Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2020**

Diskrete Mathematik

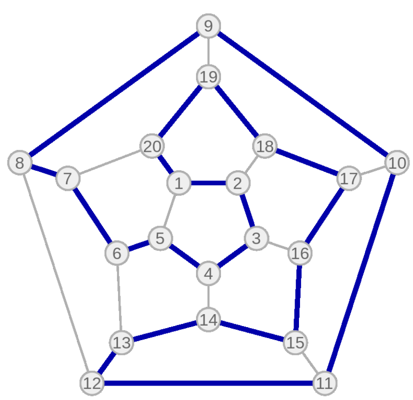
Vorlesung 22

Hier hat Vorli die Fragebögen von Dr. Eisenbeis zerfetzt. Zum Glück hat Dr. Eisenbeis alles schon digital abgespeichert.

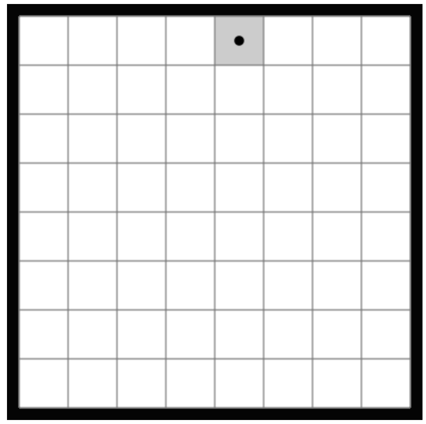
Hamiltonkreise

Definition 22.1. Ein Kreis in einem Graphen (V, E) heißt *Hamiltonkreis*, wenn in ihm jeder Knotenpunkt vorkommt.

Da in einem Kreis ein Punkt höchstens einmal vorkommt, kommt in einem Hamiltonkreis jeder Punkt genau einmal vor. Ein *Hamiltonscher Pfad* ist ein Kantenzug, bei dem jeder Knoten genau einmal durchlaufen wird, die Enden müssen aber nicht wie bei einem Hamiltonkreis notwendigerweise durch eine Kante verbunden sein.



Definition 22.2. Ein Graph (V, E) heißt *hamiltonsch*, wenn es in ihm einen Hamiltonkreis gibt.



Der Schachpferdgraph: Die Knoten sind die Schachfelder und zwei Felder sind durch eine Kante miteinander verbunden, wenn man durch einen Pferdsprung von einem Feld zum andern kommen kann. Die Animation zeigt einen hamiltonschen Pfad, der kein Hamiltonkreis ist. Gibt es einen Hamiltonkreis?

Der folgende Satz heißt Satz von Ore.

Satz 22.3. *Es sei $G = (V, E)$ ein Graph mit mindestens drei Elementen, der die Bedingung*

$$d(u) + d(v) \geq \# (V)$$

für je zwei nicht adjazente Knoten u, v erfüllt. Dann ist G hamiltonsch.

Beweis. Wir argumentieren bei einer fixierten Knotenmenge absteigend über die Kantenmenge. Für einen vollständigen Graphen ist die Aussage richtig. Wir müssen zeigen, dass die Aussage richtig bleibt, wenn man aus einem Graphen, für den die Aussage gilt, eine Kante herausnimmt. Es sei also G ein Graph, für den es einen Hamiltonkreis gibt, und es sei $L = \{x, y\}$ die Kante, die wir herausnehmen. Sei H der verkleinerte Graph. Wenn es in G einen Hamiltonkreis gibt, in dem L nicht vorkommt, so ist dies direkt ein Hamiltonkreis für H. Sei also (alle $\sim$ beziehen sich auf G)

$$x = v_1 \sim v_2 \sim \ldots \sim v_{n-1} \sim v_n = y$$

mit $n = \# (V)$ ein Hamiltonkreis von G. Wir betrachten die Mengen

$$A = \{v_i \mid x \text{ und } v_{i+1} \text{ sind benachbart}\}$$

und

$$B = \{v_i \mid y \text{ und } v_i \text{ sind benachbart}\}.$$

Dabei ist (in der Definition von A) v_{n+1} als v_1 zu interpretieren und die Nachbarschaften beziehen sich auf H. Aufgrund der Voraussetzung über die Grade ist

$$\# (A) + \# (B) \geq n.$$

Das Element y gehört nicht zur Vereinigung $A \cup B$, da ein Knotenpunkt nicht mit sich selbst benachbart ist. Daher gibt es nach der Siebformel ein Element

$$v_k \in A \cap B.$$

Es gibt also die Verbindungskanten $\{x, v_{k+1}\}$ und $\{y, v_k\}$ und somit den Hamiltonkreis

$$x \sim v_2 \sim \ldots \sim v_{k-1} \sim v_k \sim y \sim v_{n-1} \sim \ldots \sim v_{k+1},$$

der ohne die Kante L auskommt und daher ein Hamiltonkreis in H ist. $\square$

Abbildungsverzeichnis