

44

721092

(2) 清華大學工學院

研究叢刊



吊橋的理論與設計

劉恢先

民國三十五年四月

工102號

土木2號

M6
U448.25
1

吊橋的理論與設計

劉 恢 先

提 要

這篇文章，在吊橋的理論與設計兩方面，提供若干見解與改進。方法上，作者採取 Westergaard 教授用在彈性穩定問題的理論。吊橋可以分為兩個主要部份，一是吊索 (Cable)，一是加勁桁 (Stiffening Truss)。“吊索應力的水平分力”(Horizontal Component of the stress in Cable) 的計算，大家知道是異常麻煩的，作者導出一個普遍性的公式。這公式在實際荷重情形之下，變為十分簡單。由此進一步證明了“作用疊加原則”(Principle of Superposition) 可以應用於求吊索應力的水平分力，而且其感應圖 (Influence Line) 十分接近一“正弦曲線”(Sine-Curve)。

關於加勁桁，我們認為最困難的是牠所受的應力隨其本身的尺寸而變遷，因而設計時很難着手。為此，作者找出一些估計應力與吊荷重的簡單公式，在這些公式裏“加勁的作用”(Stiffening action) 歸納於一個“無因次”(Dimensionless) 的常數內。此常數名為“加勁因數”(Stiffening Factor)，牠不僅為無因次，且具有“物理意義”(Physical Meaning)，使人易於理解。更便利的，是加勁因素的合用數值的變化很小。設計者可根據經驗加以假定而不至於相差太多。復次，加勁桁的最大功用，據作者的探討是在使橋面不致波動，而在減少橋面的“撓度”(Deflection)。

篇中附有計算例題，一切計算均可利用算尺，不必用對數。此點較之習用



的“撓度理論”(Deflection Theory)要便利甚多。

I. 緒 論

結構的分類，古典法分為“靜定”與“靜不定”兩種。及Cross氏【註一】他從設計的觀點指出，有些結構或結構的某些部份，其應力與其尺寸不甚相關，但另一些結構，相反地其應力隨其尺寸而劇烈變化，他將前者命名為“正常作用”(Normal Structural action)，而名後者為“反常作用”(Hybrid Structural action)【註二】，他證明正常作用並不限於靜定結構，並說明在反常作用之下，結構的設計就不一定能達到高度效率，結構的作用也不一定能預先看清楚。因此反常結構需要精密的分析方法。換一個角度，Westergaard氏【註三】從彈性穩定的觀點，又將結構的作用分為四類：(1)“安穩作用”(Orthostatic action)，(2)“不穩作用”(Astatic action)(3)“混合作用”(Heterostatic action)，(4)鬆弛作用(Relaxed action)。

在結構學中，我們有兩個基本假設，一為Hooke定律，另一為“形變”(Deformation)的數值與結構原來尺寸比較甚為微小，如果這兩個假設不很錯誤，則在若干情形之下，作用疊加原則可以應用。所謂作用疊加原則即是“幾個因素聯合產生的後果等於他們個別產生的後果的總和”，凡適用作用疊加原則的結構作用就統稱為“安穩作用”而產生這種作用的荷重即稱為“安穩荷重”，在這種作用之下，結構恆為穩定，應力與應變恆與荷重成定比。雖然多數結構作用屬於此類，但亦有例外。有些結構作用Hooke定律雖可應用，形變數值雖甚微小，但應力與應變却不與荷重成定比，換言之，即作用疊加原則不能應用，上面所述不穩作用與混合作用即屬此範疇。何謂不穩作用呢？茲以細長之柱為比喻，假設此柱兩端為鉸支(Hinged)，並受一軸線荷重(axial load)，如荷重的數值甚小，則此柱不致有橫向撓度(Lateral deflection)。但根據Eular公式，當荷重遞增至臨界值(Critical Value)時，此細長之柱將突然彎曲成為波狀，這時，即使荷重不變，柱亦可於任何彎曲程度之下平衡，以至折斷。此種平衡係一中性平衡(Neutral Equilibrium)亦即為不穩定的平衡。類似此種

情形頗多，細長之柱不過其中一例而已。凡屬此類的結構作用就統稱為不穩作用。至於混合作用，則可以說是安穩作用與不穩作用並存的作用。如果荷重可分為兩部份，一部份的單獨存在產生安穩作用，另一部份的單獨存在產生不穩作用，則此兩部份荷重同時存在時，所產生的作用，既不同於安穩作用，亦迥異於不穩作用，更不等於兩部份荷重個別產生的作用之和。如荷重逐增，其結果為作用疊加原則不適用於任何階段，而當不穩荷重達到其臨界值時，中性平衡情形仍然發生。此種作用即名為混合作用。一加長之柱同時承受軸線壓力與橫向荷重即為其一簡單之例。最後論及第四種作用——鬆弛作用，仍以細長之柱同時承受軸線壓力與橫向荷重為例：軸線壓力乃一不穩荷重，橫向荷重為一安穩荷重。倘此柱突然失去剛性而變為一繩索，牠勢必無法繼續承受原來的荷重。但如將軸線壓力換為軸線拉力，則此繩索即可繼續承受橫向荷重，此軸線拉力稱為安定力 (Stabilizing Force)，即將不穩荷重顛倒後所得之力。此種失去剛性，藉安定力以承受安穩荷重的作用，即稱為鬆弛作用。Westergaard氏進一步指出：屬於混合作用的問題，可由其餘三種作用的解答以求解。其詳細方法讀者可參攷 Westergaard氏的原文，茲不贅述。

用上述術語來說，吊橋是反常型結構而處於混合作用之下。因其為反常型結構，故設計時必須反覆修改；因其處於混合作用，故作用疊加原則不能應用。這兩層關係使吊橋的理論與設計極為繁複。關於吊橋文獻上曾有多種理論，工程師所熟知的是“彈性理論”與“撓度理論”。前者太不精確而後者過於繁複。除此以外，近年來尚有兩種卓異的貢獻，其一為 Timoshenko 氏【註四】的三角級數法；另一為 Westergaard 氏的建議，把吊橋當作一個彈性穩定的問題。Timoshenko 氏的方法固屬進步，但是求吊索應力的水平分力時仍嫌繁冗。Westergaard 氏【註五】的建議不曾發揮到實用地步，並且工程師似尚未加以注意。本文在理論方面包括兩點：(1) 根據 Westergaard 氏的建議，將吊橋的應力與形變用三角級數表出。可注意者，乃此等級數與 Timoshenko 氏所得的結果一致，雖然等出方法完全依循另一途徑。在作者的導出中，吊索與加勁桁的相互作用似乎更加明顯，僅由一個加勁因素控制，而這個加勁因素

具有物理意義。(2)由吊索的內能方程式(如Timoshenko氏所用者)導出一直接計算吊索應力的水平分力的普遍性公式,如此乃使吊橋的分析方便甚多。

就設計而論,其最困難處,是在設計之前,加勁桁的尺寸與重量必須假定,而此種假定又無法準確。作者建議一設計程序,即先假定一加勁因素然後加以改正,此程序似甚合實用。為了便利分析起見,作者並導出些決定活載重位置的方程式。

此文內,下述三種假定仍然存在:

1. 吊索牽應力的水平分力沿索長不變。
2. 加勁桁兩端係絞支。
3. 呆荷重全由吊索承受,對加勁桁毫無影響。

II. 符號釋義

(1) 設計數據

l = 中孔跨度。

f = 中孔吊索的最大“垂落”(Sag)。

$n = \frac{f}{l}$ = 垂度(Sag Ratio)。

w = 中孔每單位長度的呆荷重。

p = 橋上每單位長度的活荷重。

$r = \frac{p}{w}$ = 中孔載重比。

$l_1, f_1, n_1, w_1,$ 及 r_1 = 邊孔的上列各項。

α = 邊孔吊索弦線(Chord)的傾斜角度。

L' = 吊索自邊孔端點至錨點的長度,加吊索在塔頂的長度。

l' = L' 的水平投影。

E = 加勁桁的彈性係數。

E_c = 吊索的彈性係數。

ω = 吊索的膨脹係數。

Δt = 可能的溫度升降。

$x, y =$ 中孔吊索未受活荷重時的坐標 $y = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)$.

$x_1, y_1 =$ 邊孔吊索未受活荷重時的坐標 $y_1 = \frac{4f_1}{l_1^2}(l_1x_1 - x_1^2)$

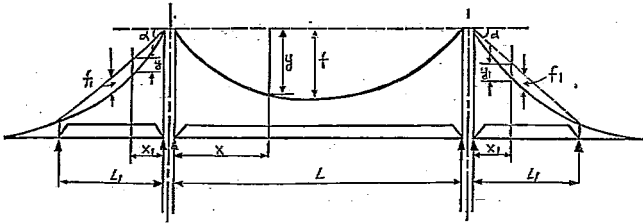


圖 (1)

(2) 關於吊索的各项常数：

$$L_s = \int \frac{ds^3}{dx^2} = l(1 + 8n^2) + 2l_1 \sec^3 \alpha (1 + 8n_1^2) + \frac{L'^3}{1'^2}$$

$$L_t = \int \frac{ds^2}{dx} = l(1 + \frac{16n^2}{3}) + 2l_1(1 + \frac{16}{3}n_1^2 + 4n_1 \tan \alpha + \tan^2 \alpha) + \frac{L'^2}{1'}$$

A = 吊索截面積。

$$H_0 = \text{吊索僅受吊荷重時的應力的水平分力} = \frac{wl^2}{8f} = \frac{w_1 l_1^2}{8f_1}$$

D ± = 1 + 2C_s + C₀ ± C_t = 在求吊索應力的水平分力的公式內的分母 (無因次之數)

$C_0 = \frac{0.19(1 + \beta + Ll)}{nf} \cdot \frac{H_0 L_s}{E_c A}$ = 在 D 內代表吊索牽長的影響之一項。

(約 = $\frac{0.19(1 + 0.5r + Ll)}{nf} \cdot \frac{H_0 L_s}{E_c A}$)

$C_t = \frac{0.19 \omega \Delta t L_t}{nf}$ = 在 D 內代表溫度升降影響之一項。

(3) 關於加勁桁的各项常数：

I = 中孔加勁桁的轉動慣量 (Moment of inertia)

h = 中孔加勁桁的高度。

I_1 及 h_1 = 邊孔加勁桁的上列兩項。

$$Q_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \text{最小臨界荷重 (Critical load)}。$$

$$Q_m = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} = m^2 Q_1 = \text{第 } m \text{ 次臨界荷重}。$$

$$\mu l = \frac{Q_1}{H_0} = \frac{EI}{H_0} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \text{中孔的加勁因數}。$$

$$\mu l_1 = \frac{E I_1 h_1}{H_0} \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 = \text{邊孔的加勁因數}。$$

$$C_s = \frac{n_1 i_1}{n f} \frac{1 + \beta + \mu l}{1 + \beta + \mu l_1} \approx \frac{n_1 i_1}{n f} \frac{1 + 0.5 r + \mu l}{1 + 0.5 r + \mu l_1} = \text{在 } D \text{ 內代表邊孔}$$

影響之一項。

(4) 其他符號：

H_a = 因活荷重或溫度升降等所發生的吊索應力的水平分力。

$$\beta = \frac{H_a}{H_0}。$$

$H = H_a + H_0 = H(1 + \beta) = \text{吊索的總應力的水平分力}。$

η = 加勁桁或吊索的豎向變位。

θ = 加勁桁的角變位 (Angle Change)。

M = 加勁桁的彎矩。

V = 加勁桁的剪力。

q = 加勁桁所受的荷重 = 荷重減去吊桿拉力 (Tension in Suspenders)。

q_c = 吊索除吊荷重外所受的荷重。

k = 代表橋上荷重所佔長度之一比數。

k' = 代表橋上荷重位置之一比數。

$j = \frac{x}{l} = \text{代表加勁桁的一截面之一比數}。$

P = 集中荷重。

K_m = 荷重函數——代表荷重的性質與位置之函數。

S = 總應力。 s = 單位應力。

(5) 指標(Subscripts)

M 指中孔。 1, 2, 指邊孔。
 t 指溫度。 c 指加勁桁的中心。
 e 指加勁桁的兩端。 1/4 指加勁桁的1/4 點。
 ' 指安穩作用。 '' 指鬆弛作用。

III 加勁桁各種函數的導出

Westergaard氏關於彈性穩定的理論，前文已略加提及。現將此種理論應用於吊橋分析。

(a) 不穩作用：在此作用之下，吊索承受一不穩荷重，Q (如圖二)。假設吊桿的形變可以略去，並能傳遞壓力，則加勁桁的位移應等於吊索的位移，由圖(二)所示的情形，可於 Q與η之間，建立下列關係：

$$EI \frac{d^2 \eta}{dx^2} = -M = -Q(y + \eta) \quad \text{或} \quad \frac{d^2 \eta}{dx^2} + \frac{Q}{EI} \eta = -\frac{Q}{EI} y \dots \dots (1)$$

將 y 展開為一 Fourier 級數，可得， $y = \sum_{1,3,5,\dots} B_m \sin \frac{m\pi x}{l}$

$$\text{故} \quad \eta = \sum_{1,3,5,\dots} \frac{\frac{Q}{EI} B_m}{\frac{\pi^2 m^2}{l^2} - \frac{Q}{EI}} \sin \frac{m\pi x}{l}$$

為(1)式的特殊解答(Particular Solution)。

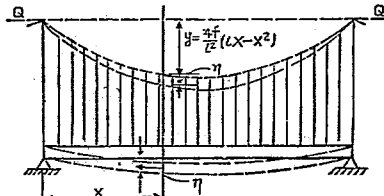


圖 (2)

(1) 式的一般解答為 $\eta = A \sin \sqrt{\frac{Q}{EI}} x + B \cos \sqrt{\frac{Q}{EI}} x$, 因當 $x=0$ 或 l 時 $\eta=0$

故 $B=0, A$ 不定數或零, 視 $\sqrt{\frac{Q}{EI}}$ 是否等於 $\frac{m\pi}{l}$ 而定, 故 (1) 式的完全解答為

$$\eta = A \sin \sqrt{\frac{Q}{EI}} x + \sum_{1,3,5} \frac{\frac{Q}{EI} B_m}{\frac{m^2 \pi^2}{l^2} - \frac{Q}{EI}} \sin \frac{m\pi x}{l} \dots \dots \dots (2)$$

在上式中若 $Q = Q_m = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^2} \dots \dots \dots (3)$ 則 η 為無窮大或不定數, 視 m 為單數或雙數而定, 故此時加勁桁的形狀接近一波數等於 m 的正弦曲線。因此 (3) 式所表的 Q_m 即為 m 次的臨界荷重。

最小的臨界荷重為 $Q_1 = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \dots \dots \dots (4)$ 恰與 Euler 氏公式相同。

(b) 安穩作用：任何活荷重均可分為兩部：一部可視為呆荷重掛於吊索上，使吊索拉力的水平分力由 H_0 增至 $(1+\beta) H_0$ ，剩餘的一部則視作安穩荷重，置於加勁桁上。該先分析一如圖 (三, a) 所示的荷重情形。此等荷重可分為圖 (三, b) 與圖 (三, c) 兩部。前者可視作安定力，後者則可視作安穩荷重。

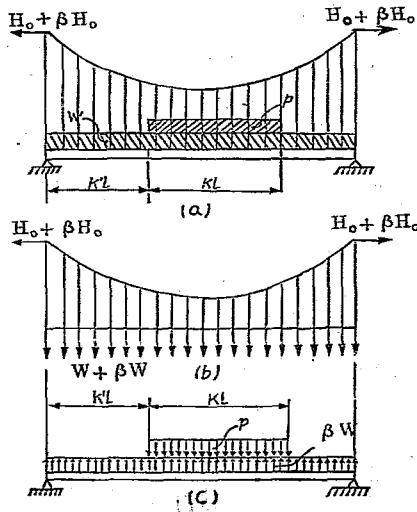


圖 (3)

圖 (三, c) 所示的安穩荷重乃 x 的函數, 可展開成一 Fourier 氏級數, 此級數的第 m 項係數應為

$$A'_m = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{(k'+k)l}{kl} P \sin \frac{m\pi x}{l} dx$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{l} \int_0^l \beta w \sin \frac{m\pi x}{l} dx \\
 & = \frac{4p}{m\pi} \sin \frac{1}{2} m(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2} mk\pi - \frac{4\beta w}{m\pi} \sin^2 \frac{m\pi}{2} \\
 & = \frac{4w}{m\pi} \left[r \sin \frac{1}{2} m(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2} mk\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] \dots\dots\dots(5)
 \end{aligned}$$

故安穩荷重可用下列級數代表：

$$\begin{aligned}
 q' = \frac{4w}{\pi} \sum \frac{1}{m} \left[r \sin \frac{m}{2} (2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2} k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] \\
 \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(6)
 \end{aligned}$$

求連續積分可得：

$$\begin{aligned}
 V' = \frac{4wl}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^2} \left[r \sin \frac{m}{2} (2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2} k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] \\
 \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M' = \frac{4wl^2}{\pi^2} \sum \frac{1}{m^3} \left[r \sin \frac{m}{2} (2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2} k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] \\
 \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \theta' = \frac{4wl^3}{EI\pi^4} \sum \frac{1}{m^4} \left[r \sin \frac{m}{2} (2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2} k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] \\
 \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \eta' = \frac{4wl^4}{EI\pi^5} \sum \frac{1}{m^5} \left[r \sin \frac{m}{2} (2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2} k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right] \\
 \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(10)
 \end{aligned}$$

(c) 鬆弛作用：設想加勁桁失去其剛性，則一切荷重均由吊索承受，因吊索不能承受彎矩，根據平衡原理吊索的豎向變位應為：

$$\begin{aligned}
 \eta'' = \frac{M'}{H} = \frac{M'}{H_0(1+\beta)} = \frac{32f}{\pi^3(1+\beta)} \sum \frac{1}{m^3} \left[r \sin \frac{m}{2} (2k'+k)\pi \right. \\
 \left. \cdot \sin \frac{m}{2} k\pi - \beta \sin \frac{m\pi}{2} \right] \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(11)
 \end{aligned}$$

(d) 混合作用：此為吊橋實在的結構作用。根據 Westergaard 氏理論混合作用的解答可自安穩作用或鬆弛作用覆致【註三】。如自安穩作用覆致，僅須將其解答的各項乘以一折合率， $\frac{Q_m}{Q_m+H}$ ；如自鬆弛作用覆致，則每項須乘以折合率 $\frac{H}{Q_m+H}$ 。這兩個折合率的和等於 1。

現在 $Q_m = \frac{m^2 \pi^2 EI}{l^3} = m^2 Q$ 又 $H = H_0(1 + \beta)$

故 $\frac{Q_m}{Q_m+H} = \frac{Q_m/H}{Q_m/H+1} = \frac{m^2/1+\beta \cdot Q_1/H_0}{(m^2/1+\beta \cdot Q_1/H_0)+1} = \frac{m^2/1+\beta \cdot \mu}{m^2/H\beta \cdot \mu+1}$
 $= \frac{m^2 \mu}{1+\beta+m^2 \mu} \dots\dots\dots (12)$

$\frac{H}{Q_m+H} = \frac{1}{Q_m/H+1} = \frac{1}{m^2/1+\beta \cdot \mu+1} = \frac{1+\beta}{1+\beta+m^2 \mu} \dots\dots\dots (13)$

上式中 $\mu = \frac{Q_1}{H_0} = \frac{EI}{H_0} \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 = \text{“加勁因素”}$

當 $\mu = 0$ ，折合率 $\frac{H}{Q_m+H} = 1$ ，因此 $\eta = \eta''$ 。此係無加勁桁架的情形。當 $\mu = \infty$ 折合率 $\frac{Q_m}{Q_m+H} = 1$ ，因此 $\eta = \eta' = 0$ ，此相當於加勁桁為一剛體 (Rigid body) 時的情形。應用上述的折合率可求得混合作用的解答如下：

$\eta = \sum \frac{m^2 \mu}{1+\beta+m^2 \mu} \eta'_m = \sum \frac{1+\beta}{1+\beta+m^2 \mu} \eta''_m$ (η'_m 與 η''_m 乃指 η' 及 η'' 之第 m 項而言)

$= \frac{32}{\pi^3} f \sum_{k=1,3,5,\dots}^m r \sin \frac{m}{2} (2k'+k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2}$
 $\frac{1}{m^3(1+\beta+m^2 \mu)}$
 $\cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots (14)$

$\theta = \frac{d\eta}{dx} = \frac{32}{\pi^2} \eta \sum \frac{r \sin \frac{m}{2} (2k'+k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{m^3(1+\beta+m^2 \mu)}$
 $\cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots (15)$

$$M = \sum_m \frac{m^2 AL}{1 + \beta + m^2 AL} M'_m \quad (M'_m \text{ 乃指 } M' \text{ 之第 } m \text{ 項})$$

$$= \frac{4wl^2}{\pi^3} \sum_m \frac{AL \left[r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{m(1 + \beta + m^2 AL)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(16)$$

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{4wl}{\pi^2} \sum_m \frac{AL \left[r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{(1 + \beta + m^2 AL)} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(17)$$

$$q = \sum_m \frac{m^3 AL}{1 + \beta + m^2 AL} q'_m$$

$$= \frac{4w}{\pi} \sum_m \frac{m AL \left[r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{(1 + \beta + m^2 AL)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(18)$$

q 與 θ 兩級數收斂甚速，計算兩三項即可得相當準確的結果，但其餘各函數的級數則不然，必須計算多項方可準確，此等函數可寫為下列收斂較速的形式：

$$M = \sum_m \left(1 - \frac{1 + \beta}{1 + \beta + m^2 AL} \right) M'_m = M' - \sum_m \frac{1 + \beta}{(1 + \beta + m^2 AL)} M'_m$$

$$= M' - \frac{4wl^2}{\pi^3} \sum_m \frac{(1 + \beta) \left[r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{m^3 (1 + \beta + m^2 AL)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(19)$$

同理：

$$V = V' - \frac{4wl}{\pi^2} \sum_m \frac{(1 + \beta) \left[r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{m^2 (1 + \beta + m^2 AL)} \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(20)$$

$$q = q' - \frac{4w}{\pi} \sum \frac{m(1+\beta) \left[r \sin \frac{m}{2}(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2}k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{m(1+\beta+m^2/L)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(21)$$

因 q' = 均佈荷重 p + 均佈荷重 $(-\beta w)$, 故 q_0 = 荷重 $p - q = \beta w$

$$+ \frac{4w}{\pi} \sum \frac{m(1+\beta) \left[r \sin \frac{m}{2}(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{m}{2}k\pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2} \right]}{m(1+\beta+m^2/L)} \cdot \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots\dots(22)$$

M' , V' , 及 q' 均可用靜力學自圖 (三c.) 甚易求得, 不必用三角級數。

以上所導出的各函數的公式, 均可應用於邊孔加勁桁。只需將式中關於中孔的各項常數易以邊孔相當的常數即可。

IV. 吊索應力的水平分力的計算法

公式(14)至(22)內, 僅有 β 的數值尚未算出。 β 乃代表吊索應力的水平分力的增加數值。假設橋上活荷重如圖 (四) 所示, 吊索的豎變位應等於加勁桁的撓度。吊索的荷重應等於吊樣的拉力。

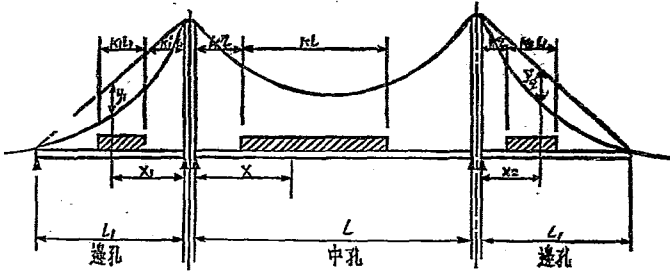


圖 (4)

故吊索的豎變位與荷重如下:

中孔: 豎變位 = η 荷重 = $w + q_0$

邊孔(1): 豎變位 = η_1 荷重 = $w + q_{e1}$

邊孔(2): 豎變位 = η_2 荷重 = $w + q_{e2}$

倘將吊索視為一自由體 (Free body) 則因活荷重與溫度升降所增加的内能應等於荷重所做的功。因此可建立下列的方程式:

$$\left(H_0 + \frac{H_1}{2}\right) \frac{H_1 L_s}{E_c A} \pm \left(H_0 + \frac{H_1}{2}\right) \omega \Delta t L_t = \int_0^l \left(w + \frac{q_e}{2}\right) \eta dx + \int_0^{l_1} \left(w + \frac{q_{e1}}{2}\right) \eta_1 dx + \int_0^{l_2} \left(w + \frac{q_{e2}}{2}\right) \eta_2 dx$$

或

$$\left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \frac{\beta H_0^2 L_s}{E_c A} \pm \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \omega \Delta t L_t = \int_0^l \left(w + \frac{q_e}{2}\right) \eta dx + \int_0^{l_1} \left(w + \frac{q_{e1}}{2}\right) \eta_1 dx + \int_0^{l_2} \left(w + \frac{q_{e2}}{2}\right) \eta_2 dx \dots \dots \dots (23)$$

方程式(23)第二項乃代表溫度升降的影響, 溫度升用正號, 降用負號。

方程式右側各項積分的演解相當繁複, 茲分別演出並化簡如后:

自式(14) $\eta = \frac{32}{\pi^3} f \sum \frac{a_m}{m^3} \sin \frac{m\pi x}{l}$

上式中 $a_m = \frac{r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{(1 + \beta + m^2/l^2)}$

自式(22) $q_e = \beta w + \frac{4}{\pi} w (1 + \beta) \sum \frac{a_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{l}$

$$\int_0^l \left(w + \frac{q_e}{2}\right) \eta dx = \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) w \int_0^l \eta dx + \frac{2}{\pi} (1 + \beta) w$$

$$\int_0^l \left(\sum \frac{a_m}{m} \sin \frac{m\pi x}{l}\right) \eta dx = \frac{512}{\pi^4} (1 + \frac{\beta}{2}) H_0 n f \sum_{1,3,5} \frac{a_m}{m^4}$$

$$+ \frac{256}{\pi^4} (1 + \beta) H_0 n f \sum_{1,2,3} \frac{a_m^2}{m^4} = \frac{512}{\pi^4} (1 + \frac{\beta}{2}) H_0 n f \left(\sum_{1,3,5} \frac{a_m}{m^4} + \frac{1 + \beta}{2 + \beta} \sum_{1,2,3} \frac{a_m^2}{m^4}\right)$$

上式右側的級數收斂甚快, 級數 $\sum \frac{a_m}{m^4}$ 中的 $m > 3$ 各項及級數 $\sum \frac{a_m^2}{m^4}$

中 $m > 1$ 各項均可略去不計, 故

$$\int_0^l \left(w + \frac{q_e}{2}\right) \eta dx = \frac{512}{\pi^4} (1 + \frac{\beta}{2}) H_0 n f \left[\left(1 + \frac{1 + \beta}{2 + \beta} a_1\right) a_1 + \frac{a_3}{81} \right]$$

上式右側括弧 $(1 + \frac{1+\beta}{2+\beta} a_1)$ 中的 $\frac{1+\beta}{2+\beta} a_1$ 一項乃代表吊桿拉力不均勻的

影響。在“撓度理論”中，吊桿拉力是當作均勻的。這個假設的誤差，可自

$\frac{1+\beta}{2+\beta} a_1$ 與1的比例估計。

$$\frac{1+\beta}{2+\beta} a_1 = \frac{1+\beta}{2+\beta} \frac{r \sin \frac{1}{2}(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi - \beta}{1+\beta+\mu}$$

在一般情形之下， $r \sin \frac{1}{2}(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi$ 的最大值約為 $(1.25\beta + 0.025)$ 。

$$\text{故 } \frac{1+\beta}{2+\beta} a_m = \frac{0.25\beta + 0.025}{1+\beta+\mu} \quad (\text{大約值}).$$

在目前已建築的吊橋中， β 甚少有超過0.6者， μ 約等於0.1至0.6。表(一)

示 $\frac{1+\beta}{2+\beta} a_m$ 在各種情形之下的數值。

表 (一)

	極限情形(不可能)	於目前實例中， μ 與 β 數值之變化				普通情形
μ	任何數值	0.1	0.1	0.6	0.6	0.25
β	∞	0.6	0.0	0.6	0.0	0.25
$\frac{1+\beta}{2+\beta} a_m$	0.250	0.063	0.011	0.049	0.008	0.032

觀察上表，可知若將吊桿拉力視為均勻分佈以計算吊索的內能，其誤差最大約為7%，平均約3%。但此並非說由方程(23)中算出的 β 亦有同樣大小的誤差。據作者的估計，若將吊桿拉力視為均勻分佈，(按：“撓度理論”係如此假定)， β 的誤差不致超過1%。如忽略此微小的誤差，可得：

$$\begin{aligned} \int_0^1 (w + \frac{q_0}{2}) \eta dx &= \frac{512}{\pi^4} (1 + \frac{\beta}{2}) H_{\text{onf}} \left[a_1 + \frac{a_3}{81} \right] \\ &= \frac{512}{\pi^4} (1 + \frac{\beta}{2}) H_{\text{onf}} \left[\frac{r \sin(\frac{1}{2}2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi - \beta}{1+\beta+\mu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r \sin \frac{3}{2}(2k'+k)\pi \cdot \sin \frac{3}{2}k\pi - \beta}{81(\beta+9\mu)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{512}{\pi^4} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \left[1 + \frac{1}{81} \frac{(1 + \beta + 9\mathcal{M})}{1 + \beta + 9\mathcal{M}} \right] \cdot \frac{\sin \frac{3}{2}(2k' + k)\pi \cdot \sin \frac{3}{2}k\pi}{\sin \frac{1}{2}(2k' + k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi} \Big] \\
&\times \frac{r \sin \frac{1}{2}(2k' + k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi}{1 + \beta + \mathcal{M}} - \frac{512}{\pi^4} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \frac{\beta}{1 + \beta + \mathcal{M}} \\
&\quad \times \left[1 + \frac{1}{81} \frac{(1 + \beta + \mathcal{M})}{1 + \beta + 9\mathcal{M}} \right] \\
&= \frac{512}{\pi^4} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \left[\left(1 + \frac{1}{81} \cdot \frac{1 + \beta + \mathcal{M}}{1 + \beta + 9\mathcal{M}}\right) + \frac{2}{81} \frac{(1 + \beta + \mathcal{M})}{1 + \beta + 9\mathcal{M}} \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \cos(2k' + k)\pi + \cos k\pi + 2\cos(2k' + k)\pi \cos k\pi \right\} \right] \\
&\times \frac{r \sin \frac{1}{2}(2k' + k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi}{1 + \beta + \mathcal{M}} \\
&\quad - \frac{512}{\pi^4} \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \frac{\beta}{1 + \beta + \mathcal{M}} \left[1 + \frac{1}{81} \frac{(1 + \beta + \mathcal{M})}{1 + \beta + 9\mathcal{M}} \right]
\end{aligned}$$

與 1 比較時， $\frac{1}{81} \frac{1 + \beta + \mathcal{M}}{1 + \beta + 9\mathcal{M}}$ 乃一甚小之數量，且不甚受 β 數值的影響。因此可於 $\left(1 + \frac{1}{81} \frac{1 + \beta + \mathcal{M}}{1 + \beta + 9\mathcal{M}}\right)$ 中將 β 略去，並使 \mathcal{M} 等於 0.3 (在普通情形下的平均數值) 而不致發生很大的誤差，如此即得：

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(w + \frac{q_0}{2}\right) \eta \, dx = 5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \left[1 + 0.0246 \frac{1 + \mathcal{M}}{1 + 9\mathcal{M}} \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ \cos(2k' + k)\pi + \cos k\pi + 2\cos(2k' + k)\pi \cos k\pi \right\} \right] \\
&\times \frac{r \sin \frac{1}{2}(2k' + k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi}{1 + \beta + \mathcal{M}} - 5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \frac{\beta}{1 + \beta + \mathcal{M}} \\
&\equiv 5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \text{nf} \frac{(1 + \delta) r \sin \frac{1}{2}(2k' + k)\pi \cdot \sin \frac{1}{2}k\pi - \beta}{1 + \beta + \mathcal{M}} \dots (24)
\end{aligned}$$

上式中 $\delta = 0.0246 \frac{1 + \mathcal{M}}{1 + 9\mathcal{M}} \left[\cos(2k' + k)\pi + \cos k\pi + 2\cos(2k' + k)\pi \cdot \cos k\pi \right]$

與 1 比較時， δ 亦為一極小的數量。故可視作一改正數 (Correction)。

當 $k > \frac{1}{2}$ ， δ 的數值等於零。圖 (五) 表示 δ 的數值的變化。

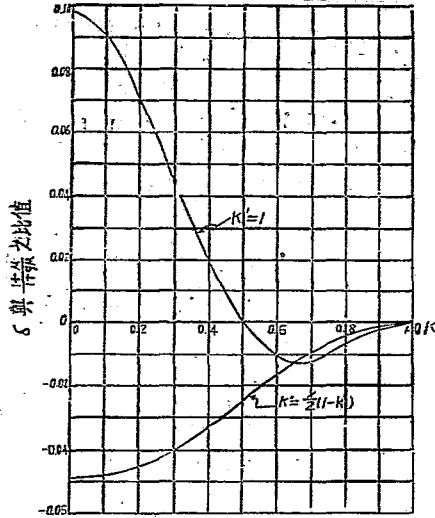


圖 (5)

(23)式右側最後二積分亦可寫為與(24)式相似的形式(祇須將(24)式內的 m, i, k', k, r, μ 及 δ 換為 $n_1, i_1, k_1', k_1, r_1, \mu_1$ 及 δ_1)。如將(23)式右側之三積分均化為(24)式的形式即得：

$$\begin{aligned}
 & \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) \beta \frac{H_0^2 L_0}{E_0 A} \pm \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 \omega \Delta t L_0 \\
 &= 5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 n f (1 + \delta) \frac{r \sin \frac{1}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k \pi - \beta}{1 + \beta + \mu} \\
 &+ 5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 n_1 f_1 (1 + \delta_1) \frac{r_1 \sin \frac{1}{2} (2k_1' + k_1) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k_1 \pi - \beta}{1 + \beta + \mu_1} \\
 &+ 5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0 n_2 f_2 (1 + \delta_2) \frac{r_2 \sin \frac{1}{2} (2k_2' + k_2) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k_2 \pi - \beta}{1 + \beta + \mu_2} \\
 &\approx \frac{5.277 \left(1 + \frac{\beta}{2}\right) H_0}{1 + \beta + \mu} \text{ 遍除上式各項並化簡之, 可得:}
 \end{aligned}$$

$$\beta \left[1 + \frac{2n_1 f_1 (1 + \beta + M)}{nf (1 + \beta + M_1)} + \frac{0.19(1 + \beta + M)}{nf} \cdot \frac{H_0 L_s}{E_c A} \pm 0.19 \frac{\omega \Delta t L_t}{nf} \right]$$

$$= (1 + \delta) r \sin \frac{1}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k \pi + \frac{n_1 f_1 (1 + \beta + M)}{nf (1 + \beta + M_1)}$$

$$\times r_1 \left[(1 + \delta_1) \sin \frac{1}{2} (2k_1' + k_1) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k_1 \pi \right.$$

$$\left. + (1 + \delta_2) \sin \frac{1}{2} (2k_2' + k_2) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k_2 \pi \right] \mp \frac{0.19(1 + M) \omega \Delta t L_t}{nf}$$

$$\text{令 } C_s = \frac{n_1 f_1 (1 + \beta + M)}{nf (1 + \beta + M_1)}, \quad C_c = \frac{0.19(1 + \beta + M)}{nf} \frac{H_0 L_s}{E_c A};$$

$$C_t = \frac{0.19 \omega \Delta t L_t}{nf} \quad D_{\pm} = 1 + \frac{2n_1 f_1}{nf} \left(\frac{1 + \beta + M}{1 + \beta + M_1} \right)$$

$$+ \frac{0.19(1 + \beta + M)}{nf} \frac{H_0 L_s}{E_c A} \pm 0.19 \frac{\omega \Delta t L_t}{nf}$$

$$= 1 + 2C_s + C_c \pm C_t \dots \dots \dots (26)$$

則：

$$\beta = \frac{r}{D_{\pm}} (1 + \delta) \sin \frac{1}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k \pi$$

$$+ C_s \frac{r_1}{D_{\pm}} \left[(1 + \delta_1) \sin \frac{1}{2} (2k_1' + k_1) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k_1 \pi \right.$$

$$\left. + (1 + \delta_2) \sin \frac{1}{2} (2k_2' + k_2) \pi \cdot \sin \frac{1}{2} k_2 \pi \right] \mp C_c \frac{1 + M}{D_{\pm}} \dots \dots (27)$$

D 係一無因次之數量，包括四項：第一項代表中孔，並等於 1；其餘三項則分別代表邊孔，吊索伸長，及溫度升降三種影響。第一項為主要者，其餘三項的總和通常僅佔 20% 至 30% 之譜。

(27) 式係一計算 β 值相當準確的方程式，解之即得 β 的值。式中第一項代表中孔活荷重，第二項代表邊孔活荷重，第三項則代表溫度升降。(27) 式雖甚複雜，解之不易。但在等號右側各項內，β 的數值對於各項的數值影響極小。易言之，即 D 與 C_s 的數值幾與 β 無關。因此，解此方程式的手續，可大加簡化。吾人可先任意假定 β 的數值，代入 (27) 式的右側，以求左側 β 的值。如求得的 β 的數值與當初假定的數值相差過遠，則可將求得的數值再行代入 (27) 式的右側。這是應用漸近的法則。通常第二次求得的數值已足夠準確。

(27) 式雖不甚難解，但於實用時，仍嫌麻煩。根據下述二理由，吾人可將

其繼續化簡。(a) C_s 及 C_e 隨 β 的變化甚小，故可視為常數。(b) 如 $k > 1$ 之改正數 δ 的值幾等於零(見圖五)。必須 $k < 0.3$ ， δ 始有相當的數值。因為 $k < 0.3$ 的情形在設計中不佔重要地位，並且 β 本身亦係一小數，其改正數當屬高次的小數，故 δ 可自公式(27)中除去，而不致產生大誤差。由於上述事實，作者建議將 δ 略去，並於 C_e 及 C_s 的式中假定 $\beta = 0.5r$ 。如是，乃得下列

$$\text{近似公式 } C_s = \frac{n_1 f_1}{n f} \frac{1 + 0.5r + M}{1 + 0.5r + M_1} \dots\dots\dots (28)$$

$$C_e = \frac{0.19(1 + 0.5r + M)}{n f} \frac{H_0 L_6}{E_c A} \dots\dots\dots (29)$$

$$\beta \text{ 近似值} = \frac{r}{D_{\pm}} \text{Sin} \frac{1}{2} (2k' + k) \pi \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} k \pi + C_s \frac{r_1}{D_{\pm}} \left[\text{Sin} \frac{1}{2} (2k_1' + k_1) \pi \right. \\ \left. \times \text{Sin} \frac{1}{2} k_1 \pi + \text{Sin} \frac{1}{2} (2k_2' + k_2) \pi \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} k_2 \pi \right] \mp C_e \frac{(1 + M)}{D_{\pm}} \dots\dots\dots (30)$$

上列諸公式的誤差通常約等於 $\pm 3\%$ 。公式(30)顯示一重要性質，即計算 β 時，可應用作用疊加原則。因此吾人可將各種因素個別產生的 β 相加，以求由於各種因素同時作用而產生的 β 。設 β_m = 中孔活荷重產生的 β ； β_1 及 β_2 = 兩邊孔活荷重所產生的 β ； β_t = 溫度升降所產生的 β ，於是，

$$\beta = \beta_m + \beta_1 + \beta_2 + \beta_t \dots\dots\dots (31)$$

$$\text{上式中 } \left. \begin{aligned} \beta_m &= \frac{r}{D_{\pm}} \text{Sin} \frac{1}{2} (2k' + k) \pi \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} k \pi \\ \beta_1 &= C_s \frac{r_1}{D_{\pm}} \text{Sin} \frac{1}{2} (2k_1' + k_1) \pi \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} k_1 \pi \\ \beta_2 &= C_s \frac{r_2}{D_{\pm}} \text{Sin} \frac{1}{2} (2k_2' + k_2) \pi \cdot \text{Sin} \frac{1}{2} k_2 \pi \\ \beta_t &= \mp C_t \frac{1 + M}{D_{\pm}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

例題：Manhattan 橋：

設計數據 $M = 0.572$ ， $M' = 2.73$ ， $n f = 14.59$ ， $n_1 f_1 = 1.94$ 。

$\omega \Delta t L_1 = 1.207$ ， $\frac{H_0 L_6}{E_c A} = 4.54$ ， $r = 0.687$ 。

(a) 中孔全長受活荷重，即 $k = 1$ ； $\Delta t = +$ 。

用近似公式(28)至(30)

$$C_t = \frac{0.19 \times 1.21}{14.59} = 0.0157.$$

$$C_b = \frac{1.94}{14.59} \cdot \frac{1+0.344+0.572}{1+0.344+2.73} = 0.0625.$$

$$C_c = \frac{0.19 \times 1.916 \times 4.54}{14.59} = 0.1134.$$

$$D_T = 1 + 0.0625 \times 2 + 0.1134 + 0.0157 = 1.254$$

$$\beta = \frac{0.687}{1.254} - \frac{1.572 \times 0.0157}{1.254} = 0.527.$$

用準確公式(26).

$$C_b = \frac{1.94}{14.59} \frac{1+0.527+0.572}{1+0.527+2.73} = 0.0655.$$

$$C_c = \frac{0.19 \times 2.10 \times 4.54}{14.59} = 0.1242.$$

$$D_T = 1 + 0.0655 \times 2 + 0.1242 + 0.0157 = 1.271.$$

$$\beta = \frac{0.687}{1.271} - \frac{1.572 \times 0.157}{1.271} = 0.521.$$

用“撓度理論”求得的值為 0.521.

近似公式的誤差 = 0.006 = 1.1%

(b) 中孔 $1/4$ 受活荷重, 即 $k' = 0$, $k = \frac{1}{4}$, $\Delta t = +$

用近似公式:

$$\beta = \frac{0.687}{1.254} \times 0.1466 - 0.020 = 0.0606.$$

用準確公式:

$$C_b = \frac{1.94}{14.59} \frac{1+0.061+0.572}{1+0.061+2.73} = 0.0573.$$

$$C_c = \frac{0.19 \times 1.633 \times 4.54}{14.59} = 0.0966.$$

$$D_T = 1 + 2 \times 0.0572 + 0.0966 + 0.0157 = 1.227.$$

$$\text{由圖(五)得} \quad \delta = 0.06 \times \frac{1+0.572}{1+5.15} = 0.018.$$

$$\beta = \frac{0.687}{1.227}(1+0.018) \times 0.1466 - \frac{1.572 \times 0.0157}{1.227} = 0.0633.$$

用“撓度理論”求得的值為0.0632。

近似公式之誤差=0.003=4.3%

上列例題示近似公式的誤差隨活荷重長度的減小而增大。這一點，有下述兩個原因，可資解釋。(a)當活荷重長度減小時， δ 的數值增加(見圖五)。(b)若活荷重長度較短，則 β 的數值亦小，再自此數減去溫度升高的影響，則 β 的數值更小，結果誤差的百分數亦隨之增高。但吾人必須注意，當活荷重長度較短時，誤差的百分數雖甚大，但其絕對數值則極小。如上例， $k = 1/4$ 時，誤差百分數=4.3%，但其他絕對數值僅=0.003。

V. 上述理論在任何載重情形下的應用

$$\text{於公式 (6) 至 (22) 內令 } k_m = r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi \dots (33)$$

k_m 可稱為“荷重函數”，因其代表荷重的性質與位置。 K_m 為 k, k' 及 m 的函數。集中荷重，亦可以一荷重函數表之。例如一集中荷重 p ，作用於 $x = k'l$ 處，吾人可將 p 視為均佈於一無窮小的長度， kl 。如是， p 即變為一均佈荷重

$\frac{p}{kl}$ ，因 kl 為無窮小， $\sin \frac{mk\pi}{2} = \frac{m}{2} k\pi$ ，故 p 的荷重函數可寫為：

$$K_m = \frac{p}{kl} \sin \frac{m}{2} (2k' + 0) \pi \cdot \frac{m}{2} k \pi = \frac{m\pi}{2} \cdot \frac{p}{wl} \sin mk'\pi \dots (34)$$

橋上每一荷重均可用一荷重函數表之。如橋上有多個均佈荷重及集中荷重，則可先將每一荷重的荷重函數求出，再行相加，即得一總荷重函數， $K_m = \sum_i K_{mi}$ ， i 為荷重的數目。如此，可將多數荷重合併為一荷重，前文所有導出的公式均可應用。故在任何載重情形之下：

$$\eta = \frac{32}{\pi^3} f \frac{m}{\sum \frac{K_{mi} - \beta \sin^2 \frac{m\pi}{2}}{m^3(1 + \beta + m^2 \mathcal{M})} \sin \frac{m\pi x}{l}} \dots (35)$$

同理，求 $\theta, M, V, \text{及 } q$ ，均可應用公式 (15) 至 (22)，祇須將各公式中

的 $r \sin \frac{m}{2} (2k' + k) \pi \cdot \sin \frac{m}{2} k \pi$ 。按為 $\sum K_{mi}$ ，對於邊孔，亦可同樣處理。

至於求吊索應力之水平分力，可應用下列公式。此公式係自公式(27)變來。

$$\beta = \frac{1}{D_{\pm}} \left[\sum_{\text{中孔}}^i (1 + \delta_i) K_{1i} + C_s \sum_{\text{邊孔}}^i (1 + \delta_i) k_{1i} \mp (1 + \mu) C_t \right] \quad (36)$$

上式中， D_{\pm} 可用公式(26)計算， δ 可用公式(25)計算。如遇集中荷重，公式(25)可化為： $\delta_{\text{集中荷重}} = 0.0246 \frac{1 + \mu}{1 + 9\mu} (1 + 3 \cos 2k' \pi)$ (37)

計算 C_e ， C_s ，及 D_{\pm} 時，可用判斷將 β 的數值作適宜的假定。

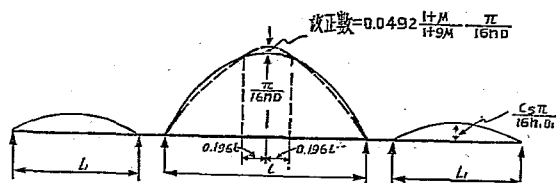
設有一單位集中荷重作用於中孔 $x = k'l$ 處，於是 $K_1 = \frac{\pi}{2wl} \text{Sink}' \pi$ ，遂得：

$$\beta = \frac{\pi}{2D_{\pm}wl} (1 + \delta) \text{Sink}' \pi \quad \text{及} \quad H_a = \frac{\pi}{16nD_{\pm}} (1 + \delta_1) \text{Sink}' \pi \dots \dots (38)$$

同理，如有一單位集中荷重作用於邊孔上，可得：

$$\beta = \frac{C_s \pi}{2D_{\pm}w_1l_1} (1 + \delta_1) \text{Sink}_1' \pi \quad \text{及} \quad H_a = \frac{C_s \pi}{16n_1D_{\pm}} (1 + \delta_1) \text{Sink}_1' \pi \quad (39)$$

公式(38)及(39)代表 H_a 之感應圖。因 δ 係一極小的改正數。故 H_a 之感應圖極接近一正弦圖形。若在邊孔， H_a 本身甚小， δ_1 實可略去不計。茲將 H_a 之感應圖繪出如圖(六)。此處應注意 D_+ 與 D_- 略有差異，故 H_a 之感應圖與溫度升降有關。



----- 正弦圖形 —— H_a 之感應圖

圖 (6)

為讀者方便計，作者將所有導出的公式編入表(二)，各種載重情形均包括在內。此表的用法，一目瞭然，並不須參閱冗長的前文。

Ⅶ. 設計方面的一般討論

吊橋的設計可分為兩部：第一部為選定橋的主要尺寸，如跨度，垂度等。第二部為各部份的設計。第一部乃一經濟問題，不在本文討論範圍之內。關於第二部，吊索與塔架(Tower)的設計，似有一定的法則，無足置論。因此作者在這裏所討論的，僅限於加勁桁的設計。

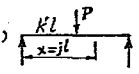
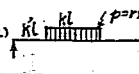
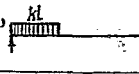
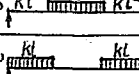
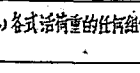
在設計加勁桁之前，吾人應先對加勁桁在吊橋內的功用有一明確的認識。加勁桁的設置，並非為減輕吊索的載重，似無疑問，因為吊索的載重受加勁桁的影響極小。一般看法，均認為加勁桁乃用以減小橋面的變位。此點當係正確。但根據作者的研究，用一根輕的加勁桁，即可減小橋面的變位頗多。然當加勁桁的刚度增高時，此種作用，却逐漸消失。圖(八)表示橋面的最大角變位(Angle Change)與加勁桁刚度的關係。觀察此圖：可知如 $r > 0.6$ ，吾人即頗難使最大角變位小於 2%。但是鐵路橋甚難容許 1% 以上的角變位；即公路橋，大於 2% 的角變位亦不甚適宜。故加勁桁雖能減小橋面的變位，但如欲減小至適當的程度，加強加勁桁的刚度，並非最有效與經濟的辦法。另一可能更有效的辦法是用價廉且較重的橋面以減小載重比， r ，(參看圖八)，現在一般設計的傾向似係如此。

經過一番考慮，作者相信加勁桁的最大功用，是避免在活荷重經過吊橋時橋面的波動。於此點功用，加勁桁的效率極高。就橋面的豎變位(η)而論，在任何載重情形之下：

$$\eta = \frac{32}{\pi^3} f \left[\frac{k_1 - \beta}{1 + \beta + \mu L} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{k_2}{8(1 + \beta + \mu L)} \sin \frac{2\pi x}{l} + \frac{k_3 - \beta}{27(1 + \beta + \mu L)} \sin \frac{3\pi x}{l} + \dots \right]$$

此公式將橋面的豎變位分為若干不同波數的正弦曲線。加勁桁的作用係由加勁因素 μL 表示。 $\mu L = 0$ ，即為無加勁桁的情形。加勁桁減小各種正弦曲線的幅長(Amplitude)的效率可用 $\mu^2 L$ 與 $(1 + \beta)$ 的比例來代表。因 $\mu^2 L$ 與 μ^3 成

表 (二)

加勁桁的各種函數					
活荷重	各種函數	荷重因數 K_m	各種作用		
			截面位置	M'	V'
(1)		$\frac{m\pi}{2} \frac{P}{nL} \sin mk\pi$	$0 < j < k'$	$PL(1-k)j - \frac{PnL^2}{2}(j-j^2)$	$(1-k)P - \frac{1}{2}PnL(1-2j)$
			$k' < j < L$	$Plk'(1-j) - \frac{PnL^2}{2}(j-j^2)$	$-k'P - \frac{1}{2}PnL(1-2j)$
(2)		$r \sin^2 \frac{m\pi}{2} (2k+k') \sin \frac{m\pi}{2} k'$	$0 < j < k'$	$\frac{1}{2}nL^2 \{ k(2-2k-k')j^2 - \beta(j-j^2) \}$	$\frac{1}{2}nL \{ r k(2-2k-k') - \beta(1-2j) \}$
			$k' < j < k+k'$	$\frac{nL^2}{2} \{ r k(2-2k+k')j^2 - \beta(j-j^2) \}$	$\frac{1}{2}nL \{ r k(2-2k-k') - 2\beta j - \beta(1-2j) \}$
			$k' < j < L$	$\frac{nL^2}{2} \{ r k(2k+k')(1-j) - \beta(j-j^2) \}$	$-\frac{1}{2}nL \{ r k(2k+k') + \beta(1-2j) \}$
(3)		$r \sin^2 \frac{m\pi}{2} k\pi$	$0 < j < k$	$\frac{nL^2}{2} \{ r k(2-k)j^2 - \beta(j-j^2) \}$	$\frac{1}{2}nL \{ r k(2-k) - \beta(1-2j) \}$
			$k < j < L$	$\frac{nL^2}{2} \{ r k^2(1-j) - \beta(j-j^2) \}$	$-\frac{1}{2}nL \{ r k^2 + \beta(1-2j) \}$
(4)		$r \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{m\pi}{2} k\pi$ m 僅能為奇數	$j = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}nL^2 \{ k(2-k)r - \beta \}$	0
(5)		$2r \sin^2 \frac{m\pi}{2} k\pi$ m 僅能為奇數	$j = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}nL^2 \{ 4rk^2 - \beta \}$	0
(6)	各式活荷重的任何組合	$\sum K_m i$		視實際情形而定	

正比。故可說，當加勁桁成 m 個波形時，其剛性即擴大 m^2 倍，因此加勁桁不易彎成波數甚多的形狀。有人【註六】曾認為加勁的橋面 (Stiffened deck) 受活荷重後的位置乃其不受活荷重時的位置與未加勁的橋面 (Unstiffened deck) 的位置的平均，如圖(七.a)及(七.c)所示。這觀念是錯誤的，加勁橋面的正確位置應如圖(七.b)及(七.d)所示。



圖 (7)

.....未加勁橋面之位置
 ——加勁橋面之位置

歸納以上的討論，可得一結論即：加勁桁自吊索上分擔很少的荷重。但能減小橋面的變位與波動。故加勁桁為有益且不可少者，但當其刚度增大時，其益處即逐漸為其增加的材料所掩蔽。故一吊橋應加勁至何程度，實係一經濟問題。

設計加勁桁的主要困難是：着手設計以前，必須假定加勁桁的轉動慣量與重量，而此種假定甚難準確。明瞭上述加勁桁的功用與加勁因素的關係後，作者認為設計應自假定加勁因數的數值着手。在目前實例中，作者發現中孔的加勁因數約等於 0.15 至 0.60。邊孔的加勁因數則約等於中孔的四倍至五倍。然轉動慣量的變化則甚大，自數千呎²-呎² 以至數萬呎²-呎²，因此加勁因數的假定較之轉動慣量的假定容易甚多。此外，加勁因數係無因次之數，可用以比較兩個尺寸不同的吊橋的刚度。

為初步設計方便計，作者導出一些求加勁桁的最大變位與最大應力的近似公式，列入表(三)。此等公式乃自表(二)內的級數公式刪變而得。其導出的步驟現從略，其準確程度則有待用者的證明了。表(三)內求加勁桁最大彎曲應力 (Bending Stress) 的公式係自求彎矩的公式導出，茲解釋如后：

最大彎曲應力 = $\frac{M_{最大}V}{I_{最大}}$ 式中， V = 自加勁桁的中性軸至弦桿中心的距離。

因 $AL = \frac{\pi^2 EI}{H_0 l^3} = \frac{8n\pi^2 EI}{wl^3}$ 而通常式中的 I ，係用加勁桁的平均轉動慣量。

$$\text{故 } I_{\text{平均}} = \frac{Alwl^3}{8n\pi^2 E} ; \quad I_{\text{最大}} = \frac{Alwl^3}{8n\pi^2 E} \cdot \frac{I_{\text{最大}}}{I_{\text{平均}}}$$

設 $\frac{1}{i} = \frac{I_{\text{最大}}}{I_{\text{平均}}} = \text{加勁桁的最大轉動慣量與平均轉動慣量的比}$

$$\text{遂得：最大彎曲應力 } S = \frac{Mv}{\frac{Alwl^3}{8n\pi^2 E} \cdot 1/i} = 8niE \frac{v}{l} \cdot \frac{\pi^2 M}{Alwl^2}$$

拿 M 的公式代入上式即得表 (三) 中 S 的公式。

i 的值通常變化甚小，設計者可根據經驗加以假定。


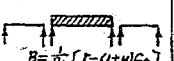
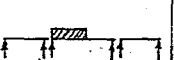
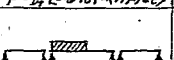
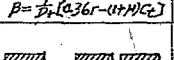
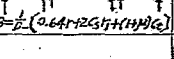
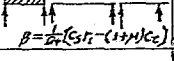
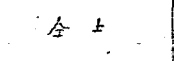
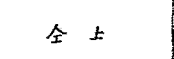
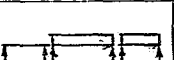
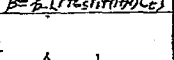
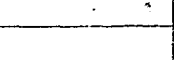
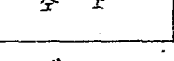
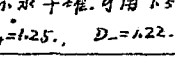

根據表 (三) 的公式，並加以某些假設，可得圖(八)與圖(九)的曲線。此等曲線，作者認為用途頗大，因其將中孔的最大角變位 (θ) 及最大彎矩 (M) 與加勁因數 (AL) 的關係直接示出。設計者如假定一加勁因數，立即可自圖(八)中查出中孔的最大彎矩與最大角變位。查出的數值已足夠初步設計所需要的準確程度。現將圖(八)的來源略加解說；圖(九)的來源則從略。

關於中孔的最大角變位自表(三)可得如下的公式：

$$\begin{aligned} \theta &= \left[\frac{0.825r}{1+\beta+4AL} + \frac{1.84r-3.4\beta}{1+\beta+AL} \right] n \\ &= \left[\frac{0.825r}{1+\frac{1}{D_+} \{0.548r - (1+AL)C_t\} + 4AL} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1.84r - \frac{34}{D_+} \{0.548r - (1+AL)C_t\}}{1+\frac{1}{D_+} \{0.548r - (1+AL)C_t\} + AL} \right] n \end{aligned}$$

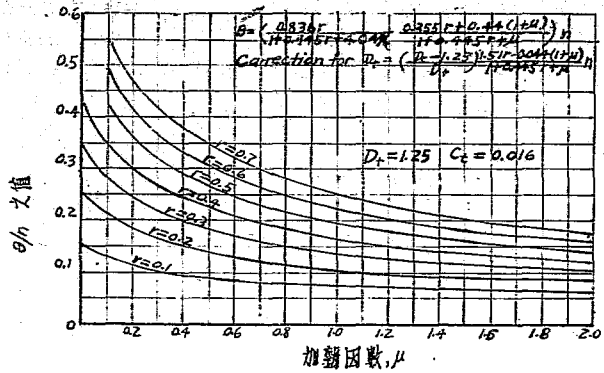
在上式中， D_+ 的變化對於分母數值上的影響甚小，但對於第二項的分子則影響較大。 C_t 乃一極小之數，變化無多。 D_+ 在一般情形之下，平均約為 1.25，有 $\pm 10\%$ 的變化。因此，吾人可將 $D_+ = 1.25$ 及 $C_t = 0.016$ 視作標準情形。在其他情形之下的最大角變位，可由標準情形下的最大角變位加以一改正數求得之。於是：

表(三) 加勁桁的近似公式

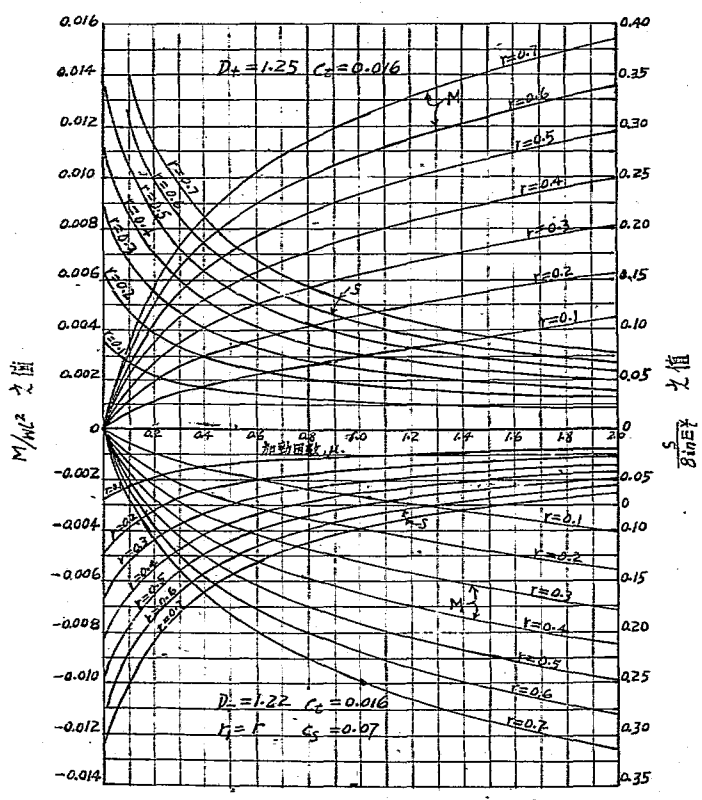
加勁桁各項函數	載重情形	溫度升降	次序	近似公式	附註
吊索 最大應力		-	1	$S = (1 + \beta) H_0 \sec \phi$	$\phi =$ 吊索的最大傾斜角
中孔加勁桁 最大垂變位 (於中點)		+	2	$\eta = \frac{1.015(\gamma - \beta)}{1 + \beta + M} f$	$M = \frac{\pi^2 EI^2}{H_0 L^2}$
		+	3	$\theta = \left(\frac{0.825\gamma}{1 + \beta + 4M} + \frac{1.84\gamma - 3.4\beta}{1 + \beta + M} \right) n$	
		+	4	$M = \frac{H}{\pi^2} \left(\frac{0.71\gamma}{1 + \beta + 4M} + \frac{0.32\gamma - 0.96\beta}{1 + \beta + M} \right) n L^2$	
		+	5	$S = \pm 8 \sin \phi \frac{V}{L} \left(\frac{0.71\gamma}{1 + \beta + 4M} + \frac{0.32\gamma - 0.96\beta}{1 + \beta + M} \right)$	$i = \frac{I}{I_{max}}$
最大負彎矩矩 (於中點)		-	6	$M = -\frac{H}{\pi^2} \left(\frac{0.60\gamma}{1 + \beta + 4M} - \frac{0.57\gamma + 0.96\beta}{1 + \beta + M} \right) n L^2$	
		-	7	$S = \pm 8 \sin \phi \frac{V}{L} \left(\frac{0.60\gamma}{1 + \beta + 4M} - \frac{0.57\gamma + 0.96\beta}{1 + \beta + M} \right)$	
邊孔加勁桁 最大正彎矩變位 (於中點)		+	8	$\eta = \frac{1.025(\gamma - \beta)}{1 + \beta + M_1} f_1$	
		+	9	$\theta = \frac{3.3(\gamma - \beta)}{1 + \beta + M_1} n_1$	
		+	10	$M = \frac{H}{\pi^2} \left(\frac{1.21(\gamma - \beta)}{1 + \beta + M_1} - 1.4 L^2 \right)$	
		+	11	$S = \pm 8 i_1 n_1 E \frac{V}{L} \left(\frac{1.21(\gamma - \beta)}{1 + \beta + M_1} \right)$	
最大負彎矩矩 (於中點)		-	12	$\eta = \frac{1.025\beta}{1 + \beta + M_1} f_1$	
		-	13	$\theta = -\frac{3.3\beta}{1 + \beta + M_1} n_1$	
		-	14	$M = -\frac{H}{\pi^2} \left(\frac{1.21\beta}{1 + \beta + M_1} \right) 1.4 L^2$	
		-	15	$S = \pm 8 i_1 n_1 E \frac{V}{L} \left(\frac{1.21\beta}{1 + \beta + M_1} \right)$	

註: 如不求準確, 可用下列近似數值代入公式:

$$D_1 = 1.25, \quad D_2 = 1.22, \quad C_2 = 0.016, \quad C_3 = 0.070.$$



圖(8) 中孔加勁桁的最大角變位 (θ)



$$\begin{aligned}
 +M &= \left(\frac{0.719r}{1+0.282r+4.0\mu} + \frac{0.0286r+0.0125(1+\mu)}{1+0.282r+\mu} \right) \frac{\mu}{\pi^2} W L^2 & \text{Corr. for } D_1 &= \frac{(D_1 - 1.25) \cdot 0.016 \cdot \pi \cdot W L^2}{\pi^2 W L^2} \\
 S &= \left(\begin{matrix} \text{''} \\ \text{''} \\ \text{''} \end{matrix} \right) \frac{\mu}{8 \ln E Y} & \text{''} &= \text{''} \\
 -M &= \frac{0.593r}{1+0.632r+2.396\mu} + \frac{0.0780r+0.0124(1+\mu)}{1+0.632r+\mu} \frac{\mu}{\pi^2} W L^2 & \text{''} &= \frac{(1.22 - D_2) \cdot 0.601r + 0.024(1+\mu)}{\pi^2 W L^2} \\
 S &= \left(\begin{matrix} \text{''} \\ \text{''} \\ \text{''} \end{matrix} \right) \frac{\mu}{8 \ln E Y} & \text{''} &= \text{''}
 \end{aligned}$$

圖(9) 中孔加勁桁的最大正負灣距 (M) 及弦桿應力 (S)

$$\theta = \left[\frac{0.836r}{1+0.445r+4.044L} - \frac{0.355n+0.044(1+4L)}{1+0.445r+4L} \right] n$$

當 $D=1.25$ 及 $C_1=0.016$.

$$\text{改正數} = \left[\frac{D+1.25}{D+} \cdot \frac{1.51r-0.044(1+4L)}{1+0.445r+4L} \right] n.$$

由上式，可知改正數極小，在初步設計時，根本可不加考慮。

Ⅷ. 設 計 程 序

關於設計程序，作者的意見是：估計吊荷重應與加勁桁的設計平行進行。因若不知吊荷重，則無法設計；反之，若不知加勁桁的尺寸，又無法估計吊荷重。自此觀點出發，作者定出一設計程序，自信可合實用。此處新添的符號如下：

A_s = 每單位橋長之吊桿的截面面積。

a_1, a_2 = 加勁桁上下弦桿的平均截面面積。

v_1, v_2 = 自加勁桁的中性軸至上下弦桿的距離。

l_s = 吊桿的平均長度。

g = 材料的單位重量。

指標： f 指示橋面。 c 指示吊索。
 t 指示加勁桁 s 指示吊桿。

加勁桁能有多種不同的設計，供設計者的選擇。因此估計吊荷重，必須針對最後採用的設計方可準確。

吊橋的吊荷重可分下列四項：

- a) 橋面系與風力支撐 (Floor system and wind bracings), w_f
- b) 吊索, w_c .
- c) 加勁桁, w_t .
- d) 吊桿, w_s .

$$\text{總吊荷重, } W = w_f + w_c + w_t + w_s \dots \dots \dots (40)$$

茲將各項吊荷重分別估計如后：

(a) 項吊荷重：這是主要的一項，普通佔全部吊荷重的50%，此項可精確估計，因橋面系與風力支撐可單獨設計，與加勁桁及吊索無關。故 w_f 的估計不必研究，以下可將其視為一常數。

(b) 項吊荷重：

$$\text{吊索的最大應力} = (1+r)H_o \text{Sec} \phi = \frac{(w+p)l}{8n} \text{Sec} \phi. (\text{大約值})$$

$$\text{必需截面面積} : A = \frac{(w+p)l}{8nS_c} \text{Sec} \phi. \text{ 式中 } S_c = \text{吊索的准許應力}.$$

$$w_c = gA + 15\% \text{ 的附件重量 (weight of detailing metal)}$$

$$= 1.15 gA = 0.144 \frac{g(w+p)l}{nS_c} \text{Sec} \phi \dots\dots\dots(41)$$

(c) 項吊荷重：根據定義，可得： $v_1 + v_2 = h$ 。 $a_1 v_1 = a_2 v_2$

$$\text{故平均轉動慣量} = I_m = a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 = a_1 v_1 h \text{ 或 } = a_2 v_2 h$$

$$a_1 + a_2 = \frac{I_m}{v_1 h} + \frac{I_m}{v_2 h} = \frac{I_m}{v_1 v_2} \dots\dots\dots(42)$$

$v_1 v_2$ 的值並不相等，普通受活荷重的弦桿(Loaded chord)較大，故 $v_1 > v_2$ 。然若 h 的值不變，即使 v_1 與 v_2 相差甚大， v_1 與 v_2 的乘積變化仍甚小。

$$\text{故 } v_1 v_2 \text{ 約} = \frac{h^2}{4} \text{。 } a_1 + a_2 \text{ 約} = \frac{4I_m}{h^2} \dots\dots\dots(43)$$

假定加勁桁各部材料的比例如下

上下弦桿	100%
腹桿	25%
附體 (Details)	40%
總計	165%

上列比例僅係作者的假定，設計者可根據其經驗任意改正，因

$$M = \frac{8nEI_m \mathcal{T}^2}{wl^3} \text{。 } W_t = 1.65g(a_1 + a_2) = 6.6g \frac{I_m}{h^2} = 0.0836 \frac{Mwl^3}{nEh^2} \dots\dots\dots(44)$$

(d) 項吊荷重：此項極小，普通尚不及全部吊荷重的十分之一，故可粗率估計：吊桿最大應力約 $= w_f + p + w_t + w_s$ 。

必需截面積， $A_s = \frac{w_f + p + w_t + w_s}{S_s}$ ，式中 S_s = 吊桿之允許應力。

$w_s = g A_s l_s + 25\%$ 的附件重量。

$$= 1.25g A_s l_s = \frac{1.25gl_s}{S_s - 1.25gl_s} (w_f + p + w_t) \dots\dots\dots(45)$$

將四項吊荷重相加，即得：

$$w = w_f + 1.15gA + 6.6g \frac{I_m}{l_s^2} + 1.25g A_s l_s \dots\dots\dots(46a.)$$

上式中，第二至第四，三項的係數可以根據經驗修正。公式 46 (a) 可以於 A , A_s , 及 I_m 求得後，作覆核吊荷重之用，且無論中孔或邊孔，均可應用。但於設計之前， A , A_s 及 I_m 均屬未知之數，故公式 (46a) 不能應用，吾人必須另求一公式。

根據公式 (41), (44) 及 (45), 公式 46 (a) 可寫成：

$$w = w_f + 0.144 \frac{g(w+p)l}{nS_c} \text{Sec } \phi + 0.0836 \frac{Alw l^3}{nEh^2} + \frac{1.25gl_s}{S_s - 1.25gl_s}$$

$$\times (w_f + p + 0.0836 \frac{Alw l^3}{nEh^2}) = \frac{S_s}{S_s - 1.25gl_s} w_f$$

$$+ g(0.144 \text{Sec } \phi \frac{1}{nS_c} + \frac{1.25l_s}{S_s - 1.25gl_s}) p$$

$$+ g(0.144 \text{Sec } \phi \frac{1}{nS_c} + \frac{S_s}{S_s - 1.25gl_s} \cdot 0.0836 \frac{Al l^3}{nEh^2}) w$$

解此式。則得：

$$w = \frac{\frac{S_s}{S_s - 1.25gl_s} w_f + g(0.144 \text{Sec } \phi \cdot \frac{1}{nS_c} + \frac{1.25l_s}{S_s - 1.25gl_s}) p}{1 - g(0.144 \text{Sec } \phi \frac{1}{nS_c} + \frac{S_s}{S_s - 1.25gl_s} \cdot 0.0836 \frac{Al l^3}{nEh^2})}$$

$1.25 gl_s$ 代表吊桿因其本身重量而得的應力，其數僅佔其全部應力的

1-2% 假定 $1.25 gl_s = 0.015 S_s$ 可得：

$$w = \frac{1.015w_f + g(0.144 \text{Sec } \phi \frac{1}{nS_c} + 1.27 \frac{l_s}{S_s}) p}{1 - g(0.144 \text{Sec } \phi \frac{1}{nS_c} + 0.085 \frac{Al l^3}{nEh^2})} \dots\dots\dots(46,b)$$

w 如已假定， w_c 即可用公式(41)計算。故於估計連孔吊荷重， w_1 時， w_c 可視作一已知數。因此：

$$w_1 = 1.015 w_f + w_c + 1.27 \frac{g_1}{S_a} p + 0.085 g \frac{A_1 w_1^2}{n_1 E h_1^2}$$

$$\text{因 } H_0 = \frac{w_1 l_1}{8 n_1} = \frac{w l}{8 n}, \quad \text{或} \quad \frac{w_1 l_1}{n_1} = \frac{w l}{n} \quad \text{故}$$

$$w_1 = 1.015 w_f + w_c + 1.27 \frac{g_1}{S_a} p + 0.085 g \frac{w l}{n E} \left(\frac{l_1}{h_1} \right)^2 A_1 \quad (46.c)$$

在公式 46 (b) 及 46 (c) 內，除 l 與 h 外，其餘各數均為設計數據。合理的辦法是：先根據經濟與美觀的條件選定 h ，然後根據最大允許應力與橋面的最大允許角變位，以決定加勁因數的數值。因此作者建議下列的設計程序，此程序可分為兩部：

第一步：重量估計與初步設計：

- (1) 根據經濟與美觀的原則選定加勁桁的高度， h 。
- (2) 用判斷，假定加勁因數。(在一般情形之下， $l = 0.1$ 至 0.6 ； l_1 約 $= \left(\frac{l}{l_1} \right)^2 l$ ，約 $= 4 l$ 。又 l 隨 r 增加。上述諸事實均可幫助吾人以假定加勁因數的數值。實際上，為初步估計重量， l 可粗率地假定等於 r)
- (3) 用公式 46 (b) 及 46 (c)，算出中孔及邊孔的吊荷重，(w 及 w_1)。然後再算出各孔的載重比 (r 及 r_1)。
- (4) 假設 $D_+ = 1.25$ ， $D_- = 1.22$ ， $C_1 = 0.016$ ，及 $C_2 = 0.070$ 。並根據允許應力，及橋面允許坡度變更，求出加勁因數的最小必需數值。反覆應力 (Reversal of stresses) 及風應力應依規範書而考慮。此處，圖 (八) 及圖 (九) 的曲線可供應用。
- (5) 如以上求出的加勁因數與最初假定的數值不符，則必須重複計算，以至其相符而後止。
- (6) 根據既定的吊荷重與加勁因數，求出吊桿與吊索所需的截面積與加勁桁所需的轉動慣量。
- (7) 根據以上所得結果，設計吊桿，吊索，及加勁桁弦桿，並算出最後採

用的截面與加勁因數。

(8) 覆核：用公式 46(a) 覆算吊荷重。用表(三)內的公式，覆算最大應力與最大坡度變更，以觀其是否超出准評的數值。

第二步：精細分析與最後設計(Careful analysis and Final design)

(1) 應用表(二)內的公式，a) 覆核吊索及吊桿內的最大應力，b) 覆核橋面的最大豎變位，與最大角變位，c) 繪出加勁桁的最大彎矩與最大切力圖，並覆核其應力。

(2) 完成全部設計，如有不妥之處，隨加修正。

此處有一問題發生，即活荷重在什麼位置，產生上述各種最大數值？這個問題，有時極易答覆，有時則極難應付。例如吊索的最大應力係發生於全橋滿受活荷重 (Fully loaded) 之時，這是極明顯的。反之，中孔加勁桁的各種最大數值發生時，多係局部承受荷重 (Partially loaded)，其受重長度 (Load length) 則極難確定。目前乃用試探 (By trial) 的方法，異常麻煩。為此，作者乃導出一些計算受重長度的方程式。這些方程式既屬近似，亦非簡單。不過受重長度稍有誤差，對於求出的最大值影響極小；同時，解一方程式較之試探的方法畢竟方便多多。這些方程式見表(四)，其導出手續，則摘要列為附錄，以備查攷。

例題：茲將美國紐約城的 Manhantten 橋為例。以解釋上述設計程序的第一步。關於第二步，其手續與普通結構的分析相同，故從略。

設計數據： $l=1446.7'$ $l_1=713.5'$ $n=0.1004$ $f=145.3'$

$E=E_c=29 \times 10^6$ 磅/吋² $l_s=60'$ $p=4,000$ 磅/呎 $\omega=0.0000066$

$\Delta t=55^\circ F$ $\text{Sec } \phi \text{ 約} = 1.09$

規範：在原來設計中，反覆應力未曾顧及，橋面坡度變更亦未限制。載重組合曾考慮兩種：a) 吊荷重加全活荷重，b) 吊荷重加 50% 活荷重加風力。因第一種組合控制設計，故在此僅考慮第一種組合。

准許應力，	吊索	73,000 磅/吋 ²
	吊桿	30,000 磅/吋 ²

加勁桁弦桿 40,000 磅/吋² (特種鋼材)

以上規範雖不甚合理，但仍採用之，以便與原設計比較。

自原設計查得： $w_r = 2,820$ 磅/呎

$$0.144 \text{Sec} \phi \frac{1}{nS_c} = 0.144 \times 1.09 \times \frac{1447}{0.1004 \times 73,000} = 0.0310 \text{吋}^2/\text{磅}.$$

$$0.085 \frac{AlI^3}{nEh^3} = 0.085 \frac{Al \times 1447^3}{0.1004 \times 29 \times 10^6 \times h^3} = \frac{88.5}{h^3} Al \text{吋}^2/\text{磅}. \text{如 } h \text{ 單位為呎}$$

$$g = 3.4 \text{ 磅/吋}^2/\text{呎}. \quad 1.27 \frac{I_s}{S_s} = 1.27 \frac{60}{30,000} = 0.0025 \text{吋}^2/\text{磅}.$$

$$(1) \text{ 如選擇 } h = 24' = h_1. \quad \text{則 } \frac{1}{h} = 60.5 \quad \frac{1}{h_1} = 29.7$$

用公式 46 (b) 及 46 (c) 得：

$$w = \frac{2860 + 3.4(0.0310 + 0.0025) \times 4,000}{1 - 3.4(0.031 + \frac{88.5}{24^3} Al)} = \frac{3320}{0.8950 - 0.523 Al}$$

$$\begin{aligned} w_1 &= 2860 + w_c + 0.0025 \times 3.4 \times 4,000 + 0.085 \times 3.4 \\ &\times \frac{w \times 1447}{0.1004 \times 29 \times 10^6} \times 29.7^2 Al_1 \\ &= 2900 + w_c + 0.127 w Al_1. \end{aligned}$$

(2) 假設 $Al = 0.60$, $Al_1 = 5 Al = 3.00$ 。則：

$$(3) \quad w = \frac{3320}{0.895 - 0.523 \times 0.6} = 5720 \text{磅/呎} \quad \text{原設計為 } 5,820 \text{磅/呎}.$$

$$r = \frac{4000}{5720} = 0.70.$$

$$w_c = 0.0310 \times (5720 + 4000) \times 3.4 = 1,030 \text{磅/呎}.$$

$$w_1 = 2900 + 1030 + 0.127 \times 5720 \times 3.00 = 6,110 \text{磅/呎}.$$

$$r_1 = \frac{4000}{6110} = 0.655.$$

(4) 規範中允許應力 = 40,000 磅/吋² 係指淨截面積上的拉力與短柱 (Short Column) 的壓力而言若對於總截面 (Cross Section) 與中長柱 (Column of medium length) 則允許應力必須減低，現假設減低 20% 則得

$$S = 32,000 \text{ 磅/呎}^2$$

$$\text{中孔: } \frac{v}{l} = 0.5 \frac{h}{l} = \frac{1}{120.6}, \quad \text{假定 } i = 0.95.$$

$$\text{於是: } \frac{S}{8i n_1 E \frac{v}{l}} = \frac{32,000 \times 120.6}{8 \times 0.95 \times 0.1004 \times 29 \times 10^6} = 0.174$$

$$\text{由圖(九), 可查出: } S = 0.174 \times 8i n_1 E \frac{v}{l} \text{ 時, } \mu = 0.58.$$

$$\text{由圖(八), 可查出: 當 } \mu = 0.6 \text{ 時, 最大坡度變更} = 3.3\%$$

$$\text{邊孔: } n_1 = \frac{w_1 l_1}{w l} n = \frac{6110 \times 713.5}{5720 \times 1447} \times 0.1004 = 0.0528.$$

$$\frac{v_1}{l_1} = 0.5 \frac{h_1}{l_1} = \frac{1}{59.4} \quad \text{假定 } i = 0.90.$$

$$\text{於是 } \frac{S}{8i_1 n_1 E \frac{v_1}{l_1}} = \frac{32,000 \times 59.4}{8 \times 0.90 \times 0.0528 \times 29 \times 10^6} = 0.172$$

用表(三)中公式(11), 得:

$$\beta = \frac{1}{1.25} (0.655 \times 0.070 - 1.60 \times 0.016) = 0.016.$$

$$\frac{S}{8i_1 n_1 E \frac{v_1}{l_1}} = 0.172 = \frac{1.21(0.655 - 0.016)}{1.016 + \mu_1}.$$

$$\text{解上式得: } \mu_1 = 3.48.$$

(5) 以上求出的 $\mu = 0.58$. 與最初假定數值, 0.60 相差甚小, 可不改正。但求出的 $\mu_1 = 3.48$ 與最初假定數值, 3.00 相差頗大, 故應覆算一次。現假設 $\mu_1 = 3.48$ 則

$$w_1 = 2900 + 1030 + 0.127 \times 5720 \times 3.48 = 6460 \text{ 磅/呎 (原設計為 6130)}$$

$$r_1 = \frac{4000}{6460} = 0.620, \quad n_1 = \frac{6460}{6110} \times 0.0528 = 0.0558.$$

再用表(三), 公式(11), 求得 $\mu_1 = 3.48$. 與假定值相符。

$$(6) \quad \text{必需的 } A_c = \frac{w}{1.15g} = \frac{1030}{1.15 \times 3.4} = 264 \text{ 呎}^2 \text{ (公式 41)}$$

$$\text{必需的 } A_s = \frac{w_1 - w_c + p}{S_s} = \frac{9420}{30,000} = 0.31 \text{ 呎}^2$$

$$H_0 = \frac{wl}{8n} = \frac{5720 \times 1447}{8 \times 0.1004} = 1.03 \times 10^7 \text{磅}$$

$$\text{必需的 } I = \frac{H_0 l^2 \Delta l}{\pi^2 E} = \frac{1.03 \times 10^7 \times 1447^2 \times 0.6}{\pi^2 \times 29 \times 10^6} = 45,200 \text{吋}^2 \text{呎}^2$$

$$\text{必需的 } I_1 = \frac{H_0 l_1^2 \Delta l_1}{\pi^2 E} = \frac{1.03 \times 10^7 \times 713.5^2 \times 3.48}{\pi^2 \times 29 \times 10^6} = 63,800 \text{吋}^2 \text{呎}^2$$

- (7) 根據以上的數字可以“設計”吊索，吊桿，及加勁桁的弦桿。此處所謂“設計”乃決定用何種材料，與如何組成吊索，吊桿，及加勁桁的弦桿的截面，此部工作該從略，因與本文無關，但為使此例題得以繼續演算，假定設計的結果如下：

$$A = 275 \text{吋}^2, \quad A_s = 0.45 \text{吋}^2 \quad \text{平均之 } I = 45,000 \text{吋}^2 \text{呎}^2$$

$$\text{平均之 } I_1 = 64,000 \text{吋}^2 \text{呎}^2 \quad h = h_1 = 24 \text{呎}$$

- (8) 現既已有一粗率的初步設計，應用較準確的方法以覆核其是否合適。

用公式46(b)及46(c)可求得： $w = 5740 \text{磅/呎}$ ， $w_1 = 6480 \text{磅/呎}$

由設計數據與求出的吊荷重，可算出下列各數：（根據定義）

$$r = 0.697, \quad r_1 = 0.617, \quad n_1 = 0.0559, \quad \Delta l = 0.595$$

$$\Delta l_1 = 3.48, \quad f_1 = 39.9 \text{呎}, \quad L_s = 3,450 \text{呎}, \quad L_t = 3,320 \text{呎}$$

$$H_0 = 10.34 \times 10^6 \text{磅} \quad C_t = 0.0157, \quad C_s = 0.0776,$$

$$C_c = 0.1133, \quad D_+ = 1.284, \quad D_- = 1.253,$$

用表(三)的近似公式可求得：

- a) 吊索之最大應力(用公式1)

$$\beta = \frac{1}{1.253} (0.697 + 2 \times 0.0776 \times 0.617 + 1.595 \times 0.0157) = 0.653.$$

$$S = 1.653 \times 10.34 \times 10^6 \times 1.09 = 18.63 \times 10^6 \text{磅}$$

$$s = 18.63 \times 10^6 / 275 = 67,800 \text{磅/吋}^2$$

- b) 中孔加勁桁最大變位(用公式2)

$$\beta = \frac{1}{1.284} (0.697 - 1.595 \times 0.0157) = 0.523.$$

$$\eta = \frac{1.015(0.697 - 0.523)}{1 + 0.523 + 0.595} \times 145.3 = 12.1 \text{呎}$$

c) 中孔加勁指最大角變位(用圖八)

$$\theta = 3.26n + \frac{0.034}{1.284} \times \frac{1.51 \times 0.697 - 1.595 \times 0.044}{1 + 0.310 + 0.595} \quad n = 3.4\%$$

d) 中孔加勁指弦桿最大應力(用圖九)

$$\frac{S}{\sin E \frac{v}{I}} = 0.170 + \frac{0.034}{1.284} \times \frac{0.28 \times 0.607 - 0.0125 \times 1.595}{1 + 0.204 + 0.595} = 0.173$$

$$s = 0.173 \times 8 \times 0.95 \times 0.1004 \times 29 \times 10^6 \times \frac{1}{120.6} = 31,800 \text{ 磅/吋}^2 \text{ (總截面)}$$

以上所得結果與在估計吊荷重所得者相差甚微。關於邊孔的計算與中孔相似，故從略。

結 論

吊橋乃反常型結構而處於混合作用之下，其分析甚為繁瑣，故其結構行為 (Structural behaviour) 表面上看來似甚難揣摸，其設計亦不易下手。然就其本質而論，吊橋僅有一度靜不定，吊索有固定的形狀，混合作用則祇能增加分析技術上的困難而不能加劇結構性質的變化，故吊橋的設計不應該過份困難。本篇的探討已證實此點。吊橋的各種性質僅由一加勁因數控制，其間並有一定的函數關係存在。相當於一定的設計數據與設計規範，有一最小的加勁因數，而此加勁因數可迅速找到。加勁因數一經選定，則其他問題迎刃而解。自此點觀之，吊橋的設計實距靜定結構不遠，換言之，吊橋內，正常作用 (Normal Structure Action) 的成分甚高。

Cross 氏曾說：研究結構理論者，應從分析方法方面轉移到分析與設計的聯繫方面。作者很同意這個見解，在本篇中，即作此嘗試。

附註： 註一：“The Relation of Analysis to Structural Design”，

by Hardy Cross, Trans, A.S.C.E. Vol.101 1936.

註二：“Hybrid Structural Action”譯為“反常作用”似不切實，作者因其與“正常作用”相對，故作此譯。

註三：“Buckling of Elastic Structures” by H.M. Westergaard, Trans, A.S.C.E. Vol. 85, 1922.

註四：“The Stiffness of Suspension Bridge”，by S. Timoshenko, Trans. A.S.C.E. Vol. 94. 1930.

註五：“On the Method of Complementary Energy”，by H.M. Westergaard, Proc. A.S.C.E. Vol. 67. No.2. 1941.

註六：“Preliminary Design of Suspension Bridges”，by S. Hardesty and H.E. Wessman, Trans, A.S.C.E. Vol.104.1939.

誌謝： 本文承孫訓方君繕稿並校對，特此致謝。

任何活荷重	$\eta = \frac{32}{\pi^3} f \sum \frac{Km - B \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{m^2(1+\beta+m^2\mu)} \sin m \pi j$ $\theta = \frac{32}{\pi^2 n} \sum \frac{Km - B \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{m^2(1+\beta+m^2\mu)} \cos m \pi j$ $M = \frac{4}{\pi^2} W^2 \mu \sum \frac{Km - B \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{m(1+\beta+m^2\mu)} \sin m \pi j = M' - \frac{4W^2}{\pi^2} (1+\beta) \sum \frac{Km - B \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{m(1+\beta+m^2\mu)} \sin m \pi j$ $V = \frac{4}{\pi^2} W^2 \mu \sum \frac{Km - B \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{(1+\beta+m^2\mu)} \cos m \pi j = V' - \frac{4W^2}{\pi^2} (1+\beta) \sum \frac{Km - B \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{m^2(1+\beta+m^2\mu)} \cos m \pi j$
-------	--


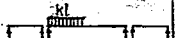
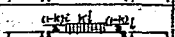
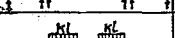
註：上列所有公式可同樣應用於中孔及邊孔。

吊索應力的水平分力

各項常數： $C_5 = \frac{n_1 f_1}{n f} \frac{1+\beta+\mu}{1+\beta+\mu_1} = \frac{n_1 f_1}{n f} \frac{1+0.5r+\mu}{1+0.5r+\mu_1}$ (約值) $C_2 = \frac{0.19 \omega t L_2}{n f}$
 $C_c = \frac{0.19(1+\beta+\mu)}{n f} \frac{H \omega L_2}{E_c A} = \frac{0.19(1+0.5r+\mu)}{n f} \frac{H \omega L_2}{E_c A}$ (約值) $D_2 = 1+2C_5+C_c+C_c$

註：(1) 嚴格言之， C_5 及 C_c 均非常數，因其隨 β 的數值而改變，但因其變化甚小，故仍可將其視為常數。

(2) 如無邊孔，則 $n_1 f_1 = 0$ ， $C_5 = 0$ ；如無切勁荷，則 $\mu = \mu_1 = 0$ 。

活荷重情形	溫度升降	吊索應力的水平分力	附註
(1) 任何活荷重	±	$\beta \frac{1}{D_2} (n_1(\text{中孔}) + C_5 k(\text{邊孔}) + (1+\mu) C_c)$	$k_1 = k_m, m=1 = \frac{1}{2} k_{1,2}$
(2) 無荷重	±	$\beta_c = \mp \frac{(1+\mu)}{D_2} C_c$	
(3) 	±	$\beta_M = \frac{1}{D_2} \sin \frac{1}{2} (2k+k) \pi \sin \frac{1}{2} k \pi$	
(4) 	±	$\beta_M = \frac{k}{D_2} \sin^2 \frac{1}{2} k \pi$	
(5) 	±	$\beta_M = \frac{k}{D_2} \sin \frac{1}{2} k \pi$	
(6) 	±	$\beta_M = \frac{2k}{D_2} \sin^2 \frac{1}{2} k \pi$	
(7) 與(3)、(4)、(5)及(6)相同活荷重及溫度升降，但係在兩邊孔之間進行	±	β_1 或 β_2 同公式(3)至(6)但須將 β 換成 $C_5 r$	
(8) 各孔活荷重及溫度升降的總合效果	±	$\beta = \beta_M + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3$	

註： $\beta_M, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ 為中孔活荷重、邊孔(1)、(2)時活荷重及溫度升降個別產生的 β 。

表(四). 中孔加勁桁各種函數的最大數值發生時的荷重位置

函數名稱	編號	產生最大值的載重情形	溫度 升降	計算受重長度的方程式
正號 豎變位	端點 (1)		+	$\text{Cos}k\pi = \frac{0.551 - 2\sqrt{(1+\mu)(1+\nu)}(1+\cos)\left(\frac{1+0.41+0.41\mu}{1+0.41+0.41\nu}\right)}{2\sqrt{(1+\mu)(1+\nu)} - 2(1+\mu)\cos}$
	中點 (2)		+	$K = 1$
負號 豎變位	端點 (3)		-	$\text{Cos}k\pi = \frac{0.551 - 2\sqrt{(1+\mu)(1+\nu)}(1+\cos)\left(\frac{1+0.41+0.41\mu}{1+0.41+0.41\nu}\right)}{2\sqrt{(1+\mu)(1+\nu)} + 2(1+\mu)\cos}$
	中點 (4)		-	$K = 0$
正號 角變位	端點 (5)		+	$\text{Cos}k\pi = \frac{0.551 - 2(1+\mu)(1+\nu)\left(\frac{1+0.41+0.41\mu}{1+0.41+0.41\nu}\right)}{2\sqrt{(1+\mu)(1+\nu)} - 2(1+\mu)\cos}$
正號 彎矩	1/8點 (6)		+	$1 - K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.687}{D} + 0.621\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu} + 0.571\left(\frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	1/4點 (7)		+	$1 - K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.589}{D} + 0.573\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu} + 0.405\left(\frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	3/8點 (8)		+	$K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.295}{D} + 0.3\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} + 0.15\left(\frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$ $K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.491}{D} + 0.5\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} + 0.191\left(\frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	中點 (9)		+	$1 - K = \text{Cos} \frac{1}{2}k\pi \left[\frac{0.785}{D} + 0.81\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} \right]$
負號 彎矩	1/8點 (10)		-	$K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.687}{D} + 0.621\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} + 0.571\left(\frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	1/4點 (11)		-	$K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.589}{D} + 0.573\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} + 0.405\left(\frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	3/8點 (12)		-	$K_q = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.295}{D} + 0.3\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} + 0.15\left(\frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$ $K_s = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.491}{D} + 0.5\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} + 0.191\left(\frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
正號 撓切	端點 (14)		+	$1 - K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.785}{D} + 0.621\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu} + 0.621\left(\frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	1/4點 (15)		+	$\frac{3}{4} - K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.393}{D} + 0.450\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} \right]$
	中點 (16)		+	$K = \frac{1}{2}$
負號 撓切	端點 (17)		-	$K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.785}{D} + 0.621\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu} - 0.621\left(\frac{1+0.25\mu}{1+0.25\nu}\right) \text{Cos}k\pi \right]$
	1/4點 (18)		-	$K = \text{Sin}k\pi \left[\frac{0.393}{D} + 0.450\left(\frac{D-1}{D}\right) + \frac{1+0.41\mu}{1+0.41\nu} \right]$
	中點 (19)		-	$K = \frac{1}{2}$

註: 如溫度上昇 $D = D_r$; 如溫度下降 $D = D_s$

附錄 表(四)內各公式的導出

表(四)內的公式甚多，茲將其中三公式導出如后，以資解釋，其餘從略。

1) 中孔加勁桁上任一點最大正彎矩($k'=0$ $0 < j < k$)

$$M = M' - \frac{4}{\pi^3} w l^2 (1 + \beta) \sum \frac{r \sin^2 \frac{m\pi}{2} K - \beta \sin^2 \frac{1}{2} m \pi}{m \cdot (1 + \beta + m^2 l)} \sin m \pi j$$

刪去 $m \geq 3$ 各項。並化簡得：

$$M = \frac{2}{\pi} w l^2 \left[r(2kj - k^2j - j^2) - \beta(j - j^2) - \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} r \sin^2 \frac{1}{2} k \pi \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \pi j - \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} \beta \sin \pi j + \frac{1 + \beta}{8(1 + \beta + 4l)} r \sin^2 k \pi \sin 2\pi j \right) \right]$$

倘將 $\frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l}$ 及 $\frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l}$ 視作常數，則：

$$\frac{dM}{dk} = \frac{2}{\pi} w l^2 \left[2rj(1 - k) - (j - j^2) \frac{d\beta}{dk} - \frac{8}{\pi^3} \left(\frac{\pi r}{2} \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} \sin \pi j \sin k \pi \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} \sin \pi j \frac{d\beta}{dk} + \frac{\pi r}{4} \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} \sin 2\pi j \sin k \pi \cos k \pi \right) \right]$$

因 $\beta = \frac{r}{D} \sin^2 \frac{1}{2} k \pi - (1 + 4l) \frac{C_t}{D}$ 故 $\frac{d\beta}{dk} = \frac{\pi r}{2D} \sin k \pi$ 。代入上式並化簡：

$$\text{得：} \frac{dM}{dk} = \frac{2}{\pi} w l^2 \left[2rj(1 - k) - (j - j^2) \frac{\pi r}{2D} \sin k \pi - \frac{4r}{\pi^2} \left\{ \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(\frac{D-1}{D} \right) \sin \pi j \sin k \pi + \frac{1}{2} \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l} \sin 2\pi j \sin k \pi \cos k \pi \right\} \right]$$

$M = \text{最大值時}$ ， $\frac{dM}{dk} = 0$ 。遂得：

$$1 - k = \sin k \pi \left[(1 - j) \frac{\pi}{4D} + \frac{2}{\pi^2} \frac{\sin \pi j}{j} \frac{1 + \beta}{(1 + \beta + 4l)} \left(\frac{D-1}{D} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2} \frac{1 + \beta}{(1 + \beta + 4l)} \frac{\sin 2\pi j}{j} \cos k \pi \right]$$

上式中 $\frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l}$ 及 $\frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4l}$ 兩數隨 β 變化甚小。故可以 β 的平均值代入。

表(四)中第(6)及第(7)兩公式均可由上式得之。

2) 中孔加勁桁的最大豎變位($k+2k'=1$, $j=\frac{1}{2}$)

$$\eta = \frac{32}{\pi^3} f \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r \sin \frac{1}{2} m \pi k - \beta}{m^2 (1 + \beta + m^2 \mu)} \sin \frac{1}{2} m \pi,$$

刪去 $m \geq 5$ 各項。則得：

$$\eta = \frac{32}{\pi^3} f \left[\frac{r \sin \frac{1}{2} k \pi - \beta}{1 + \beta + \mu} - \frac{r \sin \frac{3}{2} k \pi - \beta}{27 (1 + \beta + 9\mu)} \right]$$

而 $\beta = \frac{r}{D} \sin \frac{1}{2} k \pi (1 + \mu) \frac{C_t}{D}$, $\frac{d\beta}{dk} = -\frac{\pi r}{2D} \cos \frac{1}{2} k \pi$ 故

$$\eta = \frac{32}{\pi^3} f \left[\frac{(D-1) \beta + (1+\mu) C_t}{1 + \beta + \mu} - \frac{r \sin \frac{3}{2} k \pi - \beta}{27 (1 + \beta + 9\mu)} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dk} = \frac{32}{\pi^3} f & \left[\frac{(1+\mu)(D-1-C)}{(1+\beta+\mu)^2} - \frac{\pi r}{2D} \cos \frac{1}{2} k \pi \right. \\ & \left. - \frac{r}{27} \frac{(1+\beta+9\mu)^{\frac{3}{2}} \pi \cos \frac{3}{2} k \pi - \sin \frac{3}{2} k \pi \frac{\pi r}{2D} \cos \frac{1}{2} k \pi}{(1+\beta+9\mu)^2} \right. \\ & \left. + \frac{r}{27} \frac{(1+9\mu)^{\frac{3}{2}} \pi \cos \frac{1}{2} k \pi}{(1+\beta+9\mu)^2} \right] \end{aligned}$$

當 $\eta = \text{最大值時}$, $\frac{d\eta}{dk} = 0$ 。遂得：

$$\begin{aligned} & 8r \sin^2 \frac{1}{2} k \pi - 12 \left[(1+9\mu)D - (1+\mu)C_t \right] \sin^2 \frac{1}{2} k \pi \\ & = (1+9\mu)(3D-1) - 27(1+\mu)(D-1-C_t) \frac{1+\beta+9\mu}{1+\beta+\mu} - 3(1+\mu)C_t \end{aligned}$$

細察上式，可知必須 μ 的數值接近於零， D 的數值接近於 1 時，方能求的解答。故橋面最大豎變位於普通有加勁桁的吊橋均發生於全橋受荷重時。而於無加勁桁的吊橋（此時 $\mu=0$, $D=1$ ），則發生於中部受荷重時。

8) 中孔加勁桁 $3/8$ 點的最大正彎矩：——此時中孔載重情形如圖(十a)所示

，作者將 a 及 b 兩點的位置。用近似方法分別求出：

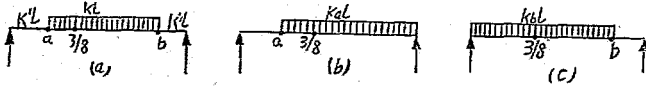


圖 (10)

欲求 a 點的位置，可考慮一自右端向左伸進的活荷重(Advancing load)如

圖(10b)所示。 $\frac{3}{8}$ 點的彎矩為：

$$\begin{aligned}
 M &= M' - \frac{4}{\pi^3} w l^2 (1 + \beta) \left[\frac{r \sin^2 \frac{1}{2} k_a \pi - \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \sin \frac{3\pi}{8} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r \sin^2 k_a \pi}{8(1 + \beta + 4\mu l)} \sin \frac{3}{4} \pi + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{2} w l^2 \left[r (2k_a - k_a^2) \frac{5}{8} - \left(\frac{5}{8}\right)^2 r - \frac{15}{64} \beta - \frac{7.39}{\pi^3} \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \right. \\
 &\quad \left. \times (r \sin^2 \frac{1}{2} k_a \pi - \beta) + \frac{0.707}{\pi^3} \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} r \sin^2 k_a \pi \right]
 \end{aligned}$$

令 $\frac{dM}{dk} = 0$ 。並化簡，得：

$$\begin{aligned}
 1 - k_a = \sin k_a \pi \left[\frac{0.295}{D} + 0.300 \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \left(\frac{D-1}{D} \right) \right. \\
 \left. - 0.115 \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \cos k_a \pi \right]
 \end{aligned}$$

因 $k_a = 1 - k'$ 故得：

$$\begin{aligned}
 k' = \sin k' \pi \left[\frac{0.295}{D} + 0.300 \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \left(\frac{D-1}{D} \right) \right. \\
 \left. - 0.115 \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \cos k' \pi \right]
 \end{aligned}$$

同理得：

$$\begin{aligned}
 k'' = \sin k'' \pi \left[\frac{0.491}{D} + 0.500 \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \left(\frac{D-1}{D} \right) \right. \\
 \left. - 0.191 \frac{1 + \beta}{1 + \beta + 4\mu l} \cos k'' \pi \right]
 \end{aligned}$$

