愛知社

新編 各科常識問答

改版本 ②

1933

上海新聲書局刊行

Sin Sun

三角法問答

I. 式之變形

(一) 銳角三角式之變形

及數值計算問題

(A) 摘 要

$$\left.\begin{aligned} \sin A \operatorname{cosec} A &= 1 \cdots (1) \\ \cos A \sec A &= 1 \cdots (2) \\ \tan A \cot A &= 1 \cdots (3) \end{aligned}\right\}(A) \text{ 又}\left\{\begin{aligned} \operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A} \\ \sec A &= \frac{1}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{1}{\tan A} \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \cdots\cdots (4) \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \cdots\cdots (5) \end{aligned}\right\}(B) \text{ 又}\left\{\begin{aligned} \tan A \cos A &= \sin A \\ \cot A \sin A &= \cos A \end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \cdots\cdots\cdots\cdots (6) \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \cdots\cdots\cdots (7) \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \cdots\cdots\cdots (8) \end{aligned}\right\}(C)$$

(B) 問題反解法

(1) $(\cos A + \sin A)^2 + (\cos A - \sin)^2$ 試簡單之

解： 原式 $=\cos^2 A+2\cos A\sin A+\sin^2 A+\cos^2 A$

$-2\cos A\sin A+\sin^2 A$

$=2(\cos^2 A+\sin^2 A)=2$

(2) 試變 $\sin^4 A+\cos^4 A$ 爲 $1-2\sin^2 A\cos^2 A$

解： $\sin^4 A+\cos^4 A=\sin^4 A+2\sin^2 A\cos^2 A+\cos^4 A$

$-2\sin^2 A\cos^2 A$

$=(\sin^2 A+\cos^2 A)^2-2\sin^2 A\cos^2 A$

$=1-2\sin^2 A\cos^2 A$

(3) 試簡單 $\dfrac{1}{1+\sin\theta}+\dfrac{1}{1-\sin\theta}$

解： 原式 $=\dfrac{1-\sin\theta \quad 1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

$$=\frac{2}{1-\sin\theta}=\frac{2}{\cos^2\theta}=2\sec^2\theta$$

(4) $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha$ 試簡單之

解： 原式 $=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha\operatorname{cosec}^2\alpha$$

(5) 試將 $(\tan A+\sec A)^2$ 以 $\sin A$ 項表之

解： $(\tan A+\sec A)^2=\left(\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{1}{\cos A}\right)^2=\left(\dfrac{\sin A+1}{\cos A}\right)^2$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}=\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}$$

$$=\frac{(1+\sin A)^2}{(1+\sin A)(1-\sin A)}=\frac{1+\sin A}{1-\sin A}$$

(6) $\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\cot\alpha+\cot\beta}$試簡單之

解： 原式$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{1}{\tan\alpha}+\dfrac{1}{\tan\beta}}=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta}}=\tan\alpha\tan B$

(7) 試証$(1+\sin A+\cos A)^2=2(1+\sin A)(1+\cos A)$

解： 左邊$=[(1+\sin A)+\cos A]^2$

$$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)\cos A+\cos^2 A$$

$$=(1+\sin A)^2+2(1+\sin A)+1-\sin^2 A$$

$$=(1+\sin A)(1+\sin A+2\cos A+1-\sin A)$$

$$=2(1+\sin A)(1+\cos A)$$

(8) $\tan\theta\ \dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\ \dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$ 試證明之

解： 左邊$=\cot\theta\tan^2\theta\ \dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$$= \cot\theta \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$= \cot\theta \frac{1-\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} \cdot \frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \cot\theta \cdot \frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

(別解1) $\dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta} \cdot \dfrac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta} \cdot \dfrac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta} \cdot \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta} \cdot \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta} \cot^2\theta$$

∴ 左邊$=\tan\theta\cot^2\theta \dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta} = \cot\theta \dfrac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$

(別解2) 本式去分母

$\tan\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$

$\qquad = \cot\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) \cdots\cdots (1)$

然 $\tan\theta(1-\sin\theta)(1+\sin\theta) = \tan\theta(1-\sin\theta)^2$

$$= \tan\theta\cos^2\theta$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta = \sin\theta\cos\theta$$

$\cot\theta(1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = \cot\theta(1-\cos^2\theta)$

$$=\cot\theta\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin^2\theta=\sin\theta\cos\theta$$

故(1)式左邊之值等於右邊之值

$$\therefore\quad \tan\theta(1-\sin\theta)(b+\sin\theta)=\cot\theta\,(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)$$

$$\therefore\quad \tan\theta\,\frac{1-\sin\theta}{1+\cos\theta}=\cot\theta\,\frac{1-\cos\theta}{1+\sin\theta}$$

(9) 試證明下式

$$\sec A+\tan A=\frac{1}{\sec A-\tan A}$$

解： 由公式 $1+\tan^2A=\sec^2A$

$$\sec^2A-\tan^2A=1$$

$$\therefore\quad (\sec A+\tan A)(\sec A-\tan A)=1$$

$$\therefore\quad \sec A+\tan A=\frac{1}{\sec A-\tan A}$$

數值計算問題

(1) $\tan\theta=\dfrac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ 時 $\operatorname{cosec}\theta$ 之值如何試求之

解： $\tan\theta=\dfrac{m^2+2mn}{2mn+2n^2}$ 故 $\cot\theta=\dfrac{2mn+2n^2}{m^2+2mn}$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}^2\theta = 1+\cot^2\theta = 1+\left(\frac{2mn+2n^2}{m^2+2mn}\right)^2$$

$$= \frac{(m^2+2mn)^2+(2mn+2n^2)^2}{(m^2+2mn)^2}$$

然分子$=m^4+4mn+4m^2n^2+4n^2(m+n)^2$

$$=m^4+4m^2n(m+n)+4n^2(m+n)^2$$

$$=[m^2+2n(m+n)]^2=(m+2mn+2n^2)^2$$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{(m^2+2mn+2n^2)^2}{(m^2+2mn)^2}$$

$$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta = \pm\frac{m^2+2mn+2n^2}{m^2+2mn}$$

但θ為銳角則將負號棄之

答 $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{m+2mn+2n^2}{m^2+2mn}$

(2) $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$時，試求 $a\cos\theta + b\sin\theta$ 之值，

解： 由公式 $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+\dfrac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$ (因θ爲銳角故棄負號)

次由公式 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\sin\theta=\tan\theta.\cos\theta=\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\therefore\ 原式=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(3) $\operatorname{cosec}\alpha=3$時，試求$\sec\alpha-\tan\alpha$之值！

解：$\sec\alpha-\tan\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$

然 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha}=\dfrac{1}{3}$

$$\therefore\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

$$\therefore\ \cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ (但α爲銳角)

$$\therefore\ \sec\alpha-\tan\alpha=\frac{1-\dfrac{1}{3}}{\dfrac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(4) $\cot A=\frac{p}{q}$時 則 $\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$之值如何？

解：$\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}=\frac{p\cot A-q}{p\cot A+q}$

$$=\frac{p\cdot\frac{p}{q}-q}{p\cdot\frac{p}{q}+q}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

（別解）由公式 $\cot A=\frac{\cos A}{\sin A}$

$$\frac{\cos A}{\sin A}=\frac{p}{q}\quad\therefore\frac{\cos A}{p}=\frac{\sin A}{q}=k$$

$$\therefore\quad\cos A=pk\qquad\sin A=qk$$

以此代入本式

$$\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}=\frac{p^2k-q^2k}{p^2k+q^2k}=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$$

（二） 餘角三角式之變形

(A) 摘 要

$$\begin{cases}\sin(90^\circ-A)=\cos A\\ \cos(90^\circ-A)=\sin A\\ \tan(90^\circ-A)=\cot A\end{cases}\qquad\begin{cases}\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A\\ \sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec}A\\ \cot(90^\circ-A)=\tan A\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 0^\circ=\cos 90^\circ=0\\ \cos 0^\circ=\sin 90^\circ=1\\ \tan 0^\circ=\cot 90^\circ=0\\ \cot 0^\circ=\tan 90^\circ=\pm\infty\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin 30^\circ=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\\ \cos 30^\circ=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \tan 30^\circ=\cot 60^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ \cot 30^\circ=\tan 60^\circ=\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 45^\circ=\cos 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \tan 45^\circ=\cot 45^\circ=1\end{cases}\qquad \sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

(B)　問題及解法

(1)　下式試簡單之

$$\cot(90^\circ-A)\cot A\cos(90^\circ-A)\tan(90^\circ-A)$$

解：$\cot(90^\circ-A)=\tan A$，　$\cos(90^\circ-A)=\sin A$

$$\tan(90^\circ-A)=\cot A$$

∴　原式 $=\tan A\cot A\sin A\cot A$

然　$\tan A\cot A=1$

$$\therefore\quad 原式=\sin A\,\frac{\cos A}{\sin A}=\cos A$$

(2)　$\sin^2(45^\circ+A)+\sin^2(45^\circ-A)=1$ 試證明之

解：因 $(45^\circ+A)+(45^\circ-A)=90^\circ$

故　$45^\circ+A$ 與 $45^\circ-A$ 互爲餘角，

$$\sin(45^\circ - A) = \cos(45^\circ + A)$$

$$\therefore \quad \sin^2(45^\circ + A) + \sin^2(45^\circ - A)$$

$$= \sin^2(45^\circ + A) + \cos^2(45^\circ + A) = 1.$$

（三） 一般角三角函數式之變形及數值計算問題

問題及解法

(1) $\dfrac{\sin(180^\circ - \alpha)}{\tan(180^\circ + \alpha)} \times \dfrac{\cot(90^\circ - \alpha)}{\tan(90^\circ + \alpha)} \times \dfrac{\cos(360^\circ - \alpha)}{\sin(-\alpha)}$ 試簡單之！

解： $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \quad \tan(180^\circ + \alpha) = \tan\alpha$

$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan\alpha \quad \tan(90^\circ + \alpha) = -\cot\alpha$

$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

故原式 $= \dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha} \times \dfrac{\tan\alpha}{-\cot\alpha} \times \dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\cot\alpha}$

$$= \cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sin\alpha$$

(2) $\tan 238^\circ = \dfrac{8}{5}$ 時，$\sin 238^\circ$ 之值如何？

解：238° 爲第三象限之角，故其正弦之值爲負，因之 $\alpha=238°$ $\sin\alpha$ 以既知數 $\tan\alpha$ 之項表示之時，其符號爲負。

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha=-\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

然 $\tan\alpha=\frac{8}{5}$

$$\text{故}\quad \sin\alpha=-\frac{\frac{5}{8}}{\sqrt{1+\left(\frac{8}{5}\right)^2}}=-\frac{8}{\sqrt{89}}=-\frac{8\sqrt{89}}{89}$$

（四） 角之和及差之三角公式及數值計算問題

(A) 摘 要

(1) 二角之和及差之三角公式

$$\left.\begin{aligned}\sin(\alpha\pm\beta)&=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)&=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\\ \tan(\alpha\pm\beta)&=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(A)$$

(2) 二倍角或半角之三角公式

$$\left.\begin{aligned}
\sin 2A &= 2\sin A\cos A\\
\cos 2A &= \cos^2 A-\sin^2 A\\
&= 1-2\sin^2 A = 2\cos^2 A-1\\
\tan 2A &= \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{(B)}$$

(3) 半角之三角公式

$$\left.\begin{aligned}
1+\cos A &= 2\cos^2\frac{A}{2}\\
1-\cos A &= 2\sin^2\frac{A}{2}\\
\frac{1-\cos A}{1+\cos A} &= \tan^2\frac{A}{2}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(C)}$$

(4) 三倍角之三角公式

$$\left.\begin{aligned}
\sin 3A &= 3\sin A-4\sin^3 A\\
\cos 3A &= 4\cos^3 A-3\cos A\\
\tan 3A &= \frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(D)}$$

(B) 問題及解法

(1) 試變$\tan A+\tan B$爲積形，

解： 原式$=\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}$

$$=\frac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}$$

(2) $\tan(45°+A)-\tan(45°-A)$試簡單之

解： 原式$=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}-\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

$$=\frac{(1+\tan A)^2-(1-\tan A)^2}{(1+\tan A)(1-\tan A)}$$

$$=\frac{4\tan A}{1-\tan^2 A}=2\tan^2 A$$

(3) $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$試簡單之

解： 原式$=\dfrac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}=\tan\dfrac{\theta}{2}$

(4) $\cos4\theta-4\cos2\theta+3=8\sin^4\theta$試證之

解： $\cos4\theta-4\cos2\theta+3=\cos4\theta-1-4\cos2\theta+4$

$$=4(1-\cos2\theta)-(1-\cos4\theta)$$

$$=8\sin^2\theta-2\sin^2 2\theta$$

$$=8\sin^2\theta-2\times4\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=8\sin^2\theta(1-\cos^2\theta)=8\sin^4\theta$$

(5) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\tan^2\left(45^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)$ 試證明之

解： $$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}\cdots(1)$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}=\left\{\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}\right\}$$

兩項以 $\cos\dfrac{\theta}{2}$除之 $$=\left\{\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2$$

$$=\left\{\frac{\tan45^\circ+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan45^\circ\tan\frac{\theta}{2}}\right\}^2$$

$$=\tan^2\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$$

(別解) $$\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}=\frac{1+\cos(90^\circ-\theta)}{1-\cos(90^\circ-\theta)}=\frac{2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^2\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\cot^2\left(45^\circ-\frac{\theta}{2}\right)=\tan^2\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$$

(6) 試化$\sec\theta+\tan\theta$為$\tan\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$之形

解： $$\sec\theta+\tan\theta=\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\sin^2\frac{\theta}{2}+\cos^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{1+\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}{1-\dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}=\tan\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$$

(別解) $\sec\theta+\tan\theta=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1-\cos(90^\circ+\theta)}{\sin(90^\circ+\theta)}$

$$=\frac{2\sin^2\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$=\tan\left(45^\circ+\frac{\theta}{2}\right)$$

數値計算問題

(1) $\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$試計算$\cos(A+B)$之值

但A為鈍角，B為銳角。

解： $\sin A=\dfrac{5}{13}$，$\cos B=\dfrac{3}{5}$故

$$\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\pm\frac{12}{13}$$

$$\sin B=\pm\sqrt{1-\cos^2 B}=\pm\sqrt{1+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\pm\frac{4}{5}$$

然A為鈍角，B為銳角，故定其符號為

$$\cos A=-\frac{12}{13}，\sin B=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$=-\frac{12}{13}\times\frac{3}{5}-\frac{5}{13}\times\frac{4}{5}=-\frac{56}{66}\text{(答)}$$

(2) $\sin A=\dfrac{3}{5}$時，$\sin 2A$之值如何？

但 $90^\circ<A<135^\circ$

解： $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\dfrac{4}{5}$

然A爲第二象限之角，故$\cos A=-\dfrac{4}{5}$

$$\therefore\quad \sin 2A=2\sin A\ \cos A=-2\times\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=-\frac{24}{25}\text{(答)}$$

(3) $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$時 $\cos\dfrac{\alpha}{2}$之值？但$180^\circ<\alpha<360^\circ$

解： 公式$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

$$=\pm\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

然$180^\circ<\alpha<360^\circ$，故$90^\circ<\dfrac{\alpha}{2}<180^\circ$

則$\dfrac{\alpha}{2}$在第二象限可得而知，故$\cos\dfrac{\alpha}{2}$爲負

$$\therefore\quad \cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{2}{3}}$$

(4) $\tan\dfrac{A}{2}=a$ 時，試求sinA之值！

(浙大)

解： 設 sinA 以 $\tan\dfrac{A}{2}$之項表之，則

$$\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= \frac{2\tan\frac{A}{2}}{1+\tan^2\frac{A}{2}} = \frac{2a}{1+a^2}$$

(5) $\sin\theta+\cos\theta=\frac{5}{4}$ 時.$\sin2\theta$ 及$\sin^3\theta+\cos^3\theta$之値，試計算之！

解：$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta$然$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

故 $\sin2\theta=\sin^2\theta+\cos^2\theta+2\sin\theta\cos\theta-1$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^2-1$$

$$=\left(\frac{5}{4}\right)^2-1=\frac{25}{16}-1=\frac{9}{16}\text{（答）}$$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)$

$$(\sin^2\theta+\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{5}{4}\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{9}{16}\right)=\frac{5}{4}\times\frac{23}{32}=\frac{115}{123}\text{（答）}$$

(6) 15°及75°之三角函數值，試計算之！

解： $\sin 15° = \sin(45° - 30°)$

$$= \text{Sin}45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = \cos 75°$$

$\cos 15° = \cos(45° - \ 0°)$

$$= \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \sin 75°$$

$\tan 15° = \tan(45° - 30°)$

$$= \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3} = \cot 75°$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = \frac{1}{2\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3} = \tan 75^\circ$$

(7) 試計算 $\sin 18^\circ$ 之值

解：設 $18^\circ = \alpha$ 則 $5\alpha = 90^\circ$

$$2\alpha + 3\alpha = 90^\circ \text{ 即 } 2\alpha = 90^\circ - 3\alpha$$

$\therefore \quad \sin 2\alpha = \sin(90^\circ - 3\alpha) = \cos 3\alpha$

$\therefore \quad 2\sin\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

但 $\cos\alpha \neq 0$ 故

$$2\sin\alpha = 4\cos^2\alpha - 3 = 4(1-\sin^2\alpha) - 3$$

$\therefore \quad 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha - 1 = 0$

$\therefore \quad \sin\alpha = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4} \quad \therefore \quad \sin 18^\circ = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$

然 $\sin 18^\circ$ 爲正，故 $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

（五）和變積，積變和之變形，

(A) 摘　要

(1) 和變積之公式

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-B}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+B}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(2) 積變和之公式

$$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$$

$$2\cos A\sin B=\sin(A+B)-\sin(A-B)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

(B) 問題及解法

(1) $\cos(60°+A)-\cos(60°-A)$試簡單之

解：原式$=2\sin\left(\frac{60°+A+60°-A}{2}\right)\sin\left(\frac{60°+A-60°+A}{2}\right)$

$$=2\sin60°\sin(-A)=-\sqrt{3}\sin A$$

(2) $\sin A+\sin(A+120°)+\sin(A+240°)$試簡單之

解： 原式$=2\sin(A+60°)\cos60°+\sin(A+240°)$

$$=\sin(A+60°)+\sin(A+240°)$$

$$=2\sin(A+150^\circ)\cos 90^\circ$$

$$=2\sin(A+150^\circ)\times o=0$$

(3) $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}$ 試簡單之

解：原式$=\dfrac{\sin A+\sin 5A+\sin 3A}{\cos A+\cos 5A+\cos 3A}$

$$=\frac{2\sin 3A\cos 2A+\sin 3A}{2\cos 3A\cos 2A+\cos 3A}$$

$$=\frac{\sin 3A(2\cos 2A+1)}{\cos 3A(2\cos 2A+1)}=\tan 3A$$

(4) $\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha$ 試化爲積之形

解：原式$=2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 6\alpha\cos\alpha$

$$=2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)$$

$$=4\cos\alpha\sin 4\alpha\cos 2\alpha$$

$$=4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha$$

(5) $\cos^2 A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(240^\circ+A)$ 試簡單之

解：原式$=\dfrac{1+\cos 2A}{2}+\dfrac{1+\cos(240^\circ+2A)}{2}$

$$+\frac{1+\cos(480^\circ+2A)}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[\cos 2A+\cos(240^\circ+2A)+\cos(480^\circ+2A)]$$

然 $\cos 2A+\cos(240^\circ+2A)+\cos(480^\circ+2A)$

$=\cos 2A+2\cos(360^\circ+2A)\cos 120^\circ$

$=\cos 2A-\cos 2A=0$

$$\therefore\ 原式=\frac{3}{2}$$

(6)　$\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)-\sin^3(120^\circ-A)$試簡單之

解：$\sin^3 A=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}$ ……………………(1)

$\sin^3(120^\circ+A)=\dfrac{3\sin(120^\circ+A)-\sin(360^\circ+3A)}{4}$ ⋯(2)

$\sin^3(120^\circ-A)=\dfrac{3\sin(120^\circ-A)-\sin(360^\circ-3A)}{4}$ ⋯(3)

$(1)+(2)-(3)\sin(360^\circ+3A)=\sin 3A$

$\sin(360^\circ-3A)=-\sin 3A$

故原式$=\frac{3}{4}[\mathrm{Sin}A+\sin(120^\circ+A)$

$-\sin(120^\circ-A)-\sin 3A]$

然 $\sin A+\sin(120^\circ+A)-\sin(120^\circ-A)$

$=\sin A+2\cos 120^\circ\sin A$

$=\sin A+2\cos 120^\circ\sin A$

$=\sin A-\sin A=0$

$$\therefore \quad 原式=-\frac{3}{4}\sin 3A$$

(7) $\sin\theta\sin 2\theta+\sin 3\theta\sin 6\theta$ 試變爲積形

解： 原式 $=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 3\theta+\cos 3\theta-\cos 9\theta)$

$$=\frac{1}{2}(\cos\theta-\cos 9\theta)=\sin 4\theta\sin 5\theta$$

(8) $\cos(A+B)\cos(A-B)-\cos(B+C)\cos(B-C)$

$+\cos(A+C)\cos(A-C)$ 試簡單之

解： 原式 $=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)$

$$+\sin(-\alpha+\beta-\gamma+\delta)$$

$$+\sin(-\alpha+\beta+\gamma-\delta)+\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$$

$$+\sin(\alpha-\beta-\gamma+\delta)+\sin(-\alpha-\beta+\gamma+\delta)]$$

$$=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)-\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)]$$

$$-\sin(\alpha-\beta-\gamma+\delta)+\sin(\alpha-\beta+\gamma-\delta)$$

$$+\sin(\alpha-\beta-\gamma+\delta)-\sin(\alpha+\beta-\gamma-\delta)]=0$$

(9) $\cos^2 A-\cos A\cos(60^\circ+A)+\sin^2(30^\circ-A)$ 試簡單之

解： 原式 $=\dfrac{1+\cos 2A}{2}-\dfrac{\cos(60^\circ+2A)+\cos 60^\circ}{2}$

$$+\frac{1-\cos(60^\circ+2A)}{2}$$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}[\cos 2A-\cos(60^\circ+2A)-\cos(60^\circ-2A)]$$

然 $\cos 2A-[\cos(60^\circ+2A)+\cos(60^\circ-2A)]$

$$=\cos 2A-2\cos 60^\circ\cos 2A$$

$$=\cos 2A-\cos 2A=0$$

$$\therefore \quad 原式=\frac{3}{4}$$

(10) $4\cos A\cos B\cos C$ 試變爲和形

解： 原式 $=2\cos A\times 2\cos B\cos C$

$$=2\cos A[\cos(B+C)+\cos(B-C)]$$

$$=2\cos A\cos(B+C)+2\cos A\cos(B-C)$$

$$=\cos(A+B+C)+\cos(A-B-C)$$

$$+\cos(A+B-C)+\cos(A-B+C)$$

(11) $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)$

$$+\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)$$

$$+\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$=2\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

解： $\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta+\gamma-\alpha)$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta+\gamma)-\cos(\alpha+\beta-\gamma)]$$

$$\sin(\beta+\gamma-\alpha)$$

$$=\tfrac{1}{4}[2\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\alpha-\beta+\gamma)$$

$$-2\sin(\beta+\gamma-\alpha)\cos(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$=\tfrac{1}{4}[\sin 2\gamma+\sin 2(\beta-\alpha)-\sin 2\beta-\sin 2(\gamma-\alpha)]$$

$$=\tfrac{1}{4}[\sin 2\gamma-\sin 2\beta-\sin 2(\alpha-\beta)$$

$$-\sin 2(\gamma-\alpha)]\cdots\cdots\cdots(1)$$

然左邊爲α,β,γ之輪換式，故

$$\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma+\alpha-\beta)$$

$$=\tfrac{1}{4}[\sin 2\alpha-\sin 2\gamma-\sin 2(\beta-\gamma)$$

$$-\sin 2(\alpha-\beta)]\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta-\gamma)$$

$$=\tfrac{1}{4}[\sin 2\beta-\sin 2\alpha-\sin 2(\gamma-\alpha)$$

$$-\sin 2(\beta-\gamma)]\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1),(2),(3) 各邊相加，

$$\text{左邊}=-\tfrac{1}{2}[\sin 2(\beta-\gamma)+\sin 2(\gamma-\alpha)+\sin 2(\alpha-\beta)]$$

$$=-[\sin(\beta-\gamma)\cos(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\beta)\cos(2\alpha-\beta-\gamma)]$$

$$=-\sin(\beta-\gamma)[\cos(\beta-\gamma)-\cos(2\alpha-\beta-\gamma)]$$

$$=-2\sin(\beta-\gamma)\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)$$

$$=2\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)\sin(\alpha-\beta)$$

(12) $\tan A\tan(A+60^\circ)\tan(A+120^\circ)=-\tan 3A$ 試證之

解： $\tan A\tan(A+60^\circ)\tan(A+120^\circ)$

$$=\tan A\times\frac{\tan A+\tan 60^\circ}{1-\tan A\tan 60^\circ}\times\frac{\tan A+\tan 120^\circ}{1-\tan A\tan 120^\circ}$$

$$=\tan A\times\frac{\tan A+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan A}\times\frac{\tan A-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan A}$$

$$=\tan A\times\frac{\tan^2 A-3}{1-3\tan^2 A}=-\left(\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\right)=-\tan 3A$$

(13) $3+\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)+\tan A\tan(A+60^\circ)$

$+\tan A\tan(A-60^\circ)=0$ 試證明之！

解：設 $A+60^\circ=\alpha$，$A-60^\circ=\beta$

$\alpha-\beta=120^\circ \qquad \therefore \quad \tan(\alpha-\beta)=\tan 120^\circ$

$$\therefore \quad \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=-\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad 1+\tan\alpha\tan\beta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{\sqrt{3}}$$

$\therefore \quad 1+\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)$

$$=\frac{\tan(A-60^\circ)-\tan(A+60^\circ)}{\sqrt{3}}\cdots\cdots(1)$$

同樣 $1+\tan A\tan(A+60^\circ)=\dfrac{\tan(A+60^\circ)-\tan A}{\sqrt{3}}\cdots\cdots(2)$

$$1+\tan A\tan(A-60^\circ)=\frac{\text{trn}A-\tan(A-60^\circ)}{\sqrt{3}}\cdots\cdots(3)$$

(1),(2),(3) 各邊相加，則右邊等于 0，左邊則爲證明式之左邊，卽

$3+\tan(A+60^\circ)\tan(A-60^\circ)$

$$+\tan A\tan(A+60^\circ)+\tan A\tan(A-60^\circ)=0$$

(14) $$\frac{\sec(-120^\circ)[\sin(60^\circ-A)-\cos(A-30^\circ)]}{2\tan A+\cot\frac{A}{2}-\tan\frac{A}{2}}$$

試化爲最簡形，

解：分子 $\sec(-120^\circ)=\dfrac{1}{\cos(-120^\circ)}=\dfrac{1}{\cos 120^\circ}$

$$=\frac{1}{-\frac{1}{2}}=-2$$

$\sin(60^\circ-A)-\cos(A-30^\circ)$

$$=\cos(30^\circ+A)-\cos(A-30^\circ)$$

$$=2\sin(-30^\circ)\sin A=-2\sin 30^\circ\sin A=-\sin A$$

分母 $\cot\dfrac{A}{2}-\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$

$$=\frac{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\cos A}{\sin A}=2\cot A$$

$\therefore$ 分母 $=2\tan A+2\cot A$

$$=2\left(\frac{\sin A}{\cos A}+\frac{\cos A}{\sin A}\right)=\frac{2}{\sin A\cos A}$$

以上各值代入原式

$$\therefore\quad 原式=\frac{-2\times(-\sin A)}{\dfrac{2}{\sin A\cos A}}=\sin^2 A\cos A$$

(六) 有 $A+B+C=180^\circ$ 之條件式之變形

(A) 摘 要

$A+B+C=180^\circ$ 故 A 與 $B+C$, B與 $A+C$, C與 $A+B$ 互為補角，卽

$B+C=180^\circ-A,\ C+A=180^\circ-B,\ A+B=180^\circ-C$

$\therefore\quad \sin(B+C)=\sin(180^\circ-A)=\sin A$

$\cos(B+C)=\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

$\tan(B+C)=\tan(180^\circ-A)=-\tan A$

又 $A+B+C=180^\circ$

故 $\dfrac{A}{2}+\dfrac{B+C}{2}=90^\circ,\quad \dfrac{B}{2}+\dfrac{C+A}{2}=90^\circ$

$$\frac{C}{2}+\frac{A+B}{2}=90^\circ$$

$$\therefore \frac{B+C}{2}=90^\circ-\frac{A}{2},\ \frac{C+A}{2}=90^\circ-\frac{B}{2}$$

$$\frac{A+B}{2}=90^\circ-\frac{C}{2}$$

卽 $\frac{B+C}{2}$ 與 $\frac{A}{2}$，$\frac{C+A}{2}$ 與 $\frac{B}{2}$，$\frac{A+B}{2}$ 與 $\frac{C}{2}$ 互爲餘角

$$\therefore \sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$$

$$\cos\frac{B+C}{2}=\sin\frac{A}{2}$$

$$\tan\frac{B+C}{2}=\cot\frac{A}{2}$$

(B) 問題及解法

(1) $A+B+C=180^\circ$ 時，$\sin A+\sin B+\sin C$ 試變爲積形。

解：$\sin A+\sin B+\sin c$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}+2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{A}{2} + 2\cos\frac{A}{2}\cos\cdot\frac{B-C}{2}$$

$$= 2\cos\frac{A}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} = \cos\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

(2) $A+B+C=180^\circ$ 時，$\cos A+\cos B+\cos C-1$ 試變爲積形。

解： $\cos A+\cos B+\cos C-1$

$$= 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} - (1-\cos C)$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 2\left(\cos\frac{A-B}{2} - \sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$= 2\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(3) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$ 試變爲積形。

解： $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C$

$$=2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)$$

$$=-2\sin A\cos(B+C)+2\sin A\cos(B-C)$$

$$=2\sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$$

$$=4\sin A\sin B\sin C.$$

(4) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$ 試化爲積形

解： $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C$

$$=2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{3A}{2}+2\sin\frac{3(B+C)}{2}\cos\frac{3(B-C)}{2}$$

然 $B+C=180^\circ-A$

$$故\ \sin\frac{3(B+C)}{2}=\sin\frac{3(180^\circ-A)}{2}$$

$$=\sin\left(270^\circ-\frac{3A}{2}\right)=-\cos\frac{3A}{2}$$

$$\therefore\ 原式=2\sin\frac{3A}{2}\cos\frac{3A}{2}-2\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3(B-C)}{2}$$

$$=2\cos\frac{3A}{2}\left[\sin\frac{3A}{2}-\cos\frac{3(B-C)}{2}\right]$$

$$然\ \sin\frac{3A}{2}=\sin\frac{3(180^\circ-\overline{B+C})}{2}$$

$$=\sin\left[270^\circ-\frac{3(B+C)}{2}\right]=-\cos\frac{3(B+C)}{2}$$

$$\therefore\ \text{原式}=-2\cos\frac{3A}{2}\left[\cos\frac{3(B+C)}{2}+\cos\frac{3(B-C)}{2}\right]$$

$$=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}$$

(5) $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2+2\cos A\cos B\cos C$ 試證明之

解： $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C$

$$=\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)$$

然 $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+\cos 2C$$

$$=-2\cos C\cos(A-B)+2\cos^2 C-1$$

$$=-2\cos C[\cos(A-B)-\cos C]-1$$

$$=-2\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]-1$$

$$=-4\cos A\cos B\cos C-1$$

$$\therefore\ \text{左邊}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-4\cos A\cos B\cos C-1)$$

$$=2+2\cos A\cos B\cos C$$

(6) $\sin A+\sin B+\cos C+1$ 試化爲積形

解： 原式 $= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos^2\frac{C}{2}$

$$=2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos^3\frac{C}{2}$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\sin\frac{A+B}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{A-B}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$=4\cos\frac{C}{2}\cos\left(45^\circ+\frac{-B}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)$$

$$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{2}\right)\cos\frac{C}{2}$$

(7) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$ 試證明之

解： $A+B+C=180^\circ$ 　　$\therefore\ A+B=180^\circ-C$

$$\therefore\ \tan(A+B)=\tan(180^\circ-C)=-\tan C$$

$$\therefore\ \frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=-\tan C$$

$$\therefore\ \tan A+\tan B=-\tan C+\tan A\tan B\tan C$$

$$\therefore\ \tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$$

(8) $\dfrac{\tan B}{\tan C}+\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan A}{\tan B}+\dfrac{\tan B}{\tan A}+\dfrac{\tan C}{\tan B}+\dfrac{\tan A}{\tan C}$

$$=\sec A\sec B\sec C-2$$

解：$\dfrac{\tan B}{\tan C}+\dfrac{\tan A}{\tan C}=\dfrac{\tan A+\tan B}{\tan C}$

$$=\frac{\dfrac{\sin A}{\cos A}+\dfrac{\sin B}{\cos B}}{\dfrac{\sin C}{\cos C}}=\frac{\sin(A+B)\cos C}{\cos A\cos B\sin C}$$

$$=\frac{\sin C\cos C}{\cos A\cos B\sin C}=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}$$

同樣 $\dfrac{\tan C}{\tan A}+\dfrac{\tan B}{\tan A}=\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}$

$$\frac{\tan A}{\tan B}+\frac{\tan C}{\tan B}=\frac{\cos B}{\cos C\cos A}$$

各邊相加

左邊 $=\dfrac{\cos C}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A}{\cos B\cos C}+\dfrac{\cos B}{\cos C\cos A}$

$$=\frac{\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C}{\cos A\cos B\cos C}$$

分子 $=\dfrac{1+\cos 2A}{2}+\dfrac{1+\cos 2B}{2}+\dfrac{1+\cos 2C}{2}$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos2A+\cos2B+\cos2C)$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B)$$
$$+2\cos^2C-1]$$

$$=\frac{3}{2}+[-\cos C\cos(A-B)+\cos^2C]-\frac{1}{2}$$

$$=1-\cos C[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$=1-2\cos A\cos B\cos C$$

左邊 $=\dfrac{1-2\cos A\cos B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}=\sec A\sec B\sec C-2$

(七) 關於三角形三角式之變形

(A) 摘 要

(1) 正弦比例公式

於$\triangle ABC$ (d 為外接圓之直徑)

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=d$$

(2) 餘弦第一公式

$$\left.\begin{array}{l}a=b\cos C+c\cos B\\ b=c\cos A+a\cos C\\ c=a\cos B+b\cos A\end{array}\right\}$$

(3) 餘弦第二公式

$$\left.\begin{aligned}\cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\qquad \left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}$$

(4) 半角公式

$$\left.\begin{aligned}\cos\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-a)}{cb}}\\ \cos\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}}\\ \cos\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\\ \sin\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}}\\ \sin\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\tan\frac{A}{2}&=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\\ \tan\frac{B}{2}&=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}\end{aligned}\right\}$$

(5) 三角形之面積

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(6) 三角形之內接圓及傍接圓之半徑

$$S=pr=(P-a)r_1=(p-b)r_2=(p-c)r_3$$

(r, r_1, r_2, r_3為內接圓及傍接圓之半徑)

(B) 問題及解法

(1) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$ 試證之

解：正弦比例式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=d$$

$$\therefore\quad a=d\sin A,\ b=d\sin B,\ C=d\sin C$$

以此各值代入本式

$$a\cos A+b\cos B+c\cos C$$

$$=d(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C)$$

$$=\frac{d}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)$$

$$=\frac{d}{2}[2\sin A\cos A+2\sin(B+C)\cos(B-C)]$$

$$=\frac{d}{2}[-2\sin A\cos(B+C)+2\sin A\cos(B-C)]$$

$$=d\ \sin A[\cos(B-C)-\cos(B+C)]$$

$$=2d\ \sin A\sin B\sin C$$

$$=2a\ \sin B\sin C$$

(2) $c(\sin^2A+\sin^2B)=\sin C(a\sin A+b\sin B)$ 試證之

解： $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}=\frac{1}{d}$

$\therefore\ \sin A=\frac{a}{d}$，$\sin B=\frac{b}{d}$，$\sin C=\frac{c}{d}$

以此代入本式

$$c(\sin^2A+\sin^2B)=c\left(\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{d}\right)=\frac{c(a^2+b^2)}{d^2}$$

$$\sin c(a\ \sin A+b\sin B)=\frac{c}{d}\left(\frac{a^2}{d}+\frac{b^2}{d}\right)=\frac{c(a^2+b^2)}{d^2}$$

$\therefore\ C(\sin^2A+\sin^2B)=\sin C(a\ \sin A+b\ \sin B)$

(3) $a\sec A-b\sec B=\sec C(b\sec A-a\sec B)$ 試證之

解： $a\ \sec A-b\ \sec B=\frac{d\sin A}{\cos A}-\frac{d\sin B}{\cos B}$

$$=\frac{d\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$$\sec C(b\sec A-a\ \sec B)=\frac{1}{\cos C}\left(\frac{d\sin B}{\cos A}-\frac{d\sin A}{\cos B}\right)$$

$$=\frac{d(\sin B\cos B-\sin A\cos A)}{\cos C\cos A\cos B}$$

$$=\frac{d(\sin 2B-\sin 2A)}{2\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{2d\sin(B-A)\cos(B+A)}{2\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{d\sin(A-B)\cos C}{\cos A\cos B\cos C}=\frac{d\sin(A-B)}{\cos A\cos B}$$

$\therefore\quad a\sec A-b\sec B=\sec C(b\sec A-a\ \sec B)$

(4) $\dfrac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$ 試證明之

解：公式 $a=c\cos B+b\cos C$，$b=a\cos C+c\cos A$

變形之 $a-c\cos B=b\cos C, b-c\cos A=a\cos C$

以此代入本式左邊，則

$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{b\cos C}{a\cos C}=\frac{d\sin B}{d\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

(別解) 公式 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

以此代入本式左邊，則

$$\frac{a-c\cos B}{b-c\cos A}=\frac{a-\dfrac{c(c^2+a^2-b^2)}{2ca}}{b-\dfrac{c(b^2+c^2-a^2)}{2bc}}=\frac{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a}}{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}}$$

$$=\frac{b}{a}=\frac{d\sin B}{d\sin A}=\frac{\sin B}{\sin A}$$

(5) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ 試證之

解： $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ 以此代入本式左邊

左邊 $=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2abc}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2abc}+\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2abc}$$

(6) $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1}{a^2}-\dfrac{1}{b^2}$ 試證之

解： $\dfrac{\cos 2A}{a^2}-\dfrac{\cos 2B}{b^2}=\dfrac{1-2\sin^2 A}{a^2}-\dfrac{1-2\sin^2 B}{b^2}$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2\left(\frac{\sin^2 A}{a^2}-\frac{\sin^2 B}{b^2}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-2\left(\frac{\sin^2 A}{d^2\sin^2 A}-\frac{\sin^2 B}{d^2\sin^2 B}\right)$$

$$=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$$

(7) $\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$試證之

解：$\dfrac{\tan B}{\tan C}=\dfrac{\sin B\cos C}{\cos B\sin C}$

$$=\frac{\frac{b}{d}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{c}{d}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2-b^2+c^2}$$

(8) $\dfrac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\dfrac{a-b}{c}$試證明之

解：$\tan\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$，$\tan\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$

以此代入本式左邊，則

$$分子=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}-\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{p(p-b)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(p-b)^2(p-c)}{p(p-a)(p-b)}}-\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)^2}{p(p-b)(p-a)}}$$

$$=(p-b)\sqrt{\frac{p-c}{p(p-a)(p-b)}}-(p-a)\sqrt{\frac{p-c}{p(p-a)(p-b)}}$$

$$=(a-b)\sqrt{\frac{p-c}{P(p-a)(p-b)}}$$

同樣　分母$=(2p-a-b)\sqrt{\dfrac{p-c}{p(p-a)(p-b)}}$

然 $2p=a+b+c$ 故

$$分母=c\sqrt{\frac{p-c}{p(p-a)(p-b)}}$$

$$\therefore\quad \frac{\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\frac{a-b}{c}$$

(9)　試證$\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0$

解：左邊$=\dfrac{b-c}{a}\times\dfrac{p(P-a)}{bc}+\dfrac{c-a}{b}\times\dfrac{p(p-b)}{ca}$

$$+\frac{a-b}{c}\times\frac{p(p-c)}{ab}$$

$$=\frac{p}{abc}[(b-c)(p-c)+(c-a)(p-b)+(a-b)(p-c)]$$

將括弧內，就p整頓之，則p之係數，及不含p之項均爲0，故括弧內爲0，故原式$=0$

（八） 附條件之證明問題

問題及解法：

(1) 設 $\sin A=a$，$\tan A=b$ 時，則 $b^2=a^2(1+b^2)$

解：$a^2(1+b^2)=\sin^2A(1+\tan^2A)$

$$=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}=\tan^2A=b^2$$

(2) 設 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$ 時，則

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{1+m}{1-m}\tan\alpha$$

解：由 $\sin\beta=m\sin(2\alpha+\beta)$

$$m=\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}$$

$$\therefore\quad \frac{1+m}{1-m}=\frac{1+\dfrac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}{1-\dfrac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}}=\frac{\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}$$

$$=\frac{2\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}=\tan(\alpha+\beta)\cot\alpha$$

$$\therefore\quad \frac{1+m}{1-m}\tan\alpha=\tan(\alpha+\beta)$$

(3) 設 $a\cos A+b\sin A=a\cos B+b\sin B=c$

則$\dfrac{a}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$試證之

解：$a\cos A+b\sin A=c$ ……………………(1)

$a\cos B+b\sin B=c$ ……………………(2)

由(1)與(2)消去 b，則

$$a(\sin A\cos B-\cos A\sin B)=c(\sin A-\sin B)$$

$$\therefore\quad a\sin(A-B)=2c\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\therefore\quad 2a\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A-B}{2}=2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}$$

$\sin\dfrac{A-B}{2}\neq 0$ 兩邊除之

$$a\cos\frac{A-B}{2}=c\cos\frac{A+B}{2}$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$$

同樣消去 a　$\dfrac{b}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\dfrac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin\dfrac{A+B}{2}}=\frac{b}{\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{c}{\cos\dfrac{A-B}{2}}$$

(4) 設 $\tan\theta=\dfrac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}$，$\tan\psi=\dfrac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}$

則 $\tan(\theta+\psi)=-\tan\alpha$

解：$\tan\theta=\dfrac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}$，$\tan\psi=\dfrac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}$ 代入於

$\tan(\theta+\psi)$ 之展開式中，則

$$\tan(\theta+\psi)=\frac{\tan\theta+\tan\psi}{1-\tan\theta\tan\psi}$$

$$=\frac{\dfrac{x\sin\alpha}{y-x\cos\alpha}+\dfrac{y\sin\alpha}{x-y\cos\alpha}}{1-\dfrac{xy\sin^2\alpha}{(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)}}$$

$$=\frac{x\sin\alpha(x-s\cos\alpha)+y\sin\alpha(y-x\cos\alpha)}{(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)-xy\sin^2\alpha}$$

$$=-\frac{\sin\alpha(x^2-2xy\cos\alpha+y^2)}{\cos\alpha(x^2-2xy\cos\alpha+y^2)}=-\tan\alpha$$

(注意) 分母 $=(y-x\cos\alpha)(x-y\cos\alpha)-xy\sin^2\alpha$

$=xy-x^2\cos\alpha-y^2\cos\alpha+xy\cos^2\alpha-xy\sin^2\alpha$

$=-x^2\cos\alpha-y^2\cos\alpha+xy\cos^2\alpha+xy(1-\sin^2\alpha)$

$=-x^2\cos\alpha-y^2\cos\alpha+xy\cos^2\alpha+xy\cos^2\alpha$

$=-\cos\alpha(x^2+y^2-2xy\cos\alpha)$

(5) 設 $\tan\theta=\dfrac{b}{a}$ 則 $a\cos2\theta+b\sin2\theta=a$

解： $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{2}{1+\tan^2\theta}-1$

$$=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{1-\dfrac{b^2}{a^2}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$$

$$\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}\cos^2\theta$$

$$=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}=\frac{\dfrac{2b}{a}}{1+\dfrac{b^2}{a^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\therefore\quad a\cos2\theta+b\sin2\theta=\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}+\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a(a^2+b^2)}{a^2+b^2}=a$$

(6) 設 $\tan A=\dfrac{b}{a}$ 則 $\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}=\dfrac{2\cos A}{\sqrt{\cos2A}}$ 試證之

解： 將 $\tan A=\dfrac{b}{a}$ 變形

$$\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{b}{a}\quad\therefore\ \frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\sin A}=K$$

$$\therefore\ a=k\cos A,\quad b=k\sin A$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}+\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}+\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}$$

$$=\frac{a-b+a+b}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2a}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

$$=\frac{2k\cos A}{\sqrt{k^2(\cos^2A-\sin^2A)}}=\frac{2\cos A}{\sqrt{\cos 2A}}$$

(7) 設 $\tan\alpha$, $\tan\beta$ 爲 $x^2+6x+7=0$ 之二根

則 $\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$ 試證之

解： 設 $x^2+6x+7=0$ 之兩根爲$\tan\alpha$, $\tan\beta$, 由根與係數之關係

$$\tan\alpha+\tan\beta=-6,\quad \tan\alpha\tan\beta=7$$

$$\therefore\ \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-6}{1-7}=1$$

$$\therefore\ \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=1\quad\therefore\ \sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta)$$

(8) $\triangle ABC$ 設 $C=90^\circ$ 則 $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{c-a}{2c}$ 試證之

解：$\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1-\cos B}{2}=\frac{1-\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}}{2}=\frac{b^2-(c-a)^2}{4ca}$

然 $C=90^\circ$ 故 $a^2+b^2=c^2$ $\therefore$ $b^2=c^2-a^2$

$\therefore$ $\sin^2\frac{B}{2}=\frac{c^2-a^2-(c-a)^2}{4ca}=\frac{2a(c-a)}{4ca}=\frac{c-a}{2c}$

(9) $\triangle ABC$設 $B=60^\circ$ 則 $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$

解：$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ 變形之

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$$

然 $\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}$

$$=2+\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}$$

$$=2+\frac{c(b+c)+a(a+b)}{(b+a)(b+c)}$$

$$=2+\frac{a^2+(a+c)b+c^2}{b^2(a+c)b+ac}$$

然 $B=60^\circ$ 故由公式 $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

$b^2=c^2-ca+a^2$ $\therefore$ $b^2+ca=c^2+a^2$

$$\therefore \quad \frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}=2+\frac{b^2+(a+c)b+ac}{b^2+(a+c)b+ac}$$

$$=2+1=3$$

$$\therefore \quad \frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

(10) $\triangle ABC$ 設 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$ 時，則此三角形之形狀如何？

解：變 $\sin^2A+\sin^2B=\sin^2C$ 之形

$$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=0$$

左邊變形之 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C$

$$=\sin^2A+\frac{1-\cos2B}{2}-\frac{1-\cos2C}{2}$$

$$=\sin^2A+\frac{\cos2C-\cos2B}{2}$$

$$=\sin^2A+\sin(B-C)\sin(B+C)$$

$$=\sin^2A+\sin(B-C)\sin A$$

$$=\sin A[\sin A+\sin(B-C)]$$

$$=\sin A[\sin(B+C)+\sin(B-C)]$$

$$=2\sin A\sin B\cos C$$

$$\therefore \quad 2\sin A\sin B\cos C=0$$

$\therefore$ $\sin A=0$ 又 $\sin B=0$ 又 $\cos C=0$

求與適合此式 A,B,C 之値

∴ $A=0$ 又 $B=0$ 又 $C=90^\circ$

然 $A=0, B=0$, 不能形成三角形，故 $A\neq0, B\neq0$,

從而 $C=90^\circ$ 卽三角形之形狀爲直角三角形。

(別解) 由正弦比例式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=d$$

$$\sin A=\frac{a}{d}, \ \sin B=\frac{b}{d}, \ \sin C=\frac{c}{d}$$

以此代入本式，則

$$\frac{a^2}{d^2}+\frac{b^2}{d^2}=\frac{c^2}{d^2} \qquad \therefore \ a^2+b^2=c^2$$

此式表示三角形爲直角三角形，故此三角形爲

$C=90^\circ$ 之直角三角形

(11) △ABC 設 $b=4c\cos\left(30^\circ+\frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)$

則(1) $A=2C$, (2) $a^2=c(b+c)$

解： $b=4c\cos\left(30^\circ+\frac{A}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{A}{2}\right)$ 變形之

$$b=2c(\cos60^\circ+\cos A)2c=(\tfrac{1}{2}+\cos A)$$

由正弦比例式 ∴

$$d\sin B = 2d\sin C(\tfrac{1}{2}+\cos A)$$

$$\therefore \quad \sin B = 2\sin C(\tfrac{1}{2}+\cos A) \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

然 $\sin B = \sin(A+C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$

故 $\sin A\cos C + \cos A\sin C = \sin C + 2\sin C\cos A$

$$\therefore \quad \sin A\cos C - \cos A\sin C = \sin C$$

$$\therefore \quad \sin(A-C) = \sin C$$

$\therefore \quad A-C=C$ 又 $A-C=180^\circ - C$

$\therefore \quad A=2C$ 又 $A=180^\circ$

然 $A=180^\circ$ 故 $A=2C$

又 (1) 以邊之關係表之則

$$\frac{b}{d} = \frac{2c}{d}\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$$\therefore \quad b = c\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}\right)$$

$$\therefore \quad b = \frac{b^2+bc+c^2-a^2}{b}$$

$$\therefore \quad b^2 = b^2+bc+c^2-a^2$$

$$\therefore \quad a^2 = bc+c^2$$

(12) $\triangle ABC$ 設 $\sin A, \sin B, \sin C$ 爲 A.P. 則

(a) $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ 亦爲 A.P.

(b) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{1}{3}$ 試證之

解. (a) $\cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}=\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}-\frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}$

$$=\frac{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣 $\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\cdots\cdots\cdots(2)$

又 $\sin B-\sin A=2\sin\frac{B-A}{2}\cos\frac{B+A}{2}$

$$=2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$\sin C-\sin B=2\sin\frac{C-B}{2}\cos\frac{C+B}{2}=2\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}$

然由假設 $\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$

$$\therefore\ 2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{C}{2}=2\sin\frac{C-B}{2}\sin\frac{A}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}}=\frac{\sin\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}\ \cdots\cdots\ (3)$$

(1)(2) 之右邊與 (3) 相較，則知(1), (2)右邊相等，

$$\therefore\ \cot\frac{B}{2}-\cot\frac{A}{2}=\cot\frac{C}{2}-\cot\frac{B}{2}$$

解：(b) 設代入公式 $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$，則

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)^2(p-c)}{p^2(p-a)(p-c)}}$$

$$=\frac{p-b}{P}=\frac{2p-2b}{2P}=\frac{a-b+c}{a+b+c}$$

然由假設 $\sin B-\sin A=\sin C-\sin B$

以此用邊之關係表之則

$$b-a=c-b,\quad \therefore\ b=\frac{a+c}{2}$$

以此值代入之

$$\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{a-\frac{a+c}{2}+c}{a+\frac{a+c}{2}+c}=\frac{a+c}{3(a+c)}=\frac{1}{3}$$

(13) $\cos\left(B+\frac{C-A}{2}\right)$, $\cos\frac{C+A}{2}$, $\cos\left(B-\frac{C-A}{2}\right)$

爲G.P.時

則 $\sin\left(\frac{C+A}{2}-B\right)$, $\sin\frac{C-A}{2}$, $\sin\left(\frac{C+A}{2}+B\right)$

亦爲G.P. 試證之

解： $\cos\left(B+\frac{C-A}{2}\right)\cos\left(B-\frac{C-A}{2}\right)$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos2B+\cos(C-A)]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left[\cos2B+1-2\sin^2\frac{C-A}{2}\right]$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(2\cos^2B-2\sin^2\frac{C-A}{2}\right)$$

$$=\cos^2B-\sin^2\frac{C-A}{2}$$

$$\therefore\quad \cos^2\frac{C+A}{2}=\cos^2B-\sin^2\frac{C-A}{2}$$

$$\therefore\ \sin^2\frac{C-A}{2}=\cos^2B-\cos^2\frac{C+A}{2}$$

$$=\frac{1+\cos 2B}{2}-\frac{1+\cos(C+A)}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos 2B-\cos(C+A)]$$

$$=\sin\left(\frac{C+A}{2}-B\right)\sin\left(\frac{C+A}{2}+B\right)$$

$$\therefore\ \sin\left(\frac{C+A}{2}-B\right),\ \sin\frac{C-A}{2},\ \sin\left(\frac{C+A}{2}+B\right)$$

亦為G.P.

(14) △ABC 設 a^2, b^2, c^2 為 A.P. 則

$a\sec A$, $b\sec B$, $c\sec C$ 為 H.P. 試證之

解：題意以式表之則

$b^2-a^2=c^2-b^2$ 時

$$\frac{1}{b\sec B}-\frac{1}{a\sec A}=\frac{1}{c\sec C}-\frac{1}{b\sec B}$$

然 $$\frac{1}{b\sec B}-\frac{1}{a\sec A}=\frac{\cos B}{b}-\frac{\cos A}{a}$$

$$=\frac{c^2+a^2-b^2}{2abc}-\frac{b^2+c^2-a^2}{2abc}$$

$$=\frac{2(a^2-b^2)}{2abc}=\frac{a^2-b^2}{abc}$$

同樣 $\frac{1}{c\sec C}-\frac{1}{b\sec C}=\frac{b^2-c^2}{abc}$

然由假設 $b^2-a^2=c^2-b^2$

$$\therefore \frac{1}{b\sec B}-\frac{1}{a\sec A}=\frac{1}{c\sec C}-\frac{1}{b\sec B}$$

II. 三角方程式

(一) 基礎的三角方程式

(A) 摘 要

公式 a,

(1) 適合$\sin\theta=a$之θ之值爲$\theta=180^\circ\times n+(-1)^n\alpha$

(2) 適合$\cos\theta=a$之θ之值爲$\theta=360^\circ\times n\pm\alpha$

(3) 適合$\tan\theta=a$之θ之值爲$\theta=180^\circ\times n+\alpha$

公式 b

(1) $\sin\theta=a$ $\theta=n\pi+(-1)^n\alpha$

(2) $\cos\theta=a$ $\theta=2n\pi\pm\alpha$

(3) $\tan\theta=a$ $\theta=n\pi+\alpha$

(B) 問題及解法

(1) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 試解之

解：設有$\frac{\sqrt{3}}{2}$之值之θ之一個爲α

$\alpha=60°$

$\therefore\quad \theta=180°\times n+(-1)^n+60°$

（注意）因$\sin 0°=0$，　$\sin 18°=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$，$\sin 30°=\frac{1}{2}$，

$\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin 90°=1$

故　$\sin\theta=0$ 解之 $\theta=180°\times n+(-1)^n\times 0°=180°\times n$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$解之　$\theta=180°\times n+(-1)^n\times 18°$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ 解之 $\theta=180°\times n+(-1)^n\times 30°$

$\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$解之$\theta=180°\times n+(-1)^n\times 45°$

$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$解之　$\theta=180°\times n+(-1)^n\times 60°$

$\sin\theta=1$解之　$\theta=180°\times n+(-1)^n\times 90°$

(2)　試解 $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$

解：有$\frac{1}{\sqrt{2}}$之值之θ之一個爲 $45°$，故

$\theta=360°\times n\pm 45°$

(注意) $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 45^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 90^\circ = 0$. 故

$\cos x = 1$ 解之 $x = 360^\circ \times n$

$\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 解之 $\therefore\ x = 360^\circ \times n \pm 30^\circ$

$\cos x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 解之 $\therefore\ x = 360^\circ \times n \pm 45^\circ$

$\cos x = \frac{1}{2}$ 解之 $\therefore\ x = 360^\circ \times n \pm 60^\circ$

$\cos x = 0$ 解之 $\therefore\ x = 360^\circ \times n \pm 90^\circ$

(3) $\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 試解之

解：有 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 之正切之値之一個爲 30°

$$\therefore\ x = 180^\circ \times n + 30^\circ$$

(注意) 因 $\tan 0^\circ = 0$, $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$, $\tan 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$,

$\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 90^\circ = \infty$

故 $\tan x = 0$ 解之 $\therefore\ x = 180^\circ \times n$

$\tan x = 2 - \sqrt{3}$ 解之 $\therefore\ x = 180^\circ \times n + 15$

$\tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 解之 $\therefore\ x = 180^\circ \times n + 30^\circ$

$\tan x=1$ 解之 $\therefore\ x=180^\circ\times n+45^\circ$

$\tan x=\sqrt{3}$ 解之 $\therefore\ x=180^\circ\times n+60^\circ$

$\tan x=\infty$ 解之 $\therefore\ x=180^\circ\times n+90^\circ$

(4) 試求適合 $\tan 10\theta=\sqrt{3}$ 之銳角θ之值

解： $\tan 10\theta=\sqrt{3}$ 解之則

$10\theta=180^\circ\times n+60^\circ$ $\therefore\ \theta=18^\circ\times n+6^\circ$

故設求 $90^\circ>\theta>0$者

設 $n=0$ 則 $\theta=6^\circ$

設 $n=1$ 則 $\theta=24^\circ$

設 $n=2$ 則 $\theta=42^\circ$

設 $n=3$ 則 $\theta=60^\circ$

設 $n=4$ 則 $\theta\fallingdotseq 78^\circ$

設 $n=5$ 則 $\theta\fallingdotseq 96^\circ$

然 $9^\circ>60^\circ$ 故所求θ之值爲

6°, 24°, 4°, 60°, 78°

(5) 試解 $\sin(2\theta-30^\circ)=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

解： $2\theta-30^\circ=180^\circ\times n-(-1)^n 60^\circ$

$\therefore\ 2\theta=180^\circ\times n-(-1)^n 60^\circ+30^\circ$

$\therefore\ \theta=90^\circ\times n-(-1)^n 30^\circ+15^\circ$

(6) 試解 $\tan(2\theta-45^\circ)=\tan 25^\circ$

解：$2\theta-45^\circ=180^\circ\times n+25^\circ$

$\therefore\ 2\theta=180^\circ\times n+25^\circ+45^\circ$

$\therefore\ \theta=90^\circ\times n+35^\circ$

(7) $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$ 試解之

解：設 $2\cos^2\theta+3\sin\theta=3$ 以 $\sin\theta$ 之項表之

則 $2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta=3$

就 $\sin\theta$ 整頓之

$\therefore\ 2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$\therefore\ (2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)=0$

$\therefore\ \sin\theta=\frac{1}{2}$，or $\sin\theta=1$

$\sin\theta=\frac{1}{2}$ 解之 $\therefore\ \theta=180^\circ\times n+(-1)^n 30^\circ$

$\sin\theta=1$ 解之 $\therefore\ \theta=180^\circ\times n+(-1)^n 90^\circ$

(8) 試解次之方程式

$\cos 2\theta-5\cos\theta+3=0$

解：由公式 $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ 將本方程式變形

則 $2\cos^2\theta-1-5\cos\theta+3=0$

$\therefore\ 2\cos^2\theta-5\cos\theta+2=0$

$\therefore\ (2\cos\theta-1)(\cos\theta-2)=0$

$\therefore \quad \cos\theta=\frac{1}{2}$ or $\cos\theta=2$

然餘弦之值無2 故 $\cos\theta=2$ 棄之

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ 解之 $\therefore \theta=360^\circ\times n\pm 90^\circ$

(10) 試解次之方程式：——

(a) $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$， (b) $\sin^2\theta=\frac{3}{4}$， (c) $\tan^2\theta=1$

解：(a) 由公式 $\cos^2\theta=\dfrac{1+\cos2\theta}{2}$

$$\frac{1+\cos2\theta}{2}=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \cos2\theta=0$$

$$\therefore \quad 2\theta=180^\circ\times n+90^\circ \qquad \therefore \quad \theta=90^\circ\times n+45^\circ$$

(b) 由公式 $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{2}$

$$\frac{1-\cos2\theta}{2}=\frac{3}{4} \qquad \therefore \quad \cos2\theta=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad 2\theta=360^\circ\times n\pm120^\circ \qquad \therefore \quad \theta=180^\circ\times n\pm60^\circ$$

(c) 由公式 $\tan^2\theta=\dfrac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$

$$\frac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}=1 \quad \therefore \quad 1-\cos2\theta=1+\cos2\theta$$

$\therefore \quad \cos 2\theta=0 \qquad \therefore \quad 2\theta=180^\circ\times n+90^\circ$

$$\therefore \quad \theta=90^\circ\times n+45^\circ$$

(11) 試解方程式 $2\sin^2\theta+\sin^2 2\theta=2$

解：公式 $2\sin^2\theta=1-\cos 2\theta, \sin^2 2\theta=1-\cos^2 2\theta$

代入本式

$$1-\cos 2\theta+1-\cos^2 2\theta=2$$

$$\therefore \quad \cos 2\theta(\cos 2\theta+1)=0$$

$$\therefore \quad \cos 2\theta=0 \text{ or } \cos 2\theta=-1$$

$\cos 2\theta=0$ 解之 $\therefore \quad 2\theta=180^\circ\times n+90^\circ$

$$\therefore \quad \theta=90^\circ\times n+45^\circ$$

$\cos 2\theta=-1$ 解之 $2\theta=360^\circ\times n+180^\circ$

$$\therefore \quad \theta=180^\circ\times n+90^\circ$$

(12) $\tan^2\theta+\cot^2\theta=2$ 試解之

解：公式 $\tan^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$, $\cot 2\theta=\dfrac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}$ $\therefore$

代入本式

$$\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}+\frac{1+\cos 2\theta}{1-\cos 2\theta}=2$$

去分母整頓之

$$(1-\cos2\theta)^2+(1+\cos2\theta)^2=2(1-\cos^2 2\theta)$$

$$\therefore\quad 2(1+\cos^2 2\theta)=2(1-\cos^2 2\theta)$$

$$\therefore\quad 2\cos^2 2\theta=0,\quad \therefore\quad 1+\cos4\theta=0$$

$$\therefore\quad \cos4\theta=-1$$

$$\therefore\quad 4\theta=360^\circ\times n+180^\circ \quad \therefore\quad \theta=90^\circ\times n+45^\circ$$

(13) $\sin^4\theta+\cos^4\theta=\dfrac{7}{8}$試解之

解：$\sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

$$=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-\tfrac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

$$=1-\frac{1-\cos4\theta}{4}$$

本方程式爲

$$1-\frac{1-\cos4\theta}{4}=\frac{7}{8}$$

$$\therefore\quad \cos4\theta=\tfrac{1}{2}$$

$$\therefore\quad 4\theta=360^\circ\times n\pm60^\circ \qquad \therefore\quad \theta=90^\circ\times n\pm15^\circ$$

(14) $\cos3x=\cos x$ 試解之

解：本式變形之

$$\cos x-\cos3x=0$$

$$\therefore\quad 2\sin x\sin2x=0$$

$\therefore \quad \sin x=0$ or $\sin 2x=0$

然 $\sin 2x=2\sin x\cos x$，故 $\sin 2x=0$ 之根中含

有 $\sin x=0$ 之根，故本方程式之根爲

$\sin 2x=0$ 解之 $2x=180°\times n \quad \therefore \ x=90°\times n$

(15) 試解次之方程式：——

$$\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta=0$$

解：本式左邊因數分解之

$$\sin\theta+\sin 3\theta+\sin 2\theta=0$$

$$\therefore \quad 2\sin 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta=0$$

$$\therefore \quad \sin 2\theta(2\cos\theta+1)=0$$

$$\therefore \quad \sin 2\theta=0 \text{ or } \cos\theta=-\tfrac{1}{2}$$

故由 $\sin 2\theta=0 \quad 2\theta=180°\times n \quad \therefore \ \theta=90°\times n$

由 $\cos\theta=-\frac{1}{2} \qquad \theta=360°\times n\pm 120°$

(16) 試解次式：——

$$\sin 7\theta-\sin\theta=\sin 3\theta$$

解：移項因數分解之

$$2\cos 4\theta\sin 3\theta-\sin 3\theta=0$$

$$\therefore \quad \sin 3\theta(2\cos 4\theta-1)=0$$

$$\therefore \quad \sin 3\theta \text{ or } \cos 4\theta=\tfrac{1}{2}$$

$\sin 3\theta=0$ 解之 $3\theta=180°\times n$ $\therefore$ $\theta=60°\times n$

$\cos 4\theta=\frac{1}{2}$ 解之 $4\theta=360°\times n\pm 60°$

$\therefore$ $\theta=90°\times n\pm 15°$

(17) 試解次之方程式：——

(a) $\cos 3x=\cos x$　(b) $\cos 3x=\sin x$

(c) $\tan 3x=\cot x$

解： (a) $\cos 3x=\cos x$

$\therefore$ $3x=360°\times n\pm x$

取正符號 $2x=360°\times n$ $\therefore$ $x=180°\times n$

取負符號 $4x=360°\times n$ $\therefore x=90°\times n$

(b) $\cos 3x=\sin x=\cos(90°-x)$

$\therefore$ $3x=360°\times n\pm(90°-x)$

$3x=360°\times n+(90°-x)$ $\therefore$ $x=90°\times n+22°.5$

$3x=360°\times n+(90°-x)$ $\therefore$ $x=180°\times n-45°$

(c) $\tan 3x=\tan(90°-x)$

$\therefore$ $3x=180°\times n+(90°-x)$ $\therefore x=45°\times n+22°.5$

(18) $\cos\theta+\cos 2\theta=\sin 3\theta$ 試解之

解： 移項 $\cos\theta+\cos\theta-\sin 3\theta=0$

$$2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{2\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}=0$$

$$\therefore\quad \cos\frac{3\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right)=0$$

$$\therefore\quad \cos\frac{3\theta}{2}=0 \text{ or } \cos\frac{\theta}{2}=\sin\frac{3\theta}{2}$$

$$\cos\frac{3\theta}{2}=0 \text{ 解之} \frac{3\theta}{2}=180^\circ\times n+90^\circ$$

$$\therefore\quad \theta=120^\circ\times n+60^\circ$$

$$cs\theta\frac{\theta}{2}=\sin\frac{3\theta}{2} \text{ 變形 } \cos\frac{\theta}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{\theta}{2}=360^\circ\times n\pm\left(90^\circ-\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\frac{\theta}{2}=360^\circ\times n+90^\circ-\frac{3\theta}{2} \quad \therefore\ \theta=180\times n+45^\circ$$

$$\frac{\theta}{2}=360^\circ\times n-\left(90^\circ-\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\therefore\ \theta=-360^\circ\times n+90^\circ=360^\circ\times n+90^\circ$$

答 $\theta=120^\circ\times n+60^\circ$ or $\theta=180^\circ\times n+45^\circ$

or $\theta=360^\circ\times n+90^\circ$

(19) $\sin\theta+\sin2\theta=\sin3\theta+\sin4\theta$ 試解之

解： 兩邊變爲積形

$$2\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{7\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right)=0$$

$$2\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{5\theta}{2}\sin\theta=0$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\theta}{2}=0 \text{ or } \cos\frac{5\theta}{2}=0 \text{ or } \sin\theta=0$$

$\cos\frac{\theta}{2}=0$ 解之 $\frac{\theta}{2}=180^\circ\times n+90^\circ$

$$\therefore\quad \theta=360^\circ\times n+180^\circ$$

$\cos\frac{5\theta}{2}=0$ 解之 $\frac{5\theta}{2}=180^\circ\times n+90^\circ$

$$\therefore\quad \theta=\frac{2}{5}(180^\circ\times n+90^\circ)$$

$\sin\theta=0$ 解之 $\therefore\ \theta=180^\circ\times n$

(20) 試解次之方程式：——

$\cos3\theta\cos\theta=\cos7\theta\cos5\theta$

解： 兩邊以2乘之變爲和形

$$\cos 4\theta + \cos 2\theta = \cos 12\theta + \cos 2\theta$$

$$\therefore \quad \cos 4\theta = \cos 12\theta$$

$$\therefore \quad 12\theta = 360^\circ \times n \pm 4\theta$$

$$8\theta = 360^\circ \times n \text{ or } 16\theta = 360^\circ \times n$$

$$\therefore \quad \theta = 45 \times n \text{ or } \theta = 22^\circ.5 \times n$$

(21) $\cos 2\theta = \cos\theta + \sin\theta$ 試解之

解： 設以$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ 代入本式

$$\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos\theta + \sin\theta$$

$$\therefore \quad (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = \cos\theta + \sin\theta$$

$$\therefore \quad \cos\theta + \sin\theta = 0 \text{ or } \cos - \sin\theta = 1$$

由 $\cos\theta - \sin\theta = 1$

$$\cos\theta - \tan 45^\circ \sin\theta = 1$$

$$\cos\theta\cos 45^\circ - \sin 45^\circ \sin\theta = \cos 45^\circ$$

$$\cos(\theta + 45^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$\therefore \quad \theta + 45^\circ = 360^\circ \times n \pm 45^\circ$$

$$\therefore \quad \theta = 360^\circ \times n \text{ or } \theta = 360^\circ \times n - 90^\circ$$

由 $\cos\theta + \sin\theta = 0$ $\quad \sin\theta = -\cos\theta$

$$\therefore \quad \tan\theta = 1 \qquad \therefore \quad \theta = 180^\circ \times n + 135^\circ$$

(22) $\tan\theta + \tan 3\theta = 2\tan 2\theta$ 試解之

解：將本式變形

$$\tan3\theta-\tan2\theta=\tan2\theta-\tan\theta$$

$$\therefore\quad \frac{\sin3\theta}{\cos3\theta}-\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}=\frac{\sin2\theta}{\cos2\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin(3\theta-2\theta)}{\cos3\theta\cos2\theta}=\frac{\sin(2\theta-\theta)}{\cos2\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta}{\cos3\theta\cos2\theta}=\frac{\sin\theta}{\cos2\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\theta(\cos\theta-\cos3\theta)}{\cos3\theta\cos2\theta\cos\theta}=0$$

$$\therefore\quad \frac{2\sin^3\theta\sin2\theta}{\cos3\theta\cos2\theta\cos\theta}=0$$

$$\therefore\quad \frac{4\sin^3\theta\cos\theta}{\cos3\theta\cos2\theta\cos\theta}=0$$

設變爲既約分數式 $\dfrac{\sin^3\theta}{\cos3\theta\cos2\theta}=0$

令分子等於0 $\sin\theta=0$ $\therefore$ $\theta=180°\times n$

(23) 試解次之方程式：——

$$\left.\begin{aligned}\sin(x+y)&=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ \cos(x-y)&=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$$

解： 由(1),(2)

$$x+y=180^\circ\times n+(-1)^n 66$$

$$x-y=360^\circ\times m\pm 45^\circ$$

各邊相加又相減

$$2x=180^\circ\times n+660^\circ\times m+(-1)^n 60^\circ\pm 45^\circ$$

$$2y=180^\circ\times n-360^\circ\times m+(-1)^n 60^\circ\pm 45^\circ$$

$$\therefore\quad x=90^\circ\times n+180^\circ\times m+(-1)^n 30^\circ\pm 22^\circ.5$$

$$y=90^\circ\times n-180^\circ\times m+(-1)^n 30^\circ\pm 22^\circ.5$$

故得次之二組答數

$$\begin{cases} x=90^\circ(n+2m)+(-1)^n 30^\circ+22^\circ.5 \\ y=90^\circ(n-2m)+(-1)^n 30^\circ-22^\circ.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=90^\circ(n+2m)+(-1)^n 30^\circ-22^\circ.5 \\ y=90^\circ(n-2m)+(-1)^n 30^\circ+22^\circ.5 \end{cases}$$

(24) 於$\triangle ABC$

$\sin(180^\circ-A)=\sqrt{2}\cos(B-90^\circ)$，$\sqrt{3}\cos A$

$=-\sqrt{2}\cos(180^\circ+B)$ 時試求 A,B,C 各角之値，

解： 本方程式簡單之

$$\left.\begin{aligned} \sin A=\sqrt{2}\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \sqrt{3}\cos A=\sqrt{2}\cos B \cdots\cdots\cdots(2) \end{aligned}\right\}$$

各方程式平方之 $\sin^2 A=2\sin^2 B$

$$3\cos^2 A=2\cos^2 B$$

各邊相加 $\sin^2 A+3\cos^2 A=2$

$\therefore\ 1-\cos^2 A+3\cos^2 A=2$

$\therefore\ 2\cos^2 A=1$, $\therefore\ 1+\cos 2A=1$

$\therefore\ \cos 2A=0$ $\therefore\ 2A=180\times n+90^\circ$

$\therefore\ A=90^\circ\times n+45^\circ$

然A為三角形之一角，故$0^\circ<A<180^\circ$，故$A=45^\circ$

又 $A=135^\circ$

設 $A=45^\circ$ 由 (1) $\sqrt{2}\sin B=\sin 45^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \sin B=\frac{1}{2}$

$\therefore\ B=30^\circ$ or $B=150^\circ$

然 設 $B=150^\circ$ 則$A+B=195^\circ$不能搆成三角形，

故$A=45^\circ$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$

次設 $A=135^\circ$由(1)

$\sqrt{2}\sin B=\sin 135^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ \sin B=\frac{1}{2}$ $\therefore\ B=30^\circ$ or $B=150^\circ$

然 設$B=150^\circ$則$A+B=285^\circ$，不能搆成三角形，

故 $A=135^\circ$, $B=30^\circ$, $C=15^\circ$

故以此二組之值與原方程式驗之，知後者與原式不合之故。 答 $A=45^\circ$, $B=30^\circ$, $C=105^\circ$

(二) 消去法

問題及解法：

(1) 由 $\sin\theta=a$, $\cos\theta=b$ 試消去 θ

解：以 $\sin\theta=a$, $\cos\theta=b$ 代入公式

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$\therefore \quad a^2+b^2=1$$

(2) 由
$$\left.\begin{aligned} a\sin\theta+b\cos\theta=c \cdots\cdots\cdots(1)\\ p\sin\theta+q\cos\theta=r \cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}\text{試消去 }\theta$$

解：$a\sin\theta+b\cos\theta=c \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$p\sin\theta+q\cos\theta=r \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)(2)就 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 而解之

$$\sin\theta=\frac{cq-pr}{aq-bp}, \quad \cos\theta=\frac{ar-cp}{aq-bp}$$

以此值代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\therefore \quad \left(\frac{cq-br}{aq-bp}\right)^2+\left(\frac{ar-cp}{aq-bp}\right)^2=1$$

$$\therefore \quad (cq-br)^2+(ar-cp)^2=(2q-bp)^2$$

(3) 由方程式
$$\left.\begin{aligned} \sin\theta+\sin\psi=a \cdots\cdots(1)\\ \cos\theta+\cos\theta\psi=b \cdots\cdots(2)\\ \cos\theta\ (\theta-\psi)=c \cdots\cdots(3)\end{aligned}\right\}\text{試消去 }\theta,\psi$$

解：(1)(2)平方之

$$\sin^2\theta \ +2\sin\theta\sin\psi+\sin^2\psi=a^2$$

$$\cos^2\theta \ +2\cos\theta\cos\psi+\cos^2\psi=b^2$$

各邊相加　$2+2\cos(\theta-\psi)=a^2+b^2$

代入(3)　$2+2c=a^2+b^2$

$$\therefore \quad a^2+b^2=2(1+c)$$

(4)　由 $\left.\begin{aligned} x&=a\cos(\theta-\alpha)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)\\ y&=b\cos(\theta-\beta)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)\end{aligned}\right\}$ 試消去 θ

解：(1)(2) 變形

$$\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha=\frac{x}{a}$$

$$\cos\theta\cos\beta+\sin\theta\sin\beta=\frac{y}{b}$$

解此 $\cos\theta,\sin\theta$ 之二元一次方程式

$$\cos\theta=-\frac{\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{b}\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$$

$$\sin\theta=\frac{\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos x}{\sin(\alpha-\beta)}$$

以此值代入 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$$\left\{\frac{\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos x}{\sin(\alpha-\beta)}\right\}^2+\left\{-\frac{\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{b}\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}\right\}^2=1$$

$$\therefore\ \left(\frac{x}{a}\cos\beta-\frac{y}{b}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{x}{a}\sin\beta-\frac{y}{b}\sin\alpha\right)^2$$

$$=\sin^2(\alpha-\beta)$$

簡單之$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-2\dfrac{xy}{ab}\cos(\alpha-\beta)=\sin^2(\alpha-\beta)$

(三) 不等式及極大極小

問題及解法：

(1) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta>2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$試證之

解：取兩邊之差而變形之

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$

$=\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1+\sin^2\beta-2\sin\beta+1$

$=(\sin\alpha-1)^2+(\sin\beta-1)^2$ ....(1)

此式之右邊一般爲正

$\therefore\ \sin^2\alpha+\sin^2\beta>2(\sin\alpha+\sin\beta-1)$

(2) A,B,C皆爲正銳角時， 則

$\sin A+\sin B+\sin C>\sin(A+B+C)$ 試證之

解：作兩邊之差而變形之

$$\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B+2C}{2}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B+2C}{2}\right)$$

$$=4\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{B+C}{2}$$

然 A,B,C 均爲正銳角，故

$\frac{A+B}{2},\frac{A+C}{2},\frac{B+C}{2}$亦皆爲銳角

故上式之右邊爲正

$$\sin A+\mathrm{Sin}B+\sin C>\sin(A+B+C)$$

(3) 於 $\triangle ABC$. 設 $C>\frac{\pi}{2}$ 時，試證明次之不等式

$$\tan A\tan B<1$$

解： 作兩邊之差

$$\tan A\tan B-1=\frac{\sin A\mathrm{oin}B}{\cos A\cos B}-1$$

$$=\frac{\sin A\sin B-\cos A\cos B}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{-\cos(A+B)}{\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\cos C}{\cos A\cos B}\ (\text{因}A+B+C=180°)$$

然因 $C>90°$ 故 A,B 皆為銳角，從而 $\sin A$, $\sin B$ 均為正　故 $\cos C<o$ 又上式之右邊為負

$$\therefore\ \tan A\tan B<1$$

(4)　試解次式

$$\sin x>\cos x\qquad \text{但 } 360°>x>o°$$

解：移項 $\sin x-\cos x>o$

變為積形 $\sin x-\tan 45°\cos x>o$

$$\therefore\ \frac{\sin x\cos 45°-\sin 45°\cos x}{\cos 45°}>o$$

$$\therefore\ \frac{\sin(x-45°)}{\cos 45°}>0$$

然　$\cos 45°>o$ 故 $\sin(x-45°)>o$

正弦之第一第二象限為正，故

$$180°>x-45°>o°$$

$$\therefore\ 225°>x>45°$$

極大極小問題：

(1)　$\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 之極大及極小值試求之

解：$\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sin x-\tan 60°\cos x$

$$=\frac{\sin x\cos 60^\circ-\sin 60^\circ\cos x}{\cos 60^\circ}$$

$$=\frac{\sin(x-60^\circ)}{\cos 60^\circ}$$

$$=2\sin(x-60^\circ)$$

此式右邊 $\sin(x-60^\circ)=1$ 時爲極大，

$\sin(x-60^\circ)=-1$ 時爲極小，故

$x=360^\circ\times n+150^\circ$ 時極大值爲2

$x=300^\circ\times n-30^\circ$時極小值爲$-2$

(2) $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 之 θ 何時爲極大或極小並求 θ 之一般值

解： $\sin^6\theta+\cos^6\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$

$(\sin^4\theta-\sin^2\theta\cos^2\theta+\cos^4\theta)$

$=1-3\sin^2\theta\cos^2\theta$

$=1-\frac{3}{4}\sin^2\theta$

因此式右邊 $\sin^2 2\theta$ 爲偶數冪故恆爲正

$\therefore\ 1>\sin^2 2\theta>o$

故 $\sin^2 2\theta$ 之值 1 爲其極大值，0 爲其極小值

從而 $\sin^2 2\theta$ 之極大時 $1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta$

卽 $\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 爲極小。

$\sin^2 2\theta$ 之極小時，$\sin^6\theta+\cos^6\theta$ 爲極大。

因而適合 $\sin^2 2\theta=1$ 之 θ 之一般值爲 $\theta=90^\circ\times n+45^\circ$

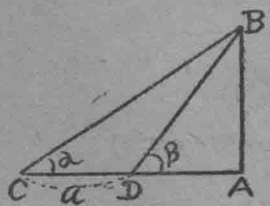
適合 $\sin^2\theta=0$ 之 θ 之一般值爲 $\theta=90^\circ\times n$

故極小值爲 $\theta=90^\circ\times n+45^\circ$ 時，爲 $\frac{1}{4}$，而極大值爲

$\theta=90^\circ\times n$ 時爲 1

III 應用問題

(1) 平地上有一塔，在此平地上之一點至其頂上之仰角爲 α°。又自此點向塔進 a 丈之地點之仰角爲 β°，問塔之高幾何？



解：設所求塔之高 AB＝x

$$\therefore \frac{AC}{x}=\cot\alpha,\ \frac{AD}{x}=\cot\beta$$

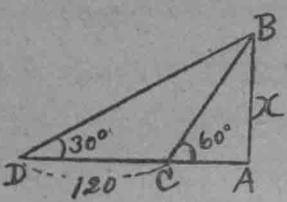
$$\therefore AC=x\cot\alpha$$

$$AD=x\cot\beta$$

然 $AC-AD=a$

$$\therefore x\cot\alpha-x\cot\beta=a \qquad \therefore x=\frac{a}{\cot\alpha-\cot\beta}$$

(2) 欲測小山之高，在山麓之一點至山頂之仰角爲60°，再在水平面上向後退120丈之地點，其仰角爲30°，問此小山之高幾何？



解： 設山高 $AB = x$

$AD = x\cot 30°$

$AC = x\cot 60°$

然 $AD - AC = 120$

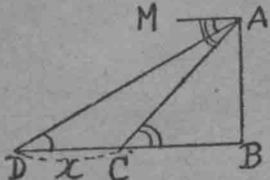
$\therefore \quad x\cot 30° - x\cot 60° = 120$

$$\therefore \quad x = \frac{120}{\cot 30° - \cot 60°} = \frac{120}{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{120\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3} = 60 \times 1.732$$

$= 103.92$ 答約 104 丈

(3) 自高 500 尺之山上，望見其麓上之圓形池，測得池畔之最近點與最遠點之俯角爲 45° 及 30°，試求池之直徑。



解： 設池之直徑 $CD = x$

$BD = 500\cot ADB = 500\cot 30°$

$BC = 500\cot ACB = 500\cot 45°$

然 $x = BD - BC$

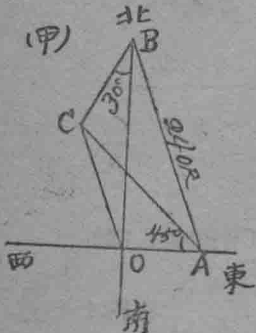
$\therefore \quad x = 500\cot 30° - 500\cot 45°$

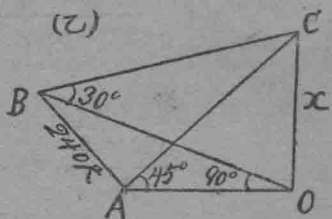
$= 550(\cot 30° - \cot 45°)$

$= 500(\sqrt{3} - 1) = 500(1.732 - 1)$

$=500\times 0.732=366$ 　　　答 366 尺

(4) 有塔自其正東之點A,正北之點B,測其仰角,由A爲 45°,由B爲 30°,而 A,B 之距離爲 240 尺,塔高幾何?





解: 以 OC 爲塔之高,設 CO=x

$BO=x\cot 30^\circ$, 　$AO=x\cot 45^\circ=x$

然 $\angle AOB=90^\circ$

$\therefore\ \overline{AO}^2+\overline{BO}^2=\overline{AB}^2$

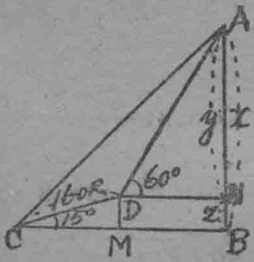
$\therefore\ x^2+x^2\cot^2 30^\circ=240^2$

$\therefore\ x^2[1+(\sqrt{3})^2]=240^2$

$\therefore\ x^2=\dfrac{240^2}{2}$ 　$\therefore\ \dfrac{240}{2}=120$ 尺……答

(5) 某人測得自山麓之一點至山頂之仰角爲 45°, 由此向山頂登傾斜 15° 之直坡160尺,再測至山頂之仰

角，得$60°$，試求山之高。(但未滿一寸四捨五入)



解：由直角三角形 ABC

$$AB=BC=x$$

由直角三角形 ADN

$$DN=y\cot 60°$$

由直角三角形 CDM

$$Z=DM=160°\sin 15°,\quad CM=160\cos 15°$$

然 $x=y+z=y+160\sin 15°$ ……………………(1)

及 $BC=CM+BM$

故 $x=160\cos 15°+y\cot 60°$ ………………………(2)

(1),(2)就 x,y 解之

$$\therefore\ y=\frac{160(\cos 15°-\sin 15°)}{1-\cot 60°}$$

然 $\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$，$\cos 15°=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

$\cot 60°=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 故

$$y=\frac{160\left(\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)}{1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{80\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

$$=\frac{80\sqrt{6}}{\sqrt{3}-1}=40\sqrt{6}\ (\sqrt{3}+1)$$

由(1) $x=40\sqrt{6}\,(\sqrt{3}+1)+160\times\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$$=120\sqrt{2}+40\sqrt{6}+40\sqrt{6}-40\sqrt{2}$$

$$=80\sqrt{2}+80\sqrt{6}=80\ (\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

$$=80(1.4142+2.4494)$$

$=309.088$ 答309尺1寸

(6) $\triangle ABC$ 設 $a=1, b=\sqrt{2}, A=30°$ 之時，試求 B, C

解：由正弦比例式 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\sin 30°}{1}$$

$$=\sqrt{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\therefore$ $\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 設解此求 $180°$ 以內之正角

則 $B=45°$ or $135°$

$C=105°$ or $15°$

答 $\left.\begin{matrix}B=45°\\C=105°\end{matrix}\right\}$ or $\left.\begin{matrix}B=135°\\C=15°\end{matrix}\right\}$

(7) △ABC 設 $a=20, b=21, c=29$ 時，試求 C

解： 由公式 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$=\frac{20^2+21^2-29^2}{2\times20\times21}=0$$

$$\therefore\quad C=90°$$

(別解) 由公式 $\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$

$$2p=a+b+c=20+21+29=70$$

$$\therefore\quad p=35$$

$$\therefore\quad p-a=15,\quad p-b=14,\quad p-c=6$$

$$\therefore\quad \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{15\times14}{35\times6}}=1$$

$$\therefore\quad \frac{C}{2}=45°\qquad\therefore\quad C=90°$$

(8) △ABC 設 $\tan B=1$, $\tan C=2$, $b=100$ 時

則 $a=60\sqrt{5}$ 試證明之

解： A 及 B 爲三角形之內角，故 $\sin A, \sin B$ 均爲正

$$\therefore\quad \sin B=\frac{\tan B}{\sqrt{1+\tan^2 B}}=\frac{1}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

又 $\tan A = -\tan(B+C) = -\dfrac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \tan C}$

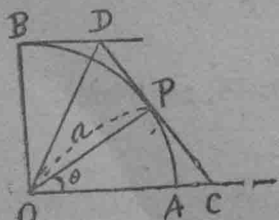
$$= \frac{1+2}{1-2} = 3$$

$$\therefore \quad \sin A = \frac{\tan A}{\sqrt{1+\tan^2 A}} = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

故由正弦比例式 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$

$$a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{100 \times \dfrac{3}{\sqrt{10}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} = 60\sqrt{5}$$

(9) 在四分圓 AOB 弧上之任意之點P引切線，半徑OA之延長C及半徑 OB之端B之切線，令會於D，設半徑爲a，$\angle AOP = \theta$，作表OC，BD，CD之式，然後由式之變形證明 $\dot{O}C = CD$



解：由直角三角形OCP

$$OC = \frac{OP}{\cos COP} = \frac{a}{\cos\theta}$$

由直角三角形 BOD

$$BD = OB\tan BOD = a\tan\frac{90^\circ - \theta}{2}$$

又 $CD=DP+CP=BD+CP$

$$=a\tan\frac{90^\circ-\theta}{2}+a\tan\theta$$

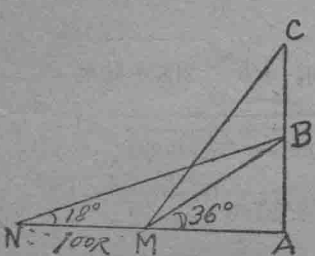
$$=a\left(\tan\frac{90^\circ-\theta}{2}+\tan\theta\right)=\frac{a\sin\frac{90^\circ+\theta}{2}}{\cos\frac{90^\circ-\theta}{2}\cos\theta}$$

然 $\sin\frac{90^\circ+\theta}{2}=\cos\left(90^\circ-\frac{90^\circ+\theta}{2}\right)=\cos\frac{90^\circ-\theta}{2}$

$$\therefore\quad CD=\frac{a}{\cos\theta}\qquad\therefore\quad OC=CD$$

(10) 有立於海濱山上之燈台，今在海濱之某地點測山及燈台之頂點之仰角，各得$36^\circ, 54^\circ$，次由此觀點後退100尺，再測山頂之仰角，得180°

試求燈台之高至尺位，但$\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$



解：$\angle AMB=36^\circ$

$\angle ANB=18^\circ$

$\therefore\quad \angle MBN=18^\circ$

$\therefore\quad BM=MN=100$

又 $\angle AMC=54^\circ$

$\angle AMB=36^\circ$

$\therefore \quad \angle BMC = 18^\circ$

$\angle AMC = 54^\circ$

$\therefore \quad \angle ACM = 36^\circ$

故 $\triangle BMC$ 設 $BC = X$

$$\frac{x}{\sin 18^\circ} = \frac{100}{\sin 36^\circ} \quad \therefore \ x = \frac{100\sin 18^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{100\sin 18^\circ}{2\sin 18^\circ \cos 18^\circ}$$

$$\therefore \quad x = \frac{50}{\cos 18^\circ}$$

然 $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ 故 $\cos 18^\circ = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$

$$\therefore \quad x = \frac{200}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$= \frac{200\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10+2\sqrt{5}} = \frac{100\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{5+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{100\sqrt{10+2\sqrt{5}}\,(5-\sqrt{5})}{20}$$

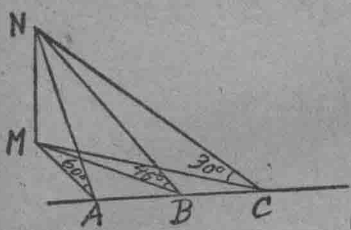
$$= 5\sqrt{(10+2\sqrt{5})(5-\sqrt{5})^2} = 5\sqrt{200-40\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{5000-1000\sqrt{5}} = \sqrt{5000-\sqrt{5000000}}$$

$$= \sqrt{5000-2236.06\cdots\cdots} = \sqrt{2763\cdots\cdots}$$

$= 52$ 答 52 尺

(11) 有東西貫通之道路 ABC，A 之正北有一塔自 A,B 及 C 三處，測塔之仰角，得各爲 $60°,45°,30°$ 然 B 爲 AC 之中點，試證之，



解：$\triangle AMN,\triangle BMN,\triangle CMN$均爲直角三角形 故設$MN=x$

$AM=x\cot 60°$,

$BM=x\cot 45°$,

$CM=x\cot 30°$

由直角三角形 $\triangle AMB,\triangle AMC$

$$\overline{AB}^2=x^2\cot^2 45°-x^2\cot^2 60°=\left(1-\frac{1}{3}\right)x^2=\frac{2}{3}x^2$$

$$\overline{AC}^2=x^2\cot^2 30°-x^2\cot^2 60°=\left(3-\frac{1}{3}\right)x^2=\frac{8}{3}x^2$$

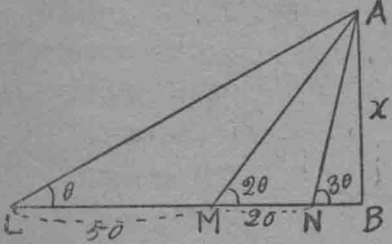
$$\therefore\quad \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}=\frac{\frac{2}{3}x^2}{\frac{8}{3}x^2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{AC}=\frac{1}{2}\quad \therefore\quad AB=\frac{1}{2}AC$$

故 B 爲 AC 之中點。

(12) 有塔 AB，自其基底 B所引水平面上之一直線之三

點 L.M.N.測之，知∠AMB為 ∠ALB 之二倍，∠ANB 為 ∠ALB 之三倍，且 LM=50尺，MN=2尺。試求塔 AB 之高。



解：設 AB=X,

∠ALB=θ

∠AMB=2θ,

∠ANB=3θ

$\therefore\quad BL=x\cot\theta, BM=x\cot2\theta, BN=x\cot3\theta$

$\therefore\quad x\cot\theta-x\cot2\theta=50\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$\therefore\quad x\cot2\theta-x\cot3\theta=20\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

(1)之左邊變形之

$$(\cot\theta-\cot2\theta)\,x=\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{\cos2\theta}{\sin2\theta}\right)x$$

$$=\frac{x\sin\theta}{\sin2\theta\sin\theta}=\frac{x}{\sin2\theta}$$

$\therefore\quad \dfrac{x}{\sin2\theta}=50 \qquad \therefore\quad x=50\sin2\theta\cdots\cdots(3)$

同樣(2)變形

$x=40\sin3\theta\cos\theta\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

由(3)與(4)消去x

$$50\sin2\theta=40\sin3\theta\cos\theta$$

$$\therefore\quad 5\sin2\theta=2(\sin4\theta+\sin2\theta)$$

$$\therefore\quad 3\sin2\theta=2\sin4\theta$$

$$\therefore\quad 3\sin2\theta=4\sin2\theta\cos2\theta$$

$\therefore \sin2\theta=0$ 又 $\cos2\theta=\frac{3}{4}$

然θ為銳角，由題意已甚明，故$\sin2\theta$不為0

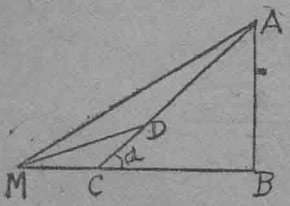
$\therefore\quad \cos2\theta=\frac{3}{4}$　(2θ亦為銳角)

$$\therefore\quad \sin2\theta=\sqrt{1-\cos^2 2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

故由(3) $x=50\sin2\theta=\dfrac{50\sqrt{7}}{4}=\dfrac{100\sqrt{7}}{8}=33.0$

答約33尺

(13) 已知自坡路之頂點至平地上之一點之俯角為30°，由此下坡路$\frac{3}{4}$測與同點之俯角，得15°，今設坡路之傾斜角為α



則 $\tan\alpha=\dfrac{3}{3\sqrt{3}-2}$ 試證之

解：設$CM=a$，$AC=b$

則$CD=\frac{1}{4}b$

$\angle MAC=\alpha-30°$，$\angle MDC=\alpha-15°$

故由 $\triangle AMC$ $$\frac{a}{\sin(\alpha-30^\circ)}=\frac{b}{\sin30^\circ}\cdots\cdots\cdots(1)$$

由 $\triangle DMC$ $$\frac{a}{\sin(\alpha-15^\circ)}=\frac{\frac{1}{4}b}{\sin15^\circ}\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)與(2) $\frac{a}{b}=\frac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin30^\circ}$，$\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{4}\sin(\alpha-15^\circ)}{\sin15^\circ}$

$$\therefore\quad \frac{\sin(\alpha-30^\circ)}{\sin30^\circ}=\frac{\sin(\alpha-15^\circ)}{4\sin15^\circ}\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha\cos30^\circ-\cos\alpha\sin30^\circ}{\sin30^\circ}$$

$$=\frac{\sin\alpha\cos15^\circ-\cos\alpha\sin15^\circ}{4\sin15^\circ},$$

$$\therefore\quad \cot30^\circ\sin\alpha-\cos\alpha=\tfrac{1}{4}(\cot15^\circ\sin\alpha-\cos\alpha)$$

$$\therefore\quad 4(\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha)=(2+\sqrt{3})\sin\alpha-\cos\alpha$$

$$\therefore\quad (3\sqrt{3}-2)\sin\alpha=3\cos\alpha$$

$$\therefore\quad \tan\alpha=\frac{3}{3\sqrt{3}-2}$$

IV. 雜 題

（注意）　最近數年間，本國各著名大學及專門學校之入學試題，據編者所知，皆不出本書正文之範圍茲因正文中未曾將相同及類似之題，一一標出校名，恐讀者不悉，故再擇數題附於篇尾，以爲雜題。

(1)　prove $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=45^{\circ}$　　（北洋）

解：令設 $A=\tan^{-1}\frac{1}{2}$,　　$B=\tan^{-1}\frac{1}{3}$

則 $\tan A=\frac{1}{2}$,　　$\tan B=\frac{1}{3}$

$$\therefore\quad \tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=1$$

今 $\tan 45^{\circ}=1$　　$\therefore$　左 $=45^{\circ}$

(2)　given $\sin A=\dfrac{3}{5}$ find the valuse of cosA, tanA, and secA　　（北女師大）

解：$\because\quad b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

$$\therefore\quad \cos A=\frac{b}{c}=\frac{4}{5},\qquad \therefore\quad \tan A=\frac{a}{b}=\frac{3}{4},$$

$$\therefore\quad \sec A=\frac{c}{b}=\frac{5}{4}$$

(3) If $\sin x=\sqrt{3}$ $\cos x=\frac{1}{2}$, find the value of $\cos 2x$ (北女師大)

解: By the formula $\cos 2x$

$$=\cos^2 x-\sin^2 x$$

Now, $\cos^2 x=\frac{1}{4}, \sin^2 x=(\sqrt{3})^2=3$

$$\therefore \quad \cos 2x=\frac{1}{4}-3=\frac{-11}{4}=-2\tfrac{3}{4}$$

(4) If $\cos x=-.5$, and $\tan x$ is positive, find the values of $\sin x$ and $\cot x$. Find also the value of x both in degrees and in radians. (南開)

解: $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-(-.5)^2}=\sqrt{0.75}$

$$\therefore \quad \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sqrt{.75}}{-.5}$$

$$\therefore \quad \cot x=\frac{1}{\frac{\sqrt{.75}}{-.5}}=\frac{-.5}{\sqrt{.75}}$$

$\cos x=-.5=-\frac{1}{2}$, but $\tan x$ is positive.

$\therefore$ angle of x must be in III quadrant.

$$\therefore \quad x=60^\circ+180^\circ=240^\circ$$

(5) 試證 $2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin^2 x-\cos^2 x$

(南洋)

解： 左邊 $=2\ \sin x\ \cos 45+\cos x \sin 45$

$$(\sin x\ \cos 45-\cos x\ \sin 45)$$

$$=2(\sin^2 x\times\frac{2}{4}-\cos^2 x\times\frac{2}{4})$$

$$=2\times\tfrac{1}{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)=\sin^2 x-\cos^2 x$$

(6) Prove $\tan 2x+\sec 2x=(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)$

(北洋)

解： $\tan 2x+\sec 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x-\sin^2 x}$

$$=\frac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}+\frac{1}{\cos x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{2\cos x\sin x+\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}$$

$$=\frac{(\cos x+\sin x)^2}{(\cos x+\sin x)(\cos x-\sin x)}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}$$

(7) 解 $\sin 2x=2\cos x$ (北農大)

解： $\sin 2x=2\sin x\cos x \quad 2\cos x=2\sin x\cos x$

$(1-\sin x)\cos x=0 \qquad \therefore \quad \cos x=0,\ \sin x=1$

$$\therefore \quad x=90^\circ \text{or } 270^\circ$$

(8) 試求 $\tan 75$ 及 $\sin(22\tfrac{1}{2})$之值 (南洋)

（以 30° 及 45° 兩函數而求）

解： $\tan 75=\tan(30+45)=\dfrac{\tan 30+\tan 45}{1-\tan 30\tan 45}$

但 $\tan 30=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\tan 45^\circ=1$

$$\therefore\ \tan 75=\frac{\dfrac{\sqrt{3}}{3}+1}{1-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+3}{3}\cdot\frac{3}{3-\sqrt{3}}$$

$$=\frac{(3+\sqrt{3})^2}{9-3}=\frac{12+6\sqrt{3}}{6}=2+\sqrt{3}$$

$$\sin 22^\circ\frac{1}{2}=\sin 45^\circ\times\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

(9) 若 $\tan^{-1}x+\tan^{-1}(1-x)=\tan^{-1}\left(\dfrac{4}{3}\right)$

則 x 之值如何？ （南洋）

解： 設 $A^3=\tan^{-1}x$，$B=\tan^{-1}(1-x)$

$$\therefore\quad \tan A = x \qquad \tan B = 1 - x$$

$$(A+B) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \quad \tan(A+B) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\therefore\quad \frac{x+1-x}{1-x+x^2} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore\quad 4x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\therefore\quad (2x-1)^2 = 0 \quad 卽 (2x-1) = 0$$

$$\therefore\quad x = \tfrac{1}{2}$$

（三　角　法　終）

物理學問答目次

物理學問答

I 物 性

(A) 物體通性，分子現象

(1) 研究物理學之宗旨為何？ (北洋大)

解： 物理學乃研究物質自身及其相互變化(能)之理，以物質，力，運動，熱，音，光，磁氣，電氣等為材料，由此諸現象而發現自然法則，應用此等法則以增進人羣之幸福，是為研究物理學之目的。

(2) 物，物質，物體等之物理學的意義如何？

解： 佔有一定之空間，得由吾人五官之感覺而認知其存在者曰物質。物質之分量，大小，形狀等同時注意時，曰物體。如桌，小刀，書藉等皆為物體。而方桌由木造成，小刀由鐵造成，書藉由紙造成。故木，鐵，紙皆為物質。物之名詞，在物

理學上無意義。

（註）能佔宇宙間之地位者稱物質。能顯作用者稱能力。

(3)　物質三態之區別若何？

解：固體　形狀體積均不易變更，如鐵，石，木等。

液體　形狀易變而體積難變。如水，油，水銀等。

氣體　形狀體積均易變更，如空氣是。

(4)　何謂 C. G. S. 單位？

解：長之基本單位1糎 (Centimeter 記號 Cm.) 卽米原器線間之$\frac{1}{100}$，質量之基本單位1克 (Gram 記號 G. or Gr.)，卽瓩原器之$\frac{1}{1000}$，時間之基本單位1秒(Second記號S.)卽平均太陽日1日之$\frac{1}{86400}$以此等單位爲基本而組成之C.G.S制，曰C.G.S單位。

（註）法國制(C.G.S)長度Cm (糎) 重量 G (克)時間 S(秒) 英美制 (F.P.S.) 長度 Ft 呎) 重量 P (磅)時間S(秒)

(5)　密度與比重之意義，並二者之區別若何？

解：物體單位體積中所含之質量，謂之密度。其關係

式爲　密度$d=\dfrac{\text{質量}m}{\text{體積}v}$或質量$m=$密度$d\times$體積$v$

比重爲一物體之重量與同體積之4°c之水之重量之比即比重$=\dfrac{\text{物體之重量}}{\text{與物體同體積之水重}(4^\circ c)}$其區別以密度爲單位體積中所含之質量比重物密度與4°c之水之密度之比，即比重$=\dfrac{\text{物體之密度}}{\text{水之密度}}$而4°c時之水一立方米糎(c.c.)重一克(gram)，故體積之單位用立方糎，質量之單位用克時，即在C.G.S制時，則密度與比重之數值相同，即比重＝密度(C.G.S.)又比重爲質量之比，故常爲不名數，密度所以表量，故常爲名數。又密度通常以一立方糎中之克表之。

(6)　物體之密度，質量，體積之關係如何？

解：　密度$=d$，質量$=m$，體積$=v$

$$d=\frac{m}{v}\quad\therefore\quad v=\frac{m}{d}$$

$$\text{卽體積}=\frac{\text{質量}}{\text{密度}}$$

換言之，卽體積與質量爲正比，與密度爲反比。

(7)　有正方形之木塊，已知其長爲6寸，寬爲2寸，厚爲4寸，其質量爲1125克，試求其比重。

解： 木塊之體積爲$\frac{6\times2\times4}{0.33^3}$c.c.

用 C.G.S 制時，其密度與比重之數值相等，

$\therefore$ 比重$=1125\div\frac{6\times2\times4}{0.33^3}=0.84$……答。

(8) 有木塊一方，其切面之面積爲 600 平方糎，長爲 500 cm. 質量爲150瓩，試求其密度。

解： 木塊之體積$=600\times500=300000$c.c.

$\therefore$ 密度$=\frac{150000}{300000}=0.5$……答

(9) 試說明物質之通有性。

解： (a) 塡充性 凡物質皆佔有一定之空間卽塡充空間。

(b) 不可入性 卽二物質不能同時佔有同一之空間。

(c) 有孔性 凡物質皆有多數之微細空隙。

(d) 重量 物質皆有重量。

(e) 慣性 物質常有持續其靜止或運動狀態之性。

(f) 不滅性 物質雖常因自然之現象而變其狀態或性，但並非消滅亦非生產，卽不能創造亦不能消滅。

(10) 質量與重量之分別若何？

解：質量爲組成物體之物質之量，即物體所含物質多少之量，故常有一定，不因時地而異，重爲由重力所生力之量即作用於物體之重力之量，即輕重之量，常因地球上之位置，而變更，若其距地球過遠，則其值即等於零。

在地球之同一位置上，物體之重量與質量爲正比

(註) 地面上之物體與地心間之引力，謂之重力。作用於物體之重力之量，謂之物體之重量。

(11) 萬有引力之意義？

解：二物體間之引力，與其兩質量相乘之積爲正比例，與其距離之自乘爲反比例之力，相互牽引，是謂萬有引力(Universal Gravitation)。

(12) 試由萬有引力說明下列二事

(a) 在地球之同一位置上，物體之重量與質量爲正比例。

(b) 上昇愈高，則其重量愈減。

解：(a) 重力即使物體生重量之力，即萬有引力之一，但萬有引力與二物體質量相乘之積爲正比例，地球之質量爲常數。又在地球之同一位置上，

物體與地球間之距離相等，故引力與物體之質量為正比，質量加大，重量亦隨之而大。

(b) 物體上昇愈高，則其與地球間之距離亦愈大。但萬有引力與二物體間之距離之平方為反比，故其重量愈減。

(13) 太陽與地球間之引力設為1，則太陽與木星間之引力為若干？

解： 木星與太陽間之距離，為地球與太陽間之5倍，木星之質量，為地球之質量之320倍，設太陽之質量為M，地球之質量為M′，太陽木星間之引力為F.則得下式

$$\frac{MM'}{1^2}:\frac{320M'M}{5^2}=1:F$$

$$\therefore\ F=12.8\cdots\cdots\text{答}$$

(14) 分子及分子引力之意義？

解： 將物質用物理的方法，分至極微之粒子。換言之，即將物質逐漸剖分，不失其原有之性質，至不能再分之極限之微粒，謂之分子。此種想像，稱分子說。

物體之分子距離甚近時，有互相牽引之力，謂之分子引力。同質分子間之引力，稱凝集力。異質

分子間之引力，稱附着力。

(15) 試說彈性之意義及火客法則(Hook's law)！

解：受外力而變形，外力去後復變原形之物體，謂之彈性。有彈性之物體，稱彈性體。如鋼鐵，橡皮等。與外力反抗在彈性體內所生之力，稱彈力。彈性體，外力去時，得復其原狀之限界，稱性際限。

在彈性際限內，物體之形狀，體積之變化，與所受之外力為正比例，此稱火客法則。

(註) 形狀之彈性，唯固體物有之。

(16) 試就氣鎗，弓，時計之發條，說明應用彈性之裝置。

解：氣鎗係利用外力，壓縮空氣於鎗身內，更借空氣之彈力，以射出彈丸。弓係用外力彎曲之，更借其彈力以射出其矢。時計之發條，係用外力捲成圓形，更借彈力以迴轉齒輪。

(17) 彈簧秤上，懸以 10 斤之物體，其延長為 4cm. 今設其延長 12 cm. 當懸若干斤之物體？

解：設物體之重為 x 斤，由火客(Hook's law)法則，得

$$4:12=10:x$$

$\therefore$ $x=30$斤……答

(18) 何謂表面張力？

解：液體之表面，常顯緊張之作用，如薄膜然，此稱表面張力。例如細小之鐵針，可浮於水面 即表面張力之作用。

(19) 試由分子說，說明擴散及溶解之現象？

解：由分子說，則固，液，氣三態物體之分子皆在運動之狀態。氣體分子之運動爲最活潑。液體次之。固體又次之。擴散乃各種液體之分子在其接觸面上，往復運動，因而混入於異類之液中，及時旣久，兩液遂混而爲一之現象。溶解則爲固體之分子混入於液體之分子中之現象。

(20) 氣體之擴散性與生物之關係若何？

解：空氣中時時發生之二氧化碳 (CO_2)，隨生隨卽擴散，與動物之呼吸，故無妨礙。且散至各處，以助植物之生長。再由植物呼出之養氣，亦隨生隨卽擴散於各處，以供動物之吸入。

(21) 試說明毛細管現象(Capillary Phenomena)！

解：試以兩端開口之細管，插於液中，卽呈如次之二現象。

(a)　液能濕管時，(如水與玻璃)，液即上昇管中，液面作凹形。

(b)　液不能濕管時(如水銀與玻璃)管中液較管外液面爲低，其液面成凸形。

如上之現象，管愈細愈顯，故稱毛細管現象。管內外液面高度之差，每與管之內徑成反比例，(此謂之 Joule's Law)

此現象之實例如吸墨紙之吸墨水，及油之由燈心上昇等皆是。

(B) 液　體

(1)　試述巴斯加 (Pascal) 之原理！

解：　液體之一部分增加壓力時，其壓力之強度傳達於各方面，無增無減，即凡加壓力於液體之一部時，其壓力之強度，無增減而傳達於液體之各部，稱曰巴斯加原理。

(2)　今有一船，其水線下 7 米之處，生有10糎平方之小孔，今欲用板當其孔，以防水之浸入，須用力若干？

解：　小孔每平方糎所受壓力之強度爲 700 克

故全壓力爲 $700\times10^2=70000$克……答。

(3)　試述水壓機之原理及其應用。

解：水壓機爲應用巴斯加之原理，用小力而生大的壓力之一種裝置，其構造用大小二圓筒，使其下部連通，內充以液，如液面皆有活塞，加(P)之壓力於小活塞(A)時，其及於水之壓力強度爲$\frac{P}{a}$，同時(B)塞(面積b平方糎)，(面積a平方糎)亦受相同之壓力強度，故B塞所受之全壓力爲$\frac{p}{a}\times b$,設令$\frac{b}{a}$之値愈大，則加小力於A塞，能生大力於B塞，此卽水壓機之原理，其應用則爲壓榨機，起壓機等。

(4)　水準器之構造及原理試述之。

解：水準器，其構造係以變形之玻璃管，裝置於金屬製之框內，其中留空處少許，而充以酒精或醇精(Ether)液，此器置於水平面時，其空處卽氣泡常在正中，液體之面爲水平，故氣泡常在管中最高之處，若置於任意之平面上時，則管中汽泡所在之端，較高於他端。

(5)　試述液體壓力之定律！

解：(a)　液體在一定之深度，其向上下四旁之壓力

相等。

(b)　液體對任何方面所施之壓力，皆等於其面積與平均深度及密度三者之相乘積卽設壓力 F，面積A，密度d，深度h，則 $F=Ahd$. 又設單位面積上所受之壓力爲 P。 $P=hd$

(6)　有水壓機，兩圓筒活塞之直徑各爲4分之3吋，20吋，加 150 磅力於小圓筒時，則大圓筒之活塞生幾磅之壓力？

解：　設所求之壓力爲 x，由巴斯加原理，得

$$\frac{x}{(20)^2}=\frac{150}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}\qquad \therefore x=10666.7\text{磅}\cdots\cdots\text{答}$$

(7)　試述亞基米特之原理(Archimedes Principle)

(北大，廣大，成大)

解：　物體在液體中之重，等於從物體之眞重，減去與物體同體積之液體之重，卽一物體浸入液體中時，其所受液體之浮力之大小，適等於被物體擠去之液體之重，是謂亞基米特原理。

(8)　a. Stote archimedes principle.

b. A body weights 50 grams in air and 45.24 grams in water, find its volume and density.

（南開）

解： a.參看前題

b. Displace in water$=50-45.24=4.76$gm.

$\therefore$ Volume$=4.76$ c.c.

By the formula $d=\dfrac{m}{v}$

$\therefore$ Density$=\dfrac{50}{4.76}=10.504$ gm.

(9) 何謂浮力？並述物體浮沉之條件。 （北洋）

解： 物體在液中時，作用於其周圍之壓力之合力，其方向恒向上，此合力稱曰液體之浮力，物體浮沉之條件。

(a) 浮……物體之比重<液之比重。

沒於液中之部分，所排除之液重等於物體之重時卽靜止。

(b) 中立……物體之比重=液之比重。

中立乃物體在液中不浮不沉，隨所置之位置而靜止。

(d) 沉……物體之比重>液之比重。

(10) 船艦用鐵造成，何以能浮於水面？ （北洋）

解： 物體在水中必排去其同體積之水，此物體之重若

較其排去之水之重小，則此物體必浮於水面，今船雖用鐵製，鐵雖比水重，然容積甚大，中空甚多，其重量決不能比其所排之水之重量爲大，故能浮於水面。

(11) 何謂軍艦之排水噸？

解：軍艦之排水噸數，卽兵器，石炭，食粮，水兵，船員，彈藥等，裝載足量時之噸數。

(12) 鋼鐵艦何以能浮於海面？

解：鋼鐵艦與鋼鐵塊不同，其內部有極大之容積，艦之重較同體積之水重爲小，故能浮於水面。

(13) 設有比重0.25之軟木1050克，及比重8.5之銅3400克，以絲連結之，置於4°c之水中，其浮沉之理若何？(但連結所用之絲，設爲無體積及重量)

解：軟木之體積 $\dfrac{1050}{0.25}=4200$ c.c.

銅之體積 $\dfrac{3400}{8.5}=400$ c.c.

作用於二者之浮力爲

$4200+400=4600$克

二者重量之和爲$1050+3400=4450$克

因 $4600>4450$ 故能浮……………答

(14) 用比重0.8之木，造一半徑2 cm,高 8 cm 之直圓錐體，附0.4克之法碼於其頂點，而浮於水中，則圓錐沒於水中之部分幾何？(但法碼設無體積)。

解： 設沉於水中之深爲 x cm，相當於其處之半徑爲 R，則$8:x=2:R$

$$\therefore R=\frac{2}{8}x$$

$$圓錐全體之重量=\frac{1}{3}\pi\times2^2\times8\times0.8+0.4$$

$$水之浮力=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{2x}{8}\right)^2\times x\times1$$

$$\therefore \frac{1}{3}\pi\times2^2\times8\times0.8+0.4=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{2x}{8}\right)^2\times x\times1$$

$\therefore x=7.5$ cm(約)……答

(15) 試述比重之測定法。 (北大)

一般法： 即不溶於水且比水重之固體

今設物體在空氣中之重爲W，在水中之重爲W′則

$W-W'$=等體積水之重，令比重爲 S

$$\therefore S=\frac{W}{W-W'}\text{即}\frac{\text{物體之重量}}{\text{與物體同體積之水重}(4^\circ c)}$$

(16) 以重 W 克之軟木片上繫以鉛塊(設鉛塊在水中之重爲W_1,)而沉於水中，其重量爲W_2，軟木之比重如何(此

爲比水輕，且不溶於水之固體之比重之測定法)。

解：　軟木在空氣中之重爲W,

軟木與鉛塊在水中之重爲W_2

鉛塊在水中之重爲W_1

與軟木同體積之水重爲$W+W_1-W_2$

$$\therefore 比重=\frac{W}{W+W_1-W_2}$$

(17)　試述溶解於水之粒狀物或粉末物(如砂糖等)之比重測定法！

解：　用不溶解砂糖之液體(如石油)由比重瓶先求砂糖對於石油之比重，更以石油之比重乘之卽得

設砂糖之比重爲W

充石油於比重瓶時之重爲W_1

又入以砂糖而拭去所溢出之油後之重爲W_2

石油之比重爲S

$W+W_1=$(砂糖之重)+(瓶之重)+(與瓶同容積之石油之重)

$W_2=$(砂糖之重)+(瓶重)+(與瓶同容積之石油之重)−(與砂糖同體積之石油之重)

$\therefore$　$W+W_1-W_2=$與砂糖同體積之石油之重

$$故比重=\frac{W}{W+W_1-W_2}\times S$$

(18) 試述由比重瓶而測溶體細粒及液體比重之法！

解：細粒之比重測定法如15題，代石油以水卽可

$$\therefore 比重=\frac{W}{W_1+W-W_2}$$

液體之比重測定法爲

設瓶之重量爲W

瓶內充水時之重量爲W_1

瓶內充某液時之重量爲W_2

$$則比重=\frac{W_2-W}{W_1-W}卽\frac{瓶內之液重}{瓶內之水重}$$

(19) 試述由連通管以測液體之比重法！

解：取欲測比重之液，與不相混合之他液，同入連通管中，先測由接觸面至各液面之高，設其高爲 h, h′,所求之比重爲X,已知之他液之比重爲S

$$則\ xh=Sh' \qquad \therefore X=\frac{h'}{h}S$$

(2) 重m克之物體 4°c 之水中時重m_1克，求物體之密度及比重。

解：$比重=\dfrac{m}{m-m_1}$

物體之體積$=(m-m_1)$c.c.

$故密度=\dfrac{m}{m-m_1}克$

用C.G.S制則比重與密度數值相同

$$故比重=\frac{m}{m-m_1}克$$

(21) 以鐵塊浮於水銀面上，再將其上部注以水以能沒鐵塊為止，今設鐵塊在水中之部分為A在水銀中之部分為B,則其在水中與水銀中之體積之比如何？(鐵之比重=7.8，水銀之比重=13.6)

解：　設鐵塊在水中之體積為X，在水銀中之體積為y，

則鐵塊之重量為7.8(X+y)

水銀之浮力為13.6×y

水之浮力為1×X

但鐵塊靜止時，其重量必等於水之浮力與水銀之浮力之和

故 $7.8(X+y)=13.6y+X$

$$\therefore\ \frac{X}{y}=\frac{5.8}{6.8}=\frac{29}{34}\cdots\cdots答$$

(22) 以玻璃管所製之浮秤，浮於水面時，則現出其長之$\frac{1}{2}$，浮於某液時，則現出其長之$\frac{1}{3}$，求某液之比重。

解：　設玻璃之長為 L cm.

切面面積為S平方米厘，

某液之比重為X

則水之浮力爲$\frac{L}{2}\times S$克卽浮秤之重量

液之浮力$=\frac{2}{3}L\times S\times X$克$=$浮秤之重量

$$\therefore\quad \frac{L}{2}\times S=\frac{2}{3}L\times S\times X$$

$\therefore X=0.75$……答

(23)　試述脫里賽里氏噴水速度之定則。

解：　凡液體由容器上之小孔噴出時，其速度與物體由液面向小孔落下時之速度相等，是謂脫里賽里之定則。

今設容器之側面 h cm. 之深處有小孔時，其噴水之速度，與物體由 h cm. 之高處落下時之速度相等，卽

噴出速度$=\sqrt{2gh}$

(24)　一玻璃管 60 cm.長，一端閉錮，一端開放，沉於海底，撈上時查得海水侵入開端 5cm. 設知大氣壓力爲76 cm.水銀柱高。試計算海之深度。

設海水密度爲1.026.(Principle of Clord Kelvin's Sounding apparatus)

設海底之壓力爲水銀柱高 x cm.再加大氣壓

力之76 cm. 依 Boyle's law 應有

$$76\times60=(76+x)(60-55)$$

或　$5x=4180$

$\therefore\ x=836$

故知海底之深爲

$$\frac{8.36\times13.6}{1.026}=110.75$$

卽　110.75 meters.

(C) 氣　體

(1) 試述波義爾(Boyle's law)之定律　(武大)

解：(a)　温度一定時，定質量之氣體之體積與其壓力爲反比例。

卽　$P:P'=V':V$

(b)　温度一定時，氣體之質量若爲一定，其壓力與體積相乘積亦爲一定。

卽　$PV=$一定。

(c)　温度一定時，定質量之氣體之密度與其壓力爲正比例。

卽　$p:p'=d:d'$

(2) 由波義爾之定律，温度一定時，氣體之密度與壓

力爲正比例，試證明之。

解： 設氣體之質量爲m,壓力爲p,

體積爲v,密度爲d.

若壓力變爲P′時，則體積爲v′,密度爲d′,

則 $Pv=P'v'$

但 $v=\dfrac{m}{d}$ $v'=\dfrac{m}{d'}$

$$\therefore p\times\frac{m}{d}=p'\times\frac{m}{d'}$$

$$\therefore \frac{p}{d}=\frac{p'}{d'}$$

(3) 放空氣於膀胱內，繫以適當之錘，而沉於海水中，在淺處則浮，深處則沉，其理及其深若何？

解： 膀胱內空氣之壓力與外壓相同，設膀胱內此時之空氣爲V立，膀胱沉下時海水之深爲S米

因淡水10米深處之壓力爲2氣壓，海水S米深處之壓力爲 $1+\dfrac{1.02\times S}{10}=1+0.102S$ 氣壓，故此處空氣之體積爲 $\dfrac{V}{1+0.102S}$ 立，海水之浮力爲

$\dfrac{1.02V}{1+0.102S}$=瓩

上式內之S愈大，則浮力愈小，設膀胱上繫之錘爲P瓩，則得次式　$\dfrac{1.02V}{1+0.102S}=P$

$$\therefore\ S=\left(\frac{10V}{P}-\frac{1}{0.102}\right)\text{米}\cdots\text{不浮不沉}$$

$$S>\left(\frac{10V}{P}-\frac{1}{0.102}\right)\text{米}\cdots\cdots\text{沉}$$

$$S<\left(\frac{10V}{p}-\frac{1}{0.102}\right)\text{米}\cdots\cdots\text{浮}$$

×(4)　將長80 cm.之直圓筒倒插於水中，至筒底在水面上7 cm.時，水浸入筒內之高爲5cm.試求大氣之壓力。

解：　設氣柱高80cm.爲1氣壓，氣柱高$80-5=75$ cm爲P氣壓，由波義爾之定則得

$$P\times 75=1\times 80$$

$$\therefore P=\frac{16}{15}\text{氣壓}$$

但水所呈之壓力爲$80-7=73$ cm。

即$\dfrac{73}{1033}$氣壓。

故所求之氣壓爲$\dfrac{16}{15}-\dfrac{73}{1033}=1.018$氣壓……答

×(5)　室內之溫度不變，而氣壓由770粍降至760粍，則

室內之空氣逸出若干？

解： 溫度不變時，氣體之密度與壓力爲正比，故前密度之比爲77：76

又體積不變時，氣體之質量與密度爲正比，故其前後質量之比爲77:76 故空氣逸出之質量，爲其原質量之

$$\frac{77-76}{77}=\frac{1}{77}\text{……答}$$

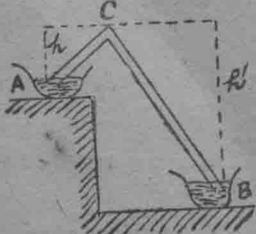
(6) 晴雨表(氣壓計又稱風雨表)之用法如何？

(北洋)(北大)

解： 晴雨表乃爲測大氣壓力之一種裝置，故又稱氣壓計，共有二種：一爲水銀晴雨計，一爲 Aneroid (金屬晴雨計)晴雨計，空氣乾燥時，則表中水銀柱上昇，而爲天晴之徵。空氣濕潤時，則水銀柱下降，是爲天雨之徵。又其昇降甚速時，則爲暴風雨之預兆。

(7) 試述吸管之構造及其用法。

解： 吸管爲一具有長短兩臂之曲管，欲移高處之液於



低處時用之，用時先盛滿液於管內，次將短臂插於高處之盛滿液體A器中，則液卽由A器連續移入低處之B器，今設管之最高部C處爲隔壁由左右兩臂作用於C

之壓力爲p，與p′，作用於A,B兩器之液面之大氣壓力同爲P，則

$$p=P-(\text{液柱 } h \text{ 高時所呈之壓力})$$

$$p'=P-(\text{液柱 } h' \text{ 高時所呈之壓力})$$

$$\therefore\quad p-p'=[\text{液柱}(h'-h)\text{ 高時所呈之壓力}]$$

$$\therefore\quad p>p' \text{ 卽左方之壓力較右方爲大}$$

故A器中之液漸次移於B器中

至 $h'-h=0$ 時卽停止

(8)　設有空氣喞筒，其玻璃鐘之容積爲V，圓筒之容積爲v，鐘內空氣最初之密度爲d，將活塞上下移動至n次後，鐘內空氣之密度爲 $\left(\dfrac{V}{V+v}\right)^n\times d$ 試證之。

解：　設活塞由圓筒之底部抽上時，鐘內空氣之體積脹大爲V+v

若時之壓力爲p′，最初之壓力爲p，由波義爾之定律 $pV=p'(V+v)$ 得

$$p'=p\frac{V}{V+v}$$

設第二次抽上活塞時之壓力爲p″，同理

$$p''=p'\frac{V}{V+v}=p\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$$

同理第n次抽上活塞時之壓力爲 p_n

則$P_n=p\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$

因密度與壓力爲正比例，設活塞上下 n 次後之密度爲dn

$$\therefore\ d_n=d\left(\frac{V}{V+v}\right)^n \cdots\cdots答$$

(9)　用空氣喞筒時，上下其活塞於全部者爲有利，試說明其理由。

解：　由公式 $d_n=d\left(\frac{V}{V+v}\right)^n$

上下其活塞於全部時，則V甚大

即 $\left(\frac{V}{V+v}\right)$ 之值極小，故排氣作用甚大，

且活塞下之空氣壓力，較大氣壓力爲大時，始能壓開活塞上之瓣，故須令活塞密接於圓筒之下部，以壓縮其空氣而增大其壓力。

(10)　一鐵棒其體積爲400 c.c. 自海船沉入洋底至1000 m深處，問其體積當被壓縮若干 c.c.？設知海水每深 10 m. 相當於一氣壓，即每方公分(sq.c.c.)一百萬達因之力。

此中　$P=\frac{10' \times 1000}{10}$(dynes)

$V=400$(c.c.)

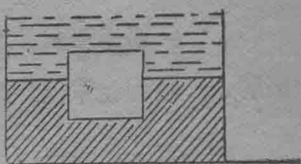
而鐵之容積彈性係數 (Modulus of volume elasticity or bulk modulus)爲 $15\times10''$

或 $15\times10''=\dfrac{100\times10^6\times400}{V}$ $(\because k=\dfrac{PV}{V})$

卽 $V=\dfrac{0.02}{6}$

亦卽當棒鐵下沉時其體積當壓縮 $\dfrac{0.02}{6}$

(11) 有一銅塊厚10 cm.浮於水銀上面，則現於水銀以外者當爲若干 cm.之高？次加水若干 cm.於水銀面上而後能洽及銅塊之頂？(設銅塊爲平行六面體)



因銅塊爲有規則體，卽其頂面與底面互相平行，且全相合，今設其底面積爲a sq.cm.則此物體之體積爲10a cm³. 設銅塊浮出水銀面之高度爲xcm. 則沉於水銀中者(10−x)cm.如是

$$ax+13.6a(10-x)=8.5\times10a$$

或 $12.6x=51$

$\therefore$ $x=4.05$

[銅之比重爲8.5,水銀之比重12.6]

卽須注水4.05 cm.於水銀面上洽使水及銅塊之頂。

今如槽中獨有水銀而不置水，則其浮出水銀面上之高度 $\left[10-\dfrac{8.5\times10a}{12.5a}\right]\div10=0.375.$

卽 0.375 cm.

II. 力　學 (Dynamics or Mechanics)

(A) 運　動

(1)　何謂運動？

解：　物體變其位置稱曰運動 (Motion)有等速運動，如天體之運動，其在每單位時間內，所經之路，多少相等。有不等速運動，如落下體，驟開及將停之車之運動。又有直線運動，曲線運動及平面運動等之別。

(2)　何謂速度及加速度？

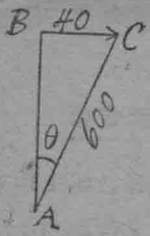
解：　物體在單位時間內經過之距離，與方向同時而言者，稱速度(Velocity)。卽速度$=\dfrac{\text{距離}}{\text{時間}}$，在不等速運動時，單位時間內速度變化之比例，稱加速度(Acceleration)，卽

$$\frac{\text{終速度}-\text{初速度}}{\text{時間}}=\text{加速度}\quad \text{卽}\ a=\frac{V_2-V_1}{t}$$

卽在不等速運動時，其每繼續之二單位時間內，所差之數。

(3)　飛機以40秒米之水平速度，經過於頂上時，以速度600秒米之彈丸射擊之，其描準點如何？

解：　設A爲人之位置



飛機由BC之方向進行40米至C點時，彈丸則由 AC之方向進行600米至C點，適擊中飛機，設鎗之傾斜角爲θ，則得次式

$$\sin\theta=\frac{40}{600}=\frac{1}{15}=0.0666$$

$\therefore\ \theta=3°50'$弱……答

(4)　以100達之力作用於質量5克之物體，其所生之加速度幾何？

解：　加速度$a=\frac{F}{m}=\frac{100}{5}=20$秒秒糎……答

(5)　物體之重量與其質量爲比例，試說明之！

解：　$F=ma$之式，適用於落體時

則$F=$物體之重量

$a=$重力之加速度g

卽物體之重量＝質量$\times g$

而g在地球上同一場所爲一定

故物體之質量與重量爲正比例。

(6)　試述運動之三定律！　　(女師大)

解：　(a)　凡物體若不受外力作用時，則靜止之物體永久靜止，運動之物體繼續爲等速度之直線運動——慣性定律

(b)　由外部加力(F)於物體，則物體常於力之

方向生一定之加速度(a)，其加速度與力爲正比，與質量(m)爲反比卽

$$A \propto \frac{F}{m} \quad \therefore F \propto ma$$ —— 運動定律。

(c) 作用與反作用之力之大小相等，(卽主動力與所生之反動力相等)與方向相反，—反作用定律

(7) 試由運動之定律與重力之定律，以證明落體之加速度與其重量之大小無關而常爲一定。

解： 由重力之定律，在同一地方上，物體之重量與質量爲正比例

又由運動之第二定律，力常與質量與加速度之相乘積爲正比例。

今設二物體之質量各爲m, m'

二物體之重量各爲 F, F'

則 $F : F' = m : m'$

又設此二物體落下時之加速度各爲 g, g'

則 $F = mg \quad F' = m'g'$

$$\therefore \quad m : m' = mg : m'g'$$

$$m'mg = mm'g'$$

$$\therefore \quad g = g'$$

卽與重量之大小無關，而加速度常爲一定。

(8) 試述速度之平行四邊形之法則！

解： 先畫表已知二速度之二直綫，次以此二直綫爲二邊，作平行四邊形，此二直綫之對角綫，卽所以表合成速度之線，此卽平行四邊形之法則，亦稱速度之中斜法。

(B) 力 (Force)

(1) 何謂力及力之絕對單位？

解： 使物體變爲運動狀態之作用，謂之力。作用於質量1克之物體，使其於1秒間生1秒糎之加速度所用之力爲力之單位，稱之爲一達 (Dyne)。稱此曰力之絕對單位。

(2) 常稱1達之力與1瓱之力相等，試說明之！

解： 由公式F=ma重力之時a=g=980秒秒糎，故F卽與物體之重量相當，就1克之物體觀之。

1克重=1克×980秒秒糎=980達，

$\therefore 1$達$=\dfrac{1\text{克重}}{980}=0.001$克重(弱)卽等於1瓱重。

(3) Define dyne erg. watt. (東南)

解： (a) The dyne is the force which, acting for one second upon any mass, imparts to it one unit of momentum.

(b) The erg is the amount of work done by a force of one dyne when it moves the point on which it acts one centimetter.

(c) The watt is the unit of power and it is equivalent to the work of the rate of 10^7erg per second.

(4) 作用於200克之物體之重力若干？

解： 公式F＝ma有重力之作用時a＝g＝980秒秒糎

故 F＝200×980＝196000達

(5) 質量3750克之物體，在上海與巴黎時，其重力之差若何？

解： 上海之重力加速度爲979.4秒秒糎，

巴黎之重力加速度爲980.9秒秒糎。

設所求之重量之差爲 F

則 F＝3750×(980.9－979.4)＝5625達……答

(6) 作用於質量5克之物體，使其生20秒糎之加速度之力幾何？試以絕對單位及重力單位表之。

解： 絕對單位 5×20＝100 達……答

重力單位1克之重爲980達

故 100 達之力爲 $\frac{100}{980}$ =0.102克之重……答

(7) 欲比較力之大小，當如何？

解： 由運動之第二定律，凡力作用於物體時，物體之質量若爲一定，則物體所得之加速度與力爲正比，故欲比較力之大小，當將各力作用於定質量之物體，視各物體所生加速度之大小如何，而定各力之大小。

(8) 試述力之三要素！

解： 力之効果係由其大小方向及着力點而不同，故以上三者稱力之三要素。

(9) 試述萬有引力之法則！

解： 宇宙間之二物體之互相吸引之力稱萬有引力，萬有引力之大小(F)與二物體之質量(M,m)相乘積爲正比，與距離(d)之自乘爲反比，卽

$$F \propto \frac{Mm}{d^2} \quad \text{or} \quad F = r\frac{Mm}{d^2}$$ (r 爲比例常數)

又地上之諸物體與地球間之萬有引力特稱重力

(10) State Newton's law of uniersal gravitation

(北洋)

解： Newton's law of universal gravitation states that any two bodies in the universe attracts every other body with a force that is directly propertional to the product of the masses and inversely propertional to the square of the distance between them.

(11) 何謂運動量？

解： 運動物體之質量與速度相乘之積，稱運動量(Momentum)。即運動量＝質量×速度

(12) 打擊衝突之效果甚大時之條件若何？

解： 極短時間內與以最著之速度變化，即運動量之變化，故速度與質量皆大之物體，驟然停止時，其所生之壓力亦甚大。

(13) 有 5 克之物體，其運動之速度爲 4 秒糎，其運動量如何？

解： 若質量爲m，速度爲v，則運動量爲mv克秒糎，故運動量爲50×4＝200克秒糎……答。

(14) 打擊及衝突其速度愈大，則其結果愈顯，何故？

解： 設物體之質量爲 m，速度爲 v

自受打擊至停止之時間爲 t，擊力爲 F，

由公式　$Ft=mv$

即 v 若愈大，擊力亦愈大。

(15) 槍身愈短，彈丸之速度亦愈小者，何故？

解：槍身短時，則火藥爆發至彈丸出口之時間短，即槍身所受火藥爆發之時間短。

由公式　$Ft=mv$，　F與 m 爲一定時，t 若甚小，V亦隨之而小故也。

(16) 以粘土等無彈性之物，所作之二球，其質量爲m，m′，將M克之球，以V之速度與靜止之 m′球相衝突，而合爲一體，試求此合成體之速度？

解：設合成體之速度爲 V

合一後之運動量爲$(m+m')V$

衝突前之運動量爲mv。

二物體衝突前之運動量之和，等於衝突後運動量之和。

故$(m+m')V=mv$

$$\therefore V=\frac{mv}{m+m'}\cdots\cdots\text{答}$$

(17) 試釋力之平衡，合力及分力之意義！

解：多數之力同時作用於一物體，而物體與未受力之作用時相同，毫不變其運動之狀態時，此多數之

力，謂之互相平衡。

有一力與多數之力生同一之結果時，則此一力稱多數之力之合力。對此合力而言，前之多數之力稱分力。

(18) 有二力作用於同一直線上，其合力之法如何？又互為直角時之合力如何？

解：(a) 方向相同時，其同力為二力之和，其方向等於二力之方向。

(b) 方向相反時，其合力為二力之差，其方向為二力中較大者之方向。

(c) 互為直角時。

設二力為 P,Q, 則合力卽為以p,Q為二邊之矩形之對角線，卽合力$=\sqrt{p^2+Q^2}$

(19) 今有一力，試於其兩側成 30° 角之方向分解之，

解：設已知力為F,其分力與F所成之角相等，故分力亦必相等，又設此分力為 f, 則得

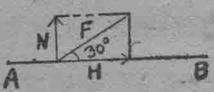
$$F^2=f^2+f^2+2f.f\cos 60^\circ$$

$$F^2=2f^2+2f^2\times\frac{1}{2}$$

$$F^2=3f^2 \qquad \therefore f=\frac{F}{\sqrt{3}}$$

(20)　風力爲15瓩之重，成30°之角而吹於帆面，問船所受之壓力(推力)若干？

解：　設帆面爲AB,與AB爲30°角而吹來之風力爲F,今將F分解爲與帆平行之力H,與帆成直角之力爲N時，則N即船所受之推力



即$\dfrac{N}{F}= \sin 30° =\dfrac{1}{2}$,

$\therefore N=15$瓩$\times\dfrac{1}{2}=7.5$瓩……答

(21)　有長1米，質量100克之棒,今以半徑1 cm.之鉛球固着於其一端時，其重心之位置若何？

解：　鉛球之質量$=1^3\times3.1416\times\dfrac{4}{3}\times11.3=47.3$克

又棒之重心即其中心點。

故二者之重心之距離爲$\dfrac{100}{2}+1=51$cm.

即作用於此端之力爲100克與47.3克

故其合力之作用點卽重心如下

設由球之中心至所求重心之距離如 xcm.

$$x\times47.3=(51-x)\times100 \quad \therefore x=34.6$$

所求之重心卽距離球之中心34.6cm處之點……答

(22)　飛行機前進及上升之理如何？

解：　飛行機之前進，全賴前面之推進機，而其上升則在

其翼面所受空氣之抵抗力，當推進機急速轉動時，受有空氣之抵抗力，此力可分爲水平與垂直之二分力，如旋轉之力甚強，則垂直方向之力小，而水平方向之力能達於最大，故能前進。又前進時翼面受空氣之抵抗，亦可分垂直與水平方向之二分力，水平方向之力，能阻止飛機之進行。如推進機旋轉極速，則垂直方向之力，能達於最大，故飛機能上升。

(23) 試說明船上帆與舵之作用？

解：船上之帆，係借空氣之抵抗作用，將帆推進，船體卽得其動能而前進，船尾之舵，係借水之抵抗作用，將舵移動，而船體亦得其動能而移動。

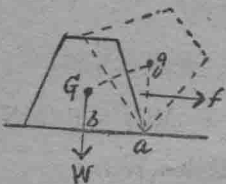
(24) 試說明不倒翁之理！

解：凡物體位置安定之條件須物體之重量大，底面寬廣，重心低，以及通過重心之垂直線，須在底邊之內等，不倒翁之下部底面甚廣，且填以土塊或鉛塊等，上部空虛，故重心之位置極低，將倒之時其重心反高，然物體之重心，常欲保持最低之位置，故不倒也。

(25) 試說明底面愈大，重心之位置愈低，則物體愈安

定之理。

解：　設通過物體重心之水平力爲f，



今動此水平力f欲令物體傾倒時須使f及於a之周圍之能率，較物體之重量W之及於a之周圍之能率爲大

即　$w\times ab=f\times ag$　即$f=w\times\dfrac{ab}{ag}$，

故底面(ab)愈大，則重心之高(ag)愈小，所須之f愈大，則物安定而難倒。

(26)　何謂偶力？

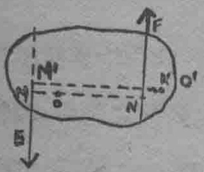
解：　大小相等，方向相反之二平行力，爲作用於槓桿上之不同之兩力，謂之偶力。偶力不生進行運動，僅生迴轉運動，如轉螺旋時之力，爲偶力，(Couple)。

(27)　試說明力之能率！

解：　由物體之一點，向作用於此物體之力之方向線上，引一垂線，此垂線之長與力之相乘積，稱其點之周圍之力之能率。

(28)　試證明偶力之能率與支點之位置無關，而常爲一定之理。

解：　設偶力爲F,F,其初之支點爲O



其能率爲 $F\times OM+F\times ON=$

$F(OM+ON)=F+MN.$

又若其支點爲O′時，則其能率爲

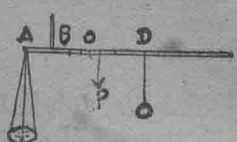
$F\times O'M'-F\times O'N'=F\times M'N'=F\times MN$

(29)　試述槓桿之定則，並舉應用槓桿之實例。

解：　作用於槓桿之支點周圍，使其向反對之方向迴轉之二力之能率相等時，槓桿卽平衡，是爲槓桿之定則。應用槓桿之例如剪絞，秤，滑車，櫓，輪軸，釘拔等。

(30)　槓桿之理如何？試說明之。

解：　槓桿爲應用物體之重力與其質量爲正比之定理，由重力以測其質量之裝置，如圖，A爲盤，B爲支點卽秤紐，Q 爲錘。



設空盤時，置錘於O,卽可平衡，則以O爲秤星之起點，此時 B 之左方盤中之重力能率與B之右方PQ能率之和相等。

(註：P爲桿之重量)

次置質量W之物體於盤中，移錘於 D時，若亦能

平衡，即兩方能率之增加相等，故得

$$W\times AB=Q\times BD-Q\times OB=Q\times OD$$

$$\therefore\quad W=Q\times\frac{OD}{AB}$$

上式為既成之槓桿，故Q與 AB 為定數，即OD與W為正比，蓋槓桿各部之度數相等。

(31) 不用他秤而測定槓桿之錘之重量之方法若何？

解： 由前題 $W\times AB=Q\times OD$

$$\therefore\quad Q=W\times\frac{AB}{OD}$$

即以尺計AB,OD之長，以其比(AB:OD)以乘D點所示之重量即得。

(32) 有樹橫置地面，今稍舉其一端，須力18斤，稍舉其他端，須力30斤，此樹之重幾何？

解： 設樹之重為W斤

由樹之重心至用18斤力之端之距離為X

由樹之重心至用30斤力之端之距離為Y

$18(X+Y)=y.w\cdots(1)$

$30(X+y)=x.W\cdots(2)$

(1)÷(2)　$\dfrac{18}{30}=\dfrac{Y}{X}$　　$\therefore\ X:Y=5:3\cdots(3)$

以(3)代入(1)　　$18(5+3)=3W$

$\therefore$ W=48斤…答

(33) 天平之原理若何？試述之！

解： 天平乃與具有等長左右兩臂之槓桿同理，支點在中央，一盤內載以物體，一盤內載以與物體同質量之法碼時，則支點之左右兩臂之能率相等，故能平衡。因之由法碼可以測物體之質量，故天平爲用以測質量之裝置。

(34) 天平，桿秤，簧秤三者，爲測質量之器？抑爲測重量之器？試言其理！

解： 天平，桿秤爲測質量之器，而簧秤則爲測重量之器。

(a) 設物體之質量爲 m，法碼之質量爲 m′

天平左右臂之長爲 l，重力之強度爲 g

今天平平衡則有下式之關係

$$mgl = m'gl$$

而雙方之 g，l 均相等　故 m=m′

即與重力無關，得由法碼之質量而測物之質量，

(b) 設桿秤由秤紐至物體之距離爲 l，

由紐至秤錘之距離爲D

物體之質量爲 m，秤錘之質量爲 m′

重力之強度爲 g.

今桿秤平衡，則有下之關係

$mlg=m'Dg \quad \therefore \quad ml=m'D$

而 l,L爲已知之長,g 則無關係。

卽得由秤錘之質量，以測物體之質量。

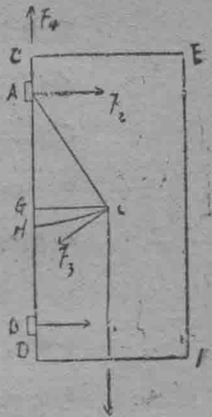
(c) 簧秤，簧之伸縮與作用於此之重力 mg 爲正比，簧秤所示之度,由地方重力 g 之值而不同，故簧秤得簧之伸縮,以測得質量與重量之相乘積，mg卽爲物體之重量。

(35) 有倉門一具，其高爲 10 呎，寬爲 5 呎，重凡200磅，其樞紐有二，離其兩端各一呎之處而設，設全門之重量完全負於在上之一紐，試求施於上紐各力之合力之量及其作用之方向。

此題當以平衡之原則釋之，今設想支此門之重量者僅其上端之一紐，而下端之紐卽不設，則當懸掛後門身必紐過一相當位置，直待至其重心洽在從上紐向地面之鉛垂線上爲止。

由是可知此門下端之紐旣未爲載重所設，則其作用，乃僅在防止門身上所述及之旋轉運動是已。

夫如是則上紐同時受到兩力明矣，其一卽門之重力，



其二卽門之旋轉傾向之力，與後者垂直，今各以F_1及F_2代之。

今從右圖察之，知

AC之長＝BD之長＝1 呎

CD之長＝EF之長＝10呎

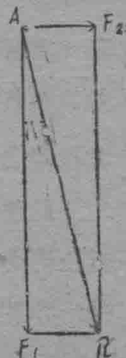
又因C′爲門之重心所在

∴ AG之長＝BG之長＝4 呎

GC之長＝2.5呎

∴ $AC=\sqrt{4^2+(2.5)^2}=47.17$(呎)

如是又有$\operatorname{Cos}F_3CF_1=\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$



$$F_3=F_1\sin\theta$$

$$=106(\text{磅})$$

又因 $AH=AC=47.17$呎

而 $F_2\times AB=F_3\times AH$

或卽 $F_2=62.5$(磅)

∴ $R=\sqrt{(200)^2+(62.5)^2}$

$=209$(磅)……答1.

$\angle\alpha=\arctan\dfrac{F_3}{F_1}=\arctan 0.3125$

$=17°21'$………答2。

(C) 基本運動

(1) 自然落下(卽由靜止狀態落下)之物體，其速度及距離與何爲比例，試說明之！

解：(a) 速度與時間爲正比(公式t秒後之速度$v=gt$)

(b) 距離與時間之自乘爲正比

(公式初t秒間之經過距離，$S=\frac{1}{2}gt^2$)

(c) 距離與速度之自乘爲正比

(公式 $v^2=2gS$)

(2) 物體自放手後，落下1尺時，所需之時間幾何？

解：由公式　$S=\frac{1}{2}gt^2$

$$S=1尺=\frac{100}{3.3}cm.\quad g=980$$

代入公式$\frac{100}{3.3}=\frac{1}{2}\times 980\times t^2$

$\therefore t=0.26$秒………答。

(3) 物體自初落下至其速度爲980秒糎時，所經過之距離幾何？

解：由公式　$v^2=2gS$

$980^2=2\times 980\times S$

$\therefore\quad S=490\ \mathrm{cm}$……答

(4)　設有物體自落下後，經過距離S之瞬間之速度爲v，試證明 $v^2=2gS$。

解：　設自開始下落至速度爲v所需之時間爲 t

$$v=gt\cdots\cdots(1)$$

$$S=\tfrac{1}{2}gt^2\cdots\cdots(2)$$

由(1)式 $t=\dfrac{v}{g}$，以此代入(2)

$$S=\frac{1}{2}g\times\frac{v^2}{g^2}$$

$$\therefore\quad v^2=2gS$$

(5)　物體之初速度爲v秒糎，落下 t 秒後之速度爲v′秒糎，t 秒間落下經過之距離爲s糎，

試證明　(a)　$v'=v+gt$

(b)　$S=vt+\frac{1}{2}gt^2$

(c)　$2gS=v'^2-v^2$

解：　(a)　假設物體不受重力作用時，則必以v之速度爲等速運動，然實際必受重力之作用，故每秒增力g秒糎之速度，即 t 秒間增加 gt 之速度，

故　$v'=v+gt\cdots(1)$

(b)　t 秒間之平均速度爲 $\dfrac{v+v'}{2}$ 秒糎

故　t 秒間落下之距離 $S=\frac{1}{2}(v+v')t$

$$=\frac{1}{2}(v+v+gt)t$$

$$=vt+\frac{1}{2}g^2 \cdots\cdots(2)$$

(c)　由(1 所得 t 之值代入(2)中

$$\therefore \quad v'^2-v^2=2gS$$

(6)　自 100 米高之氣球上，用 5.4 秒米之速度將石投下，(a)達於地面之時間若干？又(b)與地面衝突時之速度如何？

解：(a)　由公式　$S=vt+\frac{1}{2}gt^2$

$$100=5.4t+\frac{1}{2}\times9.8\times t^2$$

$$\therefore\ t=4\text{秒}\cdots\cdots\text{答}$$

(b)　由公式　$v'^2-v^2=2gS$

$$v'^2=2\times9.8\times100+(5.4)^2$$

$$\therefore\quad v'^2=44\text{秒米(約)}\cdots\text{答}$$

(7)　以速度 v 拋上一物體，至其速度爲 v′時，昇上之距離爲S，試證明　$v'^2=v^2-2gS$.

解：　設上昇S距離所需之時間爲 t 秒

由　$v'=v-gt\cdots\cdots(1)$

$S=vt-\frac{1}{2}gt^2\cdots\cdots(2)$

以(1)之 t 之值代入(2)

則　$v'^2=v^2 2gS$.

(8)　以v秒米之速度向上直拋一物體至最高時所需之時間若干秒？又試證明物體所達之高爲$\frac{v^2}{2g}$米。

解：　速度每秒減少g秒米，故上昇至最高，卽終速度v'爲O時，所需之時間爲由前題(1)

$$O=v-gt \quad \therefore t=\frac{v}{g}\text{秒}\cdots\cdots\text{答}$$

又此時經過之距離爲S，卽前題(2)之$t=\frac{v}{g}$時。以t之值代入(2)中

$$S=v\times\frac{v}{g}-\frac{1}{2}g\left(\frac{v}{g}\right)^2=\frac{v^2}{2g}\text{米}\cdots\text{答}$$

(9)　以v之速度上拋一物體，至其再落於舊位置時所需之時間爲若干秒？又此時之速度如何？

解：　由前題昇至最高點所需之時間$t=\frac{v}{g}$今由同一之高S自然落下時所需之時間爲

$$S=\tfrac{1}{2}gt^2\cdots\cdots(1)$$

然昇至最高點時之$S=\frac{v^2}{2g}\cdots\cdots(2)$

今以(2)之S之值代入(1)

$$\frac{v^2}{2g}=\frac{1}{2}gt^2 \quad \therefore t=\frac{v}{g}$$

卽上昇之時間與落下之時間相等

故所求之時間爲 $2\times\frac{v}{g}=\frac{2v}{g}$ ………答

又此時之速度v′ 以 $S=\frac{v^2}{2g}$ 代入 $v'^2=2g'S$

則 $v'^2=2g\times\frac{v^2}{2g}$ 　$\therefore v'=v$

卽降下之速度與最初之速度相反。

(10) 有 250 秒米之初速度向直上發射之彈丸，可達若干米之高？又復落於地面，經若干秒後？

解： 設所達之高爲S米

則 $S=\frac{v^2}{2g}=\frac{250^2}{2\times9.8}=3189$米…答。

又設達於最高點時之時間爲 t

則 $t=\frac{250}{9.8}$

故所求之時間 $2t=\frac{2\times250}{9.8}=51$秒 ……答

(11) 今有比重爲 9 之物體，自水面落下經 3 秒而達水底，設水爲無摩擦力，則水之深如何？

解： 物體在水中所受之浮力爲 1,

故在水中之重爲 8

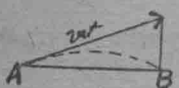
故水中之加速度爲 $9.8\times\frac{8}{9}$秒米

故所求之深由$S=2gt^2$

$$\therefore S=\tfrac{1}{2}\times\left(9.8\times\frac{8}{9}\right)\times 3^2=39.2\text{米}\cdots\text{答}$$

(12)　有速度v,與水平面爲θ角射出之彈丸，由發射點可達至水平距離$\dfrac{v^2\sin2\theta}{g}$試證之。

解：　設由發射點至物體達於地面B,所需之時間爲t秒



則　$AC=vt$(假設無重力)

$CB=\frac{1}{2}gt^2$(由重力作用)

$AB=vt\cos\theta$(所求之水平距離)

$$\therefore\quad \frac{CB}{AC}=\frac{\frac{1}{2}gt^2}{vt}=\sin\theta$$

$$\therefore t=\frac{2v\sin\theta}{g}$$

以此代入$AB=vt\cos\theta$

$$AB=\frac{2v^2\sin\theta\cos\theta}{g}=\frac{v^2\sin2\theta}{g}\cdots\text{答}$$

(13)　有與水平爲30°,50秒米之速度，拋射之物體經3秒後之位置若何？

解：　3秒後之水平距離由公式

v(初速)$\times t\cos\theta$

$\therefore\ 50\times3\times\cos30^\circ=50\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=130$米(約)，

又3秒後之高由公式 $vt\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2$

$\therefore\quad 50\times3\times\sin30^\circ-\frac{1}{2}\times9.8\times3^2$

$=50\times3\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times9.8\times3^2$

$=30.9$米

(14) 有長1米之單振子，其週期爲若干秒？

解： 由公式週期 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

(l 爲長，g爲重力之加速度)

$\therefore\quad T=2\times3.1416\times\sqrt{\frac{100}{980}}=2$秒(約)答

(15) 有一晝夜遲5秒之時計，今欲令其準確，須將振子之長，短縮若干？

解： 1晝夜之秒數爲$24\times60\times60=86400$秒

此時計示1日之秒數爲$86400-5=86395$秒

因時計之秒數與振子之振動數爲正比，其振動數與週期爲反比。

又週期與長之平方根爲正比，今設正確時計之振子之長爲L，此時計振子之長爲 l，

則 $86400:86395=\sqrt{l'}:\sqrt{l}$

$L=0.999834l'$

$$\therefore \quad l'-l=0.000116l'$$

卽將振子之長短縮0.000116倍卽得

(16) 何謂振子之等時性？

解： 若振幅(卽振子振動所及之圓弧)小時，振子之週期(卽振子完全往復一次所須之時間)與其長之平方根爲正比，與重力加速度之平方根爲反比，並不因錘之質量及振幅而變化，此稱振子之等時性。

(17) 何謂求心力，遠心力？

解： 物體爲圓運動(以圓爲軌道之運動)時，則物體有常向其中心牽引之力，此力稱求心力。求心力之反作用，稱遠心力。

(18) 有質量m克之物體，運動於週期 t 秒半徑 rcm.之圓周上，求心力之大如何？

解： 由求心力$F=\dfrac{\text{質量m}\times\text{速度}v^2}{\text{半徑r}}$

設圓運動之週期爲 t, 則$v=\dfrac{2\pi r}{T}$

以v之值代入上式

則 $F=\dfrac{4\pi^2 mr}{T^2}$

卽在週期同一之圓運動，其求心力與半徑爲正比。

(19) 物體愈近兩極，則愈重。又上昇愈高則愈輕。其

理安在？

解：(a) 地球非正圓之球，赤道上之半徑最大。愈近兩極，其半徑愈小。由萬有引力之法則，引力與距離之平方爲反比。故重力亦必於赤道上爲最小，兩極上爲最大。又高處與地球中心之距離較大，故引力卽較低處爲小。

(b) 由求心力 $F=\dfrac{4\pi^2mr}{T^2}$ 週期相同之圓運動，求心力與半徑爲正比，故半徑較大之赤道上或高處，其遠心力大，故重量減小，卽物體較輕。

(20) 1 瓩之物體，在赤道上與在兩極上之差若何？

解：重量與重力之加速度爲正比，今設赤道上與兩極上之 g 各爲978，983.2 設 1 瓩之物體在兩極上之重爲 w

則 $1:w=978:983.2$

$\therefore\ w=1005.3$ 克

故其差爲 $1005.3-1000=5.3$ 克…答

(21) 設月與地球間之距離，爲地球半徑之60倍，則月之表面之重力之加速度幾何？又試求月繞地球一週之時間若干？

解：引力與距離之自乘爲反比，故由重力所生之加速

度 g 之值，亦必有同樣之關係。

今設月之表面上之加速度爲g′

則　$g':980=1^2:60^2$

$$\therefore\quad g'=\frac{980}{3600}\text{秒秒糎}$$ ……答

又設月繞地球一週之時間(卽週期)爲T 秒，因地球之週圍約 40000粁

$$\text{故月之速度}=\frac{40000\times 60}{T}\text{秒粁}$$

今設向地心之加速度爲a，月與地球之距離爲r，

$$\therefore\quad a=\frac{4\pi^2 r}{T^2}=\frac{2\pi\times\text{地球之週圍}\times 60}{T^2}$$

$$=\frac{2\pi\times 40000\times 100000\times 60}{T}=\frac{980}{3600}$$

$$\therefore\quad T=235\times 10^4\text{秒}=27.2\text{日}$$ …答

(22) 地球繞太陽一週爲365.24 日，月繞地球一週爲27.32日，問太陽之質量與地球之質量之比若何(地球與太陽間之距離爲3800萬里，月與地球間之距離爲95500里)，

解：　設太陽之質量爲M，地球與太陽間之距離爲R，地球之質量爲M′，地球與月之距離爲R′

月之質量爲M″，

又設地球繞太陽一週之時間爲 T，

月繞地球一週之時間爲T′，

則萬有引力

地球受自太陽之力：月受自地球之力

爲 $\frac{MM'}{R^2}:\frac{M'M''}{R'^2}=\frac{M}{R^2}:\frac{M''}{R'^2}$

又因加速度之關係，(地球之加速度爲$\frac{4\pi^2R}{T^2}$月之

加速度爲$\frac{4\pi^2R'}{T'^2}$) 則上之比例式等於

$$\frac{M}{R^2}:\frac{M''}{R'^2}=\frac{4\pi^2R}{T^2}M':\frac{4\pi^2R'}{T'^2}M''$$

$$=\frac{RM'}{T^2}:\frac{R'M''}{T^2}$$

$$\therefore M=\left(\frac{T'}{T}\right)^2\times\left(\frac{R}{R'}\right)^3\times M'$$

$$=\left(\frac{27.32}{365.24}\right)^2\times\left(\frac{38000000}{95500}\right)^3\times M'$$

$\therefore\ M:M'=350000:1$

即約35萬倍……答

(23) 試述毛林之法則 (Morin's Law)

解：　二面間之最大摩擦力(F)與接觸面間之全壓力(P)爲正比 (F=mP)與接觸面之廣狹無關，稱毛林之法則。

又二面間之最大摩擦，與其間之全壓力之比稱其二面間之摩擦係數。

(24) 運重貨用車，有何便利？試申述之。

解： 以車運物時，其作用之摩擦力爲車輪與地面間之迴轉摩擦，及車軸與軸孔間之滑動摩擦二種，而普通迴轉摩擦較滑動摩擦爲小。且輪軸所受之滑動摩擦由滑劑(如油類)而減小，故雖有二種之摩擦而較之物體在地上之滑動摩擦爲小，此用車送搬之利益。又每搬重大之物，常置圓木於其下，亦卽爲迴轉摩擦較滑動摩擦爲小之故也。

(25) 有100克之物體，在長10尺高5尺之斜面上，今欲以與斜面平行之力支持之，須力若干？又沿此斜面推上時，須力若干？

解： 物體欲沿斜面滑動之力爲

$$100\text{ 克}\times\frac{5}{10}=50\text{克}$$

物體及於斜面之全壓力爲

$$100\times\frac{\sqrt{3}}{2}=50\sqrt{3}\text{克}$$

物體與斜面間之最大摩擦力爲

$$50\times\sqrt{3}\times 0.2=10\sqrt{3}\text{克}$$

故支持所須之力為

$$50-10\sqrt{3}=(50-10\sqrt{3})\text{克}\cdots\cdots\text{答。}$$

又推上之力>沿斜面下之力+摩擦力

即　>50克+10$\sqrt{3}$克

故須$(50+10\sqrt{3})$克之力以上……答。

(26) 何謂拋物線運動，其計算之公式若何？

凡一動點之初速度如與加速度不同，在一直線上，則其徑路為曲線。如在地面上將一物體斜向空中拋出，即其一例。如是拋出物曰射體。其在空中通過之徑路曰拋物線。此運動即曰拋物線運動。Faral olic motion.

為以V_0表一物發射時之速度，其方向與水平線成θ角之傾斜，則此物上昇之高度為$\dfrac{v_0{}^2\sin^2\theta}{2g}$而其水平方面之射程應為$\dfrac{v_0{}^2\sin2\theta}{g}$由發出至還落於水平面之時間為 $t=\dfrac{2v_0\sin\theta}{g}$就水平射程言當 $\theta=45°$ 時，其值最大，故知槍礮之射擊距離最遠時為瞄準時令其與地平面所求之角度為 $45°$ 時。

(27) 圓加速度之計算式如何？

凡一動點，其運動之軌道為一圓時，則此種運動名曰圓運動。其動點之加速度為表現恆常向圓心之一種動力。

即　$a=\dfrac{v^2}{r}$

(28)　一球拋向空中，高達50尺，而向前進之距離爲 200 呎，求拋球時之方向，及其初發時之速度。

設知其初發時之速度爲每秒 V 呎，而發射時與水平線成 θ 度之角

則　$$\frac{V^2\sin^2\theta}{2g}=50$$

$$\frac{V^2\sin 2\theta}{g}=200$$

或　$$V^2\sin^2\theta=100g\cdots\cdots(1)$$

$$V^2\sin 2\theta=200g\cdots\cdots(2)$$

解　(1)及(2)則得　$\sin\theta=\cos\theta$

$\therefore\quad\theta=45$

$V=80.2$

故知發射之方向，係與地平面成 45° 之角，而其初速度爲80.2呎每秒。

(29)　一動點作一直徑 10 公分之圓運動，每秒鐘回旋 4 次，求其加速度。

因一秒間該體在圓周上迴旋四次，則其每秒之速度應爲　$V=4\times10\times\pi=125.66$(呎)

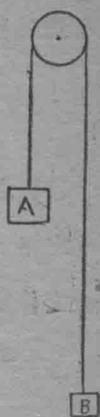
據第 27 題

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{(125.66)^2}{5}$$

$$=3158$$

即其加速度爲每秒3158呎。

(30) 有兩物體一重10公斤，一重8公斤連以一線，置於一滑車之上，則輕者必向上運動，而重者向下運動，問最初之二秒鐘以內，各較其原有位置移動若干之距離？



如圖A端之10公斤物體，如無B端8公斤物體所牽制，則其降下爲自由落下，其加速度爲每秒g(公分單位)。今因有物牽制，則其降下之每秒加速度，必不及每秒g公分，茲另設之爲每秒a公分。

由力與質量之關係應有

$$8(g+a)=10(g-a)$$

$$g=980$$

$$\therefore \quad a=109$$

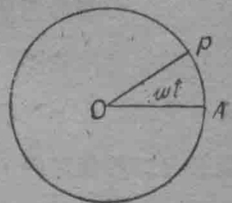
今之題變爲已知A向下落，每秒加速度爲109公分每秒，故兩秒鐘內所行之距離應爲 $S=\frac{1}{2}at^2=\frac{1}{2}\times109\times(2)^2$

$$=218\text{公分}$$

(31) 周期運動約有幾種？試說明之：

所謂周期運動者，即動點之位置及運動狀況，經歷一定之時間後，完全恢復原狀之運動也。

今先以圓運動說明之，如圖以r表圓半徑，w 表角速度，O 表圓心，A 表最初出發點，是曰始點。P (x,y) 表經歷時間 t 後，動點之位置則



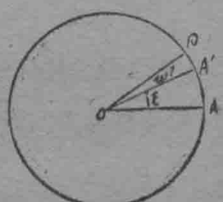
$$x=r\cos wt$$

$$y=r\sin wt$$

即P 之位置，完全由wt而定，故秒 wt 曰動點。在時刻 t 之相。命 (x′,y′) 表動點，由時刻 t 再經歷$\frac{2\pi}{w}$之時間後之位置如下

$$x'=r\cos(wt+2\pi)=r\cos wt,\ y'=r\sin(wt+2\pi)$$
$$=r\sin wt$$

與P 完全一致，即恢復其原狀，其所須時間$\frac{2\pi}{w}$曰周期 period. 通常以T 代之。單位時內動點在圓周上環遶之次數n曰轉數。number of revolutions，周期轉數及角速度等之關係如下：



$$T=\frac{2\pi}{w}=\frac{1}{n}$$

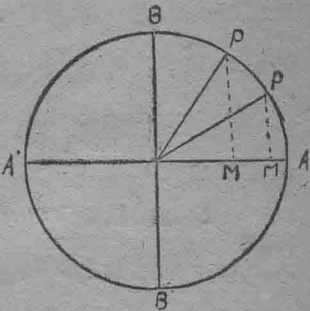
如計算時之起點不在A而在另一點如上圖之A′,與始點A間之角E曰始角Epoch,或原相initial phase.

則計算上必將E加入wt中。

如　$x=r\cos(wt+E)$　　$y=r\sin(wt+E)$

此外之周期運動尚有下列之數種：

A.　單弦運動(或單調)simple harmonicmotion，如圖P表動點在圓周AB，A′B′上以常角速度w作圓運動，AA′表任意一直徑，當P運動時其於AA′上之正射影M之運動爲單調運動。



其周期 $T=\dfrac{2\pi}{w}=2\pi\sqrt{\dfrac{x}{-a}}$

其中x爲M距O點之距離曰位變$a=-w^2x$，卽M點於其位變x時之加速度。

B.　單擺 simple pendulum

單擺卽一細綫其重量略去不計，一端固定他端懸一小球，令右左擺動之謂也。

其周期　$T=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$，　L表擺長，

C.　角調運動 Angular harmonic motion

一動點於一段圓弧上，來往運動而能滿足

$\alpha=-C\theta$ 之條件者曰角調運動。式中α表角加速度，θ表角變位，C表一常數。由單弦運動之公式推之則

$$\text{周期}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{\theta}{\alpha}}\text{。}$$

此外尚有扭擺 Torsion pendulum，復擺 Compound Pendulum，及可逆擺 Reversible Pendulum 等等，亦在周期運動之列。高深物理中方論及之，玆不贅。

(32) 一時鐘每日快 3 分鐘。求其擺長之差誤。（作單擺運動解之）。

一準確時辰鐘，其擺擺動之周期係兩秒，但題上所云之鐘，則擺動之周期為

$$2\times\frac{86400-180}{86400}\text{秒即 }1.9958\text{秒。}$$

蓋每日多走 180 秒故也。

$$\text{單擺之周期為}\quad T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\therefore\qquad L=\frac{T^2 g}{4\pi^2}$$

設L_1表準確時鐘之擺長，L_2表現有時鐘之擺長。則

$$L_1=\frac{2^2 g}{4\pi^2}$$

$$=99.49238\qquad\text{(公分)}$$

及　$$L_2=\frac{(1.9958)^2g}{4\pi^2}$$
$$=99.07808 \quad (公分)$$

今$L_1-L_2=0.4143$公分

故知此鐘之擺較之準確時鐘之擺短0.4143公分。

(D)　功及能

(1) 何謂功？

解：以力作用於物體上，能令該物體移動，此種作用稱曰功(work)。卽凡以力作用於物體，令物體沿力之方向運動時，其力之大(F)與力之方向上物體所動之距離(S)之相乘積，爲功之量(W)。

卽　$W=F\times S$

功之單位爲

(a)　爾(erg)＝達因×糎(絕對單位)，

卽以1達因之力作用於物體，而使物體動1糎之功。

(b)　瓩米＝1瓩×米

卽將1瓩之物體舉至1米高之功

(c)　呎磅＝呎×磅

卽將1磅之物體舉至1呎高之功。

(註) 1磅=453.6克，1呎=30.48糎

$1呎磅=30.48\times453.6\times980=13.55\times10^{6}$爾

$1瓩米=1000\times980\times100=98\times10^{6}$爾

$$=\frac{98\times10^{6}}{13.55\times10^{6}}=7.2\ 呎磅.$$

(2) 試由水壓機以說明功之原理。

解： 設水壓機大小兩圓筒之面積爲 a,b，若作用於小圓筒活塞之力爲 P

則大圓筒上所生之力即爲 $P\times\frac{a}{b}$

又小圓筒活塞所動之距離爲 h

則大圓筒活塞所動之距離即爲 $h\times\frac{b}{a}$

故小圓筒一方之功爲Ph，

則大圓筒一方之功爲 $P\times\frac{a}{b}\times h\times\frac{b}{a}=Ph$

故雙方之功相等。

(3) 以 2 磅之物體，持至 6 呎之高處，所需之功如何？試以瓩米表示之！ 1瓩=2.2磅

解： 2 磅=2×0.4536=0.9072瓩

6 呎=6×0.3048=1.8288米

∴ 功=0.9072×1.8288=1.6425(約)瓩米…答

(4) 有體重150磅之人，負50磅之貨物，登一30尺長 呎

傾斜 $45°$ 之梯子時，所爲之功若干？

解： 梯子之高爲$30 \times \dfrac{1}{\sqrt{2}}=21.2$呎

所求之功爲$21.2 \times (150+50)=4240$ 呎磅……答

(5) 試述功率之意義及其單位。 (女師大)

解： 單位時間內所成之功量稱功率(Power) 或稱機關之功率 $P=\dfrac{W}{T}$

其單位爲 Watt (華)

(a) 1 華$=10^7$爾(每秒)，

即每秒10^7爾之功率，稱 1 華。

(b) 1 馬力$=550$呎磅每秒$=746$華$=76$瓩米，

即於 1 秒內成 75 瓩米(法制)或550呎磅(英制)之功。

(6) 有機關車能令50噸之貨車以每小時30哩之速度，爲水平之進行，則此機關車之功率爲若干馬力？(但及於進行中之貨車之抵抗每噸爲15磅)

解： 對於列車之抵抗爲$15 \times 50=750$磅

1 小時機關車所作之功爲(1 哩$=5280$呎)，

$750 \times 30 \times 5280$呎磅

故所求之馬力爲

$$\frac{750\times30\times5280}{550\times60\times60}=60\text{馬力}\cdots\cdots\text{答}$$

(7) 有15馬力之蒸氣機關，自 300 呎深之坑中吸水，其 1 小時所吸之水爲若干立方呎？

解： 15馬力之機關 1 秒間所爲之功爲

15×550呎磅

1秒間吸上之水之容積爲(1立呎＝62.5磅)

$$\frac{15\times550}{300\times62.5}\text{立呎}$$

故 1 小時吸上之水之容積爲

$$\frac{15\times550\times60\times60}{300\times62.5}=1584\text{立呎}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

(8) 常稱某機械爲若干馬力，其意義若何？

解： 某機械 1 秒間所作之工作爲75瓩米或 550 呎磅之若干倍之謂。

卽在 1 秒內成550呎磅工作，或75瓩米工作者，爲工率之標準，稱曰一馬力。

(9) 何謂能？

解： 作功之原因稱之曰能(Energy)。以其所作之功之量而測之，故能之單位與功之單位同，(Erg) 能有二種：

(a)　動能　即物體運動中所有之能，今設速度為V秒糎，質量為 m 克，則物體所有之動能為$\frac{1}{2}mv^2$爾。

(b)　勢能　即靜止物體所有之能。

今設距地面之高為h糎，質量為 m 克，則物體所有之勢能為 mgh 爾。

(10) 試舉例以明由一種能變為他種能之實例。

解：(a)　如用蒸汽力(勢能)以迴轉車輪(動能)。

(b)　如利用高處之水力(勢能)以迴轉水車(動能)。

(c)　如矢由弦上(勢能)射出(動能)。

(11) 有速度 v.質量 m 克之物體，至其靜止時，所作之功若干？

解：在物體作用之反對方向，作用以 f 達之力，設此物體自受力之作用至其靜止時，所動之距離為 Scm.則此力所為之功，即為 fS 爾。

因 $v^2=2aS$　　$f=ma$

故 $fS=ma\times\frac{v^2}{2a}=\frac{1}{2}mv^2$ 爾………答

(12) 有物體其速度為 v 秒糎，質量為m 克，其動能為$\frac{mv^2}{2g}$克糎，試證明之。

解： 反對於物體之運動方向，作用以m 克之力，設此物體自受力之作用至靜止時，所動之距離為 S 糎，則此力至物體靜止時所為之功為 m S 克糎，然 $v^2=2aS$，力係用重力單位故 $a=g$

$\therefore\quad v=2gs$

$$\therefore\quad mS=m\times\frac{v^2}{2g}=\frac{mv^2}{2g}\text{克糎。}$$

(13) 試就垂直拋上之物體，而論其能之變遷，並說明能之保存之原理！

解： 在出發點時，僅有動能隨物體上昇，其速度逐次減少，故其動能漸減，而勢能漸增，及達於最高點時，則僅有勢能；再由此降下，動能增加，勢能減少，達於地面之時，則祇成動能。

設將m克之物體，以 v 之速度上拋時，在出發點之能，全部為動能，卽 $\frac{1}{2}mv^2$。

又物體上昇至S′之高時，則兼有動能及勢能，其勢能為mgS′。

設達於S′高時之速度為v′則 $v'^2=v^2-2gS'$，又動能為 $\frac{1}{2}mv'^2=\frac{1}{2}m(v^2-2gS')$。

故兩者之和卽 $mgS'+\frac{1}{2}m(v^2-2gS')=\frac{1}{2}mv^2$，卽為達於S′高時之動能及勢能之和，等於出發點所

有之能。

(14) 有60克之落體，經5秒後，其所得之動能幾何？

解：　由落下公式 $v=gt$ 得

5 秒後之速度 $v=980\times5=4900$ 秒糎，

故所求之動能，由公式 $\frac{1}{2}mv^2$ 得

$\frac{1}{2}\times60\times(4900)^2=7203\times10^5$ 爾

$=7.2\times10^8$ 爾。

(15) 落體運動時，其能之變遷若何？

解：　物體靜止於高處時，僅有勢能，及至落下之途中，因有速度乃有動能。又同時與地漸近，速度愈大，勢能漸減，動能漸增，物體達於地面之瞬間，勢能爲零，即全部變爲動能，其與地面衝突時，發音發熱甚而至於發光，而變爲音，熱，光之能，繼則能之全部變爲熱，以溫暖地球或空氣之一部分。

(E) 單一器械

(1) 試述單一器械之種類及其應用之實例！

解：　槓桿，斜面，楔，滑車，輪軸，螺旋等，總稱曰單一器械。再由此六種結合而成種種複雜之機械，以爲種種之應用。

次舉應用之實例如下：——

(a) 槓桿 如桿秤，天秤，剪，釘拔等。

(b) 斜面 如落下之加速度,測定器，山路之灣曲等。

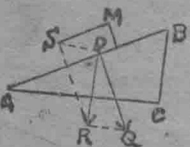
(c) 楔 如刀，斧，釘，針等。

(d) 滑車 如汲水滑車，起重機等。

(e) 輪軸 如捲轆轤、脚踏車，及其他之齒車等

(f 螺旋 如壓縮器，螺旋釘等。

(2) 於平滑之斜面上置m克之物體，若以水平力支持之，須用力幾何？



解： 如圖設OR爲表M之重之線，今將OR分解爲垂直於斜面之線OQ，及平行於斜面之線OS，

則$\triangle ORS \backsim \triangle ABC$

故$OS = OR \times \dfrac{BC}{AC} = M \times \dfrac{BC}{AC}$

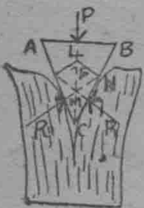
卽以$M \times \dfrac{BC}{AC}$之力作用於OS之反對方向卽可。

(3) 有28克之物體，置於高12尺，底邊35尺之斜面上，則其及於斜面之直壓力幾何？

解： 由前題$OQ = OR \times \dfrac{AC}{AB}$，

$$\therefore\quad OQ=23\text{克}\times\frac{35}{\sqrt{12^2\times35^2}}=20\text{克}\cdots\cdots\text{答}$$

(4) 如刀，斧等有及之物，善於切物者，何故？



解：　如圖，楔為ABC，物體之抵抗力為R,設想R與楔面為直角時,更將R延長作平行四邊形，以求得其合力為F，

然　$\triangle ABC \backsim \triangle LMN$

$F:R=AB:BC$

故　$F=R\times\dfrac{AB}{BC}$

卽加 F 以上之力於楔之上方時,可割開物體，而 R 因物體各有一定，故楔之狹而長者其效益大，此銳利之及所以善於切物故也。

(5) 有重50瓩之物體，在傾斜 30° 之斜面上，今欲以水平力支持之，須用力幾何？又及其斜面之直壓力幾何？

解：　在傾斜30°之斜面上

底邊：高$=\sqrt{3}:1$

斜邊：底邊$=2:\sqrt{3}$

故水平力$=50\text{瓩}\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{50}{\sqrt{3}}\text{瓩}$…………答

又直壓力$=50\text{瓩}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}\text{瓩}$…………答

(6) 置物體於平滑之斜面上，以水平之力支之，則所需之力較物體之重爲大時之條件若何？

解： 水平支力＝物體重量×$\dfrac{\text{斜面高}}{\text{斜面底}}$

故斜面之高＝斜面之底時，即斜面之傾角爲45°時，則水平支力等於物體之重，若傾角大於45°時，則斜面之高大於斜面之底，故平行支力較物體重量爲大。

(7) 有螺旋其螺距爲3糎，半徑爲6糎，今於其一端附以柄，加5瓩之力於其柄端，則螺之及於物之下壓力若干？

(但棒之長距螺旋之中心爲1米)

解： 設螺之半徑爲r螺距爲D

作用於螺旋之力爲F

螺旋及於物體之力爲P

則 $P=F\times\dfrac{2\pi r}{D}$

故 $P=5\text{瓩}\times\dfrac{2\times3.1416\times100}{3}=1047.2\text{瓩}$…答

(8) 有滑車，將其絲引下1尺，其錘上升2.5寸，今欲引200兩之物體，當用力若干？

解： 此滑車之絲每引下1尺，錘上其2.5寸，是其力有

四倍之利。

故所需之力爲 $200\times\frac{1}{4}=50$兩

　即需50兩以上之力…………答

熱　　學

(A) 熱量與溫度

(1) 何謂熱？(heat)

解：熱爲由物體分子振動而生之一種能(Energy)，凡物體分子運動激烈時則溫，緩慢時則冷。

熱對於物體之效果爲

(一)溫度之上昇。(二)物體之膨脹。(三)狀態之變化，如融解氣化。(四)光及電氣之發生。(五)化學變化之促進。(六)熱機關之原動力。

(2) 試述溫度之意義

解：溫度係示物體，寒暖昇降所用之語。溫度之高低常由同一物體所含熱量之多少而分，物體分子運動急劇時溫度高，緩慢時溫度低。

(3) 溫度與熱之區別若何？

解：溫度係示物體之寒暖度數時所用之語，物體之溫度所以有昇降者，因物體內之熱常有出入故也。

如加多量之熱於物體時，則溫度上昇。反之由物體取出多量之熱時，則溫度下降。但質量種類不同之二物體內，雖加減以同量之熱，而其溫度之昇降不一定相同。換言之，卽溫度爲表物體之寒暖狀態，而不能表熱量之多少。

(4) 最高寒暑表(水銀)與最低寒暑表(酒精)之構造及其用法若何？

解： 最高寒暑表，常用以表某時間內之最高溫度，其管與球相接之處，設有障礙物。溫度上昇時，則水銀能通過其障礙物而上昇，溫度下降時，水銀不能復其原處。換言之，卽某時間內，溫度最高時，水銀卽達其度劃，其後溫度下降時，水銀仍留於其度劃，故用之以示最高之溫度。

最低寒暑表(酒精寒暑表)恆用以示某時間內之最低溫度，不用水銀而用酒精，將玻璃製之小目標置於管內之酒精中，次將寒暑表橫置之，令目標與管內酒精之一端保持其水平之位置，溫度下降時，目標卽與酒精同時後退。溫度上昇時，酒精卽棄目標而前進。故由目標之位置而得知極低之溫度。

(5)√ 試說明製寒暑表多用水銀而不用水之故？

解： 其故有三：——

(a) 水在 $0°c$ 卽結冰，而水銀則須 $0°$下$39°c$ 始結冰。

(b) 水銀之膨脹係數在各種溫度均相同，故用此較爲正確。

(c) 水中含有各種氣體，且水蒸氣能防礙結果之正確。

(6)√ 何謂Calorie？　(成都大學)

解： 令1克之水溫度上昇 $1°C$ 時，所要之熱量，爲熱量之單位，稱曰一加(Calorie)。

(7)√ 熱容量與比熱之意義若何？(北師大，北醫大)

解： 某物體之溫度上昇1度所要之熱量，稱某物體之熱容量 (Thermal Capacity)。

某物質(不是物體)之溫度上昇1度所要之熱量，與其同質量(不是同體積)之水上昇一度所要之熱量之比稱曰比熱。換言之，卽某物質之熱容量與其同質量之水之熱容量之比，或某物質1瓦之熱容量所表之加之數謂之比熱(Specific heat)。

故熱容量與比熱之關係爲(熱容量＝比熱×質量)

(8) 氣體之比熱有二種，試說明其關係。

解： 氣體之比熱，一為定壓比熱，卽壓力一定，僅變其體積時之比熱。一為定積比熱，卽體積一定，僅變其壓力時之比熱。前者之熱常於體積變時，費去其一部，故為後者之1.41倍。

卽 $\dfrac{\text{定壓比熱}}{\text{定積比熱}}=1.41$

(9) 以 t° 之鐵塊m克，投於 t'° 之水 m'克中，其最後之溫度為T°，鐵之比熱幾何？

解： 設鐵之比熱為x，

則鐵塊所失之熱量為$mx(t-T)$加水所得之熱量為$m'(T-t')$加。

設熱不曾放散於他處，則得次式

$$mx(t-T)=m'(T-t')$$

$$\therefore x=\frac{m'(T-t')}{m(t-T)}\cdots\cdots\cdots\text{答。}$$

(10) 有銅10克，鐵50克之合金，令其溫度自 15°昇至20°，則所要之熱量幾何？

解： 熱量＝比熱×質量×溫度之差

卽 $H=Sm(T-t)$加

銅之比熱為0.0936

鐵之比熱爲0.1149

故銅所要之熱量爲$0.0936\times10\times(20-15)=4.65$加

鐵所要之熱量爲$0.1149\times50\times(20-15)=28.70$加

$\therefore$所求之熱量爲$4.658+28.70=33.15$加。

(11) 今欲測火爐之溫度，以一白金塊投於爐中熱之，取出投於20°之水銀中，則其結果溫度爲60°，次更將白金塊投於爐中熱之至120°，取出投於溫度15°質量相同之水銀中，其結果溫度爲20°，問爐之溫度如何？

解：　設白金塊之質量爲m克，比熱爲 c

水銀之質量爲m′克，比熱爲c′

爐之溫度爲 t°

由第一次之測定，得

$mc(t-60)=m'c'(60-20)$……………(1)

由第二次之測定，得

$mc(120-20)=m'c'(20-15)$……(2)

消去(1)，(2)中之mc，m′c′，則

$5\times(t-60)=4000$

$\therefore\quad t=860^\circ$…………答

(B) 熱之移動

(1) 熱之移動有幾種？試說明之！（廣東大學）

解： 有三種：——

(a) 熱之傳導 (Conduction of heat)，即熱由物體之一部傳至他部之移動之謂，如金屬棒之傳熱。

(b) 熱之對流 (Convectiva of heat)，即熱伴物體流動而移動之謂，如風（熱者上升，冷者下降）。

(c) 熱之輻射 (Radiation of heat)，即熱不借物體之媒介作用而移動於他部之謂，如太陽之傳熱。

(2) 夜晴始有露者何故？

解： 天上之雲足以防地熱之輻射，夜晴則無雲，地面之熱得由輻熱而放散，故地面之物體易於冷卻，空中之水蒸氣亦冷至露點下，遂成露。

(3) 夏著白衣，冬著黑衣，其故安在？

解： 白色衣能反射太陽之輻射線，故較涼。黑色衣能吸收太陽之輻射線，故較暖。

(4) 試述礦內所用安全燈之効果。

解： 安全燈火陷之周圍，係用金屬網圍繞，故雖有爆發性之氣體由外部侵入，而在燈內所起之些少熱

度，蓋被金屬網傳導不致熱及外部空氣而爆發。

(C) 膨　脹

(1) 試述線膨脹係數。　(北師大)

解：物體之溫度，上昇1°時，所膨脹之長，對於其原長之比，稱線膨脹係數 (Coefficient of line of expansion)。

今設物體之原長爲L，膨脹時之全長爲 L′ 上昇之溫度爲 $t°$ ，線膨脹係數爲 a，則得次之關係

$$L'=L(1+at)$$

即膨脹全長＝原長×(1＋線膨脹係數×上昇溫度)。

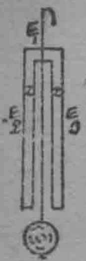
(2) 試說明補整擺之作用。

解：補整擺係由長三條 $E_1, E_2 E_3$，之鐵棒，與二條 z 之鋅組合而成。溫度雖變化，而擺無伸縮，如圖，鋅僅能向上方延長，鐵棒僅能向下方延長，今溫度由 0° 昇至 t° 時

鐵之延長＝$(E_1+E_2+E_3)\times 0.000012\times t$

故錘之重有稍下降之虞，然同時

鋅之延長＝$Z\times 0.000029\times t$ ，故擺子之長恆



一定，卽

$$(E_1+E_2+E_3)\times 0.000012\times t=Z\times 0.000029\times t$$

$$\therefore \frac{E_1+E_2+E_3}{Z}=\frac{29}{12}=2.42.$$

故由上式，可定鐵棒與鋅棒之長。

（註） 式中0.000012＝鐵之線膨脹係數，

0.000029＝鋅之線膨脹係數。

(3) 試述體膨脹係數及其與線膨脹係數之關係。

解： 物體之溫度上昇1°時，所膨脹之體積與其原體積之比，稱體膨脹係數 (Coreffcient of Cubical expansion)。

今設原體積爲v,膨脹時之全體積爲v′，上昇之溫度爲t,體膨脹係數爲b,則得次之關係

$$v'=v(1+bt)。$$

卽膨脹體積＝原體積×（1＋體膨脹係數×上昇溫度)。

又體膨脹係數與線膨脹係數之關係，

卽體膨脹係數爲線膨脹係數之三倍，卽 $b=3a$.

(4) 溫度0°時，所製之正確黃銅尺，30°時，測得某物之長爲 50cm.，問此物之眞長幾何？

解：　黄銅之膨脹係數$=0.000019$

溫度30°時，此尺之1cm.卽等於

在 0°時之$1\times(1+0.000019\times30)=1.00057$cm.

故眞長$=1.00057\times50=50.0285$cm.………答。

(5) 何謂液體之膨脹係數？

解：液體之溫度昇降1°c.時，其體積之變化與其原體積之比，稱液體之膨脹係數。卽液體與容器同時膨脹時之膨脹係數，與容器之膨脹係數之和。

(6) 試述液體之外觀膨脹。

解：容器內之液體之膨脹，卽自液體之眞膨脹減去其容器之膨脹，稱液體之外觀膨脹，(Apparent expansion)

卽　外觀膨脹＝眞膨脹－容器之膨脹，

∴　眞膨脹＝外觀膨脹＋容器膨脹。

(7) 物體之密度與溫度之關係若何？

解：一般物體大抵因溫度之上昇而膨脹，然其密度與體積爲反比例，是以物體之密度常因溫度之上昇而減小，惟水則否。

(8) 立積與面積之膨脹係數率一般爲長膨脹係數率之三倍，其理安在？試以鋅之膨脹係數0.00003證明之！

解： 設鋅之原長為1其膨脹後之長為$(1+0.00003$，

故其面積之膨脹為 $(1+0.00003)^2-1^2=1+2\times 0.00003+(0.00003)^2-1^2$。

而長之膨脹係數至小數五位為正確，今$(0.00003)^2=0.0000000009$，其小數點以下五六位均為零，故在長之膨脹係數時，此項卽可棄之。

故面積之膨脹係數為2×0.00003，同理立積之膨脹係數為

$(1+0.00003)^3-1^3=1+3\times 0.00003+3\times(0.00003)^2$。

上式之三項與四項均可棄却 $+(0.00003)^3-1$

∴ 立積膨脹之係數$=3\times 0.00003$。

(9) 水之膨脹如何？

解： 水在$4^\circ c$時，其密度為最大，(卽體積為最小)溫度下降，則漸次膨脹，至$0^\circ c$時，則為激烈之膨脹而結冰，又$4^\circ c$以上時，雖亦漸次膨脹，然其膨脹為不規則，無一定之係數，又至100°時，則沸騰而為氣體，其體積膨脹至1500倍以上。

(10) 氣體之膨脹係數如何？

解： 氣體之膨脹係數不拘氣體之種類常為一定，其係

數爲 0 度時之體積之273分之1，卽受一定壓力之一定量之氣體，其體積每溫度上昇1度，膨脹0度時之體積之 273 分之 1，此稱 Gay Lussac's Law.

(11) 何謂標準狀態？

解：凡氣體在溫度 0°c.與氣壓在760 耗下之狀態，稱爲標準狀態或準則狀況。

(12) 何謂絕對溫度？

解：攝氏之度數(t)加273度稱曰絕對溫度(T)

$$故T = t^{\circ} + 273^{\circ}$$

例如攝氏27°爲絕對溫度之$27^{\circ}+273^{\circ}=300^{\circ}$

攝氏-273°爲絕對溫度之 0°。

(13) 試述查理斯(Chrale's law)之法則。

解：壓力一定時，一定量之難於液化之氣體之體積，溫度上昇 1 度，必增加其 0°時之體積之 273 分之 1，稱查理斯法則。

(14) 試述 Boyle charle's law！

解：一定質量之氣體之體積與絕對溫度爲正比與壓力爲反比而增減，卽

$$v' = v \times \frac{t'+273}{t+273} \times \frac{p}{p'}$$

(15) 有 0°, 65 cm. 之輕氣，設其體積不變，則加熱至

84°時之壓力幾何？

解： 氣體之體積不變，而增加其溫度時，溫度每增1°，其壓力卽增 273 分之 1

$$\therefore \quad 壓力 = 65\,\mathrm{cm.} \times \left(1+\frac{84}{273}\right) = 85\,\mathrm{cm.} \quad 答$$

(16) 溫度15°時，有10立之氣體，今其壓力不變而欲2倍其體積，則溫度應如何？

解： 壓力不變時氣體之體積與絕對溫度爲正比，今設所求之溫度爲 t°，

$$則得 \frac{20}{10} = \frac{273+t}{273+15} \qquad \therefore\ t = 303^{\circ} \cdots\cdots 答$$

(17) 固體，液體及氣體皆因熱而膨脹，試舉例以明之

解： (a) 固體，如鐵軌之距離，夏日較冬日爲小。又車輪之外鐵環，常於赤熱時裝箝之等。

(b) 液體，如利用水銀及酒精之膨脹而作寒暑表。又熱滿水之器時，水常溢出等。

(c) 氣體，如橡皮球因受熱而膨脹。又竹桿因受熱而破裂等。

(註) 物體皆因熱而膨脹，惟固體中之橡皮及碘化銀，能在一定之界限內，反遇熱而縮小，遇冷而膨大。又液體之水在 4°c 以下反遇熱而縮，遇冷而脹，是皆爲例外。

(18) 蓋露薩克之定律如何？

蓋露薩克氏定律 Gay-Lussac's Law 亦稱查理氏定律 Gharles' Law. 其要點在表明氣體體積之變化與溫度變化之關係，其語云：

"凡氣體，若外界對其所施之壓力不變，則溫度每昇降 $1^{\circ}c$ 其容積卽隨之增減原有容積之$\frac{1}{273}$"

(19) 何爲理想氣體？

上題之$\frac{1}{273}$，實則非一絕對之值，固亦稍壓力之高低，密度之大小，稍有變異者，然假令各種氣體之密度成爲極小時，則一律成爲

$$\frac{1}{273.2}=0.0036604,$$

此數值稱曰氣體之膨脹係數，常以B表之，故B亦可視爲凡百氣體之一種特性，卽凡具有此膨脹係數者均爲氣體。但密度漸大之氣體，則常漸失此特性。此不獨於查理定律爲然，卽波義耳定律亦然，卽密度漸大之物質對於波義耳定律亦逐漸不適用。

但吾人所謂理想氣體 Ideal Gas (或曰完全氣體 Perfect Gas) 則殊不然。卽無論在任何溫度，任何壓力之下，此種理想氣體，均能適用波義耳定律。

例如輕氣，養氣，淡氣及氮等，在常溫常壓下，均可看作理想氣體。

(20) 一銅擺時辰鐘，於溫度20°c時，計時正確，設溫度降至0°c時，則此鐘計時將過慢抑過快，並計出其差誤爲若干秒？

令L_1＝在20°c,時鐘擺之長，

L_2＝在 0°c,時鐘擺之長，

又 T_1＝爲在20°c時擺動之周期，

T_2＝爲在 0°c時擺動之周期。

再銅之線脹係數爲 18.9×10^{-6} 或 0.0000189

$$\therefore \quad \frac{L_2-L_1}{L_1(0-20)}=0.0000189$$

或 $$L_2=0.999622L_1$$

從單擺公式知

$$T_1:T_2=L_1^{\frac{1}{2}}:L_2^{\frac{1}{2}}$$

現 $$T_1:T_2=1:\sqrt{0.999622}$$

$$=1:0.99981$$

但一正確時鐘，每一擺動之周期爲2秒

$$\therefore \quad T_2=1.99962(\text{秒})$$

故此鐘在0°c時每日快0.00038秒。

(D) 狀態變化

(1) 試釋融解，凝固，氣化，蒸發，沸騰之意義。

解： 固體變爲液體之現象，稱融解。如冰融成水，及液體變爲固體之現象，稱凝固。如水結成冰爲液體變爲氣體之現象，稱氣化。由其液體之自由表面徐徐氣化之現象稱蒸發。由其液體內部激烈之氣化稱沸騰。而所得之氣體稱蒸氣。

(2) 何謂融解熱？融解度？

融解點上1克之固體變爲同溫度之液體時，所需之熱量，稱某物質之融解熱，或稱融解之潛熱。例如0°之冰一克成爲0°之水時，須80加，故80加稱冰之融解熱。

又物質須各達到一定熱度，方能由固體變爲液體，此一定熱度稱某物質之融解度。

(3) 將標準溫壓之冰100克，漸次加熱，經4分後，冰全部融解，又經5分，乃達沸點，試求冰之融解熱。

解： 由題意100克之冰融解時所需之熱量與100克水由0°昇至100°時所需熱量之比爲4:5，但水所需之熱量爲100×100加，故冰所需之熱量爲

$$100\times100\times\frac{4}{5}=80\times100\text{加}。$$

$\therefore$ 冰1克所需之熱量即融解熱爲80加……答

(4) 以0°之冰塊，置於40°之水100克中，今欲得0°之水，問冰若干？

解： 設所求之冰量爲x克

則$100\times40=80x$

$\therefore$ $x=50$克…………答

(5) 將-10°之冰3克投於40°之水9克中，其結果如何？

解： 冰點下冰之比熱爲 0.5

設所求之溫度爲t

冰所得之熱量爲$0.5\times10\times3+80\times3+3t$

水所失之熱量爲 $9\times(40-t)$

$\therefore$ $0.5\times10\times3+80\times3t=9\times(40-t)$

$\therefore$ $t=8.8^{\circ}$……………答

(6) 物質之溶解點與壓力之關係如何？

解： 物質溶解時，其體積或增或減，而體積增加之物質，恆依壓力之增加而增大其溶解點。如石蠟在一氣壓時46度即融，在100氣壓時，則非50度不融。又體積減小之物質，恆因壓力增加，其融解

點愈低。如冰在135氣壓時，－1度卽融，在13000氣壓時，則-18°卽融之類。

(7) 何謂寒劑？試舉例以明之。

解：用以起低溫度之物質，稱寒劑。

如冰與食鹽（-22°）相混合，卽液化爲食鹽水，此時冰與食鹽之融解熱，均爲其自己所吸收，故能異常冷却而成寒劑。

(8) 試述發生低溫度之種種方法。

解：(a) 溶解熱及融解熱之利用，如冰與食鹽以3:1之比相混合時，則兩者因吸收溶解熱及融解熱而冷却，至零下22度。又冰與爐砂等之寒劑。

(b) 利用氣化熱，如酒精，醇精等之揮發性甚大，故常因蒸發而吸收多量之蒸發熱，以生低溫度。又如使液體安母宜亞氣化之製冰機等。

(c) 利用氣體膨脹時吸收熱之法，如製造液體空氣等。

(9) (a) 所謂冰之融解熱1克爲80.加者何意？又所謂銅之比熱爲0.093者何意？

(b) 以100克之銅上昇$50^{\circ}c$時之熱量，能融解0°之冰若干克？

解： (a) 1克之0°之冰化爲0°之水時，所需之熱量爲80°加之意。又使1克之銅上昇1°c.時所需之熱爲0.093加之意。

(b) 設所求之冰爲x克

則 $100\times0.093\times50=80x$

$\therefore$ $x=5.8$……………答

(10) 何謂蒸發熱？(Latent heat of vaporization)

解： 1克之液體化爲同溫度之氣體，所需之熱量稱該溫度之蒸發熱，或氣化熱。

水之氣化熱爲536加，比任何液體大。

(11) 何謂液化？(Liquefaction)

解： 氣體冷却至臨界溫度以下，復被壓縮，則成液體即氣體變爲液體之現象曰液化。

(12) 何謂露點？(Dewpoint)

大氣中之水蒸氣，漸次冷却，遂達其飽和之狀態而開始液化時之溫度，稱曰露點。

(13) 外氣之壓力與液體沸騰點之關係如何？

解： 欲使液體沸騰，須令液內氣泡之壓力大於外氣之壓力，而泡之壓力即液之最大漲力，溫度愈高則愈大。故外氣壓力大時，非熱至高溫度則不沸騰。

又通常水之沸點爲$100°c$.若高山上則不到$100°c$.即沸騰，因高山上之氣壓低，故沸點亦低。

(14) 測水之沸騰點，即能計算山之高，其理若何？

解：知水之沸騰點，即知其處之氣壓。既知山頂山麓之氣壓，則可由次式以計算山之高。

今設山高爲h，山頂之氣壓爲a，山麓之氣壓爲b，兩地之平均溫度爲t

$$\therefore\quad h=18400\times(1+0.00366t)\log\frac{b}{a}\text{米}$$ …答

(15) 水與熱相關之特性若何？又其對於地球及生物之影響，試乙並述之。

解：(a)　比熱甚大，故海水較土地難暖，亦難冷，故能調和沿岸之氣候。

(b)　融解熱及蒸發熱皆甚大，故溫度之變化不能急劇變水之狀態。又冬季下雨或雪時，得放出多量之熱，夏季則由融解氣化等作用，以吸收多量之熱，而防氣温之急變。

(c)　水在4度時之密度爲最大，且爲熱之難傳導體，故冬季不致上下皆冰，而魚類得保安全。

(d)　因受熱而起對流作用，故可以調和沿岸之氣候。

√(16)　有0°之水100克，與0°之冰 75 克所成之混合物，今欲得 30° 之水時，應加水蒸氣若干？（但水蒸氣之溫度爲100°）

解：　設所需水蒸氣之量爲 x 克。

冰之融解熱爲80加

水之氣化熱爲536加

$100\times30+75\times80+75\times30=x\times536+x\times(100-30)$

$\therefore\quad x=18.6$克…………答

×(17)　飽和蒸氣與不飽和蒸氣之區別若何？

解：　液體在密閉之器中，其液面恆充滿無數蒸氣，若溫度不變則液面上之蒸氣，常能保持一定量之數目，而液體不能再蒸發，此時所有之蒸氣，稱飽和蒸氣 (Saturated vopour)。若將飽和蒸氣壓縮或冷却，令其體積減小，則其一部分液化。且接於此飽和蒸氣之液面，並無蒸氣發生，而不飽和蒸氣，則無以上之性質。

√(18)　試述濕度之意義！

解：　現存於空氣中水蒸氣之壓力，與對於其溫度水蒸氣之最大壓力之比，稱濕度(Humidity)，以式表

之，即

$$濕度=\frac{現存空氣中之水蒸氣之壓力}{對於其時之溫度水蒸氣之最大壓力}$$

(19)　將 0° 之飽和空氣密閉之，而熱至 30° 時，其濕度幾何？

解：　0°之水蒸氣之最大張力爲4.6粍

30°之水蒸氣之最大張力爲31.5粍

故濕度爲$\frac{4.6}{31.5}\times 100=14.6\%$…………答

(20)　何謂蒸氣之最大張力？又使氣體液化之方法如何？

解：　飽和蒸氣所呈之壓力，稱蒸氣之最大張力，冷却氣體至其臨界溫度以下，並加以臨界壓力以上之壓力時，氣體即可液化。

(21)　試述蒸發潛熱之意義？

解：　液體變爲同溫度之氣體時，所吸收之熱量，稱蒸發之潛熱。

(22)　雨，雲，雹，雪，霰，露及霜之成因若何？

(北女師大)(北大)

解：　地面之水，受日光蒸發而上升，遇冷則爲雲，雲更遇冷則凝成水滴下降爲雨，雲若遇旋風，驟然強冷，則許多水滴相聚，凝而爲圓形之冰塊，是爲雹。此均爲夏日之現象。至冬季溫度本低，雲

上昇後遇冷即結爲無數之小冰塊，繼續下降，是爲雪。若此時更遇旋風，則凝成圓形之粒下降，是爲霰。含有濕氣之空氣，夜間與草木瓦石等相觸，其溫度降下達於露點，則所含之濕氣即液化而成露。此時之露點若在冰點以下時，則結爲霜。

(23) 試說明用濕度表測定空氣之濕度之理由及方法！

濕度表乃二寒暑表並置，其中之一球上覆以布片，布片之他端，浸於水中之裝置。

空氣愈乾燥，則水之蒸發愈盛，故球上覆有濕布之寒暑表之示度下降，觀兩球所示溫度之相差若大，即知空氣之濕度小。

今設空氣中所含水蒸氣之最大壓力爲 f，

對於濕球上所示之度水蒸氣之最大壓力爲 f'

乾球上所示之度爲 t

濕球上所示之度爲 t'

現在之氣壓爲 p.

則得次式

$$f=f'-0.00077(t-t')p.$$

可由上式，以計算濕度。

(24) 由寒暑表可略測山之高度，其理由及方法如何？

解：　大氣之壓力雖因地勢而異，但其變更之度則不一定，例如高於海面 1000 米時，約減 90 耗，更高 1000米時約減80耗，若再高1000米時約減70耗，故由寒暑表可以測知其處之水之沸點，即可知其處之氣壓，故因由此關係，略可測知山之高度。

(25)　空氣之溫度爲33.7°c.，露點爲 20.4°c 時，試求其濕度？

溫度(c) 20°	21°	33°	34°
水蒸氣最大張力(水銀耗)17.4	18.5	37.4	39.6

解：　20.4°之最大張力

$$17.4+(18.5-17.4)\times\frac{4}{10}=17.84$$

33.7°之最大張力

$$37.4+(39.6-37.4)\times\frac{7}{10}=37.65$$

故所求之濕度爲

$$100\times\frac{17.84}{37.65}=47.4\%$$ ……………答

(E)　熱與功

(1)　熱之功當量之意義及其值如何？

解：　發生單位熱量所用之功量稱熱之功當量，其數值

爲 1 加$=4.2\times10^7$爾$=0.429$瓩米

全功(Energy)÷熱量＝功當量 or 4.2×10^7爾

全功÷功當量＝熱量

(2) 熱究爲何物？又其與功作用有何關係？

解： 熱非物質而爲功所生之變化，如摩擦冰生熱而溶解，此熱並非出自冰中，乃摩擦所用之功而生之變化。又熱能用以功作，如火車之行動，是全根據於燃燒之煤所發之熱。

(3) 問 1 喬之功與若干之熱量相當？

解： 1 喬卽 10^7 爾，卽 1 千萬爾

故其相當之熱量爲

$$\frac{10^7}{4.2\times10^7}=\frac{1}{4.2}=0.24\text{ 加}$$ ………答

(4) 10 瓩之落體，以 200 秒之速度與地面衝突，所生之熱量若干？

解： 此物體所有之動能爲

$\frac{1}{2}\times10000\times(20000)^2$爾$=2\times10^{12}$爾

因 1 加$=4.2\times10^7$爾

故熱量$=2\times10^{12}\div(4.2\times10^7)$

$=4.76\times10^4$加…………答。

(5) 有 1 小時消費煤 1 噸之機關車，能生若干馬力？

(但機關車之效率爲0.06，又1克煤之燃燒熱爲8000加)

解：　1噸＝1016000克，故1小時發生之熱量爲

$$1016000\times 8000=8128\times 10^6\text{加}$$

因0.43瓩米之能與1加之熱量相當，故由上之熱量所得之功爲

$$0.43\times 8128\times 10^6\div(60\times 60)=970850\text{秒瓩米。}$$

又1馬力＝75秒瓩米，効率＝0.06

$$\text{故所求之值爲}\frac{970850\times 0.06}{75}=775\text{馬力}\cdots\text{答}$$

(6)　有600馬力，効率5%之蒸氣機關，其每小時之煤炭消費量若干？(由煤1克所得之熱爲8000加)

解：　由前題煤1噸每時發生之熱量與970850秒瓩米之功率相當

今設每秒所供給之熱能爲E

則 $\dfrac{E\times 0.05}{75}=600$

$\therefore\quad E=900000$

故每小時所需之煤量爲

$900000\div 970850=0.927$噸……答

(7)　何謂石油發動機？其作用及用途若何？

解：　定義：石油發動機，卽使石油成霧狀噴出，然後將噴出之氣體點火，令其爆發，利用其由爆發而

膨脹之力，以作功之機械也。

作用：有一圓筒，其上裝有活塞，底部備有二瓣，其法先將氣體由一口注入，次由機關車之迴轉，推入活塞，以壓縮此氣體，縮至極限時，即點火令其爆發，因氣體之膨脹，活塞乃被推出而工作，次再由機車之迴轉，推入活塞，將廢氣由他口排出，復由推出活塞以放進氣體，如此繼續運動不已，普通發動機，氣體爆發一次，機車運轉二回。又點火於氣體時，用瓦斯焰或電氣火花。

用途：汽車，脚踏車，飛機，飛船，汽艇及小規模之工場動力等，均用之。 内燃机

(8) 何謂熱力學 Thermodynamics

熱由於分子動能而生分子之運動及衝突，均須遵從力學定律，故將力學適用於分子上，可解釋熱學現象。前述之分子運動說，即其一例。但從他方面言之，不必問其內部之分子如何構造，如何作用，專就其全體著想，所謂熱亦僅能之一態而已。用此法以解釋一切熱之現象之學科，曰熱力學。

(9) 熱力學之基本定律如何？

第一定律：

"由熱變爲功，或由功變爲熱，兩者之比,恆爲一常數,即熱功當量"。如命式表之,命熱爲H卡，功爲W厄則　$W=JH$

第二定律：

"凡熱不能自低温體移至高温體，亦即不能使熱須冷至周圍温度以下，仍繼續作功。

(10)　欲一鉛彈於創擊一阻碍物時所發之熱，適足以將其自身溶化，則其運行之速度應爲每秒若干米尺？（鉛彈原熱爲50°C)

鉛之比熱 $=0.0305$

鉛之熔點 $=327°C$

鉛之熔解熱 $=\dfrac{5Cal}{gr}$

是故將一質量爲 m 克之鉛彈,由 50°c之温度而使其完全熔化所須之熱，應爲

$$\{5+0.0305(325-50)\}m\,(cals.)$$

其功值爲

$$Jm[0.0305(325-50)+5](ergs)$$

若此功能卽此彈之動能 K.E.

則　$\frac{1}{2}\,mV^2=13.3875\ mJ\ (ergs)$

或　　$V^2=111835.95$

卽 $V = 324.8 \text{公尺}/\text{每秒}$

(11) 有一機關車，每一小時焚去軟煤 100 磅，問此蒸汽機關所作之功爲何？(設所生之功能，皆完全導爲機械工作。但實際此機關車之引力不過20 H.P. 然則其功效率如何？

設其全能皆用於作工，則其功能爲

$778 \times 125000 \times 100$

$= 272.5 \times 10^6$ 呎磅。

但煤之燃燒熱爲12500 B.T.V. 而每B.T.V之機械當量爲 778 呎磅

以上之工作合計爲$972500000 \div 60 \div 330$

卽 492 H.P.

但實際只作功 20 H.P.

故其效能爲$\dfrac{20}{492} = 4.06\%$

IV 音 響 學

(A) 波 動

(1) 何謂波動？並其種類之大別如何？

解：物體之各部，順次爲相同之振動時，則生波動 (Wave motion) 其種類有二：媒質之各部與波之

進行方向成直角而振動時之波動稱橫波，如音波媒質之各部與波之進行方向，爲同方向振動時所起之波動稱縱波，如水波。

(2) 音波之波長振動數，速度等之關係如何？

解： 振動體爲1振動之時間，卽1週期之時間。波動爲1波長之前進，故得次之關係

波長 l = 速度 v × 週期 T

$$\text{又振動數}\ n = \frac{1}{\text{週期}T}$$

又波之速度 v = 振動數 n × 波長 l。

(3) 有速度150秒尺之波，其波長3尺，其週期及振動數各幾何？

解： 由前題

$$\text{週期} = \frac{3}{150} = \frac{1}{50}\ \text{秒}$$

$$\text{振動數} = \frac{150}{3} = 50\text{次}$$

(4) 何謂波長及波相？

解： 同相之相隣二點間之距離，稱曰波長。凡一波動上其振動狀態相同之點，稱同相之點。如波山之相相等，其谷之相亦相等。

(5) 振動數爲254，速度爲1114秒，其波長如何？

解：　由 $l=\dfrac{v}{n}$

$$波長=\frac{1114}{254}=4.4尺$$

(B) 音　波

(1)　音波之速度如何？試詳述之！

解：　音波之速度，其媒質之彈性愈大，則其速度亦愈大。密度愈大，則速度愈小。因此固體最大，液體次之，氣體最小。

空氣中音波之速度，在溫度0°時爲 331 秒米，溫度上昇 1 度，速度增加 0.6 秒米。

空氣中音波之速度，每秒約 340 米，在水約大 4 倍，鐵約大15倍。

(2)　溫度 30°時，見礮火後 5 秒，始聞礮聲，試求發礮之地點。

解：　0°時音之速度爲331秒米，溫度每昇 1°，則速度增加 0.6 秒米，故 30°時，速度爲

$331+0.6\times30=349$ 秒米

$\therefore$　發礮之處 $=349\times5=1745$ 米………答

(3)　先聽得由水中傳來之音，經2.2 秒之後，始聽得

由空氣中傳來之音，音源之距離如何？

解： 空氣中音之速度爲340秒米。

水中音之速度爲1450秒米。

設音源之距離爲 x，則得

$$\frac{x}{340}-\frac{x}{1450}=2.5$$

$\therefore\ x=1110.4$ 米…………答

(4) 試述音之干涉及昇沈之意義！

解： 音之密部與疎部相疊而消失之現象，稱音之干涉。波長稍不相同之二音，同時發音時，其音波或互相干涉而發弱音或互相助合而發強音，此種現象稱音之昇沈。又昇沈之數等於單位時間內兩振動數之差。

(5) 昇沈之數等於同時間內兩發音體之振動數之差，試證明之。

解： 設 t 時間內兩發音體之振動數，各爲 m，n，昇沈之數爲 x，但一次昇沈之時間，即自一強音至次強音之時間，故一次昇沈之時間爲$\frac{t}{x}$

又$\frac{t}{x}$時間內一發音體之振動數爲

$$m\times\frac{1}{t}\times\frac{t}{x}=\frac{m}{x}$$

同樣，他發音體之振動數爲

$$n\times\frac{1}{t}\times\frac{t}{x}=\frac{n}{x}$$

但振動數之差爲1，卽生一次之昇沈，

故得 $\frac{m}{x}-\frac{n}{x}=1$

$$\therefore\quad x=m-n$$

(6)　音之共鳴之意義如何？試舉例以明之。

解：　同振動數之二樂器並列時，一樂器之發音他樂器卽隨之發音之現象，稱曰共鳴。如樂器之筒及簫笛等，皆係利用氣柱之共鳴。

(7)　船之前面有斷崖，今欲測船與崖之距離，在船上鳴汽笛，5秒後聞其回音，其距離若何？但船之狀態分下列三種：

(a) 船靜止時。

(b) 船以10秒米之速度向崖進行時。

(c) 船雖靜止，而風以10秒米之速度由船向崖吹進時

解：　(a) 設所求之距離爲S，笛音往復於S所須之時間爲5秒

故 $S=340\times(5\div2)=850$ 米……答

(b) 在船上鳴汽笛後5秒，始聞其回音，此時之船已由其鳴汽笛位置前進50米，今設所求之距離爲S

$$則\ S=\frac{5\times 340+50}{2}=875米\cdots\cdots答$$

(c) 笛音之速度，往時為 $340+10=350$

復時為 $340-10=330$，設所求之距離為 S

$$\frac{S}{350}+\frac{S}{330}=5$$

$$\therefore\quad S=849米\cdots\cdots\cdots\cdots答$$

(C) 樂　音

(1)　樂音，噪音及單純音之區別如何？並述樂音之三要素！

解：　樂音為發音體之規則之週期振動，令人聞之發生快感，如各種樂器之音。

噪音為發音體之不規則的振動相繼續時之音，令人聞之生不快之感，如車馬之音。

單純音乃倍音消失而僅有原音之音，如音叉之音等。

樂音之三要素為

(a)　高低　由於發音體的振動數之多少，而生高低

(b)　強弱　由於發音體的振幅之大小，而生強

弱。

(c) 音色 由於音波之形狀不同的現象

(2) What is the difference between a noise a musical sound? (北洋)

解： Musical sound is a kind of sound come out under certain rule, and can cause us amusement, as play piano, sing song. Noise is a kind of sound come out on certain musicance disagreeable, as the sound is market.

(3) 何謂樂音之調和？

解： 兩樂音之振動數之比爲1:2,2:3,3:4等簡單整數時，其合成波之形狀極有規則，令人生愉快之感，稱兩樂音之調和。

(4) 何謂音程？音色？

解： 二音振動數之比稱音程。音程由二音之振動數之比而測定之。

樂器各有其固有之構造，原音之外，更生種種倍音，與原音相干涉。故其音波具有其樂器特有之波形，此種差異之現象，稱音色。

(5) 人聲之波長如何？

解： 普通談話時，男聲之振動數爲90至140

故其波長爲340米÷90＝3.78米

至 340米÷140＝2.43米

普通之談話，女聲之振動爲270至560

故其波長爲340÷270＝1.26米

至 340÷560＝0.62米

(6) 在100米之距離上發射一砲，又在200米之距離上發射x砲，今欲二音之強度相等，則x之值須幾何？

解： 音波恆以球形向四方擴散，故其強度與距離之自乘爲反比

$$故\ x=1\times\frac{200^2}{100^2}=4\ 炮\cdots\cdots\cdots答。$$

(7) 試述倍音之意義及其影響於音之性質如何？

解： 發音體之振動數最小時所發之音稱原音。其振動數爲原音之整數倍數時，所發之音，稱倍音。所以使原音生音色者。

(D) 發 音 體

(1) 試將當樂器之發音體類別之。

解： (a) 利用弦之振動者如琴類

(b) 利用棒之振動者如木琴

管 風琴

(c) 利用膜之振動者如鼓

(d) 利用氣柱之振動者如笛類

(2) Violin，琴等音之變換方法如何？又皆不用弦之中央而用其一端者何故？

解： 變換音之方法，如變換弦之粗細，或用指壓弦以變換其長或張力。

又用弦之中央時，僅生原音，故極單純。若用其一端，則可生多數之倍音，與原音相調和而生和諧之音。

(3) 有同粗之銅，銀二線，欲使其發同高之音，試求

(a) 張力相同時，其長之比若何？

(b) 其長相等時，張力之比若何？

解： 長與密度之平方根為反比，故

銅長：銀長$=\sqrt{10.5}:\sqrt{8.9}=100:92$……答

又 張力與密度為正比，故

銅之張力：銀之張力$=8.9:10.5=100:118$…答

(4) 有長1米，直徑1.4粍之銅線，設張以20瓩之力時，其振動數如何？

解： 由弦之振動公式

$$\text{振動數 } n=\frac{1}{2l\,(\text{長})}\sqrt{\frac{T(\text{用絕對單位所表之張力})}{m(\text{單位長之質量})}}$$

$$\therefore n = \frac{1}{2\times100}\times\sqrt{\frac{20000\times980}{8.9\times0.07^2\times3.1416}}$$

$=60$次(約)…………答。

(5)　有長50cm. 之開管及閉管，試求其原振動及倍振動之振動數各若干？

解：(a) 開管(兩端開)由氣柱之振動公式

$$振動數\ n = \frac{v(音之速度)}{2l(管之長)}$$

今設音之速度1秒為340，則原振動數

$$每秒為\frac{340}{2\times0.50}=340次$$

其倍振動數卽為340之2，4，6倍。

(b) 閉管(一端開)由氣柱之振動公式

$$振動數\ n = \frac{v(音之速度)}{4l(管之長)}$$

原振動數每秒為

$$\frac{340}{4\times0.50}=170次$$

其倍振動數卽為170之3，5，7倍。

(6)　振動數及音波之測定法如何？試分別述之！

解：(甲)振動數之測法有三：卽

(a) 氣柱共鳴法：——先求與發音體共鳴之閉管之長，次四倍之，以除音波之速度卽得，

$$\therefore \quad n=\frac{V}{4l}$$

(b) 測音器法：——先令測音器與發音體發同調之音，次測測音器之迴轉數，再以測音器上之穴數乘之，即得。

(c) 振動記入法：——將發音體之振動畫於附有煤烟之紙上，次由單位時間內之波紋測定之。

(乙)音波速度之測定法：——用振動數已知之音義，測定與此音義相共鳴之閉管氣柱之長，再以振動數 4 倍乘之，即得。

(7) 試述留聲機之理！

留聲機爲當人聲帶之振動時，振動雲母片，而雲母片上固着以鋼針，故鋼針亦隨之振動，而在未乾之臘片上，因聲之高低，而刻有深淺不同之溝紋，然後將此臘片取下，令其堅硬之後，再裝上旋轉之，則針照溝紋之深淺，而起同樣之振動，如原來之音，照樣發出。

V 光 學

甲 幾何光學

(A) 光之直進

(1) 光之性質如何？試條述之。

解：(a) 光爲由物體分子振動所生之以太 (Ether) 之橫波動。

186,000 哩

(b) 光之速度 1 秒間爲 3 億米(七萬六千里)。

(c) 光在同一組織之光媒中常爲直進。

(d) 光在光媒之境界面，常起反射或屈拆。

(e) 光波可偏又干涉。

(2) 試說明照度光度之意義。

解：在某面之單位面積上所受光之量稱照度。在垂直面上，光之照度與光源距離之自乘爲反比，與投射角之餘弦爲正比，卽照度 $L \propto \dfrac{\cos\theta(\text{投射角})}{d^2(\text{距離})}$

由發光體單位距離之強度稱光度。標準蜡燭卽鯨油製之蜡燭，每分燃燒 2 吩之光度，稱曰一燭光

(北大)

(註) 光線不垂直於物體之面時，則照度與光源之距離之自乘爲正比。

(3) 光線與物體隨大小變化，其本影生如何之差？並就本影半影說明日月蝕之理。

解： 光源若爲一點時，則物體之影僅爲本影。光源增大，則生半影。光源若大於物體時，則本影之部分少，而半影之部分多。月當於地球之本影時，則爲月蝕。當於月之本影處，即爲日之全蝕。當於半影處，即爲日之部分蝕。

(4) 由小孔所生之像與實物之大之比如何？

又與由小孔至像及由小孔至實物之距離之關係如何？

解： 像與實物之大之比例，與由小孔至像及由小孔至實物之距離之比例相等。

(B) 光之反射

(1) 試述反射之法則，(北大，東大，廣大，成大，南開)

解： 反射光線與投射光線在含有法線之平面上。法線之兩側，即投射線，反射線，法線同在一平面上。又投射角常等於反射角$(i=r)$

此稱光之反射律(Law of Reflection).

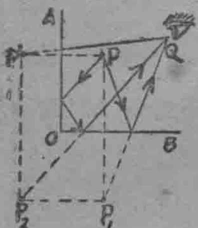
(2) 平面鏡所生之像與實物之關係若何？

解： (a) 像與實物對於鏡爲左右對稱，(Symmetry)

(b) 像爲虛像與實物同大。

(c) 像生於鏡後，鏡與像之距離，等於鏡與實物之距離。

(3) 二個平面鏡互爲直角時，其所生像之位置如何？



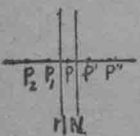
解：　二鏡互爲直角時，生三個之像如圖，置P點於OA，OB之前，則在對稱位置上生P，P′二像，且由二鏡之反射光生P_2之像。

(4) 二平面鏡平行時，則生無數之像，試說明其理！

解：　設MN 爲二平面鏡；P爲二鏡間之一點，今先觀在M所生之像。

P_1——爲一次反射後所生之像。

P_2——爲先由N鏡反射，再由M鏡反射，卽二次反射所生之像　$P_2M=P'M$，但$PN=P'N$



P_3——爲先由M鏡次由N鏡再由M鏡，卽三次反射所生之像。

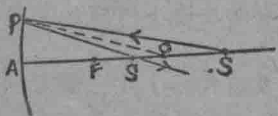
Pn——爲n次反射所生之像。

同樣N鏡上所生之像爲P',P'';P''',Pm卽在一直線上生無數之像。

(5) 試就凹面鏡上記明像與發光體之關係式，並證明

之！

解： 如圖，S 爲發光體，S′爲像之位置，O爲鏡之中心。



$\angle SPO=\angle OPS'$

$\therefore \dfrac{PS'}{PS}=\dfrac{S'O}{SO}$

但凹面鏡爲球之一部分，故PS及PS′幾與AS及AS′相等，今設AS爲a，AS′爲 b，AO爲r 則$\dfrac{b}{a}=\dfrac{r-b}{a-r}$

以 abr 除之則$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{r}=\dfrac{1}{f}$

(6) 有曲率半徑之20cm之凹面鏡，在其前 50cm 之處置物體，其像之位置如何？

解： 由公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{r}$

故 $\dfrac{1}{50}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2}{20}$ $\therefore x=12.5$cm……答

(7) 試述凹面鏡之共軛點。

解： 由凹面鏡至發光體之距離＝a

至像之距離＝b

鏡之曲半徑＝r

則 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{2}{r}$

a 與 b 可以互相交換，有此等關係之二點稱共軛點

(8) 物體由極遠之距離漸次接近凹面鏡時，像之變化若何？

解：由公式 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}$ ····(1) $\frac{L}{l}=\frac{a}{b}$ ····(2)

(a) 物體在極遠處時，則 a 之值頗大，即 $b=\frac{r}{2}$

故 即極小，此時在焦點處生極小之像。

(b) 物體漸近，a 即漸小，故 $b>\frac{r}{2}$，l 亦漸大，其像由焦點而漸近於球心，生小於物體之倒像。

(c) 物體近至球心時，則 $a=r, L=l$，換言之，即生與物體同大之倒像，而比此相重。

(d) 物體由球心漸近焦點，則 $b>r$，$l>L$，此時即生比物體大之倒像於球心外。

(e) 物體來至焦點，則 $a=2r$，b 及 l 均極大，即在極遠距離之處生極大之像，換言之像不能見

(f) 物體近至焦點以內，則 b 爲負數，故像不能在鏡前，而在鏡後生正立虛像，物體距鏡愈近，其像亦愈大。

(9) 設於凹面鏡之公式 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}$ 之內。

(a) $a=\infty$時，則 $b=\dfrac{r}{2}$

(b) $a=\dfrac{r}{2}$時，則 $b=\infty$

(c) $a<\dfrac{r}{2}$時，則 $b<0$　　試證明之！

解：(a) $a=\infty$時，光線平行而來，在鏡上反射後而集於焦點，(卽鏡與鏡心之中點)

(b) $a=\dfrac{r}{2}$時，爲發光體在焦點時之光線，其反射線常與鏡軸作平行而進行，故其像生於無限遠之距離上，故欲用凹面鏡照遠處時，置發光體於焦點之處卽得

(c) $a<\dfrac{r}{2}$時，爲發光體在焦點內時之光線，反射後卽發散，而不能生實像(卽在鏡後生虛像)

(10) 物體於凹面鏡前 7 尺，所生之象在鏡前 3 尺，焦點距離如何？

解：設焦點距離爲 f 尺

由公式 $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{f}$

$\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{f}$　　$\therefore f=2.$尺

(11) 凹鏡之曲率半徑如何測法。

解：　置物體於凹鏡前，測定其像之位置，再測像與物至鏡之距離 a，b 後，由公式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}$以求之。

(12)　以一物置於凹鏡前，則生二倍之像於物前 50cm 處，試求鏡之半徑！

解：　由公式像之大＝a:b＝L:l

即物體與鏡之距離：像與鏡之距離

＝物體之長：像之長

a = 50cm

a:b＋50＝1:2，　∴ r＝5cm.

又由公式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{r}$

$\frac{1}{50}+\frac{1}{100}=\frac{2}{r}$　∴ r＝66.7cm.…………答

(13)　凸面鏡之焦點位置如何？

解：　由公式$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{2}{r}$，a 為無限大時

則$\frac{1}{a}$為無限小，即幾等於零，

則 $b=\frac{r}{2}$，故焦點常在鏡心與球心之中央。

(C)　光之屈折

(1) 試述屈折定律(law of rafraction)

(廣大，北大，中山大，北洋及南開)

解： (a) 屈折光線在投射光線所成之平面內。

(b) 投射角正弦與屈折角正弦之比，在一定二種光媒中爲一定數與投射角之大小無關。

(2) 何謂屈折率？ (北大)

解： 光線由A媒質入B媒質，其投射角正弦與屈折角正弦之比，稱B對於A之屈折率(Index of refraction)

$$\frac{\sin i}{\sin r}=n$$

(3) 何謂臨界角？

解： 屈折角爲90°時，則投射角稱臨界角。

$$\sin r=\frac{1}{n}$$

(4) 光線由屈折率1.5之玻璃投入空氣，投射角爲20°，其屈折之度數如何？

解： 設r爲屈折角，則$\dfrac{\sin r}{\sin 20^\circ}=\dfrac{4}{3}$

$$\therefore\quad r=27^\circ10'$$

故屈折之度數爲 $27^\circ10'-20^\circ=7^\circ10'$……答

(5) 有一物質對於空氣之臨界角爲45°，光線由空氣中投射於此物質，其投射角爲45°，試求其屈折角之度數。

解：　設 n 為此物質之屈折率，則

$$n=\frac{\sin 90^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\sqrt{2}$$

次設 r 為所求之屈折角，則

$$\frac{\sin 45^\circ}{\sin r}=\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad \sin r=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2} \qquad \therefore \quad r=30^\circ$$ ……答

(6)　金剛石之屈折率為2.5，其臨界角若何？

解：　設 θ 為所求之臨界角

則 $$\frac{\sin\theta}{\sin 90^\circ}=\frac{1}{2.5}$$

$$\therefore \quad \sin\theta=0.4 \qquad \therefore \quad \theta=24^\circ$$ (約)……答

(7)　試舉下列各項之數值？

a.　重力之加速度

b.　大氣壓力

c.　冰之融解熱

d.　音在空氣中之速度

e.　玻璃之屈折率

解：　a.　980秒秒糎

b.　水銀柱76糎之高之重

c. 80加

d. 溫度15°時，340秒米

e. 1.5

(8) 試說明透鏡(Lens)之焦點！

解： 光線與透鏡之軸平行而投射於透鏡時，則各光線向透鏡之厚處屈折，而集於軸上之一點，此點稱透鏡之焦點。又凸透鏡之焦點，稱實焦點。凹透鏡之焦點，稱虛焦點。

(9) 何謂透鏡之共軛焦點？

解： 光點與像點，稱曰透鏡之共軛焦點。即由軸上一光點P所發之光，因透鏡而屈折，集於軸上一點Q處。反之，光點在Q處集於P點，P,Q二點，即共軛焦點。

(10)試述求凸透鏡焦點距離之法。

解： 置燭火於透鏡之一面，定其焦點之位置，測燭火與透鏡之距離，及像與透鏡之距離，其逆數之和即等於焦點距離之逆數；由是可知焦點之距離。

(11) 由凸透鏡所生之像如何？並述其作圖法！

解： 由透鏡之軸上一點A所發之光線，通過透鏡之中心者方向不變。與透鏡之軸平行者，通過透鏡之

後，屈折而通過焦點，故此二光線之焦點，卽爲A之像。按此法可得其他之諸點之像。

(12) 物體自無限遠之距離，漸次接近於凸透鏡時，其像之變化若何？

解：a. 物體在無限遠處，其像生於焦點。

b. 物體漸近時，其像漸遠於焦點而倒立，物體之焦點距離二倍之處時，其像亦倒立，而與實物同大，其距離與實物之距離相等。

c. 物體愈近時，則像愈遠，而比實物愈大。

d. 物體至於焦點時無像。

e. 物體至焦點內時則生正立之虛像。

(13) 像與實物等大時，凸透鏡之位置若何？

解：置凸透鏡於物體與像之正中卽可，

由凸透鏡公式$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$

卽 $$\frac{1}{\text{物與鏡之距離}}+\frac{1}{\text{像與鏡之距離}}=\frac{1}{\text{焦點距離}}$$

$a=b$　則　$a=2f$

卽將凸透鏡置於距物體焦點距離2倍之處

(14) 攝遠方之物，欲得大像，其法如何？

解：像之大小與透鏡之焦點距離爲正比，故欲得大像

，當用透鏡之焦點距離之大者。

(15)　設攝影時，人距透鏡爲500cm. 所得之像爲 3cm. 若令其像成5cm. 應如何？

解：　設最初之像與凸鏡之距離爲bcm. 焦點距離爲fcm.

則　$$\frac{1}{500}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設人之高爲hcm. 則

$$h:3=500:b\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

又設第二次人與透鏡之距離爲acm.

像與鏡之距離爲b′cm. 則

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b'}=\frac{1}{f}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$h:5=a:b'\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

上(1)(2)(3)(4)四式中將 b, b′, f 消去則

$$a=300\times\frac{h+5}{h+3}=300\times\left(1+\frac{2}{h+3}\right)$$

然2cm. 對於人之高爲極小之數，

故 $\frac{2}{h+3}$ 之數可棄去，

$$\therefore\ a=300\text{cm}.$$

卽人立於透鏡前 3 米之處卽可

(16)　在水中觀察物體時，須用距離極小之凸透鏡，方能

明瞭，其理安在？

解：　由透鏡焦點距離公式

$$f=\frac{1}{(n-1)(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'})}$$

(f＝焦點距離，n＝屈折率，r,r′＝曲率半徑)

可知焦點距離與曲折率減一之數成反比例，吾人眼中水晶體對於空氣之屈折率爲1.44，水對於空氣之屈折率爲1.33，故水晶體在水中之屈折率爲1.44÷1.33＝1.08，因之水晶體之焦點距離甚大，恰和極強之遠視眼相似，故須用焦點距離極小之凸透鏡以補正之。

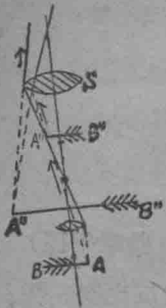
(D)　光學器械

(1)　試述透鏡之應用！

解：　透鏡之應用甚廣，如眼鏡，顯微鏡，望遠鏡，幻燈，照相機，分光器，蟲眼鏡等，均應用之。

(2)　試以圖示顯微鏡之構造！並說明物體擴大之理。

解：　顯微鏡爲由一金屬圓筒，兩端各裝一凸透鏡所成如圖R爲對物鏡，S爲對眼鏡，AB爲R焦點稍外之物體，A′B′爲AB之實像，(AB<A′B′)故移動S，

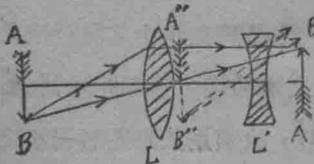


令A′B′在S之焦點以內，則成A′B′之大虛像。

又虛像之長與實物之長之比，稱顯微鏡之倍率，倍率等於對物鏡與對眼鏡之倍率之相乘積。

(3) 試圖示雙眼鏡之構造及其所生之像！

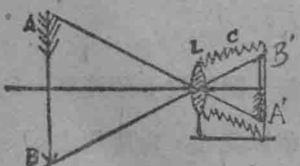
解： 雙眼鏡爲以焦點距離較遠之凸透鏡作對物鏡(L)，



以凹透鏡作對眼鏡（L），置凹透鏡於凸透鏡焦點內，則由對物鏡所生之像之光，被對眼鏡所擴散，而生直立之虛像，如圖A″B″。

(4) 試述攝影機之原理！

解： 攝影機爲一可伸縮自在之軟皮暗箱，前裝一凸透



鏡（優良之攝影機則裝有數個之凸凹透鏡），使外來光線，經過透鏡在內壁生一顯明之實像，壁上裝設塗有銀鹽之玻璃板(乾板)或膠片，(Film)銀鹽遇光起化學作用。

因受光之強弱作用亦有強弱，次將此片再用相當藥水(現像液，定着液)將未起化學作用之銀鹽洗

去，俟其乾後，再由感光紙，藉日光或燈光之力，亦起化學作用，仍照上法將未起變化之銀鹽洗去，卽得一明暗與原物一致之畫，此卽普通之相片。

(5) 試比較顯微鏡與望遠鏡之異點！

解：顯微鏡其對物鏡之距離極小，且其形亦小，將物置之於近焦點距離處，則生較實大之虛像。望遠鏡則不然，其對物鏡甚大，其焦點距離亦大，物體在較焦點距離極遠之處，而得見比物體較小之虛像。

(6) 何謂明視距離及眼鏡之度數？

解：視物明瞭而不覺疲倦，此時之距離，稱之曰明視距離。普通健全之眼，其明視距離爲25糎(cm)，用吋表示透鏡之焦點距離者，稱眼鏡之度數。如焦點距離20吋之凹透鏡，則爲20度之近視眼鏡。

(7) 試述眼鏡之功用！

解：眼鏡乃補助眼之水晶體，令物體之像生於網膜上之器，蓋吾人之眼，其構造恰與攝影機相似，水晶體如攝影機之凸透鏡，網膜如攝影機之乾版，近視之眼，其水晶體過於灣曲或其網膜後退，其

明視距離小，故必用凹透鏡，使其光散開而將物體之像映於網膜之上，老眼(遠視)乃水晶體過於遍平，其明視距離比標準之25cm大，故用凸透鏡使物體之像生於其網膜之上。

(8) 今有(a)明視距離18cm.之近視眼之人，與(b)明視距離75cm.之遠視眼之人，若與健眼之明視距離相似，當用何種眼鏡？

解： 由公式 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{f}$

(a) $\frac{1}{18}-\frac{1}{25}=\frac{1}{f}$ $\quad\therefore\ f=63.5\text{cm.}=25$吋

(b) $\frac{1}{25}-\frac{1}{75}=\frac{1}{f}$ $\quad\therefore\ f=37.5\text{cm.}=15$吋

(乙) 光 學

(D) 光之分散(Dispersion of light)

(1) 何謂光之分散？

解： 光線屈折後而分成種種之單色光，此種現象稱光之分散。日光由次之七色混合而成。

赤 黃 青 紫

橙 綠 藍

(2)　何謂透鏡之色收差？

解：　因光之屈折率不同，通過透鏡後而分散，像亦呈色，而不鮮明之謂。

(3)　試述 Kirchhoff's law！

解：　凡氣體·在高溫度得輻射之光能，於低溫度時則被吸收，如鈉蒸氣吸收黃色光，灼熱時則放黃光，是稱祈爾徐霍夫定則。

(4)　照像暗室之燈用紅色燈罩者何故？

解：　紅色燈罩吸收紅色以外之輻射線，因之所透過之線，無化學線，故不起化學作用。

(5)　試述太陽輻射線之種類及其作用？

解：　自太陽而來之輻射線，可分爲熱線(赤外線)，光線，及化學線(紫外線)三種：熱線爲以太波之波長最強部分，屈折率最小，熱作用極顯著。光線爲光之感覺最強部分，以太之波長由赤而黃，而青，而紫，漸次減小，屈折率漸次增加。化學線爲化學作用最顯著之部分，其以太波長最小，而屈折率最大。

(6)　何謂消色透鏡？並其優劣之鑑別法及其用途。

解：　卽有適當曲率之冕形玻璃(屈折率小)之凸透鏡，

與火石玻璃(屈折率大)之凹透鏡相組合之物稱消色透鏡。通過焦點距離小之凸透鏡之光爲凸透距離大之凹透鏡所擴張。通過焦點距離大之凸透鏡之光，爲焦點距離小之凹透鏡所收斂。故能集二色於一點，而有消色之作用。

鑑別之法，用消色透鏡映像於照壁。前後移動之，像之周圍無色者，卽知此鏡爲優良之透鏡，其用途，凡幻燈器械，攝影器械，望遠鏡，顯微鏡等皆用之。

(7) 雪之白，炭之黑，葉之綠，試說明之！

解： 雪之白乃由於無論何種光線,均被反射之故。炭之黑乃由於無論何種光線均被吸收之故。葉之綠，因反射日光中之綠色光，而吸收其他之色故也。

(8) 螢光與燐光之區別若何？

解： 物質受輻射光線而能發特殊之光者稱螢光。卽物體受光時，將其固有之光發出之現象也。雖除去輻射線，而尙繼續發光者，稱燐光。卽物體受光後，光源雖除去，而仍放其故有之光之現象也。

(9) 試述成虹之理！

解： 虹，爲日光射入空中之無數水滴而生反射及屈折

所起之現象。太陽射入水滴中之光線，任其面屈折，次自水滴中反射而出，再在其面屈折，然後達於人目，是時人目所遇由各水滴射來之光線，已被分散，故其色不同。卽水滴與觀者瞳孔連結之直線與日光方向成42°角，則呈紅色。若成40°角，則呈紫色。因此在天空可見紅色在外，紫色在內之圓弧。其他各色之順序，與景中各色之順序，卽紅，橙，黃，綠，青，藍，紫同，此種現象卽所謂虹。

(B) 光波：

(1)　試述光之波動說！

解：光體之分子振動，傳於充滿宇宙間而有完全彈性之以太，由此生橫波動，而波及四方，此稱波動說。由是可知光波向四方振動，因振動之緩急，而波長有大小之別，因而生出色之差異，故由波動說，應有

(a)　光爲以太之橫波。

(b)　其波長爲1粍之二千分之一之內外。

(c)　其振動數約每秒 5 億回之百萬倍。

(d) 紫之波長約為赤之波長之半。

(e) 波及之速度為每秒3億米。

(f) 波長大之赤其屈折率小，波長小之紫其屈折率大。

(2) 音波及光波，其振動數之多少及振副之大小，由如何之結果而知之！

解：振動數多者，在音為高音，在光為紫色。少者在音為低音，在光為赤色。振副之大小，則由發音或發光之強弱而知之。

(3) 試比較光與音之異同！

解：(a) 音波為空氣之縱振動。光波為以太之橫振動。

(b) 音波較光波，其波長極大，其振動數極少

(c) 因波之長短，在光有色彩之別，在音有高低之異。

(d) 光波可偏。而音波則否。

(e) 音與光均由其振幅之大小，而感知其強弱

(f) 音與光相似之點即直進，干涉，反射，屈折等。

(4) 何謂偏光？

解：　光波在與光之方向成直角之平面內，向各方向振動之以太波動，設令其通過電氣石，則其振動變為一定方向之光，此光稱偏光。

(5)　音波傳播之速度與光波傳播之速度之比較若何？（北大）

解：(a) 光波在空氣中傳播之速度，每秒約為186000哩，在水中之速度約為在空氣中之四分之三。

音波在空氣中傳播之速度 0°c 時每秒約為109.25呎，8°c 時，在水中之速度約為 4707.8 呎。

(b) 光波不因熱而加速，音波則溫度上昇1°c，速度約增加 2 呎。

VI　電磁氣學

(甲)　磁性(Magret)

(A) 磁性

(1)　磁極之作用如何？

解：(a) 二磁石，其同名之極相斥，異名之極相引。

(b) 二磁極間之引力或斥力(F)，與兩極磁氣量

(m,m′)相乘之積為正比，與其兩極間距離(r)之自乘為反比，此稱庫侖(Coulomb's law)之法則，即

$$F=K\frac{mm'}{r^2}$$

(2) 何謂磁場？

解：磁石作用所及之場所，稱磁場。磁場內作用於單位北極之磁力稱其點之磁場之強度。

(3) 何謂磁性感應？

解：將鉄片置於磁石之旁，則鉄片即成磁石。其與磁石較近之一端，成異名之極，他端成同名之極。如此將物體置於磁場之內，即帶磁，稱曰磁性感應。

(注意) 磁性只吸引如鉄之特殊物質，而電性則凡各種物質，皆有吸引之作用。

(4) 磁石之製法及磁性之保存法如何？

解：製法：以強磁石之一端於鋼鐵棒上由一端摩至他端，如此數次即得。至保存之法，若為蹄形磁石，可用熟鐵片架其兩端。若為棒磁石，可將相同之二條並置，使異名極相並，兩端各置熟鉄片即可。

(5) 地球爲一大磁場，試說明之！

解： 試置小磁針於軟木塞上，令其靜浮於水面，再將此盛水器，置於棒磁上，則磁針常與棒磁石平行，其北極向棒磁石之南極，其南極向棒磁石之北極，此磁針如上之試驗，常指南北而不誤者，實因地球爲一大磁石之故。此大磁石之南極在地理學上北極附近，其北極常在地理學上南極附近，故磁針在地球之北極附近時，則直立。其北極爲下端。在南附近時，則反是。

(6) 試列舉地磁石之三要素並說明之！

解： (a) 方位角(卽偏角)， 磁針之方向與子午線所成之角。

(b) 傾斜角(或伏角)， 地球磁力之方向與水平面所成之角。

(c) 水平磁力， 地磁氣之水平分力，稱水平磁力。

在地球上之任意地點，地磁氣之狀態，皆由以上三者定之，故總稱之曰地磁氣之三要素。

設地磁力$=F$，水平磁力$=H$，方位角$=4$

伏角$=\theta$ $\therefore\ H=F\cos\theta$

(7) 試說明羅盤針之構造。

解： 羅盤針爲一極輕之紙製圓盤，其上記有32方位，將數條小磁石平行合置(同名之極並列)而支於一針上，令成水平，船之動搖而針則常爲垂直。並將船首之一指標固定於圓盤之旁，故可由指標所指之方向而知船之進行方向。

(8) 何謂磁距？

磁石在磁場內所受之作用成一偶力。命H表磁場強度×ׄ′表其方向，NS表磁石，其極強度爲m，磁石之N極受$+mH$之力，S極受$-mH$之力，兩力成一偶力，使磁石發生轉動。

命$2l$表磁石之長，θ表磁石與磁場方向間之角度，L表偶力距，即$mH\times$(偶力臂)

但偶力臂$=2NP=2NO\sin\theta$

$=2l\sin\theta$ 故得

$L=HM\sin\theta$, $M=2ml$.

M是曰磁石之磁矩 magnetic moment of a magnet.

(9) 磁石軸上一點之磁力如何？

如圖 m 表磁石 SN 之極之徑度，

P表軸上一點，O表其中心，N極對於

P之力爲$\dfrac{m}{(OP-NO)^2}$ S極對於P之力爲$-\dfrac{m}{(OP+OS)^2}$

命其合力爲H，則得

$$H=\frac{m}{(OP-ON)^2}-\frac{m}{(OP+OS)^2}=4\ m\frac{ON}{OP^3}$$

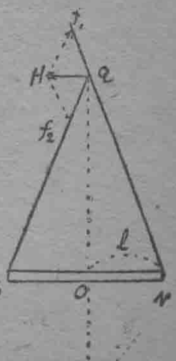
命m表磁石之磁矩則 M=2mON 故P點所受之

力，爲 $H=\dfrac{2M}{r^2}$； $r=OP$.

10) 通過中心之磁軸垂線上一點之磁力如何？

如圖Q點上有一單位磁極，其由N所受之力爲

$f_1=\dfrac{m}{NQ^2}$ 由S所受爲 $f_2=\dfrac{m}{SQ^2}$



命r表∠OQN 則其合力H應爲

$$H=2f_1\sin\theta=\frac{M}{NQ^3}=\frac{M}{r^3}$$

(11) 有一點P在一磁石之垂直平分線S上，距NS各30cm. 磁極之強度爲8單位，而P點所受之力爲3 dynes，試求此磁石之磁距。

$$\because \quad F=\frac{HM}{r^3}$$

今 $F=3$, $H=8$, $r=30$

$$\therefore \quad \frac{8M}{(30)^3}=3$$

或 $8M=81000$

$$\therefore \quad M=10125(e.m.u).$$

（乙） 靜 電

(A) 靜 電

(1) 試述電氣引斥之法則！

解：(a) 二物體帶同種之電則相斥，帶異種之電則相引。

(b) 二帶電體間相互作用之力（引斥力F）與各電氣量(ee')相乘之積爲正比，與其距離(r)之自乘爲反比，此稱曰 Coulomb's law.

$$\text{卽} \quad F=K\frac{ee'}{r^2}$$

(2) 摩擦電祇有二種，如何知之！

解：以絲巾摩擦而帶電之玻璃棒(＋)以線懸之，又以絨布摩擦之火漆棒(－)近之，則互相吸引，若以

另一用絲巾摩擦之玻璃棒近之則相斥，由此可知玻璃棒(帶陽電)與火漆棒(帶陰電)所帶之電性質不同，若再摩擦其他各種之物體而試之，或與玻璃棒相引，與火漆棒相斥。反之，或與火漆棒相引，而與玻璃棒相斥。是故可知物體之帶電，僅此二者。

(3) 試述福男克林之電學定理！

解：(a) 空中之電與摩擦所生之電相同。

(b) 麻綿與金屬均爲電之良導體。

(c) 麻綿濕則傳電，乾則不傳。

(4) 試說明電振子球被帶電之玻璃棒吸引，及至相觸，則又被斥之理！

解：電振子之被引，乃因受玻璃棒之陽電感應作用，故近於玻璃棒之側生陰電。其反向之側生陽電。陰電距玻棒較陽電爲近，引力大於斥力，故相引。然相觸之時，則振子之陰電與玻璃棒之陽電相中和，振子祇剩陰電，故相斥。

(5) What is a gold-leaf electroscope, and what is it used for?　(北洋)

解：Gold-leaf electroscope is a glass for provid d with a metal rod penetraled the rubber stepper, one end terminated in a plate or hull, and attached strips of gold fail at the other. It is used to detect the presence of a change upon a body, and determine the kind of changes.

(6) 用金箔驗電器以驗電之種類，其法若何？

解：先將既知之電，送於驗電器之金箔，次將所驗之帶電體接近時，金箔之開角增大，則知其爲同種電。若開角減小，則知其爲異種電。

(7) 靜電器械之端常爲圓形，又避雷針之尖端常鍍以鎳或其他之金屬者何故？

解：電易集於尖端處，故電機之端若爲尖稜時，則電移於其處而逃去，故常爲圓形，則無此虞。

又金屬之銹，阻電之性頗大，故避雷針之端必鍍以鎳，以防生銹故也。

(8) 試述避雷針之作用！

解：避雷針爲利用尖端放電而防止火花放電或將電氣引於地下之一種裝置，其所以能消雲中之電，而保全屋宇者，實由於帶電之雲行近屋頂時，此針因誘導作用，而帶異性之電，此誘導而生之電，

由尖端逃脫極速，故與雲中之電互相中和也。

(9) 試比較電氣，磁氣之異同！

解：電與磁均非物質，物體受磁或電後，不過生有一種能，並非有一種物質增入其間，證之物體受磁或電後，其重量不增卽甚明瞭，至電與磁之異同點，爲

(a) 磁有南極與北極。電有陰電與陽電。

(b) 磁爲同極相斥，異極相引。電則同電相斥，異電相引。

(c) 摩擦均能生電。又電各種物質均能吸引。磁性則祇能於鋼鐵中顯之。故磁祇吸引鋼鐵等。

(e) 電能被他物隔斷，卽不良導體隔斷，而磁力則不然。

(10) 試述來頓瓶之構造，用途，並說明其蓄電之理。

解：來頓瓶者，玻璃瓶內外二面貼以同高之錫箔，內箔與瓶口之金屬棒以鏈連之，外箔與地相連，今將電附於金屬棒，則電傳於瓶內之錫箔，因感應之作用，而瓶外之錫箔亦帶電，兩者互相吸引，內箔電位不甚上昇，而電容量增加，故得蓄多量

之電。

(11) 何謂電位(Electric potential)?

解: 有一物體帶單位量之陽電,由無限之距離,運至電場內之一點,所須要之功,稱爲此點之電位。

(12) 何謂電容量(Electrical capacity)?

解: 導體之電位上昇一單位所要之電量稱其導體之電容量。

$$\text{即 電容量 } C=\frac{\text{電氣量}Q(\text{Coulemb})}{\text{電壓}V(\text{Volt})}.$$

(13) Define ohm, ampere, and volt. (東南)

解: a, The ohm is the amount of electrical resistance offered by a colum of pure metcury 106.3.cm.in height 21.grams the temperature being o°c.

b, The ampere is that current which will deposit in an electrolytic cell 0.001118 grams of silver or 0.0003287 grams of copper persecond.

c, The volt is that difference of identras between the ends of a wire having a resistane of one ohm which will produce a current of one ampere.

(14) 庫隆之定律若何?

作用於兩帶電體間之引力或斥力,與兩者之電量

之乘積爲正比，而與其間距離之平方成反比，此關係曰庫隆氏定律Coolomb's law.

以式表之卽 $f=c\frac{qq'}{Kr^2}$

其中 q 與 q′ 表兩帶電體所有之電量，r 表其間之距離，f 表作用之力。

(15)　何謂電場，電力線？

在帶電體之近旁，另放一帶電之小球卽見兩者之間有引力與斥力發生。由此則可知帶電體之周圍之空間具有特殊之性質，與磁場類似.是曰靜電力場 Field of electrostatic force 或簡稱曰 electrical field.

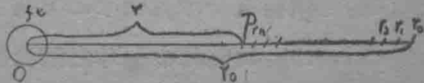
在電場內吾人通常設想一曲綫其各點之切綫方向，與單位正荷在同點時所受之電力方向一致，如是而得之曲線曰電力線 electric lines of force.卽電力線所向之一方爲帶有小量陽電荷之輕物能運動時所取之方向，故電力線恆始於帶陽電之物體而終於帶陰電之物體。

(16)　何謂電勢？

於電場內任意一點之電勢爲將單位正電荷，從無窮遠移至此點所須之功。

(17)　電勢之計算

如何？



設想一點O如圖

有一球體，其上帶有電量$+q$，又一質點帶有單位正荷位置在Q，欲求此點由Q移至P時之功，先將QP分作r等分，在Q點所受之力爲$\frac{q}{r_0^2}$在r_1時爲$\frac{q}{r_1^2}$，故在此兩點間之平均電力應爲$\frac{q}{r_1 r_0}$。故由r_0移至r_1之功等於$\frac{r_0-r_1}{r_1 r_0}$即$\frac{q}{r_1}-\frac{q}{r_0}$。同樣由$r_1$至$r_2$爲$\frac{q}{r_2}-\frac{q}{r_3}$餘可類推，而由Q移至P爲此全體之和即$\frac{q}{r}\times\frac{q}{r_0}$

如Q在無窮遠則r_0成爲0，此時將單位正荷由無窮遠移至P點之功爲P點之電勢Vp應爲

$$V_p=\frac{q}{r}$$

同樣由無窮遠移至Q點之功爲Q點之電勢

$$V_Q=\frac{q}{r_0}$$

而由Q移至P之功始命之爲$V_{P,Q}$則

$$V_{PQ}=V_P-V_Q$$

即完全由前後兩點之電勢之差而定此差曰勢差 Potential difference.

(18) 兩荷電小球其相斥之力爲10 dynes，當其間距離爲2 cm.時，如將其中一球之電荷加倍，而使其間之距離

亦爲原距離之兩倍，則其相斥之力應爲若干達？

依庫隆律 $C\frac{qq'}{d^2}=F$， 空氣中，c通常視爲1，

即 $f=\frac{qq'}{d^2}$

其初時有 $10=\frac{qq'}{2^2}$

$\therefore$ $qq'=40$. 即原時兩球電量之乘積，

今若將一球之電荷加倍則其乘積應爲

$2qq'=80$，而今 $d=4$

代入原式

$$f=\frac{80}{4^2}=5\ \text{(dynes)}$$

(18) 有兩金屬小球其半徑各爲3 cm. 及8 cm. 如將二者連以一微小之導線，則 66 單位之電荷應如何分配於兩球體？

電容量 $C=\frac{Q}{V}$， $\therefore Q=VC$

在呈露於空氣間之球體上之電容量即其半徑之長度之數，即 $C=V$.

今如令Q_1及Q_2爲兩球各得之電量。

則 $Q_1:Q_2=r_1:r_2=8:3$

又知總電量爲66單位

故　$Q_1=48$　單位

而　$Q_2=18$　單位

（丙）動電

(A) 電流及電池：

(1) 試釋下列諸名詞：

(a)電，(b)電流 (c)輪道 (d)一安

(e)電壓 (f)抵抗

解：(a) 電爲生帶電現象之原因。

(b) 因二點間之電位差所生之電之流動，稱電流。陽電流動之方向爲電流之方向。

(c) 電流通過之道稱輪道。

(d) 一秒間一庫 (Coulomb) 之電量，通過導線之切口，此電流之強，稱曰一安(ampere)。

(e) 電池兩極未連結之時，其電位差，稱電壓。又稱電動力。

(f) 抵抗，物體因電壓對於電之移動所生之抵抗之謂，與導線之長爲正比，與其切面積爲反比。

(2) 電流之作用如何？

解：(a) 熱作用　卽通電流之導線，卽發熱，如電氣爐，電氣暖爐等之應用。

(b) 光作用　卽通電流之導線，卽生熱發光，如電燈等之應用。

(c) 磁氣作用　卽通電流之導線周圍則成磁場，如成電磁石而應用於電話，電信，電鈴等。

(d) 器械的作用　卽通電流之導線互相吸引或反撥，如電動機之應用於電車，其他之諸器械等。

(e) 化學作用　卽令電解質在其水溶液內分解如鍍金，電鑄，電解等之應用。

(f) 輻射作用　卽由適當之方法放電時，而生波長相異之以太波，如X 光線，無線電信等之應用。

(g) 生理作用　卽如戰時之鐵絲網，及療病按摩等之應用。

(3) 何謂熱電堆？

解：熱電堆或稱熱電流，用不同之二種金屬導線作輪道，其一同點之溫度較他點高時，則輪道內生電流，此稱曰熱電流。其電動力由兩接點溫度之差

及金屬之性質而定。

(4) 試述來頓瓶與電池不同之點？

解：(a) 來頓瓶內外錫箔之電位差甚大，而電池兩極之電位差甚小。

(b) 來頓瓶放電時，電之移動頗速，而電池之移動所費之時頗長。

(5) 試舉常用電池之名稱，及其所用之藥品！

解：

名稱	陽極	陰極
Daniell(達尼耳)	Cu, $CuSO_4$	Zn, H_2SO_4
Volt (弗打)	Cu, H_2SO_4	Zn, H_2SO_4
Bunsen(本生)	C, HNO_3	Zn, H_2SO_4
Leclanche(魯克南)	C, MnO_2	Zn, NH_4Cl
乾電池	C, MnO_2	Zn, NH_4Cl
Bichromate(一縮二鉻酸)	C, $K_2Cr_2O_7$	Zn, H_2SO_4

(6) 試舉一電池說明其構造及起電之理！

解：如達尼爾電池，爲將盛銅板及硫酸銅液之陶器，置於稀硫酸中，稀硫酸中又浸以鋅板，銅與鋅以導線連結之，鋅溶於稀硫酸中而生 $Zn^{\cdot\cdot}$，因而發生陰電。稀硫酸之H被 $Zn^{\cdot\cdot}$ 驅入陶器內，與硫酸銅之 $Cu^{\cdot\cdot}$ 化代，Cu卽附着於銅板，而爲Cu銅版發

生陽電。故連結銅版及鋅版，則電流由銅版向鋅版移動。

(7) 何謂電池之極化作用 ? 又極化作用之防止法如何?

解： 如弗打電池，其發生之氫(H) 附着於陽極銅版，不但能妨電流之通過，且使生逆向之電流，因而電池之電動力減小，而電流變弱，此稱電池之極化作用。設實用電池達尼耳，及一縮二鉻酸二種，欲防止其極化作用，達尼耳則用硫酸銅，將所生之氫(H) 變爲硫酸。

$$CuSO_4+H_2=H_2SO_4+Cu$$

一縮二鉻酸電池，則令硫酸與一縮二鉻酸鉀作用，發生養氣，以之養化氫氣。

$$4H_2SO_4+K_2Cr_2O_7+3H_2$$
$$=K_2SO_4+Cr_2(SO_4)_3 7H_2O$$

(8) 欲知二電池電力之大小，其法如何？

解： 用電壓計 (Volt-meter) 量各電池之電動力而比較之卽得。

或連結兩電池之同極，視其有無電流，連結陽極之導線，其電流向外流者，則其電池之電力大。

(9)　通2安之電流一小時，則電之總量若干？

解：1 安之電流通 1 秒時，電量爲 1 庫，故所求之電量，爲

$2\times60\times60=7200$庫……………………答

(10)　何謂電池之局部作用？

通常之鋅，大都含有雜質，尤以鉄爲最多。故在丹聶爾電池中，在硫酸內，鉄對於其周圍之鋅，與銅有同一作用。故有一小電流由鉄至鋅再經液內而原還於鐵，是曰局部電流。使鋅受無益之損失。欲免此作用，先用硝酸洗鋅片，浸入銾內，成爲銾齊 amalgam 滿佈鋅上，則鐵不有此作用。

(11)　克希荷夫定律如何？

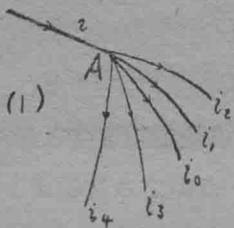
Kirchhoff's Law 如下：

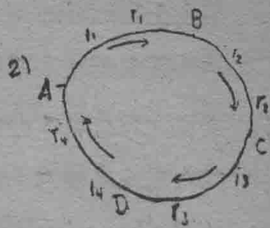
(1) 如各導線交於一點，則各線中之電流之代數和爲零

(2) 如各導線啣接成一閉路Closed Circuit，則各線中電流與其抵抗相乘積之代數和，等於其電動力之代數和。

如右圖向 A 流來之電流之分作 i_1，i_2，i_3，等流去，若定向A而來之方向爲正，則背 A 而去之方向爲

負，故(1)爲





$$i+(-i_0)+(-i_1)+(-i_2)+\cdots+(-i_4)=0$$

即 $i=i_0+i_1+\cdots+i_4$

再於閉路ABCD中，命V_A,V_B,V_C,V_D,表各接點A,B,C,D之電勢，則因

$i_1r_1=V_A-V_B$；$i_2r_2=V_B-V_C$；$i_3r_3=V_C-V_D$；$i_4r_4=V_D-V_A$.

即 $\Sigma ir=i_1r_1+i_2r_2+i_3r_3+i_4r_4=0$

如AB之一部分中有電池存在，其電動力爲E則

$i_1r_1=V_A+E-V_B$　　$\therefore \Sigma ir=E$。

如其他之部分亦有電動力存在，則

$\Sigma ir=\Sigma E$.

即 (2)之關係。

(B) 電氣抵抗(Electric Resistance)

(1) 導綫之長及切面面積與電氣抵抗之關係如何？

解： 導綫之抵抗與其長爲正比，與切面面積爲反比，溫度上昇則增加。

(2) 試述電氣抵抗之單位！

解： 抵抗之單位稱1湼，卽導線兩端電位之差爲1弗。其內電流之強爲1安，此時之抵抗稱曰1湼。

(3) 試述 Ohm's law！

解： 電流之強與導線兩端之電位差爲正比，與抵抗爲反比，此稱湼姆氏之法則(Ohm's law)。

$$C=\frac{E}{R}\text{，}C=\text{電流之強，}E=\text{電壓，}R=\text{抵抗}$$

此式若變形之　　則

$$E=ER \qquad R=\frac{E}{C}$$

(4) 假定供給電流之電動力不變，問電導綫之長短及粗細，對於電流之強弱有何關係？　　(北大)

解： 假定電流之電動力不變由 Ohm's law

$$\text{電流之強度}=\frac{\text{電動力}}{\text{抵抗力}}$$

但電導綫抗力之大小，與其長短爲正比，與其橫截面積或其半徑之平方爲反比，故粗者電流弱而細者電流強，長者弱而短者強。

(5) 有鐵綫長100米，切面之直徑爲2粍，其抵抗如

何？

解： 鐵綫之切面積爲兀×1²平方耗，抵抗與長成正比，與切面積成反比，而長1米切面1平方耗之鐵綫，其抵抗爲0.097渥。

故所求之抵抗爲

$$0.097\times\frac{100}{兀\times1^2}=3.1渥\cdots\cdots\cdots答$$

(6) 有金屬綫5條，其抗抗均爲10渥，試求其聯結與並結之全抵抗！

解： 導綫聯結時其全抵抗（R）等於各導綫抵抗之和

即 $R=r_1+r_2+r_3+r_4+\cdots\cdots\cdots\cdots$

故 10×5＝50渥 爲聯結全抵抗……答。

又導綫並結時，則全抵抗之倒數等於各導綫抵抗之倒數之和，即

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

故設R爲全抵抗

則 $\frac{1}{R}=\frac{1}{10}\times5=\frac{1}{2}$ ∴ R＝2渥……答

(7) 電動力1.9弗之本生電池，其內抵抗爲0.2渥，今用抵抗5渥之導線聯其兩端，則電流之強若何？

解： 由電池所生電流之強(C)等于以全抵抗

(外抵抗R＋內抵抗 r)除電動力(E)之商

即 $C=\dfrac{E}{R+r}$ 故所求電流之強，爲

$$\frac{1.9}{5+0.2}=0.365\text{安}$$ ……………………答

(註) a 電池內液體之抵抗，稱內抵抗。

b 電池愈大，則其內抵抗愈小。

c 電池外輪道(導線)之抵抗，稱外抵抗。

d 令電子流動之原因，稱電動力 (Electro motive force) 其單位爲 Volt，與電位差相同。

(師大)

(8) 試說明電池連結法之種類！

解：(a) 聯結法 即一電池之陰極與次電池之陽極，順次連結之方法，外抵抗甚大時，而欲得強電流，則用此法。

設電流之強＝C， 電動力＝E，

外抵抗＝R． 內抵抗＝r， n＝電池總數

m＝聯結電池數， m′＝並結電池數，由渥姆氏之法則

$$C=\frac{E}{\frac{R}{n}+r}$$

(b) 並結法　即各電池之陽極與陽極相連，陰極與陰極相連之法，內抵抗甚大，欲得強電流時，則用此法。

$$C=\frac{E}{R+\frac{r}{n}}$$

(c) 混合連結法　即將聯結之數電池再爲並結之之法，電池之外抵抗與內抗抗之比等於聯結電池之數與並結電池之數時，則得最大電流。

$$C=\frac{E}{\frac{R}{m}+\frac{r}{m'}}$$

(9)　有電動力2弗，內抗抗 1.5 渥之電池 12 個，以抵抗100渥之導線聯結或並結時，其電流之強若干？

又以每 4 個爲一聯，以 3 聯爲列，而爲混合聯結時，其電流之強若干？

解：　由公式 $C=\frac{E}{\frac{R}{n}+\frac{r}{m}}$

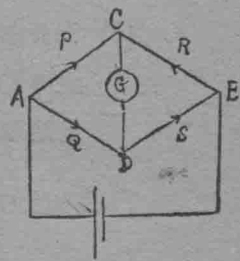
(a) 聯結　$C_1=\frac{2}{\frac{100}{2}+1.5}=0.2$ 安………答。

(b) 並結　$C_2=\frac{2}{100+\frac{1.5}{12}}=0.013$ 安……答。

(c) 混合 $c_3=\dfrac{2}{\dfrac{100}{4}+\dfrac{1.5}{3}}=0.078$ 安……答。

(10) 威斯吞橋Wheatstone's bridge如何構成？

威氏橋者 利用導線之結合以測定抵抗所用也。



如右圖，插有電池之電路，自一點 A 分爲兩路，在另一點 B 合爲一。全體共由AC，CB，BD，DA四導體而成各橋臂 arms of bridge，因A之勢高於B，故由A或經C，或經 D而至B，其勢均次第降低。 故在 ACB 上任取一點 C，必同時可於ADB上求得一點D，其勢與C相等。

如是則如CD間連一電表G，因C，D 同勢，G 之指針，必不呈偏向。

命PQRS表各臂之抵抗 V_A, V_B, V_C, V_D, 表各接合處A,B,C,D之電勢，則因$V_C=V_D$

$$\text{且}\quad \frac{V_A-V_C}{P}=\frac{V_C-V_B}{R}=\frac{V_A-V_D}{Q}=\frac{V_D-V_B}{S}$$

$$\therefore \qquad P:Q=R:S$$

如 P,Q,S爲已知數，則R可得算出。

(C) 電流之化學作用：

(1)　何謂電離，電解，電解質？

解：　電離卽電氣解離之略稱，卽將物質分解爲陰陽離子之作用也。

電解卽電氣分解之略稱，爲由電流而分解化合物之現象，電解之物質，稱電解質。

(2)　硫酸鋅及硫酸銅中以同一之電流電解，則其所析出各離子之重量比例如何？

解：　由同一之電量所析出離子之量與其元素之當量爲正比，今銅之原子量爲63.5，原子價爲 2，鋅之原子量爲65，原子價爲 2，

$$故\ \frac{63.5}{2}:\frac{65}{2}=1:1.236\cdots\cdots 答$$

(3)　硝硫銀溶液內通以0.5安之電流，一小時後，其銀之析出量若干？

解：　1安之電流1秒間通過之電量爲1庫，故0.5安之電流一小時通過之量爲 $0.5\times60\times60=1800$ 庫

故析出之銀爲 $0.001118\times1800=2.0124$ 克……答

(4)　試述 Faraday's law！

解：　由電流所分解之離子 (Ion) 之量與通過於電解質

之電之總量之(安×秒)成正比，與電流通過之時間成反比，由同一電量所分解之離子量與離子之化學當量成正比。

此法則亦稱電解法則。

(5)　以2安之電流電解水(H_2O)時，其一小時內所析出之氧及氫各若干？

又溫度27°.氣壓750粍時，其體積各如何？

解：　用2安之電流1秒間所析出之銀爲

$$0.00118\times2=0.002236\text{克}$$

銀之當量爲108,氫之當量爲 1

故1小時內所析出之氫爲

$$\frac{0.002236}{108}\times60\times60=0.07453\text{克}$$

故氧之量爲 $0.07453\times8=0.59624$克

又氧0.09克，在標準狀態其體積爲1立升

故0.07453克之體積爲

$$0.07453\div0.09=0.828\text{立升},$$

27°，750粍時，其體積爲

$$0.828\times\frac{760}{750}\times\frac{273+27}{273}=0.922\ \text{立升}\cdots\cdots\text{答}$$

氧之體積爲氫之$\frac{1}{2}$……………答

(6)　電解銀1克當量所須之電量幾何？

解： 用1庫之電量所析出之銀爲0.001118克

然1克當量之銀爲107.88克

故電解時所須之電量爲

107.88÷0.001118=96494庫……………答

(7) 蓄電池之原理，構造，作用如何？

解： 蓄電池爲將電流之能變爲化學之能而貯藏之裝置，其構造爲以含有氧化鉛 (Pbo) 之鉛版數枚互相絕緣而以一導體連結之對立於稀硫酸中，作爲兩極，若通電流於鉛版，則起次之變化

陽極－$Pbo+SO_4+H_2O=Pbo_2+H_2SO_4$

陰極－$Pbo+H_2=Pb+H_2O$

氧化鉛在陽極更氧化而成二氧化鉛，在陰極還原而成鉛，由此結果，兩極間則生電動力，此稱蓄電池之充電。

用導線以連結兩極之鉛版時，則起下之變化

陽極－$Pbo_2+2H+H_2SO_4=PbSO_4+2H_2O$

陰極－$Pb+SO_4=PbSO_4$

其能卽變爲電流而流於導線，此電流之方向與充電時相反，此稱蓄電池之放電。放電後若再送入電流，則$PbSO_4$復變爲Pbo_2與Pb，遂得貯蓄電流之

能，蓄電池之電動力爲2弗，內抵抗極小，故得強電流甚易$(C=\frac{E}{R})$是以爲實用上之重要品，如用作無線電信，X光線等之電源，及供電燈用之電流之貯藏等。

(C) 電流之熱作用：

(1) 試述 Jule's law！

解： 輸道之一部分上所生之熱量 H，與電流之強 C 之自乘及其部之抵抗 R，並通電流之時間 t 之積爲正比，即

$$H=0.24.C^2.R.t\text{ 加}$$

$$=0.24.CEt\text{加}(\because E=CR)$$

(2) 電流之強爲0.5安，電動力爲110弗，在10分鐘內所生之熱量幾何？

解： 電流之能＝電流之強×電動力$(P=C.E)$

$$=0.5\times110\text{華}$$

$$=0.5\times110\times10^7\text{爾秒。}$$

然 $1\text{加}=4.2\times10^7\text{爾}$

故每秒所生之熱量爲$\frac{0.5\times110\times10^7}{4.2\times10^7}$加

今10分＝10×60＝600秒

故10分內所生之熱量爲

$$\frac{0.5\times110\times10^7}{4.2\times10^7}\times60=7857\text{加}\cdots\cdots\cdots\text{答}$$

(3) 設導線之直徑爲原來直徑之$\frac{1}{5}$時，今通以同一電流，則其溫度上昇之差異如何？

解： 發熱量與導線之低抗爲正比。

抵抗與導線之切面積爲反比。

且切面積與直徑之自乘爲正比。

故直徑爲原直徑之$\frac{1}{5}$時，其切面積必爲原切面積之$\frac{1}{25}$。

因之抵抗卽爲原抵抗之25倍，然其質量爲原質量之$\frac{1}{25}$。

是故若熱量相同，則其熱量之上昇度數，必爲其原質量時之25倍。

故對於同一之電流，細導線之溫度上昇，卽爲原導線之 $25\times25=625$ 倍。

(4) 試求華(Watt)與馬力(Hcrse power)之比！

解： 1華$=10^7$爾秒(watt$=$Ampere$\times$Volt)

(卽電流1安，電壓1弗，每1秒間所作之功率)

1 馬力=33000呎磅分

1 呎=30.48cm.

1 磅=453.6克=453.6×980達，

故 1馬力=(33000×30.48)×(453.6×980)爾分，

$$=(33000\times30.48)\times(453.6\times980)\times\frac{1}{60}\text{爾秒},$$

$=745\times10^7$爾秒，

∴ 1 馬力=745華。

(5) 電力(電流之功率)之量每小時1華千(Kilowatt)，等於幾爾？又等於幾加？

解： 1華千=10^7爾秒

1 華千每時=$10^7\times1000\times60\times60$爾

$=36\times10^{12}$爾

$=36\times10^{12}$爾

$=36\times10^{12}\div(4.2\times10^7$加)

$=8.6\times10^5$加

(6) 有白熱電燈，其抵抗爲300湼，電壓爲100弗，其一小時所生之熱量幾何？

解： 設熱量=H， 抵抗=R， 電壓=V，

電流=C， 時間=t 則得次式

$$H=\frac{1}{4.2}RC^2t=\frac{1}{4.2}\times\frac{v^2}{R}t(\because\ C=\frac{V}{R})$$

$$\therefore H=\frac{1}{4.2}\times\frac{110^2}{300}\times 60\times 60=5762\text{加}。$$

(7) 電位差爲100弗，電流之強度爲0.5安，試求其一分內所發生之熱量！

解： 1弗之電壓，1安之電流，每秒所生之熱量爲0.24加

故所求之熱量爲

$$0.24\times 100\times 0.5\times 60=720\text{加}。$$

(8) 今有16燭光之電燈150000個，其所需之電量幾何？

解： 16燭光之電燈1個，其電壓爲100弗，電流爲0.5安，故所需之電量爲

$$100\times 0.5=50\text{華}。$$

故 150000個所需之電量爲

$$50\times 150000=7500000\text{華}=7500\text{華千}\cdots\cdots\text{答}$$

(9) 試述電燈之原理！

解： 電燈爲利用電流所生之熱，將導線強熱之令其發光之裝置，通常有二種：一爲白熱燈，即將鎢絲密閉於高溫眞空之玻璃泡中，而通以強電流則熾熱而發光。一爲弧光燈，即用炭素棒由上下兩方相向，而留多少之間隙，若加強電壓，則放花光。

(10)　16燭光之炭素絲電燈，其電位差爲 100 弗，電流爲0.56安，試求其工率及炭絲之抵抗！

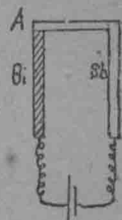
解：　工率 $P=CE$

抵抗 $R=\dfrac{E}{C}$

所求之工率 $=100\times0.56=56$ 華 ………答

炭絲之抵抗 $=\dfrac{100}{0.56}=178.6$ 渥 ………答

(11)　拍爾提效應Pehiere effect 如何？

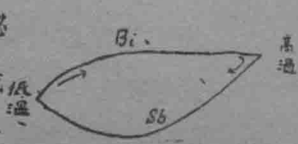


如圖，A處爲兩種金屬棒鉍與銻之接口，如送電流自銻入鉍則 A 處發熱。如自鉍入銻則A 處冷却。一般在熱電列內之金屬均有相同之性質，卽由位由位置在前者流入後者時冷，由後者流入前者時熱。如是之現象曰拍爾提效應。

結口發生或吸收之熱曰拍爾提熱。

(12)　何謂熱電流Thermo-electric Current？

由上題已知，有數金屬能發生拍爾提效應，今更可得一相反之現象，卽將鉍銻二金屬線連成一環，使成一閉電路狀，如使兩結口之



溫度不同，卽有電流在電路中通過，此種電流曰熱電流。發生此電流之裝置曰熱電池 Thermo-element，亦曰熱電偶 Thermo-couple.

此類金屬不止鍚鉍而已，凡在

鉍 鎳 洋銀 鉑 鉛 銅 鋅 鉄 鍚

列中之金屬，照此接合其高溫度之結口，均有電流由位置較前之金屬向位置較後者流去。

此一列金屬曰熱電列 Thermo-electric series.

(E) 電流之磁氣作用：

(1) 試述 Ampere's rule！

解：今螺旋釘之方向與電流之方向相同，在其旋轉前進時察之，則磁針之北極，常向螺旋釘之旋轉方向前進。換言之，通電流電線之周圍常生磁場。其方向，若電流爲螺旋之方向前進時，則磁場生於螺旋旋轉之方向，此稱安培氏法則。

(2) 在一導線上驗其有無電流通過之法如何？

解：a，將此導綫與正指南北之磁針平行放置時，導線上若有電流，則磁針必偏斜(磁氣作用)。

b，試檢導線之熱否(熱作用)。

c，切斷導線之兩端而浸於稀硫酸中，若導線上

有電流，則稀硫酸電解而發生氣體（化學作用）。

d, 若高壓之檢其火花放電與否，亦得知之（電氣作用）。

(3) 何謂電磁石？又磁石之北極由何事實而定之！

解： 將絕緣之導線，捲於熟鐵之周圍如絡圈之狀者，稱電磁石。通電流時，則成強磁石。電流停止，卽失磁性。

電磁石之絡圈上正通電時，若面絡圈之切口而察之，其電流若向磁針之反對方向流動，則爲北極。

(4) 鋼磁石及電磁石之製法，差異如何？

又製磁石之鐵，其適當之品質若何？

解： 將鋼鉄置於絡圈 (Coil) 中，而通電流於絡圈則鋼成永久磁石，鐵成一時磁石，亦稱電磁石。卽通電流，卽生磁性。絕電流，卽失磁性之謂。

至製永久磁石之鋼鉄，以含有0.5至1.5%碳之鉄中，含有10%之鎢，其經燒過者，最爲適當。

(5) 電流計及電壓計之原理及用途如何？試說明之！

又電壓計可用作電流計，其法若何？

解： 電流計爲測知電流之強度之器，卽於抵抗甚小之

絡圈近傍置一鉄片，通電流於絡圈時，由其磁力作用，鉄片卽被絡圈吸引而接近，觀其接近之程度卽知絡圈上電流之強度。

電壓計爲測算電壓之電流計，其與電流計不同之點，卽其所用之絡圈較大，今設絡圈兩端之電壓爲E,抵抗爲R,絡圈上電流之強度爲C。則得E=RC之關係式，是以測知R,C之值時，卽知E之值。

又電壓計可用作電流計之法，卽設用x安之電流，t秒間析出之生存物爲m

又1庫電量析出之生存物爲K，則得次式

$$m=kxt. \quad \therefore \quad x=\frac{m}{kt}$$

(6) 試舉應用電磁石之器械！

解：電磁石爲熟鉄棒之周圍捲以導線之物，導線上通以電流時，則鉄成磁石。應用之器械頗多，如電報機，電話機，電鈴，發電機，電動機等，均應用之。

(7) 測電流之強度之方法，試列舉之，並記其要旨！

解：(a) 應用電流之磁力作用

如用普通之電流計，因電流所生磁場之強度，與電流之強度爲正比，故置磁針於磁場內，由其偏

角之大小，卽知電流之強弱(由$C=K\tan\theta$)

(b) 應用電流之熱作用

卽電流發生之熱量與其強度之自乘爲正比，故以熱量計測其熱量之多少，卽得知電流之強弱。

(由$H=0.24C^2Rt$)

(c) 應用電流之化學作用

卽由電解所析出離子之量與電流之強度爲正比。故測其在單位時間內，所析出離子之量，再由其化學當量測其其電流之強度(由$M=eCt$)

(8) 試舉電流之能之變換爲熱能，化學的能及機械的能之實例，並其反對之實例各一個！

解：(a) 變爲熱能之例，如電氣爐等。其反對者，如熱電堆；及如用火力以迴轉蒸氣機關而運轉發電機使之發電之類。

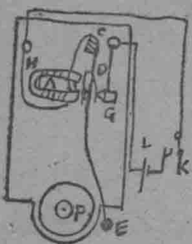
(b) 變爲化學的能，如蓄電池之充電。其反對者如普通之化學電池。

(c) 變爲機械的能，如運轉電動機而爲功，其反對者，如發電機。

其他如電流之變爲光能之電燈，音能之電話機，磁能之電磁石等。

(9) 試述電鈴之原理及構造！(北工大，北女師大)

解： 電鈴為利用電磁石之通電流時，則生電氣而繼續的使鈴作聲之裝置。



其構造如圖 A＝電磁石， B＝鐵片。

C,D＝彈機， E＝鎚， F＝鈴。

G＝螺釘， H＝導線， K＝押鈕。

L＝電池(通常用Leclanche)

押鈕K時，則電池L之電流，經電磁石A,彈機C,D,螺釘G,電磁石得磁氣即吸引鐵片E,因而鎚E即打鈴F.

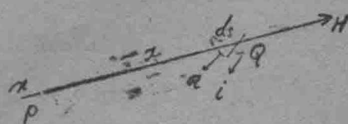
(10) 試述電報之原理！

解： 電報為利用電流在一秒間有數萬里之速度，及電磁石之通電流時則生磁氣，以電線與遠隔之地相連,而送點與線所成之符號,藉以互相通信之裝置。

(11) 磁場對於直線電流之力如何？

由 Piot, Savart's Law

$$f=\frac{i.m.ds.in\alpha}{10x^2}$$



即導線內有電流之通過時，ds 對於P點之磁極 m作用之力為 f 。其方向

與P及ds所決定之平面，即與紙面垂直，且正向下方，由反作用定律知在P之m對於ids作用之力為f，但正向上方。但m對於Q之磁力為$H=\frac{m}{x^2}$方向在PQ故

$$f=\frac{Hidssin\alpha}{10}$$

(F) 電磁感應

(1) 何謂感應電流？並試舉應用感應電流之機械數種：

解：磁石向絡圈(Coil)急行接近，或離開時，則絡圈內生瞬間之電流，此電流之方向於接近或離開時，適相反對，稱此電流曰感應電流。

感應電流不限於用磁石，即以通電流之絡圈代之亦可。

又不令電流或電磁石絡圈接近或離開，而令絡圈內急行發生磁場，或消滅之，或令其磁場之強弱起急劇之變化，亦可得同樣之結果。

應用感應電流之機械為感應絡圈，變壓器，電話機，發電機等。

(2) 試述 Lenz's law！ (北 大)

解：因用感應而生之電流向對於輸導之磁石運動之反

對方向流動，此稱林池氏定律（感應電流之法則）。

(3) 試舉得電流之方法！

解：(a) 利用電池之化學作用，係由化學變化所起之化學能變爲電能之法。

(b) 利用熱電堆之熱作用，係由金屬接合點之溫度差所起之電流。

(c) 利用發電機之感應作用，係令絡圈在磁場內迴轉而生感應電流，爲由機械能變爲電能之法。

(d) 利用感應絡圈之方法等。

(4) 感應絡圈生大電流之理如何？

解：第一絡圈電流繼續之際，鐵心之磁場卽起急烈之變化，第二絡圈卽由此感應作用而生電流，但第二絡圈之捲數極多，故全輪道受此變化之影響極大，而生高壓之電流。

(5) 電流有直流與交流之別，試說明之！

解：直流爲有一定方向之電流，如電池等發出之電流，在輪道內皆沿一定之方向，繼續流去之電流是。

交流爲其方向互相交換之電流，卽向一反一正，循環不已之電流，如由發電機最初發出之電流是。

直流與交流之電壓相同時，交流之生理作用較直

流爲烈。

(6) 輸送電力之方法如何？

解：電流所變之熱量與其強度C之自乘爲正比，又與導線之抵抗R爲正比，用導線輸送強電流於遠處時，C^2R需極大之值，因此電力之大部分變爲熱而耗費，然爲減少抵抗而用粗導線則費用甚巨。故常使電流之強度減小，以防此電力之耗費，今電流之能卽電力，由電流之強C，與電壓E相乘之積CE表之，故輸送大電力時，C之值愈小，則E之值愈大，是以通常用高電壓。以輸送電力於遠處。

(7) 試述電話之原理！

解：人向送話機發音，則音由空氣之波動而振動音薄版，令其與版接觸之炭粒，變其對電之抵抗，故所通電流之強度，隨聲音而變化，次將電流流入受話機內，則生電磁力而起電動之變化，內部之鉄版，因而振動，使空氣共振，而發爲音響，以傳於人耳。

(8) 俾奧，薩瓦特 Biot-Savart 氏之定律如何？

俾奧，薩發特氏律在陳述電流所發生之磁效應爲

(1) 電流之一小部分對於一磁針N極之力之方向與包

含導線及磁極之平面垂直，而電流之方向對於磁力之方向之關係，與右轉螺旋之前進方向對於轉動方向之關係相同——此關係又名曰安培定則。

(II)作用之力 f 與磁極之強度m電流之強度 i 導線小部之長ds,及連結ds與磁極之直線與電流方向所夾之角度α之正弦等為正比例，與磁極 P 至 ds之距離A之平方為反比例即

$$f=K\frac{imdssin\alpha}{x^2} \quad dynes.$$

式中之 k 表一常數其值由單位選擇而定。

(9) 何謂磁動力 magnetomotive-force ?

單位磁極由一點 A 移至他一點 B 時所作之功曰沿路徑 AB 之磁動力。

如路徑為一閉曲線，且包含 N捲之圈在內，其中有 i 安之電流通過，則磁動力為$\frac{4\pi Ni}{10}$

(10) 佛來名左手定則 Fleming's lefthandrule 如何？

此定則在陳述電流，磁場，及二者之相對運動之關係。

如伸左手，拇，食，中三指互相垂直，而以食指

表磁場方向，中指表電流方向，則拇指之所指之方向爲作用於導體之力之方向。

此定則可致用於電動機及其他因電流，磁場之存在而使導體或磁場運動之器械上。

(11) 右手定則如何？

右手定則之致用洽與左手定則相反，如已知一導體，與一磁場相對運動而欲定導體內所生電流之方向，則可由右手定則決定之。

伸右手，而使拇，中，食三指互爲垂直，如以拇指表導體運動之方向，食指表磁力線之方向，則中指卽表明導體內誘導電流之方向。

(12) 何謂佛科電流 Foucault current ？

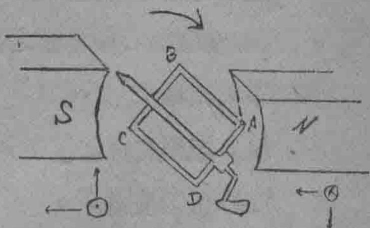
佛科電流又曰渦狀電流 Cddy current，乃誘導電流現象之一。蓋任何形狀之導體於磁場中運動時，均可發生誘導電流，不限於圈爲然。

例如在均磁場內轉動之銅版，其半一半徑均可看成一條導線，其上應均有誘電發生。如命 r 表銅版之半徑，n表其每秒之轉數，H表均磁場之強度，則每一半徑每秒間橫掃而過之力線數等於πr^2nH卽板心與板緣間，當生πr^2nH之誘電，但板內並

無電流通過。 如設想此銅板在一磁蹄之兩極間轉動，僅一部分橫貫力線而過。此時誘導電動力所發生之方向，在使電流由板心向夾在磁石間之板緣，其餘之部分並無電動力發生，故實際所生電流方向，當如旋渦狀，是曰佛科電流。

誘導圈之鉄心中，常有渦狀電流發生，使鉄心發熱而破壞其器，故常之誘導圈爲欲防止佛科電流發生，其鉄心係有小導線束成，其間以膠質使互相絕緣，則無發生佛科電流之電路矣。

(13) 試繪一理想發電機型，並簡略說明其所發生之電流爲交流之故。



理想發電機型略如右圖

設吾人搖動轉手，順時針之方向轉動，當AB轉至N極時，依右手定則知電流取AB方向，同時CD內之電流取CD方向，

故全路線內電流方向爲ABCD。

當AB轉至S極時，則原本由上至下之轉動已收爲由下至上。依左手定則AB內電流方向應取向BA,

同時CD內之電流取向DC，

故全路線內電流方向已改爲DCBA，

由是可推知交流發電機之原理。

(14) 交流發電機與直流發電機之區別。

由發電機導出之電流具有一定方向者，曰直流發電機 direct Current dynamo；其方向迅速變化時反時正者曰交流發電機 Alternating Current dynamo.

直流電，可由交流發電機所發出之電經整流子改成但直接發生直流電之發電機其發電子 Armature (卽在磁場石中轉動之部分)具特殊之構，普通爲下列兩種：

(1) 環形直流發電子。

(2) 鼓形發電子。

(丁) 電磁波

(A) 電氣振動

(1) 何謂電振動？

解：蓄電池放電時，其放電不止一次，而陽陰二極互相交換爲數次放電時之電流稱電振動。此電振動

由於電流之磁場所生之自身感應電流而起，其振動數每秒數萬次。

(2)　試將音波，光波，電波，等分別論之！

解：　音波係由物體之分子振動而生，以空氣或其他彈性體爲媒質之縱波，其度速爲 331 秒米。光波與電波均以以太爲媒質之橫波，其速度均爲三億秒米。在音波時由波長之大小，即振動數之多少，而分音之高低。在光波時，則爲色之變化，即紅色光之波長，紫色光之波短，電波爲較光波更大之波。音波感耳，光波感目，電波感粉末，檢光器之金屬粉，三者呈反射，屈折，干涉，共振等之現象。但光波，電波又呈偏欹之現象，而音波則無。

(註)　光可在眞空中傳達，而音則否。

(3)　各種以太波之波長及作用如何？

解：　(a) 電波　波長數粍乃至數千米感於檢波器。

(b) 熱波　波長數百分之一粍，感於寒暑表及皮膚。

(c) 光　波　波長數千分之一粍，感於眼。

(d) 化學綫　波長數萬分之一粍，感於照相乾版。

(e) x 光線　波長數十萬分之一粍，感於螢光版。

(4) 試述無線電信之原理。

解：無線電信為應用電波以通信之裝置，由電氣振動而生電波，檢波器(以鎳粉95，與銀粉5之混合物，納於細玻璃管中，用有柄之金屬版二片，由兩側輕輕壓之之物）受之，而電氣抵抗大減，以此為其原理之通信裝置。

(5) 簡述有聲電影之原理。

有聲電影 Moritone 由電之作用而發生其最要之機件為一電照管 Photo eleetric Cell. 中裝有一層鉀鈉類之鹼金屬，在此金屬片之前方，有導線通於外，蓋此類金屬有一特性，即當其與光相遇，即刻發生電子，由導體傳到體外其電子即為吾人所利用者。

方攝取有聲電影時，恆於特製攝影室中，將影與聲同時攝入片子。

有一種燈泡名AEO管，其燈絲有鹼土金屬之養化物塗之。當燈絲受着電流時，燈絲之光化力極強。而光之強度，將依燈絲電流之強弱，變化甚速。此燈絲與顯微音器 Microphone相連，置於攝影箱中，並與攝影之位置相同，當軟片一方面攝取影

像時，一方面演員之聲浪，由顯微音器傳到AEO管的燈絲，燈絲因之而有聲浪，因顯微音器傳達電流有強弱之不同，故發生之光隨之而有明暗之差異。此光同時照映影片側邊另一路線上而成明暗不同之狀態。正與留聲機片上所印之深淺條紋相似，但在影片上變成振動之光而已。

影片映放時，除影之一部爲無聲之影片照常作用而外，其他一部儲聲路線，藉電照管之還原作用，而成聲矣。蓋儲聲線上亦有強弱不同之光線透過電照管中之金屬片，因是發生電子，由導體傳入眞空管放大器中。於是由光之振動，變成電之振動，依振動之多寡，變成各種不同之聲音焉。

(E) 眞空放電

(1) 試說明陽離子與陰離子，陰極綫與 x 線。

解：電解質之水溶液中，帶有陽電之原子，稱陽離子。帶有陰電之原子，稱陰離子。眞空放電時，由陰極放射之原子分裂而成之微粒，稱陰極線。此微粒與物體衝突時所起能媒之波動稱X線。

(2) 試說明 x 線！

解：　放電於具有白金極之眞空時，由對陰極之白金版上生波長極短之能媒波，此即爲X線(Xrays)亦稱Rontgen rays(因爲Rontgens氏所發見)，其特性有(a)眼不能見。　(b)雖係直進而無反射及屈折。(c)能使螢光體發光。　(d)在暗室中能作用照相乾版。　(e) 能通過光所不能透過之物質，大概與物質之密度與厚成反比。　(f) 能令空氣化爲電氣之導體。　(g) 能透過人體之組織，故醫學上用以檢視患處，頗爲重要。

(3)　試述電子說？

解：　電子爲含有極少定量陰電之微粒，其質量爲輕原子之$\frac{1}{1845}$，爲萬物中之最輕者。電子在物體中振動時，則生光波。移於導綫內時，則生電流。物質內含電子極多時，其物質卽帶陰電。電子之陰電與附屬於物質之陽電互相中和而存在時，則此物質爲不帶電體。若電子由眞空管之陰極衝突於金屬面時，卽由金屬版發X 線。

物　理　學　終

化學問答目次

化學問答

I 化學通論

(A) 元素，化合物

(1) 何謂物質，物體？

解： 凡占有一定之空間，得由吾人五官之感覺而認知其存在者，稱曰物質(Matter)。如空氣,水,木,鉄等。物質之分量，大小，或形狀等，同時注意時，稱曰物體(body)。如一滴水，機，小刀等。

(2) 試說明原子及分子！

解： 原子為物質之用物理的及化學的方法，所分得之微粒子，(即元素之最小粒子)其種類凡 80 餘種，各有一定之性質，原子構成各種物質，原子有重量，同種物質之原子重量均同，不同之物質之原子其重量不同。又數種元素相合，成一種化合物，此化合物之內容，實為各種元素，各以若干

原子彼此化合而成，分子爲原子所結合之物質，卽物質之由物理的方法所分之至微而不可再分之最小粒子，由分子之集合卽爲物質，因其集合之粗密而分爲氣體，液體，固體等。

(3) 試述原子論 (Atamic theory) 之大意，並如何利用以解釋化學反應？(北女師大)

解：就物質之化學變化而條述原子說之大意如次：

a. 元素(亦稱原質)爲極微自立之顆粒所成，此顆粒卽稱之曰原子。

b. 同元素之原子量均同，不同之元素其原子量亦不同。

c. 物質起變化，而原子量不變。

d. 元素相化合時，卽爲不同之原子相接合，其比數恆爲一定。

由以上之關係，故可利用之以解釋物質不滅，倍數比例，定數比例等定律，卽其原子量可解一切化學反應。

(4) 單體與元素之區別如何？

解：無論用何方法 (現時所知之方法) 不能再分之物質，稱單體 (Simple body)。如氫，氧等，各物

質中所含單體之素質，稱曰元素 (Element)。如水爲氫氧二元素所成，其分解時，則氧元素成養氣單體，氫元素成輕氣單體。

(5) 同素體之意義如何？試舉例以說明之！

解：同一元素所成二種以上之單體，因其所有Energy之多少，而性質各異之物體，稱同素體。如養氣(O_2)與臭養(O_3)金剛石與石墨及無定形炭素等。

(6) 何謂異性體？同形體？

解：分子式相同而其反應相異者，稱異性體。如 Butane, $CH_3.CH_2.CH_2.CH_3 = C_4H_{10}$ 及 Trimehtylmethane, $CH_3.CH(CH_3)_2$ C_4H_{10} 等之分子式，組成相似之結晶形，稱同形體。如鉀明礬 ($AL K(SO_4)_2.12H_2O$), 鉄明礬($Fe K(SO_4)_2.12H_2O$) 等是。

(7) 試說明化合物與混合物之意義，並二者之異點！

(北大)

解：二種以上之物質化合所生之新物質而其化合或分解時必有化能之轉變者稱化合物 (Compounds)。如水爲養氣與輕氣化合而成，二種以上之物質互相混合，而各物質仍保原有之性質者，稱混合物

(Mixture)。如空氣是。

二者之異點為

a. 化合物其成分元素之比常為一定，而混合物則不然。

b. 化合物與其成分元素之性全異，而混合物則其各成分元素之性共有。

c. 化合物非用化學方法(加熱，電流之作用等)不能分解其成分，而混合物得用物理方法分解之。

(8) 試說空氣為混合物而非化合物之理。

解： a. 空氣中所含之養氣與淡氣之比率，常因時間，空間而有差異。

b. 以比率 1 : 4 之養氣與淡氣混合之可得之氣體，其性質與空氣全同，且其混合時無熱量與體積之變化，故知其為非化合物。

c. 空氣中之淡氣與養氣仍各現其固有之性質。

d. 放液狀空氣時，淡氣先氣化，而養氣殘留。

e. 溶解於水中之空氣之組成，與在大氣中之空氣之組成大異。

(9) 何謂根？

解：化學變化之時，不分離而恰如一原子，自一物質移至他物之原子團，稱曰根，或基（Radicals）如 $ZnSO_4+2NaOH=Zn(OH)_2+Na_2SO_4$ 中之 SO_4 及 OH 是。

(10) 試述原子價之定義。

解：某元素之一原子量與氫化合所需氫之原子價之數，稱曰某元素之原子價。換言之，即某元素之一原子，能與氫或氧一原子或二以上之原子化合，而成一種化合物，則氫或氧原子之數目，稱曰某元素之原子價（Valency）。

例如 HCl　　Cl 為一價原子

H_2O　　O 為二價原子

NH_3　　N 為三價原子

(11) 何謂第一化合物，第二化合物？

解：同一元素而取二種以上之原子價時，其小者稱第一化合物，大者稱第二化合物。若化合物為鹽類時，則稱第一鹽，第二鹽。

如　PCl_3 為第一化合物。PCl_5 為第二化合物。

$HgCl$，$SnCl_2$ 為第一鹽，$HgCl_2$，$SnCl_4$ 為第二鹽。

(B) 化學式(即分子式與實驗式之總稱)

(1) 分子量之意義如何？

解： 某氣體對於養氣比重之 32 倍，稱某氣體之分子量(Molecular Weight)。

$$\text{即分子量}=\frac{\text{與養氣同體積之氣體之重量}}{\text{一定體積養氣之重量}}\times 32$$

養氣分子之質量爲32，與此相比而定之某物質分子之質量所表之數值稱分子量，或某氣體22.4竔(標準狀況)之重量以克表之之數稱分子量。換言之，卽各化合物之一分子，與氧之一分子比較之重量，稱分子量。卽該分子中所含各原子相加之總重量。

(2) 某化合物2.02克，氣化時測定其體積爲 364c.c.但其時之溫度爲16°c,氣壓爲772粍，試求其分子量。

解： 此氣化物 360c.c. 於標準狀況時之體積爲

$$364\times\frac{772}{760}\times\frac{272}{16+273}=349.3\text{c.c.}$$

故 22.4 立升之重量，卽分子量爲

$$2.02^{克} \times \frac{22.4}{0.3493} = 129.54克$$ ……………………答

(3) 何謂原子量？

解：一元素之原子量卽含此元素之多種化合物之各 1 克分子量中所含此元素之 G.C.M.所示之量，稱原子量。

養氣原子之重量定爲16，與此相比而定之原子之重量，稱原子量。卽各元素一原子與氧之一原子比較之重量。

(4) 原子量之測定法如何？試述其大要。

(Determination of molecular)

解：a. 由化學作用以測定之之法；

有多種原子量可由化學作用以測定之，如用水分析之，知其爲二原子氫，與一原子氧化合而成。然其重量則爲氫 1 氧 8 之比例，故 1 原子之氧較 1 原子之氫重 16 倍甚明，故稱氧之原子量爲 16。

b. 由元素之比熱以測定之之法；

由 Dulong and Petit's law 知

原子量=6.4 ÷比熱(多用以測固體物質)。

是以若欲測某固體元素，可先以實驗測定其比熱，次以此比熱除 6.4，卽得其概數。

c. 由週期律以測定之之法；

卽凡週期表中某元素之原子量，約爲其上下左右四元素之原子量之平均數，故利用此定理亦可求得。

d. 由同式之結晶物體以測定之之法；

卽二種化合物，若能成同式之結晶體者，其中所含之原子數相等，由此事實亦得測定之。

e. 由分子量及分析法以測定之之法；

如欲測某元素之原子量，先取某物質之化合物若干種，測定其分子量，次用分析法以測定某一分子量中含某元素之分子量若干，取其中最小之數目，卽爲某元素之原子量。

(5) 某元素含數種之物質中，分析各分子量中所含此原素之量爲 71，106.5，142及 177.5，試求其原子量。

解： 原子量卽上諸數之 G.C.M. 故

$$71=35.5\times 2$$

$$106.5=35.5\times 3 \qquad 142=35.5\times 4$$

$$177.5=35.5\times5$$

∴ 其 G.C.M.$=35.5$ 卽原子量…………………答

(6) 何謂元素之化學當量？又其與原子價之關係如何？

解：以輕氣爲標準與其1.008量所化合或更換之各元素之量。換言之，卽該元素與一分氫元素（標準元素）相化合所需之若干重量，稱元素之化學當量或稱化合量(Equivalent weight or combining)。如養氣之當量爲 $16\div2=8$， 碳之當量爲 $12\div4=3$ 是。又當量與原子價之關係如次

化學當量＝原子量÷原子價

此式稱元素之三要素關係式。

(7) 赤色三氧化二鉄4.5克，以輕氣還原之，則得3.15克之鉄，由此試求鉄之當量。

解：赤色三氧化二鉄中所含氧之量爲

$4.5-3.15=1.35$ 而氧之當量爲8，

故設鉄之當量爲 x 則由次之比例式可得 x 之値，

$$x:8=3.15:1.35$$

$$\therefore\ x=18\frac{2}{3}\cdots\cdots\text{答}$$

(8) 何謂實驗式(Empirical formula)？

解： a. 以元素符號表示其化合物中成分元素幾原子量之最簡單之式。

b. 實驗式乃用以表示許多不能測定之分子量之物質。

(9) 試求次物質之實驗式！

解： 鎂 9.76，硫黃 13.01，養氣 26.01，水 51.22

$$\frac{9.75}{24}=0.41\cdots\cdots1\ (Mg=24)$$

$$\frac{13.01}{32}=0.41\cdots\cdots1\ (S=32)$$

$$\frac{26.01}{16}=1.63\cdots\cdots4\ (O=16)$$

$$\frac{51.23}{18}=2.85\cdots\cdots7\ (H_2O=18)$$

$\therefore$ 實驗式 = $MgSO_4 7H_2O$

(10) 試述分子式之定義！

解： 以元素符號，而表一物質之組成，及其分子量者，稱分子式(molecular formula)。如水 H_2O，硫酸 H_2SO_4 等，一分子式之組成，以諸元素之符號並記之，若一分子量中含有同一元素之數原子，其數則記於符號之右下。又分子前之係數，係示分子量之倍數 如 $2H_2$，$3H_2SO_4$

(11) 分子式之作法如何？

解： 先由組成求得實驗式，以其式之原子量之和除分子量，再以其商乘實驗式各元素記號數即得，如有物質其分子量爲 92，其百分組成爲碳 52.17 氫 13.04，氧 34.79，試求其分子式！

解： 碳 $52.17 \div 12 = 4.34 \cdots\cdots 2$

氫 $13.04 \div 1 = 13.04 \cdots\cdots 6$

氧 $34.79 \div 16 = 2.17 \cdots\cdots 1$

故實驗式 $= C_2H_6O$

$C_2H_6O = 12 \times 2 + 1 \times 6 + 16 \times 1 = 46$

因分子量爲 92

故 $46n = 92 \quad \therefore \ n = 2$

故所求之分子式爲 $(C_2H_6O)_2$ 卽 $C_4H_{12}O_2$

(12) 試由硫酸之分子式(H_2SO_4)計算其百分組成！

解： 硫酸之分子式 H_2SO_4 而 $H=1, S=32, O=16$

$$\text{故氫之量} = \frac{1 \times 2 \times 100}{1 \times 2 + 32 + 16 \times 4} \doteq 2.04\%$$

$$\text{硫之量} = \frac{32 \times 100}{1 \times 2 + 32 + 16 \times 4} = 32.65\%$$

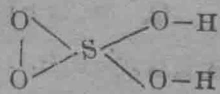
$$\text{氧之量} = \frac{16 \times 4 \times 100}{1 \times 2 + 32 + 16 \times 4} = 65.31\%$$

答氫2.04%,硫32.65% 氧65.31%

(13)　試述構造式之意義！

解：　一種化學式，以短線表示元素之原子價與物質之分子式，以示其成分元素之配合，及互相結合之關係，令其物質之一切化學性質，可簡單表出者，稱此式曰構造式(Constitutional formula)。

例　水　H−O−H　(H_2O)

硫酸  (H_2SO_4)

(14)　何謂示性式(Rational formula)?

解：　示性式乃以示一分子中，含有如何之根，能表出其化學性質之一部之化學式

例如 Ethyl alcohol 之示性式爲 C_2H_5OH,

醋酸之示性式 CH_3CO_2H。

(C)　化學方程式

(1)　化學方程式之意義如何？

解：　以化學式及符號簡單表示化學變化之反應，前後物質之種類及重量之關係之等式，稱化學方程式(Chemical equation)。

相反應各物質之化學式，以＋號連之而置於＝號或⟶號之左，反應生成之物質，亦以＋號連之而置於＝號或⟶號之右。

化學方程式所表示之各種重要事實爲

a. 反應前後物質之種類。

b. 反應前後各物質相互質量之關係。

c. 表示定比例之定律。

d. 表示質量不變之定律，卽反應前後，其質量毫無增減。

e. 表示氣體反應之定律。

f. 表示物質不滅之定律，卽方程式兩側之各元素之原子量必相等。

(2) 方程式($2H_2+O_2=2H_2O$)所表之事實爲何？

解： a. 氫($2H_2$)與氧(O_2)相化合而生水($2H_2O$)

b. 其重量卽氫 4 與氧 32 相化合而生水 36

c. 其容積卽氫 2 與氧 1 相反應而生水 2

d. 示兩邊元素之原子數相等

(3) 一氧化汞加熱時，則分解而成氧與汞，其方程式如何？

解： $2HgO=2Hg+O_2$

(4) 化學方程式之係數如何定法？

解： 例如加濃硝酸於銅時，則生硝酸銅，水及一氧化氮

$$Cu + HNO_3 \longrightarrow Cu(NO_3)_2 + H_2O + NO$$

今設各項之係數爲 m, n, x, y, z.

∴ $mCu + nHNO_3 = XCu(NO_3)_2 + YH_2O + ZNO$

Cu之數 $m = x$ ……………………(1)

H 之數 $n = 2Y$ ……………………(2)

N 之數 $n = 2x + Z$ ……………………(3)

O 之數 $3n = 6x + Y + Z$ ……………… (4)

今令 $m = 1$

由(1) $x = 1$

由(2),(3) $2y = 2x + z$ 卽 $2y = 2 + Z$ ….(5)

又3(3)－(4) $y = 2Z$ ……………………(6)

∴ (5)－2(6) $3Z = 2$ ∴ $Z = \frac{2}{3}$

由(3) $n = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$

由(2) $\frac{8}{3} = 2y$ ∴ $y = \frac{4}{2}$

即$m=1$，$n=\frac{8}{3}$，$x=1$，$y=\frac{4}{3}$，$Z=\frac{2}{3}$

代入方程式

$$1Cu+\frac{8}{3}HNO_3=1Cu(NO_3)_2+\frac{4}{3}H_2O+\frac{2}{3}NO.$$

但化學方程式之係數需爲整數，故以 3 倍其兩邊，則所得之方程式如下：

$$3Cu+8HNO_3=3Cu(NO_3)_2+4H_2O+2NO.$$

(5) 化學方程式之應用如何？

解： a. 可求得由一定量之物質所生成之新物質之量

b. 可求得作一定量物質所須原料之量

例 a. 投鈉10克於水中，可生輕氣幾竔？

解： 方程式爲

$$2Na+2H_2O=H_2+2NaOH$$

2×23克　　22.4竔

故鈉10克所生輕氣之體積爲

$$22.4\times\frac{10}{2\times23}=4.9\text{竔}$$ ……答

b. 今欲製100c.c.之輕氣，需鋅與硫酸若干克？

解： 方程式爲

$$ZN+H_2SO_4=H_2+ZnSO_4$$

65.4克 98.1克 22.4竔

故所求鋅之量爲

$$65.4 \times \frac{0.1}{22.4} = 0.29\text{克}$$

又所需純硫酸之量爲

$$98.1 \times \frac{0.1}{22.4} = 0.44\text{克}$$

∴ 80%之稀硫酸爲

$$0.44 \times \frac{100}{80} = 0.55\text{克}$$

答鋅0.29克，硫酸0.55克。

(6) How would you prepare (a)oxygen (b)Chlorine. (c) manganese chloride from manganese dioxide

(東大)

解：(a) Oxygen can be prepared from manganese dioxide by beating it to a high temperature.

$$3MnO_2 \longrightarrow Mn_3O_4 + O_2$$

(b,c) When hydrochloric acid fs gently heated with manganese dioxide, the hydrogen of the acid and the manganese of the dioxide changes places is indicated in the follow equation.

$$4HCl + MnO_2 \longrightarrow MnCl_4 + 2H_2O$$

The reseveing compound Mn Cl_4 know as manganese tetrachloride is unstable and as fast as formed decomposed into manganese chloride $MnCl_2$ and free cholrine as follows:

$$MnCl_4 \longrightarrow MnCl_2 + Cl_2$$

(7) Complete and balence the following equations:

(北 大)

a. $NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow$

b. $FeSO_4 + H_2SO_4 + K_2CrO_7 \longrightarrow$

解： a. $2NH_4Cl + Ca(OH)_2 \longrightarrow 2NH_4OH + CaCl_2$

b. $6FeSO_4 + K_2Cr_2O_7 + 7H_2SO_4$

$$= 3Fe_2(SO_4)_3 + Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4 + 7H_2O$$

(8) How many grams of hydrogen can be prepared from 5 grams of Zinc? What is the valume of hydrogen so prepared? Gram molaculor valume of any gas at standard condition is 22.4 liters. Atomic weight of hydrogen is 1. that of Zinc is 65. (東大)

解： By the equation

$$Zn + H_2SO \longrightarrow ZnSO_4 + H_2$$

$$65:2 = 5:x \quad \therefore x = \frac{2\times 5}{65} = 0.154\text{gm. (weights)}$$

$$65:22.4=5:y \quad \therefore y=\frac{22.4\times 5}{65}=1.7231 \text{ (Valume)}$$

(9) 試計算燐酸中各元素之百分率！

(原子量 H=1.008,P=31.04,O=16)(北工大)

解： Phosphoric acid(燐酸)之分子式$=H_3PO_4$

$H_3=1.008\times 3=3.024$

$P=31.04$

$O_4=16\times 4=64$

$3.024+31.04+64=98.064$

$$\therefore \left.\begin{aligned} H&=\frac{3.024}{98.064}\times 100=3.09\% \\ P&=\frac{31.04}{98.064}\times 100=31.65\% \\ O&=\frac{64}{98.064}\times 100=65.26\% \end{aligned}\right\}\cdots\cdots\text{答}$$

(D) 化學變化

(1) 何謂化學變化與物理變化？ (北醫大)

解： 物質變化，全失其固有之性質，而成相異性質之新物質之變化，稱化學變化(Chemical change)。如物質之燃燒($S+O_2=SO_2$)，有機化合物之醱酵

$(C_6H_{12}O_6 = 2C_2H_5OH + 2CO_2)$等是。

物質變化，不變其實質者，即僅形態上之變化，或表面上之變化等，稱物理變化(Physical change)如鐵之帶磁性，物體之帶電氣等。

(註) 化學變化常與物理變化相伴而起，如物質之燃燒時，必先發熱，然物理變化不然，全不伴化學變化，而單獨變化。

(2) 試述下列各事實屬何變化？

(a) 結晶體失其結晶水

(b) 電燈之發熱閃光

(c) 冰之融解

(d) 煤氣白熱燈之發光

(e) 火藥之爆發

(f) 薪炭，石油之燃燒

(g) 牛乳之腐敗

解：(a)(e)(f)(g)爲化學變化

(b)(c)爲物理變化

(d)爲物理與化學相伴之變化。

(3) 試說明次之化學變化之意義！

(a)化合 (b)分解 (c)複分解

解： a. 化合 如 A+B=AB之二種以上之物質互相結合，而生一性質全異之新物質之化學變化，稱化合(Combination)。由化合所生之物質稱化合物(Compounds)。例如養氣與輕氣化合而生水卽輕氣燃燒後而生水($2H_2+O_2=2H_2O$)

b. 分解 如 AB=A+B之一種物質，由化學變化而生性質相異二種以上之新物質，稱分解(Descompositon)。例如養化銾加熱時，則分解而爲氧與銾 ($2HgO=2Hg+O_2$)

c. 複分解 如AB+CD=AC+BD 之化合與分解同時所起之變化，卽凡兩種不同之化合物，其元素不相交換，而另成二種新化合物之變化，稱複分解 (Double descomposition)。例如食鹽中加硫酸則生鹽化氫與硫酸鈉

($2NaCl+H_2SO_4=2HCl+Na_2SO_4$)

(4) 何謂氧化？ (北師大，女師大)

解： 物質與養氣相化合，稱氧化(Oxidation)

例如 $2H_2+O_2=2H_2O$

又廣義之，氧化爲元素之陽離子價增加及陰離子價減少之變化，稱氧化。

例如於 $Sn^{II}Cl_2+HgCl_2=Sn^{IV}Cl_4+Hg$

中之 Sn，由陽 II 價增至陽 IV 價。

(5) 何謂還原？ (北師大，女師大)

解：於氧化物中失去一部或全部之氧，稱還原(Reduction)。 例如 $CuO+H_2=Cu+H_2O$

又廣義之，還原爲元素之陽離子價減少，或陰離子價增加之變化，稱還原。

例如於 $SnCl_2+Hg^{II}Cl_2=SnCl_4+Hg^0$

中之Hg由陽II價減至O價。

(註) 氧化與還原，通常同時並起。

(6) Define oxidation and reduction both in their restricted sense and in their broad sense. Pick out from the following equations those involve oxidation reduction.

(a) $8HCl+3H_2S+K_2Cr_2O_7 \longrightarrow 2KCl+2CrCl_3+7H_2O+3S$

(b) $2HClO \longrightarrow H_2O+Cl_2O$

(c) $2FeCl_2+Cl_2 \longrightarrow 2FeCl_3$

(d) $3KClO \longrightarrow KClO_3+2KCl$

(e) $2HCl+Mg \longrightarrow MgCl_2+H_2$ (南開)

解： In the broad sense, any reaction which increases the valence of the metal or a radical of a compound is called an oxidation. Even though no oxygen is involved in the process and a compound is said to be reduced when the valence of the metal or radical of a compound is diminished. In the restricted sense, when any substance conbines with oxygen, the reaction is called oxidation. When oxygen is removed from a compound the change is known as reduction substance involving oxidation and reduction in the above equations are shown in the following:

	Substances reduced	Substances oxidized
(a)	$K_2Cr_2O_7$	$3H_2S$
(b)	——	——
(c)	Cl_2	$FeCl_2$
(d)	2KClO	$KClO_3$
(e)	2HCl	Mg

(7) 試釋燃燒之意義，並述其起熄之條件！

解： 物質化合或氧化之時，發生光與熱之現象，稱燃

燒。

起燃燒之條件爲a，須養氣不斷的供給。b，須保持可燃物之溫度至燃燒點以上之溫度。

熄火之條件爲a，養氣斷絕。b，可燃物之溫度降至發火點以下。

(8) 何謂潮解，風化？

解：例如氯化鎂之固體，在空氣中自然吸收水分而變爲溶液，此種變化稱潮解。如洗濯鹼 $Na_2CO_3 \cdot 10H_2O$ 爲含水物，在空氣中漸漸失去水分而變爲粉狀，此變化稱風化(Efflorescence)。

(9) 何謂昇華？

解：固體被熱而直接變爲氣體，其氣體冷却之卽復直接變爲固體之變化，稱昇華(Sublimation)。如熱碘時不溶融而直化爲蒸氣，遇冷又隨卽變爲固體之變化是。

(10) 何謂中和？

解：呈酸性反應之物質與呈鹼性反應之物質，適當混合之後，而失反應之性質，稱中和(Neutralisation)。換言之，中和乃酸之氫離子與鹼之氫氧離子相化合而成水之謂，如

$$Na^{\cdot}OH' + H^{\cdot}Cl' = Na^{\cdot}Cl' + H_2O.$$

(11) 何謂加水分解 (Hydrolysis)？

解：一化合物加水後起作用而分解，稱加水分解。

例如炭酸鈉加水後卽起如下之分解

$$Na_2CO_3 + H_2O = 2NaOH + H_2CO_3$$

卽鹽類與水化合而成一種鹼類及一種酸類之作用

(12) 試舉例以說明可逆反應 (Reversible Reaction)！

解：例如當加熱於氯化錏時，卽分解爲氯化氫與硇精，冷却時，則復化合而爲氯化錏。

$$NH_4Cl \rightleftarrows NH_3 + HCl$$

如此狀態之變化，卽可兩方向相反之反應，稱曰可逆反應。

又可逆反應停止時之狀態，稱化學平衡(Chemical Equilibrium)。

(13) 何謂解離，熱解離？

解：可逆的分解稱解離 (Dissociation)。

例如 $NH_4Cl \rightleftarrows NH_3 + HCl.$

由熱而解離(但去熱冷之又復原狀)所生之反應，特稱熱解離 (Dissociation by heat)。

例如 $CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2$

(14)　試說明電離？電離度？

解：　物質(酸，鹽基，鹽)溶解於水，其帶電氣之部分則解離之變化，稱電離(即電氣解離)(Electrolytic dissociation)。

例如　$H_2SO_4 \rightleftharpoons 2H^{\cdot} + SO_4''$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} NH_4Cl \rightleftharpoons NH_3 + HCl \\ N_2O_4 \rightleftharpoons 2NO_2 \end{array}\right\} \text{熱解離} \\ \left.\begin{array}{l} NaCl \rightleftharpoons Na^{\cdot} + Cl' \\ H_2SO_4 \rightleftharpoons 2H^{\cdot} + SO_4'' \end{array}\right\} \text{電解離}\end{array}\right\} \text{解離}$$

又電離所生成之離子量，對於其溶質全量之比，稱電離度。

(15)　電離學說 (Electrolytic dissociation theory) 如何？試述其大要！

解：　普通物質之水溶液，有能傳電者，有不能傳電者。能傳電之溶液，可預想其中之物質已經分離成帶電之離子(Ion)，此種想像，係由 Arrhenius 所創，今述其大要如次：

a.　傳電之溶液，其溶質已分解成兩部分：一帶陽電稱陽離子(Cation)，一帶陰電稱陰離子(Anion)，陽離子爲金屬元素，氫元素及

NH_4 之原子團等。陰離子爲非金屬元素，OH, NO_3 及 SO_4 之原子團等。

b. 陽離子所帶陽電總量，與陰離子所帶陰電總量相等，故溶液雖已電離而不顯電性。

c. 溶液通以電流時，其陽離子由陰極放出，陰離子由陽極放出。

d. 離子性質與普通物質之性質不同。

e. 離子價等於原子價，離子之當量等於元素之當量。

(16) 試說明次之術語之意義！

a.鹼化， b.轉化， c.硝化。

解： a. Ester與水相反應而變爲酸與Alcohol，或Ester與Alkali相反應而變爲鹽與Alcohol之變化，稱鹼化 (Saponification)。

例如 脂肪通以水蒸氣時之變化

$(C_{15}H_{31}CO_2)_3C_3H_5+3H_2O=3C_{15}H_{31}CO_2Na+C_3H_5(OH)_3$

b. 蔗糖與酸或酵素相接觸時，則變爲葡萄糖，與果糖之變化稱轉化(Inversion)。

$C_{12}H_{22}O_{11}+H_2O=C_6H_{12}O_6+C_6H_{12}O_6$

c. 由氮化物中而生硝酸之變化及由 Alcohol 類或纖維素而生硝酸 Ester 之變化，稱硝化。

例 $NH_3 \longrightarrow HNO_3$

$C_3H_5(OH)_3 \longrightarrow C_3H_5(NO_3)_3$

(17) 何爲焰色反應？硼砂球反應？銀鏡反應？

解：金屬元素在養化時所發生之火焰之色稱焰色反應如Na＝黃　K＝紫　Cu＝綠等

將熔融之硼砂，以融解金屬之養化物所着之色之現象，稱硼砂球反應，如

CO＝青　Mn＝紫　Cr＝綠　Ni＝黃等

Aldehyde 類令硝酸銀之 Ammonia 性溶液還原，而使銀遊離，其銀卽沉積於物體之表面，卽生銀鏡之變化，稱銀鏡反應。

(18) 試釋醱酵，腐敗之意義！

解：酵素，酵母等之微生物之作用，而分解複雜之有機化合物，爲比較簡單之物質之現象，稱醱酵。醱酵之種類爲酒醇醱酵 ($C_6H_{12}O_6=2C_2H_5OH+2CO_2$)，醋酸醱酵 ($C_2H_5OH+O_2=CH_3CO_2H+H_2O$) 以及乳酸醱酵，酪酸醱酵等。

複雜之有機化合物，因酵素之作用而分解爲有毒

之化合物之現象，即醱酵生成物之有毒者，稱腐敗。又通常用裝罐法，冷藏法，乾燥法及用防腐藥等法以防腐敗。

(E) 定 律

(1) 試述質量不變定律！

解： 凡化學反應時，其反應前後諸物質之質量或重量之總和常不變，此稱質量不變定律。

(Law of conservation of mass)

例如 P_4(燐)$+5O_2$(氧)$=2P_2O_5$ (五氧化二燐)

$4\times31+5\times16\times2=2\times(31\times2+16\times5)$

(2) 試述定比例定律！ (北 大)

解： 數種物質，互相作用，而生一種或數種之新物質(化合物)時，其各物質重量之間，有一定不變之比，此稱定比例定律 (Law of definite Proportion)

例如 $2H_2$(氫)$+O_2$(氧)$=2H_2O$(水)

氧之體積：氫之體積$=1:2$

氧之重量：氫之重量$=8:1$

若一物質較多時，則所多者必不化合而殘留。

(3) Give Dalton's law of Multiple proportion and show how the follow analysis of the five oxides of

nitrogen illustrates the law. (南開)

	1	2	3	4	5
N.	63.65%	45.68%	36.85%	30.49%	25.94%
O.	36.35%	53.32%	63.10%	69.51%	74.05%

解： Since Dalton first formulated the law of multiple proportion, he showed that if the composition in such cases is stated not in percentages but in the weights of one element combined with a fixed weight of the other, then these weight are in the ratio of integer numbers, for example:

By the formula $\frac{0\div16}{(N\div14)\times2}=N$

We have obtainad ratio of integer numbers

N	2	2	2	2	2
O	1	2	3	4	5

that is $N_2O, N_2O_2, N_2O_3, N_2O_4, N_2O_5$

(4) 試述氣體反應定律！ (北農大)

解： 氣體互相反應時，其相反應之氣體之體積為簡單之整數比，又自反應而生氣體時，其體積亦與反應氣體之體積成簡單整數之比，此稱氣體反應定律(Law of gaseous reaction)。

例如　二體積之輕氣與一體積之養氣相化合，而生二體積之水蒸氣，若以化學式表之，則為

$$2H_2+O_2=2H_2O$$

$$2H_2:O_2:2H_2O=2:1:2$$

又二氧化碳亦然

$$C+O_2=CO_2 \qquad C:O_2:CO_2=1:1:1$$

（註）此律亦稱 Gay Lussac 氏定律。

(5)　試述氣體定律！　　　　（北工大）

解：　溫度一定時，一定質量之氣體體積之變化與壓力為反比，與絕對溫度(攝氏度數$+273^{\circ}$)為正比。此稱氣體之定律，亦稱 (Boyle's Charle's law)

今設　溫度 t 壓力 P 時之體積為 V

溫度 t′ 壓力 P′ 時之體積為 V′

則得次之關係

$$V'=V\times\frac{P}{P'}\times\frac{t'+273}{t+273}$$

又 $t=0$度　$P=76$糎時，稱標準狀態。

標準狀態時各氣體一克分子之體積為

$$\frac{\text{其氣體之1克分子量}}{\text{其氣體1竔之重量}}=22.4\text{竔}$$

(6)　設壓力776粍，溫度20度時，500c.c.之氣體，

在標準狀態時幾何？

解： $500\text{c.c.}\times\frac{776}{760}\times\frac{273}{273+20}=475.7\text{c.}$ ……答

(7) 試述亞佛加德羅氏之假說！

解： 在同溫度與同壓力時，等容積之種種氣體，其中含有同數之分子，換言之，卽各氣體分子之濃度相等，是稱 Avogadro's law.

(8) 試述 Heury's law！

解： 氣體之溶解於水之質量與其壓力爲正比

例如 1 立之水在 1 氣壓時溶解二氧化碳(CO_2)2克在 2 氣壓時，則溶解 4 克。

(9) 述 Dulong and Petit 之定律！ (北工大)

解： 凡元素之原子量與其比熱相乘積恆約爲 6.4 之常數，稱之曰元素之原子熱 (Atomic Heat)。

$$原子量=\frac{6.4}{比熱}$$

(10) 試述物質不滅之定律！ (農大)

解： 宇宙間物質雖可以用種種方法(物理的，化學的)變其形狀，然不能消滅亦不能增加，不過由此種物質，變爲他種物質而已，是稱物質不滅之定律(Indestruclibility of matter)。

例如鐵之生銹，乃因鐵與空氣中之一物，卽氧氣相化合而成，最初只有鐵之重量，而銹則係鐵與養氣合丼之重量，故較鐵爲重，然銹之所增重量，卽空氣中所失之重量，故並非生亦非滅也。

(11) 試述能力不滅定律(卽能之常住原理)！

解： 凡物質放出能力時，其能力不能消滅亦不能增加，不過由此種能力變爲他種能力而已，是稱能力不滅之定律。

(12) What is Periodic Law? who first formulated the Complete pericdic table and waht use can we make it? (南開)

解： 元素之性質與其原子價有關，於每隔若干元素之後，又來與其性質相似之若干元素，此元素每若干稱曰一期率 (Period)不僅一週而一復，且於一期之中更顯一定順序之遞變，卽元素之性質由其原子價之增加而爲週期的變遷。

1896年由俄之化學家 Mendeleeff 氏定一律稱週期律(Period law)，將元素之各期排成一表，稱曰元素之週期表，此表之用途頗廣，玆條述之於次：

a. 凡同類中之元素，其性質均相差不遠，而同

族者則尤為相似，故每族中考其一二元素，卽可推知其餘同族元素之性質之大概。

b. 凡同類中之元素，同族者尤甚，其物理性質均頗相似，其他性質亦頗相似，且有一定順序之遞變，故知其一元素之性質，卽能推知其他元素之性質。

c. 元素之分金屬，非金屬，週期表亦能顯示之。凡有最強金屬性質之元素，均在第一類，有最弱性質之非金屬，均在第七類，在此第一類及第七類極中點之各類，顯有逐漸之遞變。

d. 週期表，又可預知未發明元素之性質及其原子量之約數。

e. 其他如令化學變為易研究而有系統之科學，預知新元素及校正已定之原子量等。

(F) 酸 鹽基 鹽

(1) 酸性氧化物，鹽基性氧化物之差異如何？試舉例並記其名稱及分子式！

解：如二氧化硫SO_2，二氧化碳CO_2與水化合而生酸。又與鹽基中和而生鹽，此等氧化物，稱酸性氧化

物，非金屬元素之氧化物多屬之。

$SO_2+H_2O=H_2SO_3$

$SO_3+H_2O=H_2SO_4$

$CO_2+2KOH=K_2CO_3+H_2O$

又如氧化鈣CaO，氧化鋅ZnO,一氧化銅CuO與水化合而生鹽基，與酸中和而生鹽，此等氧化物，稱鹽基性氧化物，金屬之氧化物多屬之。

$CaO+H_2O=Ca(OH)_2$

$ZnO+2HCl=ZnCl_2+H_2O$

$CuO+H_2SO_4=CuSO_4+H_2O$

(2) 何謂酸及鹽基？又其互相作用之方程式試示之！

解：溶解於水而生氫離子者，稱曰酸。

又呈酸味及酸性反應，含有可以金屬或陽根化代之氫原子者，稱曰酸。電離度大之酸，稱強酸。(如HCl,HNO_3,H_2SO_4)。反之，小者稱弱酸。(如CH_3CO_2H,H_3PO_4)

物質之含有氫氧根，而易與酸中之氫化合而得水及鹽類者，稱鹽基。

相互反應之方程式：

$HCl+NaOH=NaCl+H_2O$

$$HNO_3 + KOH = KNO_3 + H_2O$$

$$H_2SO_4 \times 2NH_4OH = (NH_4)_2SO_4 + 2H_2O$$

(3) 何謂一鹽基酸及二鹽基酸？試各舉一例以明之！

解： 一分子之酸中，只能有一個氫原子爲一分子中之鹽基化代者，稱一鹽基酸。如鹽酸（HCl），能有二原子之氫被化代者，稱二鹽基酸，如

硫酸（H_2SO_4）

(4) 化學上所謂鹽之意義及其種類如何？試說明之！

解： 酸中之氫爲金屬或根化代時所生之化合物，稱鹽。其種類有三： a.酸性鹽，如 $NaHSO_4$

b.中性鹽(正鹽)如Na_2SO_4， c.鹽基性鹽，如

Zn (OH) Cl

(註) 酸性鹽，中性鹽，鹽基性鹽等，乃形上之名稱，並非反應之名稱。

(6) 酸及鹽基之共通性質如何？又二者不同之點安在？

解： 酸之共通性質爲對於藍色石蕊液變紅，與鹽基相中和而生鹽，其水溶液有酸味。

鹽基爲能與酸中和而生鹽之物質，無論如何有氫氧根 OH。

又酸類之水溶液，各有共通之氫離子 (H)，故知

酸之特性係由氫離子之作用，鹽基類之水溶液，有共通之氫氧離子（OH'），故知酸基之特性，係由氫氧離子之作用，此為酸與鹽基不同之點。

(6) 酸及鹽基中必要之元素與原子團為何？

解：酸中必要之元素為H。

鹽基中必要之原子團為OH。

(7) 酸，鹽基，鹽三者之區別何在？　(師大)

解：a、酸類　均含氫根(H)，溶解於水內，則酸之分子電離，成二種離子，一種必係氫根而為陽離子。一種係酸根，而為陰離子。又溶液有酸味及能使藍色試紙變紅，又能溶解金屬成鹽類。

b、鹽基類　均含氫氧根(HO)，溶解於水內，則鹽基之分子電離成二種離子，一種係氫氧組成之陰離子，其餘之部分常為金屬之陽離子。又有滑性及澁味，能令紅試紙變藍。

c. 鹽類　由酸之氫根與鹽基類之金屬根化代(置換)而成，不能使試紙變色，無酸鹹味，不能溶解金屬。

(8) 硫酸及硝酸之識別法如何？

解： 若爲硝酸則投銅片於其中，不須加熱卽生棕色之氣體。

$3Cu+8HNO_3=3Cu(NO_3)_2+4H_2O+2NO$

$2NO+O_2=2NO_2$(棕色氣體)

若爲硫酸，則投銅片於其中，未加熱則不起變化，若加熱則發生 SO_2

$Cu+2H_2SO_4=CuSO_4+2H_2O+SO_2$

(9) 何謂發生機與無水酸？

解： 分子正進行破壞或改造時，轉瞬間其原子或根必游離，而此時其化合力甚爲激烈，稱在此狀態之元素曰發生機元素。

氧化物能與水化合而成酸，或能由酸中同時與水分出者，稱該酸之無水酸。

(10) 何謂接觸作用？ (北師大，女師大)

解： 數種物質混合而起變化，其作用有時太速，有時太緩，須用一種他物質以增或減其速度，令其適中，然所加之物質，其本身並不參與化學變化，此種作用，稱爲接觸作用 (Catalysiss) 。換言之卽反應前後，有一物質其性質分量，毫無變化，而影響作用及於他物質變化之速度者，稱該物質

之接觸作用。如用氯酸鉀製養氣時，所加之二氧化錳之作用是。

(G) 溶 液

(1) 試說明溶解，溶質，溶媒，溶液之意義！

解： A物質與B液體相混和而成爲全部一樣之性質之液體之現象，稱曰溶解。此時被溶解之A物質，稱曰溶質。令A物質溶解之B液體，稱曰溶媒。所得之液稱曰溶液。

例如砂糖（溶質）溶解於水（溶媒）所生之砂糖水（溶液）。

(2) 何謂飽和溶液，溶解度，溶解度曲線？

解： 在一定溫度及壓力之下，一定量之溶媒能溶解之溶質之量有限，正達其限量之溶液，稱飽和溶液。

壓力一定時，在某溫度某飽和溶液之溶媒100克中所溶存之溶質之量，稱爲於其溫度對於其溶媒其溶質之溶解度。

壓力一定時，對於其溫度變化溶解度之變化所表示之曲線，稱曰液解度曲線。

(3) 試說明次之術語！

a. 濃度， b. 稀釋度， c. 規定液，

d. 莫爾(Mol)， e. 愛力。

解： a. 溶質之量與溶媒之量之比，稱濃度。

b. 1 莫爾之溶質所溶存之溶液之體積，稱稀釋度。卽莫爾所表之濃度之濃度之反數。

例如 硫酸 5 莫爾溶液之稀釋度爲$\frac{1}{5}$。

c. 溶液一立升中，含有一克當量之溶質者，稱一規定液。

d. 溶液 1 立升中之溶質，以莫爾所表之濃度稱莫爾 (Mol)。

e. 數種物質相遇時，有起變化者，有不起變化者，是其中必有特別吸引之力，此種特別吸引力，稱曰愛力 (Chemical offinity)——化合力。

(4) 硫酸之水溶液 1 立升中，溶有硫酸 14 克，其溶液之濃度如何(濃之單位曰莫爾)？

解： 硫酸之水溶液，1 立升中溶有硫酸 1 克分子量，卽 98 克時，其濃度爲 1 莫爾

$$\text{故所求之濃度爲} 1\times\frac{14}{98}=0.144\text{莫爾} \cdots\cdots \text{答}$$

(5) 25% 鹽酸溶液之濃度爲何？又濃度 1.5 之鹽酸百

分之幾？

解：今查 25% 鹽酸溶液之比重約爲 1.126，故該溶液 1 立升之重量當爲1126克，故其中所含HCl之量爲

$$1126\times\frac{25}{100}\text{克}$$

故濃度$=1126\times\frac{25}{100}\div36.5=7.71$莫爾……答

又濃度 1.5 之鹽酸溶液，卽每 1 立升中含 HCl $36.5\times1.5=54.75$ 克之溶液，今查其比重爲 1.026 故該溶液每 1 立升之重量爲1026克，卽鹽酸溶液 1026 克中含 HCl 54.75 克

$$\therefore\quad 100\times\frac{54.75}{1026}=5.34\%\text{ ……答}$$

(6) 以濃度 1 莫爾之苛性鈉溶液，與10克濃鹽酸中和時，需苛性鈉液 97c.c.試求濃鹽酸中所含氯化氫之百分率！

解：

$$\underset{40\text{克}}{NaOH}+\underset{36.5\text{克}}{HCl}=NaCl+H_2O$$

濃度 1 莫爾之苛性鈉液 97c.c.中含有 NaOH之量爲 $40\times\frac{97}{1000}$克

量之 NaOH 中和之，需要 HCl 之量爲

$$40\times\frac{97}{1000}\times\frac{36.5}{40}=3.54\text{克}$$

此量之 HCl 爲 10 克鹽酸中所含者，故 100 之鹽酸中，含有 HCl 之量爲

$3.54\times\frac{100}{10}=35.4$克……………………答 35.4%

(7) 27.32%之稀硫酸(比重=1.2)問爲幾規定液？

解： 此稀硫酸 1 立升之重量爲 1200 克，而此中含有

H_2SO_4 $1200\times\frac{27.32}{100}=327.84$克。

硫酸 1 規定液之 1 立升中，含有 H_2SO_4 49克。

故此稀硫酸之濃度爲 $\frac{327.84}{49}=6.69$規定液…答

II. 非 金 屬

(A) 氫與造鹽素

(1) 試述氫之製法，性質及用途！ (武大)

解： 製法： 普通之製法，爲加稀硫酸於鋅中卽得。

其反應如次：

$$Zn+H_2SO_4\longrightarrow ZnSO_4+H_2$$

性質及用途： 係無色無臭無味之氣體，較空氣

輕，爲氣體中之最輕者，(每5升重0.08984克)，故可利用以作輕氣球，能自燃燒，但不能助燃，較氧更難溶解於水，輕養混合於適當之管而燃燒時，可達2500度之高溫，故利用於熔融白金，水晶及燒切鉄版等，又用作金屬養化物之還原如

$$Fe_3O_4+4H_2=3Fe+4H_2O$$

又可爲製 Ammonia 之原料（德國於大戰期內用之)。近代更有以三液化碳，而爲製造汽油之用。

(2)　製造氫11.5立升,所要之鋅與純硫酸之量各幾何?

解：　$Zn+H_2SO_4=H_2+ZnSO_4$

65克　98克　22.4立升

$$\therefore\ 鋅=65\times\frac{11.5}{22.4}=33.4克$$ ……………………答

$$硫酸=98\times\frac{11.5}{22.4}=50.3克$$ ……………………答

(3)　試述溴之製法，性質及用途！

解：　製法：　溴化鈉(實驗室中則爲溴化鉀)加二養化錳及硫酸，加熱之溴素卽溜出。

$$2NaBr+MnO_2+2H_2SO_4$$

$$=Br_2+Na_2SO_4+MnSO_4+2H_2O$$

性質及用途： 係赤褐色之液體，比重爲3，與氫化合而爲溴化氫(HBr)與金屬亦易化合，製成溴水及溴化鉀(KBr)等，供醫藥之用。

(4) 試述碘之製法，性質及其原料！

解： 製法： 碘化鈉加硫酸及二養化錳熱之，所發生溴之蒸氣令其昇華卽得

$$2NaI + MnO_2 + 2H_2SO4$$

$$= I_2 + Na_2SO_4 + MnSO_4 + 2H_2O$$

性質： 係黑紫色之版狀結晶體，比重爲5，由表面所發之蒸氣有刺戟臭，熱之則氣化而成紫色之蒸氣，冷却卽結晶，難溶於水。

其原料卽海草灰(NaI)　碘化鉀(KI)　硝石礦($NaIO_3$)等是。

(5) 氟化氫之製法及其應用如何？

解： 製法： 用鉛製之皿，加濃硫酸於螢石 (CaF_2)中而熱之卽得

$$CaF_2 + H_2SO_4 \longrightarrow CaSO_4 + H_2F_2$$

應用： 因其有溶解玻璃之性

$$(SiO_2 + 4HF = SiF_4 + 2H_2O)$$

故用以畫玻璃上之花紋及刻玻璃管上之尺度等。

(6) 述氯之製法性質及用途！ (北大)(廣大)

解： 製法： 食鹽中加二氧化錳與硫酸而加熱與空氣由下方置換而捕集之

$2NaCl + MnO_2 + 2H_2SO_4$

$= Cl_2 + MnSO_4 + Na_2SO_4 + 2H_2O$

性質及用途： 黃綠色之氣體，對空氣之比重為2.5,有刺鼻氣味，與氫之化合性甚強，在常溫時亦能化合，若於太陽光或其他強光中化合時，則發爆聲 ($H_2 + Cl_2 = 2HCl$) 有大毒，故戰爭時，利用之製氯氣砲以殺敵。又於色素之存在中將水分解之，與其氫化合，於其所發生之發生機氧，令色素退色。

($H_2O + Cl_2 = 2HCl + O$) 故每以之吸於消石灰中而作漂白粉($CaOCl_2$)以漂白棉類等。

(7) 氯氣何以漂白顏色？又乾燥之氯氣有漂白之能力否？

解： 當未漂白之先，須將顏色物以水浸濕之，而後置於氯氣中，則氯與水中之養化合，而放出發生機之氧，與有顏色之物氧化，遂成白色物質，氯之能漂白，卽賴此作用，故乾燥之氯，不能漂白。

(8)　試述鹽酸 (Hydrochl ric acid) 之製法性質及用途！

解：　製法：　食鹽中加硫酸而熱之

$$NaCl + H_2SO_4 = NaSO_4 + HCl$$

性質及用途：　鹽酸卽氯化氫之水溶液。鹽化氫爲無色之氣體，對空氣之比重爲 1.2,1 體積之水可溶解氯化氫 450 體積，其溶液卽鹽酸爲無色之液體，有酸之各種性質爲強酸之一。

（注意）製鹽酸何以用硫酸而不用硝酸，其故因硝酸比硫酸易揮發，若用硝酸則加熱時，除發生氯化鹽外，同時更生硝酸蒸氣，故不能得純粹之氯化氫，硫酸爲不揮發性，故無此弊。

(9)　何謂王水 (Aquaregia)？其作用如何？　（農大）

解：　王水係由三體積之濃鹽酸與一體積之濃硝酸相合而成。

$$3HCl + HNO_3 \longrightarrow 3H_2O + NOCl + Cl_2$$

此放出之氧，當其在發生機時，化合性甚強，雖黃金及白金亦能溶化，故王水之所以猛烈者，以其放出發生機之氧故也。

(10)　溴化鉀與碘化鉀之識別法如何？

解：　將二者各加濃硫酸與二氧化錳而熱之，則前者生赤褐色之氣體(Br_2)，後者生紫色之氣體(L_2)，如是可得而別之。

(11)　氟與他造鹽素相異點，試條述之！

解：　a.　氟之化合力較氯，碘，溴甚強，加硫酸與二氧化錳於氟化金屬物中，氟仍不游離。

b.　氯氫酸(卽鹽酸)溴氫酸，碘氫酸，皆爲強酸，而氟氫酸爲弱酸。

c.　氯化銀($AgCl$)溴化銀($AgBr$)碘化銀(AgI)不溶於水，而氟化銀(AgF)則能溶於水。

d.　氯化鈣($CaCl_2$)溴化鈣($CaBr_2$)碘化鈣(CaI_2)可溶於水中，而氟化鈣(CaF_2)則不能。

(12)　欲得含有40%氯化氫之水溶液(卽鹽酸)234克，需食鹽若干克？

解：　氯化氫之量$=234\times\frac{40}{100}=93.6$克。

方程式 $$\underset{2\times58.5}{2NaCl}+H_2SO_4=\underset{2\times36.5}{2HCl}+Na_2SO_4$$

故食鹽之量爲　$93.6\times\frac{2\times58.5}{2\times36.5}=148$ 克……答

(13)　螢石(CaF_2)200克，可得氟化氫之重量與體積幾

何？

解： 由方程式 $CaF_2+H_2SO_4=CaSO_4+H_2F_2$

$40+19\times2$克　　　　40克(22.4升)

$$\text{氟化氫之重量}=40\times\frac{200}{40+19\times2}=102.56\text{克}$$…答

$$\text{同　　體積}=22.4\times\frac{200}{40+19\times2}=57.44\text{竏}$$…答

(B) 氧與硫黃

(1) 試述氧之製法，性質及用途！ (北師大)

解： 製法： 通常以氯酸鉀粉末中混入約四分之一量之二氧化錳粉末而加熱即得，此時二氧化錳乃爲促進氯酸鉀之分解作用，今示其變化如次：

$$2KClO_3\longrightarrow 2KCl+3O_2$$

性質及用途： 係無色無臭無味之氣體，稍溶於水，較空氣重(空氣每立升重1.293克)其重量爲每竏1.429克，爲分子量測定之標準氣體，在高溫時其化合極強，與造鹽素以外之物質極易化合(如 $2H_2+O_2=2H_2O$, $S+O_2=SO_2$, $C+O_2=CO_2$, $P_4+5O_2=2P_2O_5$等)其主要用途爲人類及動物生存必須之氣體，其與煤氣混合，

能發極高溫度之火焰，可用以切斷鋼片，因其能助燃燒，故用之於冶金術，又因其有殺菌之力，可用以醫病。又可治療呼吸困難之患者等。

(2)　臭氧 (Ozone)之存在組成，製法，性質及用途如何？　　　　(北師大)

解：　存在：　雷鳴，發電及氧化作用之時，常生之，存在空中。

組成：　O_3

製法：　由空氣中或養氣無聲放電(Electric dis-changes) 而製得之，又黃燐與空氣接觸時，亦生之。

性質：　有臭之淡青色之氣體，較氧易溶於水，比重爲氧之1.5倍，其液體呈藍色，氧化作用，漂白作用，殺菌作用均甚強，與氧無作用之金屬，恆與臭氧起作用　($2Ag+2O_3 \longrightarrow Ag_2O_2+2O_2$)

用途：　空氣之清潔，飲料之殺菌，纖維之漂白，以及澱粉之精製等用之。

(3)　試比較臭氧 (O_3) 與二氧化二氫(H_2O_2)之性質！

解：　臭氣之構造式爲

而二氧化二氫之構造式爲　H−O−O−H

製法：　以稀硫酸注於過氧化鋇中，則生白色之硫酸鋇沈澱，濾過沈澱後便得二氧化氫之溶液

$$BaO_2+H_2SO_4=BaSO_4+H_2O_2$$

此物不及水之安定，易放出氧，故爲強氧化劑，尤以漂白象牙，羽毛等爲宜。又可用以洗滌傷痕以消毒。

二者均含過量之氧，容易分解其一原子之氧與他物相化合，故H_2O_2爲氧化力最強之漂白劑。

（註）　二氧化氫之製法及性質。

(4)　試由臭氧之分子式求其對於養氣與空氣之比重！

解：　臭氧之分子式爲 $O_3=48$

故對於養氣之比重爲 $\frac{48}{32}=1.5$ ……………………答

因空氣比養氣重1.1倍

故空氣之比重爲 $1.5\times1.1=1.65$ ………………答

(5)　試述水之梗概！

解：　水天然存在於各種物體間（固，液，氣）爲吾人一日不可缺少之物。其製法普通係取天然水濾過或

蒸溜之以為飲料及其他之用，至化學的製法，則為以氫與氧化合卽得

$$2H_2+O_2=2H_2O$$

其性質為無色，無味，無臭之液體，又熱之則成水蒸氣，凍之則成冰，在 4°c 時其密度 1c.c 為1克，能溶解種種物質，與某金屬之氧化物化合而成鹽基，與非金屬之氧化物化合而成酸，其組成為

重量＝氫1＋氧8　　體積＝氫2＋氧1.

(6)　硫化氫之製法，性質及用途如何？

解法：　硫化鉄中加硫酸或鹽酸則生硫化氫，卽

$$FeS+H_2SO_4=FeSO_4+H_2S$$

$$FeS+2HCl=FeCl_2+H_2S$$

性質及用途：　係無色之氣體而有惡臭(腐蛋臭)，易溶於水，所成之溶液呈弱酸性，又氧化而成硫黃或二氧化硫

$$2H_2S+O_2=S+2H_2O$$

$$2H_2S+3O_2=2SO_2+2H_2O$$

又硫化氫與鹽類之水溶液相遇時，因金屬不同，而生種種之色及性質之硫化金屬沈澱，故供化學分析時，以鑑別金屬之用。例如

a. $Pb(NO_3)_2+H_2S=PbS$(黑)$+2HNO_3$

b. $2AgNO_3+H_2S=Ag_2S$(黑)$+2HNO_3$

c. $CuSO_4+H_2S=CuS$(黑)$+H_2SO_4$

d. $2SbCl_3+H_2S=Sb_2S_3$(橙)$+6HCl$

e. $2AsCl_3+H_2S=As_2S_3$(黃)$+6HCl$

f. $ZnSO_4+H_2S=ZnS$(白)$+H_2SO_4$

(7) 試述二氧化硫之製法：及性質！

解： 製法： a. 燃硫黃於氧或空氣中

$S+O_2=SO_2$

b. 加濃硫酸於銅中而熱之

$Cu+2H_2SO_4=CuSO_4+SO_2+2H_2O$

性質： 係無色氣體，有異臭及刺戟窒息性，於生物有害，故用作殺蟲與消毒劑，比空氣約重2.2倍，冷之即液化，易溶於水，而成亞硫酸($SO_2+H_2O \rightleftharpoons H_2SO_3$ 以此熱之則分解)，叉有漂白作用，故用於麥稈等之漂白。

(8) 亞硫酸之特性若何？

解： a. 酸 性： 有酸之各種特性。

b. 還原性： 其溶液爲一極良之還原劑，如

$H_2SO_3+O=H_2SO_4$

$$H_2SO_3+H_2O_2=H_2SO_4+H_2O$$

c. 漂白性： 能令多種有色物變爲無色。

d. 防腐性： 可用以防止醱酵而爲保護劑。

(9) SO_2 與 Cl_2 均有漂白之作用，其原理如何？

解： Cl_2之漂白作用，係Cl_2容易與氫化合，故奪色素中之氫與之化合，而使色質變爲無色，或與物體所含水中之氫化合，而放出發生機之氧，此氧與色質起氧化而漂白。SO_2 則係將物體中所含之氧奪去，令物體還原而退色，或直接與色質化合，而生無色之化合物。故 Cl_2 能漂白之物 SO_2 一定能漂白，反之，SO_2 能漂白之物 Cl_2 不一定能漂白，可知其漂白之原理適相反。

(10) 三氧化硫之製法及性質如何？

解： 製法： SO_2 與氧同經過燃燒之白金海綿上，即生三氧化硫之蒸氣，遇冷凝結而成液體。

$$2SO_2+O_2=2SO_3$$

性質： 無色之液體，與空氣相遇則放煙霧，於低溫時，則成白色針狀之結晶，如與水化合則放嘶聲及大熱而生硫酸

$$SO_3+H_2O=H_2SO_4$$

(11)　試述硫酸之製法，性質及用途！

解：　製法：　a. 接觸法——以白金為觸媒，將二氧化硫酸化合之，使成三氧化硫，再加適當(濃度96%－98%之間）之水。

$$2SO_2+O_2=2SO_3$$

$$SO_3+H_2O=H_2SO_4$$

b. 鉛室法：　以二氧化氮為觸媒，將二氧化硫，空氣，水蒸氣等導入廣大之鉛室中，於是化合而成硫酸（此法在工業上欲得多量之硫酸時用之)。

$$2SO_2+O_2+2H_2O=2H_2SO_4$$

性質及用途：無色油狀之液體，比水約重2倍，有酸之各種特性，為強酸之一，易與金屬化合，如濃硫酸，與銅，銾等作用則成銅鹽，銾鹽，而發生二氧化硫

$$Cu+2H_2SO_4=CuSO_4+SO_2+2H_2O$$

$$Hg+2H_2SO_4=HgSO_4+SO_2+2H_2O$$

稀硫酸與鋅，鐵，鎂等反應，則生鋅鹽，鐵鹽，鎂鹽與氫。

$$Zn+H_2SO_4=ZnSO_4+H_2$$

$$Fe + H_2SO_4 = FeSO_4 + H_2$$

$$Mg + H_2SO_4 = MgSO_4 + H_2$$

又吸水性最大，爲一種有効之脫水劑，且能吸收物質內之氫及氧，令該物質分解而與所成之水混合，其沸點較各種酸高且不易揮發；因此常用之製他種酸，如製鹽酸，硝酸，硼酸，磷酸，醋酸等，故爲工業上最重要原料之一。

(12) 硫之化學的性質及用途如何？試詳說之！

解： a. 在空氣中或養氣中燃燒時，發青色焰，生刺戟性之臭氣，此臭氣卽二氧化硫。

$$S + O_2 = SO_2$$

b. 在高溫中，與許多金屬相化合而成硫化物。

$$Cu + S = CuS \qquad 2Ag + S = Ag_2S$$

c. 加硝酸於硫中熱之，有如次之作用而變硫酸

$$S + 2HNO_3 = H_2SO_4 + 2NO$$

d. 硫蒸氣中通以輕氣時，卽成硫化氫

$$S + H_2 = H_2S$$

e. 硫磺之用途甚廣，如製火藥，火柴，硫磺橡皮，硫酸等均用之，又其種類可分爲斜方硫，長針硫，白硫，橡皮硫四種。

(13)　試舉氧與硫相似之點！

解：　a。均爲二價元素。

b。與輕氣，金屬及碳等容易化合，且其化合物之組成方程式均同爲H_2O與H_2S，CuO與CuS，Na_2O與Na_2S，Fe_2O_3與Fe_2S_3，CO_2與CS_2等。

(14)　硫與碳之性質試比較之！

解：　a。此兩元素各有數種之異性體。

b。常溫時二者皆爲固體，硫於445°C時氣化，而碳須於3000°C以上始能氣化。

c。此兩元素都不溶於水中，但硫能溶二硫化碳，而碳只有幾分能溶解於融熔之鐵中。

d。二者於高溫中，易燃燒，其氧化生成物之水溶液，無論如何，必呈酸性反應。

(15)　試比較氧與氯對於氫之反應之差異！

解：　氧與氫須在高溫中始能化合，而氯則反是，但徐徐化合於低溫中，若在日光中則起猛烈之化合。

(C) 氮素族

(1)　試述氮之製法性質及用途！

解：　製法：　將亞硝酸錏加熱卽得

$$NH_4NO_2 = 2H_2O + N_2$$

性質及用途：　爲無色無臭無味之氣體，化合力鈍，不助燃亦不能自燃，空氣中含此氣體甚多，約占全體積5分之4，於電火之高溫始能與氧及氫化合，又在高溫中，被碳化鈣吸收而成石灰氮($CaCN_2$)，而用以作肥料，又由電火而成硝酸及硝酸鹽，以供火藥或肥料之用。

(2)　試述硇精(Ammonia)之製法，性質及用途！

解：　製法：　混生石灰（CaO卽養化鈣）於氯化錏(NH_4Cl)中而熱之，由上方置換法捕集

$$2NH_4Cl + CaO = 2NH_3 + CaCl_2 + H_2O$$

性質及用途：　無色刺戟臭之氣體，比空氣輕，冷之卽液化，極易溶解於水，約1體積之水吸收800體積之硇精，此水呈鹼性反應（卽紅變藍），與水化合而成氫氧化硇精，熱之復分解而成硇精

$$NH_3 + H_2O \rightleftarrows NH_4OH$$

又與氯化氫化合，則生氯化硇精之白烟

$$NH_3 + HCl \rightleftarrows NH_4Cl$$

其成液狀之硇精，可供製冰及藥用。

又硇精燃燒之則生水與氮

$$4NH_3+3O_2=2N_2+6H_2O$$

(3)　試舉氮之氧化物，且略述其性質！

解：　a.　一氧化二氮(N_2O)亦稱笑氣，爲無色之氣體，有毒，並有助燃性及麻醉性。

b.　一氧化氮(NO)爲無色之氣體，與空氣相接觸而成二氧化氮。

c.　二氧化氮(NO_2)爲褐色之氣體，有刺戟性，易於液化，又行熱解離，又溶解於水，則生硝酸

$$3NO_2+H_2O=2HNO_3+NO$$

(4)　硝酸 (Nitric acid) 之製法性質及用途如何？

(廣大)

解：　製法：　用硝酸鈉(智利硝石)或硝酸鉀與硫酸於曲頸甑中，共熱而蒸溜之，卽得

$$NaNO_3+H_2SO_4=NaHSO_4+HNO_3$$

$$KNO_3+H_2SO_4=KHSO_4+HNO_3$$

已將充滿空氣之器內，放電時，則淡氣與養氣化合，而生二氧化氮，導此氣於水中，卽得硝酸

$$N_2+2O_2=2NO_2$$

$$3NO_2+H_2O=2HNO_3+NO$$

性質及用途： 爲無色之液體，有揮發性，如溶有氮之氧化物，則呈黃色(能變蛋白質爲黃色)，在濕空氣中則放出烟霧，有猛烈之臭味，電離之則生氫離子，有酸之各種性質，爲強酸之一，因其有酸化作用之結果，能與多數之金屬相化合而成鹽及水。

$$3Ag+4HNO_3=3AgNO_3+NO+2H_2O$$

$$3Hg+8HNO_3=3Hg(NO_3)_2+2NO+4H_2O$$

$$3Cu+8HNO_3=3Cu(NO_3)_2+2NO+4H_2O$$

又與鹽酸混合所成之王水

$$3HCl+HNO_3=2Cl+NOCl+2H_2O$$

此發生機氯能變金，白金，等爲鹽化物而溶解之，故每用以溶解金，白金，銀等，又用於 Nitroglycerin, Nitrocellulose (硝化綿) 及Picric acid 等之爆發劑之製造，又製成 Aniline 而爲種種之染料。又硝酸爲氧化劑，而使用時，因其呈氧化作用，得於次之分解，而生二氧化氮之赤褐色之氣體

$$4HNO_3=2H_2O+4NO_2+O_2$$

(5) 試論氮與磷之循環！

解：　空氣中之氮變爲$Ca(NO_3)_2$，$CaCN_2$，$(NH_4)_2+SO_4$等肥料，又$NaNO_3$，$(NH_2)_2CO$（尿）糞及魚類等化合物之肥料，在地中爲植物所吸收，此氮變爲蛋白質，貯於種子等部分中，此等物質（蛋白質）爲動物所食，其氮即構成血液腦，筋肉等，由此等部分分解而排出動物體之外（尿），又爲植物界所吸收。磷酸石灰（$Ca_3(PO_4)_2$），骨灰等磷化合物，在地中爲植物所吸收，而成種子及葉綠素等，此等物質爲動物所食而成腦及骨，動物死後，再入地中，又爲植物所吸收。

(6)　黃磷（yellow Phosphours）與赤磷二者性質之差異若何？　　（農　大）

解：　a. 黃磷爲黃白色蠟狀之固體，赤磷爲赤色之粉末。

b. 黃磷比重爲1.8，赤磷比重爲2.1。

c. 黃磷44^0時融解，290^0時氣化，赤磷不融解

d. 黃磷不溶於水而溶於二硫化碳，赤磷則水與二硫化碳，均不能溶解。

e. 黃磷在空氣中易氧化，少熱（60^0）即發火而成無水磷酸

$P_4+5O_2=2P_2O_5$

赤磷在空氣中徐徐氧化，非強熱之不能發火，但其燃燒物與黃磷同。

f. 黃磷因上之結果，在暗室中放黃綠色之微光，赤磷不發光。

g. 黃磷在30°即發火，有毒，赤磷在260°發火無毒。

(7) 磷酸之製法性質及種類如何？ （北師大）

解：製法： 以五氧化磷溶解於沸水中即得。

$P_2O_5+3H_2O=2H_3PO_4$

性質及種類： 爲無粘性之液體，有強酸性，供醫藥之用，其種類之主要者有三：即

a. 正磷酸 H_3PO_4 (Orthophosphoric acid)

b. 間磷酸 HPO_3 (Metaphosphoric acid) 亦稱異性磷酸，其製法係正磷酸加熱至400°則成

H_3PO_4(加熱)$=HPO_3+H_2O$

c. 焦性磷酸 $H_4P_2O_7$ (Pyrophosphoric acid)

$2H_3PO_4-H_2O\longrightarrow H_4P_2O_7$

(8) 試述砷之製法性質及用途：

解：製法： 將純硫砷鐵鑛(FeAsS)置於無空氣之器

中而熱之，令其昇華卽得

$$4FeAsS = As_4\,4FeS$$

性質及用途：爲灰白色之固體，有毒，加熱則成 As_4O_6（砷酐）

$$As_4 + 3O_2 = As_4O_6$$

與鉛混合以作子彈之用。

(9)　試就雄黃（As_2S_3），雞冠石（As_2S_2）及毒砂（FeAsS）三者中，求砷之百分比。

解：

$$\left.\begin{array}{l} \text{a. 雄黃}(As_2S_3=246)：\dfrac{150}{246}\times100=60.97\% \\[2ex] \text{b. 雞冠石}(As_2S_2=214)：\dfrac{150}{214}\times100=70.09\% \\[2ex] \text{c. 毒砂}(FeAsS=163)：\dfrac{75}{163}\times100=46.01\% \end{array}\right\}\text{答}$$

(10)　砷之檢出法如何？

解：輕氣發生器中，加入混有砷之鹽酸溶液，將發出之氣體點火，以其焰觸於冷磁器上，若其氣體爲混有砷者，則磁器之面見有黑色之斑點，此附着物，容易溶解於漂白粉溶液中，此爲一般砷化物之鑑識法，特稱曰馬修氏之檢出法，用於裁判化學。又通硫化氫於砷之化合物之溶液中，則生黃色三硫化二砷之沈澱，亦可得而知之。

$$2AsCl_3 + 3H_2S = As_2S_3 6HCl$$

(11)　過磷酸石灰之製法及用途如何？

解：　製法：　加適量硫酸於磷灰石（磷酸鈣）中而攪拌之卽得

$$Ca_3(PO_4)_2 2H_2SO_4 = \underset{\text{過磷酸石灰}}{\underline{Ca(H_2PO_4)_2 + 2CaSO_4}}$$

卽磷酸四氫鈣與硫酸鈣之混合物，稱過磷酸石灰，此物可用作肥料，因磷酸鈣難溶於水，故如是可變爲可溶性之磷酸四氫鈣，而易爲植物所吸收。

(12)　銻之製法，性質及用途若何？

解：　製法：　以硫化銻（卽輝安鑛）與鐵共溶融卽得

$$Sb_2S_3 + 3Fe = 2Sb + 3FeS$$

性質及用途：　銻爲蒼白色有金屬光澤之結晶固體，質脆易熔，強熱之則燃，熔解於鹽酸時則徐徐發生氫，混以鉛及錫等用製活字。

(13)　砷及銻之化合物之識別法如何？

解：　此等之化合物溶液中，通以硫化氫，則砷之化合物沈澱，出黃色之三硫化二砷，銻之化合物則沈澱出橙色之三硫化二銻。或燃燒砷銻之氫化物而成砷鏡，銻鏡，則前者能溶於漂白粉之液中。

(14)　試述氮，磷，砷，銻及其化合物之異同！

解：　a、　依元素之原子量而排列之則爲

N　p　As　Sb

卽原子量最小之氮爲氣體，而原子量增加，則金屬性漸著。

b.　此等元素之比重(取液體氮)，依原子量增加而變大。

c.　此等元素之氯化物，其式類似，除氮外，有直接由元素與綠氣相化合而成者，如

NCl_3　pCl_3　$AsCl_3$　$SbCl_3$

d.　此等元素之氫化物，其分子式亦類似，且均爲無色而有惡臭之氣體，如

NH_3　PH_3　AsH_3　SbH_3

其中硇精（NH_3）易溶於水，呈極強之鹼性，而磷化之氫以下三者，無鹼性反應，亦不溶於水。

e.　此等元素其成酸之組成亦相似，如

HNO_3　H_3PO_4　H_3AsO_4　H_3SbO_4

硝酸爲強酸，磷酸則爲弱酸。

f.　此四者之氧化物，其式亦相似，如

N_2O_3　P_2O_3　As_4O_6　Sb_4O_6

氮之氧化物溶解於水而成強酸，而磷呈弱酸性，

砷以下二者則呈鹼性。

(D) 碳素族

(1)　一氧化碳之製法性質及用途如何？

解：　製法：　草酸與濃硫酸共熱之，發生之氣體，令通過苛性鉀溶液中即得

$$C_2O_4H_2 = H_2O + CO + CO_2$$

(或以蟻酸HCOOH代草酸，則無須通過苛性鉀溶液)

性質及用途：　爲無色無臭有毒之氣體，較空氣稍輕，難溶於水，在高溫時易氧化，點火則舉青色之焰，而燃燒成二養化碳。

$$2CO + O_2 = 2CO_2$$

能令金屬氧化物還原 $CuO + CO = Cu + CO_2$ 用作燃料及還原劑。

對於石灰水不生變化。

(2)　木炭燃燒之時，發生一氧化碳何故？

解：　木炭燃燒之時，發生二氧化碳，而二氧化碳與赤熱之炭相接觸，還原而成一氧化碳，即

$$CO_2 + C = 2CO$$

(3) 試述二氧化碳之製法，性質及用途！

解： 製法： 加鹽酸(或硫酸)於大理石 ($CaCO_3$石灰石)中，以下方置換法收集之。

$$Ca_2CO_3+2HCl=CaCl_2+H_2O+CO_2$$

又炭酸鹽中加適當之酸亦發生CO_2

$$Na_2CO_3+2HCl=2NaCl+H_2O+CO_2$$

$$2NaHCO_3+H_2SO_4=Na_2SO_4+2H_2O+2CO_2$$

性質及用途： 無色無臭稍帶酸味之氣體，對空氣之比重爲1.5，無毒，能滅火，與多數氧化物直接化合，能溶解於石灰水中，生白色之炭酸鈣沈澱。

$$Ca(OH)_2+CO_2=CaCO_3+H_2O$$

亦能溶解於等體積之水中，其一部與水化合而生碳酸。

$$H_2O+CO_2\rightleftharpoons H_2CO_3$$

若加高壓力至三，四氣壓，令其多量溶解於水所成之水溶液，卽成清凉飲料，卽普通熱天所飲之蘇達水 (Sadawater) 亦稱荷蘭水，其他又用於消火器。

鑑識法： 置燭火於此氣中，燭火立熄，或吹此

氣於透明無色之石灰水中，則石灰水立變乳狀，又不吹此氣僅將澄清之石灰水露於空氣中，經數小時之後，亦得上之反應，由此可知空氣中含有CO_2。　$Ca(OH)_2+CO_2=CaCO_3+H_2O$

(4)　淡氣，二氧化碳，一氧化碳三者，對於生理之關係如何？

解：　淡氣與二氧化碳可窒死動物，因其中缺乏養氣之故，然無毒性，一氧化碳與血液中之血色素(Hamoglobin)相化合，排去氧而生碳氧血素，失去血液之特性，動物卽中毒而死。

(5)　氫40克，一氧化碳40克，二氧化碳20克，三者混合之氣體200克，令其完全燃燒之，需養氣若干克？

解：　混合氣200克中，當有氫80克，一氧化碳80克，又二氧化碳40克，然氫1克與氧化合成水時，當需氧8克，故80克氫當需氧640克，又一氧化碳28克需16克之氧，始能完全化合爲44克之二氧化碳，故80克之一氧化碳完全燃燒時，需養氣

$$\frac{16}{28}\times 80=46\text{克}$$

而二氧化碳不助燃亦不自燃，故不需養氣卽混合氣中仍40克，二氧化碳存留，故所需之養氣共爲

$$640^{克}+46^{克}=686克$$ ……………………答

(6)　試述二硫化碳之製法，性質及效用！

解：製法：　赤熱木炭中，通以硫之蒸氣或炭與硫相混，置電氣爐中，强熱之，卽得

$$C+S_2=CS_2$$

性質及効用：　無色，惡臭（因有不純物）之液體，易揮發，點火時發青色焰而燃燒生亞硫酐及炭酸氣。

$$CS_2+3O_2=CO_2+2SO_2$$

能溶解碘，磷，硫，橡皮，油及肪脂等物，故用作溶劑，其蒸氣有毒，若置於谷倉內，可殺害虫，故又用作殺虫劑。其屈折分散光線之性質亦強，又可作光之器械。

(7)　試說明火焰之構造及放光之條件！

解：火焰之組成，視其所燃燒之氣體而異。其最普通者，共分焰心，內焰，外焰，三部。焰心爲未燃氣體，因氧之供給不完全，故不起燃燒，溫度低而無色透明。內焰之氣體因被外焰所阻，不克與氧化合，故溫度不甚高。但此處因將燃料分解而生碳之微粒子，因灼熱而發極強之光輝，若將含

有氧之化合物，投入其中則氧被奪而物質還原，故又稱還原焰。外焰光輝弱，然其氣體直接與氧化合，其溫度極高。若以物置此火焰中，極易起氧化作用，故又稱氧化焰。

放光必需之條件約有三：

a. 需固體分子之存在，如電燈泡中之碳絲。

b. 壓力之大小，壓力增大則同一體積氣體中之物質較多，故化學作用較氣體稀薄時尤爲有力，因此燃燒之熱及光增加。

c. 溫度之高低，火焰之溫度愈高則放光愈大。

(8) 碳之循環如何？

解： 碳爲植物體之主要成分，如纖維素，澱粉等。植物由空氣中所存之碳氣之分解，而起同化作用以攝取之。次植物爲動物所食或被燃燒，但二者均爲氧化，而爲 CO_2，由是再返於空氣中。

(9) 試述碳與硅性質之異同！

解： a. 二者均爲難溶，難氣化之固體。

b. 二者各有數種同素體，如碳有金鋼石，石墨及無定形碳素等。硅有水晶，石英，瑪腦，砂石等。

c. 均爲四價元素。

d. 組成相似之氧化物爲 SiO_2，CO_2，但前者爲固體，後者則爲氣體。

e. 硅之化合物甚安定，難溶解。而碳之化合物則不然。

(10) 試述水玻璃之製法性質及用途：

解：製法： 以石英（SiO_2二氧化硅）與炭酸鈉共熔融加水煮沸之

$$SiO_2+NaCO_3=Na_2SiO_3+CO_2$$

性質及用途： 爲無色粘稠之液體，水溶液加水分解而呈鹼性（NaOH），加酸則析出白色之硅酸（H_2SiO_3），塗於器具表面，乾後生透明之薄膜，可防火，故塗於布上而用爲防火布，又和砂相混可製人造石。

(11) 試述玻璃之製法，種類及着色法！

解：製法： 硅酸鈉，硅酸鈣加二氧化硅灼熱至極高溫度，則混合物漸熔成透明之物體（此時入種種之模型而吹之，或置於版上而展之，則成種種之玻璃用品），冷則變爲固體，而成玻璃。或用砂加生石灰及炭酸鈉一同加大熱，使之溶爲液體，

然後冷之亦可。

$$Na_2CO_3+SiO_2=Na_2SiO_3+CO_2$$

$$CaO+SiO_2=CaSiO_3$$

所成之硅酸鈉 (Na_2SiO_3) 硅酸鈣 ($CaSiO_3$) 及矽 (SiO_2) 溶成玻璃。

着色法： 加金屬氧化物而熔融之，則由金屬而呈特殊之色彩，如加氧化鈷呈青色，加二氧化錳呈紫色，加氧化銅或金呈赤色，加氧化鍚呈黃色。又白色不透明之玻璃，係加入螢石，長石為之粉末而成。又普通之青色玻瓶係加入氧化第一鐵，皮酒之褐色瓶係加氧化第二鐵而成，均為硅酸鐵之色。

種類：

類別	原料	主成分	性質	用途
鈉玻璃	SiO_2 $CaCO_3$ Na_2CO_3	$CaSiO_3$ Na_2SiO_3	易溶，稍帶青綠色，抵抗藥劑力弱於鉀玻璃價廉	造窗版，瓶，及普通器具
鉀玻璃	SiO_2 $CaCO_3$ K_2CO_3	K_2SiO_3 $CaSiO_3$	難溶，無色透明，化學的抵抗力大。	化學器械(如試驗管)及裝飾品
鉛玻璃	SiO_2 K_2CO_3 PbO	K_2SiO_3 $PbSiO_2$	質軟，無色透明，重，易溶，光線屈折率大。	光學器械(如透鏡等)及裝飾品

(12)　硼酸之製法性質及用途如何？

解：　加酸於硼砂（$Na_2B_4O_7$）中卽得硼酸(H_3BO_3)

$$Na_2B_4O_7.10H_2O+2H_2Cl=4H_3BO_3+2NaCl+5H_2O$$

爲白色鱗狀之結晶，稍溶於冷水，易溶於溫水，水溶液呈弱酸性，無害，用作防腐劑以貯藏食物。

(13)　試述硼砂之製法，性質及用途！

解：　硼酸之水溶液加碳酸鈉而中和之卽得

$$4H_3BO_3+Na_2CO_3=Na_2B_4O_7+CO_2+6H_2O$$

爲無色之結晶，水溶液呈弱鹼性，遇熱，結晶水先失（$Na_2B_4O_7.10H_2O=Na_2B_4O_7+10H_2O$）初膨脹，繼融成無色透明之玻璃狀球，此稱硼砂球。若加金屬之氧化物，則各種金屬各現特殊之色，如鈷呈青色，鉻呈綠色，故應用此種特性，以鑑別金屬之有無。

III　金　屬

(A)　輕金屬

(1)　試述苛性鈉之製法，性質與用途：

解：　製法：　炭酸鈉之水溶液中加消石灰熱之

$$Na_2CO_3+Ca(OH)_2=2NaOH+CaCO_3$$

性質及用途：　白色之固體，通常爲棒狀，潮解性強，溶解於水而呈強鹼性反應。

$NaOH \rightleftharpoons Na^{\cdot} + OH'$

基於輕氧離子之作用

1. 能與酸中和而成鹽

$HCl + NaOH = NaCl + H_2CO$

2. 變重金屬離子爲氫氧化物而沈澱

$Cu'' + 2OH \longrightarrow Cu(OH)$

3. 遇錏離子而發生硇精

$NH^{\cdot}_4 + OH' = NH_4OH = NH_3 + H_2O$

又利用其善吸收炭酸氣而製炭酸鹽如

$2NaOH + CO_2 = NaCO_3 + H_2O$

分解醋酸鈉而得沼氣

$CH_3CO_2Na + NaOH = CH_4 + Na_2CO_3$

能令脂肪鹼化以製石鹼。

$(C_{15}H_{31}CO_2)_3C_3H_5 + 3NaOH$

$= 3C_{15}H_{31}CO_2Na + C_3H_5(OH)_3$

以及造紙等。

(2)　試述炭酸鈉之製法，性質及用途。　(北師大)

解：　製法：　(a)硇鹼法 (Solvay's process)

食鹽飽和溶液中，壓入二氧化碳及硇精，則生炭酸氫鈉之沈澱

$NaCl+CO_2+NH_3+H_2O=NaHCO_3+NH_2Cl$

$(NH_3+CO_2+H_2O=NH_4{\cdot}HCO_3)$

$(NaCl+NH_4.HCO_3=NaHCO_3+NH_4Cl)$

再將此沈澱強熱之，則分解而爲炭酸鈉

$2NaHCO_3=Na_2CO_3+H_2O+CO_2$

(b) 路布蘭法 (Le Blenc)

由食鹽與濃硫酸製取氯化輕時所得之殘渣硫酸鈉，若與石炭及石灰混合而熱之則得炭酸鈉

$2Nacl+H_2SO_4=NaSO_4+2HCl$

$Na_2SO_4+2C=NaS+2CO_2$

$Na_2S+CaCO_3=Na_2CO_3+CaS$

性質及用途： 易溶於水，其水溶液加水分解而生 NaOH 之鹽基，此鹽基強於H_2CO_3之弱酸，故呈鹼性反應

$Na_2CO_3+2H_2O \rightleftharpoons 2NaOH+H_2CO_3$

爲製造玻璃，石礆及苛性鈉之原料，又利用其鹼性而供洗濯之用。並又可利用其炭酸離子可使種種金屬成炭酸鹽而沈澱如 $Pb^{\cdot\cdot}+CO_3''=PbCO_3$

(3) 炭酸氫鈉之製法，性質及用途如何？

解： 製法： 食鹽之飽和溶液中，在壓入二氧化炭及硇精，則生沉澱卽得

$NH_3+CO_2+H_2O=NH_4.HCO_3$

$NH_4.HCO_3+NaCl=NaHCO_3+NH_4Cl$

他如通炭酸氣於炭酸鈉之濃厚溶液亦可得之。

性質及用途： 爲白色之粉末，稍溶於水，微呈鹼性，加熱則分解而生二氧化碳

$2NaHCO_3=Na_2CO_3+CO_2+H_2O$

加酸亦發生二氧化碳

$NaHCO_3+HCl=NaCl+CO_2+H_2O$

$2NaHCO_3+H_2SO_4=Na_2SO_4+2CO_2+2H_2O$

利用其與酸之中和性，而用作醫藥（療胃酸過多之胃痛有特効），又利用其與酸作用而發生 CO_2 之性質，而用作消火器，製麵包(可使麵包膨脹)及製造淸凉飲料。(與酒石酸混合等)。

(4) 試述下列各鈉化物之名稱及用途：

a. $NaNO_3$ b. Na_2SO_3 c. $Na_2S_2O_3$

a. 硝酸鈉（智利硝石 Chili saltpetre)爲無色之結晶有潮解性，用作肥料，硝酸及硝石之製

造。

h. 亞硫酸鈉 (Sulphurous acid sodium) 爲無色之結晶，還原性甚強，用作照相之現像液。

c. 一硫硫酸鈉 (Sodium thiosulphate)，爲無色之結晶，能溶解造鹽素及造鹽素銀化物，用作照之定着液，氯氣防禦吸入器液及除去附着於纖維中之氯氣等。

(5) 試述炭酸鉀之製法性質及用途！

解： 製法： Leblane's 法

即氯化鉀中加以硫酸熱之而得硫化鉀

$$2KCl + H_2SO_4 = 2HCl + K_2SO_4$$

次再加碳與石灰而強熱之則變成炭酸鉀

$$K_2SO_4 + 2C = K_2S + 2CO_2$$

$$K_2S + CaCO_3 = K_2CO_3 + CaS.$$

性質及用途. 爲白色之結晶，有潮解性，溶解於水，同時起加水分解而呈強鹽基性反應

$$K_2CO_3 + 2H_2O = 2KOH + H_2CO_3$$

通常用灰汁洗衣服，亦係利用此作用

又可被酸分解

$$K_2CO_3 + 2HCl = 2kCl + CO_2 + H_2O$$

用於分析化學，製玻璃，及照相藥等。

(6) 鉀作用用過之水中通以綠氣時，則生如何之物質？又就溶液之冷熱其反應有何差異？

解： 投鉀於水中則起次之反應而生氫氧化鉀(苛性鉀)

$$2K+2H_2O=2kOH+H_2$$

此中通以綠氣則如下之反應

若爲熱溶液，則生氯酸鉀

$$6KOH+3Cl_2=KClO_3+5KCl+3H_2O$$

若爲冷溶液，則生次氯酸鉀

$$2KOH+Cl_2=KClO+KCl+H_2O$$

(註) 苛性鉀之製法爲

$$K_2CO_3+Ca(OH_2)=CaCO_3+2KOH$$

(7) 試述硝石之製法性質及用途！

解： 製法： 硝酸鈉溶液中加氯化鉀溶液共熱之，除去所析出之食鹽，令液冷之而結晶成硝石（卽硝酸鉀。）

$$NaNO_3+KCl \rightleftharpoons KNO_3+NaCl$$

亦有以有機物分解所生之硇精化合物，因硝化黴菌之接觸作用，養化而成硝酸，更作用於木炭而成硝石，此卽硝石培養法。

性質及用途：　無色之結晶，易溶於水，然無潮解性，與可氧化之物質共熱時，則呈極猛烈之氧化作用而爆發，故用作火藥。

$$2KNO_3+S+3C=N_2+3CO_2+K_2S$$

(8)　鈉與鉀性質之異同若何？

解：　鈉與鉀性質之異同，分述如下：

同點：　二者皆爲銀白色，軟而易融之金屬，比重小於1；易養化；與氯氣直接化合；氧化物及鹽類可溶於水；僅生一種之一價無色離子；二者與氫養根化合則成強鹼。

異點：　鉀比鈉使水分解之力較烈，每熱至輕之發火點以上，故恒發火；焰色反應，鉀爲紫色，鈉爲黃色；鉀離子由($PtCl_6''$)及酒石酸離子而沈澱，鈉離子則否；鉀之炭酸鹽潮解，硝酸鹽不潮解，鈉之炭酸鹽風化，硝酸鹽潮解。

(9)　試說明黃磷貯於水中，鈉貯於於油中之故！

解：　黃磷易與游離之氧氣化合，若曝露於空氣中，則卽與空氣中養氣化合而起燃燒，故貯藏於水中以斷絕與空氣接觸。鈉既易與遊離之養氣化合，而又易與水中之氧相化合，故須貯藏於不含氧之物

質，如石油等是。

(10) 試述下列各物之製法及用途

a. 氯酸鉀， b. 氫氧化錏，氯化錏。

解： a. $6KOH+3Cl_2=KClO_3+5KCl+3H_2O$ 此為無色之結晶，熱之，則將氧完全放出。

$(2KClO_3=2KCl+3O_2)$用以製造火柴及含嗽劑。

b. $2NH_4Cl+CaO=2NH_3+CaCl_2+H_2O$ 所生之氣體導於水中 $NH_3+H_2O=NH_4OH$

加熱則完全分解而放出 NH_3

$NH_4OH=NH_3+H_2O$

用作試藥，供酸之中和。

c. $NH_4OH+HCl=NH_4Cl+H_2O$ 為無色之結晶，溶解於水卽電離

$NH_4Cl \rightleftharpoons NH_4^{\cdot}+Cl'$

加熱卽解離 $NH_4Cl \rightleftharpoons NH_3+HCl$

冷之(常溫)復化合而成 NH_4Cl

易昇華，用作 Leclanche'scell (魯克南電池)。

(11) 就下列各項，試舉所知之名稱及分子式！

a. 有漂白作用之物質

b. 含氮之酸

c. 重要之氯化物

解： a. 綠氣 Cl_2，漂白粉 $CaOCl_2$，二氧化硫 SO_2，二氧化二氫 H_2O_2 等。

b. 硝酸 HNO_3，亞硝酸 HNO_2 等。

c. 氯化鈉 $NaCl$，鹽酸 HCl，氯化錏 NH_4Cl，氯化鉀 KCl 等。

(12) 試述重要硫酸鹽之名稱，分子式，及用途，（但爲含水物者並記其水分）

解： a. 胆礬 $CuSO_4.5H_2O$，用於電鍍，電池，染色術

b. 綠礬 $FeSO_4.7H_2O$，用於藍墨水 (B'u ink) 之製造，染色術，消毒劑等。

c. 瀉利鹽 $MgSO_4.7H_2O$ 用作瀉藥

d. 皓礬 $ZnSO_4.7H_2O$ 用作媒染劑，眼藥及木材防腐等。

e. 明礬 $AlK(SO_4)_2.12H_2O$，用爲媒染劑，製紙，醫藥及飲料水之澄清等

f. 石膏 $CaSO_4.2H_2O$，燒石膏可作模型，粉筆綳帶固定，固着劑（如製豆腐用之）等。

g. 芒硝 $Na_2SO_4.10H_2O$，製炭酸鈉，玻璃之原料及醫藥用。

(13) 試述氧化鈣(生石灰)之製法及其性狀 (北農大)

解. 強熱炭酸鈣(石灰石)卽得

$$CaCO_3 \rightleftarrows CaO + CO_2$$

此時爲可逆反應，故宜絕空氣而驅出所生之二氧化碳。

爲白色之塊狀，融點甚高，與水作用則發熱，容積膨大，而變爲氫氧化鈣(熟石灰)

$$CaO + H_2O = Ca(OH)_2$$

$Ca(OH)_2$通過二氧化炭，又得炭酸鈣(石灰石)白色之沈澱

$$Ca(OH)_2 + CO_2 = CaCO_3 + H_2O$$

又氧化鈣(CaO)置於空氣中時，則自然吸收二氧化碳，而變爲氫氧化鈣及炭酸鈣

$$2CaO + H_2O + CO_2 = CaCO_3 + Ca(OH)_2$$

又炭酸鈣(大理石)注鹽酸時，則放出二氧化碳

$$CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + CO_2 + H_2O$$

(4) 試述大理石之梗概！

解： 大理石卽氧化鈣($CaCO_3$)，多爲白色之物質，不溶解於水，但最易溶解於鹽酸中，而放出二氧化碳。

$$CaCO_3 + 2HCl = CaCl_2 + H_2O + CO_2$$

又強熱時，則熱解離，而生二氧化碳與生石灰(此爲可逆反應)。

$$CaCO_3 \rightleftharpoons CO_2 + CaO$$

可爲建築材料用。其用沉澱法所製之粉末狀炭酸鈣，則供擦牙粉製酸劑等之用。

(15) 試舉三種用爲白色顏料之主要化合物，並比較其特性。

解： a. 鉛白 $2PbCO_3 . Pb(OH)_2$

由將鉛令醋酸 (CH_3CO_2H) 與炭酸氣作用之而得，爲白色之粉末，被覆力強，硫化卽變黑，有毒，又用於婦人之化粧。

b. 鋅華 (亞鉛華) ZnO，係將鋅在氣中燒之而得，爲白色粉末，硫化不變黑，無毒，被覆力較鉛白爲弱。

c. 硫酸鋇 $BaSO_4$

爲不溶性之白色固體，硫化不變黑，亦無毒，不宜於化粧之用。

(16) 述漂白粉之製法性質及用途。

解： 於熟石灰上通以氯氣卽成

$$Ca(OH)_2+Cl_2=CaOCl_2+H_2O$$

性質及用途： 爲白色之粉末，少溶解於水，若加酸則氯遊離

$$CaOCl_2+2HCl=CaCl_2+Cl_2+H_2O$$

所放出之氯與水化合而放出發生機之氧

$$Cl_2+H_2O=2HCl+[O]$$

故能將有色之物氧化而成無色之物，故使用漂白粉時，必用酸。

又空氣中之二氧化炭，與漂白粉溶液徐徐起作用，放出炭酸鈣與氯。

$$CaOCl_2+CO_2=CaCO_2+Cl_2$$

有此種慢性作用，故又用爲除疫劑，又將其溶液煮沸時，則分解而成氯化鈣及氯酸鹽

$$6CaOCl_2=5CaCl_2+Ca(ClO_3)_2$$

因此用以預備製氯酸鉀。

(17) 何謂硬水？其軟化法如何？

解： 水中含有鈣離子 $Ca^{\cdot\cdot}$ 及鎂離子 $mg^{\cdot\cdot}$ 者，稱硬水。否則稱軟水。而 $Ca^{\cdot\cdot}$ 及 $Mg^{\cdot\cdot}$ 大都等爲硫酸鹽 $CaSO_4$ $MgSO_4$ 及酸性炭酸鹽 $Ca(HCO_3)_2$, $Mg(HCO_3)_2$ 存於水中，含酸炭酸鹽之硬水稱暫時硬水。含硫

酸鹽之硬水稱永久硬水。

軟化法： 即令此等離子變爲不溶性之炭酸鹽即可，故暫時硬水(Temporary hardness)煑沸之，令其鹽沈澱，即變爲軟水

$$Ca(HCO_3)_2=CaCO_3+CO_2+H_2O$$

$$Mg(HCO_3)_2=MgCO_3+CO_2+H_2O$$

永久硬水 (Permanent hardness)則加入適當之炭酸鈉，使其金屬離子沈澱即可得

$$CaSO_4+NaCO_3=CaCO_3+Na_2SO_4$$

$$MgSO_4+Na_2CO_3=MgCO_3+Na_2SO_4$$

至硬水之作用，能令肥皂化爲不溶性，故不適於洗濯。

$$2C_{15}H_{31}CO_2Na+CaSO_4=(C_{15}H_{31}CO_2)_2Ca+Na_2SO$$

但適於釀酒。

(18) 試述鋁之所在製法，性質及用途。(20中大)

解： 鋁存在於礬土，長石，雲母，冰晶石等所成之岩石，土壤中(Al_2O_3,$Al_2Si_2O_7$)

以三氧化二鋁置入電氣爐中而強熱之，使溶融，同時通以電流

$$2Al_2O_3=4Al+3O_2$$

並混入不電解之冰晶石，螢石等於其中，以助三氧化二鋁之融解卽得。

爲銀白色質輕(比重2.6,鉄之三分之一)富於硬度展性，延性，及導電性，在空氣中雖稍氧化，而不失光澤。故近來以鋁代銅而爲電線之用。其在高溫度與養氣化合激烈，呈強力還原作用，故常用之以還原不爲炭所還原之物。如錳鎳等之養化物，能溶於鹽酸，硫酸及苛性鉀中，但生金鹽與氫，不溶於硝酸。

$$2Al+6HCl=2AlCl_3+3H_2$$

$$2Al+3H_2SO_4=Al_2(SO_4)_3+3H_2$$

$$2Al+6NaOH=2Na_3AlO_3+3H_2$$

其用途甚廣，如製食器，理化器械，裝飾品，兵器合金及修理破損之鉄器等。

(19)　硫酸鋁用以清潔濁水及其呈酸性反應之理如何？

解：　硫酸鋁加水分解

$$Al_2(SO_4)_3+6H_2O=2Al(OH)_3+3H_2SO_4$$

生氫氧化鋁之膠狀沈澱，與水中之懸浮物相結而沈下，故水漸爲清潔。

又因其加水分解而生硫酸，故呈酸性反應。

(20) 鋁與銀之差異若何？

解： a. 鋁之比重約為銀之四分之一。

b. 銀難氧化，而鋁在高溫時氧化甚劇。

c. 銀難溶解於鹽酸，而易溶解於硝酸，鋁則不然。

d. 鋁之熱及電之傳導性約為銀之 $\frac{1}{3}$。

e. 銀生黑色硫化物，而鋁則否。

(21) 下列之物質為化學上如何之物質？

a. 鐵銹，b. 銅綠，c. 鉛丹，d. 胆礬，e. 明礬。

解： a. 鐵銹： 主要者為三氫氧化鐵 ($Fe(OH)_3$)

b. 銅綠： 鹽基性炭酸銅 ($CuCO_3, Cu(OH)_2$)

c. 鉛丹： 四氧化三鉛 (Pb_3O_4)

d. 膽礬： 硫酸銅 ($CuSO_4$)

e. 明礬： 硫酸鋁鉀 ($AlK(SO_4)_2 . (2H_2O)$)

(22) 試述鎂之製法性質及用途。

解： 以氧化鎂入電氣爐中融解且令電解之卽得

$$MgCl_2 = Mg(\text{陰極}) + Cl_2$$

為白色之輕金屬，有展性，在空氣中熱之卽燃燒，此時富於紫外線(化學線)而發強光，其化學

作用極強，故利用之以夜間照相

$$2Mg + O_2 = 2MgO$$

溶解於酸類之稀薄液而發輕氣

$$Mg + 2HCl = MgCl_2 + H_2$$

$$Mg + H_2SO_4 = MgSO_4 + H_2$$

溶解於鹼則生膠狀白色沈澱($mg(OH)_2$)，若加入錏離子及燐酸離子於鎂離子，亦生白色沈澱，用以鑑識mg¨及PO‴。

(23) 述鋅之製法性質及用途。

解：燒硫化鋅使成氧化鋅

$$2ZnS + 3O_2 = 2ZnO + 2SO_2$$

次與木炭共熱之而還原，將生成之鋅蒸溜之即得

$$ZnO + C = Zn + CO$$

爲蒼白色有光澤之金屬，在空氣中其表面生鹽基性炭酸鋅之銹，可保護其內部，故有耐久性，加熱則放青色之焰而成氧化鋅

$$2Zn + O_2 = 2ZnO$$

溶解於稀薄酸類中，發生氫

$$Zn + H_2SO_4 = ZnSO_4 + H_2$$

$$Zn + 2HCl = ZnCl_2 + H_2$$

卽 $Zn + 2H^{\cdot} = Zn^{\cdot\cdot} + H_2$

成版者可蓋屋，鍍於鉄版及鉄絲者可作電線。又製造電池，氫及合金等，均用之。

(B) 重金屬

(1) 試述鉄之製法，種類，性質及用途。

解：製法：以磁鉄鑛 Fe_3,O_4，赤鉄鑛 Fe_2O_3，褐鉄鑛 $2Fe_2O_3.3H_2O$，或菱鉄鑛 $FeCO_3$ 等，原鑛，混以Cokes 及石灰石共入熔鑛爐中燒之，由爐之下部吹送空氣，則

a. 非氧化物之原鑛先變爲氧化物

$FeCO_3 = FeO + CO_2$

b. 氧化物之原鑛及此時所生之氧化物，被還原而成鉄（因石灰石將鑛石中之硅酸鹽變爲硅酸鉄，卽熔滓熔融之而去之作用之故）

$Fe_2O_3 + 3C = 2Fe + 3CO$

種類：a. 鑄鉄 由熔礦爐製出，含炭量 4.5—2.3%，易熔融，質堅而脆，展性延性小。用作製鍋釜，鐘及鑄造鉄柱等。

b. 鋼鐵 由熔融鑄鐵入於回轉爐中吹入空氣合燃燒其碳素之一部而成，含炭量1.5—0.5%，易熔融(1400度)適於鑄造，赤熱時則軟，故易於加工及鍛接。又赤熱之鋼鐵急冷之則硬，且硬度高，徐徐冷之則增彈性，可永久保存磁性，用作製造刀類，銃砲，艦船，鉄軌，發條及磁石等。

c. 鍛鐵 由用鋼入於反射爐中，將碳素充分除去之而得， 含炭量0.5%以下， 不易熔融(1600度時可融，)質軟而韌，展延性均大，加熱時極軟，可以抽絲及搥薄，可感磁氣而不能保存，製造普通之小器具，及電磁石之用。

性質用途：除上述之外，鉄在空氣中強熱之。則生黑色粉狀之四氧化三鉄

$$3Fe+2O_2=Fe_3O_4$$

又濕鉄在空氣中易氧化而生鉄銹 $Fe(OH)_3$，故每途以油石黑或鍍以鋅 ， 錫以斷絕空氣而防止起銹。又與氫作用易化為離子，故能熔解於酸中。

$$Fe+2H^{\cdot}=Fe^{\cdot\cdot}+H_2$$

如 $Fe+2HCl=FeCl_2+H_2$

$$Fe+H_2SO_4=FeSO_4+H_2$$

純鐵僅供醫藥及實驗之用。通常則爲混有炭素(鉻，鎳)之鐵，供工業上之用，已於上述。

(2) 硫酸亞鐵(綠礬)製法性質及用途如何？

解：以鐵溶解於硫酸中或燒黃鐵鑛而置於空氣中卽得

$$Fe+H_2SO_4=FeSO_4+H_2$$

$$FeS+2O_2=FeSO_4$$

爲綠色之結晶($FeSO_4.7H_2O$)，溶解於水成第一鐵離子。　$FeSO_4 \rightleftarrows Fe^{\cdot\cdot}SO_4''$

與單甯酸($C_{14}H_{10}O_9$)相作用，卽生黑青色之沈澱，卽生Ink，故用作製造墨水。

置於空氣中易變爲FeS_2(黃鐵鑛)，故製造時，無論如何不可使其與空氣接觸，此應注意之點。又燒之則分解而生Fe_2O_3

$$2FeSO_4=Fe_2O_3+SO_2+SO_3$$

(3) 錳與鉻之化合物，試比較其異同。

解：氧化物：　二氧化錳(MnO_2)爲黑褐色之粉末，而三氧化二鉻(Cr_2O_3)爲淡綠色，二者均爲固體而難溶於水。

錳酸鉀與鉻酸鉀：　前者(K_2MnO_4)爲綠色之固體，後者(K_2CrO_4)爲黃色之固體，二者均可溶

於水，而與氧相接觸，則變爲高錳酸鉀（$KMnO_4$）及一縮二酪酸鉀（$K_2Cr_2O_7$）。

高錳酸鉀與一縮二酪酸鉀：前者爲黑紫色之柱狀結晶，後者爲赤橙色之結晶，二者均可溶於水中，而爲強氧化劑。

$$KMnO_4 \rightleftharpoons K^{\cdot} + MnO_4{}'$$

$$K_2Cr_2O_7 \rightleftharpoons 2K^{\cdot} + Cr_2O_7{}''$$

故利用一縮二酪酸鉀之氧化作用（混濃硫酸其作用特著），而製造電池及染色之用。

$$K_2Cr_2O_7 + 4H_2SO_4 = Cr_2(SO_4)_3 + K_2SO_4$$
$$+ 3O + 4H_2O$$

(4) 何謂鉛糖？密陀僧？

解：鉛糖卽醋酸鉛，因其味甘故名。爲白色之結晶體，能溶於水，其組成爲 $Pb(CH_3CO_2)_2.2H_2O$，可供醫藥上之用。

陀密僧卽一氧化鉛，其組成爲 PbO，黃赤色之粉末，可用之與 SiO_2，K_2CO_3 等融合之而成透明之玻璃。又因其有變電能爲化學能而貯藏之之性，故製蓄電池常利用之。

(5) 二氯化錫與四氯化錫之性狀，試比較之。

解：　二氯化錫爲稍帶黃色之白色針狀之結晶，加水時，則起加水分解，而生一氧化錫

$$SnCl_2 + H_2O = SnO + 2HCl$$

又還原力極強，能奪取二氯化錄(昇汞)中之氯而令錄遊離(白色一氯化錄(昇汞)沈澱)。熱之，則同時生四氯化錫及灰色錄之沈澱。

$$2HgCl_2 + 2SnCl_2 = SnCl_4 + 2HgCl$$

$$2HgCl + SnCl_2 = 2Hg + SnCl_4$$

(6)　卷煙，及西洋茶點，常以錫箔包之，其理安在？

解：　以錫箔包之，使不透露空氣中，可防止濕氣及香料之揮發。

(7)　述錸之製法性質及用途？

解：　一硫化錸(辰砂亦稱朱砂)在空氣中熱之，將其所生之氣體導入室內，冷之卽液化而爲錸

$$HgS + O_2 = Hg + SO_2$$

爲灰白色有光澤之唯一液狀金屬元素比重爲13.6易溶解，金，銀，錫，鈉等，此等錸之合金特稱Ama'gam。

在空氣中不熱，難氧化，不溶於鹽酸而溶於硝酸及熱濃硫酸。

$$3Hg+8HNO_3=3Hg(NO_3)_2+2NO+4H_2O$$

$$Hg+2H_2SO_4=HgSO_4+SO_2+2H_2O$$

用製温度計，晴雨計，理化學器械及醫藥等。

(8) 朱紅之製法性質如何？

解：朱紅卽硫化銾，由銾與硫黄相摩擦而成。($Hg+S=HgS$) 爲赤色之粉末，甚安定，非王水不能溶解，作爲赤色顏料，自古重用之。

(9) 設有人已服下昇汞，其救護法如何？

解：昇汞卽氯化第二銾 ($HgCl_2$) 爲無色之結晶，易溶於水，溶液中含銾離子($Hg^{\cdot\cdot}$)有猛毒作用。

$$HgCl_2 \rightleftharpoons Hg^{\cdot\cdot}+2Cl'$$

此作用卽爲能凝固蛋白質之作用，故救護之法在當時卽飲下多量之蛋白卽可。

(10) 由銅屑製膽礬之法如何？又膽礬之性質如何？

解：投銅屑於硫酸中，溶解所得之液，蒸發之卽得膽礬(卽硫酸銅)

$$Cu+2H_2SO_4=CuSO_4+SO_2+2H_2O$$

爲青色之結晶 ($CuSO_4.5H_2O$) 溶解於水則生銅離子，同時加水分解而呈酸性反應（因所生之二氫氧化銅之鹽基過弱，不足中和同時所生之硫酸)

$$CuSO_4 \rightleftharpoons Cu^{\cdot\cdot} + SO_4''$$

$$CuSO_4 + 2H_2O \rightleftharpoons Cu(OH)_2 + H_2O$$

通硫化氫則生黑色之硫化銅沈澱

$$CuSO_4 + H_2S = CuS + H_2SO_4$$

熱之則失其結晶水而成無水鹽，呈白色，遇水則復變青色。

(11)　白銅非化合物，試證明之！

解：　白銅之成分爲銅與鋅，其比率不定，今銅與鋅之比爲 67：33

其原子數之比爲$\frac{67}{63.6} : \frac{33}{65.4}$

即爲 21:10 即 $Cu_{21}.Zn_{10}$

故知白銅爲混合物而非化合物。

(12)　試述簡單識別銅鹽之方法。

解：　a. 通以硫化二氫即生黑色—硫化銅之沈澱。

b. 銅鹽之溶液中，注以少量之鹽基性物質，則生淡青色之二氫氧化銅之沈澱，若注入過量之鹽基性物質，則銅鹽溶解，而爲深青色之溶液。

(13)　硝酸銀之製法，性質及用途如何？

解： 將銀溶解於硝酸中，卽得(銀不溶於鹽酸)

$$3Ag+4HNO_3=3AgNO_3+NO+2H_2O$$

為無色版狀之結晶，水溶液含銀離子

$$AgNO_3 \rightleftharpoons Ag^{\cdot}+NO_3$$

若遇氯離子卽氯化物之水溶液則沈澱氯化銀

$$Ag+Cl'=AgCl$$

又 $AgNO_3+NaCl=AgCl+NaNO_3$

又其水溶液加溴化鉀時，則生淡黃色之溴化銀沈澱。

$$AgNO_3+KBr=AgBr+KNO_3$$

遇日光則還原而析出黑色之銀粒，此變化於有機物存在時更著。

用於照相術，腐蝕劑及鍍銀液之製造等。

(14). 述氯化銀之製造性質及用途。

解： 硝酸銀溶液中加食鹽卽得

$$AgNO_3+NaCl=NaNO_3+AgCl$$

為白色及淡黃色之固體，不溶於水，而溶解於硇精水(NH_4OH)及一硫酸鈉($Na_2S_2O_3$)之溶液中，(照相定着液)遇光卽還原，而析出幾分之銀，故用作照相乾版之塗藥。

(15) 試述主要之銀鹽，金鹽及鉑鹽之名稱，分子式及用途。

解： a. 銀鹽　硝酸銀 $AgNO_3$ 可用作腐蝕劑，殺菌劑，及醫藥上，照相術上之用。又可作各種銀鹽之原料。

氯化銀 $AgCl$，溴化銀 $AgBr$，及碘化銀 AgI，感光性甚強，故用作照相乾版上之塗藥。

銀靑化鉀 $KAg(Cn)_2$ 可用作鍍銀液。

b. 金鹽：　金氯氫酸 $HAuCl_4$．此由將金溶解於王水，蒸發其溶液而得，爲黃色之結晶，若其水溶液，以 $NaOH$（氫氧化鈉）中和之，則生 $NaAuCl_4$，金氯氫酸可供鍍金，照相之用，或爲製金鹽之原料。金靑化鉀 $KAu(CN)_4$，可作鍍金之用。

c. 鉑鹽：　鉑氯氫酸，H_2PtCl_6，由鉑溶解於王水而得，爲黃赤色之結晶，遇氯化錏（NH_4Cl）時即沈澱爲鉑氯化錏（NH_4）$_2PtCl_2$，以此燒之則分解而殘留海綿狀之鉑，稱曰鉑海綿。使亞硫酐與養氣化合以製硫酐 SO_3 時，用此爲觸媒，鉑氯氫酸用爲鉑化合物之原料。

(16) 金與銅或銀之合金，欲分離金，其法若何？

解： 將此合金(金銅，金銀)與濃硝酸共熱之，則銀，銅溶解於硝酸中，而變爲硝酸銀，硝酸銅之溶液，但金不受變化，仍爲固體而殘留。

$$3Ag + 4HNO_3 = 3AgNO_3 + NO + 2H_2O$$

$$3Cu^{\cdot} + 8HNO_3 = 3cu(NO_3)_2 + 2NO + 4H_2O$$

(17) 何謂合金，其特性如何？

解： 數種相異之金屬，一同鎔合，冷後成一種與成分金屬狀似之金屬，稱此曰合金。

其特性爲

a. 比成分金屬易融解。

b. 比成分金屬硬。

c. 比成分金屬之導電性，展性，延性小。

d. 比成分金屬化學抵抗力強，故日常實用上多用合金。

(18) 非金屬與金屬之化學性質之差異若何？

解： a. 非金屬展性，延性，比重，等小。又多爲熱電之不良導體，而金屬則反是；且有美麗之光澤。

b. 非金屬之氧化物，溶於水而成酸類。

如 $SO_3 + H_2O = H_2SO_4$(硫酸)

金屬之氧化物，溶於水而成鹽基

如　$CaO+H_2O=Ca(OH)_2$

$Na_2O+H_2O=2NaOH$

c.　單獨時非金屬常生陰離子(如S'', Cl')而金屬則常爲陽離子(如$Ag^{\cdot}$, $Ca^{\cdot\cdot}$)

(19)　試說明鐳之歷史作用及變換。　(北師大)

解：　歷史：鐳 Radium 元素，係克來夫婦 P. and S. Curie 及皮孟氏 G. Bemont 在1898年所發見，頗多奇特之性質，爲近世化學進步上極有關係之元素。此元素分佈頗廣，如多種礦石，海水及泉水中常含有之，唯量甚少，價值昂貴。

作用：鐳之作用，其重要者約有次列數種：

1. 能自放光。
2. 能令不發光之物質發光。
3. 能自行發熱，且能耐久。
4. 能令空氣變爲傳電體，因鐳能將空氣質點分解成爲Ion，而使之傳電故也。
5. 能發出L, B, r, 三種放射綫，(Radial rays)此種放射線能透過不透明之物質。
6. 能逐漸變爲各種其他之元素。

變換： Ramsay and Saddy 二氏曾將鐳用空氣少許經過其上，則該空氣卽含有一種亦有放射性之氣體，卽 Niton or Radium Emanation，將少許封入玻璃管中，管之二端裝二電極，通電後考察其光帶，則初時所發之光帶係 Niton之光帶，待數日後，則發生Helium之光帶，可知鐳元素並能變爲Helium元素，此種由一元素變爲他元素之現象，稱之曰元素之變換(Transmutation of elements)。

IV 有機化合物

(1) 試述 Methane 之製法及性質。

解： 醋酸鈉 (CH_3CO_2Na) 與碱石灰($NaOH$)相混合加熱在水上捕集之。

$$CH_3CO_2Na+NaOH=CH_4+Na_2CO_3$$

爲無色之氣體，不溶於水，較空氣輕，在空氣中現淡青色有弱光輝之焰而燃燒

$$CH_4+2O_2=CO_2+2H_2O$$

又與上式適當之比例與養氣或空氣相混合，點燃之則大聲爆發。

(2) 試述 Acetylene 之製法及性質。

解： 二碳化鈣中加水卽得

$$CaC_2+2H_2O=CaH_2+Ca(OH)_2$$

為無色，惡臭(因含夾雜物)，有毒之氣體，加氯即飽和

$$H-C\equiv C-H+2Cl_2=H-\overset{\overset{\large Cl}{|}}{\underset{\underset{\large Cl}{|}}{C}}-\overset{\overset{\large Cl}{|}}{\underset{\underset{\large Cl}{|}}{C}}-H$$

在空氣中燃燒時放強光與生強熱

$$2C_2H_2+5O_2=4CO_2+2H_2O$$

與氧或空氣之混合物，點火而爆發，點燈及燒切鐵版時用之。

(3) 試述煤油分溜之生成物及性狀用途。

解：a. 揮發油　甚輕無色有揮發性之液體，能溶脂脂及樹脂，引火點甚低，與空氣之混合物則爆發，汽車機關及溶媒用之。

b. 燈油　即普通點燈所用之油，帶微黃色之液體，比重為0.8內外，用於點燈。

c. 重油　為粘稠之液體，可分為器械油能減少器械之摩擦，故用於各種器械：Vaseline 為白色軟膏之物，與硼酸等相練而為膏藥，或塗布於金屬之表面以防銹等用。石蠟，為白

色蜡狀之固體，用作絕緣體，及洋蠟燭等。

又分溜之殘渣，為黑色之固體，與粉炭相鍊可作燃料，與砂相混可作人造石。

(4) 酒精 (Ethyl alcohol) 之製法性質如何？

解： 葡萄糖($C_6H_{12}O_6$)或麥芽糖($C_{12}H_{22}O_{11}$)之水溶液，令釀母作用之，再蒸溜之，即得

$$C_6H_{12}O_6=2C_2H_5OH+2CO_2$$

$$C_{12}H_{22}O_{11}+H_2O=4C_2H_5OH+4CO_2$$

(麥芽糖係由澱粉與麥芽相作用而製得)為無色之液體，比重0.79，有芳香及刺激性味，78°時沸騰，至零下100°不凝固，易與水混合，能溶解多種物質，有殺蟲性，燃燒時，放弱青色之火焰，發生多量之熱，不完全氧化時則生 Acetaldehyde (C_2H_4O)或醋酸($C_2H_4O_2$)

$$C_2H_4O\text{氧化}\longrightarrow CH_3CHO\text{氧化}\longrightarrow CH_3CO_2H$$

完全氧化時則生水與二氧化碳

$$C_2H_5OH+3O_2=2CO_2+3H_2O$$

用酒精可製成 CH_3CHO, CH_3CO_2H (醋酸)，$CHCl_3$， CHI_3， $CH_3CO_2.C_2H_5$ 等物質

又用作防腐劑，如食物，標本等之貯藏，及燃料

飲料等用。

(5) Propyl alcohol(C_3H_7OH) 之利用性及用途如何？

解： 利用性質： 吸濕性甚強。

用途： 爆發物之製造，醫藥，石鹼等之製造。

(6) 試述 Propan-triol(or Glycerine 甘油)之製法及性質。

解： 脂肪(牛，豚，植物性油)等加氫氧化鈉煮之

$(C_{15}H_{31}CO_2)_3C_3H_5$ (油脂之一種) $+2NaOH$

$=3C_{15}H_{31}CO_2Na+C_3H_5(OH)_3$

爲無色粘稠之液體，有甘味，故稱甘油。能溶於水，極富於吸濕性，與硝酸或硝酸化合，則生爆發性之物質，即 Glyceryl trinitrate, $C_3H_5(NO_3)_3$

(7) 試述 Glyceryl trinitrate 之製法，性質及用途。

解： 加濃硝酸或濃硫酸於甘油(GlycerineC_3H_5, $(OH)_3$ 中，熱之卽得)

$C_3H_5(OH)_3+3HNO_3=C_3H_5(NO_3)_3+3H_2O$

(但須不斷的用冰冷却之)

爲重，無色，及粘稠狀之液體，不溶於水，加熱或打擊，則氣化而爆發。

$4C_3H_5(ON_3)_3=12CO_2+6N_2+O_2+10H_2O$

吸收於木粉或珪藻土中而製成 Dynamite。以之爆破岩石及其他爆發之用。

(8) Diethyl ether($C_2H_5OC_2H_5$)之性質及用途若何？

解：$(C_2H_5)_2O$ 爲極易流動無色之液體，其比重僅0.7,35° 卽沸騰，故甚易揮發，揮發時吸收多量之熱，他物體因之冷却，其蒸氣易引火，用爲溶劑，以之溶解有機物或供醫藥等用。

(9) 醋之變成順序性質如何？

解：$C_2H_6O(-2H) \longrightarrow C_2H_4O(+O) \longrightarrow C_2H_4O_2$

如上式酒精充分氧化變爲 Acetaldehyde(C_2H_4O)再氧化而成醋酸

$$C_2H_6O+O_2=C_2H_4O_2+H_2O$$

爲無色之液體，冬時成固狀(冰醋酸)有刺戟臭，頗易揮發，水溶液呈酸性反應，中和鹽基等而生鹽，日常所食之醋，爲醋酸之3%之溶液。

(10) 由米釀酒所起之變化，試述之！

解：米中之澱粉，被酵素作用而變爲糖類，後隨釀母漸次醱酵而變爲酒精，與二氧化碳醱酵後，將其濾過而得之液，卽淸酒(黃酒)其反應如次：

$$(C_6H_{10}O_5)n(\text{澱粉})+nH_2O=nC_6H_{12}O_6$$

$$C_6H_{12}O_6=2C_2H_5OH+2CO_2$$

再酒類在空氣中時，酒中之酒精與空氣中之醋酸菌氧化而變成醋酸，其反應如下：

$$C_2H_5OH+O_2=CH_3CO_2H+H_2O$$

然純酒精(10%以上)則在空氣中不變醋，因醋酸菌不能生存，又不如普通酒類之含有蛋白質，無機鹽類等酵母之滋養料，故酵母不能繁殖。

(11) 石鹼(卽肥皂)之製法及其洗濯效力之理由？

解： 普通之石鹼以脂肪中加氫氧化鈉或氫氧化鉀而煑之，再加食鹽 (NaCl)， 則所生之石鹼，卽凝固而浮於液面。

$$(C_{15}H_{31}CO_2)C_3H_5+3NaOH$$
$$=3C_{15}H_{31}CO_2Na+C_3H_5(OH)_3$$
$$(C_{17}H_{35}CO_2)_3C_3H_5+3NaOH$$
$$=3C_{17}H_{35}CO_2Na+C_3H_5(OH)_3$$
$$(C_{17}H_{33}CO_2)_3C_3H_5+3NaOH$$
$$=3C_{17}H_{33}CO_2Na+C_3H_5(OH)_3$$

爲白色固體，與鈉所成者如

$C_{15}H_{31}CO_2Na$， $C_{17}H_{35}CO_2Na$， $C_{17}H_{33}CO_2Na$等，稱硬石鹼。卽普通之石鹼。與鉀所成

者如$C_{15}H_{31}CO_2K$，$C_{17}H_{35}CO_2K$，$C_{17}H_{33}CO_2K$稱加里石鹼，即軟石鹼。稍溶於水即成粘稠之液，$C_{15}H_{31}CO_2H$易令污垢化爲乳狀而除去之，又起加水分解。

$$C_{15}H_{31}CO_2Na+H_2O \rightleftharpoons C_{15}H_{31}CO_2H+NaOH,$$

而生NaOH，此NaOH化脂肪質之污垢而爲脂酸鈉，溶解於水中，因此反應爲可逆，正直消費NaOH之際而反應進行。

又加里石鹼係脂肪鹼化於氫氧化鉀中所成

$$(C_{15}H_{31}CO_2)_3C_3H_5+3KOH$$
$$=3C_{15}H_{31}CO_2K+C_3H_5(OH)_3$$

由此令其凝固而混以甘油即可使用。

又石鹼因硬水之作用，使成不溶性之脂酸鈣，則石鹼失其效用。

$$2C_{15}H_{31}CO_2Na+CaSO_4$$
$$=(C_{15}H_{31}CO_2)_2Ca(\text{不溶性})+Na_2SO_4$$
$$2C_{15}H_{31}CO_2Na+MgSO_4$$
$$=(C_{15}H_{31}CO_2)_2Mg(\text{不溶性})+N_2SO_4$$

(12) 石鹼與脂肪化學上之關係若何？

解：石鹼爲脂肪酸鹼鹽，而脂肪爲脂肪酸之甘油鹽

(Glycerylester)。

(13) 試示下列各項之方程式：

(a) 加濃硫酸於蟻酸中而熱之

(b) 加濃硫酸於蓚酸中而熱之

解：(a) $HCO_2H-H_2O=CO$

(b) $C_2O_4H_2-H_2O=CO+CO_2$

(14) 葡萄糖之製法性質如何？

解：澱粉中加稀薄之酸而煮之，則成糊精而成葡萄糖

$$(C_6H_{10}O_5)n+nH_2O=nC_6H_{12}O_6$$

為白色之結晶，易溶於水，甘味劣於蔗糖，無還元作用，呈銀鏡反應，水溶液中加以釀母則酒精醱酵。

$$C_6H_{12}O_6=2C_2H_5OH+CO_2$$

此卽釀造葡萄酒時之化學反應。

(15) 何謂蔗糖之轉化？又蔗糖燃燒時之反應試示之。

解：蔗糖之水溶液，加以薄酸或轉化酵母，卽加水分解而變為葡萄糖與果糖，稱曰轉化 (Invert)。

$$\underset{(蔗糖)}{C_{12}H_{22}O_{11}}+H_2O=\underset{(葡萄糖)}{C_6H_{12}O_6}+\underset{(果糖)}{C_6H_{12}O_6}$$

(註) 此卽果糖之製法反應。

又蔗糖加熱而融解，分解而成褐色之飴，燃燒之則生二氧化碳及水

$$C_{12}H_{22}O_{11}+12O_2=12CO_2+11H_2O$$

若加濃硫酸而熱之之時，則化爲碳。

(16) 試述麥芽糖之製法及性質。

解： 澱粉中令麥芽作用之，則生麥芽糖與糊精。

$$3(C_6H_{10}O_5)n+nH_2O$$
$$=nC_{12}H_{22}O_{11}+(C_6H_{10}O_5)n$$

爲白色之結晶，甘味不及蔗糖。

加釀母卽醱酵而生酒精

$$C_{12}H_{22}O_{11}+H_2O=4C_2H_5OH+4CO_2$$

(17) 蔗糖，乳糖，麥芽糖其分子式相同，而性質差異何故？

解： 三者之分子式共爲 $C_{12}H_{22}O_{11}$, 蔗糖爲無色之結晶，味最甘，乳糖爲白色之結晶，甘味少，醱酵之則生乳酸，麥芽糖亦爲白色之結晶，味甘，此三種糖爲異化學的構造之異性體，用構造式可得表其性質之差異。

(18) 蔗糖與葡萄糖之異點若何？

解： a. 蔗糖 分子式爲 $C_{12}H_{22}O_{11}$, 甘味最強，轉

化而爲葡萄糖及果糖，不醱酵，鹼性之銅溶液不能還原。

b. 葡萄糖　分子式爲$C_6H_{12}O_6$，甘味劣，可立即由酵母而醱酵，鹼性之銅溶液可還原。

(19) 試述澱粉及糊精之性狀。

解：澱粉$(C_6H_{10}O_5)n$ 爲白色之粉末，外被以細胞膜，因原料而其形狀大小不同，不溶於冷水，若入開水中則吸收水，而細胞膜破烈成爲膠狀溶液，遇碘酒呈藍色之化合物，熱之則分解而爲無色之化合物。

澱粉與稀硫酸共熱之，則變爲糊精$(C_6H_{10}O_5)n$。糊精易溶於水，與碘酒相遇不變藍色。

(20) 試述由澱粉順次生成葡萄糖。酒精，及醋酸之變化。

解：$(C_6H_{10}O_5)n \xrightarrow{\text{與稀硫酸共熱}} C_6H_{12}O_6$

澱 粉　與稀硫酸共熱　葡萄糖

$\xrightarrow{\text{加酵母令醱酵}} C_2H_5OH \xrightarrow{\text{接觸而氧化之}} CH_3CO_2H.$

加酵母令醱酵　酒精　接觸而氧化之　醋酸

(21) 試述纖維素 $(C_6H_{10}O_5)n$(Cellulose) 之性狀及由鋸屑(木粉)製酒精之方法。

解： 纖維素即植物之纖維，如棉，麻等幾為純粹之纖維素，為白色纖狀之物質，能耐稀酸類，鹼類，若溶解於濃硫酸中再加水而熱之則變為葡萄糖，更加酵母即釀酵而成酒精，此即為由木材(鋸屑)以得酒精之法。

又纖維素之用途甚廣，如紡織，製紙，製綿火藥，人造絲，製 Celluloid, collodion 等均用之。

(22) 試述下列各物質之主要成分。

a.石油， b.棉， c.米， d.銀幣。

解： a. $C_{10}H_{22}$至$C_{16}H_{34}$為石蠟族之碳氫化合物。

b. 纖維素 $(C_6H_{10}O_5)n$

c. 澱粉 $(C_6H_{10}O_5)n$

d. 銅與銀之合金。

(23) 試比較樟腦，龍腦及薄荷腦之成分及性狀。

解： 樟腦$C_{10}H_{16}O$,龍腦$C_{10}H_{18}O$,薄荷腦$C_{10}H_{20}O$,分子式中逐漸多含二原子之氫。

樟腦(Comphor)為白色之結晶，易揮發，有強殺菌作用，故用以貯藏衣物及防腐，不溶於水而可溶於酒精，將樟腦還原即得龍腦 (Dorneol),其性狀與樟腦同。

薄荷腦(Peppermint)爲無色針狀之結晶，不溶於水而溶於酒精，有強烈之香味，故用以興奮神精。

(24) 試舉五種普通防腐劑之名稱及其分子式：

解： a. 食鹽卽氯化鈉 ($NaCl$)

b. 膽礬卽硫酸銅 ($CuSO_4$)

c. 硼酸 (H_3BO_3)

d. 水揚酸卽 Salicylic acid

($C_6H_4(OH)CO_2H$)

e. 砂糖卽蔗糖 (Cane sugar) ($C_{12}H_{22}O_{11}$)

(25) 試述植物鹼類之種類及通性。

解： 植物鹼類(Alkaloids)爲植物中所含有存鹼性之物質，卽氮化合物之一類，大概元難溶於水，與酸直接化合則易溶於水而生鹽，呈強烈之生理作用及毒性，其種類如菸鹼(Nicotine)$C_{10}H_{14}N_2$，存於煙草中，爲液體而有猛毒、罌栗鹼或嗎啡(Morphine) $C_{17}H_{19}NO_3$，存於罌栗之果實中，由罌栗之浸汁所製成之雅片約含 Morphine 10%，爲白色結晶，可溶於水，有鎮痛及催眠(卽止痛安眠)之作用，爲重要之醫藥。Quinine (規寧鹼) $C_{20}H_{24}N_2O_2$ 存於規那皮中，硫酸鹽爲白色之結晶。可作解熱

劑。又爲馬那里亞之特效藥。古柯鹼(Cocaine)存於古柯樹葉中，用作局部麻醉劑。Atoropine,存於莨菪根中，用作散瞳藥。Strychine,存於番木鼈中，用作衝動劑。又茶素(Theine)咖啡精(Caffeine)等,皆爲植物鹼，有興奮作用。

(26) 試述蛋白質(proteides)之大概!

解：蛋白質存於動物及植物中，爲碳，氫，氧，氮，硫等五元素所成，有複雜之組成，實驗式及分子量均不明，其種類有五，即

a. 卵白 蛋白即其水溶液，加熱或遇強酸，酒精，單寧及重金屬鹽類即凝固，爲營養素不可缺少之物質。

b. 乾銘素 存於牛乳中，爲乾酪之主要成分，遇薄酸即凝固，可作食料。

c. 膠質(Gelatin)爲動物之軟骨及腱，無色透明之物，熱之即溶解，遇冷即凝固，作食品，照相乾版用。

d. 荳素(Legurnin)存於大豆中，爲豆腐之主要成分，白色之固體，可由氯化鎂之作用而凝固，可供食用。

e. 麵質 (Gluten)存於小麥粉中，爲麵之主要成分，其形爲淡褐色之粉末，供食用。

(27) 人造絲與天然絲之區別如何？

解： 人造絲 (Artifical silk) 爲纖維素 $(C_6H_{10}O_5)n$ (Cellulose)所製成。天然絲爲含氮素之有機化合物。

(28) 試述動物與植物生活作用之差異！

解： 植物之生活作用，係攝取水，二氧化碳，鹽及鹽類等之簡單物質，而合成澱粉，脂肪，蛋白蛋等複雜之有機化合物，此時又放出一部分之養氣，然植物之此等作用，乃全賴太陽之能力(nergy)而爲之，是故植物之作用爲合成的還原的之作用。$6nCO_2+5nH_2O=(C_6H_{10}O_5)n+6nO_2$ 動物之生活作用適與植物相反，係攝取澱粉脂肪，蛋白質等植物中之有機化合物，以空氣中之養氣而氧化之，使變成水，二氧化碳，及尿素等之簡單化合物而排出之，以此時所生之 Energy 而活動，是以動物之生活作用，可謂之爲氧化的且分解的。

$$(C_6H_{10}O_5)n+6nO_2=6nCO_2+5nH_2O$$

(29) 試述潮解與風化。 (參看本書23頁第8題)

潮解爲固體吸收空氣中之水分而溶解之現象，此因該固體溶解所生之溶液之蒸氣壓較空氣中水蒸氣之平均壓爲小故也。

風化爲含水鹽失其結晶水，而崩壞其固有之結晶形之謂。凡其蒸氣壓較大氣中水蒸氣之平均壓爲大之固體，皆有此現象。

（化學終）

附　錄

(A) 主要元素表

(甲) 非金屬元素 (Nonmetallie Elements)

(分類)	(元素名)	(符號)	(主要原子價)	(原子量)
氫與造鹽素族	氫 Hydrogen	H	I	1
	氟 Fluorine	F	I	19
	氯 Chlorine	Cl	I	35.5
	溴 Bromine	Br	I	80
	碘 Iodine	I	I	127
氧與硫族	氧 Oxygen	O	II	16
	硫 Sulphur	S	II	32
氮素族	氮 Nitrogen	N	III	14
	磷 Phosphorus	P	III	31
	砷 Arcenic	As	III	75
	(銻) Antimony	Sb	III	120
碳素族	硼 Boron	B	III	11
	碳 Carbon	C	IV	12
	硅 Silicon	Si	IV	28

(乙) 金屬元素 (Metallic Elements)

(分類)	(元素名)	(符號)	(主要原子價)	(原子量)
輕金屬	鈉 Sodium	Na	I	23
	鉀 Potassium	K	I	39
	鈣 Calcium	Ca	II	40
	鍶 Strontium	Sr	II	88
	鋇 Barium	Ba	II	137
	鋁 Aluminium	Al	III	27
	鎂 Magnesium	Mg	II	24
	鋅 Zine (亞鉛)	Zn	II	65
	鎘 Cadmium	Cd	II	112

重金屬	鐵 Iron	Fe	II or III	56
	鉻 Chromium	Cr	III	52
	錳 Monganese	Mn	II	55
	鎳 Nickel	Ni	II	59
	鈷 Cobalt	Co	II	59
	錫 Tin	Sn	II or V	119
	鉛 Lead	Pb	II	207
	(鉍)Bismuth	Bi	III	208
	銅 Copper	Cu	II	64
	銾 Mercury(水銀)	Hg	II	200
	銀 Silver	Ag	I	108
	金 Gold	An	III	197
	鉑 Platinum(白金)	Pt	IV	195

(註) 元素 (Element) 亦稱原質。

表中有( )者係比較不重要者。

(B) 主要根表(Radicaes)

(根名)	(符號)	(根性)	(原子價)	(原子結合狀態)
氫氧根	OH	′	I	$-O-H$
硫酸根	SO_4	″	II	$\begin{matrix}-O\\-O\end{matrix}\!>\!S\!<\!\begin{matrix}=O\\=O\end{matrix}$
硝酸根	NO_3	′	I	$-O-N\!<\!\begin{matrix}=O\\=O\end{matrix}$
炭酸根	CO_3	″	II	$\begin{matrix}-O\\-O\end{matrix}\!>\!C=O$
錏根	NH_4	•	I	$(NH_3)H-$
鯖根	CN	′	I	$-C\equiv N$
正磷酸根	PO_4	‴	III	$\begin{matrix}-O\\-O\\-O\end{matrix}\!>\!P=O$

(C) 主要方程式表

一　　畫

1. 一氧化二氮之製法：$NH_4NO_3 = 2H_2O + N_2O$(加熱)

2. 一氧化氮之製法：$3Cu + 8HNO_3$

$= 3Cu(No_3)_2 + 4H_2O + 2NO$(加熱)

3. 一縮二酪酸鉀之製法：$2K_2CrO_4 + H_2SO_4$

$= K_2SO_4 + H_2O + K_2Cr_2O_7$(溶液反應)

二　　畫

4. 二氧化二氫之製法：$BaO_2 + H_2SO_4 = BaSO_4 + H_2O_2$

(常温)

5. 二氧化二氫之氧化作用(漂白)$H_2O_2 = H_2O + O$

6. 二氧化硫之製法：$Cu + 2H_2SO_4$

$= CuSO_4 + 2H_2O + SO_2$(加熱)

7. 二氧化氮之製法：$2Pb(NO_3)_2$

$= 2PbO + O_2 + 4NO_2$(加熱)

8. 二氧化碳之製法：$CaCO_3 + 2HCl$

$= CaCl_2 + H_2O + CO_2$(常温)

9. 二氧化碳與石灰水：$CO_2 + Ca(OH)_2$

$= H_2O + CaCO_3$(短時間中)

$2CO_2 + Ca(OH)_2 = Ca(CO_3H)_2$(長時間中)

10．二硫化碳之製法：$C+2S=CS_2$（電爐）

四 畫

11．王水之作用：$HNO_3+3HCl=NOCl+2H_2O+2Cl$（溶液）

12．王水中金之分解：$An+3Cl\longrightarrow AnCl_3$（常温）

13．火藥之燃燒：$2KNO_3+S+3C=3CO_2+N_2+K_2S$（點火）

五 畫

14．生石炭之製法：$CaCO_3\rightleftharpoons CaO+CO_2$（灼熱）

15．甘汞之製法：$HgCl_2+Hg=2HgCl$（昇華）

八 畫

16．明礬之製法：$Al_2(SO_4)_3K_2SO_4+24H_2O$

$=K_2SO_4\cdot Al_2(SO_4)_3.24H_2O$（溶液反應）

17 昇汞之製法：$HgSO_4+2NaCl=Na_2SO_4+HgCl_2$（昇華）

18．金與王水：$An+3Cl+HCl=HAnCl_4$（常温）

九 畫

19．炭酸鉀之製法：$2K+2H_2O=2KOH+H_2$（電解法）

$2KOH+CO_2=K_2CO_3+H_2O$

十 畫

20．氟化氫之製法：$CaF_2+H_2SO_4=CaSO_4+2HF$（加熱）

21．氟氫酸對於玻璃之作用：SiO_2+4HF

$=2H_2O+SiF_4$（常温）

22. 氧之製法：$2KClO_3=2KCl+3O_2$（加熱）

23. 臭氧之製法：$3O_2 \rightleftharpoons 2O_3$（無聲放電）

24. 炭酸鈉之製法：$2NaCl+H_2SO_4=Na_2SO_4+2HCl$（加熱）

$Na_2SO_4+2C=2a_2S+2CO_2$（煆燒）

$Na_2S+CaCO_3=Na_2CO_3+CaS$（煆燒）

25. 炭酸氫鈉之製法：$NH_3+H_2O+CO_2+NaCl$

$=NH_4Cl+NaHCO_3$

26. 砷之製法：$4FeAsS=4FeS+As_4$（昇華）

十　一　畫

27. 氫之製法：$Zn+H_2SO_4=H_2+ZnSO_4$（常温）

28. 氫之性質：$H_2+Cl_2=2HCl$（常温）

29. 硇精之製法：$2NH_4Cl+CaO$

$=CaCl_2+H_2O+2NH_3$（加熱）

30. 硇精之溶解：$NH_3+H_2O=NH_4OH$（常温）

31. 硅之製法：$SiO_2+2Mg=2MgO+Si$（強熱）

32. 氫氧化鈉之製法：$2KCl \longrightarrow 2K+2H_2O$

$=2KOH+H_2$（電解）

十　二　畫

33. 氮之製法：$NH_4NO_3=2H_2O+N_2$（加熱）

34. 硝酸之製法：$KNO_3 + H_2SO_4 = KHSO_4 + HNO_3$(加熱)

又　$NaNO_3 + H_2SO_4 = NaHSO_4 + HNO_3$

(加熱)

35. 鈉之製法：$2NaOH = 2Na + H_2 + O_2$(溶融電解)

36. 鈉與水之分解：$2Na + 2H_2O = 2NaOH + H_2$(常溫)

37. 硝石之製法：$KCl + NaNO_3 = NaCl + KNO_3$(溶液反應)

38. 硬水之軟化法：$Ca(HCO_3)_2 = CaCO_3 + CO_2 + H_2O$

(煮沸)

又　$CaSO_4 + Na_2CO_3 = CaCO_3 + Na_2SO_4$(常溫)

十　三　畫

39. 氯之製法：$4HCl + MnO_2 = MnCl_2 + 2H_2O + Cl_2$ 加熱

40. 氯之漂白作用：$Cl_2 + H_2O = 2HCl + O$(日光)

41. 氯化氫之製法：$NaCl + H_2SO_4 = HCl + NaHSO_4$(低溫)

42. 氯化物之鑑識：$HCl + AgNO_3 = AgCl$(白色沉澱)

$+ HNO_3$(常溫)

43. 溴之製法：$2KBr + 2H_2SO_4 + MnO_2$

$= K_2SO_4 + MnSO_4 + 2H_2O + Br_2$(加熱)

44. 溴化物之鑑識：$HBr + AgNO_3 = AgBr$(淡黃沈澱)

$+ HNO_3$(溶液)

45. 碘之製法：$2NaI + 2H_2SO_4 + MnO_2$

$=Na_2SO_4+MnSO_4+2H_2O+I_2$(加熱)

46. 碘化物之鑑識：$KI+AgNO_3=KNO_3+AgI$(黃沈澱)(加熱)

47. 硫化氫之製法：$FeS+H_2SO_4=FeSO_4+H_2S$(常温)

48. 硫化氫之反應：$CuSO_4+H_2S=H_2SO_4+CuS$(黑沈澱)

49. 硫酸之製法：$SO_3+H_2O=H_2SO_4$(常温)

又　$SO_2+H_2O+NO_2=NO+H_2SO_4$(觸媒NO)

50. 硫酸根離子之鑑識：$SO_4^{=}+Ba^{++}\longrightarrow BaSO_4$(常温)

51. 氯化錏之熱離：$NH_4Cl\rightleftarrows HCl+NH_3$(加熱)

52. 硼之製法：$B_2O_3+3Mg=3MgO+2B$

53. 硼酸之製法：$Na_2B_4O_7+2HCl+5H_2O$

$=2NaCl+4H_3BO_3$(常温)

54. 硼砂之製法：$4H_3BO_3+Na_2CO_3$

$=CO_2+6H_2O+NaB_4O_7$(煮沸)

55. 鉀之製法：$2KOH=2K+H_2O+O$(溶融電解)

56. 鉀與水：$2K+2H_2O=2KOH+H_2$(常温)

57. 鈣之提煉：$CaCl_2=Ca+Cl_2$(溶融電解)

58. 鈣與水之分解：$Ca+2H_2O=H_2+Ca(OH)_2$(常温)

59. 鋁之提煉：$2Al_2O_3=3O_2+4Al$(溶融電解)

60. 鉛之提煉：$2pbS+3O_2=2pbO+3SO_2$(強熱)

$$2pbO+PbS=3Pb+SO_2$$ (強熱)

61．酪酸鉀之製法：$4Fe(CrO_2)_2+8K_2CO_3+7O_2$

$=2Fe_2O_3+8CO_2+8K_2CrO_4$ (灼熱)

62．鉑與王水：$Pt+4Cl+2HCl=H_2PtCl_6$ (常温)

十　四　畫

63．漂白粉之製法：$Ca(OH)_2+Cl_2$

$=Ca(OCl)Cl+H_2O$ (常温)

64．銅之提煉：$2Cu_2O+C=4Cu+CO_2$ (灼熱)

十　五　畫

65．鋅之提煉：$2ZnS+3O_2=2ZnO+2SO_2$ (煆燒)

$ZnO+C=CO+Zn$ (蒸溜)

66．熟石灰之製法：$CaO+H_2O=Ca(OH)_2$ (常温)

67．鋇之加水分解：$Ba+2H_2O$ (作用烈)

$=Ba(OH)_2+H_2$ (常温)

68．鋇鹽之識別：$Ba^{++}+SO_4^{=}\longrightarrow BaSO_4$ (溶液反應)

69．銀之提煉：$Ag_2S+2NaCl=Na_2S+2AgCl$ (灼熱)

$2AgCl+Fe=FeCl_2+2Ag$

十　六　畫

70．銻之製法：$Sb_2S_3+3Fe=3FeS+2Sb$ (強熱)

71．錫之提煉：$SnO_2+2C=Sn+2CO$ (灼熱)

72．汞之提煉：$HgS+O_2=SO_2+Hg$（焙燒辰砂而蒸溜之）

73．錳酸鉀之製法：$3MnO_2+6KOH+KClO_3$

$=KCl+3H_2O+3K_2MnO_4$（灼熱）

十　七　畫

74．鍶與水之分解：$Sr+2H_2O$（作用烈）

$=Sr(OH)_2+H_2$（常溫）

75．鎂之提煉：$MgCl_2=Mg+Cl_2$（溶融電解）

十　八　畫

76．磷之製法：$2Ca_3(PO_4)_2+6SiO_2+10C$

$=6CaSiO_3+10CO+P_4$（電爐）

77．磷之燃燒：$P_4+5O_2=2P_2O_5$（點火）

78．磷化三氫之製法：$P_4+3KOH+3H_2O$

$=3KH_2PO_2+PH_3$（加熱）

79．磷酸之製法：$3P+5HNO_3+2H_2O$

$=5NO+3H_3PO_4$（加熱）

二　十　一　畫

80．鐵之提煉：$Fe_2O_3+3C=3CO+2Fe$（灼熱）