Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

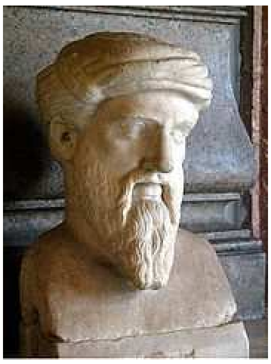
Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 42

Lücken auf der Zahlengeraden

Eine wichtige Intuition, die sich mit den Punkten auf (der positiven Hälfte davon) dem Zahlenstrahl und mit positiven reellen Zahlen verbindet, ist, dass sie alle möglichen Längen repräsentieren. Wenn man eine bestimmte Länge als Einheitslänge fixiert (also eine 1 auf dem Zahlenstrahl), so kann man jede natürliche Zahl durch das entsprechende Vielfache dieser Einheitsstrecke auf dem Strahl finden. Dies lässt sich durch mehrfaches Abtragen der Strecke realisieren. Auch eine rationale Zahl repräsentiert eine sinnvolle Länge, der Bruch $\frac{a}{b}$ repräsentiert diejenige Strecke, die die ganzzahlige Strecke a in b gleichlange Teile unterteilt. Diese Unterteilungspunkte kann man sich gut vorstellen, und sie lassen sich geometrisch unter Bezug auf die Strahlensätze auch konstruieren, wie zu Beginn der 24. Vorlesung ausgeführt und auch in der Konstruktion der rationalen Zahlen dargestellt wurde.

Wir beschäftigen uns hier mit der Frage, ob es über die rationalen Zahlen hinaus sinnvolle Streckenlängen gibt. Gemäß Satz 28.7 kann man jedes Element eines archimedisch angeordneten Körpers (und damit die Punkte der Zahlengeraden) durch Dezimalbrüche (also insbesondere durch rationale Zahlen) beliebig gut approximieren. Wenn man also nur an so was wie der Messgenauigkeit für beliebige Streckenlängen interessiert ist, braucht man die folgenden Überlegungen nicht. Es wird sich aber herausstellen, dass sehr prägnante Streckenlängen nicht durch rationale Zahlen exakt erfasst werden können, sondern dass man dazu neue Zahlen braucht.

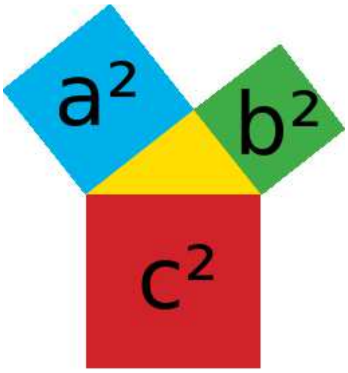


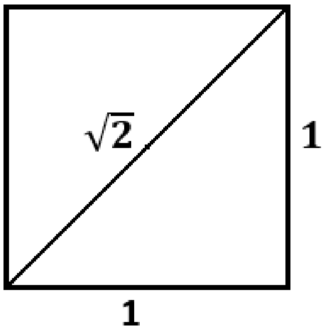
Pythagoras von Samos lebte im sechsten vorchristlichen Jahrhundert. „Sein“ Satz war aber schon tausend Jahre früher in Babylon bekannt.

Bemerkung 42.1. Aus der elementaren Geometrie der Ebene ist der Satz des Pythagoras bekannt, der besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenusenlänge c und den Kathetenlängen a und b die Gleichheit

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gilt. Die Flächeninhalte der Quadrate zu den Katheten ergänzen sich also zum Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates. Ein besonders bekanntes rechtwinkliges Dreieck ist das mit den ganzzahligen Seitenlängen $3, 4, 5$. Man kann beliebige Seitenlängen a, b vorgeben und diese miteinander rechtwinklig anordnen und erhält durch Verbindung der beiden anderen Enden ein rechtwinkliges Dreieck. Aufgrund des Satzes des Pythagoras ist dann die Länge der Hypotenuse (nicht nur geometrisch, sondern auch) rechnerisch festgelegt. Die Hypotenusenlänge sollte also, wenn a und b sinnvolle Streckenlängen sind, auch eine sinnvolle, mathematisch erfassbare Streckenlänge sein. Dies muss insbesondere für ganzzahlige a, b gelten, für die Summe a^2+b^2 von zwei Quadratzahlen sollte es also stets eine Zahl geben, deren Quadrat gleich dieser Summe ist.





Beispiel 42.2. Wir betrachten ein Quadrat mit Seitenlänge 1. Die Diagonale darin kann man als Hypotenuse des in dem Quadrat zweifach liegenden rechtwinkligen Dreiecks auffassen. Nach dem Satz des Pythagoras hat die Länge der Diagonalen die Eigenschaft, dass ihr Quadrat davon gleich

$$1^2 + 1^2 = 2$$

ist. Inwiefern gibt es eine Zahl x mit $x^2 = 2$? Dies ist keine einfache Frage. Was man ziemlich schnell begründen kann, ist, dass es innerhalb der rationalen Zahlen eine solche Zahl nicht geben kann! Wenn wir nämlich annehmen, dass die rationale Zahl

$$x = \frac{a}{b}$$

die Eigenschaft

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$$

besitzt, so kann man zunächst annehmen, dass die Darstellung gekürzt ist, also a und b keinen gemeinsamen Teiler ≥ 2 haben. Durch Multiplikation mit b^2 erhält man innerhalb der natürlichen Zahlen die Gleichung

$$a^2 = 2b^2.$$

Nennen wir diese Zahl z. Aufgrund der rechten Seite sieht man, dass diese Zahl gerade ist. Dann muss auch a gerade sein, da das Quadrat einer ungeraden Zahl ungerade ist. Wir können also

$$a = 2d$$

schreiben und aus der Gleichung

$$(2d)^2 = 2b^2$$

einmal die 2 kürzen, was

$$2d^2 = b^2$$

ergibt. Mit dem Argument von eben erhält man, dass auch b gerade ist, im Widerspruch zur gekürzten Darstellung.

Wir führen die folgende Sprechweise ein, die wir hauptsächlich für Körper anwenden werden.

Definition 42.3. In einem kommutativen Halbring R nennt man zu $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und einem Element $r \in R$ ein Element $x \in R$ mit

$$x^k = r$$

eine k-te *Wurzel* von r.

Im Allgemeinen gibt es keine Wurzeln, und wenn es welche gibt, so sind sie nicht eindeutig bestimmt. Im Kontext von Strecken und unter den positiven reellen Zahlen gibt es, wie wir später sehen werden, eindeutig bestimmte k-te Wurzeln. Sie werden mit $\sqrt[k]{x}$ bezeichnet, wobei wir diese Bezeichnung gelegentlich schon verwenden werden. Eine weitere Bezeichnungsweise ist $x^{\frac{1}{k}}$. Bei $k = 2$ spricht man von *Quadratwurzeln*, in diesem Fall schreibt man $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

Wenn man sich auf die positive Hälfte eines angeordneten Körpers beschränkt, so gibt es maximal eine Wurzel. Im Falle der Existenz bezieht sich die Bezeichnung

$$\sqrt[k]{a} = a^{\frac{1}{k}}$$

auf dieses eindeutig bestimmte Element.

Lemma 42.4. *Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $a \in K_{\geq 0}$. Ferner sei $n \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es höchstens ein $x \in K_{\geq 0}$ mit*

$$x^n = a.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 25.18 (1). Wenn $y > x \geq 0$ ist, so ist auch $y^n > x^n \geq 0$ und können nicht beide gleich a sein. □

Verschiedene Wurzeln aus verschiedenen Elementen in einem angeordneten Körper kann man häufig einfach vergleichen, indem man zu einer geeigneten Potenz übergeht und Lemma 25.18 heranzieht. Beispielsweise ist

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt[4]{9},$$

da

$$\left(\sqrt[3]{5}\right)^{12} = 5^4 = 625 < 729 = 9^3 = \left(\sqrt[4]{9}\right)^{12}$$

ist.

Eine weitgehende Verallgemeinerung der obigen Beobachtung, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, kommt im folgenden Satz zum Ausdruck.

Satz 42.5. *Sei $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ die kanonische Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl n. Sei k eine positive natürliche Zahl und sei vorausgesetzt, dass nicht alle Exponenten α_i ein Vielfaches von k sind. Dann gibt es keine rationale Zahl q mit der Eigenschaft*

$$n = q^k,$$

d.h. innerhalb der rationalen Zahlen besitzt n keine k-te Wurzel.

Beweis. Nehmen wir an, dass die rationale Zahl

$$q = \frac{a}{b}$$

die Eigenschaft

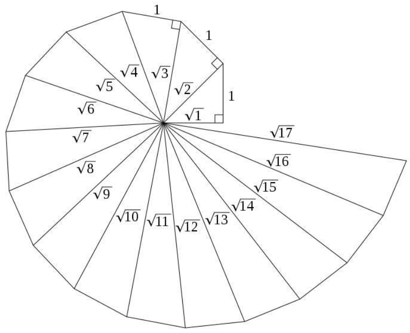
$$q^k = \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{a^k}{b^k} = n$$

besitzt. Wir multiplizieren mit b^k und erhalten in $\mathbb{N}$ die Gleichung

$$a^k = b^k \cdot n.$$

Wegen Satz 21.4 besitzt diese Zahl, nennen wir sie z, eine eindeutige Primfaktorzerlegung und insbesondere ist der p-Exponent davon zu jeder Primzahl p eindeutig bestimmt. Sei p eine Primzahl mit der Eigenschaft, dass der p-Exponent von n kein Vielfaches von k ist, was es nach Voraussetzung geben muss. Von der rechten Seite der letzten Gleichung her ist der p-Exponent von z kein Vielfaches von k, von der linken Seite her aber doch, was ein Widerspruch ist. □

Diese Aussage bedeutet, dass eine natürliche Zahl innerhalb der rationalen Zahlen nur dann eine Wurzel besitzt, wenn sie schon innerhalb der natürlichen Zahlen eine Wurzel besitzt. Insbesondere sind Quadratwurzeln aus Primzahlen nie rational.



Die Spirale des Theodorus. In dieser Weise kann man alle Quadratwurzeln von natürlichen Zahlen geometrisch konstruieren.

Bemerkung 42.6. Die Quadratwurzel aus 2 tritt als Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit Seitenlänge 1 auf und ist von daher sicher eine sinnvolle Streckenlänge. Wie sieht es mit den anderen Quadratwurzeln zu natürlichen Zahlen n aus? Wenn man die Diagonale im Quadrat mit Seitenlänge n betrachtet, so besitzt die Diagonale die Seitenlänge $\sqrt{2}n$. Diese Zahl entsteht also durch eine einfache arithmetische Operation aus den bekannten natürlichen Zahlen und der $\sqrt{2}$. Wenn man Rechtecke mit ganzzahligen Seitenlängen betrachtet, so erhält man als Diagonallängen beispielsweise $\sqrt{5}$ (Seitenlängen 1 und 2), $\sqrt{10}$ (Seitenlängen 1 und 3), $\sqrt{13}$ (Seitenlängen 2 und 3), u.s.w. Man kann aber durch eine einfach geometrische Konstruktion induktiv zeigen, dass jede Quadratwurzel aus einer natürlichen Zahl als Strecke auftritt. Dazu startet man mit der Strecke $\sqrt{2}$ und macht daraus die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete die Seitenlänge 1 besitzt. Die Hypotenuse dieses Dreiecks hat dann die Länge

$$\sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

So kann man aus jedem $\sqrt{n}$ auch die Länge $\sqrt{n+1}$ erhalten. Diese Prozedur wird in der *Spirale von Theodorus* veranschaulicht.

Der goldene Schnitt kommt auch in der Natur vor, hier im Verhältnis der benachbarten Umläufe bei einer Schnecke.

Beispiel 42.7. Es sei eine Strecke mit den Endpunkten A und B gegeben. Ein Punkt G auf der Strecke unterteilt die Strecke in zwei Teilstrecken. Wir suchen einen Punkt G, der die Eigenschaft besitzt, dass das Verhältnis der großen Teilstrecke zur kleinen Teilstrecke mit dem Verhältnis der Gesamtstrecke zur großen Teilstrecke übereinstimmt. Diese Eigenschaft definiert den sogenannten *goldenen Schnitt*. Wenn man mit der Einheitsstrecke von 0 bis 1 auf der Zahlengeraden arbeitet, so geht es um die Bedingung

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Diese Bedingung kann man zu

$$1 - x = x^2$$

bzw.

$$x^2 + x - 1 = 0$$

umwandeln. Eine weitere Umformung führt auf

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

bzw.

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4},$$

also

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \sim 0,6180339\ldots.$$

Da $\sqrt{5}$ irrational ist, ist auch die Zahl des Goldenen Schnitts irrational. Der Kehrwert dieser Zahl, also das Verhältnis von großer Strecke zu kleiner Strecke, ist übrigens

$$\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \sim 1,6180339\ldots.$$

Es liegt also die Besonderheit vor, dass die Nachkommaziffern von x und von $1/x$ übereinstimmen.

Bemerkung 42.8. Die Beobachtung, dass eine Gleichung der Form

$$x^2 = c$$

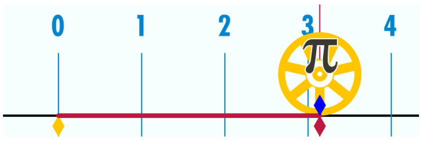
mit $c \in \mathbb{Q}$ innerhalb der rationalen Zahlen im Allgemeinen keine Lösung besitzt, und dass man daher nach einer Erweiterung der Zahlen suchen sollte, in dem es eine Lösung gibt, sollte man in Analogie zu den Gleichungen sehen, die vorhergehende Zahlenbereichserweiterungen motiviert haben. Die Gleichungen der Form

$$a = b + x,$$

die innerhalb der natürlichen Zahlen formulierbar, aber nicht lösbar sind, führten zur Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{Z}$, und die Gleichungen der Form

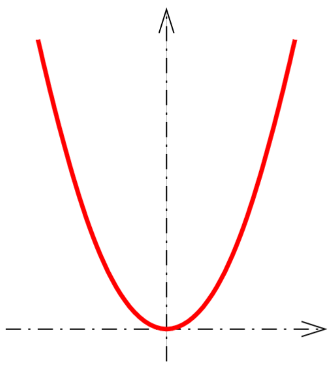
$$a = bx,$$

die innerhalb der ganzen Zahlen formulierbar, aber nicht lösbar sind, führten zur Zahlenbereichserweiterung von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Q}$.



Beispiel 42.9. Ein Kreis mit der Einheitsstrecke als Durchmesser (oder als Radius) hat einen bestimmten „Umfang“. Ist dieser Umfang eine sinnvolle Streckenlänge? Einerseits ist der Kreisbogen gekrümmt und nicht gerade, wie das Strecken sind, von daher ist es keineswegs selbstverständlich, dass der Umfang eine sinnvolle Streckenlänge sein soll. Andererseits ist aber die Vorstellung naheliegend, dass man den Kreis an einer Geraden (wie der Zahlengeraden) abrollen kann und dabei schauen kann, wohin man nach genau einer vollen Umdrehung gelangt. Die dadurch auf der Zahlengeraden markierte Zahl, also die Kreisbogenlänge, nennt man π. (wenn man die Einheitsstrecke als Radius nimmt, erhält man beim Abrollen 2π). Dies ist eine sowohl von ihrer mathematischen Natur her als auch von der numerischen Berechnung her schwierige Zahl. Zum Beispiel ist es nicht einfach zu zeigen, dass diese Zahl nicht rational ist.

Die Irrationalität von π wurde im Laufe des achtzehnten Jahrhunderts gezeigt, ebenso die Irrationalität der Zahl e. Es ist bis heute unbekannt, ob die Summe $e + \pi$ irrational ist.



Beispiel 42.10. Wir betrachten die *Standardparabel*, also den Graphen der Funktion

$$K \longrightarrow K,\, t \longmapsto t^2,$$

wobei K ein archimedisch angeordneter Körper ist. Kann man dem Ausschnitt des Graphen, der sich oberhalb des Einheitsintervalles von 0 bis 1 erstreckt, eine sinnvolle Länge zuordnen? Wenn ja, gehört diese Zahl zu den rationalen Zahlen?

Bemerkung 42.11. Nach Satz 28.7 führt jedes Element $x \in K$ in einem archimedisch angeordneten Körper zu einer Dezimalbruchfolge, für die die Abschätzung

$$x_n \,\leq\, x \,<\, x_n + \frac{1}{10^n}$$

gilt und die nach Korollar 28.10 gegen x konvergiert. Grundsätzlich kann man sich zu einer jeden Dezimalbruchfolge, also einer Folge aus Dezimalbrüchen

$$x_n \,=\, \frac{a_n}{10^n}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ und mit der Eigenschaft

$$\frac{a_n}{10^n} \,\leq\, \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} \,<\, \frac{a_n + 1}{10^n}$$

fragen, ob es dazu einen Punkt in dem Körper gibt, gegen den die Folge konvergiert. Dies ist keineswegs immer der Fall, für die rationalen Zahlen gilt es nicht, und zwar werden wir später in Satz 47.7 sehen, dass genau die periodischen Dezimalbruchfolgen gegen eine rationale Zahl konvergieren. Gibt es für die nichtperiodischen Dezimalbruchfolgen eine sinnvolle Interpretation als eine Zahl? Nichtperiodische Dezimalbruchfolgen können durchaus systematisch sein, wie die (in Kommazahlschreibweise gegebenen) Dezimalbruchfolgen

$$0,101001000100001000001\ldots$$

oder

$$0,123456789101112131415\ldots$$

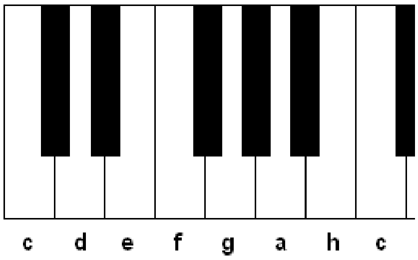
verdeutlichen.

Bemerkung 42.12. Die Frage, inwiefern es über die rationalen Zahlen hinaus weitere sinnvolle Zahlen gibt, geht in die griechische Antike zurück. Die Frage wurde in der Form gestellt, ob je zwei in natürlicher Weise gegebene Strecken zueinander kommensurabel sind, ob es also eine dritte Strecke gibt, von der beide Strecken ganzzahlige Vielfache sind. Die Pythagoreer waren von der Harmonie des Universums überzeugt und das schloss ihrer Auffassung nach mit ein, dass alle Streckenverhältnisse durch ganze Zahlen ausgedrückt werden können. Solche ganzzahligen Beziehungen fanden sie in der Musik (Schwingungsverhältnisse) und vermuteten sie für die Planeten und ihre Bewegungen und für die gesamte Geometrie. Es wird darüber spekuliert, ob in den pythagoreischen Kreisen die in Beispiel 42.2 besprochene

Überlegung, die die Irrationalität der $\sqrt{2}$ begründet (die Inkommensurabilität von Seitenlänge und Diagonale in einem Quadrat), bekannt war und sogar geheimgehalten wurde. Jedenfalls setzte sich später in der Antike die Erkenntnis durch, dass es irrationale Zahlen geben muss.

Wie in Beispiel 22.7 erwähnt, sind die Schwingungsverhältnisse bei einer Tonart feste rationale Verhältnisse. Ein Klavier wird allerdings anders gestimmt, rationale Verhältnisse gelten also noch nicht einmal in der Musik.

Beispiel 42.13. In der gleichstufigen Stimmung eines Klaviers zerlegt man eine Oktave in zwölf gleichgroße Frequenzverhältnisse. Da eine Oktave das Frequenzverhältnis $2:1$ bedeutet, ist das Frequenzverhältnis von zwei benachbarten (weißen oder schwarzen) Tasten durch $\sqrt[12]{2}$ gegeben. Somit sind die Schwingungsverhältnisse zwischen den Tönen im Allgemeinen irrational. Der Vorteil bei dieser Stimmung ist, dass man jede Tonart auf dem Klavier mit unmerklichen Abweichungen von den harmonischen rationalen Verhältnissen spielen kann.



Beispiel 42.14. Wir betrachten ein Quadrat mit den Eckpunkten

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (1,1)\,.$$

Eine Schnecke kriecht innerhalb des Quadrates von $(0,0)$ nach $(1,1)$ und eine zweite Schnecke von $(1,0)$ nach $(0,1)$. Treffen sich die beiden Schleimspuren? Diese Frage ist nicht ohne Bezug auf Zahlenbereiche zu beantworten. Wenn es sich um (stückweise) lineare Bewegungen handelt, die beispielsweise über den rationalen Zahlen definiert sind, so gibt es auch einen Schnittpunkt mit rationalen Koordinaten (vergleiche Korollar 34.8). Wenn sich dagegen die beiden Schnecken längs der Kreise mit Radius 1 bewegen, so gibt es „optisch“ betrachtet einen Schnittpunkt (x,y). Da dieser auf den beiden Kreisen liegt, erhalten wir die beiden Bedingungen

$$x^2+y^2 = 1$$

und

$$(x-1)^2+y^2 = 1,$$

was auf

$$0 = x^2-(x-1)^2 = 2x-1,$$

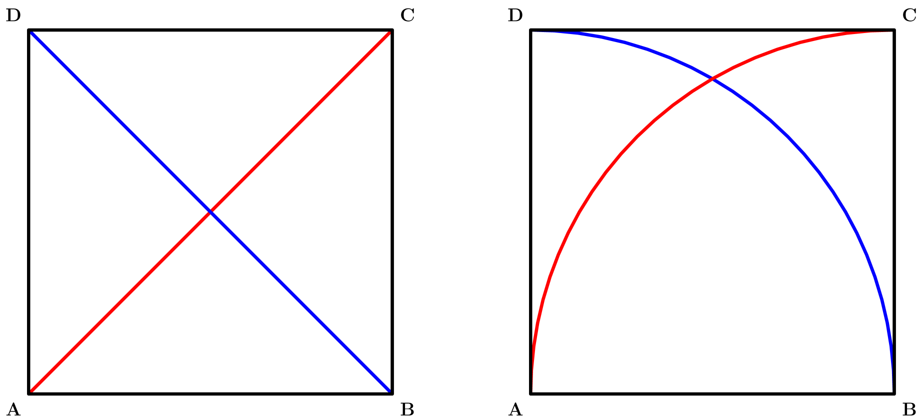
also $x = \frac{1}{2}$ führt und auch von der Symmetrie der Situation her klar ist. Dies führt allerdings zu

$$y^2 = \frac{3}{4},$$

also

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

und dies ist nach Satz 42.5 eine irrationale Zahl. Es gibt also innerhalb der rationalen Zahlen keinen Schnittpunkt. Innerhalb der reellen Zahlen werden wir mit dem Stetigkeitskonzept und dem Zwischenwertsatz eine Situation kennenlernen, indem es stets Schnittpunkts gibt.



Lücken schließen

Wie kann man die irrationalen Lücken auf der Zahlengeraden in sinnvoller Weise adressieren bzw. lokalisieren und letztlich schließen? Mit diesen Fragen werden wir uns in den nächsten Vorlesungen beschäftigen.

Abbildungsverzeichnis