Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Arbeitsblatt 55

Übungsaufgaben

Wir erinnern an die beiden folgenden Aufgaben.

Aufgabe 55.1. Es sei K ein Körper und I eine Indexmenge. Zeige, dass

$$K^I = \operatorname{Abb}(I,K)$$

mit stellenweiser Addition und skalarer Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

Aufgabe 55.2. Es sei K ein Körper, sei I eine Indexmenge, und $K^I = \operatorname{Abb}(I,K)$ der zugehörige Vektorraum. Zeige, dass

$$E = \left\{ f \in K^I \mid f(i) = 0 \text{ für alle } i \in I \text{ bis auf endlich viele Ausnahmen} \right\}$$

ein Untervektorraum von K^I ist.

Zu jedem $i \in I$ sei $e_i \in K^I$ durch

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{falls } j = i\,, \\ 0 & \text{sonst}\,, \end{cases}$$

gegeben. Man zeige, dass sich jedes Element $f \in E$ eindeutig als Linearkombination der Familie e_i, $i \in I$, darstellen lässt.

Aufgabe 55.3. Es sei K ein Körper und seien S und T Mengen. Zeige, dass durch eine Abbildung

$$\psi \colon S \longrightarrow T$$

eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Abb}(T,K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(S,K)\,,\ \varphi \longmapsto \varphi \circ \psi,$$

festgelegt ist.

Aufgabe 55.4. Es sei K ein Körper und seien S und T Mengen. Es sei

$$\psi \colon S \longrightarrow T$$

eine Abbildung.

a) Zeige, dass durch $e_s \mapsto e_{\psi(s)}$ eine lineare Abbildung

$$K^{(S)} \longrightarrow K^{(T)}$$

festgelegt ist.

b) Es habe nun ψ zusätzlich die Eigenschaft, dass sämtliche Fasern endlich seien. Zeige, dass dadurch eine lineare Abbildung

$$K^{(T)} \longrightarrow K^{(S)},\, \varphi \longmapsto \varphi \circ \psi,$$

festgelegt ist.

Aufgabe 55.5.*

Sei K ein Körper und seien I und J endliche Indexmengen. Zeige, dass die Abbildung

$$\operatorname{Abb}(I, K) \times \operatorname{Abb}(J, K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(I \times J, K),\, (f, g) \longmapsto f \otimes g,$$

mit

$$(f \otimes g)(i, j) := f(i) \cdot g(j)$$

multilinear ist.

Aufgabe 55.6. Zeige, dass im Allgemeinen in einem Tensorprodukt $V \otimes_K W$ nicht jeder Vektor von der Form $v \otimes w$ ist.

Mit berechnen ist in den folgenden Aufgaben gemeint, die Tensorprodukte als Linearkombinationen von Tensorprodukten zu den Standardvektoren auszudrücken.

Aufgabe 55.7. Berechne in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55.8.*

Berechne in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55.9. Berechne in $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55.10. Berechne in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 55.11. Berechne in $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{3}{7} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -7 \\ \frac{5}{4} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 55.12. Berechne in $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 3-5\mathrm{i} \\ 4+\mathrm{i} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 6 \\ 1-\mathrm{i} \\ 2+3\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 55.13. Berechne in $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ das Tensorprodukt

$$(4-5\mathrm{i}) \otimes (3-7\mathrm{i}) \otimes (-2-6\mathrm{i}) .$$

Aufgabe 55.14.*

Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit dem Dualraum V^*. Zeige, dass es eine Linearform

$$V^* \otimes V \longrightarrow K$$

gibt, die $f \otimes v$ auf $f(v)$ abbildet.

Aufgabe 55.15. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei V^* der Dualraum zu V. Zeige die folgenden Aussagen.

a) Es gibt eine multilineare Abbildung

$$V^* \times W \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, W),\ (f, w) \longmapsto (v \mapsto f(v)w) .$$

b) Es gibt eine lineare Abbildung

$$\psi \colon V^* \otimes W \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(V, W),$$

die $f \otimes w$ auf die lineare Abbildung $v \mapsto f(v)w$ abbildet.

c) Wenn V und W endlichdimensional sind, so ist ψ aus Teil (b) ein Isomorphismus.

Aufgabe 55.16. Es sei K ein Körper und seien

$$(V_1, \langle -,- \rangle_1), \ldots, (V_n, \langle -,- \rangle_n)$$

Vektorräume über K, auf denen jeweils eine Bilinearform $\langle -,- \rangle_i$ fixiert sei. Zeige, dass auf den Tensorprodukt $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ eine Bilinearform $\langle -,- \rangle$ gegeben ist, für die

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_n, w_1 \otimes \cdots \otimes w_n \rangle = \langle v_1, w_1 \rangle_1 \cdots \langle v_n, w_n \rangle_n$$

gilt.

Aufgabe 55.17. Der $\mathbb{R}^4$ sei mit der Minkowski-Standard-Form versehen. Bestimme die zugehörige Linearform auf $\mathbb{R}^4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 55.18. (2 Punkte)

Berechne in $\mathbb{R}^3 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 55.19. (3 Punkte)

Berechne in $\mathbb{C}^2 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^3 \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2$ das Tensorprodukt

$$\begin{pmatrix} 2-\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 5 \\ 3+2\mathrm{i} \\ 4-3\mathrm{i} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -1+\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 55.20. (3 Punkte)

Es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum und $\langle -,- \rangle$ eine Bilinearform auf V, die bezüglich der Basis $v_1, \ldots, v_d$ von V durch die Gramsche Matrix $M = (a_{ij})$ beschrieben werde. Beschreibe die zugehörige Linearform auf $V \otimes_K V$ bezüglich der zugehörigen Basis.

Aufgabe 55.21. (4 Punkte)

Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Stifte eine lineare Abbildung

$$\operatorname{Hom}_K(U, V) \otimes \operatorname{Hom}_K(V, W) \longrightarrow \operatorname{Hom}_K(U, W) ,$$

die $\psi \otimes \varphi$ auf $\varphi \circ \psi$ abbildet.