萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

代數學

冪法開法及無理數虛數

林鶴一 矢田吉熊著

黃元吉譯

商務印書館發行

代數學

冪法開法及無理數虛數

林鶴一 矢田吉熊 著

黃元吉 譯

算學小叢書

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

代數學—冪法開法及無理數虛數

林鶴一　矢田吉熊著

黃元吉譯

發行人　王雲五　上海寶山路五〇一號

印刷所　商務印書館　上海寶山路

發行所　商務印書館　上海及各埠

中華民國二十年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

INVOLUTION, EVOLUTION AND IRRATIONAL NUMBERS, IMAGINARY NUMBERS
BY HAYASHI AND YADA
TRAN LATED BY HUANG YUAN CHI
PUBLISHED BY Y. W. WONG

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1931

目　　　次

代　數　學

冪法，開法及無理數，虛數

第　一　章

冪　法

1. 定義. 同爲一數 a 而有 m 箇之集合以成乘積，此謂 a 之 m **乘冪**，或稱 m 乘方，以 a^m 之記號表之，其 m 爲**指數**。

求某數或代數學式之若干乘冪，其計算謂之**冪法**。

由乘冪之定義及乘法，除法之法則，可得下列諸定理之證明，此諸定理，謂之指數之法則，乃學冪法前所常用者。

2. 定理. 就某數各種之乘冪而總求其乘積，即係擴張其乘冪，故其積之指數，等於諸因數之指數之和。

如 $m, n, p \ldots\ldots\ldots$ 爲正整數。

則 $a^m \times a^n \times a^p \times \ldots\ldots = a^{m+n+p+\cdots}$

此爲乘法之指數法則。

證明. 依乘羃之定義，

$$a^m = a\times a\times a\times\ldots\ldots m \text{ 因數止},$$

$$a^n = a\times a\times a\times\ldots\ldots n \text{ 因數止},$$

$$\therefore\ a^m a^n = (a\times a\times a\times\ldots\ldots m\text{因數止})(a\times a\times a\times\ldots\quad\text{因數止})$$

$$= a\times a\times a\times\ldots\ldots(m+n)\text{ 因數止}$$

$$= a^{m+n}.$$

又 $a^m\times a^n\times a^p = (a^m\times a^n)\times a^p$

$$= a^{m+n}\times a^p$$

$$= a^{m+n+p}$$

因數在三箇以上，其證明相同。

如 $a^m\times a^n\times a^p\times\ldots\ldots = a^{m+n+p}\ldots\ldots$

3. 定理. 某數之乘羃如 a^m 以其乘羃 a^n 除之，得商 $a^m\div a^n$ 卽 $\dfrac{a^m}{a^n}$

若 $m>n$ 則 $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

若 $m<n$ 則 $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{1}{a^{n-m}}$

若 $m=n$ 則 $\dfrac{a^m}{a^n}$ 等於 1。

此爲除法之指數法則。

證明 m, n 爲正整數而 $m<n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n} = \dfrac{a\times a\times a\times\ldots\ldots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\ldots\ldots n\text{ 因數止}}$

$$= a\times a\times a\times\ldots\ldots(m-n)\text{ 因數止}$$

$$= a^{m-n}.$$

次　$m<n$.

則 $\dfrac{a^m}{a^n}=\dfrac{a\times a\times a\times\ldots\ldots m\text{ 因數止}}{a\times a\times a\times\ldots\ldots n\text{ 因數止}}$

$$=\frac{1}{a\times a\times a\times\ldots\ldots(n-m)\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{1}{a^{n-m}}$$

又 $m=n$ 則 $a^m=a^n$.

故 $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

別證. 若 $m>n$ 則依前節。

$$a^{m-n}\times a^n=a^{m-n+n}$$

$$=a^m,$$

$\therefore$ $$a^m\div a^n=a^{m-n}$$

次 $m<n$.

則 $$a^{n-m}\times a^m=a^{n-m+m}$$

$$=a^n.$$

$\therefore$ $$a^m=\frac{a^n}{a^{n-m}}$$

此等式之兩邊以 a^n 除之。

$$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}.$$

又 $m=n$

則 $$1\times a^n=a^n=a^m$$

$\therefore$ $$a^m\div a^n=1.$$

4. 定理. 某數之 m 乘羃之 n 乘羃，等於其數之 mn 乘羃。

即 $$(a^m)^n=a^{mn}.$$

此爲羃法之指數法則。

證. m, n 爲正整數。

則 $(a^m)^n=a^m\times a^m\times a^m\ldots\ldots n$ 因數止

$=a^{m+m+m+}\ldots\ldots\ldots n$ 項止

$=a^{mn}.$

系. 某數之 m 乘羃之 n 乘羃，等於其數之 n 乘羃之 m 乘羃。

即 $$(a^m)^n=(a^n)^m$$

蓋 $(a^n)^m=a^{nm}=a^{mn}$ 故也。

5. 定理. 若干因數之積之 m 乘羃，等於各因數之 m 乘羃之積。

即 $$(abc\ldots\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots\ldots$$

證. m 爲正整數。

則 $(ab)^m=ab\times ab\times ab\times\ldots\ldots m$ 因數止

$=(a\times a\times a\times\ldots m$ 因數止$)(b\times b\times b\times\ldots m$ 因數止$)$

$=a^mb^m.$

$\therefore (abc)^m=\{(ab)c\}^m$

$=(ab)^mc^m$

$=a^mb^mc^m.$

故凡因數之數多者，可依此類推。

如 $(abc\ldots)^m=a^mb^mc^m\ldots\ldots$

6. 定理. 二數之商之 m 乘羃，等於二數之 m 乘羃之商。

即 $$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

證. m 爲正整數。

則 $\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\ldots m$ 因數止

$$=\frac{aaa\ldots\ldots m\text{ 因數止}}{bbb\ldots\ldots m\text{ 因數止}}$$

$$=\frac{a^m}{b^m}.$$

別證. 令 $\frac{a}{b}\times b=a.$

作此式兩邊之 m 乘羃，由前節之定理，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times b^m=a^m,$$

$$\therefore\quad\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}.$$

注意. 本定理又可換言之如次：

分數之 m 乘羃，等於以分母子之 m 乘羃爲分母子之分數。

7. 由上證明得各公式如次：

$$a^m\times a^n=a^{m+n}. \qquad [1]$$

$$\left.\begin{array}{l} m>n \text{ 則 } a^m\div a^n=a^{m-n} \\ m<n \text{ 則 } a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}. \end{array}\right\} \qquad [2]$$

$$(a^m)^n = a^{mn}. \qquad [3]$$

$$(ab)^m = a^m b^m. \qquad [4]$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}. \qquad [5]$$

8. 單項式之冪法。

依前節公式〔3〕,〔4〕,〔5〕卽得其法則如次：

〔法則〕. 作單項式之 m 乘冪者，先作其數係數之 m 乘冪，而各因數之指數則附以 m 倍。

作分數式之 m 乘冪者，乃作以分母子之 m 乘冪爲分母子之分數。

例 1. 求 $-2a^2b^3$ 之五乘冪。

解　$(-2a^2b^3)^5 = (-2)^5(a^2)^5(b^3)^5 = -32a^{10}b^{15}$

例 2. 求 $-3xy^3z^5$ 之四乘冪。

解　$(-3xy^3z^5)^4 = (-3)^4x^4(y^3)^4(z^5)^4$

$$= 81x^4y^{12}z^{20}.$$

例 3.　$\left(\frac{2ab^3}{3x^2y^4}\right)^6 = \frac{(2ab^3)^6}{(3x^2y^4)^6}$

$$= \frac{64a^6b^{18}}{729x^{12}y^{24}}$$

例 4.　$\{(-5x^4)^3\}^2 = \{-125x^{12}\}^2$

$$= 15625x^{24}.$$

[問 1]　求下列之乘羃。

(一)　$(7ab^2)^2$.　　(二)　$(-2a^7c^2)^3$.

(三)　$(3a^2b^3)^4$.　　(四)　$(-a^2x)^6$.

(五)　$(-2x^2y)^5$.　　(六)　$(-\frac{1}{3}x^3)^7$.

(七)　$5a(-2a)^3(a^2)^4$.　　(八)　$(-3^6ax^2y^5)^n$.

[問 2]　求下列之乘羃。

(一)　$\left(\frac{3a^2b^3}{4c^5x^4}\right)^2$.　　(二)　$\left(-\frac{3x^5}{5a^3}\right)^3$.

(三)　$\left(\frac{2abc}{3m^2n^3}\right)^n$

[問 3]　下式試簡之。

(一)　$\{(2a^3)^2\}^4$.　　(二)　$3x\{(-x^2)^3\}^4$.

(三)　$-5\{(m^2n)^5(mn^2)^2\}^2$.

9.　多項式之平方.　依乘法，得各公式如次：

$$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab,$$

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd.$$

依此結果，即得其法則如次：

〔**法則**〕．作多項式之平方者，作各項之平方，又作各項與其下各項相乘之積之二倍，統爲相加可也。

例 1.　$(x-y+z)^2=x^2+(-y)^2+z^2+2x(-y)+2xz+2(-y)z$
$$=x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2yz.$$

例 2. $(1+2x-x^2)^2=1^2+(2x)^2+(-x^2)^2+2\times1\times(2x)$

$$+2\times1\times(-x^2)+2(2x)(-x^2)$$

$$=1+4x^3+x^4+4x-2x^2-4x^3$$

$$=1+4x+2x^2-4x^3+x^4.$$

例 3. $(5a^3-7a^2b+3ab^2-6b^3)^2$

$$=25a^6+49a^4b^2+9a^2b^4+36b^6$$

$$-70a^5b+30a^4b^2-60a^3b^3$$

$$-42a^3b^3+84a^2b^4$$

$$-36ab^5$$

$$=25a^6-70a^5b+79a^4b^2-102a^3b^3+93a^2b^4$$

$$-36ab^5+36b^6.$$

注意. 各項之平方恆爲正，又 $(-a-b-c)^2=(a+b+c)^2$,

去多項式乘羃之括弧者，謂之**展開**，展開所得之式謂之**展開式**。

[問 4] 下式試展開之。

(一) $(a+b-c)^2$. (二) $(a-b-c)^2$.

(三) $\left(\frac{2}{3}x^2-x+\frac{3}{2}\right)^2$ (四) $(1-x+x^2-x^3)^2$,

10. 二項式 $a+b$ 之乘羃。

如 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$,

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3.$$

此固所已知者，若欲求 $a+b$ 之四乘羃，則依乘法實算之如次：

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a+b \\ \hline a^4+3a^3b+3a^2b^2+ab^3 \\ \quad +\ a^3b+3a^2b^2+3ab^3+b^4 \\ \hline \end{array}$$

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

依此結果，知 $(a+b)^4$ 之展開式，其初項爲 a^4，末項爲 b^4，而其中間各項之文字則順次爲 a^3b, a^2b^2, ab^3，卽 a 之降羃而 b 之昇羃也。

其含 a^3b 之項，則 a^3 以 b 乘之，a^2b 以 a 乘之，相因而成者也，故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^3 之係數與 a^2b 之係數之和，如 $1+3$ 卽 4 是也。

又含 a^2b^2 之項，則 a^2b 以 b 乘之，ab^2 以 a 乘之，相因而成者也，故其係數爲 $(a+b)^3$ 之展開式中 a^2b 及 ab^2 之係數之和，如 $3+3$ 卽 6 是也。

依同理，ab^3 之係數爲 $3+1$ 卽 4 是也。

$$\therefore\quad (a+b)^4=a^4+(1+3)a^3b+(3+3)a^2b^2+(3+1)ab^3+b^4$$
$$=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4.$$

依同理，由 $(a+b)^4$ 之展開式，可得 $(a+b)^5$ 之展開式，

卽 $(a+b)^5=a^5+(1+4)a^4b+(4+6)a^3b^2+(6+4)a^2b^3$
$$+(4+1)ab^4+b^5$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

依此方法，順次作 $a+b$ 之六乘，七乘，八乘等之展開式，亦甚容易，玆明其法則如次：

〔法則〕. 二項式 $a+b$ 之 n 乘冪，由 $(n+1)$ 項而成，其初項爲 a^n，第二項以下爲 a 之降冪 b 之昇冪，其指數順次以 1 增減，而 a 與 b 之指數之和，恆等於 n，其係數爲 $a+b$ 之 $(n-1)$ 乘冪之展開式中第一項第二項之係數之和，又第二項第三項之係數之和順是類推以取之可也，至最後之項則爲 b^n.

今將 $a+b$ 之十乘冪，逐一展開之，而取其係數，列表如次：

$(a+b)^1$……….1, 1.

$(a+b)^2$……….1, 2, 1.

$(a+b)^3$……….1, 3, 3, 1.

$(a+b)^4$……….1, 4, 6, 4, 1.

$(a+b)^5$……….1, 5, 10, 10, 5, 1.

$(a+b)^6$……….1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

$(a+b)^7$……….1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1.

$(a+b)^8$……….1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1.

$(a+b)^9$……….1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1.

$(a+b)^{10}$……….1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1.

前表，$(a+b)^6$ 之初項末項之係數皆爲 1，第二項之係數 6 卽 $(a+b)^5$ 之展開式中係數 1 與 5 之和，又第三項之係數 15 卽 5 與 10 之和，第四項之係數 20 卽 10 與 10 之和。

$$\therefore\quad (a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6.$$

注意. $(a+b)^n$ 之展開式，其諸項之係數，由初項順取之，或由末項逆取之，皆同也。

例 1. $(3x+2y)^3$ 展開之。

解 依 $(a+b)^3$ 之展開式，令 $a=3x$, $b=2y$,

則 $(3x+2y)^3=(3x)^3+3(3x)^2(2y)+3(3x)(2y)^2+(2y)^3$

$=27x^3+54x^2y+36xy^2+8y^3$.

例 2. $(m-3n)^5$ 展開之。

解 依 $(a+b)^5$ 之公式，令 $a=m$, $b=-3n$,

則 $(m-3n)^5=m^5+5m^4(-3n)+10m^3(-3n)^2$

$+10m^2(-3n)^3+5m(-3n)^4+(-3n)^5$

$=m^5-15m^4n+90m^3n^2-270m^2n^3+405mn^4$

$-243n^5$.

例 3. 求 998 之平方。

解 依 $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab$ 令 $a=1000$, $b=2$,

則 $998^2=(1000-2)^2=1000^2+2^2-2\times1000\times2$

$=1000000+4-4000$

$=996004$.

例 4. 計算 8.999993^3 至小數第七位。

解 $8.999993^3=(9-0,000007)^3$

$=9^3+3\times9^2\times(-0,000007)$

$+3\times9\times(0,000007)^2+(-0,000007)^3$.

因第三項與第四項，其數值於小數七位固不生影響者也，故捨之。

但取 $8.999993^3=9^3-3\times81\times0,000007$

$=729-0,001701$

$=728.998299$.

注意. 凡求 $(a\pm x)^n$ 之近似值，若 x 比 a 爲非常小之數值，則 $x^2x^3\ldots\ldots$ 略之可也。

如但取　$(a\pm x)^2=a^2\pm 2ax$,

$(a\pm x)^3=a^3\pm 3a^2x$,

$(a\pm x)^4=a^4\pm 4a^3x$.

[問 5]　下式試展開之。

(一)　$\left(\frac{1}{6}a+2x\right)^3$.　　(二)　$\left(\frac{3}{5}x-\frac{5}{3}y\right)^4$.

(三)　$(2-3y)^5$.　　(四)　$(1+2x+x^2)^3$.

(五)　$\left(\frac{1}{2}a+\frac{2}{3}b\right)^7$.　　(六)　$\left(x+\frac{1}{x}\right)^8$.

(七)　$(x^2-2xy+y)^6$.

[問 6]　求下式之值。　[參照例 3]

(一)　999^2.　　(二)　9987^3.

[問 7]　求下列乘羃之值至小數五位。　[參照例 4]

(一)　287.00006^2.　　(二)　81.99994^3.

[問 8]　求下式之值至小數七位。

(一)　17.999997^3.　　(二)　3.0003^9.

練　習　問　題　I.

1.　下式試簡之。

(一)　$\left(\frac{2}{3}a^2\right)^3\left(\frac{3}{2}a^3\right)^2$.　　(二)　$[\{(a)^2\}^3]^5$.

(三)　$\left(\frac{a^2bc}{b^2cayz}\right)^2\left(\frac{b^2ca}{c^2abzx}\right)^2\left(\frac{c^2ab}{a^2bcxy}\right)^2$.

2. 下式試計算之。

(一) $25^3\times4^3$.　　　(二) $125^4\times4^4\times2^4$.

(三) $5^8\times2^{11}$.　　　(四) $\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{9}{16}\right)^4$.

(五) $9^5\times17^5\div51^5$.　　　(六) $\frac{5^8\times15^4\times(2^2\times3^{15}\div5^2)^3}{(5\times60\times5^8)^5}$.

3. 下式試簡之。

(一) $\frac{(x^2yz)^l(xy^2z)^m(xyz^2)^n}{\left(\frac{yz}{x^2}\right)^l\left(\frac{zx}{y^2}\right)^m\left(\frac{xy}{z^2}\right)^n}$.

(二) $\left\{\left(\frac{x^l}{x^m}\right)^l\times\left(\frac{x^m}{x^l}\right)^m\right\}\div\{(x^l)^l+(x^m)^m\}\times\{(x^m)^l\times(x^l)^m\}$.

*4. 下式試證明之。

$$\frac{(yz)^{qr}(zx)^{rp}(xy)^{pq}}{(y^{q-1}z^{r-1})^p(z^{r-1}x^{p-1})^q(x^{p-1}y^{q-1})^r}=\frac{(xyz)^{p+q+r}}{x^py^qz^r}.$$

5. 若 $\left(\frac{yz}{x}\right)^l\left(\frac{zx}{y}\right)^m\left(\frac{xy}{z}\right)^n=\left(\frac{x^2}{yz}\right)^l\left(\frac{y^2}{zx}\right)^m\left(\frac{z^2}{xy}\right)^n$

則有下式之關係, 試證之.

$$(x^2y^2z^2)^{l+m+n}=(x^ly^mz^n)^5.$$

6. 若 x, y, z 為正整數, 而 $x=y^z$, $y=z^x$, $z=x^y$,

則 $x=y=z=1$ 試證明之。

*7. 若 $m=a^x$, $n=a^y$, $a^2=(m^yn^x)^z$,

則 $xyz=1$ 試證之。

8. 設有方程式 $2^x=8^{y+1}$, $9^y=3^{x-9}$ 試解之。

注意. 初學者遇記 * 之處, 姑從略可也。

9. 下式試展開之。

(一) $\left(\frac{1}{3}x^2-3x\right)^3$.　　(二) $(4mnp-5mpq)^3$.

(三) $(a-b)^5(a^2+ab+b^2)^5$.　　(四) $(a-b)^7(a+b)^7$.

10. 下列各公式試證明之。

(一) $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)$
$+3c^2(a+b)+6abc$.

(二) $(a+b+c+d)^3=a^3+b^3+c^3+d^3+3a^2(b+c+d)$
$+3b^2(a+c+d)+3c^2(a+b+d)+3d^2(a+b+c)$
$+6bcd+6acd+6abd+6abc$.

11. 試依前問之公式，將 $(x+2y-3z)^3$ 展開之。

12. 下列各恆等式試證明之。

(一) $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax+by)^2+(bx-ay)^2$.

(二) $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2$.
$=(bz-cy)^2+(cx-az)^2+ay-bx)^2$.

(三) $(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2)$
$=(ax+by+cz+dw)^2+(ay-bx-cw+dz)^2$.
$+(az-cx+bw-dy)^2+(aw-dx-bz+cy)^2$.

13. 若 $(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2$

則 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$ 試證明之，

但 a, b, c 及 x, y, z 皆為實數。

14. $a, b, c\ldots\ldots$ 皆爲實數,

(一) 若 $2(a^2+b^2)=(a+b)^2$ 則 $a=b$.

(二) 若 $3(a^2+b^2+c^2)=(a+b+c)^2$ 則 $a=b=c$.

(三) 若 $4(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ 則 $a=b=c=d$.

(四) 若 $n(a^2+b^2+c^2+\ldots\ldots)=(a+b+c+\ldots\ldots)^2$

則 $a=b=c=\ldots\ldots$ (但 n 爲數字), 試各證明之。

15. 若 a, b, c, d 爲正實數,

而 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$

則 $a=b=c=d$ 試證明之。

16. 試計算下列之乘羃至小數第五位止。

(一) $(291{,}99993)^2$.　　(二) $(53{,}00007)^3$.

17. 若 k 爲非常小之數值, 則 $\frac{1}{(1\pm k)^2}$ 之近似數爲 $1\mp 2k$,

又 $\frac{1}{(1\pm k)^3}$ 之近似數爲 $1\pm 3k$ 試證明之。

第　二　章

開　方　法

11. 定義. 若 a 之 n 乘羃等於 b，則 a 爲 b 之 n **乘根**。

求某數或式之若干乘根，其計算謂之**開方法**。

例如 $2^5=32$ 則 2 爲 32 之五乘根. 以 $\sqrt[5]{32}=2$ 記之，

又 $(x^2)^3=x^6$ 則 x^2 爲 x^6 之三乘根. 卽 $\sqrt[3]{x^6}=x^2$.

故凡　　　$a^n=b$

則　　　$\sqrt[n]{b}=a$，因之 $(\sqrt[n]{b})^n=b$.

$\sqrt[n]{\ }$ 謂之根號，其 n 爲根指數，因欲與根指數有區別，故於乘羃之指數，特稱之爲羃指數，若單稱指數，則指羃指數言也。

二乘根，三乘根，特稱之爲平方根，立方根，而平方根之根指數 2 恆從略。

例如 $\sqrt{9}=\sqrt[2]{9}=3$.

注意. 開方法卽羃法運算之逆也。

12. 〔第一〕. 正數之偶數乘根，有正負二種，其絕對值相等。

例如　　　$(+4)^2=16$，$(-4)^2=16$.

故 16 之平方根爲 $+4$ 及 -4.

本書正數之平方根符號 $\sqrt{\ }$ 僅表示正根。

故　　16 之平方根 $=\pm\sqrt{16}=\pm 4.$

又凡偶數乘根之根號，亦僅表示正根，

16 之四乘根 $=\pm\sqrt[4]{16}=\pm 2.$

〔第二〕．正數之奇數乘根，僅爲正數。

例如 $\sqrt[3]{8}=2,\ \sqrt[5]{100000}=10.$

〔第三〕．負數之奇數乘根爲負數.

例如 $\sqrt[3]{-64}=-4$，因 $(-4)^3=-64$

表負數之奇數乘根者，用 $\sqrt[n]{\ }$ 故 a 爲正而 n 爲奇數，

則　$$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}.$$

〔第四〕．負數之偶數乘根，非正數，亦非負數。

蓋無論正數負數，其偶數乘冪，必皆爲正。

故若 $\sqrt{-16}$ 此名虛數，後章詳論之。

13. 定理　若 a, b 皆爲正而 $a^n=b^n$ 則 $a=b$.

證．因 $a^3=b^3$ 則 $a=b$

蓋若 $a \gtrless b$ 則有三不等式如次，

$$a \gtrless b,\quad a \gtrless b,\quad a \gtrless b$$

連乘則得 $a^3 \gtrless b^3$

若易以其他之整數如 n 者，理亦同。

14. 定理． 若干正因數之積之 n 乘根，等於各因數之 n 乘根之積。

卽 n 爲正整數而 $a, b, c, \ldots$ 爲正，

則 $$\sqrt[n]{abc\ldots}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\ldots\ldots$$

證． 此兩邊之 n 乘冪必相等，依前節卽知本定理之眞確。

蓋左邊之 n 乘冪依第 11 節，

爲 $$(\sqrt[n]{abc\ldots})^n=abc\ldots\ldots,$$

又右邊之 n 乘冪依第 5 節，

爲 $$(\sqrt[n]{a})^n\cdot(\sqrt[n]{b})^n\cdot(\sqrt[n]{c})^n\ldots\ldots=abc\ldots\ldots$$

因之本定理爲眞確。

例如 $$\sqrt{25\times16}=\sqrt{25}\times\sqrt{16}$$

注意． 若 n 爲奇數，則 $a, b, c, \ldots$ 之中雖有負數，亦得適用本定理。

例如 $$\sqrt[3]{-8000}=\sqrt[3]{-8}\cdot\sqrt[3]{1000}.$$

15. 定理． 二正數之商之 n 乘根，等於二正數各 n 乘根之商。

卽 a, b 爲正而 n 爲正整數，

則 $$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

證． 兩邊之 n 乘冪皆爲 $\frac{a}{b}$ 故也。

前節之注意，本定理亦適用之。

16. 定理. 正數 a 之 m 乘冪之 n 乘根等於 $a^{\frac{m}{n}}$; 但 m, n 爲正整數, 而 m 爲 n 之倍數。

卽
$$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}.$$

證. 左邊 n 乘冪爲 a^m, 右邊 n 乘冪爲

$$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$$

故本定理爲眞確。

例如
$$\sqrt[3]{a^{15}}=a^{\frac{15}{3}}=a^5.$$

第十四節之注意, 本節亦適用之。

注意. m 非 n 之倍數者, 後章詳論之。

17. 單項式之開方法

依第 14, 15, 16 節, 得其法則如次:

〔法則〕. 求單項式之 n 乘根者, 先求係數之 n 乘根, 乃於各文字因數之指數, 悉以 n 除之。

分數式之 n 乘根, 等於取分母子之 n 乘根爲分母子之分數。

例 1. 求 $16x^8y^6$ 之平方根。

解. 所求之平方根爲 $\pm 4x^4y^3$, 雖然, 正根負根, 僅符號之不同, 故本書祇取其一。

又含文字之式，其平方根之一方，(爲正者) 以根號表之。

如　$\sqrt{16x^8y^6}=\sqrt{16}x^{\frac{8}{2}}y^{\frac{6}{2}}=4x^4y^3.$

例 2.　求 $-125a^6b^9c^3$ 之立方根。

解　$\sqrt[3]{-125a^6b^9c^3}=\sqrt[3]{-125}a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{9}{3}}c^{\frac{3}{3}}=-5a^2b^3c.$

例 3.　求 $\dfrac{a^8b^6}{25x^4y^2z^{10}}$ 之平方根。

解　$\sqrt{\left(\dfrac{a^8b^6}{25x^4y^2z^{10}}\right)}=\dfrac{\sqrt{a^8b^6}}{\sqrt{(25x^4y^2z^{10})}}=\dfrac{a^4b^3}{5x^2yz^5}.$

[問 1]　求下式之平方根。

(一)　$25x^4y^6z^2.$　(二)　$16a^4b^2c^6d^8.$　(三)　$64x^{16}y^{28}.$

(四)　$\dfrac{a^{16}b^8}{49}.$　(五)　$\dfrac{256x^2y^4}{289p^{14}}.$

[問 2]　求下式之立方根。

(一)　$27a^6b^3c^3.$　(二)　$-343a^{12}b^{18}.$

(三)　$\dfrac{125a^3b^6}{216x^6y^9}.$　(四)　$-\dfrac{27x^{27}}{64y^{63}}.$

[問 3]　試就下式計算之。

(一)　$\sqrt[4]{a^8x^{12}}.$　(二)　$\sqrt[5]{32x^5y^{10}}.$

(三)　$\sqrt[6]{729a^{18}b^6}.$　(四)　$\sqrt[5]{-x^{10}y^{1}}.$

(五)　$\sqrt[8]{256a^8x^{64}}.$　(六)　$\sqrt[7]{\dfrac{128}{a^{63}b^{56}}}.$

(七)　$\sqrt[10]{\dfrac{a^{30}x^{50}}{b^{100}}}.$　(八)　$\sqrt[n+1]{a^{3n+3}b^{5n+5}}.$

開平方法

18. 由視察而得者。

求某數或式之平方根，其方法謂之開平方法。

依視察以求多項式之平方根，其方法所已知者如次：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (-a-b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

故 $a^2+2ab+b^2$ 之平方根爲 $a+b$ 及 $-a-b$ 故既知平方根之一，變其符號，卽爲其他之一根。

故本書祇就其求一根之法揭示之，附以根號如次：

$$\sqrt{a^2+2ab+b^2}=a+b,$$

依同理，　$\sqrt{a^2-2ab+b^2}=a-b.$

故以所設之多項式，依 $A^2\pm2AB+B^2$ 之形化之。

則其平方根，由視察卽知爲 $A\pm B$ 之形。

詳言之則多項式化爲三項式之形，若其二項各爲完全平方，其他一項，卽此二項之平方根之積之二倍，則此多項式之平方根，必爲其完全平方之二項之平方根之和或差。

例 1. 求 $16x^2+24xy+9y^2$ 之平方根。

解 題式$=(4x)^2+2(4x)(3y)+(3y)^2$

$=(4x+3y)^2.$

$\therefore\quad \sqrt{(16x^2+24xy+9y^2)}=4x+3y.$

例 2. 求 $4a^4+25b^4-20a^2b^2$ 之平方根。

解 $\sqrt{4a^4+25b^4-20a^2b^2}=\sqrt{(2a^2)^2+(5b^2)^2-2(2a^2)(5b^2)}$

$=\sqrt{(2a^2-5b^2)^2}=2a^2-5b^2.$

例 3. 求 $\frac{x^2}{y^2}-\frac{2ax}{by}+\frac{a^2}{b^2}$ 之平方根。

解 $\frac{x^2}{y^2}=\left(\frac{x}{y}\right)^2,\ \frac{a^2}{b^2}=\left(\frac{a}{b}\right)^2,\ -\frac{2ax}{by}=-2\left(\frac{x}{y}\right)\left(\frac{a}{b}\right).$

∴ 平方根 $=\frac{x}{y}-\frac{a}{b}.$

例 4. 求 $4x^2+12xy-16xz+9y^2-24yz+16z^2$ 之平方根。

解 依 x 之降羃整理之，

題式 $=4x^2+(12xy-16xz)+(9y^2-24yz+16z^2)$

$=(2x)^2+2(2x)(3y-4z)+(3y-4z)^2$

$=\{2x+(3y-4z)\}^2.$

∴ 平方根 $=2x+3y-4z.$

注意. 代數式依某文字之羃僅爲平方者，則其式依某文字之降羃或昇羃整理之使成三項式之形，由視察以求其平方根，故如例 4 又得依 y 及 z 之羃，順次整理之，以求平方根。

例 5. 求 $4x^4-12x^3+13x^2+6x+1$ 之平方根。

解 題式 $=(4x^4-12x^3+9x^2)+(4x^2-6x)+1$

$=(2x^2-3x)^2+2(2x^2-3x)+1$

$=(2x^2-3x+1)^2.$

∴ 平方根 $=2x^2-3x+1.$

[問 4] 求下列各式之平方根。

(一) $p^2-2pq+q^2.$ (二) $9x^2+12xy+4y^2.$

(三) $49a^2+112ab^2+64b^4.$ (四) $a^6-14a^3b^3+49b^6.$

(五) $p^{10}-18p^5+81.$ (六) $(x+y)^2-2(x+y)(a+b)+(a+b)^2.$

(七) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{10x}{y}+25.$ (八) $\frac{9x^2}{25}-2+\frac{25}{9x^2}.$

[問 5]　求下列各式之平方根。　[參照例 4]

(一)　$a^2-2ab+b^2-2ac+2bc+c^2$.

(二)　$x^4+4xy-6xz+4y^2-12yz+9z^2$.

(三)　$9m^2-6mn+n^2-24m+8n+16$.

[問 6]　求下式之平方根。　[參照例 5]

(一)　$x^4+2x^3+3x^2+2x+1$.

(二)　$4x^4-20x^3+13x^2+30x+9$.

(三)　$9a^4-12a^3+22a^2-12a+9$.

19. 一般之方法. 凡不能由視察而得多項式之平方根者，悉依此。

以所設之多項式爲 P，但其次數，依某文字例如 x 之降羃（或昇羃）整列之。

若 P 爲完全平方，則其平方根亦爲多項式明矣，平方根之諸項以 $a, b, c, \ldots\ldots$表之，且此諸項依 x 之降羃整列之。

$$P=(a+b+c+\ldots\ldots)^2.$$

開平法卽係由 P 以求 $a, b, c, \ldots\ldots$.

然 $a, b, c, \ldots\ldots$之値，不拘其爲如何，

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=a^2+(2a+b)b.$$

$$(a+b+c)^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$$
$$=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c.$$

$$(a+b+c+d)^2=a^2+(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c+\{2(a+b+c)+d\}d$$

以下準此。

以上各等式右邊之各羣，其初項備列之如次：

$$a^2,\ 2ab,\ 2ac,\ 2ad,\ \ldots\ldots$$

其 x 之次數，比各羣之他項爲高。

依此知 P 之平方根之求法如下：

〔**法則**〕. (1). 求 P 初項之平方根 a, 是爲根之初項。

(2). 由 P 減 a^2 所餘爲第一之剩餘。

如 $R_1=(2a+b)b+\{2(a+b)+c\}c+\ldots\ldots$

其初項 $2ab$ 以 $2a$ 除之，得根之第二項 b.

(3). 得 b 之後，以 $(2a+b)b$ 由 R_1 減之，所餘爲第二之剩餘。

如 $R_2=\{2(a+b)+c\}c+\{2(a+b+c)+d\}d+\ldots$

其初項 $2ac$ 以 $2a$ 除之，得根之第三項 c.

(4). 依上法繼續求之，至其剩餘之初項比 a 爲低次而止。

若最後之剩餘爲零，則 P 爲完全平方，其平方根爲 $a+b+c+\ldots\ldots$明矣。

此爲 P 依平方開之適盡云。

若最後之剩餘不爲零，則 P 非完全平方，列其形如次；

$$P=(a+b+c+\ldots\ldots)^2+R.$$

此爲 P 依平方開之不能適盡，其 R 爲開平剩餘。

例 1. $9x^2+30x+25$ 開平方。

運算

$$
\begin{array}{r|l}
9x^2+30x+25 & 3x+5 \\ \cline{2-2}
9x^2 & (6x+5)\times 5 \\ \cline{1-1}
+30x+25 & \\
+30x+25 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

答 $3x+5$.

說明. (1). 先 $P=9x^2+30x+25$ 依 x 之降羃整列之。

(2). P 之初項 $9x^2$ 之平方根為 $3x$ 卽根之初項 a.

(3). $a^2=9x^2$ 由 P 減之得第一剩餘 $R_1=+30x+25$ 以 $2a=6x$ 除 R_1 之初項 $30x$ 得商 5, 卽根之第二項 b.

(4). $(2a+b)\times b=30x+25$ 由 R_1 減之無餘。

$\therefore$ $a+b$ 卽 $3x+5$ 為所求之平方根。

本題係開之適盡者。

例 2. 求 $4x^4+9y^4+13x^2y^2-6xy^3-4x^3y$ 之平方根。

運算

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4-4x^3y+13x^2y^2-6xy^3+9y^4 & 2x^2-xy+3y^2 \\ \cline{2-2}
4x^4 & (4x^2-xy)(-xy) \\ \cline{1-1}
-4x^3y+13x^2y^2-6xy^3+9y^4 & (4x^2-2xy+3y^2)(3y^2) \\
-4x^3y+x^2y^2 & \\ \cline{1-1}
+12x^2y^2-6xy^3+9y^4 & \\
+12x^2y^2-6xy^3+9y^4 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

答 $2x^2-xy+3y^2$.

說明. (1). 題式 P 依 x 之降羃整列之。

(2). P 之初項 $4x^4$ 之平方根為 $2x^2$ 卽根之初項 a.

(3). $a^2=4x^4$ 由 P 減之得第一剩餘 $R_1=-4x^3y+\ldots\ldots$

(4). 以 $2a=4x^2$ 除 R_1 之初項 $-4x^3y$ 得根之第二項 $-xy$ 卽 b.

(5). $(2a+b)b=(4x^2-xy)(-xy)=-4x^3y+x^2y^2$ 由 R_1 減之，得第二剩餘 $R_2=+12x^2y^2-\ \ldots\ldots$

(6). R_2 之初項 $+12x^2y^2$ 以 $2a=4x^2$ 除之，得商 $+3y^2$ 卽根之第三項 c.

(7). $\{2(a+b)+c\}\times c=(4x^2-2xy+3y^2)\times 3y^2=+12x^2y^2-6xy^3+9y^4$ 由 R_2 減之得剩餘 $R_3=0$.

$\therefore\ a+b+c=2x^2-xy+3y^2$ 爲所求之平方根。

本題亦開之適盡者。

例 3. $4x^4-12x^3+25x^2-13x+8$ 開平方。

運算

$$
\begin{array}{r|l}
4x^4-12x^3+25x^2-13x+8 & 2x^2-3x+4 \\
4x^4\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & (4x^2-3x)(-3x) \\
\hline
-12x^3+25x^2-13x+8 & (4x^2-6x+4)\times 4 \\
-12x^3+9x^2\qquad\qquad\quad & \\
\hline
+16x^2-13x+8 & \\
+16x^2-24x+16 & \\
\hline
+11x-8 &
\end{array}
\qquad
答\begin{cases}\text{平方根 } 2x^2-3x+4 \\ \text{開平剩餘 } 11x-8\end{cases}
$$

第三之剩餘 $11x-8$ 比平方根爲低次，故本式開之不能適盡。

如 $4x^4-12x^3+25x^2-13x+8=(2x^2-3x+4)^2+11x-8$.

[問 7] 求下列各式之平方根。

(一) $49x^4-126x^2y^2+81y^4$.

(二) $4x^4-12x^3+5x^2+6x+1$.

(三) $25x^4-30ax^3+49a^2x^2-24a^3x+16a^4$.

(四) $4a^2c^2+9b^2c^2-4a^2c-6abc+12abc^2+a^2$.

(五) $4x^6+4x^5-3x^4-10x^3-3x^2+4x+4$.

(六) $x^6-6x^5y+15x^4y^2-20x^3y^3+15x^2y^4-6xy^5+y^6$.

(七) $6a^3b^2-4a^2b^3+b^4-12a^5b+9a^6+4a^4b^2$.

[問 8] 求 $1-x$ 之平方根，至第五項止。

20. 含某文字及其逆數之諸乘冪之多項式。

如　$2x+\dfrac{1}{x^2}+4+x^3+\dfrac{5}{x}+7x^2+\dfrac{8}{x^3}$ 者，

依 x 之降冪整列之，其絕對項則置於 x 與 $\dfrac{1}{x}$ 之間，而分母之次數遞次增大。

如　$x^3+7x^2+2x+4+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{8}{x^3}$。

例　求 $24+\dfrac{16y^2}{x^2}-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2}-\dfrac{32y}{x}$ 之平方根。

運算　依 y 之降冪整列之乃通常之方法。

$$
\begin{array}{r|l}
\dfrac{16y^2}{x^2}-\dfrac{32y}{x}+24-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \dfrac{4y}{x}-4+\dfrac{x}{y} \\
\hline
\dfrac{16y^2}{x^2}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \left(\dfrac{8y}{x}-4\right)\times(-4) \\
\hline
-\dfrac{32y}{x}+24-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \left(\dfrac{8y}{x}-8+\dfrac{x}{y}\right)\times\dfrac{x}{y} \\
-\dfrac{32y}{x}+16\qquad\qquad\qquad & \\
\hline
+8-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \\
+8-\dfrac{8x}{y}+\dfrac{x^2}{y^2} & \text{答}\ \dfrac{4y}{x}-4+\dfrac{x}{y}. \\
\hline
0\qquad\qquad &
\end{array}
$$

蓋視如 $a=\dfrac{4y}{x}$，$b=-4$，$c=+\dfrac{x}{y}$ 可也。

［問 9］求下列各式之平方根。

(一)　$\dfrac{x^4}{4}+2x^3+3x^2-5x-3+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}$.

(二)　$\dfrac{9a^2}{x^2}-\dfrac{6a}{5x}+\dfrac{101}{25}-\dfrac{4x}{15a}+\dfrac{4x^2}{9a^2}$.

(三)　$\dfrac{x^2}{(x+1)^2}+\dfrac{(x+1)^2}{x^2}-\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{7}{4}$.

數之開平方法

21. 數之平方根之位數，依實算如下：

$1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $4^2=16$, $5^2=25$, $6^2=36$, $7^2=49$, $8^2=64$, $9^2=81$, $10^2=100$, $100^2=10000$, $1000^2=1000000$, ………

故一位或二位整數之平方根，爲一位之數，三位或四位整數之平方根，爲二位之數，以下倣此。

故欲定某整數平方根數字之數者由單位起每二位區分之，其區分之數，即根之位數。

例如 43|56 之平方根，爲二位之數，又 6|15|24 之平方根，爲三位之數。

又小數之平方所占小數位之數，爲原數之小數位數之倍。

例如 $0.1^2=0.01$, $0.2^2=0.04$,……, $0.01^2=0.0001$. $0.001^2=0.000001$, ………

故欲定小數之平方根之位數者，由單位以下每二位區分之可也。

22. 整數及小數之開平方法 整數及小數之開平方法與多項式之開平方法無異，故祗舉例說明，不更言其法則。

例 1.　求 625 之平方根。

運算

(甲)

	$a+b$
6'25	20+5
400	(40+5)×5
225	
225	
0	答 25.

(乙)

6'25	25
4	45×5
225	
225	
0	

說明.　先由 625 之右端，計二數字之前，作縱線，分爲二區，故知平方根爲二位之數。

令 $625=(a+b)^2$ 其 600 之中含最大平方數者，依開平九九* 知 $20^2=400$ 故 $a=20$，乃由 625 減 $a^2=400$ 剩餘 225，此 225 以 $2a=40$ 除之得商 5 作爲 b 之數以試之，則 $2a+b=40+5$ 以 $b=5$ 乘之，此結果 45×5 得 225 適與剩餘相等，減之無餘，故 $b=5$.

本題無剩餘，故 $\sqrt{625}=25$.

通常略甲之算式如乙。

例 2.　求 69169 之平方根。

運算

6'91'69	263
4	46×6
291	523×3
276	
1569	
1569	
0	答 263.

說明.　(1).　6'91'69 分爲三區，故知平方根爲三位之數，令百位數，十位數，單位數，爲 a,b,c 即平方根爲 $a+b+c$.

(2).　$3^2>6>2^2$ 故根之第一數爲 2，即 $a=200$.

*開平九九即 $1^2=1$, $2^2=4$, $3^2=9$, $9^2=81$ 云。

(3)．$a^2=4$ 萬由 69169 減之，得 $R_1=29169$ 但依算式則末二位可省略。

(4)．以 $2a=400$ 除 R_1 或 28 以 4 除之得商 7，然 $b=70$ 則 $(2a+b)\times b=470\times 70=32900$ 比 R_1 大，故 b 不能爲 70 因之 $b=60$.

(5)．$(2a+b)\times b=460\times 60=27600$ 由 R_1 減之得 $R_2=1569$ 以 $2(a+b)=260\times 2=520$ 除之得 $c=3$.

(6)．$\{2(a+b)+b\}\times c=523\times 3=1569$ 由 R_2 減之適盡，故平方根爲 $a+b+c=263$.

注意．多項式之開平，其求根之第二項，第三項，…… 恆於 R_1，R_2，…… 以 $2a$ 除之，然數之開平方則以 $2a$，$2(a+b)$，$2(a+b+c)$，……除之。

例 3.　求小數 0.0001713481 之平方根。

運算

$$\begin{array}{r|l}
0.00|01|71|34|81 & 0.01309 \\
1 & 23\times 3 \\
\hline
71 & 2609\times 9 \\
69 & \\
\hline
23481 & \\
23481 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

答 0.01309.

說明．由小數點右方每二位區分之，計分爲五區，故知平方根爲小數五位之數，凡所設之數小數點以下有二個零者，根之小數點以下作一個零。

又剩餘 234 比 260 小，故以下段所區分者，併爲 23481 而於根作零，然後運算。

例 4. 求 72.313 之平方根至小數第四位止。

運算

```
72.31|30|00|00 | 8.5037
64             |--------
---------------| 165×5
  831          | 170003×3
  825          | 170067×7
  -----        |
   63000       |
   51009       |
   ------------|
    1199100    |
    1190469    |
    -----------|
       8631    |
```

答 8.5037.

說明. 凡帶小數者，由小數點左右每二位區分之，而尤要者須作零以足其位。

本題係開之不盡者，

$$72.313=(8.5037)^2+0.00008631.$$

卽所設之數，比 8.5037 之平方大，比 8.5038 之平方小，此二值爲平方根之近似數，前者稱之爲不足之近似數，後者稱之謂有餘之近似數，但前者又單稱近似數云。

注意. 開平剩餘，不能如除法，以剩餘爲分子作分數。

[問 10] 求下列各數之平方根，

(一) 676.　　(二) 1444.　　(三) 11664.

(四) 207936.　　(五) 9634816.　　(六) 51825601.

(七) 13.69.　　(八) 227.7081.　　(九) 0.00056644.

[問 11] 求下列各數之平方根至小數第二位止。

(一) 105[illegible]　　(二) 11.665.　　(三) 0.4.

23. 分數之開平方法. 求分數之平方根，其分母子爲完全平方者，各求其平方根，(帶分數先化爲假分數). 若非完全平方，則化其分數爲小數，然後依平方開之。

例 1. 求 $\frac{529}{2209}$ 之平方根。

解 $\sqrt{\left(\frac{529}{2209}\right)}=\frac{\sqrt{529}}{\sqrt{2209}}=\frac{23}{47}$.

例 2. $3\frac{69}{169}$ 之平方根若何。

解 $\sqrt{\left(3\frac{69}{169}\right)}=\sqrt{\left(\frac{576}{169}\right)}=\frac{24}{13}=1\frac{11}{13}$.

例 3. 求 $\frac{4}{7}$ 之平方根至小數第三位止。

解 $\sqrt{\left(\frac{4}{7}\right)}=\sqrt{0.571428}=0.755\ldots\ldots$

根之小數求至第三位止者其 $\frac{4}{7}$ 所應取之小數位數爲二倍，卽至第六位止。

[問 12] 求下列各分數之平方根。

(一) $\frac{784}{2809}$.　(二) $5\frac{551}{1369}$.　(三) $9\frac{11104}{12769}$.

[問 13] 求下列各分數之平方根，至小數第三位止。

(一) $\frac{17}{49}$.　(二) $\frac{3}{11}$.　(三) $\frac{22}{7}$.

(四) $\frac{215472}{108}$.

*24. 省略開平方法.

求某數之平方根，其根爲 $(2n+1)$ 位之數者，依開平方法，求其初之 $(n+1)$ 位，尙餘 n 位依除法求之可也.

證 N 爲所設之數，a 爲其初所求得根之部分，x 爲未知之部分.

則 $$\sqrt{N}=a+x,$$

$\therefore$ $$N=a^2+2ax+x^2.$$

因之 $$\frac{N-a^2}{2a}=x+\frac{x^2}{2a}.$$

卽 $N-a^2$ 以 $2a$ 除之所得之商，等於根未知之部分 x 加 $\frac{x^2}{2a}$.

然 $\frac{x^2}{2a}$ 之分子 x 爲 n 位之數，故 x^2 之位數爲不大於 $2n$，

而 $2a$ 爲 $(2n+1)$ 位之數.

故 $$\frac{x^2}{2a}<1.$$

可知此分數雖捨棄之，其於 x 之値固不生影響者也，故其初之 $(n+1)$ 位 a 旣求得以後，其開平剩餘 $N-a^2$ 以 $2a$ 除之，卽得根未知之部分 x 取 n 位而止亦殊精密.

據此則 x 無論爲整數且爲完全平方，卽爲小數或開不盡者，皆得適用。

注意. $n=1$ 則 $n+1=2$，故數之開平方法，非其初根之二數字求得後，不能依除法而決定其次之數字歸於正確也。

[參照第 22 節例 2 之說明]

例 求 $\sqrt{5}$ 至小數第十位止.

解 所求之根爲 11 位之數, 故於其初之六位依開平方法求之, 其餘五位依除法。

```
 5.00|00|00|00|00  | 2.23 606
 4                 |----------
------             | 42×2
1 00               | 443×3
  84               | 4466×6
------             | 447206×6
 16 00             |
 13 29             |
------             |
  2 71 00          |
  2 67 96          |
-------------------
     3 04 00 00
     2 68 32 36
    -----------
       35 67 64
```

乃以 $2a=4.47212$ 除剩餘 0.0000356764 得商 0,0000079775...

以既知之部分加之, 得其値如次, $\sqrt{5}=2.2360679775\ldots\ldots$

[問 14] 試依省略法, 求下列各數之平方根, 至小數六位止.

(一) 3. (二) 4.9. (三) 25.16.

(四) 18439. (五) 0.00064.

開 立 方 法

25. 視察法.

求某式或數之立方根, 其方法謂之開立法。

某二項式 $a\pm b$ 之立方爲 $a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$

故 $\sqrt[3]{a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3}=a\pm b.$

故凡某式或數可化爲 $A^3\pm3A^2B+3AB^2\pm B^3$ 之形者, 其立方根不難直接而知之。

例 1. 求 $8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3$ 之立方根.

解 $\sqrt[3]{(8x^3-60x^2y+150xy^2-125y^3)}$

$=\sqrt[3]{\{(2x)^3-3(2x)^2(5y)+3(2x)(5y)^2-(5y)^3\}}$

$=\sqrt[3]{(2x-5y)^3}$

$=2x-5y.$

例 2. 求 1331 之立方根。

解 $\sqrt[3]{1331}=\sqrt[3]{\{1000+300+30+1\}}$

$=\sqrt[3]{\{10^3+3\times10^2\times1+3\times10\times1^2+1^3\}}$

$=\sqrt[3]{(10+1)^3}$

$=10+1=11.$

例 3. 求 $(p+q)^3+3(p+q)^2(m-n)+3(p+q)(m-n)^2$ $+(m-n)^3$ 之立方根.　　　　答 $p+q+m-n.$

〔問 15〕 試依視察法求下式之立方根.

(一) $x^3+6x^2+12x+8.$　　(二) $a^3x^3-3a^2x^2y^2+3axy^4-y^6.$

(三) $x^3+3x^2(a-b+c)+3x(a-b+c)^2+(a-b+c)^3.$

(四) $\dfrac{8}{a^6}-\dfrac{36}{a^3}+54-27a^3.$

(五) $8a^6+60a^4b^2+150a^2b^4+125b^6.$

(六) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^3+3\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2+3\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)+1.$

(七) $(5x-3y)^3-12(5x-3y)^2(x+y)$ $+48(5x-3y)(x+y)^2-64(x+y)^3.$

23. 一般之方法. 以所設之多項式爲 P，其次數依某文字例如 x 之降羃（或昇羃）整列之。

立方根之諸項以 $a, b, c,\ldots\ldots$ 表之且此諸項依 x 之降羃整列之，P 若爲完全立方，則 $P=(a+b+c+\ldots\ldots)^3$.

開立方法係由 P 以求 $a, b, c,\ldots\ldots$ 之方法也。

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b,$$

$$(a+b+c)^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$$

$$=a^3+(3a^2+3ab+b^2)b+\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}c,$$

以下倣此。

以上各等式右邊之各羣，其初項順次如 a^3, $3a^2b$, $3a^2c,\ldots\ldots$ 係各羣中之最高乘羃也。

爰有法則如次：

〔**法則**〕. (1). 求 P 初項之立方根 a，是爲根之初項。

(2). 由 P 減 a^3，而第一剩餘 R_1 之初項 $3a^2b$ 以 $3a^2$ 除之，得根之第二項 b.

(3). 由 R_1 減 $(3a^2+3ab+b^2)\times b$ 而第二剩餘 R_2 之初項 $3a^2c$ 以 $3a^2$ 除之，得根之第三項 c.

(4). 依上法繼續求之，至剩餘 R 比 a^2 爲低次而止，其 $a+b+c+\ldots\ldots$ 卽所求之根，而 R 爲**開立剩餘**。

R 若為零，則曰 P 依立方開之為適盡，若 R 不為零，則 P 非完全立方。

如 $$P=(a+b+c+\ldots\ldots)^3+R.$$

此為 P 依立方開之不能適盡。

例 1. 求 $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ 之立方根.

運算
$$\begin{array}{r|l}
8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3 & 2x+3y \\
8x^3 & 3(2x)^2=12x^3 \\
\hline
+36x^2y+54xy^2+27y^3 & 3(2x)(3y)=18xy \\
+36x^2y+54xy^2+27y^3 & (3y)^2=9y^2 \\
\hline
0 & (12x^2+18xy+9y^2)\times 3y
\end{array}$$

答 $2x+3y$.

說明. $8x^3$ 之立方根為 $2x$, 是卽根之初項 a.

$(2x)^3=8x^3$ 由題式減之得 $R=+36x^2y+\ldots\ldots$ 其初項 $+36x^2y$

以 $3a^2=12x^2$ 除之得 $3y$ 是卽根之第二項 b.

$3a^2+3ab+b^2=12x^2+18xy+9y^2$ 以 b 卽 $3y$ 乘之得積.

由 R 減之無餘.

故 $a+b=2x+3y$ 為所求之立方根。

例 2. 求 $x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27$ 之立方根。

$$\begin{array}{r|l}
x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & x^2+2x+3 \\
x^6 & 3(x^2)^2=3x^4 \\
\hline
+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27 & 3x^2(2x)=6x^3 \\
+6x^5+12x^4+8x^3 & (2x)^2=4x^2 \\
\hline
+9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 & (3x^4+6x^3+4x^2)\times 2x \\
+9x^4+36x^3+63x^2+54x+27 & 3(x^2+2x)^2=3x^4+12x^3+12x^2 \\
\hline
0 & 3(x^2+2x)\times 3=9x^2+18x \\
 & 3^2=9 \\
 & (3x^4+12x^3+21x^2+18x+9)\times 3
\end{array}$$

答 x^2+2x+3.

說明. x^6 之立方根爲 x^2， 而 27 之立方根爲 3， 故知根爲三項式， 故題式等於 $(a+b+c)^3$ 或等於 $(a+b+c)^3+R$.

依 例 2. $a+b=x^2+2x$.

其第二剩餘之初項 $9x^4$ 以 $3a^2=3x^4$ 除之得 $c=3$.

而 $\{3(a+b)^2+3(a+b)c+c^2\}\times c$ 由第二剩餘減之適盡。

[問 16] 試就下列各式依立方開之。

(一) $x^6+3x^5+6x^4+7x^3+6x^2+3x+1.$

(二) $27x^6-81x^5+108x^4-81x^3+36x^2-9x+1.$

(三) $24x^4y+96x^2y^4-6x^5y+x^6-96xy^5+64y^6-56x^3y^3.$

(四) $1-3x+6x^2-10x^3+12x^4-12x^5+10x^6-6x^7+3x^8-x^9.$

(五) $\dfrac{x^3}{y^3}+\dfrac{6x^2}{y^2}+\dfrac{9x}{y}-4-\dfrac{2y}{x}+\dfrac{6y^2}{x^2}-\dfrac{y^3}{x^3}.$

27. 多項式之高次乘根.

多項式之平方根之平方根，爲其四乘根，平方根之立方根或立方根之平方根，爲其六乘根。

因 $(A^2)^2=A^4,\quad (A^3)^2=(A^2)^3=A^6.$

故凡根指數由 2 及 3 之因數而成者，可依開平方及開立方逐次以求其根。

五乘根，七乘根等之開法，姑從略。

[問 17] 求下列各式之四乘根.

(一) $81x^4-216x^3y+216x^2y^2-96xy^3+16y^4.$

(二) $x^8-\dfrac{3a^2}{b}x^7+\dfrac{27a^4}{8b^2}x^6-\dfrac{72a^6}{16b^3}x^5-\dfrac{81a^8}{256b^4}x^4.$

[問 18] 求下列各式之六乘根.

(一) $1+6x+14x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$.

(二) $x^6-12ax^5+240a^4x^2-192a^5x+60a^2x^4-160a^3x^3+64a^6$.

數之開立方法

28. 數之立方根之位數. 依實算如次:

$$1^3=1,\ 2^3=8,\ 3^3=27,\ 4^3=64,\ 5^3=125,\ 6^3=216,$$
$$7^3=343,\quad 8^3=512,\quad 9^3=729,\ {}^*10^3=1000,$$
$$100^3=1000000,\ 1000^3=1000000000,\ldots\ldots$$

故一位至三位之數之立方根, 爲一位之數, 四位至六位之數之立方根, 爲二位之數。

故整數由單位起每三位區分之, 卽可知其立方根之位數。

例如 8|325 之立方根, 爲二位之數, 64|382|507 之立方根, 爲三位之數.

又小數之立方根之小數位數, 爲其小數之位數之三分之一, 故由小數點向右每三位區分之, 卽可知其立方根之小數位數。

例如 0.006|425 之立方根, 爲小數二位之數.

---

* 由 $1^3=1$ 至 $9^3=729$ 謂之開立方九九, 讀法如下:

一一得一, 二二得八, 三三得二十七,……, 九九七百二十九.

29. 整數及小數之開立方法.

由下例卽知其開法.

例 1. 求 1728 之立方根.

(甲) 運算 (乙)

	$a+b$
1|728	$10+2$
1000	$3\times10^2=\ \ 300$
728	$3\times10\times2=\ \ 60$
	$2^2=\ \ 4$
728	364×2
0	答 12.

1|728	12
1	$3\times10^2=\ \ 300$
728	$3\times10\times2=\ \ 60$
728	$2^2=\ \ 4$
0	364×2

說明. (1) 1728 之立方根爲二位之數，故等於 $a+b$ (甲).

(2) 1000 之中含最大立方數者，爲 10 之立方，故 $a=10$.

(3) 由 1728 減 $a^3=1000$ 得 $R=728$.

(4) 以 $3a^2=300$ 除 R 得 2，故 $b=2$.

(5) $3a^2+3ab+b^2=364$ 以 $b=2$ 乘之其積 728 由 R 減之無餘，故 $a+b=12$ 爲所求之根.

通例略(甲)如(乙).

例 2. 求 14886936 之立方根.

運算		
14|886|936	246	
8	$3\times20^2\ \ =1200$	$3\times240^2\ \ =172800$
6886	$3\times20\times4=\ \ 240$	$3\times240\times6=\ \ 4320$
5824	$4^2=\ \ 16$	$6^2=\ \ 36$
1062936	1456×4	177156×6
1062936		
答 246. 0		

說明. 所設之數可分爲三區，故知立方根爲三位之數，其百位數，十位數，單位數順次以 a, b, c 表之，依例 1 得 $a=200$, $b=40$.

乃以 $3(a+b)^2=172800$ 除第二剩餘 1062936 得 $c=6$.

例 3. 0.000007645373 開立方。

運算 0.000|007|645|373 | 0.0197

1	$3\times10^2\ \ =300$	$3\times190^2=108300$
6645	$3\times10\times9=270$	$3\times190\times7=3990$
5859	$9^2=\ \ 81$	$7^2=\ \ \ 49$
786373	651×9	112339×7
786373		
0		

答 0.0197

上例，皆開之適盡者，若開之不能適盡，則與開平法相同，求立方根之近似數。

[問 19]　求下列各數之立方根.

(一)　6859.　　(二)　74088.

(三)　389017.　　(四)　912673.

(五)　152273304.　　(六)　348913664.

(七)　27081081027.　　(八)　371.694959.

(九)　0.001771561.

[問 20]　求下列各數之立方根至小數第三位止.

(一)　2515123.　　(二)　38272712.

[問 21]　求下列各數.

(一)　$\sqrt[4]{38950081}$.　　(二)　$\sqrt[4]{1698181681}$.

(三)　$\sqrt[6]{24137569}$.　　(四)　$\sqrt[9]{2224847691}$.

30.　分數之開立方法.　求分數之立方根，其分母子爲完全立方者，各求其立方根，(帶分數先化爲

假分數，若非完全立方，則先化其分數爲小數，然後依立方開之。

例 1. 求$\frac{3375}{59319}$之立方根.

解 $$\sqrt[3]{\frac{3375}{59319}}=\frac{\sqrt[3]{3375}}{\sqrt[3]{59319}}=\frac{15}{39}.$$

例 2. 求$\frac{3}{4}$之立方根. (小數二位止，以下四捨五入.

解 $$\sqrt[3]{\frac{3}{4}}=\sqrt[3]{0.75}=0.94\ldots\ldots$$

注意. 所設之分數爲循環小數者，先求得其循環之數字，然後依立方開之。

[問 22] 求下列各分數之立方根 (若開之不盡，則求至小數三位止，以下四捨五入)。

(一) $\frac{2197}{15625}$.　　(二) $\frac{5}{6}$.　　(三) $\frac{355}{113}$.

31. 省略開立方法.

求某數 N 之立方根，其根爲 $(2n+2)$ 位之數者，依開立方法，求其初之 $(n+2)$ 位之數 a，尙餘 n 位則於開立剩餘 $N-a^3$ 以 $3a^2$ 除之求其商可也。

其證明與開平方法相同，故略之。

例　$\sqrt[3]{2}$ 求至小數五位止.

運算

2|000|000|000 | 1.259			
1	$3\times10^2=\ 300$	$3\times120^2=\ 43200$	$3\times1250^2=\ 468700$
1000	$3\times10\times2=60$	$3\times100\times5=1800$	$3\times1250\times9=33750$
728	$2^2=\ 4$	$5^2=\ 25$	$9^2=\ 81$
272000	364×2	45025×5	4721331×9
225125			
46875000			
42491979			
4383021			

$$0.004383021\div(3\times1.259^2)=0.00092\ldots\ldots$$

$$\therefore\qquad \sqrt[3]{2}=1.25992\ldots\ldots$$

注意.　由 2 減 $(1.25992)^3$ 餘以 $3\times(1.25992)^2$ 除之, 尚可得根之四數字。

[問 23]　試依省略算求下列各數之立方根至小數第五位止.

(一)　3.　　　　　　　　(二)　5.

未　定　係　數　法

32.　依未定係數法, 解開法問題, 舉其二三例如次:

問題 I.　三項式 x^2+Px+Q 不拘 x 之值若何, 但爲完全平方者其條件若何。

解　題式爲完全平方者, 其根必爲 $x+a$ 之形係一次二項式故得恆等式如次:

$$x^2+Px+Q=(x+a)^2,$$

$$\therefore \qquad x^2+Px+Q=x^2+2ax+a^2,$$

兩邊 x 同次項之係數相等, 故得等式如次:

$$P=2a \tag{1}$$

$$Q=a^2 \tag{2}$$

上二式消去 a, 卽由 (1) 得 $a=\frac{1}{2}P$ 代入 (2). 則

$$Q=\left(\frac{1}{2}P\right)^2,$$

$$\therefore \qquad P^2=4Q$$

卽所求之條件, 此解法謂之未定係數法。

別解 所設之式依平方開之如次:

$$\begin{array}{r|l}
x^2+Px+Q & x+\frac{1}{2}P \\
x^2 & (2x+\frac{1}{2}P)\times\frac{1}{2}P \\
\hline
+Px+Q & \\
+Px+\frac{1}{4}P^2 & \\
\hline
Q-\frac{1}{4}P^2 &
\end{array}$$

題式爲完全平方, 故其剩餘必爲零.

卽 $$Q-\frac{1}{2}P^2=0,$$

$$\therefore \qquad P^2=4Q.$$

問題 II. 依未定係數法, 求下式之平方根。

$$4x^4-4x^3+13x^2-6x+9.$$

解 題式若爲完全平方, 則其平方根必爲 $2x^2+Mx+N$ 之形, 係二次三項式, 故得恆等式如下:

$$\begin{aligned}4x^4-4x^3+13x^2-6x+9&=(2x^2+Mx+N)^2\\ &=4x^4+4Mx^3+(M^2+4N)x^2+2MNx+N^2,\end{aligned}$$

$\therefore \quad -4=4M \quad (1), \qquad +13=M^2+4N \quad (2),$

$-6=2MN \quad (3), \qquad +9= \quad +N^2 \quad (4).$

四等式中 (1) 及 (2) $M=-1$, $N=3$ 以此値代入 (3) 及 (4) 適合.

故所求之平方根, 爲 $2x^2-x+3$.

若 (1), (2) 所得 M, N 之値, 不能與 (3), (4) 適合, 則題式非完全平方。

問題 III. 設有多項式如次, 問是否爲完全立方, 如爲完全立方, 試求其立方根。

$$x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27.$$

解 題式若爲完全立方, 則其立方根必爲 x^2+Mx+N 之形.

$$(x^2+Mx+N)^3=x^6+3Mx^5+3(M^2+N)x^4+(M^3+6MN)x^3.$$
$$+3(M^2N+N^2)x^2+3MN^2x+N^3$$
$$=x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27.$$

若 M, N 之値, 與下列六等式適合, 則題式爲完全立方.

$$3M=6, \quad 3(M^2+N)=21. \quad M^3+6MN=44.$$
$$3(M^2N+N^2)=63, \quad 3MN^2=54, \quad N^3=27.$$

由前二式得 $M=2$, $N=3$ 以此値代入餘四式適合.

故題式爲完全立方, 其立方根爲 x^2+2x+3.

[問 24] ax^2+bx+c 若爲完全平方式, 則 $b^2=4ac$ 試證之.

[問 25] 試依未定係數法, 求下式之平方根.

(一) $49-84x-34x^2+60x^3+25x^4$.

(二) $x^{10}+6x^9+13x^8+4x^7-18x^6-12x^5$.
$$+14x^4-12x^3+9x^2-2x+1,$$

[問 26] 試依未定係數法，求下式之立方根.

$$8x^6-36x^5+78x^4-99x^3+78x^2-36x+8.$$

[問 27] 下列各代數式，若爲完全平方，其 a, b, c 等之值各若何.

(一) $4x^4-12x^3+5x^2+ax+b.$

(二) $x^6-8x^5+ax^4+bx^3+cx^2-44x+4$

(三) $(x^2+2x+4)^3-(ax^4+bx^3+cx^2).$

[問 28] 三次式 x^3+3ax^2+bx+c 其 x 之值不拘如何而爲完全立方者，其 b, c 間之關係若何.

練 習 問 題 II.

1. 試依視察求下式之平方根。

(一) $25a^4+9b^4+4c^4+12b^2c^2-20c^2a^2-30a^2b^2$.

(二) $a^2+2abx+(b^2+2ac)x^2+2bcx^3+c^2x^4$.

(三) $x^6-2x^5+3x^4+2x^3(y-1)+x^2(1-2y)+2xy+y^2$.

(四) $\dfrac{a^2}{b^2c^2}+\dfrac{b^2}{c^2a^2}+\dfrac{c^2}{a^2b^2}+2\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}+\dfrac{1}{c^2}\right)$.

2. $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$ 必為完全平方。試證之。

3. 求下列各式之平方根.

(一) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{2a}{3}+\dfrac{7a^2}{9}-\dfrac{2a^3}{3}+\dfrac{a^4}{9}$.

(二) $a^4-3a^3+\dfrac{25}{9}-5a+\dfrac{67}{12}a^2$.

(三) $\dfrac{25x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{25x^2}-20\dfrac{x}{y}+\dfrac{4y}{5x}+2$.

(四) $a^2-6ab+10ac-14ad+9b^2-30bc$

$+42bd+25c^2-70cd+49d^2$.

(五) $x^4+(2a-4)x^3+(a^2-2a+4)x^2+(2a^2-4a)x+a^2$.

(六) $6ax(x^3-a^2b)+x^2(x^4-2a^2bx+9a^2)+a^4b^2$.

(七) $4(x-1)(x^3-1)+9x^2$.

(八) $2a^2(b+c)^2+2b^2(c+a)^2+2c^2(a+b)^2+4abc(a+b+c)$.

(九) $(a-b)^4-2(a^2+b^2)(a-b)^2+2(a^4+b^4)$.

(十) $x^2(x^2+y^2+z^2)+y^2z^2+zx(y+z)(yz-x^2)$.

4. 下式爲完全平方，試證之。

$$(x^2-yz)^3+(y^2-zx)^3+(z^2-xy)^3-3(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy).$$

5. 試依視察求下式之立方根。

$$a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+6abc+3b^2c+3bc^2.$$

6. 求下列各式之立方根。

(一) $8z^9-12z^8+6z^7-37z^6+36z^5-9z^4+54z^3-27z^2-27.$

(二) $4x^2(2x-y^2)+y^4\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{27}y^2\right)$

(三) $8x^6-36cx^5+102c^2x^4-171c^3x^3+204c^4x^2-144c^5x+64c^6.$

7. 求 $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-4\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+12$ 之四乘根。

8. 求 $\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)^2-6\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+9\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$ 之六乘根。

9. 求下列各數之平方根。

(一) 9054081. (二) 10246401.

(三) 9.86965056.

10. 求下列各數之立方根。

(一) 20910518875. (二) 0.588480472.

(三) 122615.327232.

11. 求下列各數。

(一) $\sqrt[4]{0.001698181681}.$

(二) $\sqrt[6]{1544804416}.$ (三) $\sqrt[8]{5764801}.$

12. 求 $\sqrt{15.481}$ 與 $\sqrt[3]{128.5092}$ 之差，至小數點以下四位止。

13. 若下列各式爲完全平方數，其 x 之數值若何。

(一) $x^4+6x^3+11x^2+3x+31.$

(二) $x^4-2ax^3+(a^2+2b)x^2-3abx+2b^2.$

(三) $x^4+2ax^3+3bx^2+cx+d.$

14. 若 $8x^3-36x^2+56x-39$ 爲完全立方數，其 x 之數值若何。

15. 若下列各代數式爲完全平方，其 p, q, r 之數値各若何。

(一) $9x^6-24x^5+px^4+qx^3+rx^2-60x+36.$

(二) $9x^2+2pxy+4y^2+2qx+2ry+4.$

16. $4x^6+12x^5+5x^4-2x^3$ 爲完全平方式之前四項，問其餘諸項若何.

17. 不拘 x 之値如何，而 $x^4-ax^3+bx^2-cx+1$ 爲完全平方者，其條件若何。

81. 不拘 x 之値如何，而 $x^4+px^3+qx^2+rx+s$ 爲完全平方，則 $(q-\frac{1}{4}p^2)^3=4s$, $r^2=p^2s$ 試證之。

19. 若 $3mx^2+6(m-2)x+1$ 爲完全平方，其 m 之數値若何。

20. 若 $ax^2+by^2+cz^2+2fyz+2gzx+2hxy$ 爲 x, y, z 有理整多項式之平方，其條件若何。

21. ax^3+bx^2+cx+d 其 x 之値不拘如何，而爲完全立方。則 $b^2=3ac$, $c^2=3bd$ 試證之。

第 三 章

諸 種 之 指 數

33. 關於指數之公式，摘記之如次。

$$a^m\times a^n=a^{m+n}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔1〕$$

$$\left.\begin{array}{ll} m>n & a^m\div a^n=a^{m-n}. \\ m<n & a^m\div a^n=\dfrac{1}{a^{n-m}}. \\ m=n & a^m\div a^n=1. \end{array}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots〔2〕$$

$$(a^m)^n=a^{mn}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔2〕$$

$$(ab)^m=a^mb^m\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔4〕$$

m 爲 n 之倍數 $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots〔5〕$

以上各公式，m，n 爲正整數，若此等指數爲分數或負數，(例如 $a^{\frac{2}{3}}$，a^{-5}) 則以上各公式爲全無意義。

然若不拘此制限，其指數爲分數或負數者，此於代數計算上大爲便利，惟以分數或負數爲指數者，尚當依代數學基礎之諸原則及指數定則以審定此等指數之意義。

34. **分數指數.**

若前節公式〔1〕假定 m，n 雖爲分數，亦得適用。

則 $$a^{\frac{1}{2}}\times a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=a^1$$

卽 $$(a^{\frac{1}{2}})^2=a.$$

如是則 $a^{\frac{1}{2}}$ 之平方卽爲 a，故 $a^{\frac{1}{2}}$ 必爲 a 之平方根 $\sqrt{a}$ 或 $-\sqrt{a}$ 但爲便利計，故祇取其正根。

如 $$a^{\frac{1}{2}}=\sqrt{a}.$$

依同理 $$a^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{a}.$$

故凡 n 爲正整數者.

則 $$a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\ldots\ldots n \text{ 因數止}=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\ldots n\text{ 項止}}$$
$$=a^1=a,$$

故 $a^{\frac{1}{n}}$ 必爲 a 之 n 乘根。

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

又 $$(a^{\frac{2}{3}})^3=a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}\times a^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}=a^2.$$

卽 $a^{\frac{2}{3}}$ 之三乘爲 a^2.

故 $$a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$$

故凡 m, n 爲正整數，

則 $$(a^{\frac{m}{n}})^n=a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times a^{\frac{m}{n}}\times\ldots n \text{ 因數止}=a^{\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\frac{m}{n}+\ldots n\text{ 項止}}$$
$$=a^m.$$

故 $a^{\frac{m}{n}}$ 必爲 a^m 之 n 乘根。

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m} \text{ ....} (7)$$

故凡 $a^{\frac{m}{n}}$ 爲 a 之 m 乘羃之 n 乘根。

以上所定分數指數之意義，其結果則前節之公式 (5) m 非 n 之倍數者，亦得成立。

〔參照第 16 節〕

系 I. $$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=(\sqrt[n]{a})^m \text{ ....} (8)$$

證 $(\sqrt[n]{a})^m=a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times a^{\frac{1}{n}}\times\text{......}m$ 因數止，

$=a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\text{........}}$ m 項止，

$=a^{\frac{m}{n}}$.

系 II. $$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}} \text{ ....} (9)$$

證 令 $x=a^{\frac{m}{n}}$ 則 $x^n=a^m$，故 $x^{np}=a^{mp}$.

$\therefore$ $x=a^{\frac{mp}{np}}$，卽 $a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{mp}{np}}$.

例 1. $3y^{\frac{2}{5}}=3\sqrt[5]{y^2}$.

例 2. $5\sqrt[4]{a^3}=5a^{\frac{3}{4}}$.

例 3. $4^{\frac{3}{2}}=\sqrt[2]{4^3}=\sqrt{64}=8$.

或　$4^{\frac{3}{2}}=(\sqrt{4})^3=2^3=8.$

例 4.　$a^{\frac{2}{5}}=a^{\frac{4}{10}}=a^{\frac{6}{15}}=\cdots\cdots$

$a^2=a^{\frac{4}{2}}=a^{\frac{6}{3}}=\cdots\cdots$

[問 1]　試就下列各式，去其分數指數而以根號表之。

(一)　$a^{\frac{1}{2}}z.$　　(二)　$2a^{\frac{1}{n}}.$　　(三)　$3y^{\frac{2}{m}}.$

(四)　$x^{\frac{n+1}{2}}$　　(五)　$8^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{4}}.$　　(六)　$a^{\frac{m+n}{m-n}}$

[問 2]　試就下式，去其根號，而以分數指數表之。

(一)　$\sqrt{5}.$　　(二)　$\sqrt[7]{a^4}.$　　(三)　$\sqrt{(x+y)^3}.$

(四)　$\sqrt[4]{c^{n-1}}.$

[問 3]　求下列各式之數值。

(一)　$16^{\frac{3}{4}}.$　　(二)　$125^{\frac{2}{3}}.$　　(三)　$243^{\frac{4}{10}}$

(四)　$0.008^{\frac{4}{3}}$　　(五)　$36^{1.5}.$　　(六)　$2.25^{2.5}$

(七)　$256^{0.125}$　　(八)　$(0.0001)^{\frac{1}{4}}$　　(九)　$\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{4}{3}}.$

(十)　$\left(20\frac{51}{64}\right)^{\frac{2}{3}}.$　　(十一)　$0.00032^{\frac{3}{5}}.$

[問 4]　試就指數法詳說之，其 $x^{\frac{1}{m}}$ 等於 $\sqrt[m]{x}$ 併證明之。

35.　零指數.

公式 $a^m\times a^n=a^{m+n}$ 若 $m=0$ 而亦適用。

則　　　　$a^0\times a^n=a^{0+n}=a^n.$

故若 $a \neq 0$

則 $$a^0=\frac{a^n}{a^n}=1.$$

即 $$a^0=1 \quad\text{......}(10)$$

是不爲零者之任何數之零乘羃爲 1 也。

36. 負指數.

公式 $a^m \times a^n=a^{m+n}$ 若 $m=-n$

則 $$a^{-n}\times a^n=a^{-n+n}=a^0=1.$$

故 $$a^{-n}=\frac{1}{a^n}. \quad\text{......}(11)$$

是某數之 $-n$ 乘羃即其 n 乘羃之逆數也。

又由上式 $$a^n=\frac{1}{a^{-n}}. \quad\text{......}(12)$$

以上所定負指數之意義，其結果則第 33 節公式〔2〕可併爲一式如次：

即不關於 m, n 之大小如何，

而爲 $$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}=a^{-(n-m)} \quad (13)$$

又由公式〔11〕及〔12〕述之如次。

分數分子中之因數，移於分母，或分母中之因數移於分子，當變其指數之符號。

例 1. $x^{a-b}\times x^{b-a}=x^{a-b+b-a}=x^0=1.$

例 2. $a^{-\frac{5}{6}}=\frac{1}{a^{\frac{5}{6}}}=\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}.$

例 3. $\frac{a^2b^3}{4x^5y^2}$去其分母。

解 題式 $=4^{-1}a^2b^3x^{-5}y^{-2}.$

例 4. $\frac{3a^{-2}}{5x^{-1}y^3}$以正指數表之。

解 題式$=\frac{3x}{5a^2y^3}.$

[問 5] 試就下列各式之指數，以正指數表之。

(一) $5a^{-\frac{2}{3}}.$　(二) $2x^{-2}y^2.$　(三) $a\div a^{-2}.$

(四) $\frac{1}{7x^{-\frac{1}{2}}}$　(五) $\frac{3a^{-3}x^2}{8b^{-4}y^{-2}}.$　(六) $\frac{2}{\sqrt{y^{-3}}}$

(七) $\frac{1}{4\sqrt[5]{x^{-3}}}.$　(八) $\frac{a^0}{b^{-n}}.$　(九) $\frac{m^{-n}}{x^0}.$

(十) $\frac{x^{-2}}{y^{n-3}}.$　(十一) $\frac{a^{-p}}{b^{-q}}.$　(十二) $\frac{2^3a^{-2}c^2}{2^4x^{-3}y^2}.$

[問 6] 求下列各式之數值。

(一) $4^{-\frac{5}{2}}.$　(二) $8^{-\frac{2}{3}}.$　(三) $\frac{1}{25^{-2}}.$

(四) $(0.0001)^{-\frac{1}{4}}.$　(五) $(0.0625)^{-\frac{3}{4}}.$　(六) $\left(15\frac{5}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$

[問 7] 下式去其負指數及分數指數。

$$x^{-\frac{2}{3}}y^3-2^{-1}x^{\frac{1}{2}}y^{-3}$$

37. 以分數及負數爲指數之單項式之計算

前諸節所定分數指數零指數及負指數之意義，其結果則第 33 節諸公式 m, n 爲零或分數或負數，皆得適用，故凡含此等指數之式，其於乘法，除法，羃法，開法等之計算，仍與正整數相同。

例 1. $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}$ 以 $4a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{2}}$ 乘之.

解 $3a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}\times 4a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{5}{2}}=12a^{\frac{2}{3}+(-\frac{1}{6})}b^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}}$

$$=12a^{\frac{1}{2}}b^{3}.$$

例 2. 求 $\frac{2}{7}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{5}}$ 之立方.

解 $\left(\frac{2}{7}a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{5}}\right)^{3}=\left(\frac{2}{7}\right)^{3}a^{\frac{2}{3}\times 3}b^{-\frac{1}{5}\times 3}$

$$=\frac{8}{343}a^{2}b^{-\frac{3}{5}}.$$

例 3. $\dfrac{\sqrt[6]{x^{5}}\times\sqrt[4]{y^{3}}}{\sqrt[3]{x^{2}}\times\sqrt{y^{-1}}}$ 試簡之。

解 原式 $=\dfrac{x^{\frac{5}{6}}\times y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\times y^{-\frac{1}{2}}}=x^{\frac{5}{6}-\frac{2}{3}}\times y^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}=x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{4}}.$

例 4. 求 $a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{4}{3}}$ 之平方根。

解 $\sqrt{(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}c^{-\frac{4}{3}})}=a^{\frac{1}{2}\div 2}b^{\frac{2}{3}\div 2}c^{-\frac{4}{3}\div 2}$

$$=a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{3}}c^{-\frac{2}{3}}.$$

例 5. $\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}\sqrt{y^{-1}}}{y\sqrt[3]{x^{-2}}}\div\sqrt{\dfrac{x\sqrt{y^{-1}}}{y\sqrt{x^{-2}}}}\right)^4$ 試簡之。

解 題式 $=\left(\dfrac{x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}}{yx^{-\frac{2}{3}}}\div\sqrt{\dfrac{xy^{-2}}{yx^{-2}}}\right)^4=(x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{3}{2}}\div\sqrt{x^2y^{-3}})^4$

$$=(x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{3}{2}}\div xy^{-\frac{3}{2}})^4=(x^{\frac{1}{3}})^4=x^{\frac{4}{3}}$$

[問 8] 試就下式計算，其結果以正指數表之。

(一) $2x^{\frac{1}{2}}\times3x^{-1}$. (二) $1\div2a^{-\frac{1}{2}}$. (三) $\sqrt[4]{x^3}\div\sqrt{x^{-1}}$.

(四) $a^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}\div a^{-3}$. (五) $\sqrt[3]{a^{-1}}\div\sqrt[3]{a}$. (六) $\sqrt[5]{a^{-3}}\div\sqrt[5]{a^{7}}$.

[問 9] 試就下式計算，其結果以根號及正指數表之。

(一) $a^{-\frac{1}{3}}\times3a^{-\frac{1}{2}}$. (二) $5a^{-\frac{1}{3}}\times3a^{-1}$ (三) $\sqrt[3]{a^2}\times\sqrt{a^{-3}}$.

(四) $\sqrt[5]{a^{-x}}\times\sqrt[5]{a^{-2x}}$. (五) $\sqrt[4]{a^n}\times\sqrt[3]{a^n}\div\sqrt[12]{a^{5n}}$.

[問 10] 試就下式簡之，其結果以正指數表之。

(一) $\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{4b^2}\right)^{-2}$ (二) $\sqrt{a^{-2}b}\times\sqrt[3]{ab^{-3}}$. (三) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{-1}\sqrt{y^3}}}{\sqrt{y\sqrt[3]{x}}}$.

(四) $\sqrt[3]{(a+b)^5}\times(a+b)^{\frac{2}{3}}$. (五) $(a+b)^{\frac{2}{3}}\div(a-b)^{\frac{1}{2}}\times\sqrt{a^2-b^2}$.

(六) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{-\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}\times\left(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{3}{4}}\div(ab^{-7})^{\frac{1}{12}}$.

(七) $\dfrac{\sqrt[3]{x^{-\frac{3}{4}}(x^{-2})^3}}{x^{(\frac{1}{2})^2}(x^{-3})^{\frac{3}{8}}}$. (八) $\left(\dfrac{a^{-3}}{b^{-\frac{2}{3}}c}\right)^{-\frac{3}{2}}\div\left(\dfrac{\sqrt{a^{-\frac{1}{2}}\sqrt[6]{b^3}}}{a^2c^{-1}}\right)^2$.

38. 多項式之計算.

含分數及負數之指數者之多項式，與含正整數指數之多項式，其計算固相同也。

含此等之指數及根號者之多項式。

如 $$\frac{3x^2}{y}+\frac{2\sqrt{x^3}}{y^{-\frac{1}{2}}}+x-\frac{1}{2}y+x^3-6\sqrt{(x^5y^{-1})}$$

依 x 之降羃整頓之，其根號則以分數指數表之，分母之文字，移於分子，其不含 x 之項作爲 x^0 而 x 指數之大小，順次排列之.

如 $$x^3-6x^{\frac{5}{2}}y^{-\frac{1}{2}}+3x^2y^{-1}+2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x-\frac{1}{2}y$$

(參照第 20 節)

多項式之乘法，除法，羃法，開法等，須先依某文字之乘羃整頓之，然後運算。

例 1. $3a^{-\frac{1}{3}}+a+2a^{\frac{2}{3}}$ 以 $a^{\frac{1}{3}}-2$ 乘之.

運算
$$\begin{array}{l}
a+2a^{\frac{2}{3}}+3a^{-\frac{1}{3}}\\
\underline{a^{\frac{1}{3}}-2\qquad\qquad}\\
a^{\frac{4}{3}}+2a+3\\
\underline{\qquad -2a-4a^{\frac{2}{3}}-6a^{-\frac{1}{3}}}
\end{array}$$

答 $a^{\frac{4}{3}}-4a^{\frac{2}{3}}+3-6a^{-\frac{1}{3}}$.

例 2. 求 $x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}}$ 之立方。

解 $(x^{\frac{2}{3}}+y^{-\frac{2}{3}})^3=(x^{\frac{2}{3}})^3+3(x^{\frac{2}{3}})^2(y^{-\frac{2}{3}})+3(x^{\frac{2}{3}})(y^{-\frac{2}{3}})^2+(y^{-\frac{2}{3}})^3$

$$=x+3x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+3x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{3}}+y^{-2}.$$

例 3. $a+b$ 以 $a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}$ 除之.

運算

$$\begin{array}{r|l}
a \qquad\qquad\qquad +b & a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}} \\
\underline{a-a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}\qquad} & \overline{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} \quad \text{答} \\
+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b & \\
\underline{+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}+b} & \\
0 \qquad\quad &
\end{array}$$

或 $(a+b)\div(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})$

$$=\{(a^{\frac{1}{3}})^3+(b^{\frac{1}{3}})^3\}\div\{(a^{\frac{1}{3}})^2-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+(b^{\frac{1}{3}})^2\}=a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}.$$

注意　此種計算亦可依公式行之。

例 4. 求 $9x^{-4}-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2$ 之平方根。

運算

$$\begin{array}{r|l}
9x^{-4}-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2 & \underline{3x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y} \\
\underline{9x^{-4}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} & \\
-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+15x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2 & (6x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}) \\
\underline{-18x^{-3}y^{\frac{1}{2}}+\ 9x^{-2}y\qquad\qquad\qquad} & \qquad\qquad (-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}). \\
6x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2 & \\
\underline{6x^{-2}y-6x^{-1}y^{\frac{3}{2}}+y^2} & (6x^{-2}-6x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y)(y) \\
0 &
\end{array}$$

答 $3x^{-2}-3x^{-1}y^{\frac{1}{2}}+y$.

〔問 11〕 試就下列各式計算之。

(一) $(x^{\frac{1}{2}}-5)(x^{\frac{1}{2}}+5)$. (二) $(2x^{\frac{1}{3}}+4+3x^{-\frac{1}{3}})(2x^{\frac{1}{3}}+4-3x^{-\frac{1}{3}})$.

(三)　$(n^{\frac{2}{3}}+n^{\frac{1}{3}}+1)(n^{\frac{1}{3}}-1)$.　(四)　$(a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}})(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}})$.

(五)　$\left(2\sqrt[3]{a^5}-a^{\frac{1}{3}}-\frac{3}{a}\right)\left(2a-3\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-a^{-\frac{5}{3}}\right)$.

[問 12]　試就下列各式計算之。

(一)　$(x^{\frac{5}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}})^2$.　(二)　$\{(e^x+e^{-x})^2-4\}^{\frac{1}{2}}$.

(三)　$(e^{-x}-e^x)(e^{-x}+e^x)+(e^x+e^{-x})^2$.

(四)　$(x^{1\frac{1}{2}}+y^{2\frac{1}{4}})^4$.

[問 13]　試就下列各式計算。

(一)　$(a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{3}})\div(a^{\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{6}})$.　(二)　$(a^{-1}-1)\div(a^{-\frac{1}{3}}-1)$.

(三)　$(x+y+2\sqrt{xy}-z)\div(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}+z^{\frac{1}{2}})$.

(四)　$(a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{2}{3}}+2b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}})$.

(五)　$(a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{2}})\div(a^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}})$.

(六)　$\left(4\sqrt[3]{x^2}-8x^{\frac{1}{3}}-5+\frac{10}{\sqrt[3]{x}}+3x^{-\frac{2}{3}}\right)\div\left(2x^{\frac{5}{2}}-\sqrt[12]{x}-\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right)$.

[問 14]　求下列各式之平方根。

(一)　$x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{2}{3}}+2x+x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}$.

(二)　$4\sqrt{x^3}-12\sqrt[4]{x^3y}+25\sqrt{y}-24\sqrt[4]{\frac{y^3}{x^3}}+16x^{-\frac{3}{2}}y$.

[問 15]　求下列各式之立方根。

(一)　$x^3-9x+27x^{-1}-27x^{-3}$.

(二)　$a^{\frac{3}{2}}+3ax^{\frac{1}{3}}+3a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{2}{3}}+x$.

練 習 問 題 III.

1. 下列各式試簡之。

(一) $\sqrt{a^{-\frac{5}{3}}b^3c^{\frac{2}{3}}}\div\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b^4c^{-1}}$. (二) $\left(\dfrac{a^{-2}b}{a^3b^{-4}}\right)^{-3}\div\left(\dfrac{ab^{-1}}{a^{-3}b^2}\right)^5$.

(三) $(3a^6b^{12}c^{18})^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[5]{a^{-\frac{5}{8}}b^{-5}c^{-\frac{25}{8}}}\right)^3\div(9a^6b^{15}c^{24})^{\frac{1}{3}}$.

(四) $(x^{q-r})^p\times(x^{r-p})^q\div(x^{p-q})$.

(五) $\left(x^{\frac{a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{c-a}}\times\left(x^{\frac{b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{b-c}}$

(六) $\left(x^{\frac{b+c}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}}\times\left(x^{\frac{c+a}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}}\times\left(x^{\frac{a+b}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}}$.

(七) $\left\{\left(x^{\frac{p-q}{r}}\right)^{\frac{q-r}{p}}\right\}^{\frac{r-p}{q}}\times x^{\frac{p-q}{r}}\times x^{\frac{q-r}{p}}\times x^{\frac{r-p}{q}}$.

(八) $\left\{\dfrac{a^{p-q}}{\sqrt[q]{a^{q^2-pq}}}\times a^{2(p-q)}\right)^n$.

(九) $\left(a^{\frac{n}{m}-1}\right)^{-\frac{m}{n-m}}\times\sqrt[m]{\dfrac{a^{\frac{m-n}{2}}}{(a^{-m}a^{-n})^{\frac{1}{2}}}}$.

(十) $\left(x^{\frac{a}{b}}y^{-1}\right)^b\div\left(\dfrac{x^{a^2-b^2}}{y^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$.

(十一) $\dfrac{\left\{(a^m)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{1}{a}\right)^{-\frac{q}{n}}\right\}^{nr}}{\left\{\sqrt[q]{b^n}\left(\sqrt[m]{b}\right)^r\right\}^{mq}}\div\left\{\left(\dfrac{a}{b}\right)^q\right\}^r$.

(十二) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{p+q}{p-q}}\left\{\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right\}^{\frac{2p}{p-q}}\right)$

2. 下式試證明之.

$$\sqrt[y+3]{\left(\frac{\sqrt[y-1]{x^2}}{\sqrt[y+1]{x}}\right)^{y^2-1}}=x.$$

3. 下式試證明之。

$$\frac{\sqrt[n]{\sqrt[n+1]{x}}}{\sqrt[n+1]{\sqrt[n+2]{x}}}=\sqrt[n]{x}\div\sqrt[n+1]{x^2}\times\sqrt[n+3]{x}.$$

4. 試就下列各式計算之。

(一) $\dfrac{4^{\frac{3}{2}}\times 9^{-2}}{81^{-\frac{3}{2}}\times 16^{\frac{7}{4}}}$.　　(二) $\sqrt[5]{2^3\times(2^4)^3\div 2^5}$.

(三) $\dfrac{5^3\times 2^{\frac{3}{4}}\times 10^{-\frac{1}{4}}}{15^{\frac{3}{4}}\times 6^{-\frac{3}{4}}\times 4^{\frac{5}{8}}}$　(四) $\dfrac{2^{n+1}}{(2^n)^{n-1}}\div\dfrac{4^{n+1}}{(2^{n-1})^{n+1}}$.

(五) $\left\{\dfrac{(9^{n+\frac{1}{4}})\times\sqrt{3\times 3^n}}{3\sqrt{3^{-n}}}\right\}^{\frac{1}{n}}$.

5. 求下列各式之積。

(一) $(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}+1)(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}+1)(x-x^{\frac{1}{2}}+1)$.

(二) $(x-x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}+x^{-1})$.

(三) $(x^{-\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\div\sqrt[6]{x}+y^{\frac{2}{3}})(x^{-\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{y})$.

(四) $(x^{\frac{2}{n}}-2x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{1}{n}}+y^{\frac{2}{n}})(x^{\frac{1}{n}}+x^{\frac{1}{2n}}y^{\frac{1}{2n}}+y^{\frac{1}{n}})(x^{\frac{1}{n}}-y^{\frac{1}{n}})$.

(五) $\left\{\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}}+\sqrt{\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b}}\right\}\left\{\sqrt[3]{a^{-\frac{1}{2}}}-\sqrt{\sqrt[3]{a^{\frac{1}{2}}b}}\right\}$

6. 求下列各式之商。

(一) $(x^{\frac{3}{2}}-xy^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{2}}y-y^{\frac{3}{2}})\div(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$.

(二) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}}\right)$

$\div\left\{(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2-(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2\right\}.$

(三) $(1-\sqrt{x}-\frac{2}{x^{-1}}+2x^2)\div(1-x^{\frac{1}{2}}).$

(四) $(a+b+c-3a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}})\div(a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}+c^{\frac{1}{3}}).$

(五) $\left(\frac{x^{\frac{7}{3}}}{y^{\frac{14}{5}}}+\frac{y^{\frac{11}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}}\right)\div\left(\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{5}}}+\frac{y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$

7. 求下列各式之平方根。

(一) $a+b+\frac{4}{a+b}-4.$

(二) $x^{\frac{5}{3}}-4x^{\frac{4}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+4x-4x^{\frac{5}{6}}+x^{\frac{2}{3}}.$

(三) $x^{\frac{8}{5}}-2a^{-\frac{3}{5}}x^{\frac{11}{5}}+2a^{\frac{4}{5}}x^{\frac{4}{5}}+a^{-\frac{6}{5}}x^{\frac{14}{5}}-2a^{\frac{1}{5}}x^{\frac{7}{5}}+a^{\frac{8}{5}}.$

8. 求 $x^3+3x^2+6x+7+6a^{-1}+3x^{-2}+x^{-3}$ 之立方根。

9. 下列各式試簡之。

(一) $\frac{a^{\frac{2}{3}}+ab}{ab-b^3}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-b}.$

(二) $\frac{a^2+b^2+ab}{(a^3-b^3)(x^{\frac{1}{2}}-a^{\frac{1}{2}})}-\frac{x^{\frac{1}{2}}}{(a-b)(x-a)}.$

(三) $\sqrt{x-2+x^{-1}}\times\frac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-1}.$

(四) $\frac{x-7x^{\frac{1}{2}}}{x-5\sqrt{x}-14}\div\left(1+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{-1}.$

(五) $\dfrac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}$. (六) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-4\sqrt[3]{x^{-2}}}{\sqrt[3]{x^2}+4+4x^{-\frac{2}{3}}}$.

(七) $\dfrac{21x+x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1}{3x^{\frac{1}{3}}+1}$. (八) $\dfrac{ax^{-1}+a^{-1}x+2}{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}-1}$.

(九) $\dfrac{a^{-2}-2a^{-1}c^{-1}+c^{-2}}{a^{-3}-c^{-3}}$. (十) $\dfrac{a^2-a^2b^{-2}-1+b^{-2}}{a+ab^{-1}+1+b^{-1}}$.

(二) $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}+\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}$.

(三) $\dfrac{1}{1-x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{1}{1+x^{\frac{1}{4}}}+\dfrac{2}{1+x^{\frac{1}{2}}}+\dfrac{4}{1+x}$.

10. 下列各式試證之。

(一) $\dfrac{(xy^2)^{\frac{1}{3}}-(x^2y)^{\frac{1}{3}}+x}{x+y}=\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}}$.

(二) $\dfrac{x}{x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}+1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=x^{\frac{2}{3}}+2$.

(三) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}}-ax^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x-x^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{5}{2}}-a^2x^{\frac{1}{2}}+3a^{\frac{3}{2}}x-3ax^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^2-x^{\frac{5}{2}}}=\dfrac{x+a}{x^2+3ax+a^2}$.

(四) $$\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}+\frac{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\frac{2a}{\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{b^4}}.$$

(五) $(2x+y^{-1})(2y+x^{-1})=(2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}})^2$.

11. $\left\{\dfrac{x^{-1}(1+\sqrt{1-x^3})^{\frac{1}{3}}}{\dfrac{x^{\frac{3}{2}}(1+\sqrt{1-x^3})^{-\frac{2}{3}}}{\sqrt{1-x^3}}+x^{-\frac{3}{2}}(1+\sqrt{1-x^3})^{\frac{1}{3}}}\right\}^2$ 試簡之。

12. $\dfrac{1}{(4x^3-3x)^2}-\left\{\dfrac{\dfrac{3}{x}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-\dfrac{1}{x^3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{1-\dfrac{3}{x^2}(1-x^2)}\right\}^2$ 試簡之。

13. 若 $x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}+z^{\frac{1}{3}}=0$ 則 $(x+y+z)^3=27xyz$ 試證之。

14. 若 $a^b=b^a$ 則 $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}$ 試證之。

15. 若 $b^2=ac$ 則 $\dfrac{a^2-b^2+c^2}{a^{-2}-b^{-2}+c^{-2}}=b^4$ 試證之。

16. 下列各方程式試解之。

(一) $x^{\frac{3}{2}}-2x^{\frac{3}{4}}+1=0.$　(二) $x^{\frac{2}{5}}-x^{\frac{1}{5}}-6=0.$

(三) $2x^{\frac{1}{2}}-2x^{-\frac{1}{2}}=5.$　(四) $4^x+8=9\times 2^x.$

第　四　章

無　理　數

39. 定義. 某數之若干乘根，不能完全求得者其根謂之無理數，亦稱不盡根數。

例如 $\sqrt{5}, \sqrt[3]{9}$ 爲無理數。

對於無理數，特稱整數及分數爲有理數。

整數或分數之 n 乘羃，爲整數或分數，然逆之則整數或分數之 n 乘根，未必爲整數或分數。

例如 $2^2=4$ 與 $3^2=9$ 之間，有四個整數，其中任取一數如 5 之平方根，則既不能得整數，又不能成分數，試證明之。

$$2^2 < 5 < 3^2,$$

$$\therefore \quad 2 < \sqrt{5} < 3.$$

即 $\sqrt{5}$ 在 2 與 3 之間，其非整數明矣，又 $\sqrt{5}$ 假若等於既約分數 $\frac{m}{n}$

則 $$\sqrt{5} = \frac{m}{n},$$

兩邊各自乘， $$5 = \frac{m^2}{n^2}$$

然既約分數之平方仍爲既約分數，故如上式爲不合理，故 $\sqrt{5}$ 不能爲分數，即 $\sqrt{5}$ 不能以整數或分數表之，故推廣數之範圍，而

以 $\sqrt{5}$ 爲平方爲 5 之數，卽 $(\sqrt{5})^2=5$ 一種之數，於是稱之爲無理數，而與整數分數視同一類。

依同理，$\sqrt[3]{9}$ 爲無理數，爲三乘冪爲 9 之數。

又凡 a 之 n 乘根若爲無理數，亦得式如次，

$$(\sqrt[n]{a})^n=a. \qquad \text{(參照第 11 節)}$$

分數亦然，證明如次。

旣約分數 $\frac{a}{b}$ 其 a, b 非同時爲某整數之 n 乘冪者，則 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ 爲無理數。

例如 $\frac{4}{15}$ 其 15 非平方數，故 $\sqrt{\frac{4}{15}}$ 無永理數。

注意 此爲分子非不盡根數之無理數也，凡非有理數之數，皆稱無理數，例如圓周率卽 3.14159265…… 本書取狹義謂之無理數，若取廣義則此無理數特稱之爲不盡數，於是有理數稱爲盡數。

40. 無理數，其值不能完全求得，然依開方法，則固可求其任何接近之小數。

例如依開平方法，(第 24 節例)

$$2<\sqrt{5}<3,$$

$$2.2<\sqrt{5}<2.3,$$

$$2.23<\sqrt{5}<2.24,$$

$$2.236<\sqrt{5}<2.237,$$

$$2.2360<\sqrt{5}<2,2361,$$

$$2.23606<\sqrt{5}<2,23607$$

………………………………………

因 $\sqrt{5}$ 之近似數 2.2 606 與 2.23607 之差爲 0.00001 故各近似數與 $\sqrt{5}$ 之差皆比 0.00001 小，故 $\sqrt{5}$ 之值，任取前者，或取後者，其誤差皆比 0.00001 小。

然依開平方法連續計算，所得小數，雖與 $\sqrt{5}$ 之眞值，愈益接近，而 $\sqrt{5}$ 之眞值，究不能以有限之數字表之，此所以名爲不盡根數也。

代數之計算，不必一一求無理數之近似數，惟視 $\sqrt{5}$ 之數爲平方爲 5 之數處理之而已，若必明言其數，則於最後以求其近似數可也。

注意. 前式 $\sqrt{5}$ 左邊之數，皆爲不足之近似數，右邊皆爲有餘之近似數，與第 22 節例 4 之說明參照。

41. 定義. 附有根號之代數式，稱之爲**無理式**，或稱**不盡根式**。

因欲與無理式有區別，故特稱整式及分數式爲**有理式**。

無理數無理式，通稱之爲無理數或不盡根數。

例如 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$ 爲無理式。

有形似無理式者，其實非無理式也。

例如 $\sqrt[3]{a^6}$, 及 $\sqrt{x^2-2xy+y^2}$ 皆爲有理式。

42. 不盡根數計算之公式.

本章所用之文字爲正整數。

I. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.　[參照第 34 節系 2]

證　左邊取 np 乘羃 $(\sqrt[n]{a^m})^{np}=\{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p$　〔第 4 節〕

$=(a^m)^p$　〔第 11 節〕

$=a^{mp}$.　〔第 4 節〕

右邊取 np 乘根　$(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp}$.　〔第 11 節〕

$\therefore$　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$.　〔第 13 節〕

<u>不盡根數，其根指數與根號內之數之羃指數，若同以某整數乘之，或同以其公約數除之，其值不變。</u>

例　$\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$.

II. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.　〔第 14 節〕

例　$\sqrt{12ab^3}=\sqrt{4b^2\times 3ab}=\sqrt{4b^2}\sqrt{3ab}=2b\sqrt{3ab}$.

II. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$　〔第 15 節〕

例　$\sqrt[3]{\dfrac{3x}{8y^3z^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{\sqrt[3]{8y^3z^6}}=\dfrac{\sqrt[3]{3x}}{2yz^2}$.

IV. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.

證 左邊取 n 乘羃 $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m$ 〔第 8 節〕

$= a^m$. 〔第 11 節〕

右邊取 n 乘根 $(\sqrt[n]{a^m})^n = a^m$.

$\therefore$ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$. 〔第 13 節〕

V. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

此因兩邊若同取 mn 乘羃，則皆為 a.

例 $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$.

系. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

43. 定義. 不盡根數最簡單之形云者，係指根號內之數或式化為最簡單之整數或整式者而言也。

由前節之公式，化不盡根數為最簡形，其法則如次。

〔法則 I〕 根號內之數之羃指數與根指數有公約者，以公約數除雙方之指數。 〔前節公式 I〕

例 1. $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7}$.

例 2. $\sqrt[12]{27x^3y^6} = \sqrt[12]{(3xy^2)^3} = \sqrt[4]{3xy^2}$.

II. 根號內之某因數之羃指數為根指數之倍數者，先以根指數除之，然後出其因數於根號之外.

〔前節公式 II〕

例 1. $\sqrt{80}=\sqrt{4^2\times 5}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{5}=4\sqrt{5}.$

例 2. $\sqrt[4]{16a^7b^9}=\sqrt[4]{2^4a^4b^8a^3b}=\sqrt[4]{2^4a^4b^8}\sqrt[4]{a^3b}$

$$=2ab^2\sqrt[4]{a^3b}.$$

由有理數與不盡數之積所成之式，後者稱為無理因數，前者為其係數，如前例 (1) $\sqrt{5}$ 為無理因數，4 為其因數。

III. 根號內之數為分數者，以便宜之數乘分母子，而令根號僅屬於分子。

即 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{bb^{n-1}}}=\sqrt[n]{\frac{ab^{n-1}}{b^n}}=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{\sqrt[n]{b^n}}$

$$=\frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}.$$

例 1. $\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{\frac{4\times 5}{5\times 5}}=\frac{\sqrt{4\times 5}}{\sqrt{5^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2}{5}\sqrt{5}.$

例 2. $\sqrt[3]{\frac{7}{9}}=\sqrt[3]{\frac{7\times 3}{3^2\times 3}}=\frac{\sqrt[3]{7\times 3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{\sqrt[3]{21}}{3}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{21}.$

例 3. $\sqrt[3]{\frac{xy}{2z^2}}=\sqrt[3]{\frac{4xyz}{8z^3}}=\frac{1}{2z}\sqrt[3]{4xyz}.$

[問 1] 下列諸式. 試化爲最簡形。 〔參照法則 I〕

(一) $\sqrt[4]{36}.$ (二) $\sqrt[8]{16}.$ (三) $\sqrt[3]{27^2}.$

(四) $\sqrt[6]{1000}.$ (五) $\sqrt[12]{8x^6y^9z^{15}}.$ (六) $\sqrt[2n]{25a^2b^4c^6}.$

[問 2] 下列諸式，試化爲最簡形。 〔參照法則 II〕

(一) $\sqrt{18}.$ (二) $\sqrt{588}.$ (三) $\sqrt[3]{432}.$

(四) $\sqrt{125\times135}.$ (五) $\sqrt[3]{40\times45\times48}.$ (六) $\sqrt[4]{3125}.$

(七) $\sqrt{27a^3b^5}.$ (八) $\sqrt[6]{128a^2b^4c^8}.$ (九) $\sqrt[3n]{a^nb^{2n}c^{3n}}.$

(十) $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}.$ (十一) $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}.$ (十二) $\sqrt{pq^2-6pq+9p}.$

[問 3] 下列諸式，試化爲最簡形。 〔參照法則 III〕

(一) $\sqrt{\frac{3}{2}}.$ (二) $\sqrt[8]{\frac{3}{2}}.$ (三) $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$

(四) $\sqrt[5]{\frac{3}{16}}.$ (五) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}.$ (六) $\sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{32ab^3}}$

(七) $\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{9(x+1)^2}}.$ (八) $\sqrt[3]{1-\frac{a^3}{b^3}}.$ (九) $\sqrt[8]{\left(\frac{c^{n+3}}{a^{3n}b^{3n+2}}\right)}.$

44. 不盡根數之係數，入於根號之內。

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}$$

$$=\sqrt[n]{a^nb}. \qquad \text{[第 42 節 II]}$$

〔法則〕 不盡根數之係數，欲使之入於根號之內者，先以無理因數之根指數乘係數之指數，然後入於根號之內。

例 1. $5\sqrt{3}=\sqrt{5^2\times 3}=\sqrt{75}.$

例 2. $\frac{2}{x^2}\sqrt[3]{\frac{4}{9}x}=\sqrt[3]{\frac{8}{x^6}\times\frac{4}{9}x}=\sqrt[3]{\frac{32}{9x^5}}.$

[問 4] 試將下式之係數，入於根號之內。

(一) $14\sqrt{5}.$　(二) $5\sqrt[3]{6}.$　(三) $3a\sqrt{3a}.$

(四) $\frac{4}{11}\sqrt{\frac{77}{8}}.$　(五) $3ax\sqrt[4]{\frac{1}{27a^3x^3}}.$　(六) $\frac{y}{x^n}\sqrt{\frac{x^{2n+1}}{y^3}}.$

(七) $\frac{a}{b}\sqrt[p]{\frac{b^{p+1}}{a^{p-1}}}$　(八) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$　(九) $\frac{1}{x-3}\sqrt{x^2+x-12}$

(十) $\frac{ax}{a-x}\sqrt{\frac{a^2-x^2}{a^2x^2}}.$

45. 定義. 不盡根數最簡單之諸形，惟其係數爲異者，謂之**同類根數**。

例如 $7\sqrt{3}$ 與 $5\sqrt{3}$ 爲同類根數。

例　$\sqrt{9a^3b}$ 與 $\sqrt{64a^5b^3}$ 爲同類根數，試證之。

解　化二式爲最簡形。

$$\sqrt{9a^3b}=3a\sqrt{ab},\qquad \sqrt{64a^5b^3}=8a^2b\sqrt{ab}.$$

故二式爲同類根數。

[問 5] 試化下列諸不盡根數爲同類根數。

(一) $\sqrt{18},\ \sqrt{50},\ \sqrt{\frac{1}{8}}.$　(二) $\sqrt[3]{24},\ \sqrt[3]{192},\ \sqrt[3]{\frac{8}{9}}.$

(三) $\sqrt{(x^3-y^3)(x-y)},\quad \sqrt{(x^4y^2+x^3y^3+x^2y^4)}.$

無理單項式之計算

46. 加法及減法.

〔法則〕 求二以上不盡根數之代數和者，先化各數爲最簡單之形，依同類根數作其係數之代數和，而以公共之無理因數附之。

例 1. $3\sqrt{45}-\sqrt{20}+7\sqrt{5}=9\sqrt{5}-2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$

$=14\sqrt{5}$.

例 2. $\sqrt{16a^2b}-8\sqrt{ab^2}+3a\sqrt{b}-7b\sqrt{a}$

$=4a\sqrt{b}+3a\sqrt{b}-8b\sqrt{a}-7b\sqrt{a}$

$=7a\sqrt{b}-15b\sqrt{a}$.

例 3. $2\sqrt{3}+\sqrt{1\frac{1}{3}}-\sqrt{5\frac{1}{3}}=2\sqrt{3}+\sqrt{\frac{4}{3}}-\sqrt{\frac{16}{3}}$

$=2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}=(2+\frac{2}{3}-\frac{4}{3})\sqrt{3}$

$=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

注意 非同類之不盡根數，其和不能得單一之不盡根數。

〔問 6〕 下列各式，試簡之。

(一) $\sqrt{24}+\sqrt{150}+\sqrt{54}$. (二) $\sqrt{44}-5\sqrt{176}+2\sqrt{99}$.

(三) $\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{48}+\sqrt{147}$.

（四）　$3\sqrt[4]{162}-72\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{1250}.$

（五）　$7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}-7\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128}.$

[問 7]　下式試簡之。

（一）　$\sqrt{125}+\sqrt{175}-\sqrt{28}+\sqrt{\frac{1}{20}}$

（二）　$\sqrt{252}+\sqrt{294}-48\sqrt{\frac{1}{6}}$　（三）　$\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{\frac{1}{3}}.$

（四）　$\sqrt[3]{500}-\sqrt[3]{108}+\sqrt[9]{\frac{1}{2}}.$　（五）　$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{16}}.$

[問 8]　下式試簡之。

（一）　$\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}.$

（二）　$\sqrt[3]{16a+24}+\sqrt[3]{54a+81}.$

（三）　$\sqrt{a^3-a^2c}-\sqrt{ac^2-c^3}-\sqrt{(a+c)(a^2-c^2)}.$

（四）　$\sqrt{\frac{a}{bc}}+\sqrt{\frac{b}{ca}}+\sqrt{\frac{c}{ab}}.$

（五）　$\sqrt{(ax^3+6ax^2+9ax)}-\sqrt{(ax^3-4a^2x^2+4a^3x)}.$

（六）　$\sqrt{(2ax^2-4ax+2a)}-\sqrt{(2ax^2+4ax+2a)}.$

47. 次數. 不盡根數之次數，依根指數定之。

例如　$\sqrt{a}$ 爲二次，$\sqrt[3]{xy^2}$ 爲三次之不盡根數。

根指數相同之不盡根數，稱爲**同次根數**。

化若干不盡根數爲同次根數，卽據公式化之如次：

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}.$$

例 1. 化 $\sqrt[6]{a^5}$ 與 $\sqrt[8]{b^3}$ 爲同次根數。

解 以根指數 6 與 8 之最小公倍數 24 爲公共之根指數。

$$\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[6\times4]{a^{5\times4}}=\sqrt[24]{a^{20}}.$$

$$\sqrt[8]{b^3}=\sqrt[8\times3]{b^{3\times3}}=\sqrt[24]{b^9}.$$

例 2. $2\sqrt{3}$ 與 $\sqrt[3]{41}$ 孰大。

解 以二數化爲同次不盡根數。

$$2\sqrt{3}=\sqrt{12}=\sqrt[6]{12^3}=\sqrt[6]{1728},$$

$$\sqrt[3]{41}=\sqrt[6]{41^2}=\sqrt[6]{1681}.$$

故 $$\sqrt[6]{1728}<\sqrt[6]{1681}.$$

$\therefore$ $$2\sqrt{3}>\sqrt[3]{41}.$$

比較不盡根數之大小，先化爲同次根數，然後就其根號內之數大小比較之。

[問 9] 化下列各題爲最低次之同次根數。

(一) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$ (二) $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{6}$. (三) 3, $\sqrt[4]{6}$.

(四) $\sqrt[4]{7}$, $\sqrt[5]{5}$, $\sqrt[10]{120}$. (五) $\sqrt[6]{3}$, $\sqrt[10]{3}$, $\sqrt[15]{3}$.

(六) $\sqrt[m]{a^n}$, $\sqrt[n]{a^m}$. (七) $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[4]{2a^3b^2}$, $\sqrt[6]{7b^5}$.

[問 10] 試比較下列各題不盡根數之大小。

(一) $3\sqrt{2}$, $2\sqrt[3]{3}$. (二) $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$. (三) $\sqrt[15]{16}$, $\sqrt[10]{6}$, $\sqrt[6]{3}$.

(四) 若 a, b, n 爲正整數，而 $a<b$ 則 $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ 與 $\sqrt[n+1]{\dfrac{a}{b}}$ 之大小比較若何。

. 乘法及除法.

〔法則〕 求二不盡根數之積或商，先化無理因數爲同次根數，然後求係數與係數，無理因數與無理因數之積或商，其結果之積化爲最簡形。

$$a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}=ab\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$$

$$=ab\sqrt[n]{xy}.$$ [第 42 節公式 II]

$$a\sqrt[n]{x}\div b\sqrt[n]{y}=(a\div b)\times(\sqrt[n]{x}\div\sqrt[n]{y})$$

$$=\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$ [第 42 節公式 I]

例 1. $2\sqrt{3}\times3\sqrt{8}=6\sqrt{24}=6\times2\sqrt{6}=12\sqrt{6}.$

例 2. $5\sqrt{x}\times\sqrt[3]{x^2y}=5\sqrt[6]{x^3}\times\sqrt[6]{x^4y^2}$

$$=5\sqrt[6]{x^7y^2}=5x\sqrt[6]{xy^2}.$$

例 3. $7\sqrt{75}\div25\sqrt{56}=35\sqrt{3}\div50\sqrt{14}$

$$=\frac{35}{50}\sqrt{\frac{3}{14}}=\frac{7}{10}\sqrt{\frac{3\times14}{14\times14}}=\frac{1}{20}\sqrt{42}.$$

別法 $7\sqrt{75}\div25\sqrt{56}=\frac{35\sqrt{3}}{50\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{3}\ \sqrt{14}}{10\sqrt{14}.\sqrt{14}}=\frac{7\sqrt{42}}{140}$

$$=\frac{1}{20}\sqrt{42}.$$

例 3 別法，係除法之法則，又得說明如次。

不盡根數之除法，其商先以分數之形表之，然後去分母之根號。

分數之值不變，而分母之根號化去者，此謂對於分母之有理化。

例 4. 1 以 $2\sqrt{3}$ 除之其商至小數第四位止。

解 先求 $\sqrt{3}=1.732\ldots\ldots$ 乃以 $2\sqrt{3}=3.464\ldots\ldots$ 除 1 其計算非常煩雜，故先將其分母爲有理化。

如 $$\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1\times\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2\times3}=\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{1.73205\ldots}{6}$$

$$=0,2883\ldots\ldots$$

例 5. $\dfrac{3\sqrt{11}}{3\sqrt{98}}\div\dfrac{5}{7\sqrt{22}}$ 試簡之。

解 $$題式=\frac{3\sqrt{11}}{14\sqrt{2}}\times\frac{7\sqrt{22}}{5}=\frac{3\times7}{14\times5}\sqrt{\frac{11\times22}{2}}=\frac{3}{10}\sqrt{11^2}$$

$$=\frac{33}{10}.$$

又 $$題式=\frac{3.\sqrt{11}}{14.\sqrt{2}}\times\frac{7.\sqrt{2}.\sqrt{11}}{5}=\frac{3(\sqrt{11})^2}{10}$$

$$=\frac{33}{10}.$$

[問 11] 求下題之乘算。

(一) $\sqrt{5}\times\sqrt{20}$. (二) $3\sqrt{12}\times5\sqrt{24}$.

(三) $\sqrt{6}\times\sqrt{10}\times\sqrt{15}$. (四) $\sqrt[3]{9}\times\sqrt[3]{15}$.

(五) $\sqrt[3]{60}\times\sqrt[3]{90}\times\sqrt[3]{15}$. (六) $\sqrt{\frac{21}{2}}\times\sqrt{\frac{35}{8}}$

(七) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[4]{2}$. (八) $\sqrt{a^3b^5c^7}\times\sqrt[3]{a^2b^4c^8}$.

(九) $\sqrt[2n]{a}\times\sqrt[3n]{a}$.

[問 12] 求下題之除算。

(一) $2\sqrt{3}\div3\sqrt{2}$.

(二) $10\div2\sqrt{5}$.

(三) $\sqrt{55}\div\sqrt{\frac{7}{5}}$.

(四) $21\sqrt{384}\div8\sqrt{98}$.

(五) $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt[6]{a^5b^5}$.

(六) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}\div\left(\sqrt{2}+3\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

(七) $\frac{2}{5}\sqrt{\frac{1}{3}}\div\left(\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$.

(八) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\div\left(3\sqrt[3]{2}-4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$.

(九) $\sqrt[6]{\frac{a}{b}}\div\sqrt[9]{\frac{a}{b}}$.

(十) $\frac{3}{a-b}\sqrt{\frac{2x}{a-b}}\div\sqrt{\frac{18x^3}{(a-b)^5}}$.

[問 13] 下式試簡之。

(一) $\frac{3\sqrt{28}}{5\sqrt{112}}\div\frac{6\sqrt{84}}{\sqrt{392}}$.

(二)　$\left(2\sqrt{8}\times 4\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\right)\div\left(4\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\times\sqrt[6]{4}\right)$.

(三)　$\dfrac{\sqrt[3]{(ab^2)}\sqrt[6]{(ab^5)}}{\sqrt[10]{(a^7b^9)}\sqrt[15]{(a^{12}b^{14})}}$.

[問 14]　求下式之値至小數第四位止。

但　$\sqrt{3}=1.73205$,　　$\sqrt{5}=2.23607$,

$\sqrt{6}=2.44949$,　　$\sqrt{7}=2.64575$.

(一)　$\dfrac{60}{\sqrt{5}}$　(二)　$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.　(三)　$4\div\sqrt{243}$.　(四)　$\dfrac{25}{\sqrt{252}}$.

49.　冪法.　由公式 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$，及 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 得其法則如次。

〔**法則**〕　求不盡根數之 m 乘冪，先以係數及根號內之數各取 m 乘冪，然後化爲最簡形。

例　$(2\sqrt[6]{xy^2z^3})^9=2^9\sqrt[6]{(xy^2z^3)^9}=512\sqrt{(xy^2z^3)^3}$

$=512\sqrt{x^3y^6z^9}=512xy^3z^4\sqrt{xz}.$

[問 15]　下式試簡之。

(一)　$(\sqrt{12})^3$.　　(二)　$(\sqrt[6]{9})^5$.　　(三)　$\{\sqrt[8]{a^2}\}^6$.

(四)　$[2\sqrt[4]{a^2bc^3}]^6$　　(五)　$(\sqrt[7]{a^3b^5})^3\times(\sqrt[7]{a^3b^{12}})^4$.

(六)　$(\sqrt[3]{2})^5\times(\sqrt[5]{3})^2$.

50.　開法.　由公式 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ 及 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ 得其法則如次。

〔法則〕 求不盡根數之 m 乘根，先求係數之 m 乘根，次於無理因數之根指數取 m 倍，然後化爲最簡形。

例 1. 求 $\sqrt[5]{a^2b^6}$ 之四乘根。

解 $$\sqrt[4]{\sqrt[5]{a^2b^6}}=\sqrt[20]{a^2b^6}=\sqrt[10]{ab^3}.$$

例 2. 求 $54a\sqrt{bx^9}$ 之立方根。

解 $$\sqrt[3]{54a\sqrt{bx^9}}=\sqrt[3]{54a}\sqrt[6]{bx^9}=3\sqrt[3]{2a}\sqrt[6]{bx^9}$$
$$=3x\sqrt[6]{4a^2bx^3}.$$

[問 16] 下式試簡之。

(一) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}.$　(二) $\sqrt[6]{\sqrt{8}}.$　(三) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{256}}.$

(四) $\sqrt[6]{\sqrt[5]{a^3b^6c^9}}$　(五) $\sqrt{2\sqrt{2}}.$　(六) $\sqrt{\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}}.$

(七) $\sqrt[2m]{\sqrt[n]{a^m}}$　(八) $\left\{\sqrt[2m]{{}^{2}\sqrt[n]{a}}\right\}^{mnp}.$　(九) $\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}}}.$

無理多項式之計算

51. 乘法.

無理多項式之乘法及羃法， 與有理多項式計算相同。

例 1. $2\sqrt{x}-5\sqrt{y}$ 以 $3\sqrt{x}$ 乘之。

解 $(2\sqrt{x}-5\sqrt{y})\times3\sqrt{x}=2\sqrt{x}\times3\sqrt{x}-5\sqrt{y}\times3\sqrt{x}$

$$=6x-15\sqrt{xy}.$$

例 2. 求 $3\sqrt{6}+2\sqrt{5}$ 與 $3\sqrt{3}-\sqrt{10}$ 之積。

解 $(3\sqrt{6}+2\sqrt{5})(2\sqrt{3}-\sqrt{10})$

$$=(3\sqrt{6})(2\sqrt{3})+(2\sqrt{5})(2\sqrt{3})$$

$$-(3\sqrt{6})(\sqrt{10})-(2\sqrt{5})(\sqrt{10})$$

$$=6\sqrt{18}+4\sqrt{15}-3\sqrt{60}-2\sqrt{50}$$

$$=18\sqrt{2}+4\sqrt{15}-6\sqrt{15}-10\sqrt{2}$$

$$=8\sqrt{2}-2\sqrt{15}$$

例 3. 求 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{4}$ 之平方。

解 $(\sqrt{2}+\sqrt[3]{4})^2=(\sqrt{2})^2+(\sqrt[3]{4})^2+2\sqrt{2}\sqrt[3]{4}$

$$=2+\sqrt[3]{16}+2\sqrt[6]{8\times16}$$

$$=2+2\sqrt[3]{2}+4\sqrt[6]{2}.$$

此題適用 $(a\pm b)^2=a^2+b^2\pm2ab$ 之公式。

例 4. 定 $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 與 $\sqrt{6}+2$ 之大小。

解 二式皆爲正數，故就其平方之大小比較之。

$$(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2=10+2\sqrt{21},$$

$$(\sqrt{6}+2)^2=10+4\sqrt{6}.$$

此二式右邊之大小，視 $\sqrt{21}$，$2\sqrt{6}$ 之大小可知。然 $(2\sqrt{6})^2=24$ 比 $(\sqrt{21})^2=21$ 大。

故　$2\sqrt{6}>\sqrt{21}.$

因之 $10+4\sqrt{6}>10+2\sqrt{21}$ 則 $(\sqrt{6}+2)^2>(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2$，

$\therefore\qquad \sqrt{6}+2>\sqrt{3}+\sqrt{7}.$

〔問 17〕 試就下式計算之。

(一)　$(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})\times\sqrt{6}.$

(二)　$(3\sqrt{x}-15)\times 8\sqrt{x}.$

(三)　$(18+2\sqrt{72}-3\sqrt{8}-\frac{1}{2}\sqrt{128})\times\sqrt{2}.$

(四)　$\sqrt[3]{2}(3\sqrt[3]{24}+4\sqrt[3]{81}-5\sqrt[3]{375}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{192}).$

(五)　$(\sqrt{6}+\sqrt{5})\times(2+\sqrt{15})$

(六)　$(3\sqrt{45}-7\sqrt{5})\left(\sqrt{\frac{9}{5}}+2\sqrt{\frac{49}{9}}\right).$

(七)　$(2\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{8})(8\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{8}).$

(八)　$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}).$

(九)　$(35\sqrt{10}+77\sqrt{2}+63\sqrt{3}+28\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{3}).$

〔問 18〕 試就下式計算之。

(一)　$(3x\sqrt{2}-3\sqrt{7-2x^2})^2.$

(二)　$\left(\sqrt{10+\sqrt{51}}+\sqrt{10-\sqrt{51}}\right)^2.$

[問 19] 試就下列各題二式之大小比較之。 〔參照例 4〕

(一) $2\sqrt{5}+\sqrt{7}$, $\sqrt{5}+\sqrt{23}$.

(二) $\sqrt{10}+\sqrt{7}$, $\sqrt{19}+\sqrt{3}$.

(三) $\sqrt{5}+\sqrt{14}$, $\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

52. 共軛不盡根數之積。

定義. 兩二項二次不盡根數，僅聯其二項之符號不同者，此二式稱爲**共軛不盡根數**。

例如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 是也。

例 1. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2=a-b.$

例 2. $(3\sqrt{5}+4\sqrt{3})(3\sqrt{5}-4\sqrt{3})=9\times5-16\times3.$

$$=45-48=-3.$$

是二共軛不盡根數之積爲有理數也。

故 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 爲 $\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$ 之有理化因數。

凡無理式化爲有理式者，其所用之因數，謂之有理化因數。

[問 20] 試計算下列各式。

(一) $(5\sqrt{8}-2\sqrt{7})(5\sqrt{8}+2\sqrt{7})$.

(二) $(\sqrt{2p+3q}-2\sqrt{q})(\sqrt{2p+3q}-2\sqrt{q})$.

(三) $\sqrt{9+\sqrt{17}}\times\sqrt{9-\sqrt{17}}$.

(四) $\left(\sqrt[3]{12+\sqrt{19}}\right)\left(\sqrt[3]{12-\sqrt{19}}\right)$.

(五) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$.

(六) $\sqrt{(2-\sqrt{2})(5+\sqrt{7})(2+\sqrt{2})(5-\sqrt{7})}$

53. 分母之有理化。

例 1. 求 $\dfrac{2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b}}{2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$ 分母之有理化。

解 以分母之共軛不盡根式乘分母子。

$$題式=\frac{(2\sqrt{a+b}+3\sqrt{a-b})(2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}{(2\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})(2\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})}$$

$$=\frac{4(a+b)+6\sqrt{a^2-b^2}+2\sqrt{a^2-b^2}+3(a-b)}{4(a+b)-(a-b)}$$

$$=\frac{7a+b+8\sqrt{a^2-b^2}}{3a+5b}.$$

例 2. $\sqrt{5}-2$ 以 $9-4\sqrt{5}$ 除之，至小數第三位止。

解 $$\frac{\sqrt{5}-2}{9-4\sqrt{5}}=\frac{(\sqrt{5}-2)(9+4\sqrt{5})}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}$$

$$=9\sqrt{5}-18+20-8\sqrt{5}$$

$$=\sqrt{5}+2=2.236+2=4.236.$$

先求分母之有理化，然後求其近似數，所以避繁雜之計算也。

除數爲無理多項式者，其商先以分數表之，然後求其分母之有理化。

例 3. $\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ 試簡之。

解 因數分解之，則分母$=(1+\sqrt{2})-\sqrt{3}(1+\sqrt{2})$.

$$=(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3}).$$

∴ 題式

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{(4+2\sqrt{3})(1-\sqrt{2})}{(1-2)(1-3)}=\frac{4+2\sqrt{3}-4\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{(-1)(-2)}$$

$$=2+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{6}.$$

例 4. 求 $\dfrac{4+2\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$ 分母之有理化。

解 題式$=\dfrac{(4+2\sqrt{5})(1+\sqrt{2}-\sqrt{5})}{\{(1+\sqrt{2})+\sqrt{5}\}\{(1+\sqrt{2})-\sqrt{5}\}}$

$$=\frac{4+2\sqrt{5}+4\sqrt{2}+2\sqrt{10}-4\sqrt{5}-10}{(1+\sqrt{2})^2-5}$$

$$=\frac{-6+4\sqrt{2}-2\sqrt{5}+2\sqrt{10}}{2\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{-3+2\sqrt{2}-\sqrt{5}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=1-\sqrt{2}+\sqrt{5}.$$

故凡分母有 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 之形者，先以 $\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ 乘分母子。

$$\text{則分母}=(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-c=a+b-c+2\sqrt{ab}$$

再以 $a+b-c-2\sqrt{ab}$ 乘分母子。

$$(a+b-c+2\sqrt{ab})(a+b-c-2\sqrt{ab})$$

$$=(a+b-c)^2-4ab$$

$$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca$$

如是則分母爲有理化矣.

即 $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$ 之有理化因數爲

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(a+b-c-2\sqrt{ab})$$

$$=(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{a}-\sqrt{b}-\sqrt{c})$$

注意　此蓋就恆等式 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2$

$$=-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$

以比較之者也。

其他四項以上，仍依此法，逐次推求，可得分母之有理化。

例 5. 求 $\dfrac{12}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ 分母之有理化。

解　$$\text{題式}=\frac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}$$

$$=\frac{13(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2-5}$$

$$=\frac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{2+3-2\sqrt{6}-5}$$

$$=\frac{12(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-2\sqrt{6}}$$

$$=\frac{6\sqrt{6}(\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5})}{-6.}$$

$$=-\sqrt{12}+\sqrt{18}-\sqrt{30}$$

$$=-2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}.$$

注意. 如例 5，先求分母 $\sqrt{5}$ 之有理化，俾有理數之部爲零，而分母卽成單項式矣，若先以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ 乘，則 $\sqrt{3}$ 成有理化，而分母爲 $4+2\sqrt{10}$，然後以 $2-\sqrt{10}$ 乘，俾分母爲全有理化，似較複雜。

故凡分母爲 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{x+y}$ 之形者，須先使 $\sqrt{x+y}$ 之項成有理化。

例 6. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{3}+1}$ 試簡之。

解 分母$=(\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}\times1+1^2$ 故依 $(a^2-ab+b^2)(a-b)$ $=a^3+b^3$ 之公式，卽可求得分母之有理化。

$$\text{題式}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{\{(\sqrt[3]{3})^2-\sqrt[3]{3}+1\}(\sqrt[3]{3}+1)}=\frac{\sqrt[3]{3}+1}{3+1}$$

$$=\tfrac{1}{4}(\sqrt[3]{3}+1).$$

[問 21] 下列各式，試簡之。

(一) $(2\sqrt{3}+7\sqrt{2})\div(5\sqrt{3}-4\sqrt{2})$.

(二) $(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-\sqrt{2})\div(5-\sqrt{5})$.

〔問 22〕 求下列各式分母之有理化。

(一) $\dfrac{2\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.　　(二) $\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{x^2-a^2}}{\sqrt{x^2+a^2}-\sqrt{x^2-a^2}}$.

〔問 23〕 求下列各式之值至小數第三位止。 〔參照例 2〕

(一) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{3+\sqrt{3}}$.　　(二) $\dfrac{\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$.

〔問 24〕 下列各式，試簡之。

(一) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$.

(二) $\dfrac{\sqrt{245}+\sqrt{75}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{245}-\sqrt{75}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

(三) $\dfrac{2\sqrt{15}+8}{5+\sqrt{15}}\div\dfrac{8\sqrt{3}-6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$.

(四) $\dfrac{a-\sqrt{a^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}+\dfrac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}}$.

〔問 25〕 求下列各式分母之有理化。 〔參照例 3〕

(一) $\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$.

(二) $\dfrac{3}{\sqrt{6}+\sqrt{21}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$.

〔問 26〕 求下列各式分母之有理化。 〔參照例 4 例 5〕

(一) $\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.　　(二) $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}$.

(三) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{10}-\sqrt{35}}$.

[問 27]　求下列各式分母之有理化。　　〔參照例 6〕

(一)　$\dfrac{16}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.　　(二)　$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{18}}$.

(三)　$\dfrac{8}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{3}}$.

*54.　任意二項無理式之有理化因數.

1.　所設之無理式如 $\sqrt[p]{a}-\sqrt[q]{b}$

令　$\sqrt[p]{a}=X$, $\sqrt[q]{b}=Y$ 而 n 為 p, q 之 C, L M,

故 X^n, Y^n 皆為有理數。

然 X^n-Y^n 則 n 之值無論如何，恒得以 $X-Y$ 整除之，即

$$X^n-Y^n=(X-Y)(X^{n-1}+X^{n-2}Y+\ldots+Y^{n-1}).$$

是其有理化因數，為 $\mathbf{X}^n+\mathbf{X}^{n-1}\mathbf{Y}+\ldots\ldots+\mathbf{Y}^{n-1}$.

2.　所設之無理式為 $\sqrt[p]{a}+\sqrt[q]{b}$

X, Y, n 同前。

I.　***n*** 為偶數。

$$X^n-Y^n=(X+Y)(X^{n-1}-X^{n-2}Y+\ldots\ldots+XY^{n-2}-Y^{n-1}).$$

是其有理化因數爲

$$\mathbf{X}^{n-1}-\mathbf{X}^{n-2}\mathbf{Y}+\ldots\ldots+\mathbf{Y}^{n-2}\mathbf{Y}^{n-1}$$

II. $\boldsymbol{n}$ 爲奇數。

$$X^n+Y^n=(X+Y)(X^{n-1}-X^{n-2}Y+\ldots\ldots-XY^{n-2}+Y^{n-1}).$$

是其有理化因數爲

$$\mathbf{X}^{n-1}-\mathbf{X}^{n-2}\mathbf{Y}+\ldots\ldots-\mathbf{X}\mathbf{Y}^{n-2}+\mathbf{Y}^{n-1}$$

例　求 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ 之有理化因數。

解　$\sqrt{2}=X$，　$\sqrt[3]{5}=Y$，　$n=6$，而

$$X^6-Y^6=(X+Y)(X^5-X^4Y+X^3Y^2-X^2Y^3+XY^4-Y^5).$$

故　$\sqrt{2}+\sqrt[3]{5}$ 之有理化因數爲

$$(\sqrt{2})^5-(\sqrt{2})^4(\sqrt[3]{5})+(\sqrt{2})^3(\sqrt[3]{5})^2-(\sqrt{2})^2(\sqrt[3]{5})^3+(\sqrt{2})(\sqrt[3]{5})^4-(\sqrt[3]{5})^5$$

卽　$4\sqrt{2}-4\sqrt[3]{5}+2\sqrt{2}\sqrt[3]{25}-10+5\sqrt{2}\sqrt[3]{5}-5\sqrt[3]{25}$

其相乘積爲　$(\sqrt{2})^6-(\sqrt[3]{5})^6=2^3-5^2=-16.$

注意　根號依分數計算爲便。

[問 28]　求下列各式之有理化因數。

(一)　$\sqrt[3]{x^2}-a\sqrt[6]{y^5}.$　　　(二)　$\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^4}.$

(三)　$2+\sqrt[5]{3}.$　　　(四)　$a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}+y^{\frac{1}{2}}.$

二 次 不 盡 根 式

55. 定理 某數之平方根，其一部爲有理數者，其他部必不能爲二次不盡根數。

證 假若 $\sqrt{n}=a+\sqrt{m}$

兩邊各自乘。

$$n=a^2+2a\sqrt{m}+m,$$

故
$$\sqrt{m}=\frac{n-a^2-m}{2a}$$

是無理數等於有理數，殊不合理，故 $\sqrt{n}$ 不能等於 $a+\sqrt{m}$.

56. 定理. 由有理數與二次不盡根數之和所成之二式若相等，則有理，無理之部分必兩兩相等。

例如
$$x+\sqrt{y}=a+\sqrt{b}$$

則
$$x=a,\quad \sqrt{y}=\sqrt{b}.$$

證 如謂 x 與 a 不相等，則或 $x+c=a$

$$x+\sqrt{y}=x+c+\sqrt{b},$$

$$\therefore\quad \sqrt{y}=c+\sqrt{b}$$

是與前節之定理不合。

故 x 必與 a 相等，因之 $\sqrt{y}=\sqrt{b}$. $\therefore\ y=b$.

57. **$A\pm\sqrt{B}$ 之平方根.** 凡如 $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}$ 之形。可使之等於二不盡根數之和或差，爲簡單之形。

蓋假若 $\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$

兩邊各自乘。

$$A\pm\sqrt{B}=x+y\pm\sqrt{4xy},$$

依前節之定理。

$$x+y=A\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$4xy=B\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由此二式，求 x, y 之值，可由〔1〕兩邊之平方減去〔2〕如下。

$$x^2-2xy+y^2=A^2-B,$$

卽 $$(x-y)^2=A^2-B.$$

假若 $x>y$

則 $$x-y=\sqrt{A^2-B}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

乃由〔1〕及〔3〕.

得 $$x=\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2},\qquad y=\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}.$$

$$\therefore\quad \sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\left\{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}\right\}}\pm\sqrt{\left\{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}\right\}}.$$

以上公式，若 A^2-B 非完全平方數，則右邊比左邊更爲複雜，故此法惟 A^2-B 爲完全平方者方爲有効。

例 1. 求 $8+2\sqrt{15}$ 之平方根。

解 假定 $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

兩邊各自乘。

$$8+2\sqrt{15}=x+y+2\sqrt{xy},$$

因之 $x+y=8\ldots(1)$ $\quad xy=15\ldots(2)$

由 (1) 及 (2) $(x+y)^2-4xy=64-60=4.$

即 $(x-y)^2=4.$

故 $x-y=2\ldots\ldots(3)$

由 (1), (3) $x=5,\ y=3.$

$\therefore$ $\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$

或依公式，令 $A=8,\ B=60$ 則 $\sqrt{A^2-B}=2.$

$$\therefore \sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{\left\{\frac{8+2}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{8-2}{2}\right\}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}$$

別解 ab 爲正數。

$$\sqrt{(a+b\pm2\sqrt{ab})}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b},$$

依此公式，$\sqrt{8+2\sqrt{15}}=\sqrt{5+3+2\sqrt{5\times3}}$

$$=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

此固可由視察而得其解者也。

例 2. 求 $7-4\sqrt{3}$ 之平方根。

解 $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{4+3-4\sqrt{3}}$

$$=\sqrt{2^2+3-2(2\sqrt{3})}.$$

$$=2-\sqrt{3}.$$

例 3. 求 $3\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}$ 之四乘根。

解 由公式或由視察，求兩次平方根。

$$\sqrt{\left(3\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{5}\right)}=\sqrt{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{9+6\sqrt{5}+5}{4}\right)}$$

$$=\frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

$$\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}=\sqrt{\left(\frac{6+2\sqrt{5}}{4}\right)}=\sqrt{\left(\frac{5+2\sqrt{5}+1}{4}\right)}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

$$\therefore\qquad \sqrt[4]{3\tfrac{1}{2}+\tfrac{3}{2}\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

例 4. 求 $\sqrt{32}-\sqrt{30}$ 之平方根。

解 $\sqrt{32}-\sqrt{30}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{15}=\sqrt{2}(4-\sqrt{15})$

$$\therefore\quad \sqrt{(\sqrt{32}-\sqrt{30})}=\sqrt{\sqrt{2}}\sqrt{4-\sqrt{15}}$$

$$=\sqrt[4]{2}\sqrt{\left(\frac{8-2\sqrt{15}}{2}\right)}$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt[4]{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6}).$$

此結果又等於 $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ 或 $\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{200}-\sqrt[4]{72}\right)$

例 4 所設之式，係 $\sqrt{(a^2c)}\pm\sqrt{b}$ 之形，故為 $\sqrt{c}\left(a\pm\sqrt{\frac{b}{c}}\right)$

故若 $a^2-\frac{b}{c}$ 為完全平方數，則 $a\pm\sqrt{\frac{b}{c}}$ 之平方根，必可以 $\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$ 之形表之，

因之 $\sqrt{(a^2c)}\pm\sqrt{b}$ 之平方根可以 $\sqrt[4]{c}\,(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})$ 之形表之。

〔問 29〕 求下列各式之平方根。 〔參照例 1，例 2〕

(一) $3-2\sqrt{2}$. (二) $16+6\sqrt{7}$. (三) $11-2\sqrt{30}$.

(四) $26+\sqrt{660}$. (五) $30-12\sqrt{6}$. (六) $151-20\sqrt{57}$.

(七) $2\frac{1}{4}-\sqrt{5}$. (八) $4\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{3}$. (九) $2a+2\sqrt{a^2-x^2}$.

(十) $b+2\sqrt{ab-a^2}$. (十一) $(a+b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}$.

〔問 30〕 求下列各式之四乘根。 〔參照例 3〕

(一) $56-24\sqrt{5}$. (二) $17+12\sqrt{2}$.

〔問 31〕 求下列各式之平方根。 〔參照例 4〕

(一) $\sqrt{27}+2\sqrt{6}$. (二) $\sqrt{63}-\sqrt{35}$. (三) $18+12\sqrt{3}$.

〔問 32〕 下列各式試簡之。 〔參照第 53 節〕

(一) $\frac{1}{\sqrt{(5+\sqrt{24})}}$. (二) $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\right)}$.

(三) $\frac{\sqrt{(16+6\sqrt{3})}}{1+\sqrt{3}}$.

(四) $\dfrac{1}{\sqrt{(15-6\sqrt{6})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(9+6\sqrt{2})}}$.

(五) $\sqrt{\left(9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)}$　(六) $\sqrt{\{1+\sqrt{(21+12\sqrt{3})}\}}$

(七) $\sqrt{45}+\sqrt{8}-\sqrt{80}+\sqrt{18}-\sqrt{7-\sqrt{40}}$.

***58. $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ 之平方根.** 二項以上之二次不盡根式,如 $A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}$ 其平方根可以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 之形表之。

蓋假若 $\sqrt{A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

兩邊各自乘,

$A+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}=x+y+z+2\sqrt{(xy)}+2\sqrt{(yz)}+2(zx)$.

故若　$2\sqrt{(xy)}=\sqrt{B}$,　$2\sqrt{(yz)}=\sqrt{C}$,　$2\sqrt{(zx)}=\sqrt{D}$.

及　$x+y+z=A$.

適可求得 x, y, z 之有理値,則所求之平方根必可以 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 之形表之。

例　求 $11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}$ 之平方根。

解　令 $\sqrt{(11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6})}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$

兩邊各自乘。

$$11+6\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{6}=x+y+z+2\sqrt{xy}+2\sqrt{yz}+2\sqrt{zx}.$$

若　$2\sqrt{xy}=6\sqrt{2}$,　$2\sqrt{yz}=4\sqrt{3}$,　$2\sqrt{zx}=2\sqrt{6}$

則　　$\sqrt{xy}.\sqrt{yz}=6\sqrt{6}$,　$\sqrt{zx}=\sqrt{6}$

由除法，　　$y=6$

因之　　$x=3$,　$z=2$

而此等之值適合 $x+y+z=11$ 之方程式，故所求之平方根爲

$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$

〔問 33〕 求下列各式之平方根。

(一)　$8+2\sqrt{2}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$.

(二)　$6+2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}$.

(三)　$10+2\sqrt{6}+2\sqrt{10}+2\sqrt{15}$.

(四)　$5+\sqrt{10}-\sqrt{6}-\sqrt{15}$.

(五)　$21-4\sqrt{5}+8\sqrt{3}-4\sqrt{15}$.

(六)　$a+3b+4+4\sqrt{a}-4\sqrt{3b}-2\sqrt{3ab}$.

練習問題 IV

1. 試就下列各式，化爲最簡形。

(一) $\sqrt[5]{25a^5b^{10}c^{15}d^6}$.　　(二) $\sqrt{a^{2n+1}b^{3n+2}c^{4n}}$.

(三) $\sqrt{18a^3c^4-27a^4c^3}$.　　(四) $\sqrt{(x^2+x-6)(x^2-3x+2)}$.

(五) $\sqrt{\left(\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}\right)}$.

2. $2\sqrt{3}+\sqrt{75}-\frac{1}{2}\sqrt{8}$ 求至小數第三位止。

3. 下式試簡之。

(一) $\frac{1}{2}\sqrt{32}-\frac{7}{3}\sqrt{162}+\frac{5}{2}\sqrt{288}-\frac{1}{5}\sqrt{200}$.

(二) $5\sqrt[3]{81}-7\sqrt[3]{192}+4\sqrt[3]{648}$.

(三) $(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}-(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}+\sqrt{\dfrac{1}{x^2-y^2}}$.

4. 試計算下列各式。

(一) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(-\sqrt{2}+\sqrt{3}+5)$

$(\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-5)$.

(二) $(x-1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{3})(x-1-\sqrt{3})$.

5. $x=1+\sqrt{3}$ 求 x^3+x^2+x+1 之值。

6. $x=\sqrt{\dfrac{n-1}{n+1}}$ 求 $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$ 之值。

7. $\sqrt[3]{5}+1$ 與 $2\sqrt{2}$ 之大小若何。

8. 求下式之有理化因數。

(一) $\sqrt[7]{a^5}$. (二) $\sqrt[3]{a^2}\sqrt{b^3}$. (三) $\sqrt{x^3}+\sqrt{x^5}+\sqrt{x^7}$.

9. 下式求分母之有理化。

$$\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}}$$

10. 下式試簡之。

(一) $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

(二) $\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{3}}-\dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

(三) $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^2}+\dfrac{1}{(2-\sqrt{3})^2}$.

(四) $\dfrac{(7-2\sqrt{5})(5+\sqrt{7})(31+13\sqrt{5})}{(6-2\sqrt{7})(3+\sqrt{5})(11+4\sqrt{7})}$.

11. $\dfrac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{(5-\sqrt{5})(\sqrt{3}+1)}$ 求至小數第五位止。

12. $\dfrac{3+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{27}-2\sqrt{8}+\sqrt{50}}$ 求至小數二位止。

13. $\dfrac{15}{\sqrt{10}+\sqrt{20}+\sqrt{40}-\sqrt{5}-\sqrt{80}}=\sqrt{5}(\sqrt{2}+1)$ 求證。

14. $3x=1$ 求 $\dfrac{2(1+2\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$ 之值。

15. 分數式 $\dfrac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$ 試先化分母爲有理式。

然後求其以 $x=\dfrac{2ab}{b^2+1}$ 代入之值。

16. $\dfrac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{15}+\sqrt{21}}$ 試簡之。

17. 下式求分母之有理化。

(一) $\dfrac{1+3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{10}+\sqrt{12}}$. (二) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

18. $\dfrac{2}{\sqrt{(y-z)}+\sqrt{(z-x)}+\sqrt{(x-y)}}$

$=\dfrac{\sqrt{(y-z)^3}+\sqrt{(z-x)^3}+\sqrt{(x-y)^3}+\sqrt{\{(y-z)(z-x)(x-y)\}}}{x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy}$.

求證。

19. 下式試簡之。

(一) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+1}$. (二) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{9}-1}+\dfrac{5}{\sqrt[3]{9}+1}$.

(三) $\dfrac{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}\times\dfrac{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$.

(四) $\sqrt[3]{2}-1+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+1}}$.

20. $2x=a+\dfrac{1}{a}$, $2y=b+\dfrac{1}{b}$

試計算 $2\{xy-\sqrt{(x^2-1)}\sqrt{(y^2-1)}\}$ 之值。

*21. 求 $\sqrt{3}+\sqrt[3]{5}$ 之有理化因數。

*22. 下式求分母之有理化。

(一) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}-\sqrt[3]{b^2}}$. (二) $\dfrac{1}{a-\sqrt[5]{b}}$.

23. 下式試簡之。

(一) $(2-\sqrt{3})^{-3}+(2+\sqrt{3})^{-3}$.

(二) $(\sqrt{p^2+1}+\sqrt{p^2-1})^{-3}+(\sqrt{p^2+1}-\sqrt{p^2-1})^{-3}$

24. 下式試簡之。

(一) $\sqrt{\left(3\frac{1}{10}-\sqrt{6}\right)}$.　　(二) $\sqrt{\{7(3+2\sqrt{2})\}}$.

(三) $\sqrt[4]{(97-56\sqrt{3})}$.　　(四) $\sqrt{(56+\sqrt{3})}$.

(五) $\sqrt{\{a+\sqrt{(a^2+2bc-b^2-c^2)}\}}$,

(六) $\sqrt{[(2p-1)+\sqrt{\{(2p-1)^2-1\}}]}$.

(七) $\sqrt{\{x^2+x+1-\sqrt{(2x^3+x^2+2x)}\}}$.

(八) $\sqrt{\{ab+c^2+\sqrt{\{(a^2-c^2)(b^2-c^2)\}}\}}$.

(九) $\sqrt{\{1+(1-c^2)^{-\frac{1}{2}}\}}$.

***25.** 求下二式之比例中項。

(一) $\sqrt{7}-\sqrt{5}$,　$11\sqrt{7}+13\sqrt{5}$.

(二) $5+7\sqrt{2}$,　$\frac{1}{73}(29+47\sqrt{2})$.

***26.** 求下列各式之平方根。

(一) $25-4\sqrt{3}-12\sqrt{2}+6\sqrt{6}$.

(二) $11+2(1+\sqrt{5})(1+\sqrt{7})$.

(三) $48+12\sqrt{5}+12\sqrt{7}+2\sqrt{35}$.

27. $\sqrt{[2+\sqrt{\{3+2\sqrt{(5+12\sqrt{3+2\sqrt{2}})}\}}]}$ 試簡之。

28. 求 $\dfrac{\sqrt{(10+2\sqrt{21})}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ 之值，依四捨五入，至小數第二位止。

29. 下式試簡之，且求其值，(小數第三位止)。

(一) $\dfrac{1}{\sqrt{(11+2\sqrt{30})}}-\dfrac{3}{\sqrt{(7+2\sqrt{10})}}$.

(二) $\dfrac{1}{\sqrt{(16+2\sqrt{63})}}+\dfrac{1}{\sqrt{(16-2\sqrt{63})}}$.

30. 問根數式 $\sqrt{\left(\dfrac{9+2\sqrt{14}}{2(4+\sqrt{15})}\right)}$ 如何化法，俾求其近似值爲最便利。

31. $\sqrt{13+2\sqrt{13}}=\sqrt{\dfrac{13+3\sqrt{13}}{2}}+\sqrt{\dfrac{13+3\sqrt{13}}{2}}$ 求證。

32. 下式試證之。

(一) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{3})}}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$。

(二) $\dfrac{1}{\sqrt{(12-\sqrt{140})}}-\dfrac{1}{\sqrt{(8-\sqrt{60})}}-\dfrac{2}{\sqrt{(10+\sqrt{84})}}=0$.

(三) $\dfrac{1}{\sqrt{(11-2\sqrt{30})}}-\dfrac{3}{\sqrt{(7-2\sqrt{10})}}-\dfrac{3}{\sqrt{(8+4\sqrt{3})}}=0$.

33. $\sqrt{73-12\sqrt{35}}=x\sqrt{5}-y\sqrt{7}$ 求 x, y 之值。

34. $\dfrac{\sqrt{(4+\sqrt{15})^3}+\sqrt{(4-\sqrt{15})^3}}{\sqrt{(6+\sqrt{35})^3}-\sqrt{(6-\sqrt{35})^3}}$ 試簡之。

35. 下式試證明之。

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

$$+\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}=\tfrac{1}{2}(2+\sqrt{2}+\sqrt{6}).$$

36. 下式試證之。

$$\frac{x^3-3x-2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{x^3-3x+2+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}=\frac{(x+1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)(x+2)}.$$

37. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 求 $\frac{1+x}{1+\sqrt{(1+x)}}+\frac{1-x}{1+\sqrt{(1-x)}}$ 之値。

38. 若 $x=\sqrt[3]{\{a+\sqrt{(a^2-b^3)}\}}+\sqrt[3]{\{a-\sqrt{(a^2-b^3)}\}}$

則必爲方程式 $x^3-3bx-2a=0$ 之一根，求證.

39. 若 $x=\sqrt[3]{(a+\sqrt{b})}+\sqrt[3]{(a-\sqrt{b})}$

則 $(x^3-2a)^3=27(a^2-b)x^3$ 求證.

第 五 章

虛數及複素數

虛 數

59. 無論爲正數爲負數，其二乘羃必爲正數，故凡數之平方無爲負數者，雖然，負數之平方根，亦一新數也，特稱之爲虛數。

定義. 虛數者，其平方爲負數之數也。

例如 $\sqrt{-36}$ 爲虛數，而 $(\sqrt{-36})^2=-36$.

對於虛數而爲正或負之有理數及無理數者，總稱之爲實數。

60. 虛數之單位. 負數之平方根，與正數之平方根相同，有正根負根二種，例如 -36 之平方根爲 $\pm\sqrt{-36}$.

此計算當作 $\sqrt{-36}=\sqrt{36\times(-1)}=6\sqrt{-1}$

其 $\sqrt{-1}$ 以 i 表之。

如 $\sqrt{-36}=6i$

故凡 a 爲實數，

則 $$\sqrt{-a^2}=ai.$$

又 b 爲正實數。

則 $$\sqrt{-b}=i\sqrt{b}.$$

故虛數者實數與 i 之乘積也，故稱 i 爲**虛數之單位**，而 i 之二乘冪，則爲 -1 之數云。

如 $$i^2=-1.$$

61. 虛數之加減乘除. 虛數之計算，依前節，先就虛數以實數與 i 之積表之，乃如法計算，與實數同。

例 1. 求 $\sqrt{-9}$ 與 $\sqrt{-25}$ 之和。

解 $\sqrt{-9}+\sqrt{-25}=i\sqrt{9}+i\sqrt{25}=3i+5i=8i.$

例 2. 由 $\sqrt{-81}$ 減 $\sqrt{-121}$.

解 $\sqrt{-81}-\sqrt{-121}=9i-11i=-2i.$

例 3. $\sqrt{3}$ 與 $\sqrt{-2}$ 之積若何。

解 $\sqrt{3}.\sqrt{-2}=\sqrt{3}.\sqrt{2}\,i=\sqrt{6}\,i.$

例 4. $\sqrt{-3}$ 與 $\sqrt{-12}$ 之積若何。

解 $\sqrt{-3}.\sqrt{-12}=\sqrt{3}.\,i.\,\sqrt{12}.\,i=\sqrt{36}.\,i^2.$

$$=6\times(-1)=-6.$$

注意. 求二虛數之積，不能依公式 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 求之，如例 4 依此公式求之，

則　$\sqrt{-3}.\sqrt{-12}=\sqrt{(-3)(-12)}=\sqrt{36}=6$

其誤可知，故凡 $\sqrt{-a}$ 須化為 $i\sqrt{a}$ 之形。

例 5. $\sqrt{18}$ 以 $\sqrt{-2}$ 除之。

解　$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{-2}}=\frac{3\sqrt{2}}{i\sqrt{2}}=\frac{3}{i}=\frac{3i}{i.i}=\frac{3i}{-1}=-3i.$$

例 6. $\sqrt{-21}$ 以 $\sqrt{-8}$ 除之。

解　$$\frac{\sqrt{-21}}{\sqrt{-8}}=\frac{i\sqrt{21}}{i\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{2}}=\tfrac{1}{4}\sqrt{42}.$$

故凡 a, b 為實數。

則
$$ai\pm bi=(a\pm b)i.$$
$$a\times bi=abi.$$
$$ai\times bi=-ab.$$
$$\frac{a}{bi}=-\frac{a}{b}i.$$
$$\frac{ai}{bi}=\frac{a}{b}.$$

[問 1]　試說明 $\sqrt{-25}$ 及 $\sqrt{-0.75}$ 之意義。

[問 2]　若下列各式為虛數，其 x 之限界若何。

$$\sqrt{3-x},\qquad \sqrt{7-2x},\qquad \sqrt{1+\tfrac{3}{4}x}.$$

[問 3]　問下列各數為何數之平方。

$$-9,\qquad -\frac{4}{9},\qquad -0.25,\qquad -5\frac{1}{16}.$$

[問 4] 下列各式試簡之。

(一) $\sqrt{-9}+\sqrt{-49}$. (二) $5\sqrt{3-64}-\sqrt{-144}$.

(三) $\sqrt{-x}+\sqrt{-y}$. (四) $a\sqrt{-a^3}-\sqrt{-a^5}$.

(五) $\sqrt{-(a-c)^2}+\sqrt{-(a+c)^2}$.

[問 5] 下列各式試簡之。

(一) $\sqrt{5}.\sqrt{-2}$. (二) $\sqrt{-6}.\sqrt{-24}$. (三) $(\sqrt{-6})^2$.

(四) $\sqrt{-1}.\sqrt{-3}.\sqrt{-5}$. (五) $-\sqrt{-8}\times(-\sqrt{-2})$.

[問 6] 下列各式試簡之。

(一) $\sqrt{-24}\div\sqrt{-6}$. (二) $\sqrt{-21}\div\sqrt{7}$. (三) $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}\,i}$.

(四) $\dfrac{(-\sqrt{5})(-\sqrt{3}\,i)}{-\sqrt{15}}$ (五) $\dfrac{\sqrt{5}}{i\sqrt{20}}$.

62. i 之乘冪. $i=\sqrt{-1}$ 之乘冪如次：

$$i^2=-1.$$

$$i^3=i^2i=-1\times i=-i.$$

$$i^4=i^3\times i=-i\times i=-i^2=-(-1)=1.$$

$$i^5=i^4\times i=\quad 1\times i=i.$$

$$i^6=i^5\times i=\quad i\times i=-1.$$

……………………………

如是則 i^5, i^6, i^7, i^8, 等於 i, i^2, i^3, i^4 以下順次循環相等，故

n 爲 0 或正整數。

則 $\qquad i^{4n}\;=1.\qquad i^{4n+1}=i.$

$$i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n-3}=-i.$$

例 1. 求 i^{13} 之值。

解 $\qquad i^{13}\times i^{4\times3+1}=i.$

例 2. $i^{3}\times i^{7}\times i^{9}$ 試計算之。

解 $\qquad i^{3}.\, i^{7}.\, i^{9}=i^{19}=i^{4\times4+3}=-i.$

[問 7] 試計算下列各式。

(一) i^{12}. (二) i^{15}. (三) $i^{5}\times i^{6}\times i^{7}$.

(四) $(-1)\div i^{17}$. (五) $\dfrac{3i}{i^{3}}$.

複 素 數

63. 定義. 若 a, b 皆爲實數而有 $a+bi$ 之形者，謂之**複素數**。

複素數及虛數，通稱之爲虛數。

複素數 $a+bi$，若 b 爲零則得實數 a，若 a 爲零則得虛數 bi，故一切之數胥含於 $a+bi$ 之形之中。

64. 定理. 二複素數相等者，其實數部與虛數部必各相等。

例如　$a+bi=c+di$ 則 $a=c$, $b=d$,

證　$$a+bi=c+di$$

∴　$$a-c=(d-b)i.$$

兩邊各自乘　$$(a-c)^2=-(d-b)^2.$$

此等式左邊爲正，而右邊爲負，故兩邊非皆爲零，不能成立。

∴　$$a-c=0,\qquad d-b=0.$$

∴　$$a=c,\qquad b=d.$$

65. 複素數之加，減及乘法. 依下例，卽知其計算法。

例 1. 求 $2+3i$ 與 $5-4i$ 之和。

解　$(2+3i)+(5-4i)=(2+5)+(3-4)i=7-i.$

例 2. 由 $16+5i$ 減 $3+2i$.

解　$16+5i-(3+2i)=(16-3)+(5-2)i=13+3i.$

例 3. 求 $5+3i$ 與 $7-2i$ 之積。

解　$$(5+3i)(7-2i)=35+21i-10i-6i^2$$
$$=35+6+11i=41+11i.$$

例 4. 求 $1+i$ 之四乘羃。

解　$$(1+i)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i.$$
$$(1+i)^4=\{(1+i)^2\}^2=(2i)^2=-4.$$

故 $1+i$ 爲 -4 之四乘根。

依同理 $-(1+i)$, $1-i$, $-(1-i)$ 皆爲 -4 之四乘根，卽 -4 之四乘根有四，皆爲複素數。

故凡負數之高次偶數乘根，皆複素數也。

注意　凡某數之 n 乘根有 n 個，如第二章第 12 節依實數之範圍所述是也。

例 5.　$-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 皆爲一之立方根，求證。

解　$$\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3=\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)^2\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$
$$+3\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$$
$$=-\frac{1}{8}\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}i+\frac{9}{8}\mp\frac{3\sqrt{3}}{8}i=1.$$

故此二複素數，皆爲 1 之立方根。

通例此二數以 ω_1 及 ω_2 表之，故 1 之立方根爲 1，ω_1 及 ω_2 凡三個。

由以上諸例，知凡複素數之和，差及積，皆爲複素數，但特別之處，固亦有爲實數或虛數者。

$$(a+bi)\pm(c+di)=(a\pm c)+(b\pm d)i.$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

［問 8］　下列各式，試簡之。

(一)　$(3-2i)-(1-i)-(7+2i)$.　(二)　$5i+\sqrt{-16}i$.

［問 9］ 試計算下列各式。

（一） $(5-i)(3+2i)$.　　（二） $(\sqrt{5}+\sqrt{2i})(\sqrt{5}-\sqrt{2i})$.

（三） $(\sqrt{3}+2\sqrt{-2})(\sqrt{3}-2\sqrt{2})$.

（四） $(\sqrt{-8}-\sqrt{-2}+6)\times i$.

［問 10］ 試計算下列各式。

（一） $(5+7\sqrt{-1})^2$.　　（二） $(1+2i)^3+(1-2i)^3$.

（三） $(-1+\sqrt{3}i)^2-(-1-\sqrt{3}i)^2$.

66. 共軛複素數及除法. 凡如 $a+bi$ 與 $a-bi$ 其實數部分與虛部數分之間，惟符號爲異者．此二複素數，互爲**共軛**。

二共軛複素數之積爲正實數。

如　$$(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2.$$

故凡如 $\dfrac{a+bi}{c+di}$ 之分數，以分母之共軛複素數乘分母子，必可化爲複素數之形。

例　$5+7i$ 以 $3-4i$ 除之。

解　$$\frac{5+7i}{3-4i}=\frac{(5+7i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$=\frac{15+21i+20i-28}{3^2-4^2i^2}$$

$$=\frac{-13+41i}{9+16}=-\frac{13}{25}+\frac{41}{25}i.$$

故凡某數以複素數除之所得之商必爲複素數，但特別之處固亦有爲實數或虛數者。

如 $$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c+di)}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

[問 11] 下列各式試簡之。

(一) $2\div(1-i)$.　(二) $\frac{24}{1+4i}$.　(三) $\frac{1+i}{1-2i}$.

(四) $\frac{4+6i}{1+i}+\frac{4-6i}{1-i}$.　(五) $(1+i^3)+(1\div i)$.

(六) $(a+bi)\div(a-bi)$.

***67. 複素數之平方根.** 與第 57 節同法，可求得複素數之平方根。

例 求 $5+12i$ 之平方根。

解 x, y 爲正實數

假定 $$\sqrt{5+12i}=\sqrt{x}+\sqrt{y}\,i,$$

兩邊各自乘。

$$5+12i=x-y+2\sqrt{xy}\,i,$$

$\therefore$ $$x-y=5,\quad 2\sqrt{xy}=12.$$ 〔第 64 節〕

故 $$(x+y)^2=(x-y)^2+4xy$$

$$=5^2+12^2=169.$$

$\therefore \qquad x+y=13,$

因之 $\qquad x=9. \quad y=4.$

$\therefore \qquad \sqrt{5+12i}=3+2i.$

因得公式如次：

$$\sqrt{a\pm bi}=\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}\pm\sqrt{\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}\right)}i.$$

故凡複素數之平方根爲複素數。

[問 12] 求下列各式之平方根。

(一) $-3+4i.$ (二) $2i.$ $-1-4\sqrt{5}\,i,$

練 習 問 題 V.

1. 下列各式試簡之。

(一) $\sqrt{-9a^2}+\sqrt{-25a^2}-\sqrt{-49a^2}$.

(二) $2\sqrt{-\frac{1}{9}}+4\sqrt{-\frac{1}{121}}$.

(三) $\sqrt{-1+2p-p^2}-\sqrt{-4p^2}$.

2. 下列各式試簡之。

(一) $-\sqrt{-6}\times\sqrt{-2}$. (二) $\sqrt{-2}.(\sqrt{-3})^5(\sqrt{-5})^7$.

(三) $(3\frac{1}{2}+2i)(\frac{3}{7}+\frac{5}{7}i)$. (四) $(\sqrt{3+4i}-\sqrt{3-4i})^2$.

(五) $\left(x-\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. 下列各式試簡之。

(一) $\frac{3-\sqrt{15}\,i}{\sqrt{3}+\sqrt{5}\,i}$. (二) $\frac{9+3\sqrt{2}\,i}{(3+\sqrt{2}\,i)(1+\sqrt{2}\,i)}$.

4. $x=\pm 3i$ 求 x^2+9 之值。

5. $x=5+\sqrt{-1}$ 求 $x^2-10x+26$ 之值。

6. $x=1+3i$ 求 $x^3-7x^2+20x-50$ 之值。

7. 下式試證之。

$$(1\pm\sqrt{-1})^2-2(1\pm\sqrt{-1})+2=0.$$

8. $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ 爲 -1 之四乘根, 求證。

9. 設 ω_1 及 ω_2 爲 1 之立方根中之虛數，則有各關係式如次，試證明之。

$$1+\omega_1+\omega_2=0,$$
$$\omega_1\omega_2=1.$$
$$\omega_1^2=\omega_2.$$
$$\omega_2^2=\omega_1.$$

10. 若 $x=\dfrac{-1+\sqrt{-2}}{2}$ 其下式之值若何。

$$2x^4-11x^3-9x+4.$$

11. 下式之值，n 爲 3 之倍數，則等於 2，若爲其他之整數則等於 -1，試證之。

$$\left\{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right\}^n+\left\{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right\}^n.$$

12. 下式試證明之。但 ω 爲 1 之立方根中虛數之一。

(一) $x^3+y^3=(x+y)(\omega x+\omega^2y)(\omega^2x+\omega y).$

(二) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2c)$
$(a+\omega^2b+\omega c).$

13. 設方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之二根爲虛數，則 x 任爲何數，其二次三項式 ax^2+bx+c 之符號必等於初項 a 之符號，試證之。

14. 求 -16 之四乘根。

15. 求下式之平方根。

(一) $-7-24i.$ (二) $4ab-2(a^2-b^2)i.$

16. $(x+yi)i-2+4i=(x-yi)(1+i)$ 其 xy 之實數值若何。

答及解法指針

第一章 冪法

問 1. (一) $49a^2b^4$.　(二) $-8a^{21}c^6$.　(三) $81a^8b^{12}$.

(四) $a^{12}x^6$.　(五) $-32x^{15}y^5$.　(六) $-\frac{1}{2187}x^{21}$

(七) $-40a^{12}$.　(八) $(-1)^n729^na^nx^{2n}y^{5n}$.

問 2. (一) $\frac{9a^4b^6}{16c^{10}x^8}$.　(二) $-\frac{25x^{15}}{125a^9}$.　(三) $\frac{2^na^nb^nc^n}{3^nm^{2n}a^{3n}}$.

問 3. (一) $256a^{24}$.　(二) $3x^{25}$.　(三) $-5m^{24}n^{18}$.

問 4. (一) $a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$.

(二) $a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$.

(三) $\frac{4}{9}x^4-\frac{4}{3}x^3+3x^2-3x+\frac{4}{9}$.

(四) $x^6-2x^5+3x^4-4x^3+3x^2-2x+1$.

問 5. (一) $\frac{1}{216}a^3+\frac{1}{6}a^2x+2ax^2+8x^3$.

(二) $\frac{81}{625}x^4-\frac{36}{25}x^3y+6x^2y^2-\frac{100}{9}xy^3+\frac{625}{81}y^4$.

(三) $32-240y+720y^2-1080y^3+810y^4-243y^5$.

(四) 題式$=\{(1+x)^2\}^3=(1+x^6)$

$= 1+6x+15x^2+20x^3+15x^4+6x^5+x^6$.

(五) $\frac{1}{128}a^7+\frac{7}{96}a^6b+\frac{7}{24}a^5b^2+\frac{35}{54}a^4b^3+\frac{70}{81}a^3b^4$

$+\frac{56}{81}a^2b^5+\frac{224}{729}ab^6+\frac{138}{2187}b^7.$

(六) $x^8+8x^6+28x^4+56x^2+70+\frac{56}{x^2}+\frac{28}{x^4}+\frac{8}{x^6}+\frac{1}{x^8}.$

(七) 題式 $=(x-y)^{12}=x^{12}-12x^{11}y+66x^{10}y^2-220x^9y^3$

$+495x^8y^4-792x^7y^5+924x^6y^6-792x^5y^7$

$+495x^4y^8-220x^3y^9+66x^2y^{10}-12xy^{11}-y^{12}.$

問 6. (一) $(999)^2=(1000-1)^2=998001$. (二) 996105067803.

問 7. (一) $(287+0.00006)^2=82369.03444$. 〔參照第10節例4〕

(二) $(82-0.00006)^3=551366.78968$.

問 8. (一) $(18-0.000003)^3=5831.997084$.

(二) 19700.7217875.

練 習 問 題 I.

1. (一) $\frac{2}{3}a^{12}$.　　　　(二) a^{39}.

(三) 題式 $=\left(\frac{a^2bc\times b^2ca\times c^2ab}{b^2cayz\times c^2abzx\times a^2bcxy}\right)^2=\left(\frac{1}{x^2y^2z^2}\right)^2$

$=\frac{1}{x^4y^4z^4}.$

2. (一) $(25\times4)^3=100^3=1000000$.

(二) $100^4=100000000$.

(三)　$(5\times2)^8\times2^3=800000000.$

(四)　$\left(\frac{2}{3}\times\frac{9}{16}\right)^4=\left(\frac{3}{8}\right)^4=\frac{81}{4096}.$

(五)　$\left(\frac{9\times17}{51}\right)^5=3^5=243.$

(六)　$15^4=3^4\times5^4$, $60^5=2^{10}\times3^5\times5^5$ 依此計算，答 0.0081.

3.　(一)　題式$=\left(x^2yz\times\frac{x^2}{yz}\right)^l\times\left(xy^2z\times\frac{y^2}{zx}\right)^m\times\left(xyz^2\times\frac{z^2}{xy}\right)^n$

$=x^{4l}.y^{4m}.z^{4n}.$　　　　(二)　1.

4.　左邊$=x^{p(q+r)}y^{q(p+r)}z^{r(p+q)}\div x^{(p-1)(q+r)}y^{(q-1)(p+r)}$

$.z^{(r-1)(p+q)}=x^{q+r}y^{p+r}z^{p+q}$　左邊式同。

5.　左邊$=\frac{x^{m+n}y^{l+n}z^{l+m}}{x^ly^mz^n}$.　右邊$=\frac{x^{2l}y^{2m}z^{2n}}{x^{n+m}y^{l+n}z^{l+m}}$.

故 $x^{2(m+n)}y^{2(l+n)}z^{2(l+m)}=x^{3l}y^{3m}z^{3n}$, 兩邊同以 $x^{2l}y^{2m}z^{2n}$ 乘之。

6.　由所設之三式得 $x^{xyz}=x$ $\therefore xyz=1$ 然 x, y, z 皆爲整數，故 $x=y=z=1$.

7.　以 $m^y=a^{xy}$, $n^x=a^{xy}$ 代入第三式，則 $a^2=a^{2xyz}$ $\therefore$ $xyz=1$.

8.　由 $2^x=(2^3)^{y+1}=2^{3(y+1)}$, $3^{2y}=3^{x-9}$, 得方程式 $x=3(y+1)$, $2y=x-9$ 依此解之，則 $x=21$, $y=6$.

9.　(一)　$\frac{1}{27}x^6-x^5+9x^4-27x^3.$

(二)　題式$=m^3p^3(4n-5q)^3=64m^3n^3p^3-240m^3n^2p^3q$

$+300m^3np^3q^2-125m^3p^3q^3.$

(三)　題式$=(a^3-b^3)^5=a^{15}-5a^{12}b^3+10a^9b^6-10a^6b^9$

$+5a^3b^{12}-b^{15}$.

(四)　題式$=(a^2-b^2)^7=a^{14}-7a^{12}b^2+21a^{10}b^4-35a^8b^6$

$+53a^6b^8-21a^4b^{10}+7a^2b^{12}-b^{14}$.

10.　左邊展開而括之。

11.　$x^3+8y^3-27z^3+6x^2y-9x^2z+12xy^2-36y^2z$

$+27xz^2+54yz^2-36xyz$.

12.　兩邊分別計算。

13.　由前問 (二) 之恆等式，得 $(bz-cy)^2+(cx-az)^2-(ay-bx)^2$ $=0$ 因 a, b, c, x, y, z 皆爲實數，故左邊之各項皆爲正，因之各項皆爲零，卽 $bz-cy=0$　$\therefore\ \dfrac{z}{c}=\dfrac{y}{b}$.

又　$cx-az=0$

$\therefore\ \dfrac{z}{c}=\dfrac{x}{a}$.　　　$\therefore\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

14.　(一)　由所設之條件，$(a-b)^2=0$.　$\therefore\ a=b$.〔參照前問解〕

(二)　去括弧，移項，得 $a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2$ $-2ca+a^2=0$ 卽 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$.

因之 $a-b=b-c=c-a=0$　$\therefore\ a=b=c$.

(三)　與前同，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2=0$.

(四)　$(a-b)^2+(b+c)^2+\ldots\ldots=0$　$\therefore\ a=b=c=\ldots\ldots$

15.　$a^4+b^4+c^4+d^4-4abcd=(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2+2(ab-cd)^2$ $=0$　$\therefore\ a^2-b^2=c^2-d^2=ab-cd=0$，因皆爲正數。

故由 $a^2-b^2=0$ 得 $a=b$, 由 $c^2-d^2=0$ 得 $c=d$,

由 $ab-cd=0$ 得 $a=c$ 因之 $a=b=c=d$.

16. (一) $(292-0.00007)^2=85263.95912$. (二) 148877.58989.

17. k 爲極小。

故 $(1\pm k)^2=1\pm 2k$, $(1\pm k)^3=1\pm 3k$.

因之 $$\frac{1}{(1\pm k)^2}=\frac{1}{1\pm 2k}=\frac{1\mp 2k}{(1\pm 2k)(1\mp 2k)}=\frac{1\mp 2k}{1-2k^2}$$
$$=1\mp 2k.$$

又 $$\frac{1}{(1\pm k)^3}=\frac{1}{1\pm 3k}=\frac{1\mp 3k}{(1\pm 3k)(1\mp 3k)}=\frac{1\mp 3k}{1-9k^2}$$
$$=1\mp 3k.$$

此因 $4k^2$, $9k^2$ 爲極小, 故從略。 〔參照第 10 節例 4 注意〕

第 二 章 開 法

問 **1.** (一) $5x^2y^3z$. (二) $4a^2bc^3d^4$. (三) $8x^8y^{14}$.

(四) $\frac{a^8b^4}{7}$. (五) $\frac{16xy^2}{17p^7}$.

問 **2.** (一) $3a^2bc$. (二) $-7a^4b^6$. (三) $\frac{5ab^2}{5x^2y^3}$.

(四) $-\frac{3x^9}{4y^{21}}$.

問 **3.** (一) a^2x^3. (二) $2xy^2$. (三) $3a^3b$.

(四) $-x^2y^3$. (五) $2ax^8$. (六) $\frac{2}{a^9b^8}$.

(七) $\dfrac{a^3x^5}{b^{10}}$　　(八) a^3b^5.

問 4. (一) $p-q$.　　(二) $3x+2y$.　　(三) $7a+8b^2$.

(四) a^3-7b^3.　　(五) p^5-9.　　(六) $x+y-a-b$.

(七) $\dfrac{x}{y}+5$.　　(八) $\dfrac{3}{5}x-\dfrac{5}{3x}$.

問 5. (一) 題式$=a^2-2a(b+c)+(b^2+2bc+c^2)=\{a-(b+c)\}^2$.

又 $(a^2-2ab+b^2)-2(a-b)c+c^2=\{(a-b)-c\}^2$

答 $a-b-c$.　　〔參照第 18 節例 4〕

(二) $x+2y-3z$.　　(三) $3m-n-4$.

問 6. (一) 題式$=(x^4+2x^3+x^2)+2(x^2+x)+1=(x^2+x+1)^2$.

答 x^2+x+1.

(二) $2x^2-5x-3$.　　(三) $3a^2-2a+3$.

問 7. (一) $7x^2-9y^2$.　　(二) $2x^2-3x-1$.

(三) $5x^2-3ax+4a^2$.　　(四) $2ac-a+3bc$.

(五) $2x^3+x^2-x-2$.　　(六) $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.

(七) $3a^3-2a^2b+b^2$.

問 8. $1-\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8}-\dfrac{x^3}{16}-\dfrac{x^4}{128}$.

問 9. (一) $\dfrac{1}{2}x^2+2x-1-\dfrac{1}{x}$.　　(二) $\dfrac{3a}{x}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{2x}{3a}$.

(三) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{x+1}{x}$.

問 10. (一) 26. (二) 38. (三) 108.

(四) 456. (五) 3104. (六) 7199.

(七) 3.7. (八) 15.09. (九) 0.0238.

問 11. (一) 32.44 (二) 3.41 (三) 0.63.

問 12. (一) $\frac{28}{43}$. (二) $2\frac{12}{37}$. (三) $3\frac{16}{113}$.

問 13. (一) 0.589. (二) 0.522. (三) 1.772.

(四) 44.666.

問 14. (一) 7.632050. (二) 2.213594. (三) 5.015973.

(四) 135.790279. (五) 0.025298.

問 15. (一) $x+2$. (二) $ax-y^2$.

(三) $x+a-b+c$. (四) $\frac{2}{a^2}-3a$.

(五) $2a^2+5b^2$. (六) $\frac{a-b}{a+b}+1=\frac{2a}{a+b}$.

(七) $(5x-3y)-4(x+y)=x-7y$.

問 16. (一) x^2+x+1. (二) $3x^2-3x+1$.

(三) $x^2-2xy+4y^2$. (四) $1-x+x^2-x^3$.

(五) $\frac{x}{y}+2-\frac{y}{x}$.

問 17. (一) $3x-2y$. (二) $x^2-\frac{3a^2x}{4b}$.

問 18. (一) $1+x$. (二) $x-2a$.

問 19. (一) 19. (二) 42. (三) 73.

(四) 97. (五) 534. (六) 704.

(七) 3003. (八) 7.91. (九) 0.121.

問 20. (一) 135.994. (二) 336.999.

問 21. (一) 79. (二) 203. (三) 17.

(四) 11.

問 22. (一) $\frac{13}{25}$. (二) 0.942. (三) 1.464.

問 23. (一) 1.42224. (二) 1.70997.

問 24. 依問題 I 解之可也。

問 25. (一) $5x^2+6x-7$.

(二) 題式$=(x^5+3x^4+mx^3+nx^2+px+q)^2$,

答 $x^5+3x^4+2x^3-4x^2+x-1$.

問 26. $2x^2-3x+2$.

問 27. (一) 依問題 I 解之。

答 $a=6$, $b=1$.

(二) 題式$=(x^3-4x^2+Mx\pm2)^2$ 就係數比較之。

得 $M=\mp11$ 而 $M=-11$ 則其平方根爲

$x^3-4x^2-11x+2$.

因之 $a=-6$. $b=92$, $c=105$.

若 $M=11$ 則其平方根爲 $x^3-4x^2+11x-2$

因之 $a=38,\ b=-92,\ c=105.$

(三) $a=3,\ b=4,\ c=12,$ 又 $a=27,\ b=c=108.$

問 28. 依未定係數法。 答 $b^3=27c^3.$

練 習 問 題 II.

1. (一) $5a^2-3b^2-2c^2.$

(二) 依 a 之降冪整理之。 答 $a+bx+cx^2.$

(三) 依 y 之降冪整理之。

題式 $=y^2+2y(x^3-x^2+x)+(x^3-x^2+x)^2$

$=\{y+(x^3-x^2+x)\}^2.$ 答 $x^3-x^2+x+y.$

(四) $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ca}+\dfrac{c}{ab}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{abc}.$

2. 題式 $=(x^2-5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4.$

$=(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+25a^4$ 答 $x^2+5ax-5a^2.$

3. (一) $\dfrac{1}{3}+a-\dfrac{1}{3}a^2.$ (二) $a^2-\dfrac{3}{2}a+\dfrac{5}{3}.$

(三) $\dfrac{5x}{y}-2-\dfrac{y}{5x}.$ (四) $a-3b+5c-7d.$

(五) $x^2+(a-2)x+a.$ (六) $x^3+3ax-a^2b$

(七) $2x^2-2x+2.$

（八） 依 a 之降冪整理之。

$$題式=4(b+c)^2a^2+8abc(b+c)+4b^2c^2$$

$$=\{2(b+c)a+2bc\}^2.$$

答 $2(ab+bc+ca)$.

（九） 題式 $=a^4+2a^2b^2+b^4$. 答 a^2+b^2.

（十） 依 x 之降冪整理之。 答 $x^2-x(y+z)-yz$.

4. 題式 $=(x^2-yz)\{(x^2-yz)^2-(y^2-zx)(z^2-xy)\}+\cdots\cdots$

$$=(x^2-yz)x(x^3+y^3+z^3-3xyz)+\cdots\cdots$$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)\{x(x^2-yz)+y(y^2-zx)$$
$$+z(z^2-xy)\}$$

$$=(x^3+y^3+z^3-3xyz)^2.$$

5. 依 a 之降冪整理之。

$$題式=a^3+3a^2(b+c)+3a(b^2+c^2+2bc)+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3$$

$$=a^3+3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(b+c)^3$$

$$=\{a+(b+c)\}^3.$$ 答 $a+b+c$.

6. （一） $2z^3-z^2-3$. （二） $2x-\frac{1}{3}y^2$.

（三） $2x^2-3cx+4c^2$.

7. $x-\dfrac{1}{x}$.

8. 依觀察，知其平方根 $=\left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$

$$=x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^3.$$ 答 $x-\dfrac{1}{x}$.

9. (一) 3009. (二) 3201. (三) 3.1416.

10. (一) 2755. (二) 0.838. (三) 49.68.

11. (一) 0.203. (二) 34. (三) 7.

12. 0.0041.

13. (一) 以題式平方開之，其平方根爲 x^2+3x+1 又剩餘爲

$-3x+3$) 故原式爲平方數者，則 $-3x+30=0$

$\therefore\ x=10$ 答 10

〔驗算〕 $x=10$ 則 $x^2+3x+1=131.$

$x^4+6x^3+11x^2+3x+31=17161.$

$131^2=17161.$

(二) $\dfrac{b}{a}.$ (三) $\dfrac{d-a^4}{2a^3-c}.$

14. 6.

15. (一) 題式 $=(3x^3-4x^2+Mx\pm6)^2.$

若平方根爲 $3x^3-4x^2-5x+6$ 則 $p=14,\ q=76,$

$r=-23.$ 又平方根若爲 $3x^3-4x^2+5x-6$

則 $p=-46,\quad q=-76,\quad r=73.$

(二) 平方根爲 $3x+2y\pm2$ 則 $a=6,\ b=\pm6,\ c=\pm4.$

爲 $3x-2y\pm2$ 則 $a=-6,\ b=\pm6,\ c=\mp4.$

16. $7x^2-2x+1.$

17. 題式$=(x^2+Mx+N)^2$ 就係數比較之。

則 $2M=-a$,　$M^2+2N=b$,　$2MN=-c$,　$N^2=1$ 由此四式

消去 M, N 卽可求得 a, b, c 間之關係。

蓋由　第一，第二，第四三式。　　$\left(b^2-\dfrac{a^2}{4}\right)^2=4$,

第一，第三，第四三式。　　$a^2=c^2$,

是卽必要之條件。

注意　依問題 I (第 32 節) 別解之方法亦可。

18. 與前問同解。

19. 令題式$=(\mathrm{A}x+\mathrm{B})^2$ 則 $\mathrm{A}^2=3m$,　$2\mathrm{AB}=6(m-2)$,　$\mathrm{B}^2=1$.

由此消去 AB，得方程式　$3m^2-13m+12=0$.

依此方程式解之，$m=3$，或 $m=\frac{4}{3}$.

20. 題式$=(x\sqrt{a}+y\sqrt{b}+z\sqrt{c})^2$ 就係數比較之。

得 $f=\sqrt{bc}$, $g=\sqrt{ca}$, $h=\sqrt{ab}$　$\therefore$　$gh=af$, $hf=bg$,

$fg=ch$.　是卽所求之條件。

21. 題式$=(Mx+N)^3$ 則 $M^3=\mathrm{A}$,　$3M^2N=b$,　$3MN^2=c$.

$N^3=d$.　由前三式，得 $b^2=3ac$.　由後三式，得 $c^2=3bd$.

第三章　諸種之指數

問 1. (一)　$\sqrt{a}\,z$.　(二)　$2\sqrt[n]{a}$.　(三)　$3\sqrt[m]{y^2}$.　(四)　$\sqrt{x^{n+1}}$.

(五)　$4\sqrt[4]{a^3}$.　(六)　$\sqrt[m-n]{a^{m+n}}$.

問 2. (一) $3^{\frac{1}{2}}$. (二) $x^{\frac{4}{7}}$. (三) $(x+y)^{\frac{5}{2}}$. (四) $c^{\frac{n-1}{4}}$.

問 3. (一) $16^{\frac{6}{8}}=16^{\frac{3}{4}}=(\sqrt[4]{16})^3=8$. (二) 25.

(三) 9. (四) 0.0016.

(五) $36^{\frac{3}{2}}=216$. (六) 7.59375.

(七) 2. (八) 0.1.

(九) $\frac{81}{625}$. (十) $7\frac{9}{16}$.

(十一) 0.04.

問 4. 見第 34 節.

問 5. (一) $\frac{5}{a^{\frac{2}{3}}}$. (二) $\frac{2y^3}{x^2}$. (三) a^3.

(四) $\frac{x^{\frac{1}{2}-2}}{7}$. (五) $\frac{3b^4x^2y^2}{8a^3}$. (六) $2y^{\frac{n}{2}}$.

(七) $\frac{1}{4}x^{\frac{n}{5}}$. (八) b^n. (九) $\frac{1}{m^n}$.

(十) $\frac{1}{x^2y^{n-3}}$. (十一) $\frac{b^q}{a^p}$. (十二) $\frac{c^2x^3}{2ay^2}$.

問 6. (一) 0.03125. (二) 0.25. (三) 625.

(四) 10. (五) 8. (六) 0.16.

問 7. $\frac{y^3}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{\sqrt{x}}{2y^3}$.

問 8. (一) $\frac{6}{x^{\frac{1}{3}}}$.　(二) $\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2}$.　(三) $x^{\frac{5}{4}}$.

(四) $\frac{a^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$.　(五) $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}$.　(六) $\frac{1}{a^2}$.

問 9. (一) $\frac{3}{\sqrt[6]{a^5}}$.　(二) $\frac{15}{\sqrt[3]{a^4}}$.　(三) $\frac{1}{\sqrt[6]{a^5}}$.

(四) $\sqrt[5]{a^x}$.　(五) $\sqrt[6]{a^n}$.

問 10. (一) $16ab^4$.　(二) $\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}}$.　(三) $\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$.

(四) $a+b$.　(五) $(a+b)^2$.　(六) $b^{\frac{7}{6}}$.

(七) $\frac{1}{x^{\frac{1}{8}}}$.　(八) $c^{\frac{5}{2}}$.

問 11. (一) $x-25$.　(二) $4x^{\frac{2}{3}}+16x^{\frac{1}{3}}+16-9x^{-\frac{2}{3}}$.

(三) $n-1$.　(四) $a+b$.

(五) $4a^{\frac{8}{5}}-8a^{\frac{4}{5}}-5+10a^{-\frac{4}{5}}+3a^{-\frac{8}{5}}$.

問 12. (一) $x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{7}{6}}+x^{\frac{2}{3}}-4x^{\frac{1}{2}}-4+4x^{-\frac{2}{3}}$.

(二) e^x-e^{-x}.

(三) $2(1+e^{-2x})$.

(四) $x^{\frac{1}{3}}+4x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{24}}+6x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{1}{12}}+4x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{6}}$.

問 13. (一) $a^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}+a^{\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{2}}$.

(二) $a^{-\frac{2}{3}}+a^{-\frac{1}{2}}+1$.

(三) $x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}-z^{\frac{1}{2}}$.

(四) $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{2}{3}}-c^{\frac{1}{3}}$.

(五) $a^{\frac{1}{4}}+a^{\frac{1}{8}}b^{\frac{1}{8}}+b^{\frac{1}{4}}$.

(六) $2x^{\frac{1}{4}}-3x^{-\frac{1}{12}}-x^{-\frac{5}{12}}$.

問 14. (一) $x^{\frac{1}{6}}+2x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{5}{6}}$.　　(二) $2x^{\frac{3}{4}}-3y^{\frac{1}{4}}+4x^{-\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{2}}$.

問 15. (一) $x-3x^{-1}$.　　(二) $a^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$.

練習問題 III

1. (一) $\dfrac{b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{2}{3}}}{a}$.　　(二) $\dfrac{1}{a^5}$.　　(三) $\dfrac{a}{c}$.

(四) 指數 $=pq-pr+qr-pq+pr-qr=0$.　答. 1.

(五) 1.　　(六) 1.

(七) 指數

$$=\frac{(p-q)(q-r)(r-p)+pq(p-q)+qr(q-r)+rp(r-p)}{pqr}$$

$$=\frac{(p-q)(q-r)(r-p)-(p-q)(q-r)(r-p)}{pqr}=0$$ 答 1.

(八) $a^{4n(p-q)}$.　(九) 1.　(十) x^b.　(十一) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{mn}$.

(三) $\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2p}{p-q}}+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\right\}$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2(p-q)}{p-q}}+1\right\}$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\left\{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{2}+1\right\}$$

$$=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{2q}{p-q}}\times\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}.$$

$$\therefore\ \text{題式}=\frac{(a-b)(a+b)}{a^2+b^2}\times\frac{(a-b)^{\frac{p+q}{p-q}}}{(a+b)^{\frac{p+q}{q-p}}}\times\frac{(a+b)^{\frac{2q}{p-q}}}{(a-b)^{\frac{2q}{p-q}}}$$

$$\times\frac{2(a^2+b^2)}{(a-b)^2}=2.$$

3. 兩邊皆等於 $x^{\frac{2}{n(n+1)(n+2)}}$

4. (一) $81^{-\frac{3}{2}}=9^{-3}$. $16^{\frac{7}{4}}=4^{\frac{7}{2}}$ 依此計算。　答 $\frac{9}{16}$.

(二) 4.　(三) 25.　(四) $\frac{1}{8}$.　(五) 27.

5. (一) x^2+x+1. (二) $x^{\frac{4}{3}}-1+2x^{-\frac{2}{3}}-x^{-\frac{4}{3}}$. (三) $x^{-\frac{1}{2}}+y$.

(四) $x^{\frac{4}{n}}+x^{\frac{7}{2n}}y^{\frac{1}{2n}}-2x^{\frac{3}{n}}y^{\frac{1}{n}}-3x^{\frac{5}{2n}}y^{\frac{3}{2n}}+3x^{\frac{3}{2n}}y^{\frac{5}{2n}}$

$$+2x^{\frac{1}{n}}y^{\frac{3}{n}}-x^{\frac{1}{2n}}y^{\frac{7}{2n}}-y^{\frac{4}{n}}.$$

(五) $x^{-\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}$.

6. (一) 被除數$=x(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})+y(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})=(x+y)(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}})$.

答 $x+y$.

(二) $(x-a)\div 4ax$.

(三) $1-2x-2x^{\frac{3}{2}}$.

(四) $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}+c^{\frac{2}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}$.

(五) 題式$=\dfrac{x^{\frac{14}{3}}+y^{\frac{28}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}}\div\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{5}}}{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}}=\dfrac{x^{\frac{14}{3}}+y^{\frac{28}{5}}}{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{4}{5}}}\times\dfrac{x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{5}}}{x^{\frac{7}{3}}y^{\frac{14}{5}}}$

$=(x^{\frac{12}{3}}-x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{4}{5}}+x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{8}{5}}-x^{\frac{6}{3}}y^{\frac{12}{5}}+x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{16}{5}}-x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{20}{5}}$

$+y^{\frac{24}{5}})x^{-\frac{6}{3}}y^{-\frac{12}{5}}$.

$=x^2y^{-\frac{12}{5}}+x^{\frac{4}{3}}y^{-\frac{8}{5}}+x^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{4}{5}}-1+x^{-\frac{2}{3}}y^{\frac{4}{5}}-x^{-\frac{4}{3}}y^{\frac{8}{5}}$

$+x^{-2}y^{\frac{12}{5}}$.

7. (一) $\sqrt{(a+b)-4+4(a+b)^{-1}}=(a+b)^{\frac{1}{2}}-2(a+b)^{-\frac{1}{2}}$.

(二) $x^{\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}$. (三) $a^{-\frac{8}{5}}a^{\frac{7}{5}}-x^{\frac{4}{5}}-a^{\frac{4}{5}}$.

8. $x+1+x^{-1}$.

9. (一) $\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{b}$. (二) $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{(a-b)(x-a)}$. (三) $x^{\frac{2}{3}}+x$.

(四) 被除數$=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{2}}+7)}{(x^{\frac{1}{2}}-7)(x^{\frac{1}{2}}+2)}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+2}$. 答 1.

(五) $a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})$. (六) $\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-2}{x^{\frac{2}{3}}+2}$. (七) $7x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+1$.

(八) 題式$=\{(a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}})^3+(a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})^3+(-1)^3-3(a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}})$

$(a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}})(-1)\}\div\{a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+(-1)\}$

$=a^{\frac{2}{3}}x^{-\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{-\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$ 或直接除之。

(九) $\dfrac{a^{-1}-c^{-1}}{a^{-2}+a^{-1}c^{-1}+c^{-2}}$.

(㈩) 題式$=\dfrac{(a^2-1)(1-b^{-2})}{(a+1)(1+b^{-1})}=a-ab^{-1}-1+b^{-1}$.

(二) $\dfrac{a^2+b^2-a^{-2}-b^{-2}}{a^2b^2-a^{-2}b^{-2}}=\dfrac{a^2b^2(a^2+b^2-a^{-2}b^{-2})}{a^2b^2(a^2b^2-a^{-2}b^{-2})}$

$=\dfrac{(a^2b^2-1)(a^2+b^2)}{a^4b^4-1}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}$

又 $\dfrac{(a-a^{-1})(b-b^{-1})}{ab+a^{-1}b^{-1}}=\dfrac{(a^2-1)(b^2-1)}{a^2b^2+1}$.

$\therefore$ 題式$=\dfrac{a^2+b^2+(a^2-1)(b^2-1)}{a^2b^2+1}=1$

或第二分數以 $ab-a^{-1}b^{-1}$ 乘其分母子。

(三) $\dfrac{8}{1-x^2}$.

10. (二) 左邊$=\dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}-\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-1}{x^{\frac{1}{3}}+1}=(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1)-(x^{\frac{1}{3}}-1)$

$=x^{\frac{2}{3}}+2$.

(三) 左邊$=\dfrac{(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})(a+x)}{(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}})(x^2+3ax+a^2)}$.

11. 分母子以 $x^{\frac{2}{3}}(1+\sqrt{1-x^3})^{\frac{2}{3}}$ 乘之。

題式$=\dfrac{x^{\frac12}(1+\sqrt{1-x^3})}{\dfrac{x^3(1+\sqrt{1-x^3})^0}{\sqrt{1-x^3}}+x^0(1+\sqrt{1-x^3})}$

$$=\frac{x^{\frac12}(1+\sqrt{1-x^3})}{\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^3}}+(1+\sqrt{1-x^3})}$$

$$=\frac{x^{\frac12}(1+\sqrt{1-x^3})}{\dfrac{1+\sqrt{1-x^3}}{\sqrt{1-x^3}}}=x^{\frac12}\sqrt{1-x^3}=\sqrt{x(1-x^3)}.$$

12. 題式$=\dfrac{1}{(4x^3-3x^2)^2}-(1-x^2)\left\{\dfrac{3x^2-(1-x^2)}{x^3-3x(1-x^2)}\right\}^2=1.$

13. $x^{\frac13}+y^{\frac13}=-z^{\frac13}$ 兩邊各作三乘方則

$$x+y+3x^{\frac13}y^{\frac13}(x^{\frac13}+y^{\frac13})=-z.$$

$$\therefore\ x+y+z=-3x^{\frac13}y^{\frac13}(x^{\frac13}+y^{\frac13})=3x^{\frac13}y^{\frac13}z^{\frac13}.$$

$$\therefore\ (x+y+z)^3=27xyz.$$

14. $a^b=b^a.\ \ \therefore\ a=b^{\frac{a}{b}},$

因之 $\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{b^{\frac{a}{b}}}=\dfrac{a^{\frac{a}{b}}}{a}\ \ \therefore\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}=a^{\frac{a}{b}-1}.$

15. 左邊$=\dfrac{a^2-ac+c^2}{\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{ac}+\dfrac{1}{c^2}}=a^2c^2=b^4.$

16. (一) $\left(x^{\frac34}\right)^2+2\left(x^{\frac34}\right)+1=0\ \ \therefore\ x^{\frac34}-1=0\ \ \therefore\ x=1.$

(二) $(x^{\frac15}-3)\ (x^{\frac15}+2)=0.\ \ \therefore\ x^{\frac15}-3=0$ 又 $x^{\frac15}+2=0.$

(三)　$x=4$ 或 $x=\frac{1}{4}$.

(四)　$4^x=(2^x)^2$,　$\therefore$　$x=0$ 或 $x=3$.

第四章　無理數

問 1.　(一)　$\sqrt{6}$.　　(二)　$\sqrt{2}$.　　(三)　9.　　(四)　$\sqrt[3]{10}$.

(五)　$\sqrt[3]{2x^2y^4z^5}$.　　(六)　$\sqrt[n]{5ab^2c^3}$.

問 2.　(一)　$3\sqrt{2}$.　　(二)　$14\sqrt{3}$.

(三)　$6\sqrt[3]{2}$.　　(四)　$75\sqrt{3}$.

(五)　$12\sqrt[3]{50}$.　　(六)　$5\sqrt[4]{5}$.

(七)　$3ab^2\sqrt{3ab}$.　　(八)　$2c\sqrt[6]{2a^2b^4c^2}$.

(九)　$c\sqrt[3]{ab^2}$.　　(十)　$x\sqrt{y^2-x^2}$.

(十一)　$(x+y)\sqrt{x-y}$.　　(十二)　$(q-3)\sqrt{p}$.

問 3.　(一)　$\frac{1}{2}\sqrt{6}$.　　(二)　$\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$.

(三)　$\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$.　　(四)　$\frac{1}{2}\sqrt[3]{6}$.

(五)　$\frac{1}{a-b}\sqrt{a^2-b^2}$.　　(六)　$\frac{1}{4ab}\sqrt[3]{2a^2b(a^3+b^3)}$.

(七)　$\frac{\sqrt[3]{3(x^3+1)}}{3(x+1)}$.　　(八)　$\frac{\sqrt[3]{b^3-a^3}}{b}$.

(九)　$\frac{c\sqrt[3]{bc^n}}{a^nb^{n+1}}$.

問 4. (一) $\sqrt{980}$.　　(二) $\sqrt[3]{750}$.

(三) $\sqrt{27a^3}$.　　(四) $\sqrt{\frac{14}{11}}$.

(五) $\sqrt[4]{3ax}$.　　(六) $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

(七) $\sqrt[5]{ab}$.　　(八) $\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$.

(九) $\sqrt{\frac{x+4}{x-3}}$.　　(十) $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

問 5. (一) $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{50}=5\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

(二) $\sqrt[3]{24}=2\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{192}=4\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[3]{\frac{8}{9}}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$.

(三) 二式為 $(x-y)\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $xy\sqrt{x^2+xy+y^2}$

問 6. (一) $10\sqrt{6}$.　　(二) $-12\sqrt{11}$.

(三) $10\sqrt{3}$.　　(四) 0.

(五) 0.

問 7. (一) $\frac{51}{10}\sqrt{5}+3\sqrt{7}$.　　(二) $6\sqrt{7}-\sqrt{6}$.

(三) $\frac{5}{6}\sqrt{3}$.　　(四) $\frac{5}{2}\sqrt[3]{4}$.

(五) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$.

問 8. (一) 0.　　(二) $5\sqrt[3]{2a+3}$.

(三) $-2c\sqrt{a-c}$.　　(四) $\frac{a+b+c}{abc}\sqrt{abc}$.

(五) $(2a+3)\sqrt{ax}$. (六) $-2\sqrt{2a}$.

問 9. (一) $\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[6]{9}$.

(二) $\sqrt[12]{256}$, $\sqrt[12]{216}$.

(三) $\sqrt[4]{81}$, $\sqrt[4]{\ }$.

(四) $\sqrt[20]{19807}$, $\sqrt[20]{625}$, $\sqrt[20]{14400}$.

(五) $\sqrt[30]{243}$, $\sqrt[30]{27}$, $\sqrt[30]{9}$.

(六) $\sqrt[mn]{a^{n2}}$, $\sqrt[mn]{a^{m2}}$.

(七) $\sqrt[12]{a^8}$, $\sqrt[12]{8a^9b^6}$, $\sqrt[12]{49b^{10}}$.

問 10. (一) $3\sqrt{2}>2\sqrt[3]{6}$.

(二) $\sqrt{3}>\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{5}$.

(三) $\sqrt[15]{16}>\sqrt[6]{5}>\sqrt[10]{6}$.

(四) $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}>\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$. $\therefore$ $\sqrt[n+1]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^n}$.

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\sqrt[n(n+1)]{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}$. 然 $\frac{a}{b}<1$.

故 $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{a}{b}\right)<\left(\frac{a}{b}\right)^n$.

問 11. (一) 10. (二) $180\sqrt{2}$. (三) 30.

(四) $12\sqrt[3]{5}$. (五) $30\sqrt[3]{3}$. (六) $\frac{7}{4}\sqrt{15}$.

(七) $2\sqrt[12]{2}$. (八) $a^2b^3c^6\sqrt{ab^5c}$. (九) $6\sqrt[n]{a^5}$.

問 12. (一) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$.　(二) $\sqrt{5}$.

(三) 5.　(四) $3\sqrt{3}$.

(五) $\sqrt[3]{a^2b^2}$.　(六) 化除數爲單項式 $\frac{1}{10}$.

(七) $\frac{2}{25}$.　(八) $\frac{1}{3}\sqrt[3]{2}$.

(九) $\frac{1}{b}\sqrt[18]{ab^{17}}$.　(十) $\frac{a-b}{x}$.

問 13. (一) $\frac{1}{10}\sqrt{2}$.　(二) $\sqrt[3]{4}$.

(三) $\frac{1}{ab}\sqrt[3]{b^2}$.

問 14. (一) $12\sqrt{5}=26.8328$.　(二) $\frac{1}{3}\sqrt{6}=0.8164$.

(三) $\frac{4}{27}\sqrt{3}.=).2566$.　(四) $\frac{25}{42}\sqrt{7}=1.5748$.

問 15. (一) $24\sqrt{3}$.　(二) $3\sqrt[3]{9}$.

(三) a^4.　(四) $2a^3bc^4\sqrt{bc}$.

(五) a^3b^9.　(六) $256\sqrt[15]{23338}$.

問 16. (一) $\sqrt[6]{a}$.　(二) $\sqrt[4]{2}$.

(三) $\sqrt[3]{4}$.　(四) $\sqrt[10]{ab^2c^7}\div c$.

(五) $\sqrt[4]{8}$.　(六) $\sqrt[12]{32}$.

(七) $\sqrt[n]{a}$.　(八) $\sqrt[4]{a^p}$.

(九) $\sqrt[3]{2}$.

問 17. (一) $6+3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$.

(二) $24x-120\sqrt{x}$.

(三) $4+18\sqrt{2}$. 先將被乘數簡之。

(四) $-5\sqrt[3]{6}$.

(五) $7\sqrt{3}+4\sqrt{10}$.

(六) 34.

(七) $27-6\sqrt{15}+6\sqrt{10}+8\sqrt{6}$.

(八) $a-b$.

(九) 7.

問 18. (一) $63-18x\sqrt{14-4x^2}$. (二) 34.

問 19. (一) $2\sqrt{5}+7>\sqrt{5}+\sqrt{23}$.

(二) $\sqrt{10}+\sqrt{7}<\sqrt{19}+\sqrt{3}$.

(三) $\sqrt{5}+\sqrt{14}>\sqrt{3}+3\sqrt{2}$.

問 20. (一) 172. (二) $2p-q$. (三) 8.

(四) 5. (五) 3. (六) 6.

問 21. (一) $2+\sqrt{6}$. (二) $\frac{1}{5}\sqrt{5}$.

問 22. (一) $14+6\sqrt{6}$. (二) $\frac{1}{a^2}(x^2+\sqrt{x^4-a^4})$.

問 23. (一) $\sqrt{2}=1.414$.

(二) $-2(1+\sqrt{2}+\sqrt{5})=-9.300$.

問 24.　(一)　$\frac{1}{3}(5\sqrt{3}-6)$.

(二)　$\sqrt{245}=7\sqrt{5}$,　$\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.　　答　50.

(三)　$4+\sqrt{15}$.

(四)　$4a^2-2$.

問 25.　(一)　分母$=(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{3})$

答　$\frac{1}{2}(1-\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

(二)　$\frac{3}{10}(\sqrt{6}-\sqrt{21}+\sqrt{10}-\sqrt{35})$,

問 26.　(一)　$1+\frac{3}{2}\sqrt{2}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

(二)　$1+\frac{5}{6}\sqrt{6}-\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{3}\sqrt{15}$.

(三)　$(31\sqrt{10}-39\sqrt{6}-19\sqrt{35}+20\sqrt{21})\div 120$.

問 27.　(一)　$8(\sqrt[3]{3}-1)$.　(二)　分母$=\sqrt[3]{2}(1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9})$,

$\therefore$　題式$=\frac{\sqrt[3]{4}}{4}\left(\sqrt[3]{3}-1\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{4}\right)$.

(三)　$\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{15}+\sqrt[3]{9}$.

問 28.　(一)　$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^5+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^4\left(a\sqrt[6]{y^5}\right)+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^3\left(a\sqrt[6]{y^5}\right)^2$

$+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2\left(a\sqrt[6]{y^5}\right)^3+\left(\sqrt[3]{x^2}\right)\left(a\sqrt[6]{y^5}\right)^4$

$+\left(a\sqrt[6]{y^5}\right)^5$

$=\sqrt[3]{x^{10}}+a\sqrt[3]{x^8}\sqrt[6]{y^5}+a^2x^2\sqrt[3]{x^5}+a^3\sqrt[3]{x^4}\sqrt{y^5}$

$+a^4\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{y^{10}}+a^5\sqrt[6]{y^{25}}.$

(二)　$\sqrt{a^5}-a^2\sqrt[3]{b^4}+\sqrt{a^3}\sqrt[3]{b^8}-ab^4+\sqrt{a}\sqrt[3]{b^{16}}-\sqrt[3]{b^{20}}.$

(三)　$2^4-2^3\sqrt[5]{3}+2^2\sqrt[5]{3^2}-2\sqrt[5]{3^3}+\sqrt[5]{3^4}.$

(四)　$a^{\frac{10}{3}}x^{\frac{25}{6}}-a^{\frac{8}{3}}x^{\frac{10}{3}}y^{\frac{1}{2}}+a^2x^{\frac{5}{2}}y-a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{5}{6}}y$

$-y^{\frac{5}{2}}.$

問 29.　(一)　$\sqrt{2}-1.$　　　(二)　$3+\sqrt{7}.$

(三)　$\sqrt{6}-\sqrt{5}.$　　　(四)　$\sqrt{15}+\sqrt{11}.$

(五)　$3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$　　　(六)　$2\sqrt{19}-5\sqrt{3}.$

(七)　$\frac{\sqrt{5}}{2}-1.$　　　(八)　$\frac{1}{3}(6-\sqrt{3}).$

(九)　$\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}.$　　但　$a>x.$

(十)　$\sqrt{a}+\sqrt{b-a}.$

(十一)　題式之平方根$=\sqrt{\{(a-b)^2-4(a-b)\sqrt{ab}+4ab\}}$

$=a-b-2\sqrt{ab}.$

問 30.　(一)　$\sqrt{5}-1.$　　　(二)　$\sqrt{2}+1.$

問 31.　(一)　$\sqrt[4]{3}(\sqrt{2}+1)=\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{3}.$

(二)　$\frac{1}{2}\left(\sqrt[4]{700}-\sqrt[4]{28}\right).$　　(三)　$\sqrt[4]{3}(3+\sqrt{3}).$

問 32.　(一)　分母$=\sqrt{3}+\sqrt{2}.$　　答　$\sqrt{3}-\sqrt{2}.$

(二)　$\sqrt{3}+\sqrt{5}.$　　　(三)　$\sqrt{3}.$

(四)　$\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{3}\right).$

(五)　$\sqrt{\left(9+4\sqrt{4+2\sqrt{3}}\right)}=\sqrt{\left\{9+4(1+\sqrt{3})\right\}}$

$=\sqrt{(9+4+4\sqrt{3})}=\sqrt{(13+4\sqrt{3})}=2\sqrt{3}+1.$

(六)　$\sqrt{3}+1.$　　(七)　$6\sqrt{2}-2\sqrt{5}.$

題 33.　(一)　$1+\sqrt{2}+\sqrt{5}.$　　(二)　$1+\sqrt{2}+\sqrt{3}.$

(三)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$　　(四)　$1+\sqrt{\frac{5}{2}}-\sqrt{\frac{3}{2}}.$

(五)　$2\sqrt{3}+2-\sqrt{5}.$　　(六)　$2+\sqrt{a}-\sqrt{3b}.$

練 習 問 題 IV

1.　(一)　$ab^2c^3a^5d\sqrt[5]{25d}.$　　(二)　$a^nb^{n+1}c^{2n}\sqrt{ab^n}.$

(三)　$3ac\sqrt{2ac^2-3a^2c}.$　　(四)　$(x-2)\sqrt{x^2+2x-3}.$

(五)　$(ax-b)\frac{\sqrt{b}}{b^2}.$

2.　$7\sqrt{3}-\sqrt{2}=10.697.$

3.　(一)　$9\sqrt{2}.$　　(二)　$11\sqrt[3]{3}.$　　(三)　$\frac{\sqrt{x^2-y^2}}{x^2-y^2}.$

4.　(一)　24.

(二)　$(x^4-7x^2+12)+(2x^2-8)\sqrt{2}+(6-2x^2)\sqrt{3}-4\sqrt{6}.$

5.　(一)　$16+9\sqrt{3}.$

6. $n(n-1.$

7. $\sqrt[3]{5}+1<2\sqrt{2}$. 先兩邊各作三乘方，再作二乘方，依此比較。

8. (一) $\sqrt[7]{a^2}$. (二) $\sqrt[3]{a}\sqrt{b}$.

(三) 題式$=\sqrt{x^3}(1+x+x^3)$ 故其有理化因數爲 $\sqrt{x}$.

9. $\dfrac{x-2\sqrt[4]{x^3y}+2\sqrt{xy}-2\sqrt[4]{xy^3}+y}{x-y}$.

10. (一) $\dfrac{17}{7}$. (二) 0. (三) 14.

(四) $(7-2\sqrt{5})(31+13\sqrt{5})=29(3+\sqrt{5})$.

$(6-2\sqrt{7})(11+4\sqrt{7})=2(5+\sqrt{7})$. 答 $\dfrac{29}{2}$.

11. 分母子以 $1+\sqrt{3}$ 除之則題式$=\dfrac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})(\sqrt{5}-2)}{5-\sqrt{5}}$

$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}=\frac{\sqrt{15}}{5}=0.77459.$$

12. 先簡其分母。 答 -5.71.

13. 分母$=\sqrt{10}+2\sqrt{5}+2\sqrt{10}-\sqrt{5}-4\sqrt{5}$

$$=3(\sqrt{10}-\sqrt{5}=3\sqrt{5}(\sqrt{2}-1).$$

14. 10.

15. $\frac{1}{2}b$.

16. 分母$=(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{7})$, 答 $\sqrt{10}-\sqrt{15}-\sqrt{14}$

$+\sqrt{21}$.

17. (一) $\frac{3}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{2}+\frac{3}{5}\sqrt{5}-\frac{1}{4}\sqrt{6}+\frac{1}{20}\sqrt{10}-\frac{1}{10}\sqrt{15}$

$-\frac{7}{20}\sqrt{30}$.

(二) 分母$=-(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})$ 先以 $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

$+2\sqrt{2}$ 乘之。答$-\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{6}+\frac{2}{5}\sqrt{10}+\frac{8}{15}\sqrt{15}\right)$.

18. 左邊分母求有理化。

19. (一) $\frac{1}{4}(3\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+3)$ (二) $3(\sqrt[3]{3}+1)$.

(三) 5. (四) $2(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$.

20. $x=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ 故 $x^2-1=\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-1=\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$.

$\therefore\ \sqrt{\left(x^2-1\right)}=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$. 依同理,

$\sqrt{\left(y^2-1\right)}=\frac{1}{2}\left(b-\frac{1}{b}\right)$.

$\therefore$ 題式$=2\left\{\frac{1}{4}\left(a+\frac{1}{a}\right)\times\left(b+\frac{1}{b}\right)-\frac{1}{4}\left(a-\frac{1}{a}\right)\times\left(b-\frac{1}{b}\right)\right\}$

$=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\right\}=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=\frac{a^2+b^2}{ab}$.

21. $\sqrt[3]{3^2}-3\sqrt[4]{5}+\sqrt{3}\sqrt{5}-\sqrt[4]{5^3}$.

22. (一) $\frac{a^3+a^{\frac{5}{2}}b^{\frac{4}{3}}+a^2b^2+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{8}{3}}+ab^{\frac{10}{3}}+a^{\frac{1}{2}}b^4}{a^3-b^4}$.

(二) $\frac{a^4+a^3b^{\frac{1}{5}}+a^2b^{\frac{2}{5}}+ab^{\frac{3}{5}}+b^{\frac{4}{5}}}{a^5-b}$.

23. (一) 52.　　(二) $\left(p^2-\frac{1}{2}\right)\sqrt{p^2+1}.$

24. (一) $\frac{1}{2}\sqrt{10}-\frac{1}{5}\sqrt{15}.$　　(二) $\sqrt{7}+\sqrt{14}.$

(三) $2-\sqrt{3}.$　　(四) $\sqrt[4]{2}(1+\sqrt{3}).$

(五) $\sqrt{\frac{1}{2}(a+b-c)}+\sqrt{\frac{1}{2}(a-b+c)}.$

(六) $\sqrt{p}+\sqrt{p-1}.$

(七) $\sqrt{\frac{2x^2+x+2}{2}}-\sqrt{\frac{x}{2}}.$

(八) $\sqrt{\left\{\frac{(a+c)(b+c)}{2}\right\}}+\sqrt{\left\{\frac{(a-b)(b-c)}{2}\right\}}.$

(九) 題式$=1+\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-c^2}}\left(1+\sqrt{1-c^2}\right)$

答　$\frac{1}{\sqrt[4]{1-c^2}}\left\{\sqrt{\frac{1+c}{2}}+\sqrt{\frac{1+c}{2}}\right\}.$

25. (一) $\sqrt{\{(\sqrt{7}-\sqrt{5})(11\sqrt{7}+13\sqrt{5})\}}=\sqrt{(12+2\sqrt{35})}$

$=\sqrt{7}+\sqrt{5}.$

(二) $(5+7\sqrt{2})\times\frac{29+47\sqrt{2}}{73}=11+6\sqrt{2},$

$\sqrt{11+6\sqrt{2}}=3+\sqrt{2}.$

26. (一) $2-\sqrt{3}-3\sqrt{2}.$　　(二) $1+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$

(三) $6+\sqrt{5}+\sqrt{7}.$

27. $\sqrt{2}+1.$

28. $\frac{1}{2}(5+\sqrt{21})=4.79.$

29. (一) $\sqrt{6}+\sqrt{2}=3.863.$ (二) 3.

30. 題式$=\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{35}+\sqrt{10}-\sqrt{21}-\sqrt{6}\right)$.

31. 兩邊各自乘。

32. (一) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{(2+\sqrt{2})}}=\dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2+\sqrt{(4+2\sqrt{3})}}$

$$=\frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{3+\sqrt{3}}.$$

(二) 題式$=\dfrac{6-5}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{5-2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}-\dfrac{6-2}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$

$$=\sqrt{6}+\sqrt{5}-(\sqrt{5}-\sqrt{2})-(\sqrt{6}-\sqrt{2})=0.$$

33. 兩邊各自乘，得方程式 $5x^2+7y^2=73$, $xy=6$.

$$\left.\begin{matrix}x=3\\y=2\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=-3\\y=-2\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=-\sqrt{\frac{28}{5}}\\y=-\sqrt{\frac{45}{7}}\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=\sqrt{\frac{28}{5}}\\y=\sqrt{\frac{45}{7}}\end{matrix}\right\}$$

凡四組之根，然第二，第四二組之根，將使所設之式右邊爲負故不採。

34. 題式$=\dfrac{(\sqrt{4+\sqrt{15}})^3+(\sqrt{4-\sqrt{15}})^3}{(\sqrt{6+\sqrt{35}})^3-(\sqrt{6-\sqrt{35}})^3}\times\dfrac{(\sqrt{2})^3}{(\sqrt{2})^3}$

$$=\frac{(\sqrt{8+2\sqrt{15}})^3+(\sqrt{8-2\sqrt{25}})^3}{(\sqrt{12-2\sqrt{35}})^3-(\sqrt{12-2\sqrt{35}})^3}$$

$$=\frac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})^3+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})^3+(\sqrt{7}-\sqrt{5})^3}=\frac{28\sqrt{5}}{52\sqrt{5}}=\frac{7}{13}.\quad 答.$$

35. 前二項之和$=\frac{2(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{2\sqrt{6}+4}$. 後二項之和$=\frac{2}{2\sqrt{6}-4}$.

36. 左邊$=\frac{(x+1)^2(x-2)+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{(x-1)^2(x+2)+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}$

$$=\frac{(x+1)\{(x+1)(x-2)+(x-1)\sqrt{x^2-4}\}}{(x-1)\{(x-1)(x+2)+(x+1)\sqrt{x^2-4}\}}$$

以 $(x-1)(x+2)-(x+1)\sqrt{x^2-4}$ 乘其分子母，則分子爲 $(x+1)[(x-1)(x+2)^2-(x+1)^2(x-2)]\sqrt{x^2-4}$ 而分母爲 $(x-1)(x+2)[(x-1)^2(x+2)-(x+1)^2(x-2)]$。

37. $\sqrt{(1+x)}=\sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$,

$\sqrt{(1-x)}=\sqrt{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 答 $\frac{5\sqrt{3}-6}{3}$.

38. 公式 $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$.

$$x^3=a+\sqrt{(a^2-b^3)}+a-\sqrt{(a^2-b^3)}+3\sqrt[3]{\{(a+\sqrt{a^2-b^3})(a-\sqrt{a^2-b^3})\}}\times[\sqrt[3]{\{a+\sqrt{(a^2-b^3)}\}}+\sqrt[3]{\{a-\sqrt{(a^2-b^3)}\}}]$$

$$=2a+3\sqrt[3]{a^2-a^2+b^3}=2a+3b.$$

第五章 虛數及複素數

問 1. 見第 58 節及第 59 節。

問 2. $x>3$. $x>\frac{7}{2}$. $x<-\frac{4}{3}$.

問 3. $3i$, $\frac{2}{3}i$, $0.5i$, $\frac{9}{4}i$.

問 4. (一) $10i$.　　(二) $4i$.

(三) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})i$.　　(四) 0.

(五) $2ai$.

問 5. (一) $\sqrt{10}i$.　　(二) -12.　　(三) -6.

(四) $-15i$.　　(五) -4.

問 6. (一) 2.　　(二) $\sqrt{3}i$.　　(三) $-5i$.

(四) $-i$.　　(五) $-\frac{1}{2}i$.

問 7. (一) $i^{12}=i^{4\times3}=1$.　(二) $-i$.　　(三) -1.

(四) i.　　(五) -3.

問 8. (一) $-5-3i$.　　(二) $-4+5i$.

問 9. (一) $17+7i$.　　(二) 7.

(三) 11.　　(四) $-\sqrt{2}+6i$.

問 10. (一) $-24+70i$.　　(二) -22.

(三) $-4\sqrt{3}i$.

問 11. (一) $1+i$.　　(二) $2-8i$.

(三) $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$　　(四) 10.

(五) $(1^3+i^3)\div(1+i)=1-i+i^2=1-i-1=-i$.

(六) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}i$.

問 12.　(一)　依第 67 節公式，$a=-3$, $b=4$ 則

$$\sqrt{-3+4i}=\sqrt{\left(\frac{-3+\sqrt{9+16}}{2}\right)}+\sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{9+16}}{2}\right)}i$$

$=1+2i$.　答.

(二)　依公式，$a=0$, $b=2$　答　$1+i$.

(三)　$2-\sqrt{5}\,i$.

練習問題 V.

1. (一)　ai.　　(二)　$\frac{34}{33}i$.　　(三)　$(1-3p)i$.

2. (一)　$2\sqrt{3}$　　(二)　$1125\sqrt{30}i$.　　(三)　$\frac{1}{7}+\frac{29}{14}i$.

(四)　16.　　(五)　x^2-x+1.

3. (一)　$-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}i$.　　(二)　$\frac{5}{11}-\frac{13\sqrt{2}}{11}i$.

4. 0.

5. 0.

6. 0.

8. $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4=-1$.

9. $\omega_1,=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.　$\omega_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 依各式之左邊計算可也。

10. 因 $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 爲 1 之立方根，

故 $x^4=x^3\times x=1\times x=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ 又 $x^3=1$.

$\therefore$ 題式$=2\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)-11-9\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)+4$

$=-7\left(\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)-7=7\left(\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$.

或直接計算亦可。

11. 括弧內之二數皆爲 1 之立方根。

令 $\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}=\omega_1$, $\dfrac{-1-\sqrt{-3}}{2}=\omega_2$

m 爲正整數， 若 $n=3m$.

則 $\omega_1^{3m}+\omega_2^{3m}=\{\omega_1^3\}^m+\{\omega_2^3\}^m=1^m+1^m=2$.

若 $n=3m+1$.

則 $\omega_1^{3m+1}+\omega_2^{3m+1}=\omega_1^{3m}\times\omega_1+\omega_2^{3m}\times\omega_2$

$=\omega_1+\omega_2=-1$. 〔參照第 9 問〕

又若 $n=3m+2$.

則 $\omega_1^{3m+2}+\omega_2^{3m+2}=\omega_1^{3m}\times\omega_1^2+\omega_2^{3m}\times\omega_2^2$

$=\omega_2+\omega_1=-1$. 〔參照第 9 問〕

12. (一) $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

故 $\omega x+\omega^2y$ 爲 $\omega^3x^3+\omega^6y^3=x^3+y^3$ 之因數。

又 $\omega^2x+\omega y$ 爲 $\omega^6x^3+\omega^3y^3=x^3+y^3$ 之因數。

$$\therefore\quad x^3+y^3=(x+y)(\omega x+\omega^2 y)(\omega^2 x+\omega y).$$

(二) 依公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab).$$

與 (一) 證明同。

13. 所設方程式之二虛根爲 $\alpha+\beta i$ 及 $\alpha-\beta i$ 之形,但 α, β 皆爲實數。

$$\therefore\quad ax^2+bx+c=a\{x-(\alpha+\beta i)\}\{x-(\alpha-\beta i)\}$$

$$=a\{(x-\alpha)-\beta i\}\{(x-\alpha)-\beta i\}$$

$$=a\{(x-\alpha)^2+\beta^2\}.$$

其 $(x-\alpha)^2+\beta^2$ 不關於 x 之値若何,因恆爲正者也。

故 ax^2+bx+c 之符號與 a 之符號同。

14. $\sqrt{-16}=4i$, 而 $\sqrt{4i}=\sqrt{2}(1+i)$. 答.

注意 $-\sqrt{4i}=-\sqrt{2}(1+i)$ 亦 -16 之四乘根之一。

又取 -16 之他平方根 $-4i$ 以求 $-4i$ 之平方根,

則得他二根爲 $\sqrt{2}(1-i)$ 及 $-\sqrt{2}(1-i)$.

15. (一) $3-4i$. (二) $(a+b)-(a-b)i$.

16. 解括弧,移項,

$$(x+2y)-yi=-2+4i.$$

$$\therefore\quad x+2y=-2,\quad -y=4.$$ 〔第 62 節〕

$$\therefore\quad y=-4,\quad x=6.$$

(完)