贈閱

第一卷

第三期

第三期目錄

封面　歐幾里得肖像		頁數
不等式淺說	蕭文燦	1—7
因數分解法	趙家鵬	8—14
關於圓內接四邊形之一定理	李森林	15—16
圓規幾何學	方　烈	17—22
歐幾里得傳	瘦　桐	23—25
世外奇談（長篇小說）	乙　閣	26—33
問題欄		34—36
國立武漢大學廿一年度入學試驗算學試題		37—41
書評（介紹兩本中等算學教授法的名著）	余潛修	42—44
特載　教育部公佈之中學算學課程標準		45—48

不等式淺說

蕭文燦

不等式在數學上地位之重要,實不亞於等式. 顧一般中等教科書,或語焉不詳,或竟付缺如,致初學者一遇不等式之問題,不是無所措手足,即是陷於錯誤而不自知. 本篇分爲基本原理,解法,誘導定理之三部叙述,說理不顧膚淺,舉例不厭求詳,不過妄冀於一般中等學生稍有補助云耳.

I 基本原理

1. 實數大小之定義. 兩數不相等云者卽兩數有大小之謂也. 大小之意義似無有釋明之必要,兩正數之大小亦不難一望而知. 然其數學的意義,究竟爲何?正數與負數間,兩負數間之大小如何規定. 吾人不能不作成一般之定義如下:

二實數 a,b 如 $a-b$ 爲正,則謂 a 大於 b, $a-b$ 爲零,則謂 a 等於 b, $a-b$ 爲負,則謂 a 小於 b.

依此定義可即刻推得數事:

1°. 凡正數皆大於負數. 因 $a-(-b)=a+b$ 也.

2°. 二負數其絕對值大者小,絕對值小者大.

因 $(-a)-(-b)=b-a$. a 比 b 大則 $b-a$ 爲負, a 比 b 小則 $a-b$ 爲正也.

3°. 凡正數皆大於零;凡負數皆小於零.

因 $a-0=a$, $(-a)-0=-a$ 也.

兩數不等之記號通常記為 '$\neq$'. 然孰大孰小則不能分,故如 a 大於 b,今記如:

$$a>b;\cdots\cdots\cdots\cdots(1),$$

a 小於 b 今記如:

$$a<b.\cdots\cdots\cdots\cdots(2).$$

讀者須知(1)式與 $b<a$, (2)式與 $b>a$ 實同表一事. 記號 '>' 開口之向謂之方向. 如 $a>b$ 與 $c>d$ 兩式,謂為同向之不等式. $a>b$ 與 $c<d$,謂為異向之不等式.

凡含 '>' 或 '<' 記號之式皆謂之不等式.

又有 a 不大於 b 之事實記如

$$a \ngtr b,$$

其意指 a 或小於 b 或等於 b. 如

$$a \nless b.$$

則其意為 a 大於 b 或等於 b.

2. 不等式之基本定理.

I. 若 $a>b$, $b>c$ 則 $a>c$.

(證) $(a-b)+(b-c)=a-c$

但依假設 $a-b>0$, $b-c>0$

故 $a-c>0$.

系. 若 $a>b$, $b>c$, $c>d$, $\cdots\cdots m>n$ 則 $a>n$.

II. 若 $a>b$ 則 $a\pm c>b\pm c$.

(證)　$(a\pm c)-(b\pm c)=a-b$

但　$a-b>0$　故　$(a\pm c)-(b\pm c)>0$

∴　$a\pm c>b\pm c$.

Ⅲ. 若 $a+b>c+d$, 則 $a+b-c>d$, $a>c+d-b$, $-c-d>-a-b$, $-a-b<-c-d$.

(證)　依Ⅱ. $(a+b)-c>(c+d)-c$

故　$a+b-c>d$.

其餘各式之証明同.

由此定理可見不等式之項若變其符號，可移至他邊．又悉變不等式各項之符號則不等式之方向變．卽不等式之兩邊如以 -1 乘之則不等式即須變其方向．故凡遇有方向不同之不等式可以變成方向相同者．

Ⅳ. 若 $a_1>b_1$, $a_2>b_2$ 則 $a_1+a_2>b_1+b_2$.

(證)　$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)$.

但由假定　$a_1-b_1>0$, $a_2-b_2>0$.

故　$(a_1+a_2)-(b_1+b_2)>0$　即　$a_1+a_2>b_1+b_2$.

系. 若　$a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $a_3>b_3$, ……, $a_n>b_n$

則　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n>b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_n$.

注意1. 此即同向之不等式可以邊邊相加．然異向之不等式則不能邊邊相加．蓋相加之後其不等式之方向不能確定故也．

例如、$6>4$, $8<9$　則　$6+8>9+4$

$6>4$, $8<10$　則　$6+8=10+4$

$$6>4,\ 8<11 \text{ 則 } 6+8<11+4.$$

由此可見異向之不等式,若邊邊相加則其結果可大可等可小,不能機械的判定.

注意2. 同向之不等式不能邊邊相減. 卽若 $a_1>b_1,\ a_2>b_2$ 不能斷定 $a_1-a_2>b_1-b_2$, 此初學者易陷之錯誤,讀者不可不注意. 蓋欲

$$a_1-a_2>b_1-b_2$$

成立,依Ⅳ非 $(a_1-a_2)-(b_1-b_2)>0$

或 $(a_1-b_1)-(a_2-b_2)>0$

不可. 但由 $a_1>b_1$ 與 $a_2>b_2$ 之假定實不能斷定 (a_1-b_1) 與 (a_2-b_2) 之間有何大小之可言也.

例如 $15>7,\ 12>3,$ 則 $15-12<7-3,$

$15>7,\ 12>4,$ 則 $15-12=7-4,$

$15>7,\ 12>5$ 則 $15-12>7-5.$

然則兩不等式遂不能相減乎? 曰,是不然,方向不同之不等式亦可相減. 其定理如次:

Ⅴ. 若 $a>b,\ c<d$ 則 $a-c>b-d.$

(證) $(a-c)-(b-d)=(a-b)+(d-c)$

但 $a-b>0,\ d-c>0$

故 $(a-c)-(b-d)>0$ 卽 $a-c>b-d.$

故異向之不等式可以邊邊相減. 其結果不等式之方向與被減式同.

VI. 若 $a>b,\ c>0$ 則 $ac>bc$ 及 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$ 但 $a>b,\ c<0$ 則 $ac<bc$, 及 $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$.

(證) 因 $a>b,\ c>0$, 則 $ac-bc$ 即 $(a-b)c>0$

故 $ac-bc>0$ 即 $ac>bc$.

同樣 $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$ 即 $\frac{a-b}{c}>0$

故 $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

後節證同.

由此可知不等式之兩邊若以同一正數乘之,其方向不變,若以同一負數乘之,其方向變.

VII. 若 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ 則 $ad>bc$ 或 $ad<bc$ 依 $bd>0$ 或 $bd<0$ 而定.

(證) 設 $bd>0$ 依 VI.

$$\left(\frac{a}{b}\right)bd>\left(\frac{c}{d}\right)bd$$

故 $ad>bc$.

後節證同.

故含分數之不等式,可以分母之公倍數乘之而去其分母.但此公倍數若為正則,不等式之方向不變,若為負,則所得不等式之方向與原式異.因此若去分母之時而分母 b, d 之符號有疑惑不定之時以用 b^2d^2 乘之為便.如此則去分母後所得之不等式為 $acd^2>b^2cd$ 其方向與原式同.

Ⅷ. 若 $a_1>b_1$, $a_2>b_2$ 則 $a_1a_2>b_1b_2$ 但 a_1, a_2, b_1, b_2 須皆為正.

(證)　$a_1a_2-b_1b_2=(a_1a_2-b_1a_2)+(b_1a_2-b_1b_2)$

$$=a_2(a_1-b_1)+b_1(a_2-b_2)$$

但由假定 $a_1-b_1>0$, $a_2-b_2>0$ 且 $a_2>0$, $b_1>0$.

故　$a_1a_2-b_1b_2>0$ 即 $a_1a_2>b_1b_2$.

若兩邊皆負之兩不等式相乘,其所得之不等式,其方向與原式異,是則讀者不可不注意者也.

系. 若 $a_1>b_1$, $a_2>b_2$, $a_3>b_3$,……$a_n>b_n$ 且 a_1, a_2, a_3……a_n, b_1, b_2,……b_n 皆為正,則 $a_1a_2a_3$……$a_n>b_1b_2b_3$……b_n.

(證)　依假定 $a_1>b_1$ 且 a_2a_3……$a_n>0$ 故依Ⅶ故

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1a_2a_3\cdots\cdots a_n.$$

又 $a_2>b_2$ 且 b_1a_3……$a_n>0$ 故

$$b_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2a_3\cdots\cdots a_n.$$

故　$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2a_3\cdots\cdots a_n,$$

又 $a_3>b_3$ 且 $b_1b_2a_4$……$a_n>0$ 故

$$b_1b_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2b_3a_4\cdots\cdots a_n,$$

故　$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2b_3a_4\cdots\cdots a_n.$$

如斯繼續推去可得

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_n>b_1b_2b_3\cdots\cdots b_n$$

(注意)　兩邊皆負,方向相同之奇數個不等式,邊邊相乘所得之不等式,其方向與原式同.

兩邊皆負，方向相同之偶數個不等式，邊邊相乘所得之不等式，其方向與原式異.

IX. 若 $a>b$, 且 $a>0$, $b>0$ 則 $a^n>b^n$. 但 n 爲正整數.

(證明) 於前系如 $a_1=a_2=\cdots\cdots=a_n=a$.

$$b_1=b_2=\cdots\cdots=b_n=b.$$

即得 $$a^n>b^n.$$

X. 若 $a>b$, 且 $a>0, b>0$ 則 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$. 但 n 爲正整數且各 n 次根皆取正實數.

(證) 若不爲 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$ 則必爲 $a^{\frac{1}{n}}\leq b^{\frac{1}{n}}$. 今如設爲後者則依IX. $(a^{\frac{1}{n}})^n\leq(b^{\frac{1}{n}})^n$ 即 $a\leq b$.

是與假設衝突，故必爲 $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}$.

(注意) 若 $a>0$ 且 $x^2<a$ 則 $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$; $a>0$ 且 $x^2>a$ 則 $x>\sqrt{a}$, 或 $x<-\sqrt{a}$. 讀者於此每以爲依 X 只能得 $x<\sqrt{a}$, 及 $x>\sqrt{a}$. 而遺去 $x>-\sqrt{a}$ 及 $x<-\sqrt{a}$. 蓋定理 X 乃言明取 n 次根爲正實數者而言，其於負值時未言及. 今 $x>-\sqrt{a}$ 及 $x<-\sqrt{a}$ 乃 x 爲負值之時也.

XI. 若 $a>b$ 則 $a^{-n}<b^{-n}$, 但 $a>0$, $b>0$ 且 n 爲正有理數(爲分數時則取 n 次正根).

(證) $$a^{-n}-b^{-n}=\frac{1}{a^n}-\frac{1}{b^n}=\frac{b^n-a^n}{a^n b^n}=-\left(\frac{a^n-b^n}{a^n b^n}\right)$$

因 $a>b$ 故 $a^n-b^n>0$ 及 $\frac{a^n-b^n}{a^n b^n}>0$

$\therefore$ $a^{-n}-b^{-n}<0$ 即 $a^{-n}<b^{-n}$.

——待續——

因數分解法

趙家鵬

Ⅰ:因數 設 F 及 G 爲含有同一變數之有理整函數,若 G 確能除盡 F,則 G 稱爲 F 之一因數.

Ⅱ.質因數. 一因數除其自身及 1 及其他常數外,絕不含有任何有理整因數時,稱爲質因數.

Ⅲ.因數分解. 因數分解者,即分解一函數爲質因數之謂也. 如 $A\equiv B\cdot C\cdot D\cdots$,但 $B,C,D,\cdots$,均爲質因數.

Ⅳ.集項法. 集合多項式各項如有相同因數,將相同之因數括於括弧之外.

例1.
$$a^2+ab-bd-ad+ac-cd$$
$$=(a^2+ab+ac)-(ad+bd+cd)$$
$$=a(a+b+c)-d(a+b+c)$$
$$=(a+b+c)(a-d).$$

例2.
$$x^3+2x^2+2x+1=x^3+x^2+x^2+x+x+1$$
$$=x^2(x+1)+x(x+1)+(x+1)=(x+1)(x^2+x+1)$$

Ⅴ.應用公式法. 今將一切有關於分解因數之公式書之於下,並舉例以明之.

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)\cdots\cdots\text{(A)}$$
$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2\cdots\cdots\text{(B)}$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2\cdots\cdots\text{(C)}$$

無論 n 爲奇或偶,必能得

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots\cdots+b^{n-1})\cdots\cdots\cdots\cdots(D)$

若 n 爲偶則

$a^n-b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-b^{n-1})\cdots\cdots\cdots\cdots(E)$

若 n 爲奇則

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})\cdots\cdots\cdots(F)$

例1. $x^2-y^2-z^2+2yz=x^2-(y^2-2yz+z^2)$

$=x^2-(y-z)^2=(x+y-z)(x-y+z)$ 〔由(A)及(C)〕

例2. $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(xy)^2=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ 〔由(B)及(A)〕

例3. $8a^3+27b^3c=(2a)^3+(3bc)^3$

$=(2a+3bc)[(2a)^2-(2a)(3bc)+(3bc)^2]$ 〔由(F)〕

$=(2a+3bc)(4a^2+6abc+9b^2c^2)$

例4. $x^6-y^6=(x^3)^2-(y^3)^2=(x^3+y^3)(x^3-y^3)$ 〔由(A)〕

$=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)$ 〔由(D)及(F)〕

或 $x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$ 〔由(D)〕

$=(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

〔由(A)及例2〕

VI. 定理. 若 $n=2^m$ 時則 x^n+y^n 可重複應用公式(A)而分解爲二次因數(證明從略)例如 $8=2^3$ 則

$x^8+y^8=x^8+2x^4y^4+y^8-2x^4y^4$

$=(x^4+y^4)^2-(\sqrt{2}x^2y^2)^2=(x^4+\sqrt{2}x^2y^2+y^4)(x^4-\sqrt{2}x^2y^2+y^4)$

但 $x^4+\sqrt{2}x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-(2-\sqrt{2})x^2y^2$

$=(x^2+y^2)^2-(\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy)^2$

$$=(x^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy+y^2)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy+y^2)$$

同理 $x^4-\sqrt{2}\,x^2y^2+y^4$

$$=(x^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,xy+y^2)(x^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,xy+y^2)$$

$$\therefore\ x^8+y^8=(x^2+\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy+y^2)(x^2-\sqrt{2-\sqrt{2}}\,xy+y^2)$$
$$(x^2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\,xy+y^2)(x^2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\,xy+y^2)$$

VII. 二次三項式之因數分解.

(一)觀察法

(1)二次式 x^2+px+q 之分解法. 因 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ 故吾人若能求得二數 a,b 使能滿足 $a+b=p, ab=q$ 時,則 x^2+px+q 之因數卽可分解爲 $(x+a)(x+b)$ 矣.

例1. 分解 $x^2+13x+42$ 之因數.

解. 此處 $p=13, q=42$ 故只求 a 及 b 使其積爲 42 其和爲 13 足矣,然 ab 及 $a+b$ 均爲正,故 a 及 b 亦均爲正. 但在整數中二數之積爲 42 者有 42 與 1, 21 與 2, 14 與 3, 及 7 與 6. 其中只 7 與 6 之和爲 13,故得 $a=7, b=6$.

$$\therefore\ x^2+13x+42=(x+7)(x+6).$$

例2. 分解 $x^2-13x+22$ 之因數.

解. 此處 a 及 b 必均爲負因其積爲正而其和爲負故也. 於是如前所云將其積爲 22 之二負整數書出卽 -22 與 -1, -11 與 -2, 故知 $(-11)+(-2)=-13$

$$\therefore\ x^2-13x+22=(x-11)(x-2).$$

(2)二次式 ax^2+bx+c 之分解法. 此式可如下法化成

(1)形即

$$ax^2+bx+c=\frac{a}{a}\left[ax^2+bx+c\right]$$

$$=\frac{1}{a}\left[(ax)^2+b(ax)+ac\right]$$

然後再依(1)法分解括弧內之因數.

例1.　分解 $2x^2+7x+3$ 之因數.

解.　$$2x^2+7x+3=\frac{1}{2}\left[(2x)^2+7(2x)+6\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2x+6)(2x+1)=(x+3)(2x+1)$$

例2.　分解 $abx^2+(a^2+b^2)x+ab$ 之因數.

解.　$$abx^2+(a^2+b^2)x+ab=\frac{1}{ab}\left[(abx)^2+(a^2+b^2)(abx)+a^2b^2\right]$$

$$=\frac{1}{ab}(abx+a^2)(abx+b^2)=(bx+a)(ax+b).$$

例3.　分解 $16x^2+72x-63$ 之因數.

解.　$$16x^2+72x-63=(4x)^2+18(4x)-63$$

$$=(4x+21)(4x-3).$$

(二)配方法.

(1)二次式 x^2+px+q 之分解法.　因

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=x^2+px+\frac{p^2}{4},$$

故吾人加 $\frac{p^4}{4}$ 於 x^2+px 可使之爲完全平方.換言之即加以 x 之半係數之平方是也.如

$$x^2+px+q=x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q$$

$$=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4}=\left(x+\frac{p}{2}+\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)\left(x+\frac{p}{2}-\frac{\sqrt{p^2-4q}}{2}\right)$$

例.　$x^2-6x+2=x^2-6x+3^2-3^2+2=(x-3)^2-7$

$$=(x-3+\sqrt{7})(x-3-\sqrt{7})$$

(2) 二次式 ax^2+bx+c 之分解法． 可將 x^2 之係數括於括弧外再依(1)法分解括弧內之因數．如

$$ax^2bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right\}$$

$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right).$$

例． $3x^2-5x+1=3\left(x^2-\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}\right)$

$$=3\left\{x^2-\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{1}{3}\right\}.$$

$$=3\left\{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\frac{13}{36}\right\}$$

$$=3\left\{\left(x-\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{13}}{6}\right)^2\right\}$$

$$=3\left(x-\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$

$$=\left(3x-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(x-\frac{5+\sqrt{13}}{6}\right)$$

Ⅷ．定理． x 之任意有理整式若以 α 代 x 而此式爲零時則此式必有一因數 $x-\alpha$ ．

証． 設有理整式爲

$$ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots,$$

由定理假設 $a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\cdots\cdots=0.$

故 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots,$

$$=ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots-(a\alpha^n+b\alpha^{n-1}+c\alpha^{n-2}+\cdots\cdots)$$

$$=a(x^n-\alpha^n)+b(x^{n-1}-\alpha^{n-1})+c(x^{n-2}-\alpha^{n-2})+\cdots\cdots$$

然由公式(D), $x^n-\alpha^n$, $x^{n-1}-\alpha^{n-1}$, $x^{n-2}-\alpha^{n-2}$,……均能以 $x-\alpha$ 除盡. 故 $ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\cdots\cdots$ 能以 $x-\alpha$ 除盡,亦即有一因數 $x-\alpha$ 也.

此定理名爲因數定理.

XI.因數定理之應用. 利用因數定理即易於測知一函數之因數,因之對於分解高次多項式之因數方便多矣.

例1. 分解 $2x^3+3x^2-11x-6$ 之因數.

解. 於所設之式中以 2 代 x 則

$$2\times2^3+3\times2^2-11\times2-6=0$$

故原式必有一因數 $x-2$. 依IV之法則

$$2x^3+3x^2-11x-6=2x^3-4x^2+7x^2-14x+3x-6$$

$$=2x^2(x-2)+7x(x-2)+3(x-2)$$

$$=(x-2)(2x^2+7x+3)$$

$$=(x-2)(x+3)(2x+1).$$

例2. 分解 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$ 之因數.

解. 以 b 代 c 則

$$(b-b)^3+(b-a)^3+(a-b)^3=0$$

故原式必有一因數 $b-c$.

故 $(b-c)^3+(c-a)^3+(a-b)^3$

$$=(b-c)^3+\left[(c-a)+(a-b)\right]\left\{(c-a)^2-(c-a)(a-b)+(a-b)^2\right\}$$

$=(b-c)^3+(c-b)(3a^2-3ab-3ac+b^2+bc+c^2)$

$=(b-c)\left\{(b-c)^2-(3a^2-3ab-3ac+b^2+bc+c^2)\right\}$

$=-3(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=-3(b-c)(a-b)(a-c)$

$=3(b-c)(c-a)(a-b).$

注意. 式中二因數 $c-a$, $a-b$ 亦可應用因數定理求得.

例3. 分解行列式

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

之因數.

解. 以 b 代 a 則

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0$$

故 Δ 必有一因數 $a-b$. 同樣以 c 代 b, 以 a 代 c 均可使 Δ 為零, 故 $b-c$ 及 $c-a$ 均為 Δ 之因數. 但由觀察可知 Δ 必為 a, b, c 之三次式, 故必有 $\Delta=L(b-c)(c-a)(a-b)$, 但此處 L 為數係數. 且 Δ 之主對角線為 bc^2 而 $L(b-c)(c-a)(a-b)$ 中唯一的對應項為 Lbc^2 $\therefore L=1$ 故

$$\Delta=(b-c)(c-a)(a-b).$$

關於圓內接四邊形之一定理

李森林

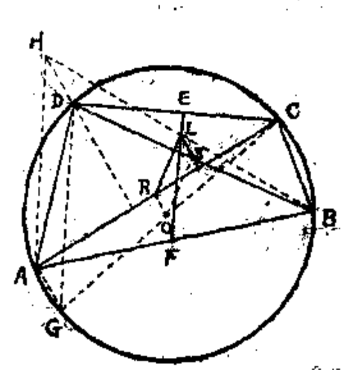
圓內接四邊形 ABCD，其兩對角線之中點爲 R, S；由 R, S 向其他對角線作垂直線，設其交點爲 L，則過 L 向任一邊作垂線必平分其對邊.

証：過 L 作線垂直 CD 於 E 而交 AB 於 F，吾人祇須証明 $AF=FB$ 足矣.

如圖，設 O 爲圓心，聯結 OR, OS 得 ORLS 爲平行四邊形，故

$$OR \parallel SL,\ 且\ OR=SL \cdots\cdots(1)$$

聯結 BL，由 D 作 AC 之垂直線，與 BL 之延長線交於 H，則因 S 爲 BD 之中點，且 $DH \parallel SL$（皆 $\perp AC$），故



$$HL=LB, \cdots\cdots(2)$$

$$DH=2\,SL.$$

由(1) $DH=2\,OR$，且 $DH \parallel OR. \cdots\cdots(3)$

次過 C 作直徑 CG，聯結 GA，則

$$GA=2\,OR,\ 且\ GA \parallel OR. \cdots\cdots(4)$$

比較(3)，(4)得 $DH \parallel GA$，且 $DH=GA$；因之 $HA \parallel DG$.

但 $DG \parallel LF$（皆 $\perp DC$），$\therefore\ HA \parallel LF \cdots\cdots(5)$

由(2)及(5)，

$AF=FB$. (証訖)

(特例) 當 AC,BD 互相垂直時,即得印度算學家 Brahmagupta 之定理,即:"圓內接四邊形之兩對角線互爲垂時,則過其交點向任一邊作垂直線,必平分其對邊". 蓋此時之 L 點,即其兩對角線之交點也.

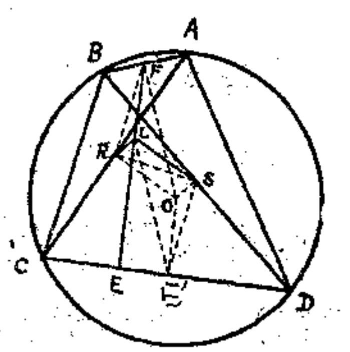
又其逆定理亦眞:

設 ABCD 四邊形之對角線之中點爲 R,S; 由 R,S 各向其他對角線作垂直線交於 L. 若過 L 向任一邊作垂線而平分其對邊時,則此四邊形爲圓內接四邊形.

証: 設 EF 爲過 L 所作垂直 CD 且平分 AB 之直線. 過 R,S 作各對角線之垂線,得 ORLS 爲平行四邊形,且有

$$OA=OC,\quad OB=OD. \cdots\cdots\cdots(1)$$

次設 E′ 爲 CD 之中點,聯結OE′,OF,LE′, RF 及 SE′, 則因



$$SE' \parallel FR \quad (\parallel BC)$$

又 $$SE'=FR \;(=\tfrac{1}{2}BC)$$

故 E′F 與 RS 互爲二等分. 但 OL 亦與 RS 互爲二等分,故 OL 與 E′F 亦互爲二等分,而 OE′LF 爲平行四邊形. 因之 $OE' \parallel FL \perp CD$, 而

$$OC=OD \cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1),(2) 知 $OA=OB=OC=OD$, 而 ABCD 爲圓內接四邊形 (證訖).

圓規幾何學

方　烈

埃及(Egypt)爲世界文明古國之一,位居泥羅(Nile)河的沿岸,以農立國,出產豐富. 可是這河每年泛漲一次,田地多被淹沒. 等到水退之後,田限都沒有了. 何地屬何人,無從分辯. 於是國王命人測量,同時可以考查損失多少,分別輕重定稅. 這種測量,開了幾何學的端倪. 現在英文的幾何學,叫做 Geometry,即由希臘文的 Ge 及 Metrom 兩字所組成. Ge 是地,Metrom是測量. 由此可知道幾何學是從量地而產生的科學.

幾何學由埃及傳入希臘 (Greece) 後,起了一很大的轉變. 因爲當時希臘學風,不注重應用,只從事學理的探討. 於是幾何學一變而爲論理的學問. 任意角三等分,立方倍積及改圓爲方諸問題乃應運而生. 此等問題,實際沒多大的用途,但是成了他們很重要的問題. 爲求解決此等問題,曾經發明不少的方法,大都用曲線或特製之繪圖用具. 紀元前 440 年左右,大哲學家柏拉圖(Plato),感覺到幾何學是啓發思想,鍛鍊心靈的東西,應該位於論理科學之上. 他規定用圓規及直尺,爲幾何學上作圖之工具,其他方法,一概不用. 二千餘年來,一般研究算學的人,均依從柏拉圖的主張.

後來有些算學家,倣照柏拉圖的想法,幾何學作圖所用的工具,是否還可減少? ——當然是由圓規與直尺二者之中除去一

種，大家都認爲圓規是很精確的工具，並且用途也最廣，尤其是要劃一個圓，爲方便計非用它不可；而直尺似覺可有可無，但是在當時有許多幾何作圖離了它無法作出：所以不便取銷， 同時又發生一個問題，就是如何作一直尺？柏拉圖規定用直尺，但是他沒說出作直尺的方法來．歐几里得(Euclid)爲研究幾何學之老祖宗，在他的幾何原本內，關於直綫的作法，祇說了這樣兩個公法：(1)由任一點到他一點可作一直綫．(2)綫段可引到任何長．這好像已說明，嚴格作一直綫是不可能的．木匠做直尺時，用眼力的視察，考其有無凹凸而定曲直，不管他的本領如何，總之這樣作成的直尺是不科學的，充其量不過爲一近似直綫罷了．我們用這種直尺來作圖，所作的直線，當然也不是眞的直線．不過直綫的作法，在最近已告成功．

在1853年沙勞特(Sarraut)發明用機械作直綫．他的工作知道的人不多，隨即失傳．在1864年波色利(Peaucellier)用他的連節運動(Link—motion)方法，研究作直綫，發表於新年報(Nouvelles annales)上．直到1873年才公佈他的解答．又1878年俄人李卜金(Lipkin)及1874年英人西維特(Sylvester)均曾研究此問題，而武爾爲(Woolwish)又整理波色利的七連節成四連節．相繼研究的人很多，但是收的效果不大．在1877年英人康卜(Kemp)曾作一書，叫做“直綫作法”(How to draw a straight Line)．爲研究作直綫最完備的專書．

經過許多學者的研究，始知作直綫確不容易．若引用機械，

則又回復了柏拉圖以前的狀態. 於是有人主張棄擲直尺,僅用圓規作圖,幾何學得完全脫離機械的羈絆,而歸於純粹理智的範圍中. 這可說是幾何學的一個新轉變. 1672 年丹麥算學家莫爾(George Mohr)作丹麥幾何學(Euclides Danicus)一書, 用丹麥文,荷蘭文同時發表. 內有圓規作圖題78個. 當時無人注意他的工作,直到晚近才有德文譯本出版. 又百年後,意大利巴威亞 (Pavia) 大學算學教授馬斯羅尼 (Mascheroni) 主張專用圓規作圖,較用直尺更為精確, 馬氏曾將作圖擴大研究,並且證明凡用直尺及圓規能作的圖形,可單用圓規作它. 於 1797 年公佈他的圓規幾何學 (Geometria del Compasso), 次年即有法文譯本出世. 拿破崙 (Napoleon) 素敬仰馬氏的著述,當他征服意大利時,得與馬斯羅尼相識, 且將馬氏的許多問題, 給與法蘭西學者研究. 拿破崙本人也提出一問題: 僅用圓規分圓周成四等分. 當時呌做拿破崙問題.

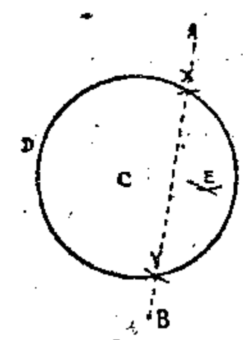
至二十世紀,圓規幾何學已形完備. 1913 年英人何畢生(Hobson) 及其他學者, 証明一切初等幾何作圖題, 均可單用圓規作成. 1925 年法人德納亞卡爾(De Lanascal)作圓規幾何學(Geometrie du Compas)一書,把各問題完全解決. 於是,新幾何學宣告成立.

讀者都知道, 初等幾何學上的作圖題,不外乎點的決定, 而決定某點又不外乎下之三法: (1)圓與圓的交點. (2 直線與圓的交點. (3)直綫與直綫的交點. 第一條與直線無關,容易求得,

故此處不必研究，餘下的二條今分別詳述於下，其他各作圓題的解法，可認爲是這三作圖法的應用.

1. 求作一直線與一圓的交點。

作法. 如圖一，設 AB 爲所給的直線，C(CD)* 爲所給的圓. 作 A(AC) 及 B(BC) 二圓再交于 E 點. 則關於 AB 綫 C 與 E 對稱. 再作 E(CD) 圓交 C(CD) 于 X, Y, 則 X, Y 爲所求的交點.



圖一

証. 因 AB 是 CE 的垂直平分綫，而 X, Y 與 C, E 成等距. 故 X, Y 在直綫 AB 上.

但是，當直綫 AB 經過中心 C 時，則它們的交點用上法不能求得. 此爲一特別情形，今另用別法解它. 同時拿破崙的問題，(如前述) 也隨之解决.

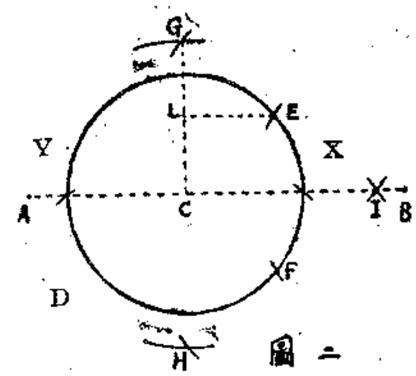
作法. 如圖二，以 B 爲中心作一適當的圓截 C(CD) 於 E，F. E(CE) 與 C(EF) 交于 G, F(CF) 與 C(EF) 交於 H. 則 CGEF 及 CHEF 是兩全等且對稱的平行四邊形. 又 G(GF) 與 H(HE) 的交點爲 I. 這 I 點在 ABC 直綫上. 於是 G(CI) 與 C(CD) 交于 X, Y. X, Y 即爲所求的二交點.

證. 因 CG, CH 均平行於 EF, 故 G, C, H 在一綫上.

又因 $$EC = EG = \text{半徑}.$$

作 $$EL \perp CG,$$

* C(CD) 表示以 C 爲中心，CD 爲半徑的圓. 以下做此.



圖二

則　　$CL = \frac{1}{2}CG.$

因之　$CI^2 = HI^2 - CH^2 = HE^2 - CH^2$
$= CE^2 + CH^2 + 2CH \cdot \frac{1}{2}CG - CH^2$
$= CE^2 + CH^2 = CX^2 + CH^2$
$= HX^2.$

而　　$GX = CI,$

故　　$GX = HX.$

因 H,G 關於直綫 ABC 成對稱,因之, X 在 ABC 上.

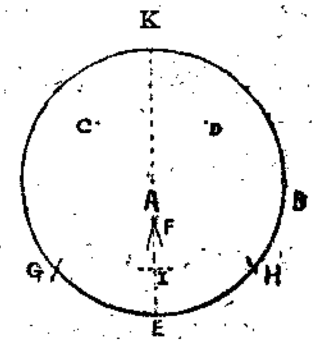
倣此,又可以證明 Y 也在 ABC 上.

今附述拿破崙問題. 設 C(CD) 爲所給的圓,在它的周上取一點 A,劃 A(CD)圓交 C(CD)于 E,又劃 E(CD)圓交 C(CD)於 F,再劃 F(CD) 圓交 C(CD) 於 B,則 ACB 是一直綫. 其次以 A,B 爲中心,取大於 CD 之等半徑劃圓弧,得 G,H 二交點. 於是 GCH 也是一直綫. 依照前法求 GH 與 C(CD)的交點 X,Y,則 A,B,X,Y 分圓周成等分.

證明及圖從略.

補助定理. 求作 AB 與 CD 二綫段的第三比例.

作法. 如圖三,以 A 爲中心, AB 爲半徑劃圓弧. 於此圓上任取一點 E,作 E(CD)圓交 A(AB)于 G,H. 又 G(CD)與 H(CD)再交于 F,則 EF 卽爲 AB 與 CD 的第三比例.



圖三

證. 設 EA 與 A(AB)交于 K, EF 與 GH 互相垂直平分,它們的交點爲 I.

於 $\triangle EGK$, $\triangle EIH$

$$\angle EGK = \angle R = EIH,$$

$$\angle EKG = \angle EHI,$$

$\therefore$ $$\triangle EGK \backsim \triangle EIH.$$

$\therefore$ $$EK : EG = EH : EI.$$

或 $$\tfrac{1}{2}EK : EG = EH : 2EI.$$

而 $$EK = 2AB,\quad EG = EH = CD,\quad 2EI = EF.$$

故 $$AB : CD = CD : EF.$$

故 EF 是 AB, CD 的第三比例.

2. 求出二直綫的交點.

作法. 如圖四,設 AB, CD 為所給的二直綫. 作關於 CD 綫 B 的對稱點 E,關於 AB 綫 E 的對稱點 F,關於 EF 綫 B 的對稱點 G. 今倣上之補助定理,作 BG 與 BE 的第三比例. 以 B, E 為中心,此第三比例為半徑劃圓,相交于 X, Y 二點. X 與 G 在 BE 的同側,則 X 卽為所求的交點.

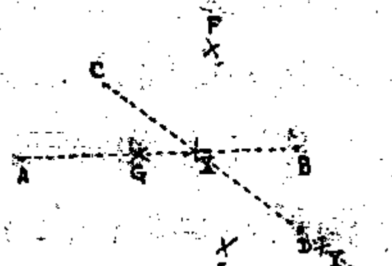


圖 四

證. 因 $$BG : BE = BE : BX,$$

又 $$BE : BX = EG : EX.$$

因之 $$\triangle BEX \backsim \triangle BEG.$$

$\therefore$ $$\angle EBX = \angle EBG$$

故 X 在 BG 上. 而 AE 等于 AF,於是 A 在 BG 綫上. 卽是 X 在 AB 綫上. 又因 CD 是 BE 的垂直平分綫,而 BX 等于 EX,於是 X 又在 CD 上. 故 X 為 AB, CD 的交點.

歐幾里得

(Euclid. 300 B. C.?)

瘦桐

上古時代的史蹟,因爲離現在太久遠了,文字上的記載,很是缺乏,無卷籍可資參攷,致許多古代史上大名鼎鼎的人物,他們的生平事績,都有"其詳不可得而聞也"之慨. 歐幾里得自然也不能例外,他的出生年月,死亡時候,甚至他的國籍,到如今還是待考訂沒解決的疑問.

依據普洛喀勒斯(Proclus)比較可靠的推算,他大約是紀元前300年間希臘的一個大幾何學家,生當托里米第一(Ptolemy I.)統治天下的時代,比柏拉圖(Plato)的第一個弟子年輕一點,却比亞奇默德(Archimedes)年高一些. 然而也有傳說他是在紀元前365年生的;也有說他並不是希臘人,不過生長在希臘的殖民地的;最可笑不過的,還有中世紀許多幾何學的作家,竟將這位幾何學者和與柏拉圖同時代另一個名字也叫做歐幾里得的,混爲一談,鬧了一齣雙包案. 他們說:"有人問立方倍積問題於柏拉圖,柏拉圖不能解決,轉以質之歐幾里得". 殊不知後面的一個歐幾里得,是一個哲學家,生長在Megara的地方,比起幾何學者的歐幾里得約爲更前一世紀的人,怎容張冠李戴呢?

關於他的一生,我們只知道早年似乎在雅典從柏拉圖的弟子受過嚴格的算學訓練,雅典是當時著名幾何學者講學的場所,

他畢生的造就，得力於此着實不少，但他不必一定是一個 Academist. 晚年曾在尼羅河畔叫做亞歷山大利亞 (Alexandria) 的一個名城創設學校，教授生徒，以研究軌跡著名的亞波羅尼斯 (Appolonius) 就是他的一個門人。此外我們便不知道甚麼。

使歐幾里得著名於世的，要算他四十歲的時候寫的一部初等幾何，名叫幾何原理 (Elements)。這部書完全是他創作的嗎？不，凡是一門學問，決不是一二人能夠手創的。在歐幾里得以前，就有不少關於幾何學的著述和定理的發見，但都不過是一些斷片零碎的知識和記載，歐幾里得把牠彙集起來，當然他自已的發明也包含在內，組織成爲一部有嚴密系統的科學，爲幾何學在科學界中，立下千古不拔的基礎，眞可謂"其功不在禹下"了！

這書開始是寫在一捲羊皮紙 (Parchment) 上，後來因爲攜帶不便，分爲一十三個比較小一點的捲子，叫做 bibilia，就是分卷的意義。其內容：第一卷是論相合圖形，平行線，畢達哥拉斯定理；第二卷是恆等式 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 幾何的論證，面積，黃金分割；第三卷是論圓；第四卷論內接和外切多邊形；第五卷論比例，分數方程的幾何的解法；第六卷論多角形相似的性質；第七卷到第九卷是數論幾何的研究；第十卷是不可通約量之理論；第十一卷到第十二卷是立體幾何學；第十三卷是一種附錄性質的定理也可說是補遺。和我們近世的初等幾何學的體裁，很有些不同的地方。

這部古典式的教科書，不惟是空前的傑作，壓倒一切前賢的

著述，因爲牠立論謹嚴精美，直到現在還有牠的地位，世界各國都有牠的譯本．我國在明朝的時候，早經徐光啓譯爲漢文，稱爲幾何原本．僅就歐洲一隅而論，自1482年以後，翻印版本，爲數不下千餘，可以想見牠的價値． 所以英國的兒童至今猶呼初等幾何學爲歐幾里得，自無怪其然了！

歐幾里得最値得我們佩服的，就是他爲那學問而研究學問的態度．本來一門科學，如果處處站在功利的立場來說話，這科學必不會進步的．研究學術的儘管絕塵而奔的向前面跑，至於拿牠一部份應用到日常生活上去，這實在是一件毫無問題不需顧及的事．比如微分方程式這一門的學問，在百年以前，還不是被人們唾棄，視爲無用嗎？何以今日變成學工程的不可少的工具呢？相傳歐幾里得有一個門徒，從他學習初等幾何，當他讀了第一課之後，便問歐幾里得道"先生！讀了這有什麼用途咧"歐幾里得叫他的僕人給幾個銅錢叫他離開．他說："學問的本身就有價値存在，他一定要從所學的東西得到金錢，那麼給他就是．"，

歐幾里得還値我們佩服的，是他那刻苦求學的精神，相傳歐幾里得完成了幾何原理之後，名噪一時．國王托里米特召進宮，請他教授幾何，但覺他的幾何原理太繁難了，問他道："學習幾何有不有比你的幾何原理更容易的方法呢？"歐幾里得答道："幾何學中是沒有御道的！"他的意思是說要求學問，必下工夫，皇帝也不能例外．朋友！的確這樣，我們園地的收穫，在我們自己努力的耕種，一切事業都是如此啊！

世 外 奇 談

（續）

A Square 原著 乙 閣 譯

5. 我們彼此認識的方法

你們住在那三元世界的快樂國度內，既有光線，又有陰影，更兼上天給與兩隻眼睛，具有透視的本能，可以鑑賞種種的彩色，尤其是你們能够看見一個角度，并且整個的圓周都能詳覽無遺———我怎樣纔可以使你們明白我們在二元世界內面彼此互相認識的困難呢？

請回想我前面所說的話，所有二元世界內面有生無生之倫，無論他們形狀如何在我們看起來是一樣的，至少也是差不多的，一條直線而已．在這樣千篇一律的情形之下，試問何以分別誰是誰呢？

這個問題，要分三層答覆．第一種認識的方法，是用聽覺，這一部分的官能比你們的要發達得多，不但對於親近的朋友，聞其聲卽知其人，就是一般的人們，祗要聽聽他們的聲音，就能知道他們的品級，至少對於正三角，正方及正五邊的三級，可以分辯出來——那等腰階級更不必說．不過品級漸高，這種聽覺認識法就漸漸發生困難，一半是因為他們聲音同化的關係，一半因為這種聽覺認識法，是平民的技術，在貴族中間不甚發達的緣故．所以每遇有假冒的危險時，這個方法是靠不住的．在那最下等階級的人們當中，發音的官能特別發達，所以等腰人們很容易假裝多邊形的聲音，稍為練習一下，并可冒充元老，聽覺雖銳敏，而有時仍不免受欺，因之另謀他法，實為必要．

在我們婦女和中等階級人們當中，——關於上等階級，等一會就會說到，讀者莫急——主要的認識方法，是用觸覺．生人見面，在未請教尊姓大名以前，要知道所屬品級，總是用這個方法的．在三元世界上等社會裏面用着『介紹』的時候，在我

們這里所用的却是『摸』. 在那遠離城市的縣鎮裏比較舊式的鄉下紳士們介紹朋友的時候,照例的致辭還是:『允許我請求你摸摸:我的朋友某某先生,幷且請你給他摸摸』. 但是在城市商人間,『幷且…………』一段總是省去,只說『讓我請你摸摸某某先生』,雖然這種『摸摸』不消說是要彼此相互的. 我們的青年摩登人物,極力反對浮文虛套,關於詞句的修飾,又滿不在乎,他們把『摸』字當作專門名詞用,以爲『摸』者,即『介紹彼此互相用觸覺方法以達認識目的』之意,因此現時在上等社會交際界中,常常聽見如下所述不成話的辭句:『張先生,允許我將李先生摸你』.

不過讀者們千萬不要誤會,以爲這種『摸』的方法,太費事了,必得把一人的各邊都摸到了,才能斷定他所屬的階級. 長期的訓練,從在學校的時期起,以至在社會上日常生活之中,所得的經驗,使我們只要輕輕一摸,就能分別那一個是正三角形,正方形,或正五邊形的角度,至於那等腰階級沒有腦子的尖頂,不管怎樣遲鈍的觸覺,也該感覺出來,當然是不消說得. 所以摸的時候,照例只要摸到一個角,便能知道我們對方的品級,除非他是貴族中品級較高的人物,那就很不容易斷定了. 相傳我們百京大學的一位碩士,曾經誤認過一個十邊形爲十二邊形,就是在這個著名大學內面或外邊的科學博士,要他不假思索,完全決定那一個是二十邊,或者是二十四邊的貴族,恐怕也是絕無僅有的事.

我前面曾經從婦女法摘錄了幾段,讀者中如果有記得的,一定立卽可以想到這種觸覺介紹法,施行之際,是要小心謹愼的. 否則摸者不及提防,每有受傷致命之危險. 爲摸者的安全起見,被摸者應屹立不動. 常有因精神恍惚,於被摸之際,忽然驚跳,或劇烈噴嚏,輕則斷送友好的機會,重且有危及生命者. 這種情形,在下層三角階級中爲尤甚. 他們的眼離開角頂太遠,照顧不來,而且舉動粗野,神經遲鈍,多邊形那種輕輕的摸法,他們也許感覺不出來,毋怪乎偶一抬頭,便斷送一條寶貴的性命了!

我曾經聽見過,我那親愛的祖父——他雖是一個等腰形,可是幾乎和正三角形一樣,在他壽終以前不久,社會局衛生科投票結果,七票之中,有四票贊成通過他歸

入等邊階級——常常談到一樁像這類的不幸事件，總是傷心流淚的．這事是關於他的高祖的，是一位可敬的工人，頂角度數爲59°30′．據說我這位不幸的祖先，得了風濕骨痛的病，在被一位多邊形所擯的時候，忽然痛得跳將起來，竟將這位貴客，穿胸而過；結果長期監禁，懊喪萬分，加之親戚朋友，互相責難，悔恨之餘，腦力日以減損，竟將角度降低一度有半．結果下一代角度的紀錄只有58°，直到傳了五代之後，纔恢復了原來的地位，得到60°的滿足，終於脫離了等腰的範圍，歸入等邊的階級．說起來這眞是無妄之災呵！

我想現在我的讀者們，一定要提出質問，『你們在二元世界內那能知道角的度數和分數？我們能看見一個角度，因爲我們在三元空間內，能够看見兩條直線斜交成角；但是你們所見，無非直線，而且每次祇能看見一段，即便看見許多段，也是都在一條綫上的，——你們那能辯別角度，更何能紀錄角度的大小呢？』

我的答辯是：我們雖看不見角度，但是我們可以推想得知，并且這種推想，十分精確．我們的觸覺器官，因爲環境的需要，和長久的訓練，官能特別發達，假使不用量角儀器，祇憑你們的視官來分辨角度，未必能有我們那樣準確．再說我們還有自然定律，足資考證，這是我應當要申明的．原來依照自然定律，等腰階級的頂角，起碼是半度，或者說三十分，而每傳一代，可以增加半度（不是一定的，須看情形如何，不過如果增加的話，一加就是半度）；一直等到滿了60°之後，纔脫離奴隸生活而歸入正人階級之中．

所以自半度起，一直到60°爲止，中間種種角度，都有天生成的標本，凡屬小學中，都一一陳列着．因爲種種緣故，尤其是罪犯游民異常的繁殖，半度和一度的人特別多，從一度到十度的也着實不少．這些都是完全被褫奪公權的；其中大多數連當兵的資格都够不上，所以國家就拿他們來做學校標本之用．爲預防危險起見，一個個都手銬脚鐐起來，行動不得，放在小學教室內面，中等階級的子弟們，便把他們當做練習觸覺認識法的工具，這是教育部利用廢物的辦法．

有些地方的學校辦事人，間或給這些標本以食物，維持他們的生命以至數年之

久;但是在治理較善的城市內,為了教育的便利起見,到底還是不給與食物的好,寧可多用點經費,每月更換一次標本(這些罪犯絕食之後,祇能活到一月內外). 前一種辦法,雖然可以節省經費,但是得不償失,因為一方面食物是要錢買的,一方面標本常常被『摸』,幾個禮拜之後,角度就被磨損,不太精確. 後一種辦法,雖是費錢,這些弊端是沒有的,還有一種好處是不可不說的,因為按月換新標本,於不知不覺之間可以減少等腰人口——這是二元世界當局,刻不忘懷的政策. 有許多私立學校當局,極力主張所謂『節省辦法』,我不是不知道,但是我個人的意見,還是贊成後一種辦法,雖然多費幾文,實在是值得的.

不過這些都是學校行政問題,我們還是言歸正傳罷. 我相信前面所說的一切,已足証明觸覺認識法,並非如一般所以為的那樣麻煩而不準確,比聽覺認識法顯然可靠得多,不過如前所述,此法仍不免有相當的危險,因此之故,中等階級中有許多人,和多邊及元老階級的全體,都喜歡另用一種方法,要知此法如何,且聽下段分解.

6. 視覺認識法.

前面我曾經說過,所有在二元世界內的形形色色,看起來都是一條直線,照此說來,要用視覺去分別各等各級的人,當然是不可能的事;然而我現在居然還要向着三元世界的讀者們,解釋我們如何用視覺去彼此認識,這豈不是自相矛盾得太利害了嗎?

不過讀者們如果肯費煩難把觸覺認識法的那一段重新檢閱一遍,一定找得到這樣的一句話.『在中等階級人們當中』. 說實在話,這視覺認識法,祇有上等階級的人們,並且要在氣候溫暖的地方,纔可以練習得好.

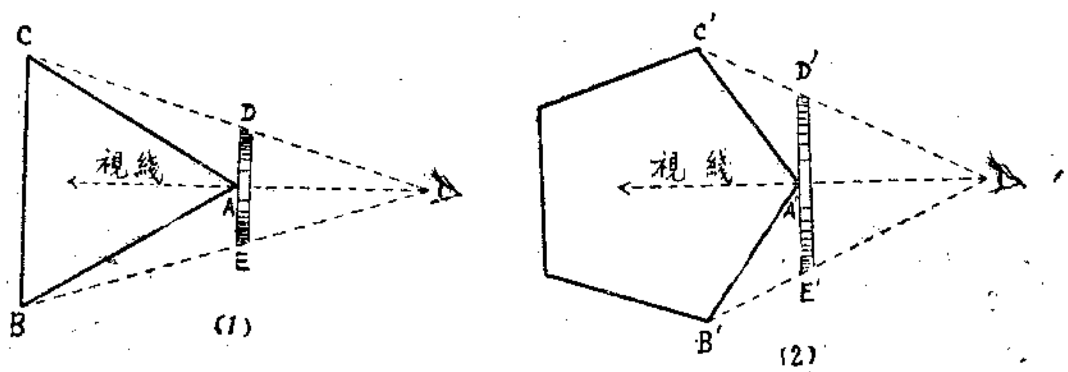
這種方法之所以能實行,是因為下霧的結果. 我們這裡除了寒帶之外,其餘地方,一年四季差不多天天有霧. 這個霧,在你們三元世界裡,是最可憎惡的一件東西,遮蔽風景,抑損精神,危害健康,可是自我們看來,却是幸福之源,其重要不亞於空氣,眞可說是藝術之母,科學之父. 這種歌功頌德的話,少說為妙,還是讓我趕快解釋這個道理罷.

如果沒有霧，所有一切的直線都是一樣鮮明，無從分別；在那空氣乾燥透明的地方，確是這樣。但是在降霧豐富的地方，離開三尺遠的東西，比較只離開二尺九寸遠的，就要模糊一點。我們把這種清楚模糊的程度，仔細比較，實驗觀察既久之後，對於所觀察事物的形狀，便能推知，而且十分準確。

空說無憑，舉一例便明白了。試假想有兩人迎面走來，一位是商人(正三角形)，一位是醫生(正五邊形)，要斷定他們是那一類的人物，那麼應該怎樣辦呢？

如果我的視綫，剛好把來人的一角（A）分成二等分，那麼他那離我最近的兩邊（卽AB與AC），在我的目光中是居於平等地位的，這種顯然的事實，你們三元世界內的三尺童子，祗要稍爲懂一點幾何的，都應該知道。

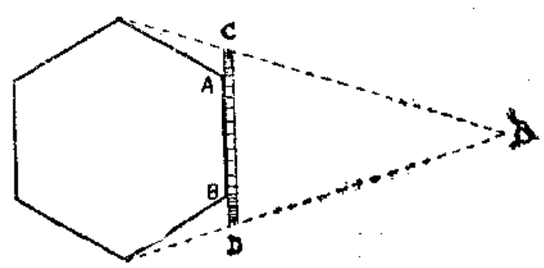
現在我所見關於(1)商人的情形是怎樣呢？我看見一段直線DAE，當中的A點特別光亮，因爲離我最近；但是因爲AC和AB兩邊很迅速的斜入霧中，這直線兩邊就很快的暗下去，因之我所認爲商人的兩端，卽D與E，是很模糊的。



關於(2)醫生的情形就不然啦，雖然也是一條直線（D'A'E'），中點(A')很亮，但是兩邊(A'B'A'C')斜入霧中，不似商人時那般迅速，因之直線的兩傍，是慢慢的暗下去，而醫生的兩端，卽D'與E'就不像商人那樣模糊了。

經過長期的訓練，加以實際的經驗，我們中間受了高等敎育的人，便能運用視官，辨認中下階級人物，絲毫不爽，這種事實的可能，由所舉的兩個實例，總該可以明白吧。如果我的讀者抓住了這個概念，承認他的可能性，不以爲我是信口開河，無足置信，我的目的就算是達到了。如果再要曲加解釋，恐怕是越說越糊塗。不過我

恐怕有些年青的讀者,沒有經驗,看了上面簡單的實例,便以為這視覺認識法,是極容易不過的一落事,所以不嫌辭費,再略加指點,使他們知道在實際生活上,視覺認識的問題,是很奧妙而複雜的.



譬如我的父親三角形在我身旁,剛好對着我的不是他的角而是他的邊,麼除那非我請他轉動,或者我自已繞過去看,纔能知道是他,否則當時也許以為他是一條直綫,換句話說,也許誤認他為婦女.又如我那兩位六邊形的孫兒,假使有一位在我一起,剛好他的一邊(AB)正對着我的眼睛,那麼我所看見的是一條直綫,中間一段(AB)是亮的(並不像前面所說的兩旁暗下去)兩頭的小段(CA與BD)比較發暗,到C,D兩端便更暗了.

不過這些話,還是少說為妙.總而言之,所觀察的人物,如果是靜止的,倒還易於識別,但是實際生活的現象,决不如此簡單,那有名的百京大學內面,對於視覺認識法的理論,是極注意的,那里有許多學問淵博的幾何學教授,關於靜的觀察法和動的觀察法,都很有研究,從這裡出來的莘莘學子,總可以說是受了高等教育的人,但若他們置身於交際場中,或跳舞廳內,往來都是品級很高的多邊人士,要他們在這周旋進退之際;應用所學的理論,去判斷那些貴賓的品級,恐怕沒有不疾首蹙額,認為難事的.

這種貴重而有價值的技術,要想學得十二分的成功,所費的時間和金錢,着實不少,所以祇有那有財有勢的貴族子弟,纔辦得到.就我個人說,在算學界也還有點虛名,並且還有兩個頭角崢嶸很有希望的六邊形孫子,可是在那熙來攘往的多邊羣衆中,有時也覺得手足無措.這種景象,在普通商人或下等僕役的眼光裏,當然是丈二金剛,摸不着頭腦,就是讀者們屈駕光臨,恐怕也和他們一樣的莫名其妙.

在這樣的羣衆裏面,你的四面都是長長短短的直線,有的部分光亮,有的部分模糊,而且時刻變動,眞是五光十色,目不暇接.卽便你是大學三年級肄業期滿的

學生，理論上十分透澈，要想在交際場中不鬧笑話，除非再有多年的經驗纔行。對於品級比你高的人物，如果你請求要去"摸"他們，是有失禮貌的，可是他們因爲資格高，經驗多，關於你的一舉一動，沒有不瞭如指掌的，而你對於他們的舉動，却一無所知，心裏該有多麼難過？總之一句話，要在多邊交際場中舉動得當，至少自己也要是一個多邊形，這是我經驗得來的痛心的教訓。

奇怪得很，這種視覺認識的技術——我幾乎可以說是本能——要單獨的練習總能得到極大的成功。在你們的聾啞學校內，學過做手勢和手摸字的學生，永遠學不好那較難而極寶貴的唇語。我們這裏也是一樣，小時候學過"摸"的，沒有一個能够完全學好視覺認識法的。

因爲這個緣故，在我們上等階級中，"摸"是絕對禁止的。他們的孩子脫離襁褓之後，一概送入一種特別的學院去，不入普通小學，因爲普通小學是教給"摸"的技術的。在我們大學內面，"摸"是一種最重大的過失，初犯付懲戒，再犯立卽開除，決不寬恕。

但是中下階級的人們，對於這視覺認識法的技術，因爲能力不够，祇得望洋興歎。一個普通商人，要他把兒子一生三分之一的時間用去學習抽象的學問，是辦不到的。所以貧家的孩子們，自幼就許學"摸"，很快的就能成功，比他們同年歲的多邊子弟，剛剛稍爲懂一點視覺認識法，還沒有十分練習好的，在行止之際，好像活潑得多。但是等到這些多邊子弟在大學畢業之後，到社會上用其所學的時候，那就大有進步，應當刮目相看了。無論在技術，科學或者社會方面，他們的成就遠在同年歲的三角人物之上。

大學考畢業的時候，多邊學生很少不及格的。這少數落第的學生，情況極其可憐。上等階級的人不理他們，中等階級的人又看不起他們。他們在視的方面，旣不如那些多邊學士和碩士們，有訓練好的本領，在"摸"的方面，又比不上年青的商人們。一切職業公務，對於他們是閉門不納的，雖然有的地方還許他們結婚，但是要求得相當配偶，是極其困難的事，因爲從經驗上看起來，這種不幸的父母所傳

下來的子孫們，縱然不至於太不端正，也是沒有甚麼幸福的.

從前天下大亂的時候，亂黨的首領，大多數是由這類人中產生出來的，結果闖下的禍害，確乎不輕. 我們的先進政治家，有不少人主張把他們全體消滅，免貽後患. 他們主張下一道命令，所有大學畢業試驗不及格的人，一概處以無期徒期，或者用一種不痛苦的方法，全體處死.

談到作亂，就想起那些不正當的人們來了. 關於他們的事情，很有興趣，且聽我下回分解罷.

（未完）

問　題　欄

本欄之目的，在徵集關於中等算學範圍內之種種問題，不拘科目，不限難易，以供讀者之研究，藉收觀摩之效．　凡本刊讀者，皆可提出問題，及解決本欄內所提出之問題．　無論出題或解題，概依收到之先後，次第編號發表，而出題者及解題者之姓名及所在學校或住址，均隨題披露．　數人同解一題，解法同時則擇尤發表，解法異時則分段刊登．　求稿務祈繕寫清楚，姓名住址尤須明晰．　至解題時所用圖形，務請用黑色墨水精確作好，連帶寄下．　　　　編者謹啟．

問題已解決者

2．二數之積為 ab47c，其中 a，b，c 均為小於10之整數．設其一數為 792，求其他一數．

解法1．(湖北第一女子高級學畢業生陳傳瑜)

因 $792=8\times9\times11$，ab47c 既可以792除盡，則47c必可以 8 除盡，因知 c 必為2．

又 $a+b+4=9$ 之倍數．因 $a+b<18$，

$$\therefore\quad a+b=5,\cdots\cdots(1)\qquad 或\qquad a+b=14.\cdots\cdots(2)$$

又 $a+4+2-(b+7)=a-b-1=0$，或11之倍數．

今 $a-b<12$，則 $$a-b=1.\cdots\cdots(3)$$

取 (1)，(3) 聯立解之，得 $a=3$，$b=2$．

又取(2)，(3)聯立解之得 a，b 為分數(不合理)．

故知原數為 32472 而所求之數為 41．

解法2．(私立武昌張楚中學校皮亦雄)

因 $792=8\times99$，故 ab47c 必為 8 之倍數，即 8 必能整除 47c．由除法得 $c=2$，則 ab47c=ab472．

次設所求之數為 x，而以 y 代 ab (即 $y=10a+b$ 之意)得無定方程式如下：

$$792x=1000y+472.$$

解之得　　、　　$x=125m+41$,　　$y=99m+32$.

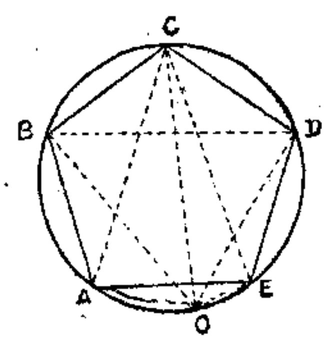
但 y 不能大於100或小於 2 (因 $y=10a+b$, 而 a, b 均爲小於10之正整數故也), 所以 $m=0$, 得 $x=41$, $y=42$. 故原數爲 32472, 而所求之一數爲 41.

(按皮君亦有如 1 之解法, 不另錄).

4. ABCDE 爲圓內接正五邊形, 設 O 爲劣弧 AE 上之任意點, 試証

$$OA+OC+OE=OB+OD.$$

解. (湖北第一女子高級中學畢業生陳傳瑜)



由圓內接四邊形 OABC, 依 Ptolemy 之定理,

知　　$OA\cdot BC+OC\cdot AB=OB\cdot AC.$

命正五邊形各邊之長爲 x, 對角線之長爲 y, 代入上

式得　　$(OA+OC)x=OBy$. ……………………(1)

同理由四邊形 OBCD 及 OBCE 各得

$(OB+OD)x=OCy$, ……………………(2)

$OBy+OEx=OCy$. ……………………(3)

(1)+(3)得　　$(OA+OC+OE)x=OCy$. ……………………(4)

比較(2)(4) 卽得

$OA+OC+OE=OB+OD$.　　　　　Q.E.D.

本題解者尙有私立武昌張楚中學皮亦雄君, 湖北省立師範汪心洞君, 不另錄.

5. 三角形 ABC 之內角等分線交對邊於 D, E, F 三點, 設 $\angle ADB=\alpha$, $\angle BEC=\beta$, $\angle CFA=\gamma$, 試證 $a\sin 2\alpha+b\sin 2\beta+c\sin 2\gamma=0$, a, b, c 爲 BC, CA, AB 三邊之長.

解法1. (私立武昌張楚中學皮亦雄)

因　　$\alpha=\frac{A}{2}+C$,　　$\beta=\frac{B}{2}+A$,　　$\gamma=\frac{C}{2}+B$

故　　$a\sin 2\alpha+b\sin 2\beta+c\sin 2\gamma$

$$=a\sin(A+2C)+b\sin(B+2A)+c\sin(C+2B)$$

$$=a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)$$

但　$c\sin(A-B)=\frac{a\sin C}{\sin A}\sin(A-B)=\frac{a}{\sin A}\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$=\frac{a}{\sin A}(\sin^2A-\sin^2B)=a\sin A-b\sin B.$$

同樣　$a\sin(B-C)=b\sin B-c\sin C,$

$b\sin(C-A)=c\sin C-a\sin A.$

故　$a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0,$

卽　$a\sin2\alpha+b\sin2\beta+c\sin2\gamma=0.$

解法2.（湖北第一女子高級中學畢業生陳傳瑜）

$a\sin2\alpha+b\sin2\beta+c\sin2\gamma$

$=\frac{a}{\sin A}\left\{\sin2\alpha\sin A+\sin2\beta\sin B+\sin2\gamma\sin C\right\}$（正弦定理）

$=\frac{a}{\sin A}\left\{\sin(2C+A)\sin A+\sin(2A+B)\sin B+\sin(2B+C)\right.$

$\left.+\sin C\right\}$　（內對角）

$=\frac{-a}{2\sin A}\left\{\cos2(C+A)-\cos2C+\cos2(A+B)-\cos2A\right.$

$\left.+\cos2(B+C)-\cos2B\right\}$　（和角公式）

$=\frac{-a}{2\sin A}\left\{\cos2B-\cos2C+\cos2C-\cos2A+\cos2A-\cos2B\right\}$

$=0.$　$(A+B+C=\pi)$

提出之問題

提出者私立武昌張楚中學皮亦雄.

12.　某人於某年元月一日，向甲銀行借銀800元，於是年終還銀500元，又次年終還銀500元，共結算本利付訖，問年利率幾何？（限用算術解答）

提出者湖北省立師範汪心洞.

13. 在四邊形ABCD內求一點O，令OA，OB，OC，OD分此四邊形爲四等分．

14. 四面體以平行於其二對稜之平面截之，則其截口爲平行四邊形，此截口當平面通過其他兩對對稜之中點時爲最大．

提出者武漢大學王元吉．

15. 一漏酒壺，滿盛酒後四人飲之，六日而盡；五人飲之，五日而盡．問一人飲之，幾日可盡？（限用算術解答） a b c d

16. 一漏水缸，以水注入之，若開六水管，則三時可滿，開四管則五時可滿，問開二管則幾時可滿？（限用算術解答）

國立武漢大學二十一年度入學試驗算學試題（理工院）

高等代數

1. 設分數式 $\dfrac{ax^2+bx+c}{px+q}$ 對於 x 之任何值常有一定之值時，其必要且充分之條件如何？試求之．但 $p\neq 0$ 而分母亦不等於零．

解：依題意

$$ax^2+bx+c\equiv K(px+q),\text{（K爲常數）}$$

應爲恒等式．故 x 同乘冪之係數應相等．因得

$$a=0,\qquad b/p=c/q$$

爲所求必要條件．又此條件顯爲充分，毋庸另證．

2. 方程式 $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ 若有二等根，則其係數間有如何之關係？試求之．

解：設等根爲 r，則

$$ax^3+3bx^2+3cx+d\equiv(x-r)^2(ax+s)$$

爲恒等式．故有

$$3b=s-2ar,\qquad (x^2\text{之係數})$$

$$3c=ar^2-2rs,\quad (x\text{之係數})$$

$$d=r^2s.\quad (\text{常數項})$$

由此三式中消去 r, s，得所求條件爲

$$(ad-bc)^2=4(ac-b^2)(bd-c^2).$$

3. 問分解 900 爲兩個因數之方法有幾種？

解：因 $900=2^2\cdot3^2\cdot5^2$. 此 2，3，5 三數中取一爲因數得 3 法，取兩數之積爲因數得 6 法，取三數之積爲因數得 4 法，再加入 1×900 之一法，共計十四法.

一般言之，若 $N=a^p\cdot b^q\cdot c^r\cdots\cdots$，$a, b, c\cdots\cdots$ 爲質數，則在 N 不爲整平方數時，分 N 爲兩個因數之法有

$$\frac{1}{2}(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots$$

種. 若 N 爲整平方數，則有

$$\frac{1}{2}\left\{(p+1)(q+1)(r+1)\cdots\cdots+1\right\}$$

種. 本例 $p=q=r=2$，而 900 爲平方數，故得 $\frac{1}{2}\left\{3\times3\times3+1\right\}=14$ 法.（參考 Hall and Knight, Higher Algebra, 343 頁）

平　面　三　角

1. 若 $\tan(\pi\cot\theta)=\cot(\pi\tan\theta)$，則

$$\tan\theta=\frac{1}{4}\left\{2n+1\pm\sqrt{4n^2+4n-15}\right\},$$

試證之. 但 n 爲大 1 及小 −2 之整數.

解：依假設得

$$\pi\cot\theta+\pi\tan\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ n\text{爲整數}.$$

即
$$2\tan^2\theta-(2n+1)\tan\theta+2=0.$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{1}{4}\left\{2n+1\pm\sqrt{(2n+1)^2-16}\right\},$$

即所求之證．又因$(2n+1)^2>16$，故有

$$-4>2n+1>4.$$

但n須為整數，故n大於1而小於 −2．

2． 若 $A+B+C=\pi$，試證

$$\begin{vmatrix} \sin^2A & \cot A & 1 \\ \sin^2B & \cot B & 1 \\ \sin^2C & \cot C & 1 \end{vmatrix}=0.$$

解：以 $\sin A\sin B\sin C$ 乘第二行各數而加入第一行，此行列式之值不變．經此運算後，第一行各數依次為

$$\sin^2A+\cos A\sin B\sin C,\ \sin^2B+\cos B\sin C\sin A,\ \sin^2C+\cos C\sin A\sin B.$$

但 $\sin^2A+\cos A\sin B\sin C=\sin A\sin(B+C)+\cos A\sin B\sin C$

$$=\cos C\sin A\sin B+\cos B\sin A\sin C+\cos A\sin B\sin C$$

$$=\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C+1.$$

同樣其餘兩數亦皆等於 $\cos A\cos B\cos C+1$，故此行列式第一行三數相等，而第三行亦皆為1，因之其值為零．

3． 試由

$$\left.\begin{array}{l} x\cos\theta+y\sin\theta=a\sin\theta \\ y\cos\theta=x\sin\theta+a(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \end{array}\right\}$$

將θ消去之．

解：由第一式得 $\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{a-y}{\cos\theta}$，

因得 $\sin\theta=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}$，$\cos\theta=\dfrac{a-y}{\sqrt{x^2+(a-y)^2}}$．

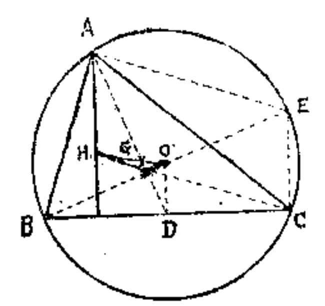
代入第二式而代簡之得

$$\left[y(a-y)-x^2\right]^2\left[x^2+(a-y)^2\right]=a^2\left[(a-y)^2-x^2\right]^2.$$

平面及立體幾何

1. 試證明三角形重心與垂心之距離，等於重心與外心距離之二倍.

證: 如圖設H爲 ABC 三角形之垂心，O 其外心.



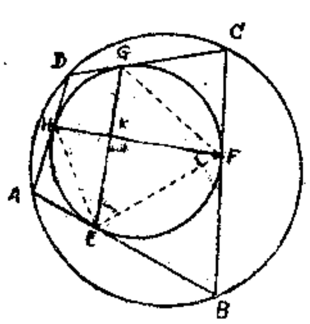
自 A 作中線 AD 交 HO 於G，聯結 OD.

聯 BO 交 ABC 之外切圓於 E，則 AHCE 爲平行四邊形，極易推知，因得 $AH=EC$.

在 $\triangle BEC$ 內，O，D 各爲 BE，BC 之中點，故 OD 爲 EC 之半，而 $AH=2OD$.

又 $\triangle AHG$ 與 $\triangle DOG$ 相似. 今旣 $AH=2OD$，則必有 $AG=2DG$，故 G 爲 ABC 之重心無疑，而 $HG=2GO$. （証訖）

2. 設一四邊形，含有內切圓及外切圓，則聯結其相對切點所作之二直線必互相正交. 試證明之.



証: 如圖設 ABCD 爲四邊形，切點爲 E，F，G，H.

令 EG，FH 交於 K，吾人祇須證 $\angle EKF=\frac{\pi}{2}$ 足矣.

聯結 EF，EH，FG，則

$\angle BFG=\angle FEK$，$\angle DEH=\angle EFK$，（弦切角定理）

但 $\angle BFG=\frac{\pi-B}{2}$，$\angle DEH=\frac{\pi-D}{2}$，

故 $\angle BFG+\angle DEH=\pi-\frac{B+D}{2}=\frac{\pi}{2}$；$(B+D=\pi)$

卽 $\angle FEK+\angle EFK=\frac{\pi}{2}$.

因之 $\angle FKF=\frac{\pi}{2}$，而 $EG\perp FH$. （証訖）

3. 問正多面體有幾種?其故安在?

按此題爲教科書中定理，讀者請參考 Wentworth 幾何 674節（商務版）可也.

平面解析幾何

1. 設用極坐標 (Polar Coordinates) 表示圓錐曲線,以焦點為極點,其方程式為何?

(參考: Smth-Gale-Neelley, New analytic geometry, 159 頁)

2. 試作出下列各式之曲線:

$$(a)\quad r=\theta,\qquad (b)\quad r^2=\theta\qquad (c)\quad r=\frac{1}{\theta}.$$

按此三曲線皆謂之螺線:(a)為亞奇點德螺線 (Archimedes Spiral),(b)為拋物螺線,(c)為雙曲螺線,任何解折幾何教科書中均有之,茲不贅.

3. 設過拋物線之外切三角形各角頂,作三角形之外切圓,則必通過拋物線之焦點,試証明之.

證. 設拋物線之方程式為 $x=at^2$, $y=2at$, 焦點為 (a,o).

命 P,Q,R 為外切三角形之切點,并設其坐標為 $(at^2_1, 2at_1)$, $(at^2_2, 2at_2)$ 及 $(at^2_3, 2at_3)$. 在 P 之切線,其方程式為 $t_1y=x+at_1^2$, 等等因之各角頂之坐標為

$$\left\{at_2t_3,\ a(t_2+t_3)\right\},\ \left\{at_3t_1,\ a(t_3+t_1)\right\},\ \left\{at_1t_2,\ a(t_1+t_2)\right\}.$$

過此三點作圓,其方程式為

$$x^2+y^2-ax(1+t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2)-ay(t_1+t_2+t_3-t_1t_2t_3)$$
$$+a^2(t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2)=0,$$

恰通過 (a,o) 點.

書 評

介紹兩本中等算學教授法的名著

J. W. A. Yoang: The Teaching of Mathematics in Elementary and Secondary Schools. 1929. 增訂版. 451頁.

Godfrey and Siddons: The Teaching of Elementary Mathematics, 1931 初版 322頁 劍橋大學出版部.

中學教師大多數對于教授法書是忽視的,他們以爲看懂了教科書的內容,做得到敎科書的習題,就算盡了自已的職責;他們不想進一步研究教學的方法,怎樣使學生有透徹的了解,和濃厚的興趣,甚至以爲這些都不是從敎授法書中獲得的.即如任鴻雋先生最近曾說:"一個善於敎學的先生,他自已敎學的方法,就是一個活的榜樣.從他受敎的人,當然在不知不覺中得到許多好的敎授法,這豈不比讀幾本敎授法書强得多嗎?"——見獨立評論第28期:敎育改革聲中的師範敎育.

這段話的涵義,據我們看來,是要中學敎師模仿大學敎授良好榜樣去敎中學生.可是我們要和道大學生和中學生因爲學識上和經驗上的懸殊,對於他們所採用的敎授法,當然亦是不同.尤其是關于算學的敎授方法,在中學要注重啓導的引誘和直觀實用的運算,但是在大學完全是自動的研究和嚴謹理論的探討.何況所謂敎授法書是集合古今良好敎師的畢生的經驗,用科學方法分析出來,再歸納爲普通的原則,可以作新進敎師的指導,同時又可以作老敎師的參考.

在國內的出版界,說起來眞是可憐,據我們所知道的,不但自已著作的中等算學敎授法是沒有,連翻譯人家的這類書,都一本也找不到,因此,我想介紹一兩本關於這類的敎授法書,也許有點意義.不過歐美的這類書汗牛充棟,我所以從中選擇這兩本相提並論,不但因爲他們都是新主義算學敎授法的產兒,並且因爲前者注意美國的敎學情形及一般敎授方法和原理的探討,後者偏重英國的敎學情形及特殊定

理和圖形的實際教授方法．前書著者是有高深學理的大學敎授，後書著者是有豐富經驗的中學敎師．希望從這些絕對不同的認識中，互相比較和融會，再參酌我國的現在情形，運用自己的敎學經驗創造一種新的敎授法，代替從前呆板的敎授法，那麼這篇介紹文的目的，就算達到了，

楊氏這本書，是美國師範叢書之一種．著者在芝加哥大學任算學敎授法講座有年，與穆爾(Moore)共同努力于改造美國算學敎育事業．曾于1900年著"德國之算學敎育"，極力贊成克萊因(Klein)之混合敎授法，提倡培理Perry之實驗室敎授法．我們要介紹的這本書自1907出版後，極受熱烈的歡迎，每年至少要重版一次，這就很可以想見銷行的數量．我相信在中國看過這本書的人，一定也會不少的．

這本書在編制上的優點：每章的開始，都寫出很多關于這章的參考書籍，使我們知道他的來源，又可以進一步當作研究的門徑；每章的節段，都有清醒的題目標明，使我們祇要看到目錄，便會對于整個的內容有個鳥瞰的認識；每章的末尾都附有總綱，將這章的內容提綱挈領地重述一遍，講得有條不紊．此外，凡是篇中所引據別人的意見，都要言不煩地寫在脚注中，免得我們另外參考原書．

在內容上的優點：本書篇幅既多，故能將所有的盡量說述，以期達於詳盡的境地．最初兩章汎論算學敎授法在敎育上的重要，及中等算學的目的和價値，蒐集各家學說，作有系統的敘述，立論不偏不激．他雖說算學是思想的形式，但是並沒有否認他在實用上的價値．自第三章至第十章，詳論各種方法與形式的內容．他自已是一位善於用啟導方法敎學的，所以對於他的利弊，闡明非常詳細．他雖是贊成培理的實驗方法，但是並沒有忽視他的流弊．自第十一章至第十五章，分論各科敎授法，至為詳盡，尤為初任敎師所必讀．我們認為全書最精彩的地方，是他給中學敎師所開應讀的書目，廣博精詳，無微不備．對於課程的排配，亦有新穎的見解．

篇末附有1906—1913年的重要文獻，和1913—1923年的算學敎育發展情形，這也是很我們注意的．

第二本書是英國劍橋大學著名老敎授哥德弗 Godfrey 及哈羅高級中學（Harrow High School)主任教師雪頓(Siddons)兩人合著的，經過多年的計劃，直到最才得出版．他們倆過去合編書很多，關於中等算學教科書的有初等代數，簡易幾何初等三角，立體幾何，近世幾何，五本．這幾本書雖是在二三十年前出版的，但是因爲逐次修正，便於教學的緣故，至今還是非常流行．從他倆都有三四十年的教學歷史這點看來，就很可以想見我們所要介紹的這本書的價值了．

全書共分六篇．第一篇敍述算學在教育上的地位，是哥德弗教授寫的．他認爲現代算術的內容，完全講的是解答試驗委員所提出題目方法，這個在孩童時期是一種可怕的重累．主張型式陶冶說的達倫伯(D' Alembert)曾說："代數是最和善的，她告訴你的比你要問的還多"．但是他說："求學的目的，是訓練智慧能力，代數恐怕是算學中費時多而得效少的一門功課"．他覺得現代的幾何和三角，應該要數值化和圖表化，這些話很可代表他的傾向了．

以後的五篇，都是雪頓的作品．第二篇很坦白地敍述他自己的教學經驗．雖然對於許多教授法上的問題沒有詳細的解答，可是有些地方却能給我們不少的益處．第三篇專論算術教授法，附有一章有效數值的精確度，確有發揮前人所沒有見到的地方．許多速算的法則，亦引起我們不少的興趣．第四篇專論代數教授法，他認定代數教學的最大目標，是要知道問題或方程式的存在的理由．其次是一般化，公式運算及函數觀念．第五篇專論幾何教授法，恐怕要算全書最精彩的部份．他以爲初中一年級就應該授經驗幾何，接着兩度和三度空間幾何融合教授．所謂幾何上的假設作圖（Hypothetical coustruction in geometry)，亦舉出許多實際的例子和方法．他說："學生祇知道這樣做，而不知道爲什麼這樣做的弊端，是不良教授法的責任"．第六篇是對於三角教授法的簡單討論，附有少許關於解析幾何和微積分的意見．

（余潛修）

特　　載

教育部公佈中學算學課程標準

初級中學之部

第一　目標

(壹)使學生能分別了解形象與數量之性質及關係,並知運算之理由與法則.

(貳)訓練學生關於計算及作圖之技能,養成計算純熟準確,作圖美潔精密之習慣.

(叁)供給學生日常生活中算學之知識,及研究自然環境中數量問題之工具.

(肆)使學生能明瞭算學之功用,並欣賞其立法之精,應用之博,以啓向上搜討之志趣。

(伍)據「訓練在相當情形能轉移」之原則,以培養學生良好之心理習慣,與態度,如:(一)富有研究事理之精神與分析之能力;(二)思想正確,見解透澈;(三)注意力能集中持久不懈;(四)有愛好條理明潔之習慣.

第二　時間支配

時數＼學期 學程	第一學年		第二學年		第三學年	
	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期	第一學期	第二學期
算術(附簡易代數)	4	4				
代數			3	3	2	2
幾何(附數值三角)			2(實驗幾何)	2	3	3

第三　教材大綱

(壹) 第一學年

算術　記數法,命數法.整數四則,速算法.四則難題.複名數.整數性質,析因數;求最大公因數與最小公倍數法,分數與小數四則及應用題近似計算(亦稱省略

算Approximate Calculation）. 比例及應用題.百分法及應用題.利息算.開方.統計圖表,統計大意「如平均數及物價指數等問題」.

(貳) 第二學年

(一)代數部份 代數學目的.代數式.公式之構成與應用.圖解.正負數.整式四則.一元一次方程,聯立一次方程,及其應用題「附圖解法」.特殊積與析因式法,用析因式法解一元二次方程.簡易不等式.最高公因式,最低公倍式.分式,分式方程.

(二)實驗幾何學 Experimental Geometry 部份 平面幾何圖形.基本作圖題.用量法發見直線形,圓等之特性.三角形作圖題及圖解法.平面形之度量.空間幾何圖形.立體面積及體積之度量.

(三)幾何部份 定義及公理.基本圖形(直線及圓)之主要性質(關於圓者,如同圓及等圓之半徑皆相等諸理).三角形.全等定理.等線段與等角.不等定理,平行線.平行四邊形.多角形.基本軌跡.關於直線形作圖題之證明.

(叁) 第三學年

(一)代數部份 乘方及開方,根數與虛數.指數,對數檢表法及應用.一元二次方程解法及應用問題.可化為二次方程之簡易高次方程(一元及二元者).函數.變數法,比例.級數.

(二)幾何部份 圓之基本性質,基本作圖題之證明.比例相似形.比例之應用.畢氏定理及推廣.直線形之面積.正多角形,圓之度量.

附數值三角 Numerical Trigonometry 部份 三角函數定義,基本關係式,表之用法.直角三角形解法(眞數解法)簡易測量問題.

「附註一」 上例條目,以及各年級中教材之分配,不過大致表示一種合理之次第,並非嚴格不可移易,教者得依其便利變通之.

「附註二」 本標準中算學名詞,暫以科學名詞審查會所定者為依據.其未備者,則採近日通行之名詞(如複名數,變數法).尚未有譯名,或易滋誤解者,則附註英文.(高中部份同此).

第四 實施方法概要

(壹) 作業要項

(一)教室練習 初中學生對於算學一科,最感困難,宜在教室,多予練習與複

習之機會，務使學生課外作業時間，得以減少。

(1)黑板練習　教室宜多設黑板，練習題應儘量指定學生在黑板上演算。既可防止抄襲之弊，復可減輕學生課外作業之擔負，與教師批改多量練習本之困難。教師即可餘出此項時間，充分指導學生自修。

(2)口問　凡基本觀念及法則，宜不時向學生口問，令其即時作答。問時宜先述問題，再指學生令其作答。

(3)質疑　學生對已授教材，如有不能明瞭之處，應聽其充分就教室提出討論。學生質疑時，除特殊困難之點外，不應逕予解答，宜分析其困難之所在，逐步提示，使學生自行索解，以培養自動研究之能力與習慣。

(二)課外練習　課外宜有相當練習，用活頁紙或練習簿，可由教師自定。遇必要時，得就上課時間內，令同級學生，分組討論，以期徹底了解。但以不背自動努力之精神爲原則。

(三)考試　應使學生了解考試之意義與價值，而樂於接受。

(1)臨時測驗　每次時間宜短，測驗次數宜多。

(2)段落試驗　應於相當段落時舉行。

(3)學期試驗　於學期結束時舉行。

(貳) 教法要點

(一)總論

(1)本科用分科並教制，或混合制，可由各校自行酌定。惟不拘用何方式，須隨時注意各科之聯絡並保持固有之精神。

(2)初中算學以計算爲中心。基本觀念，務求徹底明瞭，教材不取複雜繁重。其偏重理解(如較難之幾何軌跡、及代數中方程式解法原理)，及形式訓練(如艱深之析因式法及過於細密之幾何推理)之教材，均應留待高中時補充。

(3)練習題之選擇，應注意：(甲)多選實際問題，少選抽象問題；(乙)多選常態生活問題，少選假設疑難問題。

(4)新方法與原理之教學，應多從問題研究及實際意義出發，逐步解析歸納，不宜僅用演繹推理。

(5)教學方法，應引導學生使常有正確思想，並養成其分析能力。更應隨時提倡自動，一掃依賴虛僞之積弊。

(6)凡速寫整潔等習慣，均應隨時訓練，使漸進於純熟自然，而臻於藝術化。

(7)凡教材具有特別歷史與味者，教師最好能隨時提及，以引起學生之興趣。

(二)算術

(1)算術中應採淺易之代數，如以字母代數，記述公式（如利息等）以便預先灌輸代數觀念。

(2)運算技能　貴能純熟敏捷，故應注意：(甲)嫻熟近似計算，明瞭精確度之意義；(乙)練習心算，(丙)儘量應用數表，如方根表，複利表等。

(3)注重應用問題，如日用計算統計圖表等。

(三)代數

(1)應注意方程式函數之研究。應用問題務取簡明而切實用者。函數觀念，宜從實例入手，並與變數法及比例聯絡教授。

(2)代數與算術關係極密切，宜多聯絡。如式之計算與數之算法多相類，宜切實比較聯絡，俾易了解。又如函數值求法公式計算，均應側重數字問題。

(四)幾何

(1)幾何事項本爲直觀教材，故應從實驗幾何入手，俾易於引起學生興趣而輸入明確之基本觀念。教授實驗幾何，應使學生自動作圖度量。在立體幾何中，更應自作紙板或他種模型。無論平面或立體，凡關於度量之簡單公式，應用實驗方法驗明之。

(2)理解幾何中應特別注意直線形，以其爲以後各部份之基礎也。軌跡及作圖題只可僅授大要。圓及以後各部份，只宜擇要教授，其定及軌跡作圖題之較難者，應待至高中時講解。

(3)幾何雖爲最重邏輯次序之科目，然初中學生每不能感受嚴謹推理之必要。故公理及假設之條數應增加。基本定理證明不易了解者，可暫認爲假設而不加證明。弧度，比例論，面積論中不可通約之理，不必提出，而應以近似值法代之。

附數值三角

三角之正式教授，宜移至高中，但三角應用方面極廣，初中亦不可不知，故宜就實例入手，講授三角函數定義，及直角三角形解法，簡易測量，餘可從略。