

Standardisierte kompetenzorientierte  
schriftliche Reifeprüfung

AHS

11. Mai 2015

# Mathematik

Teil-2-Aufgaben

Korrekturheft

# Aufgabe 1

## 200-m-Lauf

a) Lösungserwartung:

$$s''(t) = -\frac{7}{75} \cdot t + 1,4$$

$$s'''(t) = -\frac{7}{75}$$

$$s''(t) = 0 \Leftrightarrow t = 15$$

$$s'''(15) = -\frac{7}{75} \neq 0$$

Mögliche Interpretationen:

Nach ca. 15 Sekunden erreicht die Läuferin ihre Höchstgeschwindigkeit.

oder:

Bis zum Zeitpunkt  $t = 15$  Sekunden nimmt die Geschwindigkeit der Läuferin zu.

**Lösungsschlüssel:**

– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei der Nachweis, dass bei  $t = 15$  eine Wendestelle vorliegt (z. B. durch  $s'''(15) \neq 0$ ), nicht angeführt werden muss.

Toleranzintervall für  $t$ : [14; 16]

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) Lösungserwartung:

$$\frac{200}{26,04} \approx 7,68$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt ca. 7,68 m/s.

Es gibt mindestens einen Zeitpunkt, für den die Momentangeschwindigkeit der Läuferin gleich der mittleren Geschwindigkeit für die gesamte Laufstrecke ist.

**Lösungsschlüssel:**

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit nicht angeführt werden muss.

Toleranzintervall: [7,6; 7,7]

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

# Aufgabe 2

## Altersbestimmung

a) Lösungserwartung:

$$\tau = \frac{\ln(2)}{\lambda} \approx 5728$$

Die Halbwertszeit von  $^{14}\text{C}$  beträgt ca. 5728 Jahre.

Mögliche Überprüfungen:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \approx 0,00098 < \frac{1}{1000}$$

oder:

$$N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot 5728 \cdot 10} \approx 0,00098 \cdot N_0 < \frac{N_0}{1000}$$

Das bedeutet, dass die Nachweisgrenze von  $^{14}\text{C}$  nach 10 Halbwertszeiten unterschritten ist.

**Lösungsschlüssel:**

– Ein Ausgleichspunkt für die richtige Lösung, wobei die Einheit *Jahre* nicht angeführt werden muss.

Toleranzintervall: [5727; 5730]

– Ein Punkt für einen korrekten Nachweis. Jeder korrekte Nachweis, der zeigt, dass nach 10 Halbwertszeiten die Nachweisgrenze von  $^{14}\text{C}$  unterschritten ist, ist ebenfalls als richtig zu werten.

b) Lösungserwartung:

$$0,535 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{\ln(0,535)}{-\lambda} \approx 5169$$

$$0,525 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{\ln(0,525)}{-\lambda} \approx 5325$$

Das Alter der Mumie (in Jahren) lag zum Zeitpunkt ihres Auffindens im Intervall [5169; 5325].

Für große Werte von  $t$  wird der Graph der Funktion  $N$  flacher, d. h., einem Intervall konstanter Länge auf der  $N(t)$ -Achse entspricht ein größeres Intervall auf der  $t$ -Achse.

**Lösungsschlüssel:**

– Ein Punkt für ein korrektes Intervall.

Toleranzintervall für  $t_1$ : [5164; 5174]

Toleranzintervall für  $t_2$ : [5320; 5330]

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Begründung.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Interpretationen:

$N'(t)$  beschreibt die (momentane) Zerfallsgeschwindigkeit von  $^{14}\text{C}$  zum Zeitpunkt  $t$ .

oder:

$N'(t)$  beschreibt die (momentane) Änderungsrate (Abnahmerate) der Anzahl der  $^{14}\text{C}$ -Atome zum Zeitpunkt  $t$ .

$N(t + 1) - N(t) = -\rho \cdot N(t)$	<input checked="" type="checkbox"/>

Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt ist genau dann zu geben, wenn ausschließlich die laut Lösungserwartung richtige Differenzgleichung angekreuzt ist.

# Aufgabe 3

## Blutgruppen

### a) Lösungserwartung:

Blutgruppen: A und AB

Die Aussage ist nicht richtig, weil die Anzahl der Einwohner/innen in den beiden genannten Ländern nicht gleich groß ist.

### Lösungsschlüssel:

- Ein Ausgleichspunkt für die ausschließliche Angabe der beiden Blutgruppen A und AB.
- Ein Punkt für die Angabe, dass die Aussage nicht richtig ist, und eine (sinngemäß) korrekte Begründung dafür.

### b) Lösungserwartung:

Die Wahrscheinlichkeit beträgt 48 %.

Mögliche Berechnung:

$$n = 100, p = 0,15 \Rightarrow \mu = 15$$

$$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0,9 \Rightarrow z = 1,645$$

$$\mu \pm z \cdot \sigma = 15 \pm 1,645 \cdot \sqrt{100 \cdot 0,15 \cdot 0,85} \approx 15 \pm 6 \Rightarrow [9; 21]$$

### Lösungsschlüssel:

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.
- Ein Punkt für ein korrektes Intervall.  
Toleranzintervall für den unteren Wert: [9; 10]  
Toleranzintervall für den oberen Wert: [20; 21]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

c) Lösungserwartung:

Mögliche Berechnung:

$$n = 150, h = 0,48$$

$$2 \cdot \phi(z) - 1 = 0,95 \Rightarrow z = 1,96$$

$$h \pm z \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} = 0,48 \pm 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,48 \cdot (1-0,48)}{150}} \approx 0,48 \pm 0,08 \Rightarrow [40 \% ; 56 \%]$$

Bei gleichem Stichprobenergebnis führen eine größere Stichprobe und/oder ein geringeres Konfidenzniveau zu einer Verringerung der Breite des Konfidenzintervalls.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für ein korrektes Intervall. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder Dezimalzahl) sind ebenfalls als richtig zu werten.  
Toleranzintervall für den unteren Wert: [39 %; 43 %]  
Toleranzintervall für den oberen Wert: [53 %; 57 %]  
Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Angabe der entsprechenden Änderungen beider Parameter.

d) Lösungserwartung:

$$0,75^2 + 0,25^2 = 0,625$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder die gleiche Blutgruppe haben, beträgt 62,5 %.

Der Vater kann nicht Blutgruppe AB haben, denn sobald ein Elternteil Blutgruppe AB hat, hat das Kind laut Tabelle nie Blutgruppe O.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für die richtige Lösung. Äquivalente Schreibweisen des Ergebnisses (als Bruch oder in Prozenten) sind ebenfalls als richtig zu werten. Toleranzintervall: [0,62; 0,63].
- Ein Punkt für die richtige Antwort und eine (sinngemäß) korrekte Begründung, warum (nur) Blutgruppe AB auszuschließen ist.

# Aufgabe 4

## Füllen eines Gefäßes

a) Lösungserwartung:

$$a(h) = k \cdot h + d$$

$$a(0) = d = 10$$

$$a(20) = 20 \cdot k + 10 = 16 \Rightarrow k = 0,3$$

$$a(h) = 0,3 \cdot h + 10$$

Das Integral gibt das Volumen der enthaltenen Flüssigkeit (in ml) an, wenn das Gefäß bis 5 cm unter dem Rand (bzw. bis zu einer Höhe von 15 cm) gefüllt ist.

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Ausgleichspunkt für eine korrekte Formel. Äquivalente Formeln sind ebenfalls als richtig zu werten. Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.
- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.

b) Lösungserwartung:

Die momentane Änderungsrate der Wassermenge beträgt im gesamten Zeitintervall 80 Milliliter pro Sekunde.

$$\frac{q(t_2) - q(t_1)}{t_2 - t_1} = 80$$

**Lösungsschlüssel:**

- Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.
- Ein Punkt für die richtige Lösung.

c) Lösungserwartung:

$$2500 = \int_0^x (3,6 \cdot h + 120) dh = 1,8x^2 + 120x$$

$$1,8x^2 + 120x - 2500 = 0$$

$$x_1 \approx 16,7, \quad (x_2 < 0)$$

Das Wasser steht ca. 16,7 cm hoch.

3,6 gibt diejenige Fläche in  $\text{cm}^2$  an, um die die Querschnittsfläche mit jedem zusätzlichen cm Höhe zunimmt.

oder:

3,6 ist die Steigung der Funktion, die den Inhalt der Querschnittsfläche in der Höhe  $h$  angibt.

**Lösungsschlüssel:**

– Ein Punkt für die richtige Lösung, wobei weder die negative Lösung der quadratischen Gleichung noch die Einheit  $\text{cm}$  angeführt werden müssen.

Toleranzintervall:  $[16,5; 17]$

Die Aufgabe ist auch dann als richtig gelöst zu werten, wenn bei korrektem Ansatz das Ergebnis aufgrund eines Rechenfehlers nicht richtig ist.

– Ein Punkt für eine (sinngemäß) korrekte Interpretation.