, 20$ 等都是 $\frac{5}{7}$ 的倍數。

求帶分數的約數或倍數，須先把帶分數化做假分數，然後依上法計算。

83. 分數的最大公約數

一分數能整除諸分數時，這分數就是諸分數的公約數。

諸分數如有幾個公約數時，那末其中最大的一個，就是牠們的最大公約數。最大公約數的分數，他的分母應當最小，分子應當最大，由是得

求分數的最大公約數法：

取諸分數分母的最小公倍數做分母，分子的最大公約數做分子，所得分數，就是諸分數的最大公約數

公式：

$$\text{分數的 G. C. M.} = \frac{\text{各分子的 G. C. M.}}{\text{各分母的 L. C. M.}}$$

例一. 求 $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}$ 的最大公約數。

解 分母 8, 9, 12 的最小公倍數是 72,

分子 3, 4, 5 的最大公約數是 1.

所以 $\frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{5}{12}$ 的最大公約數是 $\frac{1}{72}$

例二. 求 $1\frac{1}{4}, 2\frac{2}{5}, 3\frac{3}{7}$ 的最大公約數。

解 化原有分數爲 $\frac{5}{4}, \frac{12}{5}, \frac{24}{7}$,

分母 4, 5, 7 的最小公倍數是 140

分子 5, 12, 24 的最大公約數是 1

所以 $1\frac{1}{4}, 2\frac{2}{5}, 3\frac{3}{7}$ 的最大公約數是 $\frac{1}{140}$

84. 分數的最小公倍數。

一分數能被諸分數整除時,這分數就是諸分數的公倍數。

諸分數有無窮個公倍數,其中最小的一個,就是他們的最小公倍數。

最小公倍數的分數,他的分母應當最大,分子應當最小,由是得

求分數的最小公倍數法:

取諸分數分母的最大公約數做分母,分子的最小公倍數做分子,所得分數,就是諸分數的最小公倍數。

公式:

$$\text{分數的 L. C. M.} = \frac{\text{各分子的 L. C. M.}}{\text{各分母的 G. C. M.}}$$

例一. 求 $\frac{5}{12}, \frac{13}{31}, \frac{39}{47}$ 的最小公倍數。

解 分子 5, 13, 39 的最小公倍數是 195.

分母 12, 30, 40 的最大公約數是 2.

所以 $\frac{5}{1}, \frac{13}{30}, \frac{3}{40}$ 的最小公倍數是 $\frac{135}{2} = 97\frac{1}{2}$

例二. 求 $2\frac{1}{3}, 2\frac{5}{6}, 2\frac{7}{8}$ 的最小公倍數.

化原有分數為 $\frac{7}{3}, \frac{17}{6}, \frac{23}{8}$.

分子 7, 17, 23 的最小公倍數是 2737.

分母 3, 6, 8 的最大公約數是 1.

所以 $2\frac{1}{3}, 2\frac{5}{6}, 2\frac{7}{8}$ 的最小公倍數是

$$\frac{2737}{1} = 2737.$$

習題四五

求下列各組分數的最大公約數:

1. $\frac{3}{4}, \frac{9}{20}, \frac{15}{16}$ 2. $2\frac{2}{3}, 3\frac{1}{5}, 4\frac{4}{7}$

3. $\frac{14}{25}, 2\frac{2}{5}, 27$ 4. $\frac{12}{35}, \frac{48}{49}, \frac{32}{77}$

5. $\frac{4}{5}, \frac{8}{15}, \frac{12}{25}$

求下列各組分數的最小公倍數:

6. $\frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \frac{3}{14}$ 7. $1\frac{2}{3}, 1\frac{1}{9}, 2\frac{1}{12}$

8. $\frac{14}{15}, 4\frac{1}{5}, 7$ 9. $\frac{9}{20}, 1\frac{5}{15}, \frac{3}{4}$

10. $3, \frac{6}{11}, \frac{144}{165}$

11. 甲每步長 $2\frac{1}{3}$ 尺, 乙每步長 $2\frac{3}{4}$ 尺, 二人

同行一路,從一端到他端,恰得整數的步數問道路至少有多少尺?

12. 教室長 $24\frac{1}{6}$ 尺,闊 $10\frac{7}{8}$ 尺,現在用花方磚鋪地,要塊數最少,問方磚每邊多少長?又磚數要多少?
13. 米三堆;第一堆有 $\frac{16}{3}$ 斗;第二堆有 $\frac{25}{9}$ 斗;第三堆有 $\frac{64}{27}$ 斗,現在用一器去量,三堆米各量至若干次而量盡,且量的次數又最少,問這器的容量多少?各堆所量的次數多少?
14. 甲乙丙三人同時同地同向圍繞一城競走,甲繞一周需 $2\frac{1}{3}$ 小時;乙繞一周需 $2\frac{5}{6}$ 小時;丙繞一周需 $2\frac{7}{8}$ 小時,三人繞行不息,問起身後隔多少時,三人同時回到原處?
15. 一長方形的紙,長 $\frac{5}{6}$ 尺,闊 $\frac{2}{3}$ 尺,現在把他分成若干小方塊,每塊的面積要最大,問小方塊的邊長多少?又可分塊數多少?

第七章

分數應用題

85. 餘數問題

例一. 有米商買進多少石米,第一次賣出 $\frac{1}{3}$,第二次賣出 $\frac{1}{4}$,第三次賣出 $\frac{1}{6}$,還餘60石,問原來買進米多少石?

解 假定原來買進的石數是1, (全部)

$$\text{三次賣出的石數是 } \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4},$$

$$\text{餘剩的石數是 } 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\text{原數的 } \frac{1}{4} \text{ 是 } 60 \text{ 石,}$$

$$\text{原數是 } 60 \div \frac{1}{4} = 60 \times \frac{4}{1} = 240 \text{ 石,}$$

答 原來買進米 240 石。

例二. 某人攜銀若干,出外買物,取其 $\frac{1}{5}$ 買衣料,又取其餘下的 $\frac{3}{7}$ 買食物,再取其餘下的 $\frac{5}{8}$ 買家具,餘下的78元連袋被偷兒竊去,問這人出外時攜銀多少?

解 假定原有銀數是1, (全部)

$$\text{買衣料後剩 } 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5},$$

$$\text{買食物後剩 } \frac{4}{5} - \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{16}{35},$$

$$\text{買家具後剩 } \frac{16}{35} - \frac{16}{35} \times \frac{5}{8} = \frac{6}{35},$$

原數的 $\frac{6}{35}$ 等於 78,

$$\text{故原數等于 } 78 \div \frac{6}{35} = 78 \times \frac{35}{6} = 455.$$

答 這入出外時攜銀 455 元。

習 題 四 六

- 某人把所有財產的 $\frac{1}{3}$ 存入銀行,把餘下的 $\frac{1}{4}$ 捐助學校,又把餘下的 $\frac{1}{2}$ 捐入苦兒院,還多 800 元,問這入原有銀多少元?
- 某人先後用去所有銀的 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{1}{5}$ 與 $\frac{1}{8}$ 後,還餘 119 元,問這入原有銀多少元?
- 某人從甲地到乙地,坐船走 $\frac{3}{4}$,坐火車走餘下的 $\frac{1}{3}$,坐轎走第二次餘下的 $\frac{4}{5}$,再步行 10 里走到,問兩地相隔多少里?
- 有滿桶的水,漏去 $\frac{1}{3}$,汲出 2 斗 1 升,還餘半桶,問這桶的容量多少?
- 甲乙丙三人,共營商業,分配紅利時,甲取利益總數的 $\frac{2}{7}$,乙取其餘的 $\frac{3}{5}$ 餘下的歸

- 丙,計洋 220 元,問紅利總額多少?
6. 某人分財產給三子,幼子得 $\frac{1}{9}$,次子得 $\frac{1}{4}$,餘下的爲長子所得,長子比幼子多得銀 3800 元,問這人的財產多少?
7. 某人把存款的 $\frac{1}{2}$ 買地, $\frac{1}{3}$ 買屋,還餘 1500 元,問這人的存款多少?
8. 某商店第一年賺額爲其資本的 $\frac{1}{3}$,第二年賺額又爲其時資本的 $\frac{1}{3}$,合計資本 1600 元,問原來資本多少?
9. 某人分配遺產,長子得 $\frac{1}{2}$,次子得全額的 $\frac{1}{3}$,其餘女子三人等分,但知長子所得,比一女所得多 2860 元,問遺產全額多少?
10. 某人負債,先償四分之三,次償餘額的三分之二,還欠二十五元,問這人最初負債多少?

86. 工程問題

例一. 甲乙二人,合作一事,12日可以做成;甲獨作 30日做成,問乙獨作須幾日做成?

解 假定全事爲 1

甲乙合作每日做全事的 $\frac{1}{12}$.

甲獨作每日做全事的 $\frac{1}{30}$

乙獨作每日做全事的 $\frac{1}{12} - \frac{1}{30} = \frac{1}{20}$

所以乙獨作須 $1 \div \frac{1}{20} = 20$ 日。

答 乙獨作須 20 日做成。

例二. 一工程,甲獨作 12 日做成;乙獨作 15 日做成;
丙獨作 10 日做成.問三人合做幾日可以做成?

解 假定全工程為 1,

甲每日做全事的 $\frac{1}{12}$,

乙每日做全事的 $\frac{1}{15}$,

丙每日做全事的 $\frac{1}{10}$,

三人合作每日做全事的 $\frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{4}$,

所以全工程做成須 $1 \div \frac{1}{4} = 4$ 日。

答 三人合作須 4 日做成。

習 題 四 七

1. 一工程,甲獨做 10 日可成;甲乙二人合做, 6 日做成,問乙獨做幾日做成?
2. 一事,甲獨作 12 日做成;乙獨作 15 日做成;現在甲乙合作 3 日後乙因病休息,留甲獨做,問還須幾日做成?

3. 一工程,甲乙合作,6日做成;乙丙合作,9日做成;丙甲合作,15日做成;問三人合作,幾日做成?
4. 一事,甲乙合作,30日可以做成,現在二人合作12日後,由甲獨做,又經24日做成,問甲乙獨作,各須幾日做成?
5. 一工程,甲每日做8小時,5日做成;乙每日做3小時,8日做成,現在二人合做,3日成功,每天做幾小時?
6. 貨物若干件,用馬5疋搬運,4日可完,用牛6頭搬運,3日可完;若用馬牛各二疋搬運,幾日可完?
7. 甲乙二人,甲每日作工10小時,8日做完某事;乙每日作工9小時,12日做完某事。現在甲乙二人合作,每日作工8小時,幾日可做完這事?
8. 用甲乙二水管,注水於水桶,甲管獨注,五分鐘水滿;乙管獨注,八分鐘水滿,問二管同注,幾分鐘可滿?
9. 上題,如用三甲管五乙管同時注水七桶,

需時多少？

10. 一事,男子獨作,60日做成;女子獨作,80日做成;現在用男子3人,女子5人,合做8日,還餘這事的幾分之幾?

87. 時鐘問題

例一 求一點鐘後鐘面兩針相重的時刻。

解 分針走60分,時針僅走5分,所以分針走1分,時針僅走 $\frac{1}{12}$ 分。

就是每1分鐘,分針比時針多走 $1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ 分的地位。

所以兩針差1分地位時,分針須走 $1 \div \frac{11}{12}$ 分鐘。

現在1點鐘時,兩針隔開5分地位。

所以兩針相重時,分針須走

$$5 \times 1 \div \frac{11}{12} = 5 \times \frac{12}{11} = \frac{60}{11} = 5 \frac{5}{11} \text{分。}$$

答 一點鐘後 $5 \frac{5}{11}$ 分,兩針恰能相重。

例二 在三點鐘和四點鐘中間,分針時針相隔5分,應在什麼時刻

解 三點鐘時分針在時針後15分;

兩針相隔5分,共有二次,第一次分針在時

針後 5 分,第二次分針在時針前 5 分。

分針原在時針後 15 分,到在時針後 5 分,應比時針多走 $15-5=10$ 分,到在時針前 5 分,應比時針多走 $15+5=20$ 分。

分針每分鐘比時針多走 $\frac{11}{12}$ 分,所以可得下面兩答:

$$10 \div \frac{11}{12} = 10 \frac{10}{11} \quad (\text{分針在時針後 } 5 \text{ 分})$$

$$20 \div \frac{11}{12} = 21 \frac{9}{11} \quad (\text{分針在時針前 } 5 \text{ 分})$$

答 在 3 點又 $10 \frac{10}{11}$ 分及 3 點又 $21 \frac{9}{11}$ 分時兩針相隔 5 分。

習 題 四 八

1. 求三點鐘後,兩針相隔 11 分地位的時刻。
2. 求五點鐘後,兩針成一直線的時刻。
3. 求七點鐘後,兩針成一直角的時刻。
4. 鐘面兩針從第一次成一直線,到第二次成一直線,應隔多少時?
5. 求三點鐘後兩針相重的時刻。
6. 求 9 點鐘後兩針相重的時刻。
7. 6 點鐘 7 點鐘間,兩針成 60° 角 (即全

- 週的六分之一)應在什麼時刻
8. 有鐘一只,每天快 8 分,如在正午開起,要使他在當夜 10 點鐘表真正時刻,須撥慢幾分鐘?
 9. 有錶一只,每日快 $5\frac{1}{2}$ 分,如在正午校正,到明日這錶上的午後四時,問那時的真正時刻怎樣?
 10. 有錶一只,每日快 $1\frac{1}{6}$ 分,如在正午校正,到明日正時的上午九時,問錶上的時刻怎樣?

88. 寒暑表問題

計算溫度用的器具叫寒暑表,最通用的寒暑表有華氏攝氏兩種,華氏表以 32 度作為冰點, 212 度作為沸點,冰點與沸點間分 180 度,攝氏表以 0 度作為冰點, 100 度作為沸點,所以也稱百度表。

攝氏表 100 度的長等于華氏表 180 度的長,所以攝氏表 1 度的長,等于華氏表 $\frac{180}{100}$ 即 $\frac{9}{5}$ 度的長;華氏表 1 度的長,等于攝氏表 $\frac{5}{9}$ 度的長。

攝氏表 0 度,恰當華氏表 32 度,所以從攝氏表度數求華氏表度數時,得華氏表與攝氏表相當的

度數後，還要加 32 度；從華氏表度數求攝氏表度數時，應該先減去 32 度，再求攝氏表的相當度數。

假如用 C 代表攝氏表的度數， F 代表華氏表的度數，那麼兩種度數的互化，可用下面公式計算，非常便利。

公式：

$$C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$$

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

例一 攝氏表 50 度當華氏表幾度？

解 應用公式 $F = \frac{9}{5}C + 32$

現在 $C = 50^\circ$

$$\begin{aligned} \text{故 } F &= \frac{9}{5} \times 50^\circ + 32 \\ &= 90 + 32 = 122^\circ \end{aligned}$$

答 攝氏表 50 度當華氏表 122 度。

例二 華氏表 77 度當攝氏表幾度？

解 應用公式 $C = (F - 32) \times \frac{5}{9}$

現在 $F = 77^\circ$

$$\begin{aligned} \text{故 } C &= (77 - 32) \times \frac{5}{9} \\ &= 45 \times \frac{5}{9} = 25^\circ \end{aligned}$$

答 華氏表 77 度當攝氏表 25 度。

習 題 四 九

1. 人的體溫通常在攝氏表 37 度,問相當于華氏表幾度?
2. 華氏表 100 度,相當於攝氏表幾度?
3. 攝氏表 4 度時,水的密度最大,問相當于華氏表幾度?
4. 攝氏表零下 10 度,相當于華氏表幾度?
5. 華氏表零下 8 度,相當于攝氏表幾度?
6. 華氏表 0 度,相當于攝氏表幾度?
7. 華氏表 37 度,相當于攝氏表幾度?
8. 銀的熔解點,是華氏表 873 度,問相當于攝氏表幾度?
9. 華氏表 80 度與攝氏表 27 度,二種溫度那一種高?相差多少?
10. 某日正午溫度是華氏表 88 度,夜間溫度降低攝氏表 5 度,問這時的華氏表當是幾度?

89. 各部問題

例一 甲乙二人,共有銀1000元,甲所有是乙的 $\frac{1}{4}$,

問二人各有銀多少?

解 假定乙的所有銀是1,

二人共有銀的數是乙的 $(1+\frac{1}{4})=\frac{5}{4}$,

所以乙所有 $=1000 \div \frac{5}{4} = 1000 \times \frac{4}{5} = 800$ 元,

甲所有 $=1000 - 800 = 200$ 元,

答 甲有銀200元;乙有銀800元。

例二 甲數是乙數的 $3\frac{1}{2}$ 倍,如果兩數都加上18,

兩數的和等于乙數的 $7\frac{1}{2}$ 倍,問二數各多少?

解 假定乙數是1,

二數的和是乙數的 $1+3\frac{1}{2}=4\frac{1}{2}$ 倍,

兩數各加18後,兩數的和是乙數的 $7\frac{1}{2}$ 倍,

二數的和前後相差 $7\frac{1}{2}-4\frac{1}{2}=3$ 倍,

二數的和實在相差 $18 \times 2 = 36$

所以乙數 $=36 \div 3 = 12$.

甲數 $=12 \times 3\frac{1}{2} = 42$.

答 乙數是12;甲數是42。

習題五〇

1. 布一疋的價,等于綢一疋的價的 $\frac{3}{8}$,兩種

- 每疋價值的差是 3 元 5 角，問一疋的價各多少？
- 大小兩數的差是 $9\frac{1}{4}$ ，小數是大數的 $\frac{3}{4}$ ，求兩數。
 - 弟年比兄年小 3 歲，但等于兄年的 $\frac{5}{6}$ ，問二人年紀各多少？
 - 二繩共長 7 丈 2 尺，甲繩加上 $\frac{4}{9}$ ，乙繩加上 16 尺，恰相等，問二繩各長多少？
 - 長子財產是父親的 $\frac{1}{4}$ ，次子財產是長子的 $\frac{2}{3}$ ，但知次子財產有 1800 元，問父和長子的財產各有多少？
 - 繩二條，共長 1 丈 1 尺，甲繩剪去 $\frac{1}{5}$ ，乙繩加長 7 寸，二繩恰相等，問二繩各長多少？
 - 甲乙丙三人，共有銀 8760 元，乙是甲的 $\frac{5}{6}$ ，丙是乙的 $\frac{18}{25}$ ，問三人各有銀多少？
 - 甲所有金是乙的 $\frac{2}{3}$ ，後來甲又得 100 元，乙又得 240 元，那時甲所有是乙的 $\frac{3}{5}$ ，問二人原有金多少？
 - 晝長是夜長的 $\frac{5}{7}$ ，問晝夜各長幾時？
 - 有大小兩數，小數是大數的 $\frac{2}{3}$ ，若兩數各

加10,那末小數是大數的 $\frac{9}{11}$ 求各數。

90. 其他雜題

例一 用一繩測井的深,四折納入,井外還餘12尺;六折納入,恰與井深相等,問井深及繩長各多少?

解 井深比繩長的 $\frac{1}{4}$ 少12尺,

井深又等於繩長的 $\frac{1}{6}$,

所以繩長 $=12 \div (\frac{1}{4} - \frac{1}{6}) = 12 \div \frac{1}{12} = 144$ 尺,

井深 $=144 \div 6 = 24$ 尺,

答 井深24尺;繩長144尺。

例二 男女生若干人,男生比全體的 $\frac{5}{7}$ 多6人,女生比全體的 $\frac{1}{4}$ 少4人,問男女生各多少人?

解 從 $(6-4)$ 人與全體的關係,以求全體人數,

全體的 $\frac{5}{7} + \frac{1}{4}$ 為 $\frac{27}{28}$, 即 $\frac{1}{28}$ 為2人,

所以全體為 $2 \div \frac{1}{28} = 56$ 人,

所以男生數為 $56 \times \frac{5}{7} + 6 = 46$;

女生數為 $56 \times \frac{1}{4} - 4 = 10$;

答 男生46人;女生10人。

習題五一

1. 鷄犬同在一處,共有足70只,但犬數是鷄

- 數的 $\frac{2}{3}$,問鷄犬各多少?
2. 從 $\frac{15}{23}$ 的分母分子上減去同數,就可約為 $\frac{5}{9}$,求所減的數。
 3. 從甲地到乙地,經過斜坡,每時的速度,往時為30里,返時為45里,往返共需3小時,問路長多少?
 4. 牛羊合共124頭,現在把牛賣出其 $\frac{1}{4}$,把羊買進其 $\frac{1}{3}$,共增加頭數為11,問牛羊各幾頭?
 5. 每袋1元8角的豆,換每袋2元4角的米,但知換後少5袋,問原有豆多少袋?
 6. 有彈性的球,從高落下,返躍的高,是原高的 $\frac{3}{10}$,現在這球從45尺高處落下,問第五次返躍的高多少?
 7. 某人趕一路程,倘每點鐘走 $\frac{7}{9}$ 里,比預定時間遲到2小時;倘每點鐘走 $1\frac{1}{6}$ 里,比預定時間早到1小時,問路長多少里?
 8. 馬車 $11\frac{1}{2}$ 日可達,步行 $16\frac{1}{2}$ 可達的路程,現在12日達到,問步行幾日?坐馬車幾日?
 9. 某人行135里的路,晴天每日走 $9\frac{1}{6}$ 里,

雨天每日走 $6\frac{2}{3}$ 里, 共行 18 日到達, 問晴天雨天各幾日?

10. 於水 1 份, 酒精 9 份的混合液內, 加水 4 升, 即成水 1 份酒精 6 份的液, 問原液中水及酒精各多少?

第八章

小數四則

91. 小數

一個數可以分成十個等分,一百個等分,一千個等分……,聚攏許多這種等分,而總數小於一的,叫小數。

一個數向左進一位,就是原數的十倍,進二位就是原數的百倍,向右退一位,就是原數的十分之一,退二位就是原數的百分之一;向左進可以進至無窮,向右退也可以退至無窮,所以一個數可任意的增大,也可任意的縮小,一數增大時的記法,我們早已知道,至於一數縮小時的記法,就不能不加以討論,例如 3 向左進變成 30, 300, 3000, …… , 是沒有問題的, 3 向右退變成 $3 \div 10$, $3 \div 100$, $3 \div 1000$, …… , 這不過表示一種縮小的程序,實不成爲一種記數法,所以對於 3 向右移動所變成的數,必須另用一種符號,就是 (•), 叫小數點, 3 向右退一位是 .3, 退二位是 .03 退三位是 .003, 所以一數在小數點的

左的是整數，在小數點的右的是小數，整數中最小的數是 1，所以一切小數都小於 1。

整數與小數合成的數叫帶小數。

例如： 2.35; 40.2; 567.02 ……

全是小數而不含整數的數叫純小數。

例如： 0.58; 0.0023; 0.645; ……

92. 小數單位

小數是等分單位 1 而得的，所以小數是分數的一種特例，換句話說，小數就是分母是 10 或 10 的方數的分數，分數的單位，既是無窮多，那麼小數的單位也就有無窮多。

例 $\frac{1}{10}=0.1$; $\frac{1}{100}=0.01$; $\frac{1}{1000}=0.001$

等都是小數單位。

93. 小數種類

照小數的位數，有限或無限，分作有限小數和無限小數兩類。

無限小數往往小數累次重覆，所以又叫循環小數，又可分爲二種，一種是小數沒有一位不循環的叫純循環小數，一種是小數一部分不循環一部分循環的，叫混循環小數。

小數 { 有限小數 例如: 2.145.
 { 無限小數(循環小數) { 純循環小數
 { 例如: 1.3636363
 { 混循環小數
 { 例如: 1.3054545

94. 小數定則

(1) 小數點後面的位數,等於分母內 10 的方數的指數。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad .5 &= \frac{5}{10} \\ .301 &= \frac{301}{1000} \\ .7654 &= \frac{7654}{10000} \end{aligned}$$

(2) 小數末位的後面,可任意加圈,其大小不變。

$$\begin{aligned} \text{例} \quad .21 &= \frac{21}{100} \quad .210 = \frac{210}{1000} = \frac{21}{100} \\ .2100 &= \frac{2100}{10000} = \frac{21}{100} \end{aligned}$$

所以 $.21 = .210 = .2100$

95. 有限小數加法

小數相加,先把各數的小數點排齊,然後把同位的數字相加,並在和數

中加小數點。

例一 求 38.52, 21.02, 3.19 的和

$$\begin{array}{r} 38.52 \\ 21.02 \\ + 3.19 \\ \hline 62.73 \end{array} \quad \text{式 } 38.52 + 21.02 + 3.19 = 62.73$$

例二 求 2.36, 10.035, 0.52, 0.0009 的和

$$\begin{array}{r} 2.36 \\ 10.035 \\ 0.52 \\ + 0.0009 \\ \hline 12.9159 \end{array} \quad \text{式 } 2.36 + 10.035 + 0.52 + 0.0009 = 12.9159$$

習 題 五 二

求下列各題中諸數的和：

1. $3.861 + 51.29 + 832.1 = ?$
2. $256.9 + 58.23 + 7.163 = ?$
3. $8.65 + 192.03 + 47.1 = ?$
4. $500 + 0.316 + 0.0012 + 2.7 = ?$
5. $31.5 + 2.68 + 51.51 + 0.8 = ?$
6. $0.0025 + 0.00081 + 0.000043 + 15 = ?$
7. $31.52 + 0.0876 + 53.82 + 9.9 = ?$
8. $52.93 + 6.871 + 0.0032 + 400.005 = ?$

$$9. \quad 7135 + 0.0036 + 31.25 + 5.8 = ?$$

$$10. \quad 2.35 + 20.036 + 6.52 + 0.0007 = ?$$

96. 有限小數減法

小數相減,先把各數的小數點排齊,然後把同位的數字相減,並在差數中加小數點。

例一 從 23.667 減 18.485

$$\begin{array}{r} 23.667 \\ -18.485 \\ \hline 5.182 \end{array} \quad \text{式} \quad 23.667 - 18.485 = 5.182$$

例二 求 8.3 - 4.276 的差

$$\begin{array}{r} 8.3 \\ -4.276 \\ \hline 4.024 \end{array} \quad \text{式} \quad 8.3 - 4.276 = 4.024$$

習 題 五 三

求下列各題中諸數的差:

$$1 \quad 82.916 - 73.253 = ?$$

$$2 \quad 59.6325 - 7.8966 = ?$$

$$3 \quad 3.1269 - 1.3671 = ?$$

$$4 \quad 60.47 - 5.9863 = ?$$

$$5 \quad 0.000086 - 0.00000721 = ?$$

6. $0.00537 - 0.000985 = ?$

7. $10.01 - 1.0002 = ?$

8. $105.6 - 56.42 - 18.246 = ?$

9. $82 - 16.273 = ?$

10. $42.72 - 39455 = ?$

97. 有限小數乘法

小數相乘,小數點不必排齊,只須用整數的乘法求積,然後看各因數內小數位數的和,定相乘積的小數位數。

例一 求 728.37×0.6 的積

$$\begin{array}{r} 728.37 \\ \times 0.6 \\ \hline 437.022 \end{array} \quad \text{式 } 728.37 \times 0.6 = 437.022$$

因被乘數與乘數共有三位小數,故所求的積是三位小數。

例二 求 1.325×12.4 的積

$$\begin{array}{r} 1.325 \\ \times 12.4 \\ \hline 5300 \\ 2650 \\ 1325 \\ \hline 16.4300 \end{array} \quad \text{式 } 1.325 \times 12.4 = 16.43$$

習 題 五 四

求下列各題中諸數的積：

1. $37.6 \times 0.8 = ?$
2. $0.0042 \times 0.0056 = ?$
3. $7462 \times 0.25 = ?$
4. $1.363 \times 4.07 = ?$
5. $8.56 \times 0.0025 = ?$
6. $0.34007 \times 0.00213 = ?$
7. $85.638 \times .69 \times .005 = ?$
8. $3.568 \times 3.15 \times 0.111 = ?$
9. $324.6 \times 0.27 \times 1.08 = ?$
10. $825 \times 0.02 \times 0.3 = ?$

93. 有限小數除法

(1) 把除數和被除數的小數點,同時向右移動,經過相同的位數,直到除數是整數爲止。

(2) 用整數的除法求商,然後看移位後被除數的小數位數,定商的小數。

(3) 除數大於被除數時,可添 0 於被除數再除然後看移位添 0 後被除數的小數位數定商的小數位數。

(4) 餘數的小數點應依未移位前被除數的小數點來確定。

例一 求 $1.022 \div 0.28$ 的商

$$\begin{array}{r}
 365 \\
 28 \overline{) 102.2} \\
 \underline{84} \\
 182 \\
 \underline{168} \\
 140 \\
 \underline{140} \\
 0
 \end{array}
 \quad \text{式 } 1.022 \div 0.28 = 3.65$$

例二 求 $0.25728 \div 0.064$ 的商

$$\begin{array}{r}
 4.02 \\
 64 \overline{) 257.28} \\
 \underline{256} \\
 128 \\
 \underline{128} \\
 0
 \end{array}
 \quad \text{式 } 0.25728 \div 0.064 = 4.02$$

例三 求 $0.032 \div 5.3$ 的商至小數三位。

$$\begin{array}{r}
 .006 \\
 53 \overline{) .320} \\
 \underline{318} \\
 2
 \end{array}
 \quad \text{式 } 0.032 \div 5.3 = 0.006 \dots \text{餘} 0.002$$

習 題 五 五

求下列各題的商,遇除不盡的求至小數第四位:

1. $592 \div 0.075 = ?$

2. $62.75 \div 125 = ?$

3. $0.04583 \div 2.71 = ?$

4. $0.017826 \div 6 = ?$

5. $300 \div 8940 = ?$

6. $2.94996 \div .039 = ?$

7. $0.00203 \div 0.01 = ?$

8. $17.28 \div .0012 = ?$

9. $20.5 \div 8000 = ?$

10. $167.52 \div 8 = ?$

99. 有限小數和分數的互化

(1) 化有限小數爲分數 去這數的小數點作爲分子,在 1 的後面,照小數的位數加上 0 作爲分母,再約分。

例一 $0.6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

例二 $2.045 = 2 \frac{45}{1000} = 2 \frac{9}{200}$

(2) 化分數爲有限小數 用分母除分子,求他的商。

例一 $\frac{5}{8} = 5 \div 8 = 0.625$

例二 $\frac{1}{20} = 1 \div 20 = 0.05$

分數化小數時結果有時化成有限小數,有時不能化成有限小數,分述于下:

如果一個分數的分母,只含 2 和 5 的方數做因數的,總可化成有限小數,因為有限小數,就是用 10, 100, 1000 等做分母的分數,即用 (2×5) , $(2^2 \times 5^2)$, $(2^3 \times 5^3)$ 等做分母的分數,所以從有限小數所得的分數約簡後,分母中必沒有 2 與 5 以外的質因數。換句話說,分數的分母,若沒有 2 與 5 以外的質因數,那麼用若干個 2 或 5 乘其兩項,必能化做分母為 10 100 1000 等的分數,就可化成有限小數。

$$\text{例一} \quad \frac{8}{125} = \frac{8}{5 \times 5 \times 5} = \frac{8 \times 2 \times 2 \times 2}{5 \times 5 \times 5 \times 2 \times 2 \times 2} = \frac{64}{1000} = 0.064$$

$$\text{例二} \quad \frac{21}{40} = \frac{21}{2 \times 2 \times 2 \times 5} = \frac{21 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{525}{1000} = 0.525$$

如果一個分數的分母,除 2 和 5 的方數外,還有其他的因數,那麼一定不能化成有限小數。換句話說,就是不論除到小數幾位,總不能使得餘數是零。

$$\text{例} \quad \frac{3}{22} = 3 \div 22 = 0.13636 \dots$$

$$\frac{3}{22} = \frac{3}{2 \times 11}$$

分母有因數 11, 所以不能化成有限小數。

習 題 五 六

1. 化下列各小數爲分數:

(1) 0.5 (2) 0.008 (3) 0.125

(4) 0.16 (5) 40.064 (6) 8.05

(7) 0.205 (8) 1.1875 (9) 0.0078

(10) 17.375

2. 化下列各分數爲小數:

(1) $\frac{21}{64}$ (2) $\frac{51}{400}$ (3) $\frac{5}{16}$ (4) $\frac{7}{20}$

(5) $\frac{12}{25}$ (6) $\frac{1}{32}$ (7) $\frac{3}{125}$ (8) $\frac{13}{625}$

(9) $3\frac{113}{1024}$ (10) $23\frac{119}{250}$

100. 循環小數的來源

分數化小數時,如分母的質因數,不盡是 2 或 5, 那麼化成小數時,小數的位數往往多至無限,並且每一數繼續無限,或者隔了幾位,重複的循環起來,這種小數叫循環小數.

例 $\frac{11}{37} = 0.297297$ 是純循環小數.

$\frac{7}{12} = 0.58333$ 是混循環小數.

循環小數的來源，可從除法看出，因為整數除整數，除到單位以後，餘數必小於除數，各次餘數，只能在除數範圍以內變換，直到除數那麼多的次數，餘數勢必重見，餘數既經重見，那末除出的商數當然也要重見，所以就循環起來了。

例 化 $\frac{19}{55}$ 為小數。

$$\begin{array}{r}
 55 \overline{) 190} (0.345454. \\
 \underline{165} \\
 250 \\
 \underline{220} \\
 300 \\
 \underline{275} \\
 250 \\
 \underline{220} \\
 300 \\
 \underline{275} \\
 250 \\
 \underline{220} \\
 30 \\
 \hline
 \end{array}$$

商數循環

餘數重見

循環小數的循環部分，叫循環節。如 0.345454 … 的循環節是 45； 0.33333 … 的循環節是 3。

記循環小數可於第一循環節首末兩位的數上作 \cdot ，表示循環，叫循環點。

101. 循環節的移動及擴展

循環小數的循環節，可以任意向右移動並增大幾位，只要循環的次序不改，那麼小數的大小也不變。

例 $2.\dot{7}2\dot{0}=2.72\dot{0}7\dot{2}=2.7207$ 循環節移動，數值不變。

$3.25\dot{6}=3.256\dot{3}=3.2563256\dot{3}$ 循環節擴展，數值不變。

102. 化循環小數為分數

化純循環小數為分數時，把循環節去小數作分子，照循環節的位數，連寫若干個 9 作分母，再約分。

例一 化 $0.\dot{7}$ 為分數。

$$0.\dot{7} = \frac{7}{9}$$

說明 $0.\dot{7} \times 10 = 7.777 \dots$

$$0.\dot{7} \times 1 = .777 \dots$$

$$0.\dot{7} \times 9 = 7$$

故 $0.\dot{7} = \frac{7}{9}$

例二 化 $3.\dot{4}0\dot{9}$ 為分數。

$$3.\dot{4}0\dot{9} = 3\frac{409}{999}$$

化混循環小數為分數時，把不循環部分，和循環部分去小數點及循環點後，再減去不循環部分做分子，照循

環節的位數連寫若干個 9, 9 的後面, 再照不循環部分的位數連添若干個 0 作為分母再約分。

例一 化 $0.4\dot{0}\dot{9}$ 為分數。

$$0.4\dot{0}\dot{9} = \frac{409-4}{990} = \frac{405}{990} = \frac{9}{22}$$

說明 $0.4\dot{0}\dot{9} \times 1000 = 409.0909 \dots$

$$0.4\dot{0}\dot{9} \times 10 = 4.0909 \dots$$

$$0.4\dot{0}\dot{9} \times 990 = 409 - 4$$

$$\text{故 } 0.4\dot{0}\dot{9} = \frac{409-4}{990} = \frac{405}{990} = \frac{9}{22}$$

例二 化 $2.46\dot{3}\dot{7}$ 為分數。

$$2.46\dot{3}\dot{7} = 2 \frac{4637-46}{9900} = 2 \frac{4591}{9900}$$

習 題 五 七

化下列各循環小數為分數

1. $0.\dot{5}\dot{8}$ 2. $0.0\dot{0}\dot{7}$ 3. $0.\dot{0}30\dot{5}$

4. $10.6\dot{5}2\dot{3}$ 5. $0.i\dot{2}\dot{3}$ 6. $2.\dot{9}0i$

7. $51.484\dot{0}$ 8. $0.009i0\dot{7}$ 9. $0.5\dot{6}$

10. $.8\dot{2}6\dot{6}$

103. 循環小數通位法

因循環小數的循環節, 可以移動, 可以增大, 所

以單位不同的循環小數,可使他們同位,這個方法,叫循環小數通位法,其方法如下:

先把循環小數多寫幾位再將循環節在前的移後,短的加長,但循環節的位數應照各循環位數的最小公倍數,不循環位數應照各數中最多的位數,這通位法叫最小通位法。

例 求 $0.3140\dot{5}$, $3.4\dot{5}\dot{6}$, $0.2\dot{2}\dot{7}$ 的通位。

各數中不循環位最多的是 2 位,

循環節位數是 3, 1, 2; 最小公倍數是 $2 \times 3 = 6$,

故得 $0.3140\dot{5} = 0.3140540\dot{5}$

$3.4\dot{5}\dot{6} = 3.45\dot{6}666\dot{6}$

$0.2\dot{2}\dot{7} = 0.227272\dot{7}$

104. 循環小數加法

(1) 先把循環小數通位,然後相加,但各循環節首位應進的數,須加在末位。

例 求 $0.02\dot{3} + 5.8\dot{1} + 7.25\dot{6}28$ 的和。

$$\begin{array}{r}
 0.02\dot{3} = 0.02\dot{3}3\dot{3} \\
 5.3\dot{1} = 5.31\dot{5}3\dot{1} \\
 + 7.25\dot{6}2\dot{8} = 7.25\dot{6}2\dot{8} \\
 \hline
 12.5949\dot{3}
 \end{array}$$

說明：和的末位本是 2，因循環節首位的和 14，有 1 進於上位，所以末位也加 1 為 3；這 1 就是各數第二循環節首位應進的數。

$$\text{故 } 0.02\dot{3} + 5.3\dot{1} + 7.25\dot{6}2\dot{8} = 12.5949\dot{3}$$

(2) 化循環小數為分數，再依分數加法計算。

例 求 $0.\dot{1}2 + 0.\dot{4}5 + 0.\dot{8}9$ 的和

$$\begin{aligned}
 0.\dot{1}2 + 0.\dot{4}5 + 0.\dot{8}9 &= \frac{11}{90} + \frac{45}{99} + \frac{81}{90} = \frac{121}{990} + \frac{450}{990} + \frac{891}{990} \\
 &= \frac{1462}{990} = 1 \frac{472}{990} = 1 \frac{236}{495} = 1.4\dot{7}\dot{6}
 \end{aligned}$$

習題五八

用通位法計算下列各題：

1. $3.0\dot{2}\dot{3} + 1.3523\dot{5} + 2.4\dot{3} = ?$
2. $0.00\dot{1}03\dot{0} + 0.\dot{5}\dot{6} + 2.3\dot{3}\dot{5} = ?$
3. $0.\dot{5}6\dot{7} + 0.08\dot{9}8\dot{9} + 2.0\dot{3}715\dot{6} = ?$

4. $1.\dot{1}2\dot{5}+4.0\dot{8}+0.57\dot{4}=?$

5. $2.0\dot{8}\dot{5}+0.\dot{3}2\dot{5}+12.7\dot{1}\dot{2}=?$

用循環小數化分數法計算下列各題：

6. $3.\dot{1}5\dot{3}+2.\dot{3}6\dot{4}=?$

7. $0.\dot{1}\dot{6}+\dot{2}.3+0.3\dot{4}=?$

8. $2.\dot{4}+0.\dot{8}\dot{2}+\dot{4}.3\dot{7}=?$

9. $0.2\dot{6}+0.5\dot{3}=?$

10. $0.\dot{8}i+0.3i=?$

105. 循環小數減法

(1) 先把循環小數通位，然後相減。若循環節的首位減數大於被減數，那末差數的末位上要減去 1。

例 求 $3.54\dot{2}6i-0.20\dot{4}5$ 的差。

$$3.54\dot{2}6i = 3.54\dot{2}6126i$$

$$\underline{0.20\dot{4}5 = 0.20\dot{4}54545}$$

$$3.3380671\dot{5}$$

$$\text{故 } 3.54\dot{2}6i - 0.20\dot{4}5 = 3.3380671\dot{5}$$

說明：差的末位本是 6，因循環節首位 4 大於 2，應從上位借 1，所以末位也減 1 為 5，這 1 就是減去第二循環節應借的數。

(2) 化循環小數爲分數,再依分數減法計算。

例 求 $5.1\dot{3}\dot{5}-4.9\dot{7}$ 的差。

$$\begin{aligned} 5.1\dot{3}\dot{5}-4.9\dot{7} &= 5\frac{135}{999}-4\frac{88}{90}=5\frac{5}{37}-4\frac{44}{45} \\ &= \frac{262}{1665}=0.1\dot{5}7\dot{3} \end{aligned}$$

習 題 五 九

用通位法計算下列各題:

1. $7.2\dot{4}5\dot{7}-0.4\dot{7}\dot{8}=?$
2. $57.0\dot{5}9\dot{1}-25.3\dot{1}=?$
3. $7.0\dot{5}\dot{6}-0.4\dot{3}\dot{2}=?$
4. $5.6\dot{2}5\dot{4}-2.65\dot{1}2\dot{6}=?$
5. $0.2\dot{6}3\dot{2}-0.2\dot{3}=?$

用循環小數化分數法計算下列各題:

6. $0.\dot{5}-0.\dot{1}\dot{4}=?$
7. $0.4\dot{3}-0.\dot{2}\dot{1}=?$
8. $2.1\dot{3}-1.\dot{2}\dot{4}=?$
9. $0.7\dot{8}\dot{4}-0.0\dot{8}\dot{9}=?$
10. $5.3\dot{5}\dot{8}-3.1\dot{2}\dot{4}=?$

106. 循環小數乘除法

化循環小數爲分數,再依分數乘除法計算。

例一 求 $3.\dot{4}\times 0.\dot{7}\dot{2}$ 的積。

$$3.\dot{4} \times 0.\dot{7}\dot{2} = 3 \frac{4}{9} \times \frac{72}{99} = \frac{31}{9} \times \frac{72}{99} = \frac{248}{99} = 2 \frac{50}{99} \\ = 2.\dot{5}\dot{0}$$

例二 求 $0.\dot{5}\dot{4} \div 0.\dot{2}$ 的商

$$0.\dot{5}\dot{4} \div 0.\dot{2} = \frac{54}{99} \div \frac{2}{9} = \frac{54}{99} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{11} = 2 \frac{6}{11} = 2.\dot{5}\dot{4}$$

習 題 六 ○

計算下列各題：

1. $3.\dot{4} \times 0.\dot{7}\dot{2} = ?$
2. $0.4\dot{3}\dot{2} \times 18 = ?$
3. $56.\dot{6} \div 137 = ?$
4. $1.664\dot{8} \div 0.123 = ?$
5. $0.2\dot{1}\dot{1} \times 1.0\dot{8} \times 0.5\dot{3} = ?$
6. $1.7\dot{5}\dot{3} \div 7.5\dot{1} = ?$
7. $0.2\dot{9}\dot{8} \times 2.0\dot{8}\dot{1} = ?$
8. $2.\dot{3} \times 0.14285\dot{7} = ?$
9. $0.0476190 \div 0.28571\dot{4} = ?$
10. $2.\dot{6} \times 4.7\dot{8}\dot{5} \div 0.1\dot{8} = ?$

第九章

省略算

107. 省略算

小數計算,往往因小數位數很多,運算時很覺麻煩,但實際上所用小數的位數,不必這樣的多,普通要用到小數第三位以下的就很少;例如計算銀錢,不過算到元的小數第三位,即釐位;計算重量,不過用到兩的小數第三位即釐位;計算長度,也不過用到尺的小數第二位即分位;倘要更求精密,到分釐以下,在銀錢上既無實在的錢幣可計,在量法上也不是尋常器械所能量得出來的,所以都可毋庸計較。在數學計算上有時也用不着這樣多位的數目。

所以遇到小數位數很多的數時,祇須選取若干位計算已足,餘數就丟了去。通常用四捨五入法,就是棄去的數字首位若為 4 或小于 4,簡直丟去;若是 5 或大於 5,就進 1 到上位,再丟去;這樣所得的數叫近似值 (誤差小于所得數末位的 $\frac{1}{2}$)。在

加減乘除運算時,節省時間很多。不過各數有捨有入,所求結果的末位,不能十分準確。現在一方面要節省計算的時間,一方面還要計算結果的準確,那末不能不有一種特殊的運算法,這個方法就叫省略算。

108. 省略加法

(1) 在各數需要小數位右面多取兩位,餘數捨棄(假若加數在十個以上,可在需要小數位右面多取三位)。

(2) 照普通加法相加。

(3) 末兩位用捨入法歸併。

例 求 $234.5642 + 28.00546 + 8.8542 + 53.23834$ 的和
準到小數第二位。

解	普通加法	省略加法
	234.56 42	234.56 42
	28.00 546	28.00 54
	8.85 42	8.85 42
	53.23 834	53.23 83
	<hr/> 324.66 220	<hr/> 324.66 1

注意 假若加數在一百個以上,那麼必須在需要小數位右面多取四位,

加數在一千個以上,多取五位。但是事實上加數很少有百個以上的。

習題 六一

求下列各數的和,準到小數第三位:

1. $41.79852 + 0.00714 + 29.81256$
2. $3.56471 + 41.823675 + 6.5603$
3. $\frac{1}{7} + \frac{1}{6} + 3.14216$
4. $8.42354 + 2.\dot{6}i + \frac{7}{22}$
5. $78.6546789 + 21.6536734 + 0.0008231$
 $+ 4.8736237$

求下列各數的和,準到小數第二位:

6. $5.1219 + 4.50193 + 7.042578$
7. $75.00832 + 6.4564 + 113.80056 + 7.75560$
8. $\frac{2}{7} + \frac{5}{6} + \frac{1}{8}$
9. $0.5\dot{0}i + 7.2\dot{7} + 3.1\dot{3}$
10. $5.0829 + 1.\dot{6} + 0.\dot{8}3\dot{7} + 3.40405$

109. 省略減法

(1.) 在減數和被減數需要小數位右面多取兩位,餘位捨棄。

(2) 照普通減法相減。

(3) 末兩位用捨入法歸併。

例一 求 $7.0587214 - 3.9714562$ 的差,準到小數第三位。

解	普通減法	省略減法
	$\begin{array}{r} 7.058 \overline{) 7214} \\ 3.971 \overline{) 4562} \\ \hline 3.087 \overline{) 2652} \end{array}$	$\begin{array}{r} 7.058 \overline{) 72\dots} \\ 3.971 \overline{) 45\dots} \\ \hline 3.087 \overline{) } \end{array}$

例二 求 $4.5621431 - 2.1748062$ 的差,準到小數第三位。

解	普通減法	省略減法
	$\begin{array}{r} 4.562 \overline{) 1431} \\ 2.174 \overline{) 8062} \\ \hline 2.387 \overline{) 3369} \end{array}$	$\begin{array}{r} 4.562 \overline{) 14\dots} \\ 2.174 \overline{) 80\dots} \\ \hline 2.387 \overline{) } \end{array}$

注意 若是減數在百個以上,那麼必須在需要小數位右面,多取三位,餘位捨棄。但是事實上減數很少有百個以上的。

習題 六二

求下列各題的差準到小數第二位:

1. $972364 - 2,25785$
2. $3,38465 - 2,74536$
3. $78,5472 - 13,3456$
4. $17,88645 - 3,12863$
5. $273,456 - 1,34567$

求下列各題的差準到小數第三位:

6. $2,7453274 - 1,2675313$
7. $62,254367 - 7,567894$
8. $8,3627625 - 5,8765432$
9. $73,345786 - 9,654388$
10. $3,7325962 - 1,4964023$

110. 省略乘法

(1) 取有效數字較少的數做乘數,移動乘數的小數點,使祇有一位整數,同時把被乘數的小數點做相反的移動。

(2) 先排列被乘數。

(3) 在需用的小數右一位下面,寫乘數個位,再把乘數各位,顛倒次序

寫出。

(4) 用乘數的各位數,各從上面相當位起,同被乘數相乘,對於相當位右一位的乘積將進位數併入。

(5) 乘得各部分積的末位,都在右邊相齊,然後用省略加法相加。

例一 求 $1,2345678 \times 1,204$ 的積,準到小數第二位。

解	普通乘法	省略乘法
	1.23 45678	1.23 45678
	1.204	4.02 1
	-----	-----
	1.23 45678	1.23 5
	.24 691356	.24 7
	49382712	.00 5
	-----	-----
	1.48, 64196312	1.49

(說明) 在省略乘法裏,先寫被乘數,在需要小數第二位後畫一直豎,把乘數整數 1 寫在直豎右一位的下面,再顛倒小數位次寫下。

用 1 乘 1,234 再將 1 乘 5 (=5, 用捨入法) 的進位數 1, 併入末位,得 1,235, 就是第一部分積。

用 2 乘 1,23 再將 2 乘 4 (=8, 用捨入法) 的進位數 1, 併入末位,得 .247, 就是第二部分積。

用 4 乘 1 再將 4 乘 2 (=8, 用捨入法) 的進

位數 1, 併入末位, 得 .005, 就是第三部分積。

把各部分積, 用省略加法相加, 就得乘積 1.49
準到小數第二位。

例二 求 0.00561023×597.1 的積, 準到小數三位。

解 $0.00561023 \times 597.1 = 0.561023 \times 5.971$

$$\begin{array}{r}
 0.561\ 023 \\
 \underline{.179\ 5} \\
 2,805\ 1 \dots\dots 5610 \times 5 + 1 \\
 \underline{.504\ 9 \dots\dots 561 \times 9 + 0} \\
 .039\ 3 \dots\dots 56 \times 7 + 1 \\
 \underline{.000\ 6 \dots\dots 5 \times 1 + 1} \\
 3.350\ 1
 \end{array}$$

習題 六 三

求下列各題的積, 準到小數第二位:

1. 78.95×0.0909
2. 50.2814×1.314
3. 86.43×0.028347
4. 42.37×0.240089
5. 7.1324×9.7568

求下列各題的積, 準到小數第三位。

6. 1.41421×1.41421

7. 3.5678934×2.065

8. 1.74568×7.45473

9. 24.7321×9.346

10. 27.68923×1.7892

111. 省略除法

(1) 移動除數的位數,使只有一位整數同時把被除數的位做相同的移動。

(2) 照商數需要的小數位在被除數中截取多一的小數位同時在除數中也截取第一步施除時所需相當的位數,然後相除。

(3) 用除得第一位商數乘截取的除數,併入右位應進的數,所得的結果從被除數內減法,得第一步餘數。

(4) 把截取的除數,再截去末位,除第一步餘數,得第二步商數,再用來乘新除數,併入右位應進的數從第一步餘數內減去,得第二步餘數。

(5) 同法順次除去,每添一位商

數除數末位就多截去一位,每步餘數,也遞次減少,這樣除到要用的小數位爲止。

例一 求 $4.73089645 \div 0.745678$ 的商準到小數第二位。

$$\text{解 } 4.73089645 \div 0.745678 = 47.3089645 \div 7.45678$$

普通除法	省略除法
$6.34 \dots$	$6.34 \dots\dots$
$7.45678 \overline{)47.3089645}$	$7.4 \overline{)5 \overline{)6} 47.308}$
$\underline{44.740} \quad 68$	$\underline{44.740}$
$\underline{2568} \quad 284$	$\underline{2568}$
$\underline{2237} \quad 034$	$\underline{2237}$
$\underline{331} \quad 2505$	$\underline{331}$
$\underline{298} \quad 2712$	$\underline{298}$
$\underline{32} \quad 9793$	$\underline{33}$

(說明) 在省略除法裏,先把被除數和除數,同時移動小數點,使除數成一位整數。

因爲商數祇要準到小數第二位,所以被除數截取到小數第三位,除數截到第一步施除時用到的位數,就是小數第三位,其餘位數,一概捨棄。

兩數相除,得第一位商數 6,從被除數減 $6 \times 7.456 = 44.740$ 得第一步餘數 2.568。

用 7.45 除 2.568 得第二位商數 3, 從 2.568 減 $0.3 \times 7.45 + .002 (=2.237)$ 得第二步餘數 0.331.

用 7.4 除 0.331 得第三位商數 4, 從 0.331 減 $.04 \times 7.4 + .002 (=0.298)$ 得第三步餘數 0.033.

再用 7 除 0.033 得第四位商數 4, 這個商數是用來較準第三位的, 所以求得的商數準到第二位的是 6.34.

例二 求 $2.71828112 \div 3.1415927$ 的商準到小數第三位.

解

$$\begin{array}{r}
 0.8652 \\
 3.1 \overline{) 4.1} 2.7182 \\
 \underline{25132} = 3141 \times 8 + 4 \\
 2050 \\
 \underline{1885} = 314 \times 6 + 1 \\
 165 \\
 \underline{157} = 31 \times 5 + 2 \\
 8
 \end{array}$$

故 $2.71828112 \div 3.1415927 = 0.865$.

習題 六四

求下列各題的商準到小數第二位:

1. $6.856723 \div 0.08425$

2. $1.93\dot{6} \div 3.0\dot{7}$

3. $7.9265 \div 1.025$

4. $2.457 \div 1.23474$

5. $88.254 \div 34.573$

求下列各題的商準到小數第三位:

6. $3785.8475 \div 0.4635$

7. $3 \div 1.73205$

8. $0.352073 \div 0.32156$

9. $3.7845 \div 1.2468$

10. $3784.9385 \div 0.3845$

教本及參攷書

- | | | | |
|-----------------------------|----------|----------------------|----------|
| 初中標準算學 | 全七册 | 初中標準國文 | 全六册 |
| 算術 (上) 一角 (下) 七角 | | (一) 五角 (二) 五角 (三) 四角 | |
| 代數 (上) 一元 (下) 一元 | | (四) 五角 (五) 四角 (六) 五角 | |
| 幾何 (上) 八角 (下) 八角 | | 高中標準國文 | 全六册 |
| 數值三角 五角 | | (一) 四角 (二) 四角 (三) 五角 | |
| 初中公民 | 郭伯棠 全五册 | (四) 五角 (五) 五角 (六) 六角 | |
| (一) 五角 (二) 一角 (三) 一角 (五) 一角 | | 初中當代國文 | 全六册 |
| 初中本國史 | 呂恩勉 全四册 | (一) 八角 (二) 一元 (三) 一元 | |
| (一) 五角 | | (四) 七角 (五) 八角 (六) 八角 | |
| 初中外國史 | 高振濤 上册五角 | 高中當代國文 | 全六册 |
| (一) 五角 | | (一) 七角 (二) 七角 (三) 一元 | |
| 初中本國地理 | 陸仁壽 全四册 | (四) 七角 (五) 八角 (六) 八角 | |
| (一) 六角 | | 中學當代樂理 | 錢君匋 五角 |
| 初中外國地理 | 葉許生 上册五角 | 中學當代歌唱 | 錢君匋 五角 |
| (一) 六角 | | 當代國語文法 | 朱 雯 七角 |
| 初中植物 | 張家駿 上册六角 | 當代應用文 | 朱 雯 五角 |
| 初中動物 | 張家駿 上册六角 | 當代日語 | 袁文彰 一元四角 |
| 初中化學 | 張資平 上册六角 | | |
| 初中物理 | 張資平 上册六角 | | |

- | | | |
|-----------|------|----|
| 速成日語讀本 | 橋爪政之 | 七角 |
| 速成日語文法 | 張廣中 | 七角 |
| 速成日語會話 | 袁文彰 | 七角 |
| 速成日語用例 | 趙立言 | 七角 |
| 速成日語書信 | 袁文彰 | 七角 |
| 標準日華辭典 | 趙立言 | 二元 |
| 日語漢譯辭典 | 傅祺敏 | 二元 |
| 愛的教育 | | 八角 |
| 金目王子 | | 二角 |
| 狂人日記 | | 四角 |
| 兩條血痕 | | 三角 |
| 女難 | | 四角 |
| 與幼小者 | | 三角 |
| 一星孩兒 | | 四角 |
| 天方夜譚 | | 七角 |
| 一個小學校長的日記 | | 七角 |

翻百川合著 上册七角 下册九角 朱佐廷

上海中學書局發行

中華民國二十四年一月出版
中華民國二十四年八月再版

【初中標準算學】

算 術

(上 册)

每本大洋八角

編 輯 者

孫宗堃 胡爾康

校 訂 者

江蘇教育廳
沈 沈
初訂
算中
學席
生

發 行 人

高 堃 書

印 刷 者

上海中學生書局

上海四馬路中市

發 行 所

上海中學生書局

分 售 處

全國各大書局



【實價八角】