

大學叢書

# 工程力學

上 冊

陸志鴻編



商務印書館發行

# 大學叢書委員會

## 委員

丁燮林君 王世杰君 王雲五君  
任鴻雋君 朱經農君 朱家驊君  
李四光君 李建勛君 李書華君  
李書田君 李聖五君 李權時君  
余青松君 何炳松君 辛樹懋君  
吳澤霖君 吳經熊君 周仁君  
周昌壽君 秉志君 竺可楨君  
胡適君 胡庶華君 姜立夫君  
翁之龍君 翁文灝君 陳可忠君  
馬君武君 馬寅初君 孫貴定君  
徐誦明君 唐鈺君 郭任遠君  
陶孟和君 陳裕光君 曹惠羣君  
張伯苓君 梅貽琦君 程天放君  
程演生君 馮友蘭君 傅斯年君  
傅運森君 鄒魯君 鄭貞文君  
鄭振鐸君 劉秉麟君 劉湛恩君  
黎照寰君 蔡元培君 蔣夢麟君  
歐元懷君 顏任光君 顏福慶君  
羅家倫君 顧頡剛君

MG  
TB12  
!  
=

大學叢書  
工程力學  
上冊  
陸志鴻編



3 2168 5041 6

商務印書館發行

廣東省出版集團有限公司  
合作印務部

書位號數 -----

登記號碼 -----

## 緒 言

工程力學 (Technical mechanics) 與應用力學 (Applied mechanics) 二名詞之解釋隨各著者見解之不同而有廣義與狹義之分。討論剛體之力學，討論非剛體之力學，及討論流體之力學實皆屬於力學之應用。故就力學全般言之，則關於剛體之動力學與靜力學，關於非剛體之彈性學與材料強度學，及關於流體之水力學與航空力學等宜總稱之為應用力學，且主要應用在於工程方面，故亦可總稱之為工程力學。即工程力學與應用力學二名詞本相同義而包括剛體非剛體，及流體等各部門之力學。如 J. Perry, W. J. M Rankine C. E. Fuller, W. A. Johnston, A. Föppl 等氏均有此廣義的見解，其所著之書中均包括各部門之全部份或一部份。但最近美國著者中如 A. P. Peorman, E. R. Maurer R. J. Roark, N. C. Riggs 等氏，其所著之書僅限於剛體之動力學與靜力學而亦稱之曰應用力學或工程力學，此乃狹義的見解。蓋剛體之動力學與靜力學實屬應用力學之入門，且關於此部門之力學未有適當之簡括名詞以與他部門相區別。本書中所討論者亦限於剛體之動力學與靜力學，爰採用此狹義的見解而名之曰工程力學。但

編者將應用力學之名詞用以包括力學全般各部門，即就工程力學，材料力學，彈性學，水力學，航空力學，熱力學等總稱之曰應用力學。

本書程度以供吾國大學工學院內各科系之教本為標準，避去深奧之理論與高等數學之應用，但工程上所必需之智識則網羅詳盡。動力學中雖注重於平面運動，但對於空間運動亦略涉及之。單位均用米突制以矯正習慣上尚有墨守呎磅制之弊。本書之內容材料及問題參考下列各書之處甚多，爰附誌之。

E. R. Maurer and R. J. Roark—Technical Mechanics

C. E. Fuller and W. A. Johnston—Applied mechanics Vol. I.

F. B. Seely and N. E. Ensign.—Analytical mechanics for  
Engineers

F. L. Brown—Engineering mechanics

A. P. Poorman—Applied mechanics

N. C. Riggs—Applied mechanics

A. Föppl—Vorlesungen über Technische Mechanik Bd. I, II.

編者乘授課之暇，採取上列各書之精粹，參加個人之見解，匆促輯成是書。內容之未善及譯詞之未妥在所不免，幸祈讀者有以教之。

民國二十四年一月十八日於國立中央大學工學院材料試驗室

編者識

# 目 錄

## 第 一 篇

### 靜 力 學

<b>第一章 緒論</b> .....	1
1. 討論之範圍 .....	1
2. 力 .....	2
3. 力之分類 .....	3
4. 牛頓氏運動定律 .....	4
5. 度量與向量 .....	4
6. 力之可移性 .....	5
7. 力系.....	5
8. 力之圖示法 .....	6
9. 力之平行四邊形定律 .....	8
10 力之三角形定律 .....	10
11. 力之分解.....	11
12 力勢 .....	13
13. 偶力 .....	15
14. 問題之解法 .....	17

<b>第二章 力之合成</b> .....	23
15. 力之合成.....	23
16. 同平面合交力系之合力 .....	23
17. 同平面平行力系合力之圖解法 .....	26
18. 同平面非合交平行力系合力之圖解法 .....	30
19. 關於力勢之原理 .....	34
20. 同平面平行力系合力之代數解法 .....	38
21. 同平面非合交非平行力系合力之代數解法 .....	39
22. 關於偶力之重要定理 .....	45
23. 力勢之圖解求法 .....	49
24. 空間合交力系之合力 .....	52
25. 空間平行力系合力之圖解法.....	54
26. 關於空間合交及平行力系之力勢原理.....	54
27. 空間平行力系合力之代數解法 .....	57
28. 空間偶力之合力 .....	59
29. 用向線求偶力之合力法 .....	62
30. 相互直交三平面內之偶力 .....	63
31. 偶力之分解 .....	65
32. 空間非合交非平行力系之合力 .....	65
33. 關於空間非合交非平行力系之力勢原理 .....	71
34. 分布力 .....	73
35. 分布力之合力 .....	75

---

36. 重力 .....	80
<b>第三章 力之平衡</b> .....	<b>82</b>
37. 概說 .....	82
38. 平衡之圖解條件 .....	83
39. 平衡之代數條件 .....	83
40. 同直線上力系之平衡方程式 .....	85
41. 同平面合交力系之平衡方程式 .....	87
42. 拉米定理 .....	88
43. 三力之平衡 .....	89
44. 同平面合交力系平衡條件之應用 .....	92
45. 同平面平行力系之平衡方程式 .....	99
46. 同平面平行力系平衡條件之應用 .....	100
47. 同平面非合交非平行力系之平衡方程式 .....	103
48. 同平面非合交非平行力系平衡條件之應用 .....	109
49. 雜例 .....	113
50. 空間合交力系平衡方程式 .....	126
51. 空間平行力系之平衡方程式 .....	134
52. 空間非合交非平行力系之平衡方程式 .....	139
53. 各力系平衡條件之總括 .....	146
<b>第四章 簡單架構之內力分析</b> .....	<b>152</b>
54. 定義 .....	152
55. 概說 .....	153

56. 構肢之內力 .....	154
57. 結合點分離法 .....	156
58. 部份分離法 .....	160
59. 圖解分析法 .....	163
60. 特種之例 .....	166
61. 起重機架構 .....	170
62. 繩與滑輪上之力 .....	177
<b>第五章 懸繩 .....</b>	<b>185</b>
63. 概說 .....	185
64. 成拋物線形之懸繩 .....	185
65. 成懸垂線形之懸繩 .....	193
66. 受集中荷重之懸繩 .....	200
<b>第六章 摩阻力 .....</b>	<b>204</b>
67. 概說 .....	204
68. 摩阻力係數 .....	206
69. 關於摩阻力之定律 .....	209
70. 靜止或運動之判定 .....	210
71. 物體開始滑動時之作用力 .....	213
72. 斜面 .....	220
73. 楔 .....	223
74. 螺旋 .....	227
75. 軸摩阻力 .....	230

---

76. 接觸於二直線時之軸摩阻力 .....	233
77. 接觸於面時之軸摩阻力.....	234
78. 銷釘摩阻力 .....	235
79. 支軸摩阻力 .....	240
80. 實心平端支軸.....	241
81. 空心平端支軸及頸座支軸 .....	243
82. 錐端支軸 .....	244
83. 輪帶摩阻力 .....	246
84. 繩之傳動 .....	249
85. 輪帶或繩所傳達之最大馬力 .....	251
86. 輾阻力勢 .....	252
87. 輾輓軸承 .....	256
<b>第七章 距心及重心.....</b>	<b>265</b>
88. 第一次勢 .....	265
89. 距心.....	265
90. 距心之求法 .....	267
91. 巴甘二氏定理.....	276
92. 複形體之距心.....	278
93. 平行力系之中心 .....	286
94. 物體之重心 .....	289
95. 面積之作圖求法 .....	291
96. 面積距心之作圖求法.....	294

97. 重心之實驗求法 .....	300
<b>第八章 惰性勢</b> .....	<b>304</b>
98. 面積之惰性勢 .....	304
99. 旋動半徑 .....	306
100. 平行軸間面積惰性勢之關係 .....	306
101. 面積惰性勢之積分求法 .....	309
102. 複形面積之惰性勢 .....	313
103. 面積之惰性積 .....	321
104. 平行軸間面積惰性積之關係 .....	323
105. 同交於一點上兩對直交軸間惰性勢及惰性積 之關係 .....	327
106. 面積之主惰性勢及主軸 .....	328
107. 面積惰性勢之作圖求法 .....	334
108. 惰性橢圓 .....	337
109. 質量之惰性勢 .....	340
110. 旋動半徑 .....	343
111. 薄平板之惰性勢與面積惰性勢間之關係 .....	343
112. 平行軸間質量惰性勢之關係 .....	344
113. 簡形勻質物體之惰性勢 .....	346
114. 複形物體之惰性勢 .....	353
115. 質量之惰性積 .....	355
116. 物體之主惰性勢及主軸 .....	357

---

117. 質量慣性勢之實驗上求法.....	358
-----------------------	-----

## 第 二 篇

### 運 動 學

第九章 質點之運動 .....	363
118. 概說.....	363
119. 線變位 .....	364
120. 角變位 .....	365
121. 線變位與角變位間之關係 .....	366
122. 線速度與速 .....	367
123. 角速度 .....	370
124. 線速度與角速度間之關係 .....	371
125. 線加速度 .....	374
126. 切線加速度與法線加速度 .....	376
127. 角加速度 .....	381
128. 線加速度與角加速度間之關係 .....	382
129. 軸向分加速度.....	384
130. 拋射體之運動.....	391
131. 等加速度直線運動 .....	393
132. 等角加速度圓運動 .....	395
133. 單弦運動 .....	395
134. 活塞之運動.....	399

135. 不等加速度運動 .....	401
136. 變位, 速度, 及加速度之圖解 .....	404
137. 相對運動 .....	411
138. 徑向及橫向分加速度 .....	417
139. 高遼里氏定律 .....	419
<b>第十章 剛體之運動</b> .....	<b>432</b>
140. 概說 .....	432
141. 進行運動 .....	432
142. 廻轉運動 .....	433
143. 平面運動 .....	434
144. 剛體之角變位, 角速度及角加速度 .....	434
145. 平面運動之分解 .....	435
146. 剛體內任意一點之運動 .....	437
147. 平面運動可視為對於一動軸之廻轉運動 .....	440
148. 球面運動 .....	444
149. 球面運動之角速度 .....	446
150. 球面運動物體內任意一點之速度 .....	448
151. 一般空間運動之分解 .....	449

### 第 三 篇

### 動 力 學

<b>第十一章 質點之動力學</b> .....	<b>454</b>
--------------------------	------------

---

152. 概說.....	454
153. 惰性與質量.....	455
154. 質點之運動方程式.....	458
<b>第十二章 剛體之動力學.....</b>	<b>466</b>
155. 概說.....	466
156. 質量中心之運動方程式.....	468
157. 進行運動時剛體之動力學.....	469
158. 廻轉運動時剛體之動力學.....	488
159. 特種剛體之運動方程式.....	494
160. 向心力與離心力.....	508
161. 關於撞心之性質.....	508
162. 平面運動時剛體之動力學.....	517
163. 飛輪之箍拉力.....	532
164. 軌道彎曲處外側軌面之舉高度.....	534
165. 單擺.....	538
166. 圓錐擺.....	540
167. 物體沿垂直面內曲線軌道上之運動.....	542
168. 複擺.....	543
169. 扭擺.....	545
170. 質量惰性勢之實驗的求法.....	546
171. 廻轉物體之定衡法.....	548
172. 同一廻轉平面內數個物質之定衡法.....	550

173. 相異廻轉平面內數個質量之定衡法 .....	551
174. 往復運動物體之定衡法.....	555
175. 兼有廻轉運動與往復運動物體之定衡法 .....	557
176. 整速器之作用.....	557
177. 加重圓錐擺整速器 ... ..	558
178. 離心軸整速器.....	561
179. 惰性軸整速器.....	562
180. 離心整速器與惰性整速器之比較.....	563
181. 萊德氏惰性整速器上力之分析.....	564
<b>第十三章 功 功率 能 .....</b>	<b>579</b>
182. 功之定義與計算 .....	579
183. 功之符號與單位 .....	582
184. 功之圖示法 .....	583
185. 力系對於物體所做之功.....	584
186. 功率.....	588
187. 能之定義 .....	591
188. 動能.....	591
189. 質點之動能 .....	591
190. 剛體之動能 .....	593
191. 位能.....	597
192. 非機械能 .....	599
193. 關於功與動能之原理.....	600

194. 能之不滅 .....	606
195. 保存質量系內位能與動能間之關係 .....	607
196. 效率 .....	609
197. 軸座內因摩擦所損失之能 .....	610
198. 簡單之動力測定器 .....	611
<b>第十四章 力積及運動量</b> .....	<b>618</b>
199. 力積 .....	618
200. 力積勢 .....	619
201. 質點之運動量 .....	620
202. 物體之線運動量 .....	622
203. 迴轉物體之角運動量 .....	623
204. 平面運動物體之角運動量 .....	624
205. 關於線力積與線運動量之原理 .....	624
206. 關於角力積與角運動量之原理 .....	626
207. 關於力積與運動量原理對於剛體特種運動 之應用 .....	627
208. 運動量之不滅 .....	631
209. 衝擊 .....	638
210. 進行運動二物體之正心直衝擊 .....	639
211. 復原係數 .....	641
212. 進行運動物體與迴轉運動物體間之衝擊 .....	642
213. 正心直衝擊時動能之損失 .....	644

<b>第十五章 運動於三次空間內剛體之動力學</b> .....	647
214 概說 .....	647
215. 角運動量對於時間之變化率 .....	650
216. 球面運動之剛體對於通過固定點之一直線 周圍之角運動量 .....	652
217. 球面運動對於固定點之角運動量 .....	653
218. 對於通過固定點上一直線之角運動量變化率.....	655
219 扭勢及角運動量變化率之指向與符號 .....	659
220 對於通過質量中心而有一定方向之直線之角 運動量.....	661
221. 對於通過質量中心而有一定方向之直線之角 運動量變化率 .....	662
222. 旋動儀 .....	634
223. 旋動儀之理論(其一).....	667
224. 旋動儀之理論(其二).....	670
225. 旋動儀之理論(其三).....	671
226. 向心力與旋動偶力之相似點 .....	674
227. 車輪之例 .....	676
228. 斜公轉之旋動儀運動 .....	678
229. 旋動儀羅盤之原理 .....	680

# 工程力學

## 第一篇 靜力學

### 第一章 緒論

1. 討論之範圍 凡靜止或運動中之構造物,如建築物或機械等皆受外力之作用而能抵抗之,并或起生運動而做功(Work).自構造物上對外界方面言之,先假定一切物體為剛體(Rigid body)而後討論外力之作用效果或解未知力.此等問題即本書內所討論者,歸入於工程力學(Technical mechanics)範圍內.自構造物上對內部方面言之,須廢除物體為剛體之假定,而討論物質之變形(Deformation)及內力(Stress).此等問題須俟外力完全決定後方可討論,非屬於本書之範圍,乃歸入於材料力學(Mechanics of materials, Strength of materials)之領域.工程力學,材料力學,水力學(Hydraulics),熱力學(Thermodynamics),航空力學(Aerodynamics)等皆為應用力學(Applied mechanics)中各部門也、

本書內所稱物體皆指剛體而言.凡物體受外力時必起運動.研究運動狀況者為運動學(Kinematics).研究運動中物

體上外力之作用狀況與其效果者為動力學 (Kinetics). 但外力相平衡時則物體靜止或以等速度運動. 研究相互平衡之外力狀況者為靜力學 (Statics). 本書內分三篇討論之.

2. 力 (Force) 由二物體相互作用而生, 故力不能單獨存在, 必有作用與反作用二者之力, 同時起生. 某物體受他物體之作用, 即受外力 (External force), 此時該物體內部起形狀變化, 而外部起運動變化. 但同時該物體發生抵抗, 使二物體間之相互作用力得相平衡. 該物體對於形狀變化之抵抗即成彈性 (Elasticity) 或剛性 (Rigidity). 對於運動變化之抵抗即成惰性 (Inertia). 若某物體受一個外力之作用必起運動變化, 若受二個以上之外力作用時可得靜止.

由上所論, 物體間之力不能單獨存在. 但便利上研究一物體之運動等時, 僅就他物體所作用於該物體上之力論之.

凡外力作用於一物體時, 有外部效果 (External effects) 與內部效果 (Internal effects) 二者. 後者即該物體內發生變形與內力, 為材料力學上之所討論者. 前者又分成運動之變化及反作用之二部分. 例如物體受地球引力以加速度  $g$  ( $980\text{mm}/\text{sec}^2$ ) 落下時, 則外部效果僅此運動變化部份. 若該物體靜止於地上時, 則地球引力之外部效果僅為物體底面所受向上壓力. 若該物體置於升降機地板上, 而升降機徐徐下降時, 則物體以小於  $g$  之加速度降下, 而地球引力之外部效果, 其一部份成爲運動變化, 一部份成爲物體底面所受升降機地板之反

作用力。

本書內所論之力指拉力(Pull)或壓力(Push)而言。

決定一力必需三個條件,即(1)力之大小(Magnitude), (2)力之方向(Direction and Sense),及(3)力之作用線(Line of action)也。也表示力值之單位,工程上用重力單位(Gravitation units),即地球對於單位物質之引力也。例如1公斤物質之重力為1公斤,1磅物質之重力為1磅。但同一質量之地球引力因緯度及高度而異,赤道上最高處與兩極相差達0.6%。此重力之相異因 $g$ 之不同而生。今國際間公定緯度45處海面上之 $g$ 為標準。由此所得之重力單位為國際間公認之標準單位。但工程上實用範圍內各地重力之相差可略去之,因其影響極微故也。

質量與重力之關係由下式求之。

$$M = \frac{W}{g}$$

但 $W$ 示重力, $g$ 為落體加速度, $M$ 為質量。

3 力之分類 力可分為集中力(Concentrated force)與分布力(Distributed force)兩種。集中力者外力作用於物體之處,其表面甚小,可視為一點者。分布力者其作用之表面或體積對於全表面或全體積言之較廣。集中力可視為分布力之作用面(Area of application)變為甚小時之特別情形,其所作用之處稱為作用點(Point of application)分布力中均勻分布於表面者,即單位面積上之全力各部相等者稱為勻力布(Uniformly distributed force)。分布力常可以作用於作用面內一中心上之集

中力代替之。作用於物體上之重力乃分布力之一種，其力分布於物體體積全部各質點上，此時可以一作用於重心上之集中力代替之。

力又可分為接觸作用之力 (Force exerted through contact) 及遠隔作用之力 (Force exerted at a distance)。例如風吹於牆面之力，水壓於堤面之力，一物體推他物體之力等皆接觸作用之力也。重力，磁力，電氣吸力等皆遠隔作用之力也。

4. 牛頓氏運動定律 牛頓氏 (Sir Isaac Newton) 之運動定律 (Laws of motion)，共有下之三條。

(1) 凡質點不受外力作用時，則繼續其靜止或繼續其一等速度之直線運動。

(2) 質點受外力作用時起加速度運動於力之方向，此加速度與力成正比例，與質量成反比例。

系。數個外力同時作用於一物體時，則各力所生效果等於各力單獨作用時之效果。

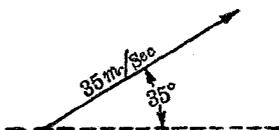
(3) 質點受外力作用時，必同時發生與外力相等反向之反作用力 (Reactive force)。

5. 度量與向量 度量 (Scalar) 者僅有大小之量，如體積，質量，速 (Speed) 等是也。向量 (Vector) 者有大小及方向之量，如力，速度 (Velocities)，加速度 (Accelerations) 運動量 (Momentum) 等是也。

向量以一附有箭頭之直線表示之，此線稱曰向線 (Vector)。直線之長度以適當縮尺表示向量之大小，直線與一標準線

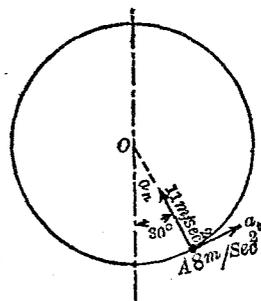
所成之角度示向量之方位(Direction),直線之箭頭表示向量之指向(Sense),例如第 1 圖中以  $1\text{mm.} = 1\text{m/sec}$  之縮尺作一直線與水平成  $35^\circ$  角,并附以箭頭,若該向線長度為  $35\text{mm.}$  時,則此向線即表示速度  $35\text{m/sec}$  之大小及方向也,第 2 圖示 0 點周圍圓運動上一點之加速度,向心加速度  $a_n$  為  $11\text{m/sec}^2$ ,切線加速度  $a_t$  為  $8\text{m/sec}^2$ .

本書中所謂方向者,皆含有方位與指向二者而言,凡向線僅表示大小與方向,而未表示作用線之位置也,若經過已知之作用點而引向線之平行線時,即可同時表示作用線之位置,例如第 2 圖中之向線  $a_n$  與  $a_t$  乃同時表示作用線之位置者也.



第 1 圖

6. 力之可移性 討論剛體上力之外部效果時,力之作用點雖前後移動於其作用線上不生影響,此性質稱曰力之可移性 (Transmissibility of forces). 解問題時常可將外力沿其作用線上前後移動至適宜位置,但討論內部效果如變形與內力時,則力之作用點不可任意移動.



第 2 圖

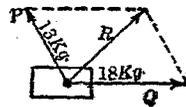
7 力系 任何個數之力合併討論時,則此諸力稱為力系 (Force system),某力系中諸力之作用線在同一平面上時稱曰同平面力系 (System of coplanar forces),若不在同一平面

上時稱曰異平面力系(System of non-coplanar forces).若諸力作用線交於一點時稱曰合交力系(System of concurrent forces).若不同交於一點時稱曰非合交力系(System of non-concurrent forces).若諸力作用線相平行時,稱曰平行力系(System of parallel forces),若不相平行時稱爲非平行力系(System of non-parallel forces).以上諸種可互相組合而成下列七種之力系.

- |     |     |     |              |
|-----|-----|-----|--------------|
| (1) | 同平面 | 合交  | 同直線          |
| (2) | 同平面 | 合交  | 非平行          |
| (3) | 同平面 | 非合交 | 平 行          |
| (4) | 同平面 | 非合交 | 非平行          |
| (5) | 異平面 | 合交  |              |
| (6) | 異平面 | 非合交 | 平行(任意二力均相平行) |
| (7) | 異平面 | 非合交 | 非平行          |

上之第三種力系中一特別情形,即二力相等反向且相平行者稱曰偶力(Couple).

8. 力之圖示法 力爲向量,可以向線表其大小與方向及作用線.對於質點上所作用之力或簡單問題,則可於同一圖上作向線以示力之大小方向及作用線與作用點,如第3圖.若複雜之題,則分成兩圖以示力.空間圖(Space diagram)上示物體形狀及力之作用線與方向,但不必示力之大小,如第4圖(a),此圖上以一定縮尺示物體之大小.示力圖

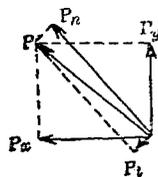
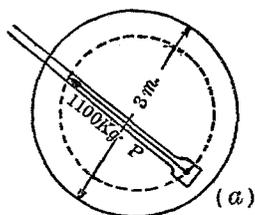


第3圖

(Force diagram) 上僅以向線用一定縮尺示諸力之大小與方向而非示力之作用線,如第4圖(b)。由示力圖可求未知力之大小與方向,由空間圖可示已知力與未知力之作用線及作用點與方向。凡用圖法解問題時,此兩圖須同時應用之。

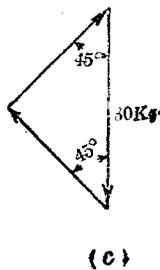
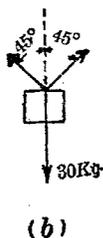
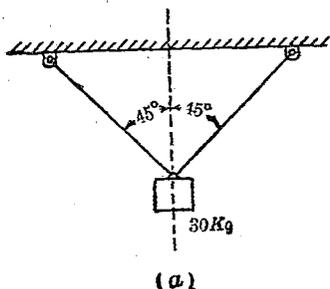
討論物體

全部或各部上力之作用狀況時,用分離體圖 (Free-body diagram)。將物體全



第4圖

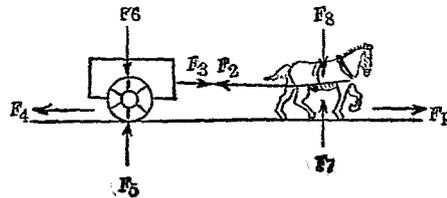
部或將其一部假想其自他部分離而視為一獨立物體,稱曰分離體 (Free-body)。作用於該分離體上一切已知與未知外力均以向線表出之。如此所得之圖曰分離體圖。解問題時先須闡明力之作用狀況,故此圖常屬必需。第5圖中(a)為空間圖, (b)為分離體圖, (c)為示力圖。



第5圖

作用於一分離體上所有一切外力之合力若為零時，該分離體即靜止或以等速度運動。若合力不等於零時，則該分離體以加速度運動。但分離體內部所有相互作用之力，因相抵消，故不顯其外部效果。例如第 6 圖中馬拖車時，若將馬與車合併視為一個分離體時，則該分離體上之外力為地面對於馬足之水平反作用力  $F_1$ ，車輪下之摩擦力  $F_4$ ，地面作用於車輪下之垂直反作用力  $F_5$ ，地面作用於馬足下之垂直反作用力  $F_7$ ，車之重力  $F_6$ ，馬

之重力  $F_8$  等六個。其合力為  $F_1 - F_4$ ，馬及馬車因此力而進行。至於繩上之  $F_2$  與  $F_3$  二力相互抵



第 6 圖

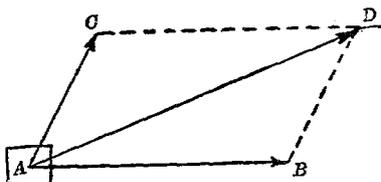
消而作用於該分離體內部，非該分離體上之外力也。今若以馬為分離體，則作用於馬上之外力為  $F_1$ ， $F_2$ ， $F_7$ ， $F_8$ ，其合力為  $F_1 - F_2$ ，馬因此力而進行。以車為分離體時，則作用於車上之外力為  $F_3$ ， $F_4$ ， $F_5$ ， $F_6$ ，其合力為  $F_3$  與  $F_4$  之偶力，車因此力而進行。

9. 力之平行四邊形定律 力之平行四邊形定律 (Parallelogram law of forces) 為力之合成 (Composition) 與分解 (Resolution) 上之基本定律。

由運動第二定律之系，得下之原理。

一物體上同時付與以二種或二種以上之速度時，則該物體之運動常保持有此等全部諸速度。

此原理即為平行四邊形定律之基礎。今設第 7 圖上一物體  $A$ ，同時付與以二速度  $\vec{AB}$  及  $\vec{AC}$ ，則該物體必以  $\vec{AD}$  速度而運動。蓋因假使將二速度分別考慮時，則一秒後  $A$  物體因第一速度可達  $B$  點，然後再因第二速度可由  $B$  點達  $D$  點，故速度  $\vec{AD}$  乃二速度  $\vec{AB}$  及  $\vec{AC}$  之合成速度也。

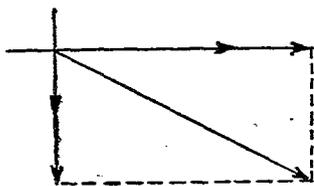


第 7 圖

再由運動第二定律，則力與其所付與於物體之速度成正比例，且其作用線與速度之方向相一致。故第 7 圖上  $\vec{AB}$  與  $\vec{AC}$  即可視為表示二力，而  $\vec{AD}$  即示合力 (Resultant)，因之得定律如下。

平行四邊形之相隣二邊表示二力時，其對角線即示其合力。如第 8 圖。

今設第 9 圖之曲桿 (Bell-crank) 上， $M, N$  二端加以  $P, Q$  二力使臂不動。此二力作用線之延長設交於  $O$ ，今於 (b) 圖上以適當縮尺自任意一點  $O$  作  $P, Q$  二力之向線，由平行四邊形定律，其對角線即示合力  $R$  之大小與方向。(a) 圖



第 8 圖

$O$  點上作同點之平行四邊形，則其對角線即示合力之大小，方向，與作用線。

今就(b圖)上由三角法可得

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha}$$

$$\tan \theta = \frac{P \sin \alpha}{Q + P \cos \alpha}$$

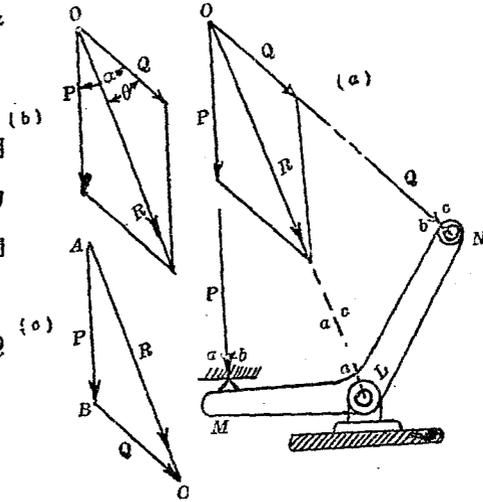
但  $\alpha$  為  $P, Q$  二力作用線間之夾角,  $\theta$  為合力  $R$  與  $Q$  力二作用線間之夾角.

若  $\alpha = 90^\circ$ , 即  $P$  與  $Q$

互成直角, 則

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$\tan \theta = \frac{P}{Q}$$



第 9 圖

10. 力之三角形定律 鮑氏記號 力之三角形定律即由平行四邊形定律導成, 第 9 圖 (b) 之平行四邊形, 取其對角線左側 (或右側) 半部即成 (c) 圖上  $ABC$  之三角形. (a) 圖上  $P$  力作用線之兩側附以  $ab$  記號,  $a, b$  二區間中間之  $P$  力作用線以  $ab$  表之. (c) 圖上引  $P$  力之向線, 與  $P$  力平行而相等以  $\overrightarrow{AB}$  表示之, 即  $\overrightarrow{AB}$  示  $P$  力之大小與方向, 而  $ab$  示  $P$  力之作用線. 此種記號即為 鮑氏記號 (Bow's notation).

今於 (c) 圖上引向線  $\overrightarrow{AB}$  平行於  $ab$  以示  $P$  力, 自  $B$  端引向線  $\overrightarrow{BC}$  平行於  $bc$ , 以示  $Q$  力, 則合力  $R$  之向線即自最初之  $A$  點至最後之  $C$  點所引之向線也. 合力  $R$  之作用線乃自  $L$  點所引

平行於 $\overrightarrow{AC}$ 向線之線，即 $ac$ 是也。

又或自任一點 $C$ （圖中未示之）先引向線 $\overrightarrow{CB}$ 平行於 $cb$ ，以示 $Q$ 力，自 $B$ 端再引向線 $\overrightarrow{BA}$ 平行於 $ba$ ，以示 $P$ 力，則合力 $R$ 之向線為 $\overrightarrow{CA}$ ，其作用線為 $ca$ ，綜上所述得定律如下。

三角形二邊表示二合交力時，則第一邊起點至第二邊終點所連成之第三邊，即示該二力之合力。

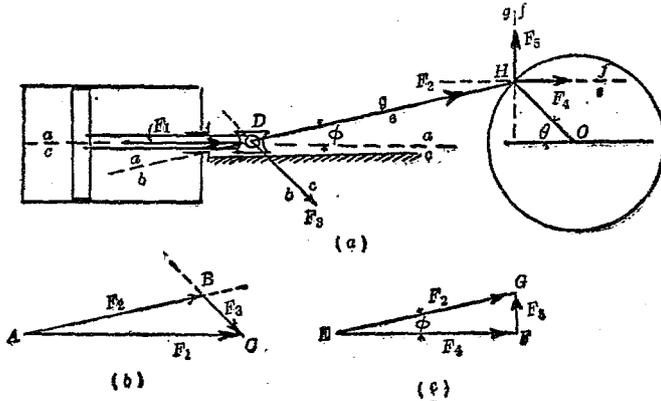
此表示力之三角形為示力三角形(Force triangle)，對於力之圖解法(Graphical solution)上至為重要。由此所求得之合力僅示其大小與方向。再於空間圖上作用點引該合力之平行線，方得其作用線。

若二力在同一直線上時，則該三角形變為一直線，而合力即等於二力之代數和，其向線仍自起點至終點。若二力在同一直線上且相等反向時，則該三角形之第三邊變為一點，其合力為零。此時原有二力稱曰相互平衡(Equilibrium)。反之相互平衡之二力必相等反向而在於同一直線上。

**11. 力之分解** 第9, 10兩節所述者乃於同一平面上以一合力代替二力，使其效果全相等，此曰力之合成(Composition of forces)，反之任何一力可以同平面上他二力或二個以上之力代替之，又更可以空間中數個之力代替之，使諸力之效果全與原有力之效果相等，此諸力稱曰該力之分力(Component forces, Components)，求此分力之手續即為力之分解(Resolution of forces)。一力分成數個分力時，各分力之作用線全

屬任意故一力之分解有無數方法.若各分力之作用線已定時,則分解方法僅有一種.由一力求其已知作用線上之分力時,其方法完全屬於上述平行四邊形定律或三角形定律之逆.

第 10 圖 (a) 上示一蒸汽機,蒸汽壓力為  $F_1$ , 作用於叉頭 (Crosshead)  $D$  上.今設將此力分成沿連接桿 (Connecting rod)  $DH$  之方向  $F_2$  及平行於曲柄 (Crank)  $HO$  方向之  $F_3$  二分力.



第 10 圖

第 10 圖 (b) 上作  $\overrightarrow{AC}$  平行於  $ac$ , 示  $F_1$  力, 由  $A, C$  二端引  $ab, bc$  之平行線相交於  $B$ , 則向線  $\overrightarrow{AB}$  即示分力  $F_2$ , 向線  $\overrightarrow{BC}$  示分力  $F_3$ .

通常任何一力可分成垂直與水平二方向, 此時可以簡單之代數式計算其分力. 今設前例中將  $F_2$  力分成垂直與水平二方向如第 10 圖 (c). 引向線  $\overrightarrow{BG}$  平行於  $hg$  示  $F_2$  力, 由  $B, G$  兩端各作垂直線與水平線, 相交於  $F$ , 則向線  $\overrightarrow{BF}$  示  $F_4$  力, 向線  $\overrightarrow{FG}$

示  $F_5$  力

設  $F_2$  與水平所成之角為  $\phi$ , 則

$$F_4 = F_2 \cos \phi, \quad F_5 = F_2 \sin \phi$$

一般任意力  $F$  與  $x$  軸成  $\alpha$  角時, 則該力沿  $x, y$  二直交軸上之分力  $F_x, F_y$  各為

$$F_x = F \cos \alpha, \quad F_y = F \sin \alpha$$

一力分解成爲二分力時, 其方法有無限, 例如第 11 圖上  $\vec{AB}$  一力可依種種方向分成  $\vec{AO}, \vec{OB}$  二分力

任意一力又可分成沿  $x, y, z$  三直交軸上之分力, 例如第 12 圖上  $F$  力  $\vec{OA}$  先於  $ABOC$  垂直面內分成  $\vec{OB}, \vec{OC}$  二分力, 次再將  $\vec{OC}$  於  $x, y$  面內分成  $\vec{OE}, \vec{OD}$  二分力, 結果將  $\vec{OA}$  分爲沿  $x, y, z$  軸之  $\vec{OE} (F_x), \vec{OD} (F_y),$  及  $\vec{OB} (F_z)$  三分力, 各分力之大小由下式計算之.

$$F_x = F \cos \theta_x,$$

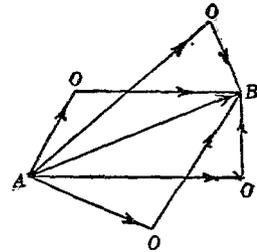
$$F_y = F \cos \theta_y,$$

$$F_z = F \cos \theta_z.$$

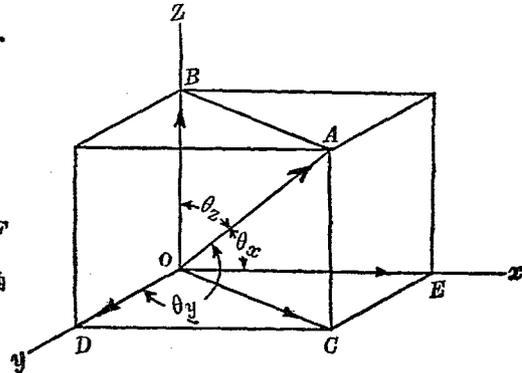
但  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$  爲  $F$

力各與  $x, y, z$  三軸所成之夾角.

12. 力 勢 自

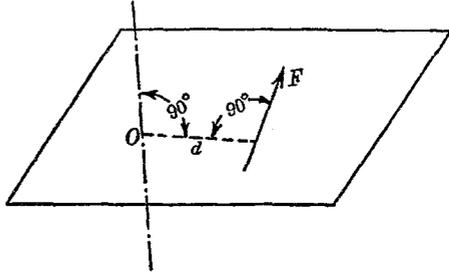


第 11 圖



第 12 圖

一定點至某力作用線之直交距離與該力之乘積稱曰該力對於該定點周圍之力勢 (Moment of force). 例如第 13 圖上  $O$  爲定點, 自  $O$  至  $F$

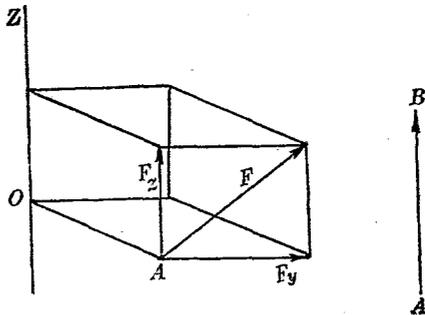


第 13 圖

力之直交距離爲  $d$ , 則力勢爲  $F \cdot d$ ,  $O$  點稱曰勢心 (Moment-center),  $d$  稱曰勢臂 (Moment-arm). 力勢單位以公斤公尺 (kg. m.), 呎磅 (ft.-lb.), 吋磅 (in.-lb.) 等示之. 某定點周圍之力勢亦可稱爲某軸周圍之力勢, 但該軸須通過  $O$  點而與含有  $O$  點及  $F$  力之平面相直交者也, 故  $F \cdot d$  亦稱爲  $F$  力對於  $z$  軸之力勢.

以上力勢之定義乃根據經驗而來, 蓋由經驗上吾人知一物體旋轉於一定點周圍之難易, 由所加於物體上之力及勢臂而定, 力愈大或勢臂愈長者物體旋轉均易, 此表示物體在定點周圍旋轉難易之量即力勢是也.

若合力之面不與力勢之軸成直交時, 則將該力分成與該軸直交及平行二分力, 其平行分力由定義不生力勢, 故該力之力勢即爲其直交分力之力勢, 例

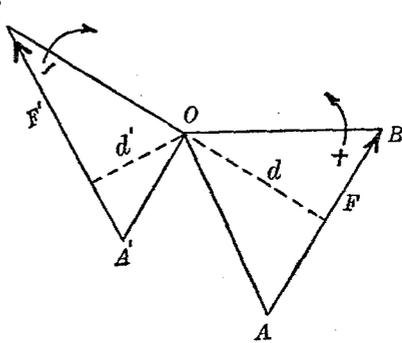


第 14 圖

如第14圖上 $F$ 力對於 $z$ 軸之力勢爲 $F_y \cdot \overline{OA}$ .

通常力勢之軸取爲座標標中之一.力勢因旋轉方向之不同,附以符號,即力勢亦爲一向量.力勢之指向(Sense)決定法乃自軸之正端視之,若旋轉於反時針(Counter-clockwise)方向者該力勢爲正.例如第14圖上 $F_y$ 力對於 $z$ 軸之力勢爲正,表示力勢之向線與力勢之軸相平行.其指向自其箭端視之,須使該力勢旋轉於反時針方向.其長度以適當縮尺表示力勢之大小.但向線之作用線可任意平行移動而無一定.第14圖上 $F_y$ 對於 $z$ 軸之力勢可以一向線如 $\overrightarrow{AB}$ 表示之.

力勢之圖解求法可自第15圖上勢心 $O$ 作三角形 $OAB$ 或 $OA'B'$ ,則 $F$ 力之力勢爲 $F \cdot d$ ,即等於三角形 $OAB$ 面積之2倍. $F'$ 力之力勢爲 $F' \cdot d'$ ,即等於三角形 $OA'B'$ 面積之二倍.力勢之指向由前述規約定之,即 $F$ 力之力勢爲正, $F'$ 力之力勢爲負.



第15圖

13. 偶力 不在一直線上之二反方向平行力稱曰偶力(Couple).偶力之效果僅使物體迴轉,或妨害其原有迴轉.偶力對於平面上一定點周圍之力勢即爲各力對於該點力勢之代數和.由此定義則偶力對於其平面上任意一點(或直交於

其平面之任意一軸)之力勢等於該二力間直交距離(即勢臂)與其一力之乘積。今證之如下。第16圖上 $I, P$ 為偶力, $O$ 為其平面上任意一點, $z$ 軸為直交於該平面上

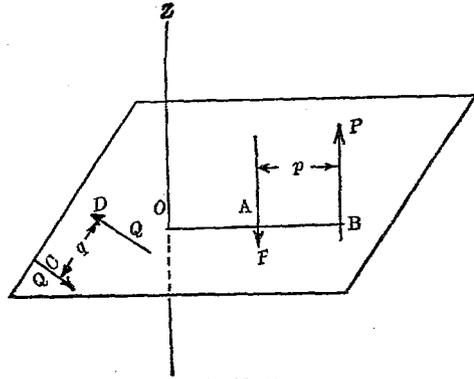
$O$ 點之軸。此偶力對於 $O$ 點(或 $z$ 軸)之力勢,依定義為

$$P \cdot \overline{OB} - P \cdot \overline{OA} =$$

$$P(\overline{OB} - \overline{OA}) = P \cdot \overline{AB}$$

此關係對於其平面

上任意一點或任意一平行於 $z$ 之軸皆可成立。



第 16 圖

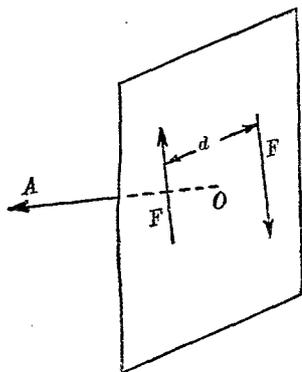
偶力效果依力勢而定,即僅依力臂與力之乘積而定,與力之作用線及力臂與力之大小無關。故偶力可於其平面上任意移動,任意變更其力之大小與力臂,僅使力臂與力之乘積為一定,且力勢方向不變,則其效果亦不變。即如第16圖之偶力 $Pp$ 可移於 $Qq$ 之位置,僅使 $P \cdot \overline{AB} = Q \cdot \overline{CD}$ 可矣(參照第22節)。

又偶力效果僅使物體迴轉於一定方向,相平行各平面上同向相等力勢之偶力其效果全同。故偶力之平面對於偶力之外部效果無關係。

偶力亦可以向線表示之。向線長度示力勢之大小,向線與力勢平面相直交,即與偶力之軸相平行,而作用之位置無一定。向線指向與前節所規定者相同,換言之,偶力迴轉方向

若為右旋螺釘 (Right-handed screw) 之迴轉方向時,則螺釘進行方向即為向線箭頭方向,例如第17圖上之偶力  $F \cdot d$  可完全以向線  $\overrightarrow{OA}$  示之

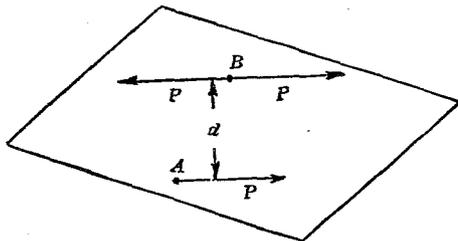
凡物體內一點上任意一力可以他一力及一偶力代替之,此他一力作用於他任意點上,且與原有之力為平行同向而相等之力,其偶力則作用於該二力之平面內,第18圖中作用於  $A$  點上之力  $P$  可以作用於  $B$  點上之一力  $P$  及該平面內一偶力  $P \cdot d$  代替之,因  $B$  點上相等反向之二  $P$  力相抵消其效果,與未加時固無若何相異故也,反之凡平面內一力及一偶力又可合成為該平面內他點上之一單獨之力,但此合成之力與原有之力同向相等而相平行者(參照第22節定理VI).



第 17 圖

14. 問題之解法 靜力學上問題之解法分代數解法(Algebraic methods)與圖解

法(Graphical methods)兩種,代數解法上將文字與數字表力及力勢等量,由已知關係列成方程式而計算未知之力



第 18 圖

與力勢之大小及方向,圖解法則以一定縮尺用向線表示力

及力勢等量，由幾何作圖法自圖形上量取未知之力與力勢之大小及方向。凡任何力學上問題，一般均可用此二法解之。但對於有種問題以用圖解法為便，有種問題以用代數解法為便。

代數解法中所列方程式表示各量間之關係，故其左右兩端須有同一之物理學的意義，即須有同一之次元 (Dimension)。若某方程式兩端有相異次元時，即該式不能成立而有錯誤。力學上之基本量為力 ( $F$ )，長度 ( $L$ )，及時間 ( $T$ )，其他之量均由基本量所組成，例如面積之次元為  $L^2$ ，速度之次元為  $L T^{-1}$ ，力勢之次元為  $FL$  等是也。

今設有一方程式  $ad^3 + d^4 = v$ ，但  $a$  表示面積， $d$  表示長度， $v$  表示體積，則表示該方程式兩端次元關係之次元方程式 (Dimension equation) 為  $L^3 + L^4 = L^3$ ，顯然錯誤。又設一方程式  $P + kv = as$  但  $P$  示力， $k$  示單位容積之重量即(力)， $v$  示體積， $a$  示面積， $s$  示單位面積上之力，則次元方程式為

$$F + \frac{F}{L^3} L^3 = L^2 \frac{F}{L^2}$$

或  $F + F = F$

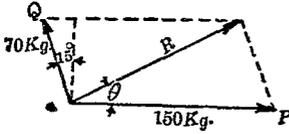
即兩端均示力，故該方程式之次元無誤。又於  $E = \frac{Pl}{ae}$  中， $P$  示力， $l$  示長度， $a$  示面積， $e$  示長度，則  $E$  之次元為

$$\frac{F \times L}{L^2 \times L} = \frac{F}{L^2}$$

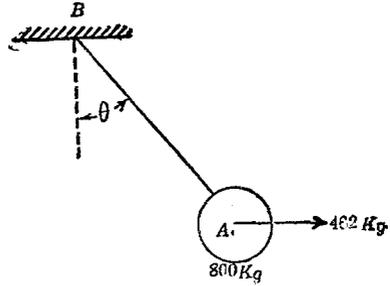
故  $E$  之單位為  $\text{kg./mm.}^2$  或  $\text{lb./sq.in.}$  等。

習 題 1

1 試求第19圖內 $P, Q$ 二力之合力.



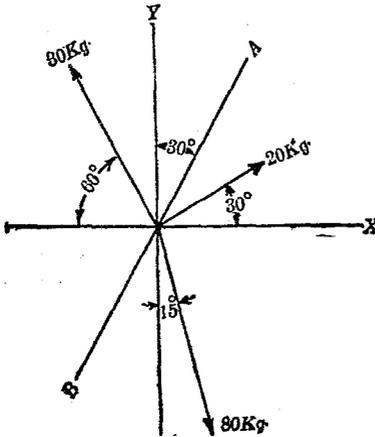
第 19 圖



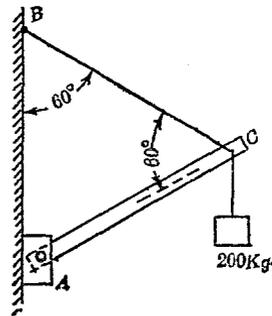
第 20 圖

2. 第20圖上 $A$ 球重 $800\text{kg}$ ,以繩 $AB$ 懸之,別以水平力 $462\text{Kg}$ 拉之向右.求繩內拉力及其與垂直線所成之角度 $\theta$ .

3. 試求第21圖上諸力沿 $AB$ 線上各分力總和之大小及其方向.



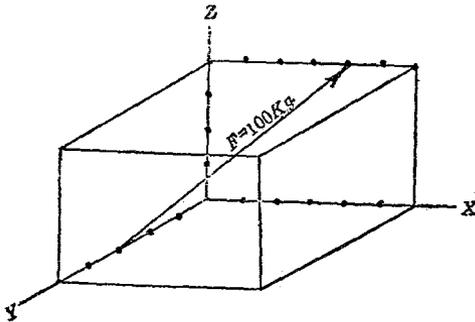
第 21 圖



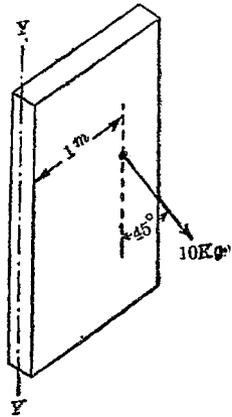
第 22 圖

4. 試求第 22 圖中 200 kg, 重力沿  $AC$  及其直交方向上之分力, 并求其沿  $AC$  與  $BC$  方向上之分力.

5. 試求第 23 圖中  $F$  力之沿  $x, y, z$  三軸方向上各分力.

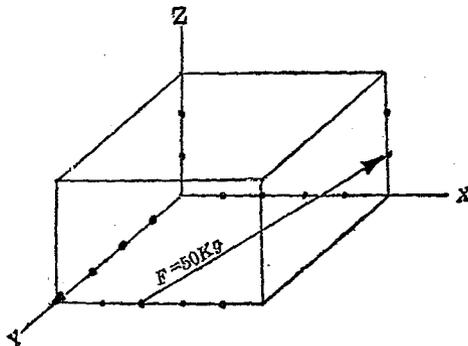


第 23 圖



第 24 圖

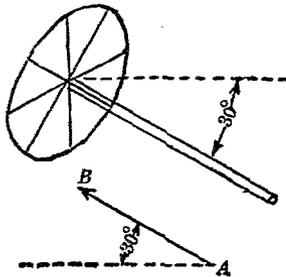
6. 第 24 圖示一門, 可旋轉於  $y$  軸之周圍, 加一力於拉手



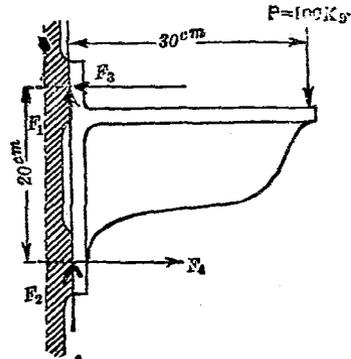
第 25 圖

上,該力作用線在直交於門面之平面內.求該力對於  $y$  軸之力勢.

7. 試求第 25 圖中  $F$  力對於  $x, y, z$  三軸之力勢,但圖中每格表示 1 cm.



第 26 圖

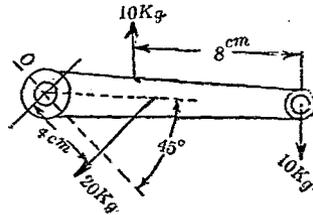


第 27 圖

8. 第 26 圖示一汽車上之駕駛輪 (Steering wheel). 直徑 8 cm., 兩手加以偶力如向線  $\overrightarrow{AB}$  所示.  $\overrightarrow{AB}$  長度 4 cm., 且 1 cm = 4 kg.cm. 試於輪周表出其偶力.

9. 第 27 圖上所示之壁架 (Wall-bracket) 上求  $F_1, F_2, F_3, F_4$  諸力之大小, 但  $F_1$  與  $F_2$  相等,  $F_3$  與  $F_4$  相等.

10. 第 28 圖之柄可迴轉於  $O$  點, 重 20 kg. 另加以偶力. 求代替該偶力與重力之一單獨之力.



第 28 圖

注意 以上諸題讀者須適當選擇圖解法或代數解法解之。

## 第二章 力之合成

15. 力之合成 凡任何力系之合力其外部效果與原有  
力系全相等此合力(i)可爲一力及一偶力;(ii)僅可爲一力;(iii)  
僅可爲一偶力.求數力之合力其目的有二,分述如下.

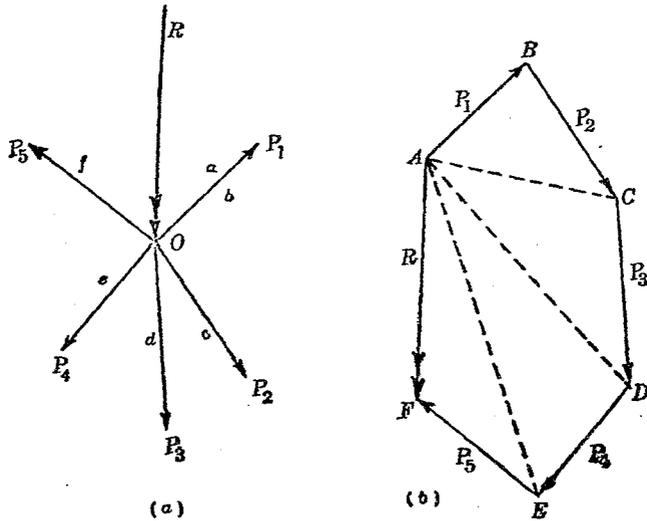
(1) 求平衡力系中諸力間之關係 設諸力作用於一物  
體,使該物體靜止或爲等速度運動,則該力系在於平衡.此時  
諸力之合力必等於零,換言之,該力系中一力必與其餘諸力  
之合力相等反向而在於一直線上.討論平衡力系時,其中數  
力每以其合力代替之爲便.

(2) 研究物體之運動 物體之運動乃爲作用於其上力  
系之合力所支配.故研究物體之運動時必先求其上力系之  
合力.

茲就各種力系之合力述其求法如下.

16. 同平面合交力系之合力 (1)圖解法 第29圖上設  
有五力  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$ , 在同一平面內而作用線同交於一點  $O$ .  
今欲求一合力以代替此五力.

五力中任取二力設爲  $P_1, P_2$ , 由三角形定律得其合力  $\vec{AC}$



第 29 圖

如 (b) 圖次再將  $\vec{AC}$  與  $P_3$  求其合力如  $\vec{AD}$ ，同樣得  $\vec{AE}$ ，最後將  $\vec{AE}$  與  $P_5$  求得合力  $\vec{AF}$ ，此即五力全部之合力  $R$  也。

通過  $O$  點引  $\vec{AF}$  之平行線得合力  $R$  之作用線。

$\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$ ,  $\vec{AE}$  等中間合力非屬必要，作圖時可略去之。故實際作圖上將已知之力依一定順序順次作其向線於示力圖上，由各向線之箭端作其次之力之向線，繼續進行，得表示力之多邊形。由此多邊形之最初開始之點至最終之點相連結，得合力之向線。如此所得之多邊形曰示力多邊形 (Force polygon)，此多邊形若成三角形者稱曰示力三角形 (Force triangle)。

如 (b) 圖所示合力  $R$  之方向與多邊形他邊進行方向相

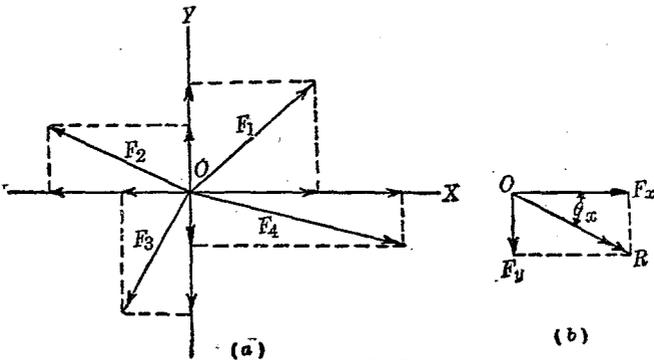
反。即他邊沿  $\vec{AB}, \vec{BC}, \dots, \vec{EF}$  而進行，但合力  $R$  不為  $\vec{FA}$  而為  $\vec{AF}$ ，凡示力多邊形上合力之方向皆與邊之進行方向相反者也。

力之數雖有任何個，苟在同一平面內而相交於一點時，則可由下述之一般作圖法而求其合力。

示力圖上引一向線與一已知力相平行同向而相等，表示該力由其箭端同樣引第二之力，如是依適當之順序作全部之力，自最初開始點向最後終點連結而得之向線即表示合力之大小與方向也。

此作圖法中最後所得之結果與所取力之順序無關係，但須取適宜順序，使線與線間不成極銳之銳角，以使作圖精確而明瞭也。

(2) 代數解法 今設於第 30 圖上有  $F_1, F_2, F_3, F_4$ ，四力同在於一平面內而相交於  $O$  點。先將各力分解為  $x$  軸及  $y$  軸上之二直交分力，則各  $x$  軸上分力在於同一直線上，其代數和即



第 30 圖



$$\frac{P}{Q} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BD}} \dots\dots\dots(3)$$

故同方向二平行力之合力,其方向與原有二力相同,其大小等於原有二力之和,其作用線通過原有二力之中間而將原有二力間距離分成二部份,各部之長與原有二力之大小為反比。

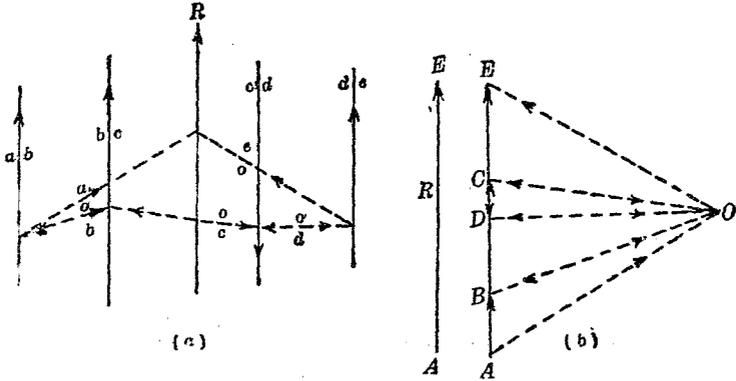
若  $P$  與  $Q$  有不同方向時,設  $P > Q$ ,則方法仍同上,惟合力之大小等於  $P - Q$ ,其方向與大者之力(即  $P$ )相同作用線通過於  $P$  及  $Q$  之外側,其至  $P, Q$  間之距離之比等於各力之反比。其作圖讀者試自作之。

由以上作圖法,則  $P, Q$  相等反向時,不能應用因此時  $R_1$  與  $R_2$  相平行故也。此時原有二力成偶力,故不能合成一單獨之力也。

上述方法可擴充應用之於求任何個平行力之合力。因任何二平行力可先合成為一單獨之力(但偶力除外),此力再與第三平行力相合成一力。依次繼續此法可將全部平行力合成一單獨之合力。

(第二法) 第32圖(a)示四平行力,其作用線為  $ab, bc, cd, de$ , 今於(b)圖上作該四力之向線  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}$ , 各示四力之大小與方向。此四平行力之合力為四力之代數和,合力  $R$  之大小即等於(b)圖上示力多邊形起點  $A$  至終點  $B$  所連結之向線  $\overrightarrow{AB}$ , 惟平行力之示力多邊形成為一直線。茲述此合力作用線

位置之求法如下.



第 32 圖

(b 圖上任擇一點  $O$  稱爲極點(Pole),與  $A, B, C, D, E$  各點相連結得  $OA, OB, OC, OD, OE$  諸線,稱曰極射線(Pole rays).由三角形定律,力  $\vec{AB}$  可分解成爲  $\vec{AO}, \vec{OB}$  二分力,但  $\vec{AO}, \vec{OB}$  二向線,非表示該分力之作用線,因此作用線必交於  $ab$  故也.同樣  $\vec{BC}$  力可分解爲  $\vec{BO}, \vec{OC}$  二分力,  $\vec{CD}$  力可分解爲  $\vec{CO}, \vec{OD}$  二分力,  $\vec{DE}$  力可分解爲  $\vec{DO}, \vec{OE}$  二分力.故原有四平行力可以  $\vec{AO}, \vec{OB}, \vec{BO}, \vec{OC}, \vec{CO}, \vec{OD}, \vec{DO}, \vec{OE}$  八力代替之.但  $\vec{OB}, \vec{BO}$  二力相等反向而相平行,若使此二力作用線相合一,則可相抵消.同樣  $\vec{OC}$  與  $\vec{CO}, \vec{OD}$  與  $\vec{DO}$  亦可相互抵消.故四平行力可以  $\vec{AO}$  及  $\vec{OE}$  二分力代替之,此二分力之合力即爲  $\vec{AE}$  也.

今於  $ab$  作用線上任取一點引  $ao, ob$ , 各與  $\vec{AO}, \vec{OB}$  相平行,表

示該二分力之作用線  $ob$  與  $bc$  之交點上,再引  $oc$ , 與  $\vec{OC}$  平行, 則  $bc$  之分力作用線即為  $bo$  與  $oc$ . 同樣  $oc$  與  $cd$  之交點上, 再引  $od$  與  $\vec{OD}$  平行, 則  $cd$  之分力作用線即為  $co$  與  $od$ . 又  $od$  與  $de$  之交點上引  $oe$  與  $\vec{OE}$  平行, 則  $de$  之分力作用線即為  $do$  與  $oe$ .

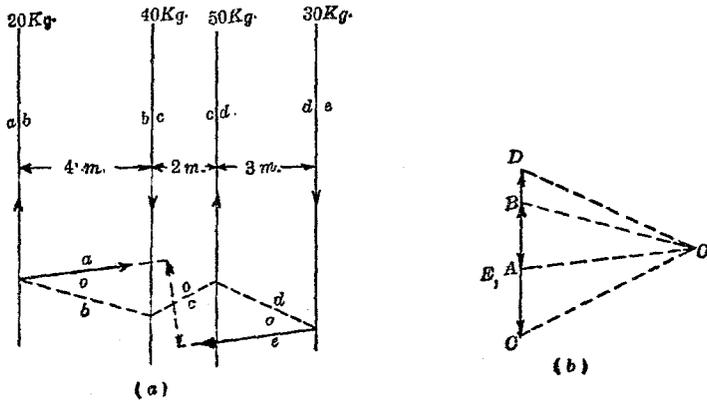
由上所述原有四平行力之合力, 即為  $\vec{AO}$  與  $\vec{OE}$  之合力. 但  $ao$  與  $oe$  二作用線交於一點, 故四平行力之合力亦必通過該交點. 因之自此交點引一直線與四平行力相平行, 則此線  $ae$  即為所求合力  $\vec{AE}$  之作用線也.

(a) 圖上  $ao, ob, oc$  等線稱曰索線 (Strings), 索線所成之多邊形稱曰索邊形 (Funicular polygon). 索邊形各邊, 各與相應之極射線平行. 示力多邊形所以求合力之大小與方向, 而索邊形所以求合力之作用線也.

若示力多邊形閉合, 即  $B$  與  $A$  相疊合則極射線  $\vec{AO}$  與  $\vec{OE}$  示二相等反向之力, 其作用線苟索邊形不閉合時相互平行, 故合力為一偶力. 若索邊形閉合時, 則  $ao$  與  $oe$  相合一, 而  $\vec{AO}$  與  $\vec{OE}$  二分力相互抵消, 合力為零, 即原有諸平行力相平衡也.

示力多邊形之極點與索邊形上最初開始之點均可任意取定. 若此等點之位置變動時, 僅變動索邊形之形狀及其邊在合力上交點之沿作用線上之位置. 若合力偶力時則此變動僅變更偶力之大小與其勢臂, 但偶力之力勢無變化.

例 求下圖中四平行力之合力 (第 33 圖).



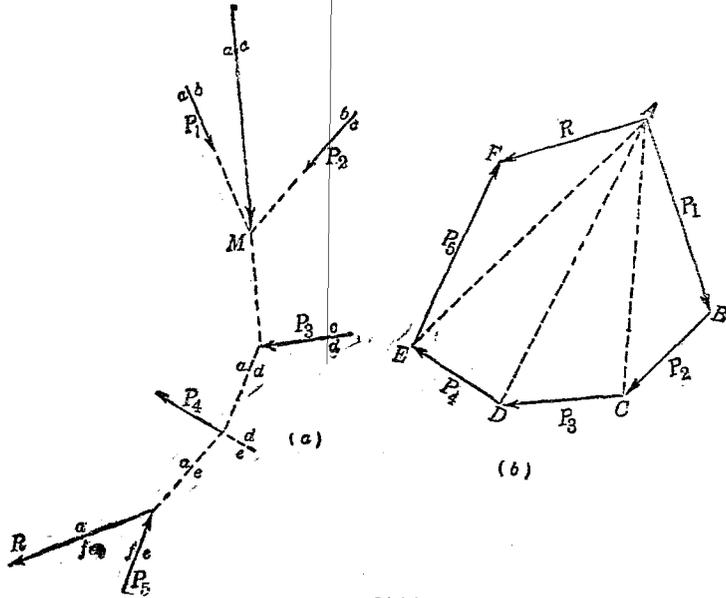
第 33 圖

解 因示力多邊形閉合於  $A, E$  一點, 故合力不為一單獨之力而成偶力。作圖上便利計使示力多邊形上  $OA$  長度取一整數值, 今圖中  $OA$  之長度表示  $54\text{kg}$ 。由上述方法作索邊形於 (a) 圖, 得  $oa$  與  $oe$  二偶力, 各力等於  $54\text{kg}$ , 而其勢臂由 (a) 圖中量取得  $2.6\text{m}$ , 故合成偶力之力勢等於  $-140\text{kg}\cdot\text{m}$ 。因迴轉於時針方向故為負號。

### 18. 同平面非合交非平行力系合力之圖解法 (第一法)

設第 34 圖中有  $P_1, P_2, \dots, P_n$  諸力而欲求其合力  $R$ , 先將其中任何二者, 例如  $P_1$  與  $P_2$ , 求其交點  $M$ , 將二力移至該點依平行四邊形或三角形定律得合力  $\vec{AC}$ 。次將此合力與  $P_3$  力角求其合力  $\vec{AD}$ , 再將  $\vec{AD}$  與  $P_4$  力合成  $\vec{AE}$ , 更將  $\vec{AE}$  與  $P_5$  力合成  $\vec{AF}$ , 即所求之合力  $R$  也。

(a) 圖示各力及諸合力之作用線位置。(b) 圖為示力多邊

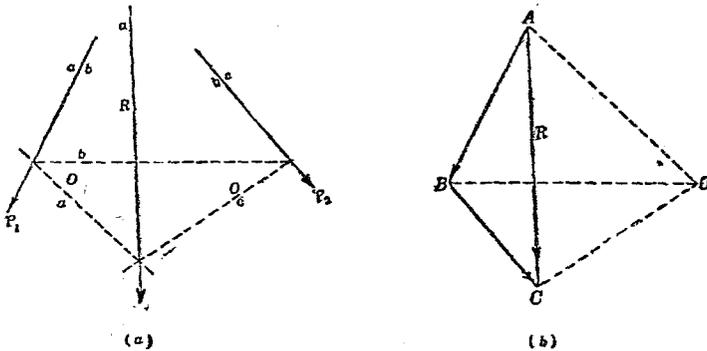


第 34 圖

形最後合力之大小與方向由 (b) 圖上  $\vec{AF}$  而得，其作用線位置由 (a) 圖  $af$  而得。

若示力多邊形閉合即  $F$  與  $A$  相疊合，且  $ae$  與  $ef$  二作用線相平行時，則所求合力成爲一偶力。若此時  $ae$  與  $ef$  二作用線在一直線上時，則所求合力爲零，即原有諸力相互平衡。

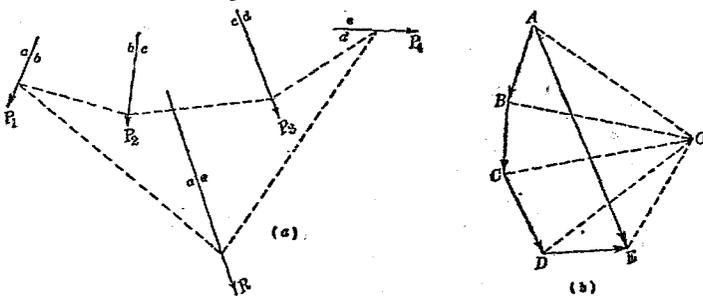
(第二法) 若諸力間所成角度有爲極銳之銳角時，則其交點有時出於圖外。此時不能用前法以求合力，須用本作圖法以求之。此法與第 17 節第二法相同，亦用索邊形以求合力之作用線。例如第 35 圖 (a) 中  $P_1, P_2$  二力所成夾角極銳，先作 (b)



第 35 圖

圖之示力多邊形  $ABC$ 。取極點  $O$  作極線  $OA, OB, OC$ ，再於 (a) 圖上引索邊形。索邊形中  $oa, oc$  二邊之交點上引  $\vec{AC}$  之平行線即為  $ac$ ，示合力  $R$  之作用線。

同樣第 36 圖示  $P_1, P_2, P_3, P_4$  四力之合力求法，方法全與上同。

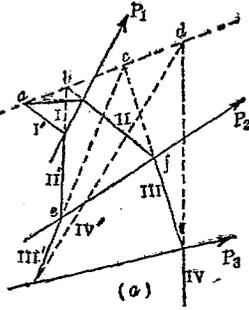


第 36 圖

此作圖法中之合力對於力之順序全無關係。且極點之位置全屬任意取定。但極點位置變更時，每二個索邊形相應邊之交點必在於一直線上，此直線與該二索邊形之極點連

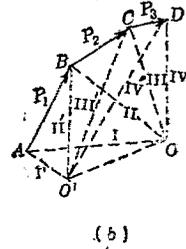
結線成平行例如第37圖中極點O之射線為I, II, III, IV, 極點之O'射線為I', II', III', IV', 其相應之索邊形各為

I, II, III, IV 及 I', II', III', IV', I與I', II與II', III與III', IV與IV'之交點



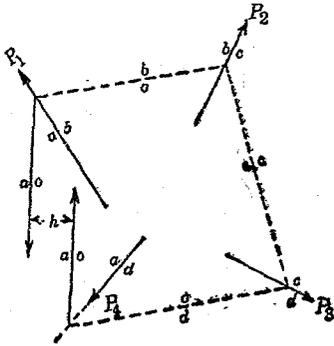
第37圖

各為  $a, b, c, d$ , 則  $abcd$  直線平行於  $OO'$ . 此因二多邊形  $BCOO'$  及  $bcef$  中五邊各相互平行, 故  $bc \parallel OO'$ , 同樣可證  $cd \parallel OO'$ , 及  $ab \parallel OO'$ , 故  $abcd$  在於平行於  $OO'$  之一直線上.

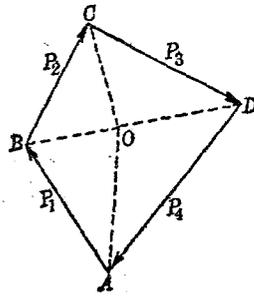


(b)

第38圖示  $P_1, P_2, P_3, P_4$  非平行非合交四力, 其示力多邊形如 (b 圖所示, 適為閉合(Close), 即合力為零. 此時因四力不同交



(a)



(b)

第38圖

於一點，故諸力不能遽謂之平衡。今於(b)圖內自極點O作各射線，於(a)圖內作索邊形，則此索邊形一般不閉合，而最後兩邊 $oa$ 與 $oa$ 不相一致。故 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 四力之合力成爲一偶力，其力勢等於 $\vec{OA} \cdot h$ ，若索邊形亦閉合時則最後兩邊 $oa$ 亦一致，而四力相平衡。

19 關於力勢之原理 范力農定理 關於力勢之原理 (Principle of moments) 有范力農定理 (Varignon's theorem).

定理 作用於一平面內數多之力，對於該平面內某點力勢之代數和等於其合力對於該點之力勢，其逆亦真。

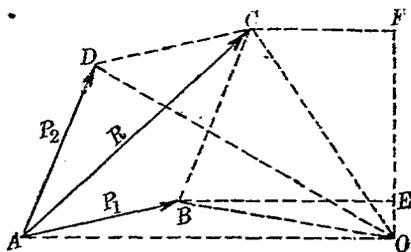
茲證明之如下：

(i) 先設有交於一點之二力用圖解法證之。第39圖中 $P_1, P_2$ 爲假定之二力， $R$ 爲其合力， $O$ 爲既定之勢心， $A$ 爲 $P_1, P_2$ 二力之交點。連結 $AO$ ，引 $OF$ 與 $AO$ 成直角。將 $P_1, P_2$ 及 $R$ 各投射於 $OF$ 線上，則

$$\overline{OE} = P_1 \text{之射影} = P_1',$$

$$\overline{EF} = P_2 \text{之射影} = P_2',$$

$$\overline{OF} = R \text{之射影} = R',$$



第 39 圖

$$P_1 \text{對於} O \text{點之力勢} = 2\Delta AOB = AO \cdot P_1' = M_1$$

$$P_2 \text{對於} O \text{點之力勢} = 2\Delta AOD = AO \cdot P_2' = M_2$$

$$R \text{對於} O \text{點之力勢} = 2\Delta AOC = AO \cdot R' = M$$

但由圖知  $R' = P_1' + P_2'$ ，故

$$M_1 + M_2 = \overline{AO}(P_1' + P_2') = \overline{AO} \cdot R = M$$

次將上例以代數法證之如下。第40圖中O為勢心， $P_1, P_2$ 為二力， $R$ 為其合力。 $p_1, p_2, r$ 為O至 $P_1, P_2, R$ 三力上之勢臂。今取

$Ax, Ay$ 之二直交軸，并使 $Ay$ 軸通過O點。 $\alpha, \beta, \theta$ 各為 $P_1, P_2$ 及 $R$ 與 $x$ 軸所成之角。由圖知

$$\overline{AF} + \overline{FG} = \overline{AG}$$

$$\begin{aligned} \text{即 } P_1 \cdot \cos \alpha + P_2 \cdot \cos \beta \\ = R \cdot \cos \theta. \end{aligned}$$

此式兩端同以 $\overline{AO}$ 乘之，得

$$P_1 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \alpha + P_2 \cdot \overline{AO} \cdot \cos \beta = R \cdot \overline{AO} \cdot \cos \theta.$$

$$\therefore P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 = R \cdot r.$$

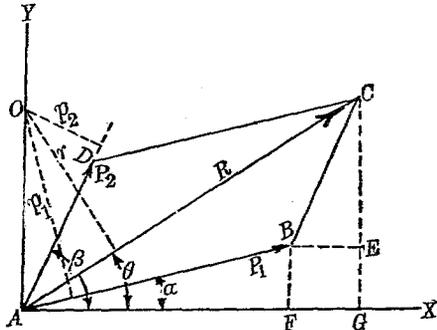
即已證明。

(ii) 對於同平面內任何個數之合交力，其證明可依上法推之茲不贅。

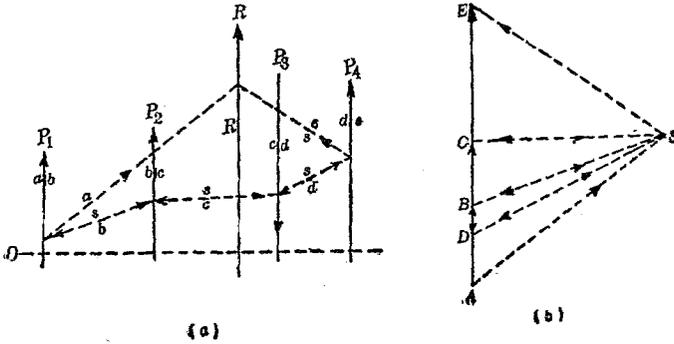
(iii) 對於同平面內任何個數之平行力，如下法證之。第41圖中 $P_1, P_2, P_3, P_4$ 為四平行力， $O$ 為該平面內任意之一點勢心。由(i)之證明，則

$$M_1 = P_1 (\text{即 } \overrightarrow{AB}) \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} = \overrightarrow{AS} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} + \overrightarrow{SB} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢}.$$

$$M_2 = P_2 (\text{即 } \overrightarrow{BC}) \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} = \overrightarrow{BS} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} + \overrightarrow{SC} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢}.$$



第40圖



第 41 圖

$$M_3 = P_3 (\text{即 } \overrightarrow{CD}) \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} = \overrightarrow{CS} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} + \overrightarrow{SD} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢.}$$

$$M_4 = P_4 (\text{即 } \overrightarrow{DE}) \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} = \overrightarrow{DS} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} + \overrightarrow{SE} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢.}$$

$$M = R (\text{即 } \overrightarrow{AE}) \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} = \overrightarrow{AS} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢} + \overrightarrow{SE} \text{ 對於 } O \text{ 之力勢.}$$

但  $\overrightarrow{SB}$  與  $\overrightarrow{BS}$ ,  $\overrightarrow{SC}$  與  $\overrightarrow{CS}$ ,  $\overrightarrow{SD}$  與  $\overrightarrow{DS}$  皆為同直線上相等反向之力, 故其對於  $O$  之力勢, 當各互相抵消, 因之

$$M_1 + M_2 + M_3 + M_4 = M.$$

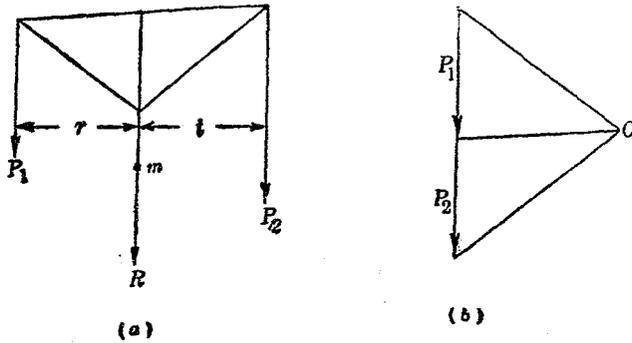
故已證明.

(iv) 對於同平面內非合交非平行之任何個力, 其證明法可由 (i), (iii) 推出之, 讀者試自證之.

第 42 圖上二平行力  $P_1$  及  $P_2$  之合力設為  $R$ , 由平行力之力勢原理則對於任一點之勢心,  $P_1, P_2$  力勢之代數和等於合力  $R$  之力勢, 故對於  $R$  力線上一點  $m$ , 則

$$P_1 r - P_2 t = 0$$

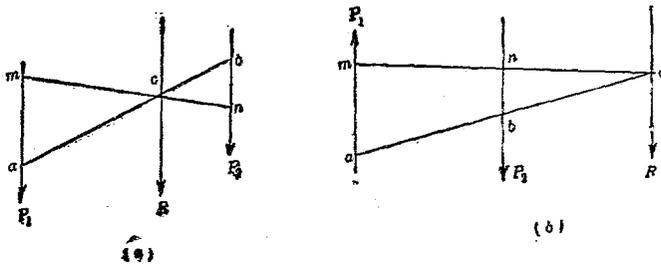
$$\therefore \frac{r}{t} = \frac{P_2}{P_1}$$



第 42 圖

此與第 17 節之 (3) 式相符合。

由幾何學上知任何二直線在三平行線間被截取之長均成相等比例，故二平行力之合力作用線又可求之如第 43



第 43 圖

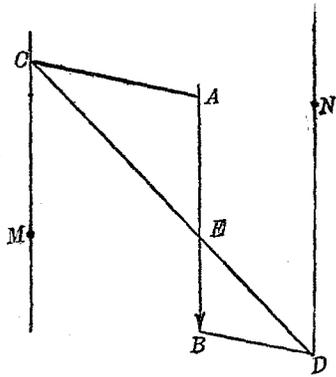
圖(a)與(b)。(a)圖中二平行力 $P_1, P_2$ 為同方向。 $P_1$ 作用線上任取 $m$ 點， $P_2$ 作用線上任取 $n$ 點，連結 $mn$ ， $P_1$ 力線上取 $ma$ ，以既定縮尺，使等於 $P_2$ 力。 $P_2$ 力線上取 $nb$ 與 $ma$ 反方向，以同一縮尺，使等於 $P_1$ 力。 $ab$ 與 $mn$ 之交點 $c$ ，即為合力 $R$ 作用線所通過之點。(b)圖上

$P_1, P_2$  二平行力為反方向. 同樣引  $ma$  與  $nb$ , 但二者為同方向, 沿長之交於  $c$ , 由此得  $R$  之作用線在於近於較大之  $P_2$  力之側.

以上求平行力合力之圖解法稱曰反比法 (Method of inverse proportion). 用此法之原理又可將一力分解為通過二已知

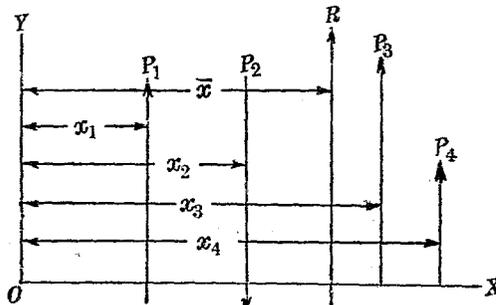
點之二平行分力. 第44圖中  $\overrightarrow{AB}$

為已知之力,  $M, N$  為已定二點. 作  $MC$  及  $ND$  二線與  $AB$  平行, 此為所求二分力之作用線, 由  $A$  作任一直線  $AC$  與  $CM$  交於  $C$  點, 再由  $B$  作  $BD$  平行於  $AC$ , 與  $ND$  交於  $D$  點.  $CD$  直線將  $AB$  分於  $E$  點, 則  $\overrightarrow{AE}$  示通過  $N$  點之分力,  $EB$  示通過  $M$  點之分力.



第 44 圖

## 20. 同平面平行力系合力之代數解法 第45圖上有 $P_1$ ,



第 45 圖

$P_2, P_3, P_4$  四平行力, 由第17節圖解法可知平行力之合力或為

一個之力或爲一偶力。令過任一點  $O$  作  $Ox, Oy$  兩直交軸，使  $Oy$  軸平行於各平行力。設各平行力之合力可合成一力  $R$ ，則  $R = \Sigma P$ 。此  $R$  之作用線可由力勢之原理求之。取  $O$  爲勢心，設合力  $R$  之勢臂爲  $\bar{x}$ ， $P_1, P_2, P_3, P_4$  之勢臂各爲  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ，則

$$R\bar{x} = P_1x_1 - P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 = \Sigma Px$$

但  $R = \Sigma P$ ，

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}$$

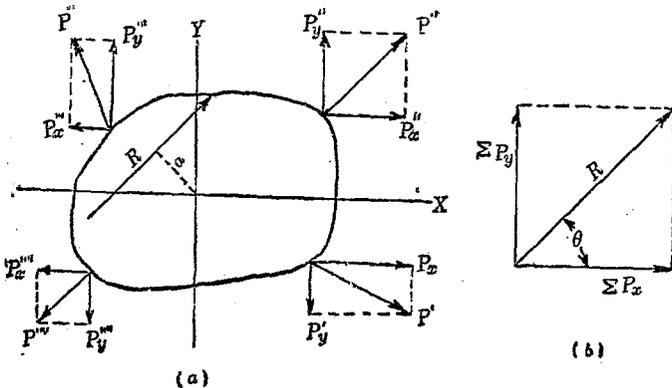
即合力  $R$  之作用線可定。

若  $\Sigma P = 0$ ，則合力可爲一偶力。設該偶力之力勢爲  $C$ ，則

$$C = \Sigma Px$$

若  $\Sigma P = 0$ ，同時  $\Sigma Px = 0$ ，則合力爲零，即該力系相互平衡。

21. 同平面非合交非平行力系合力之代數解法 由第 18 節則知所求合力或爲一力或爲一偶力 若爲一力則可求



第 46 圖

之如下。第46圖(a)中設有四力 $P', P'', P''', P''''$ ，作用於一物體各力均分成沿 $x$ 與 $y$ 軸之二分力。如是得 $x$ 軸與 $y$ 軸二方向之平行力系。各依前節合成相互直交之二合力。此二合力設各為 $\Sigma P_x$ 及 $\Sigma P_y$ ，則由(b)圖得所求合力 $R$ 之大小與方向。即

$$R = \sqrt{(\Sigma P_x)^2 + (\Sigma P_y)^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$\tan \theta_x = \frac{\Sigma P_y}{\Sigma P_x} \dots \dots \dots (2)$$

但 $\theta_x$ 為 $R$ 與 $x$ 軸所成之角。

合力 $R$ 之作用線則由力勢原理求之。設勢心 $O$ 至合力之直交距離為 $a$ ， $P', P''$ 等力對於 $O$ 點之各力勢代數和為 $\Sigma M_o$ ，則

$$Ra = \Sigma M_o \dots \dots \dots (3)$$

故由(1),(2),(3)三式可完全決定所求之合力。

若 $\Sigma P_x = 0, \Sigma P_y = 0$ ，則合力可為一偶力。設該偶力之力勢為 $C$ ，則

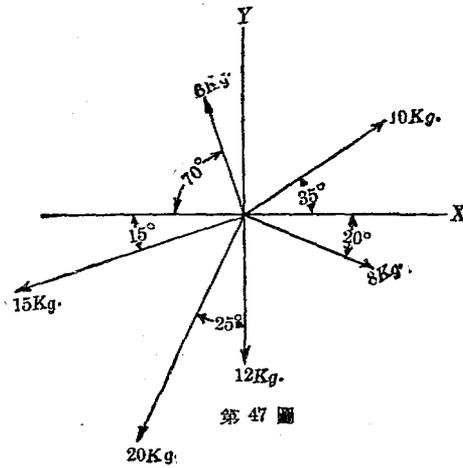
$$C = \Sigma M$$

此時力勢 $\Sigma M$ 之勢心可任意取之，因偶力對於任一點之力勢皆相等。

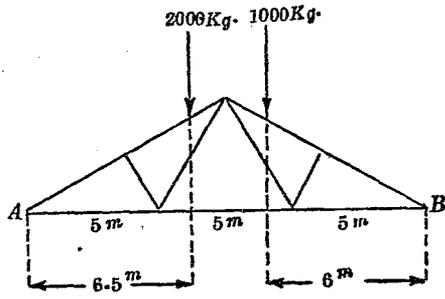
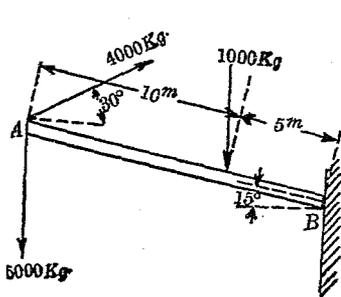
若 $\Sigma P_x = 0, \Sigma P_y = 0$ ，而同時 $\Sigma M = 0$ ，則合力為零，即力系為平衡。

## 習 題 2.

1. 試用代數解法求第47圖上六力之合力
2. 試用圖解法解第1題。

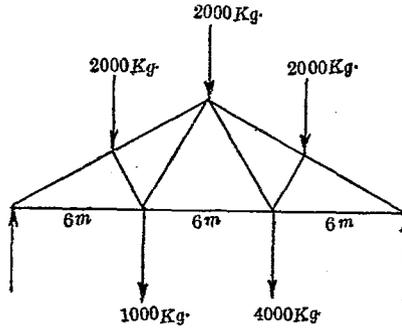


3. 試求第 48 圖上三力之合力。



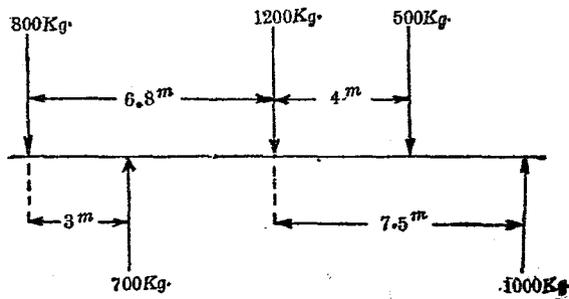
4. 試將第 49 圖所示之二力分解為二平行分力各通過 A, B 點。

5. 試求第 50 圖上五平行力之合力.

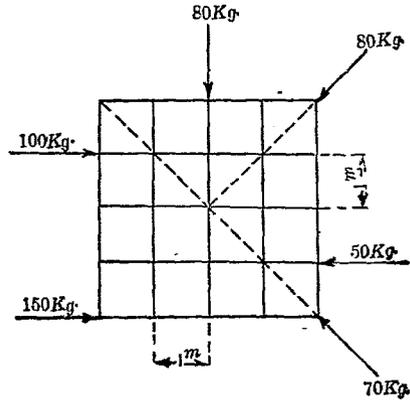


第 50 圖

6. 試求第 51 圖上五平行力之合力

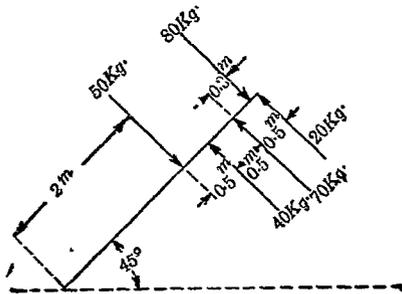


第 51 圖



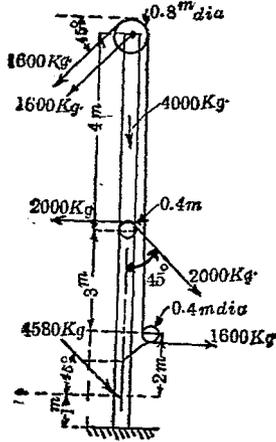
第 52 圖

7. 試求第 52 圖諸力之合力.
8. 試求第 53 圖諸力之合力.



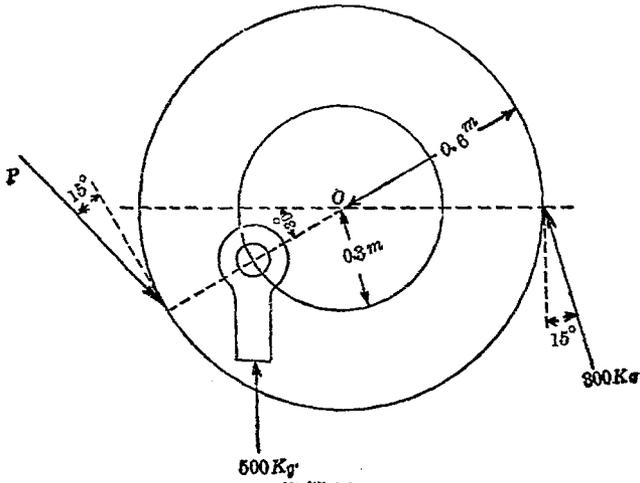
第 53 圖

9. 試求第 54 圖所示諸力之合力.



第 54 圖

10. 第 55 圖示二齒輪旋轉於  $O$ ，試求  $P$  力，使其對於  $O$  之力勢等於其他二力力勢之代數和，再求此三力之合力。

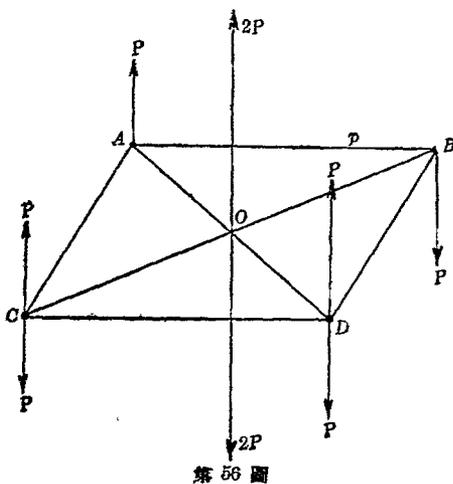


第 55 圖

22. 關於偶力之重要定理 偶力之性質已略述於第13節,工學上關於偶力至為重要,茲將此等性質證明如次,以供偶力與他偶力或他力之合成之應用焉。

**定理 I** 任一偶力可於其平面內依平行方向任意移動,或移至於其平行平面內,而其對於所作用物體上之外部效果不變。

證 第56圖上  $Pp$  為偶力其勢臂  $AB$  等於  $p$ , 作平行四邊形  $ABCD$ , 此四邊形可在於該偶力之平面內, 亦可不在該平面內,  $C, D$  兩點上各加以相等反向之平行力, 其大小均等於  $P$ ,  $A$  點上之  $P$  及  $D$  點上向上之  $P$  可以其合力  $2P$  代之, 此合力向上通過  $AD$  之中點  $O$ , 而與  $P$  力平行。同樣  $B$  點上之  $P$  及  $C$  點上向下之  $P$  可以其合力  $2P$  代之, 此合力向下亦通過  $O$ , 與前之向上合力  $2P$  適相抵消, 故結果僅留  $O$  點上向上力  $P$  與  $D$  點上向上力  $P$ , 此二力亦成偶力, 與原有偶力相等, 故本定理已得證明。



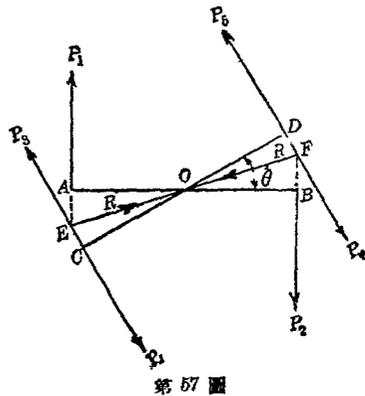
**定理 II.** 偶力可於其平面內迴轉任意角度, 而其對於所

作用物體上之外部效果不變。

證 第57圖上 $P_1$ 與 $P_2$ 相等反向,成一偶力,其勢臂 $AB$ 等於 $p$ ,今由勢臂中點 $O$ 作任意直線 $CD$ ,與 $AB$ 成 $\theta$ 角且使 $OC = OD = \frac{1}{2}p$ ,於 $C$ 點作相等反向二力 $P_3, P_4$ ,各與 $CD$ 直交,而等於 $P_1$ 或 $P_2$ ,同樣於 $D$ 點作相等反向二力 $P_5, P_6$ ,各與 $CD$ 直交而亦等於 $P_1$ 或 $P_2$ ,將 $P_1$ 作用線沿長之交 $P_4$ 作用線於 $E$ ,則 $P_1$ 與 $P_4$ 之合力 $R$ 作用線必平分 $AOC$ 角而為 $EO$ 線,同樣 $P_2$ 與 $P_5$ 二力之合力 $R$ 作用線,亦必平分 $BOD$ 角而為 $EO$ 線,且與 $EO$ 在同一直線上,故此二合力 $R$ 互相抵消,結果僅餘 $P_3$ 與 $P_6$ 二力,此二力亦成偶力,勢臂亦為 $p$ ,即與原有偶力完全相等,即原有偶力迴轉 $\theta$ 角而其外部效果仍不變。

定理 III. 偶力之臂與其中任一力之乘積苟不變時,則雖任何改變力之大小及勢臂,而其外部效果不變。

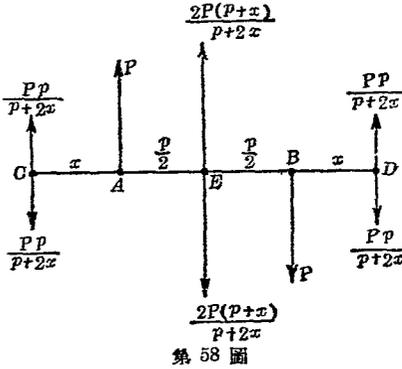
證 第58圖中 $P \cdot p$ 為已知之偶力,其勢臂 $\overline{AB}$ 等於 $p$ ,今



第 57 圖

將勢臂增為 $\overline{CD}$ 即 $p+2x$ , $C$ 點上加以相等反向之二力 $\frac{Pp}{p+2x}$ ,

與  $P$  力平行,  $D$  點亦加以  
 相等反向之二力  $\frac{Pp}{p+2x}$   
 亦與  $P$  力平行 將  $A$  點上  
 $P$  力與  $D$  點上向上力  $\frac{Pp}{p+2x}$   
 合成爲一向上合力  $\frac{2P(p+x)}{p+2x}$ ,  
 其作用線通過  $\overline{AB}$  之中  
 點  $E$ , 同樣將  $B$  點上  $P$  力



與  $C$  點向下力  $\frac{Pp}{p+2x}$  合成爲一向下合力  $\frac{2P(p+x)}{p+2x}$ , 其作用線亦  
 通過  $E$  點, 而與前之合力在一直線上, 故此二合力相互抵消.  
 結果餘剩  $C$  點上向上力  $\frac{Pp}{p+2x}$  與  $D$  點上向下力  $\frac{Pp}{p+2x}$ , 此二力  
 成一偶力, 勢臂爲  $p+2x$ , 其力勢與原有偶力  $Pp$  相等.

**定理 IV.** 一平面內任何個數偶力之合力仍爲一偶力,  
 其力勢等於各偶力力勢之代數和.

證 此定理之證明可應用前述三定理證明之茲先就二  
 偶力證明後, 對於二個以上則任取二個合成後, 再與第三個  
 合成, 依次類推而證明之.

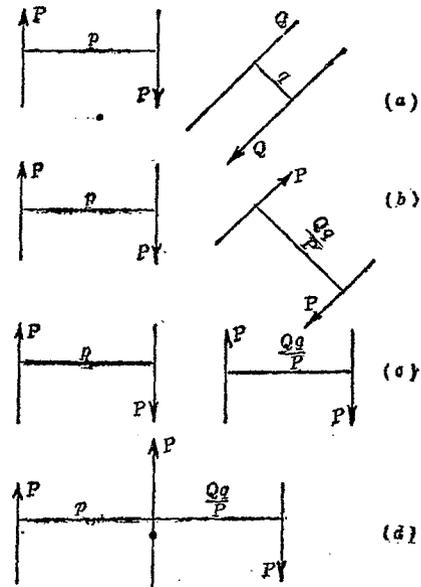
先設第 59 圖 (a) 上有二個偶力  $Pp$  及  $Qq$ , 同時作用於一物  
 體上第二偶力之  $Q$  力可變成  $P$ , 其勢臂  $q$  變成  $\frac{Qq}{P}$  (定理 III) 如  
 (b) 圖. 次將第二偶力迴轉之, 使二偶力之力相互平行如 (c) 圖. 再  
 將第二偶力移動, 使其一力與第一偶力中一力在同直線上而

相反向,即相互抵消,如(d)圖.如是則原有二偶力即合成一偶力,其勢臂為  $(p + \frac{Qq}{P})$ , 其力勢為

$$(Pp + \frac{Qq}{P}) = Pp + Qq$$

故合成偶力之力勢等於原有二偶力力勢之和.若原有偶力為異方向時則合成偶力之力勢等於原有二偶力力勢之差.

定理 V. 同平面上二偶力有同方向及相等勢者則為同值 (Equivalent).



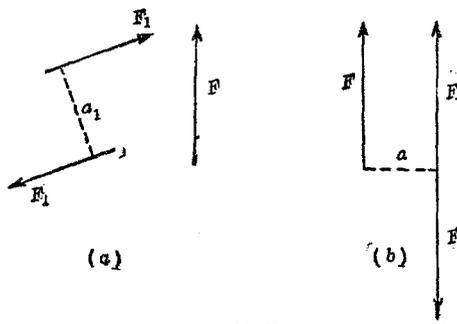
第 59 圖

證 由前定理證明中將第二偶力可移至於與第一偶力疊合之位置,故全相等.

定理 VI. 同平面內一偶力與他一力之合力成爲一力.該力與原有之力相平行而相等,其作用線與原有之力之距離等於原有偶力以原有之力除得之商.其位置乃使合力對於原有力之作用點所生力勢與原有偶力之力勢有同等符號.

證 第 60 圖中  $F$  爲原有之力,  $F_1 a_1$  爲原有之偶力.今求  $F_1 a_1$

之同值偶力,使其力爲 $F$ ,勢臂爲 $a$ ,將該偶力移於(b)圖位置,使其一力與原有之 $F$ 力在於同直線而反方向之位置,則此二力相抵消,結果惟餘一力 $F$ .



第 60 圖

$$\text{因 } Fa = F_1 a_1 \quad \therefore a = \frac{F_1 a_1}{F}$$

若 $F_1 a_1$ 爲正符號,則合力位置當在 $F$ 之右側。

### 23. 力勢之圖解求法

I. 求一平面內數多力對於某點之力勢 第61圖中設有四力 $P_1, P_2, P_3, P_4$ ,今欲求其對於一勢心 $S$ 之力勢先求四力之合力 $R$ ,自 $S$ 至 $R$ 之直交距離設爲 $r$ ,則合力 $R$ 對於 $S$ 點之力勢 $M_s$ 爲

$$M_s = -R \cdot r$$

此卽爲所求諸力對於 $S$ 之力勢.此力勢或由計算求之,或亦可由圖解得之.

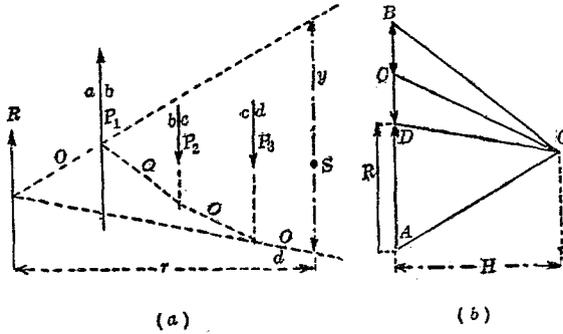
由 $S$ 勢心引平行於合力 $R$ 之直線 $KL$ ,其在於索邊形之最初及最後二邊間之截長

$KL = y$ . 將(a)(b)兩圖比較之,由 $\triangle KJL \sim \triangle OAE$ ,得



$$M_s = -H \cdot y$$

此力勢亦為負。



第 62 圖

今設有  $P_1, P_2, \dots, P_n$  等數多平行力, 欲於同一圖上求此等全體之力對於某勢心  $S$  之力勢, 或其中某一力對於他勢心  $S_1$  之力勢。

先如第 63 圖 (b) (c) 所示, 作示力圖, 其第一極射線使與力線直交, 而取  $O'$  或  $O$  為極點, 作索邊形, 過  $S$  點引平行於力之線使與索邊形第一邊及最後一邊相交, 其長設為  $y$ , 則全體之力對於  $S$  點之力勢為

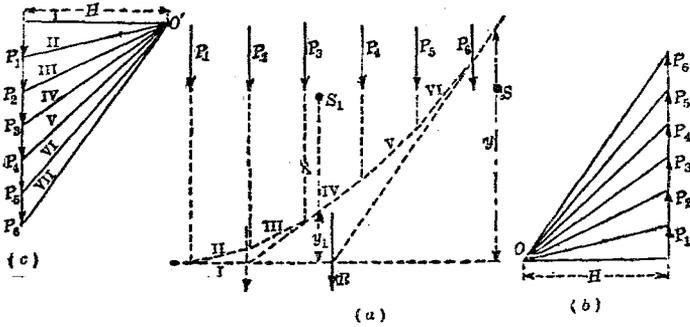
$$M_s = H \cdot y$$

此力勢為正, 同樣  $P_1, P_2, P_3$  三力對於  $S$  點之力勢為

$$M_s = H \cdot y_1$$

此力勢亦為正, 上述結果又可述之如次:

平行力之索邊形中第一邊, 使與力之方向成直交, 稱為



第 63 圖

橫距軸，則索邊形之縱距，與其前方之力對於該縱距線上所有勢心之力勢成比例。

24. 空間合交力系之合力 (1) 圖解法 空間合交力系合力之圖解求法，可應用第16節所述同平面合交力系合力之圖解法以求之。於空間擇定二座標面，將空間力系各投射於此二平面上，求各面上力系射影之合力。此時可完全應用第16節所述之法。此射影合力即為所求空間力系合力之對於二座標面上之射影。若各座標面上力系射影之示力多邊形均閉合時，則所求合力為零。此圖解法較代數法為不便。

(2) 代數解法 依第11節所述將各力分解為三直交軸  $x$ ,  $y$ ,  $z$  上之分力，其原點即取於諸力之交點上。各分力設為  $F_x, F_y, F_z$ ，則諸分力之代數和為  $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$ ，而所求合力為

$$R = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$

合力與  $x, y, z$  軸所夾之角設各為  $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ，則

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{\Sigma F_x}{R}; \quad \theta_y = \cos^{-1} \frac{\Sigma F_y}{R}; \quad \theta_z = \cos^{-1} \frac{\Sigma F_z}{R};$$

此合力通過諸力之交點。

例 試求通過原點下列各力之合力。但  $F$  示力之大小， $x, y, z$  示各力作用線上之他一點座標

$F$	50kg.	90kg.	100kg.	60kg.	20kg.
$x, y, z$	5, 5, 0	7, 5, 3	3, 0, 4	2, 5, 4	0, 5, 3

$$\text{解 } \Sigma F_x = 50 \cdot \frac{5}{\sqrt{5^2+5^2}} + 90 \cdot \frac{7}{\sqrt{7^2+5^2+3^2}} + 100 \cdot \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$+ 60 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+5^2+4^2}} + 20 \cdot \frac{0}{\sqrt{5^2+3^2}}$$

$$= 50 \cdot \frac{5}{\sqrt{50}} + 90 \cdot \frac{7}{\sqrt{83}} + 100 \cdot \frac{3}{5} + 60 \cdot \frac{2}{\sqrt{45}} + 20 \cdot \frac{0}{\sqrt{34}}$$

$$= 35.4 + 69.2 + 60 + 17.9 + 0 = 182.5 \text{kg.}$$

$$\Sigma F_y = 50 \cdot \frac{5}{\sqrt{50}} + 90 \cdot \frac{5}{\sqrt{83}} + 100 \cdot \frac{0}{5} + 60 \cdot \frac{5}{\sqrt{45}} + 20 \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$$

$$= 35.4 + 49.3 + 0 + 44.7 + 17.1 = 146.5 \text{kg.}$$

$$\Sigma F_z = 50 \cdot \frac{0}{\sqrt{50}} + 90 \cdot \frac{3}{\sqrt{83}} + 100 \cdot \frac{4}{5} + 60 \cdot \frac{4}{\sqrt{45}} + 20 \cdot \frac{3}{\sqrt{34}}$$

$$= 0 + 29.6 + 80 + 35.8 + 10.3 = 155.7 \text{kg.}$$

$$\therefore R = \sqrt{(182.5)^2 + (146.5)^2 + (155.7)^2} = 281 \text{kg.}$$

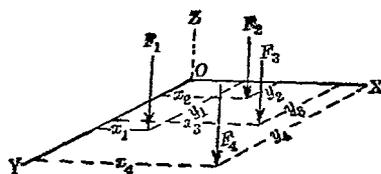
$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{182.5}{281} = \cos^{-1} 0.650 = 49^\circ 30'$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{146.5}{281} = \cos^{-1} 0.521 = 58^\circ 35'$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{155.7}{281} = \cos^{-1} 0.553 = 56^\circ 25'$$

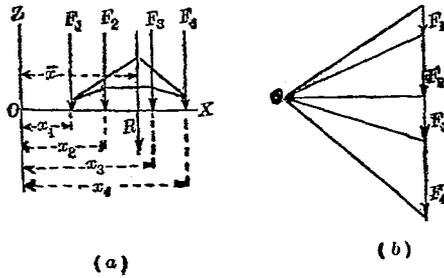
25. 空間平行力系合力之圖解法 空間平行力系之合力或爲一力或爲一偶力，若爲一力則此合力與各力相平行，其大小方向等於各力之代數和，其作用線位置可由第17節所述任一方法求之，但由其第一法時，則須在各種平面內依次求每二力之合力，較爲不便，由其第二法時，則將各力投射於二平面上，此二平面皆須與各力平行，且相互直交，求各面上射影之合力，此二射影合力，即爲所求合力在該二座標面上之射影。

例如第64圖所示之四個平行力，其合力  $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$ 。取  $xz$  及  $yz$  爲二投射面。各投射面內求射影合力之方法示於第65圖及66圖。由此二圖可得合力  $R$  之  $\bar{x}$  及  $\bar{y}$  座標。若  $\Sigma F = 0$ ，而二射影之合力中其一者或二者爲偶力時，則所求合力爲一偶力。

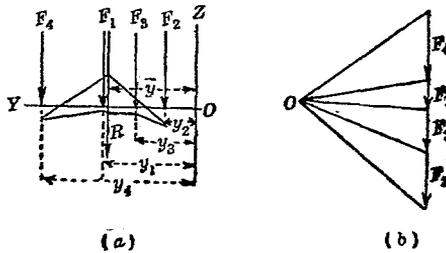


第 64 圖

26. 關於空間合交及平行力系之力勢原理 第19節所述之力勢原理，對於空間力系亦可成立，茲分別證之如次，但



第 65 圖



第 66 圖

空間力系之力勢非對於一點乃對於一直線言之。

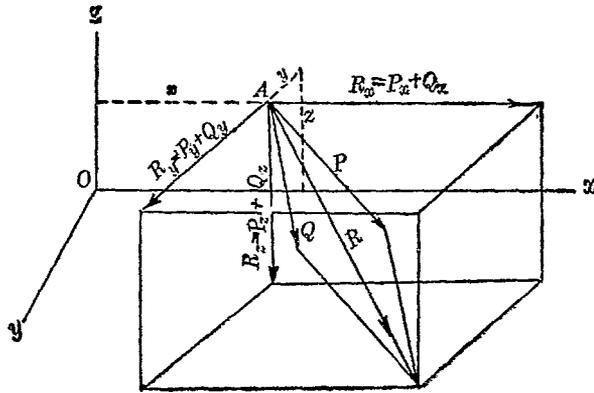
(i)先就空間合交力系證之設第 67 圖中有相交於 A 點之 P, Q 二力,其合力為 R,  $Ox, Oy, Oz$  為三直交軸。於 A 點上, P, Q 及 R 三力,均可各分解為  $x, y, z$  軸上三分力。因 R 為 P, Q 之合力,故

$$R_x = P_x + Q_x, \quad R_y = P_y + Q_y, \quad R_z = P_z + Q_z,$$

設 A 點之座標為  $x, y, z$ , R 對於  $x$  軸之力勢為

$$M_x = R_y z + R_z y$$

即 
$$M_x = (P_y + Q_y)z + (P_z + Q_z)y = (P_y z + P_z y) + (Q_y z + Q_z y)$$



第 67 圖

故  $R$  對於  $x$  軸之力勢等於  $P$  對於  $x$  軸之力勢與  $Q$  對於  $x$  軸之力勢之和

同樣得  $M_y = -R_z z - R_x x = -(P_z + Q_z)z - (P_x + Q_x)x$

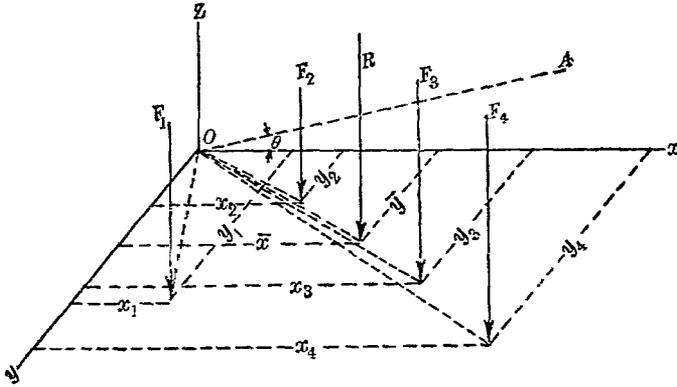
$$= -(P_z z + P_x x) - (Q_z z + Q_x x)$$

$$M_x = R_z y - R_y z = (P_z + Q_z)y - (P_y + Q_y)z$$

$$= (P_z y - P_y z) + (Q_z y - Q_y z)$$

故任何空間合交力對於任意一軸之力勢代數和等於其合力對於該軸之力勢。

(ii) 次就空間平行力系證之。第 68 圖上設有  $F_1, F_2, F_3, F_4$  四空間平行力其與  $xz, yz$  面之距離各為  $x_1, y_1; x_2, y_2; x_3, y_3; x_4, y_4$ ； $R$  為其合力，其與  $xz, yz$  面之距離為  $\bar{x}, \bar{y}$ ，今設對於  $x$  軸取力勢，各力對於  $x$  軸之距離為  $y_1, y_2, y_3, y_4$ ，合力  $R$  對於  $x$  軸之距離為  $\bar{y}$ ，由第 25 節，各力在  $xy$  面上射影為同平面之平行力系，故由



第 68 圖

第 19 節,則

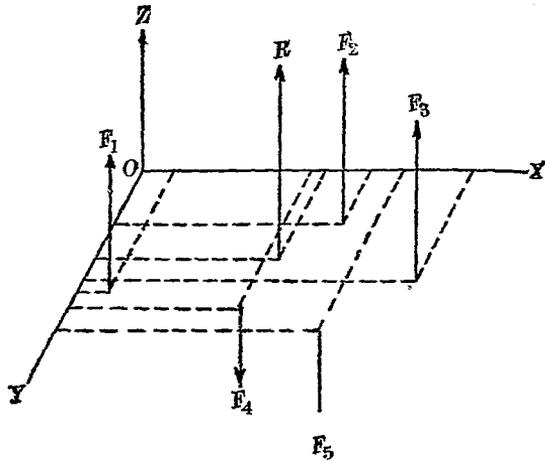
$$R\bar{y} = \sum Fy = \sum M_x$$

此即各力對於  $x$  軸力勢之代數和等於其合力對於  $x$  軸力勢。

各平行力對於  $x$  軸之距離即等於各力於  $xOz$  對平面之距離故平行力系對於  $x$  軸之力勢或亦可稱為  $xOz$  對於平面之力勢。

對於  $xOz$  平面內與  $x$  軸成  $\theta$  角之任意一直線  $OA$  之力勢,其關係亦與上同,僅式中多添加一  $\cos \theta$  耳。即力勢原理對於任何一直線皆可成立。

27. 空間平行力系之代數解法 任選三直交座標軸,使其一者與力系中諸平行力相平行。若其合力為一力,則此力  $R$  必與原有諸力平行而其值等於各力之代數和。其作用線



第 69 圖

可由力勢原理求之今設第 69 圖中,各平行力對於  $x$  軸之距離為  $y$  合力  $R$  對於  $x$  軸之距離為  $\bar{y}$ , 則各平行力對於  $x$  軸之力勢代數和為  $\Sigma M_x = \Sigma F \cdot y = R \cdot \bar{y}$

$$\text{故} \quad \bar{y} = \frac{\Sigma M_x}{R}$$

同樣對於  $y$  軸之力勢有下之關係.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma M_y}{R}$$

因之合力  $R$  之作用線位置可定.

若  $\Sigma F = 0$ , 則合力為偶力, 因之由力勢原理, 對於  $x$  軸

$$C_x = \Sigma M_x$$

同樣對於  $y$  軸  $C_y = \Sigma M_y$ , 但  $C_x$  與  $C_y$  為偶力對於  $x$  軸與  $y$  軸之力勢.

例 試求第70圖所示平行力系之合力。但圖中每格邊長 1cm。

$$\text{解 } R = \Sigma F = 10 + 15 - 20 - 30 = -25 \text{kg.}$$

$$\Sigma M_x = 20 \times 2 + 30 \times 3 - 10 \times 1 - 15 \times 1 = 105 \text{kg.cm.}$$

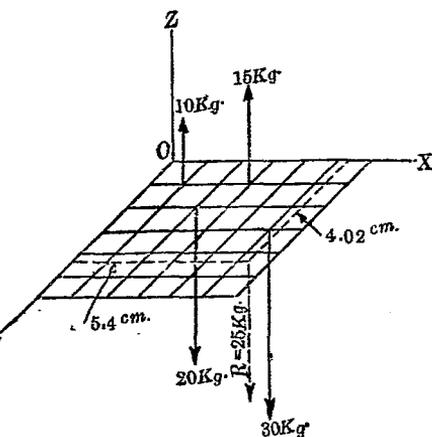
$$\Sigma M_y = 10 \times 1 + 15 \times 3 - 20 \times 2 - 30 \times 5 = -135 \text{kg.cm.}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{-135}{-25} = 5.4 \text{cm.}$$

$$\bar{y} = \frac{105}{25} = 4.2 \text{cm.}$$

$$\text{注意 } y = \frac{\Sigma M_x}{R} = \frac{105}{-25}$$

但此時  $R$  向下其對於  $x$  軸之力勢當等於  $\Sigma M_x$  而為正。故  $y$  須審察問題之情形，不當取負號而須取正號。



第70圖

### 28. 空間偶力之合

力 關於求空間數個偶力之合力，有下之定理。

定理 I. 凡空間任何個偶力之合力仍為一偶力。

證 先就二個偶力證明之。若二個以上之偶力，則先將任意二個合成為一偶力，此偶力再可與第三個合成，依次進行，即可證明。今設第71圖(a)上有二偶力  $P \cdot p$  及  $Q \cdot q$ ，各在於二相異平面內，此二平面之交角為  $\alpha$ ，偶力  $Q \cdot q$  之  $Q, Q$  可變成  $P, P$ ，此時其勢須變成  $\frac{Q \cdot q}{P}$ ，如(b)圖所示。然後旋轉各偶力於各該平

面內，使各力均與二平面交線相平行如(c)圖所示。最後將二偶力於一平行方向移動於各該平面內使各偶力中各一力一致於二平面之交線上，而其方向適相反。結果此二力相互抵消，而剩留一偶力。其二力為 $P, P$ ，如(d)圖所示。此最後(d)圖之移動對於任何偶力均屬可能。故本定理已得證明。

此合成偶力之勢臂可求之如下。

由三角形 $ABC$ 得

$$\text{勢臂 } r = \sqrt{p^2 + \frac{Q^2 q^2}{P^2}} - 2 \cdot \frac{Q p q}{P} \cdot \cos \alpha$$

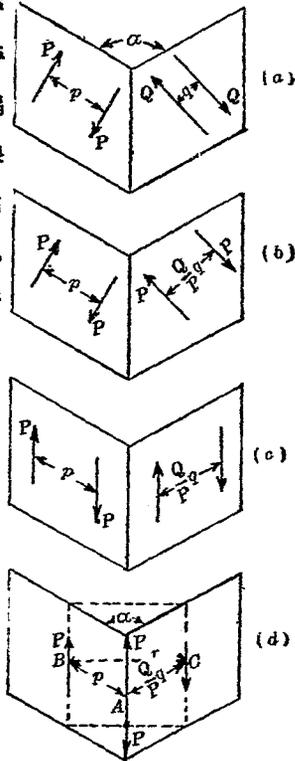
若 $\alpha = 90^\circ$ ，則所合成之偶力力勢 $C$ 如下：

$$C = P \sqrt{p^2 + \frac{Q^2}{P^2} q^2}$$

即所合成偶力之力勢等於原有二偶力力勢各自乘和之平方根，其偶力面與偶力 $P, p$ 面所成之角 $\phi$ 可求之如下(第72圖)。

$$\tan \phi = \frac{\frac{Q}{P} \cdot q}{p} = \frac{Qq}{Pp}$$

若 $\alpha = 180^\circ$ ，則所合成之偶力，其力勢 $C$ 由下式求之。其平面即



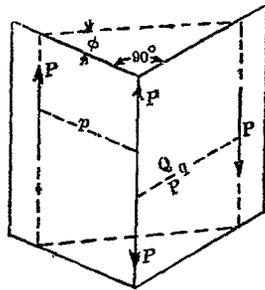
第 71 圖

與原有偶力面相一致或相平行。

$$C = I \sqrt{p^2 + \frac{Q^2}{P^2} \cdot q^2 + 2p \frac{Q}{P} \cdot q}$$

$$= P \left( p + q \frac{Q}{P} \right) = P \cdot p + Q \cdot q$$

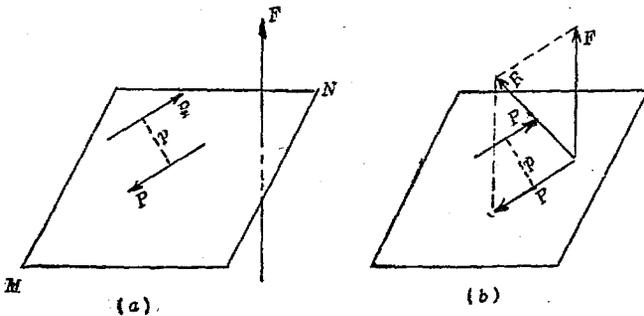
即合成偶力之力勢等於原有二偶力力勢之代數和。



第 72 圖

**定理 II.** 異平面上之一偶力與他一力可以異平面上二力代之其逆亦真。

證 第 73 圖 (a) 上設有一平面  $MN$ , 其上有偶力  $P \cdot p$ , 另有一力  $F$ , 不在該平面內。將偶力平行移動, 使其一力  $P$  與他力  $F$  相交如 (b) 圖。如是則  $P$  與  $F$  可合成一力  $R$ , 故原有一力  $F$  及一偶力  $P \cdot p$  可以異平面上二力  $P$  及  $R$  代替之。



第 73 圖

反之異平面上二力可以一力及一偶力代替之。

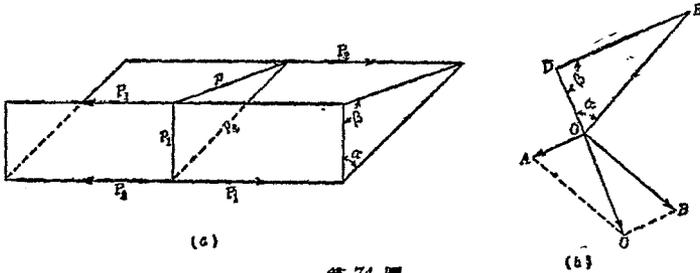
若  $F$  力與  $MN$  平面相平行時, 則將偶力旋轉, 使其一力  $P$  與  $F$  力平行, 仍可合成一力。該力與偶力中他力  $P$ , 成爲二平

行力。

29. 用向線求偶力之合方法 用向線表示偶力之法已述於第13節茲述其重要定理如次。

定理 任意個偶力若各用向線表示時，則此等向線之合成量可完全表示該合成偶力。

證 茲就二偶力證明之對於二個以上之偶力可用同法證明之今設有二偶力  $P_1 \cdot p_1$  及  $P_2 \cdot p_2$ ，各偶力平面相夾成  $\alpha$  角，如第74圖 (a)。但此二偶力各已適當移動旋轉如圖云之位置，并



第74圖

使  $P_1 = P_2$ ，設  $DOE$  (第74圖 (b)) 示 (a) 圖內二平面之橫斷面。偶力  $P_1 p_1$  可以向線  $\vec{OA}$  示之，但  $OA$  與  $OD$  平面直交，其長度與  $P_1 p_1$  成比例。同樣偶力  $P_2 p_2$  可以向線  $\vec{OB}$  示之，但  $OB$  與  $OE$  平面直交，其長度與  $P_2 p_2$  成比例。作  $OACB$  平行四邊形，則  $\vec{OC}$  示  $\vec{OA}$  與  $\vec{OB}$  之合成向量。今欲證明  $\vec{OC}$  可表示合成偶力時，須證明  $\vec{OC}$  與合成偶力之平面為直交，即與  $DE$  為直交，且  $\vec{OC}$  長度以一定縮尺表示合成偶力  $P \cdot p$  之量。今於三角形  $OAC$  及  $ODE$  中，

$$\angle OAC = \angle DOE = \alpha, \quad \text{且 } OA \text{ 與 } P_1 p_1 \text{ 成比例, 故設}$$

$$OA = kP_1p_1$$

$$\text{則 } OB = kP_2p_2 = AC$$

$$\therefore \frac{OA}{AC} = \frac{kP_1p_1}{kP_2p_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{OD}{OE}$$

因之三角形  $OAC$  與  $ODE$  爲相似, 即

$$\frac{OC}{DE} = \frac{OA}{OD} = \frac{kP_1p_1}{p_1} = kP$$

$$\therefore OC = DE \times kP = kP \cdot p$$

故  $\vec{OC}$  表示合成偶力之力勢, 又因三角形  $OAC$  與  $ODE$  爲相似, 且  $OA$  與  $OD$  相直交, 故  $OC$  與  $DE$  兩相應邊亦直交. 且由 (b) 圖更可知  $\vec{OC}$  亦表示合成偶力之方向, 故  $\vec{OC}$  可完全表示所求之合成偶力.

任何個之偶力, 同樣可用向量表示法求其合成偶力.

30. 相互直交三平面內之偶力 今取三直交平面爲座標面, 則  $yz$  平面內之偶力可完全以沿  $x$  軸上之向線表示之. 設此向線爲  $C_x$ , 同樣,  $xz$  平面內之偶力設以向線  $C_y$  示之,  $xy$  平面內之偶力設以  $C_z$  示之. 故三平面內偶力之合力可以  $C_x, C_y, C_z$  三向線之合成量完全表示之. 設此合成量爲  $C$ , 則

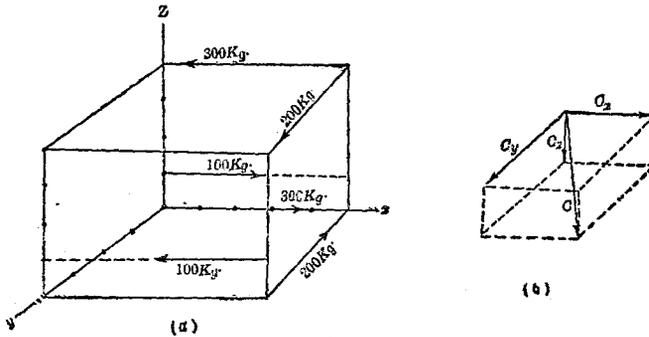
$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$$

設向線  $C$  與  $x, y, z$  三軸所成角度各爲  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ , 則

$$\phi_x = \cos^{-1} \frac{C_x}{C}, \quad \phi_y = \cos^{-1} \frac{C_y}{C}, \quad \phi_z = \cos^{-1} \frac{C_z}{C}$$

故合成偶力可完全決定.

例 試求第75圖所示三偶力之合力.但每格表示4m.



第 75 圖

解  $C_x = 200 \times 4 = 800 \text{kg.m.}$

$$C_y = 300 \times 4 = 1200 \text{kg.m.}$$

$$C_z = -100 \times 4 = -400 \text{kg.m.}$$

$$C = \sqrt{(800)^2 + (1200)^2 + (400)^2} = 1500 \text{kg.m.}$$

又  $\phi_x = \cos^{-1} \frac{800}{1500} = 57^\circ 47'$

$$\phi_y = \cos^{-1} \frac{1200}{1500} = 36^\circ 50'$$

$$\phi_z = \cos^{-1} \frac{-400}{1500} = 105^\circ 28'$$

故所求之合成偶力在於與上示角度向線之直交平面內,而其值為1500kg.m.

注意 向線與座標軸所夾之角,通常指其與座標軸正端所夾二角中之小者.

31. 偶力之分解 一偶力可分解為數個異平面內之偶力。此時可將已知偶力之向線分解之為數個向線以表示各分偶力(Component couple)。

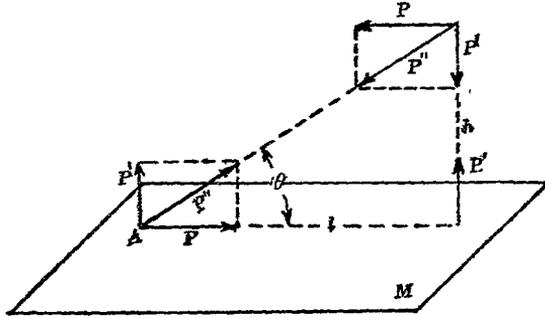
此分解中尤以將一偶力分解之為三直交平面內之三偶力為最重要。設三分偶力之平面取為座標面，已知偶力之向線  $C$  與三座標軸所成角度為  $\phi_x, \phi_y, \phi_z$ ， $C_x, C_y, C_z$  為  $yz, zx, xy$  三平面內各分偶力之向線，則

$$C_x = C \cos \phi_x \quad C_y = C \cos \phi_y \quad C_z = C \cos \phi_z$$

32. 空間非合交非平行力系之合力 (i) 圖解法 空間非合交非平行力系之合力一般成為一力及一偶力，或僅成一力，又或僅成一偶力。由第28節定理II，則空間一力及一偶力又可合成為異平面上二力，故一般空間力系之合力或成為不相交之二力，或成為一力或成為一偶力。

今取任意一平面，該平面不與任何已知力相平行。於各力作用線與該平面之各交點上，將各力分解成二分力，一與該平面直交，一在於該平面內。平面內各分力可依第18節方法合成一合力  $R_1$ ，直交於平面各分力可依第25節方法可合成一合力  $R_2$ ，此二合力若不相交，則成異平面之二力，而不能再合成一力，僅可合成一力及一偶力(第28節定理II)。若此力為零，則僅可合成一偶力。若其偶力為零，則僅可合成一力。若此力與偶力皆為零，則原有力系成為平衡。

若有一已知力平行於所取之平面  $M$  時(第76圖)，則與  $F$



第 76 圖

力相交而直交於  $M$  平面, 作相等反向之二力  $P, P'$ , 將  $P$  與  $P'$  合成  $P''$  力, 此  $P''$  力作用線必可與  $M$  平面相交, 設其交點為  $A$ , 於  $A$  點上將  $P''$  力分解為  $P$  及  $P'$  二分力則結果成為平面內之  $P$  力及  $P'e$  之偶力. 但  $P'e = P \tan \theta \cdot e = P'e \tan \theta = P'h$ , 故空間內  $P$  力結果分解成為一偶力  $P'h$  及一平面內之  $P$  力

(ii) 代數解法 若空間非合交非平行力系之合力為一力及一偶力時, 則該力可通過任意之點. 但該點變動時, 偶力亦因之而異. 今取任意點為原點, 取三直交軸, 力系中各力均可以通過原點之一平行力及一偶力代替之 (第 13 節). 故該力系可導成原點上之合交力系及偶力系 (System of couples). 原點上之合交力系可合成一力. 如第 24 節所述, 由下式求之.

$$R = \sqrt{(\sum F_x)^2 + (\sum F_y)^2 + (\sum F_z)^2}$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{\sum F_x}{R},$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{\Sigma F_y}{R},$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{\Sigma F_z}{R}.$$

偶力系可合成一偶力如第28節定理I所述。便利上將各偶力分解成爲三座標面內之分偶力如第31節所述。

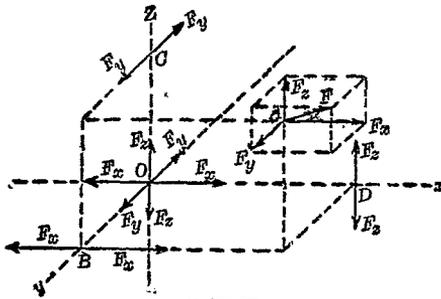
今於第77圖上力系中一力設爲  $F$ ,  $\vec{AF}$  爲其作用線,  $A$  點之座標爲  $x, y, z$ ,  $AF$  與  $x, y, z$  軸所夾成之角設各爲  $\alpha, \beta, \gamma$ , 將  $F$  力分解成爲沿  $x, y, z$  軸上之

三分力  $F_x, F_y, F_z$ , 則

$$F_x = F \cos \alpha; F_y = F \cos \beta;$$

$$F_z = F \cos \gamma. \text{ 今於 } O \text{ 點及 } B$$

點上各加以相等反向之二力, 各等於  $F_x$ ; 於  $O$  點及  $C$  點上各加以相等反



第77圖

向之二力, 各等於  $F_y$ ; 於  $O$  點及  $D$  點上各加以相等反向之二力, 各等於  $F_z$ , 如是將  $F$  力分解成爲三分力  $F_x, F_y, F_z$ , 各通過  $O$  點, 及三偶力  $M_x, M_y, M_z$ , 各迴轉於  $x, y, z$  三軸之周圍。但

$$M_x = F_y \cdot z - F_z \cdot y$$

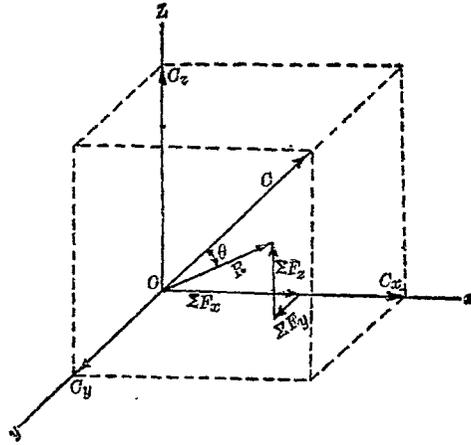
$$M_y = F_z \cdot x - F_x \cdot z$$

$$M_z = F_x \cdot y - F_y \cdot x$$

同樣對於力系中其他各力均如上分解之。設  $x$  軸周圍各分偶力之代數和  $\Sigma M_x = C_x$ ,  $y$  軸周圍各分偶力之代數和  $\Sigma M_y =$

$C_y, z$  軸周圍各分偶力之代數和  $\Sigma M_x = C_x$ , 此  $C_x, C_y, C_z$  各以沿  $x, y, z$  軸上之向線表示之。

如是則原有力系最後分解成爲第 78 圖所示之力系, 即一力  $R$  通過  $O$  點及三分偶力  $C_x, C_y, C_z$ , 此三分偶力由第 30 節所述可合成一偶力  $C$ , 由下式求之, 其向線亦通過  $O$  點。



第 78 圖

$$C = \sqrt{(\Sigma M_x)^2 + (\Sigma M_y)^2 + (\Sigma M_z)^2}$$

$$\phi_x = \cos^{-1} \frac{\Sigma M_x}{C},$$

$$\phi_y = \cos^{-1} \frac{\Sigma M_y}{C},$$

$$\phi_z = \cos^{-1} \frac{\Sigma M_z}{C}.$$

茲就下之三情形更討論之如下:

I.  $R > 0$   $C > 0$

設  $\theta$  爲  $R$  與  $C$  二向線間之夾角(第 78 圖)。

(i) 若  $\theta > 90^\circ$  或  $\theta < 90^\circ$ , 則將  $C$  分解爲二分偶力, 一爲  $C_1$  與  $R$  相一致, 一爲  $C_2$ , 與  $R$  成直交.  $C_2$  與  $R$  可合成一力(第 22 節定理

VI), 與  $R$  相等而平行, 其與  $R$  之距離  $a = \frac{C_2}{R}$ , 故得下之定理.

**定理** 一般力系之合力成爲一力  $R$  及一偶力  $C_1$ ,  $R$  距離原點爲  $\frac{C_2}{R}$ , 偶力  $C_1$  在於直交於  $R$  之任一平面內

(ii) 若  $\theta = 90^\circ$ , 則  $C_1 = 0$ , 即  $C_2 = C$ , 故力系之合力僅成爲一力, 與  $R$  相等而平行, 其與  $R$  之距離爲  $a = \frac{C}{R}$

(iii) 若  $\theta = 0^\circ$ , 則  $C_2 = 0$  即  $C_1 = C$ , 此時合力成爲通過原點之一力  $R$ , 及直交於  $R$  面內之偶力  $C$ .

若  $C = 0$ , 則合力僅爲通過原點之一力  $R$ .

II.  $R = 0 \quad C > 0$

此時合力僅爲一偶力  $C$ .

III.  $R = 0 \quad C = 0$ .

此時原有力系相互平衡, 且  $R$  及  $C$  沿三座標軸上之分力均爲零.

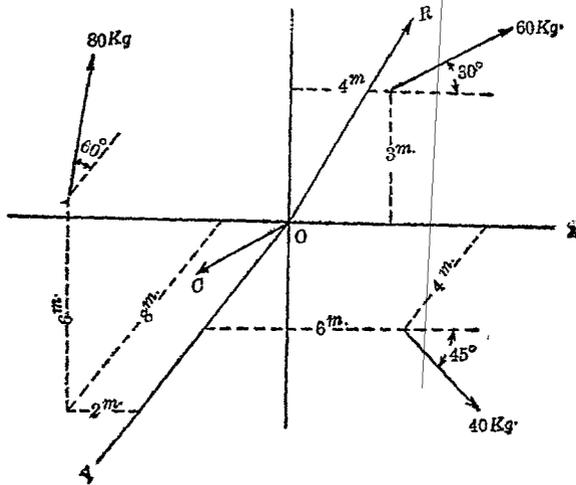
$$\begin{aligned} \text{即} \quad \Sigma F_x &= 0, & \Sigma F_y &= 0, & \Sigma F_z &= 0 \\ \Sigma M_x &= 0, & \Sigma M_y &= 0, & \Sigma M_z &= 0 \end{aligned}$$

**例** 試求第 79 圖所示力系之合力. 但 60 kg. 之力作用於  $xz$  面內與  $x$  軸成  $30^\circ$ , 40 kg. 之力作用於  $xy$  面內, 與  $x$  軸成  $45^\circ$ , 80 kg. 之力與  $yz$  面平行, 與  $xy$  面成  $60^\circ$ .

$$\text{解} \quad \Sigma F_x = 60 \cdot \cos 30^\circ + 40 \cdot \cos 45^\circ = 80.2$$

$$\Sigma F_y = 40 \cdot \cos 45^\circ - 80 \cdot \cos 60^\circ = -11.7$$

$$\Sigma F_z = 60 \cdot \sin 30^\circ + 80 \cdot \sin 60^\circ = 99.3$$



第 79 圖

$$\therefore R = \sqrt{(80.2)^2 + (11.7)^2 + (99.3)^2} = 128,$$

$$\theta_x = \cos^{-1} \frac{80.2}{128} = 51^\circ 12'$$

$$\theta_y = \cos^{-1} \frac{-11.7}{128} = 95^\circ 15'$$

$$\theta_z = \cos^{-1} \frac{99.3}{128} = 39^\circ 7'$$

$$\text{又 } \Sigma M_x = -6 \times 80 \cos 60^\circ - 8 \times 80 \sin 60^\circ = -794$$

$$\Sigma M_y = -2 \times 80 \sin 60^\circ - 3 \times 60 \cos 30^\circ + 4 \times 60 \sin 30^\circ = -174$$

$$\Sigma M_z = -2 \times 80 \cos 60^\circ - 6 \times 40 \sin 45^\circ + 4 \times 40 \cos 45^\circ = -137$$

$$\therefore C = \sqrt{(794)^2 + (174)^2 + (137)^2} = 824$$

$$\phi_x = \cos^{-1} \frac{-794}{824} = 164^\circ 30'$$

$$\phi_y = \cos^{-1} \frac{174}{844} = 102^\circ 12'$$

$$\phi_z = \cos^{-1} \frac{137}{824} = 99^\circ 34'$$

33. 關於空間非合交非平行力系之力勢原理 由前節所論,空間非合交非平行力系中各力,皆各等於通過原點之一力,及一偶力,故該力系中各力對於空間任意一軸之力勢各等於通過原點一力對於該軸之力勢及偶力力勢之和.因之力系中諸力各對於該軸力勢之代數和,等於通過原點諸力對於該軸力勢之代數和與諸偶力力勢和之總和.由第26節之證明,則通過原點諸力對於該軸力勢之代數和等於其通過原點合力對於該軸之力勢.此力勢與諸偶力力勢之和即為原有力系合力對於該軸之力勢.故力勢原理對於此力系仍可成立.

### 習 題 3.

1. 下述各力相交於原點,試求其合力,但  $F$  示力之大小,  $x, y, z$  示其作用線上另一點之座標

(i)	$F$	10kg.	20kg.	15kg.	
	$x, y, z$	1, 2, 1	2, 2, 3	3, 1, 2	
(ii)	$F$	100kg.	150kg.	50kg.	200kg.
	$x, y, z$	2, 2, 1	3, 2, -2	-4, -3, -5	3, -2, -4

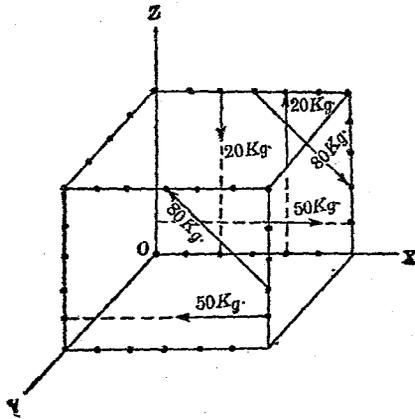
2. 一水平矩形板,上有三重量,其大小及位置如下.10kg. 在於(30cm., 40cm.)之點;20kg. 在於(10cm., 50cm.)之點; 50 kg. 在於(20cm.,10cm.)之點;試求其合力及其位置.

3. 水平正三角板  $ABC$ , 每邊長5m,  $AB, BC, CA$  三邊中點各有 30,40,90kg. 之三重量.求其合力之大小及其位置.

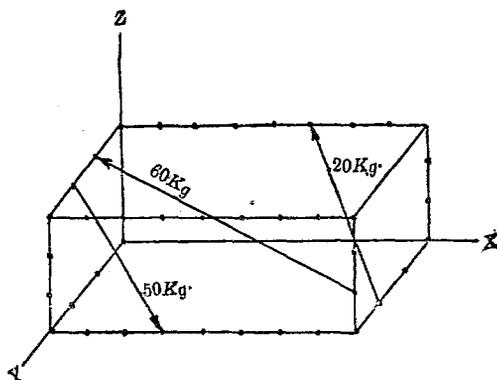
4 求下列平行力系之合力,各力均與  $z$  軸平行.但  $x, y$  示各力作用線與  $xy$  面交點之座標,其單位為 cm.

$F$	20kg.	10kg.	25kg.	-30kg.	-25kg.
$x, y$	1, 3	3, 2	6, 6	2, 5	6, 4

5. 試將第80圖中各偶力合成一偶力,以向線表示之.圖中每格表示 1cm.

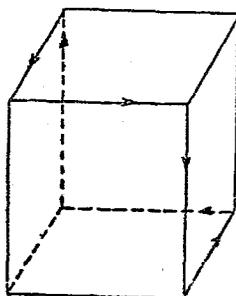


第 80 圖



第 81 圖

6. 試求第 81 圖所示之空間力系之合力,但每格示 1cm.
7. 試求第 6 題力系對於  $z$  軸之力勢
8. 第 82 圖中之立方體,每邊長  $a$ ,圖示諸邊上各有相等力  $F$  之作用,其作用線與邊相一致,試求其合力.



第 82 圖

34. 分布力 上述各節中諸力系之力,其作用於物體上之部分,均假定集中於一點,但實際上力之作用於物體部分或為面積,或為體積,且如細長之線受重力作用時力之作用

部分可視為一線，即分布力有下之三種：

- (1) 分布於線上之力。
- (2) 分布於面積上之力。
- (3) 分布於體積上之力。

為簡單計，以下所討論者，(1)中就分布於直線上之分布力言之，(2)中就分布於平面上之分布力言之。

前述各節雖就集中力論之，但均可應用之於分布力，蓋分布力可以通過其適當中心之集中力代替之故也(第3節)。

分布力可分成數多之小部分力，相互平行，即可視為數多之空間平行力系也。

分布於面積上之力對於面積各部之分布，一般因面積上各點之位置而異。某點附近極小面積內，其分布略可視為均勻，該極小面積上之全力設為 $dP$ ，其面積設為 $dA$ ，則 $\frac{dP}{dA}$ 稱為該點上力之強(Intensity)，設某點上力之強為 $p$ ，則

$$p = \frac{dP}{dA}$$

若力之分布對於全面積為均勻，即為勻布力，則全面積各點上力之強相等，即

$$p = \frac{P}{A}$$

但 $P$ 為受力部分面積上所受之全力， $A$ 為受力部之全面積。同樣若力 $P$ 分布於體積 $V$ 全部時，則某點上力之強為

$$p = \frac{dP}{dV}$$

若為勻布力時,則

$$p = \frac{P}{V}$$

若力  $P$  分布於線上時,則某點上力之強為

$$p = \frac{dP}{dL}$$

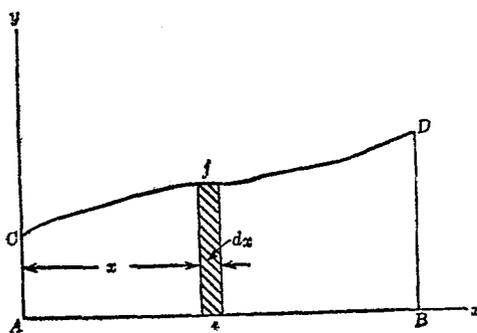
若為勻布力時,則

$$p = \frac{P}{L}$$

力之強之單位為單位體積之力,或單位面積之力,或單位長度之力。通常以公斤每立方公分( $\text{kg./cm.}^3$ ), 公斤每平方公分( $\text{kg./cm.}^2$ ), 磅每平方吋 ( $\text{lb./sq.in.}$ ), 公斤每公分 ( $\text{kg./cm.}$ ) 等表之。

### 85. 分布力之合力 (I) 沿直線上之分布力 第 88 圖中

設力與直線  $AB$  成直交分布狀況如  $CD$  曲線所示。任意一點  $e$  上力之強  $p$  為  $ef$ , 取  $x$ ,  $y$  軸, 如圖所示。 $e$  點附近  $dx$  長度上之力為  $pdx$ ,  $AB$  線上全部之分布力可視為數多



第 88 圖

極小之平行力  $pdr$  之合成其合力  $R$  爲

$$R = \int p dx$$

$R$  之作用線離  $A$  點之距離設爲  $x_r$  則

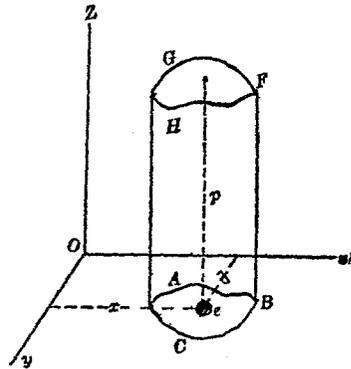
$$R x_r = \int p x dx$$

$$\therefore x_r = \frac{\int p x dx}{\int p dx}$$

若  $p = \phi(x)$  爲已知時，則上之積分易於求得否則將  $AB$  線分成數多小部分，各部分上之力視爲多數平行力依第17節第二法合成之。此方法雖爲近似法，但工程上可充分適用。苟作圖作正確之縮尺，則  $ACDB$  之面積，即表示合力之大小。

(II) 沿平面上之分布力 設第84圖上方與平面  $ABC$  成直交而分布於其全面積上。其分布狀況隨面之各部分而異。如曲面  $FGH$  所示。 $e$  點附近極小面積  $dA$  上力之強設爲  $p$ ，則  $p$  可以面  $ABC$  及  $FGH$  間直交距離表示之。

平面  $ABC$  上之分布力可視爲數多空間平行力系  $p dA$  之合成，故合力  $R$  爲



第 84 圖

$$R = \int p dA$$

合力作用線離  $x, y$  軸之距離, 設為  $x_r, y_r$ , 則

$$x_r = \frac{\int p x dA}{\int p dA}, \quad y_r = \frac{\int p y dA}{\int p dA}$$

若  $p = \phi(x, y)$  為已知時, 則  $R, x_r, y_r$  易於求得. 否則將  $ABC$  面積分成數多小部分, 各部分上之力視為空間平行力系, 依第 25 節方法求之. 若作圖用正確之縮尺, 則柱體  $ABCFGH$  之體積即示合力  $R$  之大小.

(III) 作用於體積上之分布力 取  $x, y, z$  三直交軸, 假定分布力平行於  $z$  軸而作用. 任意一點  $(x, y, z)$  上力之強設為  $p$ , 則該點附近小體積  $dV$  上所作用之全力為  $p dV$ , 體積全部之合力  $R$  為

$$R = \int p dV$$

合力作用線上任意一點之座標  $x_r, y_r$  為

$$x_r = \frac{\int p x dV}{\int p dV}$$

$$y_r = \frac{\int p y dV}{\int p dV}$$

若  $p = \phi(x, y, z)$  為已知時, 可求其積分. 否則分成數多小體積

將各部之力視為空間平行力系而合成之。

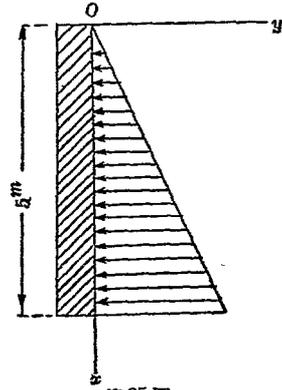
例1. 第85圖所示堤岸面受水之壓力。該堤岸長30m, 受水壓部之高為5m; 求其面上所受之全壓力, 并其合力所通過之中心。

解 先就長1m之堤岸論之。取原點 $O$ 於堤頂,  $x$ 軸於垂直方向,  $y$ 軸於水平方向, 即將普通位置於時針方向旋轉 $90^\circ$ 者。因1立方公尺之水重為1000kg, 故

$$p = 1000x$$

$$\begin{aligned} R &= 30 \times \int_0^5 p dx = 30 \times 1000 \int_0^5 x dx \\ &= 30 \times 1000 \times \frac{25}{2} = 375000 \text{kg.} \end{aligned}$$

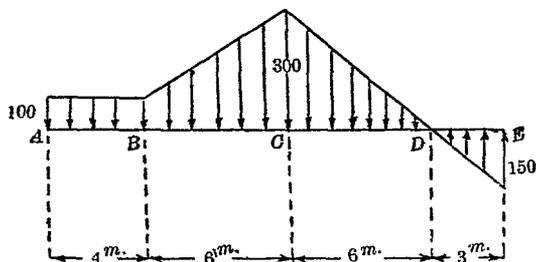
$$x_c = \frac{30 \times 1000x \int_0^5 x^2 dx}{375000} = \frac{1000 \times \frac{125}{3} \times 30}{375000} = \frac{1250}{375} = 3.3 \text{m.}$$



第85圖

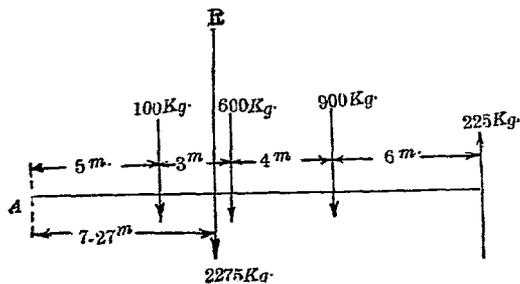
例2. 第86圖 $AB$ 直線上受分布力, 其強在 $A, B, C, D, E$ 各點上各為100, 100, 300, 0,  $-150$ kg./m, 求其合力。

解  $AB$ 間受勻布力, 其強為100kg./m.  $BC$ 間可分成勻布力與勻變力 (Uniformly varying force) 二部。勻布力之強亦為100kg./m., 故 $AC$ 間勻布力之合力為1000kg, 其作用點在於 $A$ 之左側5m.處。 $BC$ 間勻變力之合力為600kg, 其作用點在 $A$ 之



第 86 圖

左側 5m 處。DC 間勻變力之合力為 900kg，其作用點在 A 之左側 12m，DE 間之勻變力合力為 225kg，其作用點在 A 之左側 18m，以上四個合力之作用可簡單之第 87 圖故得



第 87 圖

$$R = 1000 + 600 + 900 - 225 = 2275 \text{ kg.}$$

$$\begin{aligned} R \cdot x_r &= 1000 \times 5 + 600 \times 8 + 900 \times 12 - 225 \times 18 \\ &= 16550 \text{ kg. m.} \end{aligned}$$

$$\therefore x_r = 7.27 \text{ m.}$$

例 3. 第 88 圖所示矩形平面上受分布力，任意一點上之驗依下式變化。

$$p = 8xy^2$$

求合力及其所通過之中心。

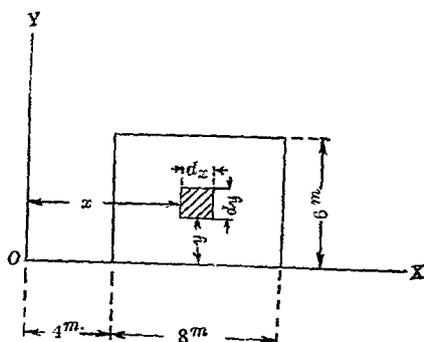
解 取極小面積  $dA$ ,

則  $dA = dx dy$

$$R = \iint p dx dy$$

$$R x_r = \iint p x dx dy$$

$$R y_r = \iint p y dx dy$$



第 88 圖

由此二重積分可得合力及其中心之位置。

36. 重力 地球引力作用於物體上時,其力分布於物體體積之全部。作用於物體各部質點上之力可視其為相互平行

設物體中任意一點上單位體積之重量為  $w$ , 全重量為  $W$ ,  $x_1, y_1$  為其全重量合力作用線上任意一點之座標, 則

$$W = \int w dV, \quad x_1 = \frac{\int w x dV}{\int w dV}, \quad y_1 = \frac{\int w y dV}{\int w dV}$$

若物質為勻質 (Homogeneous), 則  $w$  為常數。物體全體積設為  $V$ , 則上之方程式變為

$$W = wV, \quad x_1 = \frac{\int x dV}{V}, \quad y_1 = \frac{\int y dV}{V}$$

習 題 4.

1. 直線  $AB$  上之分布力,其強度對於自  $A$  點距離  $x$  之變化如下式所示.求其合力及其作用線

$$p = 10x - \frac{x^2}{2}$$

2. 分布於  $4m$ .之直線之分布力,其強度對於自一端距離  $x$  之變化如下式所示.試求其合力及其作用線.

$$p = 5 \sin x$$

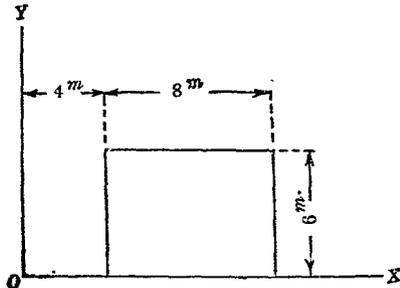
3. 分布於  $10m$ .之直線上之分布力,其強度對於自一端距離  $x$  之變化如下式所示.試求其合力及其作用線.

$$p = 80\sqrt{x}$$

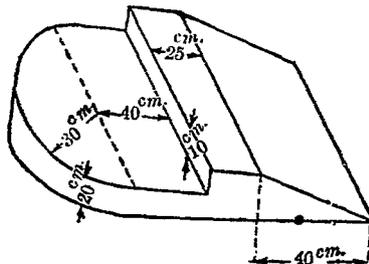
4. 第89圖所示矩形平面上之分布力,其任意一點上之強度依下式變化.試求其合力及其合力所作用之中心之座標.

$$p = 10x^{\frac{3}{2}}$$

5. 茲有勻質物體如第90圖所示,每立方公尺重  $8500kg$ ,求其重力及其作用線.



第89圖



第90圖

### 第三章 力之平衡

37. 概說 前章所述者乃求各種力系合力之圖解法及代數解法,本章所述者乃各種力系合力等於零,即諸力相平衡時之圖解條件及代數條件.凡相平衡之力系作用於物體上時,該物體或靜止,或為等速度運動.

相平衡之力系中之諸力所須滿足之獨立條件方程式,稱曰平衡方程式 (Equations of equilibrium). 又圖解法上此諸力所須滿足之作圖,稱曰平衡圖 (Equilibrium diagrams) 或平衡多邊形 (Equilibrium polygons).

數多建築物或構造物上所受外力均在於平衡狀態.如橋樑,屋構 (Roof-truss), 起重機 (Crane) 等是也.此時力系中常有數個之力,其大小,或方向,等元 (Elements) 為未知.若未知元或未知量之數不大於平衡方程式之個數,則此未知元可由此等方程式求之.此種力系稱靜力學上確定力系 (Statically determinate force-system). 若力系中未知量之數大於平衡方程式之個數,則此力系稱靜力學上不定力系 (Statically indeterminate force-system). 例如支於三點之水平樑 (Horizontal beam) 受垂直

荷重(Load)時,由第20節所述其平衡方程式共有二個.但三支點上之未知力,共有三個之未知元,故此力系為靜力學上不定力系.

38. 平衡之圖解條件 由第二章所述,則同平面上各種力系之合力或為一力,或為一偶力.再由第16,17,18諸節,則對於同平面上平衡力系,其第一條件須合力 $R=0$ ,即示力多邊形必須閉合.但此為必要條件(Necessary condition).因 $R=0$ 時力系之合力未必為零,或亦可成為偶力.若力系合力為偶力時,則索邊形之第一與最後二邊相互平行,而非疊合.故對於平衡力系,其第二條件為索邊形之第一與最後二邊必相疊合,即索邊形亦須閉合.因之對於同平面上平衡力系之必要兼充分之條件(Necessary and sufficient condition)如下:

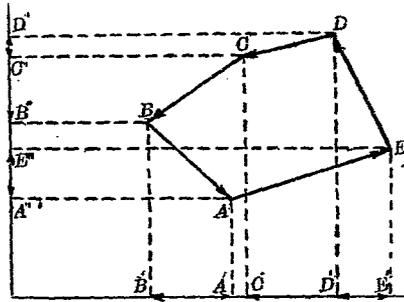
(1)示力多邊形須閉合 若此條件滿足時,則合力不成一力.

(2)索邊形同時亦須閉合 若此條件滿足時,則合力不成偶力.

由第24,25,32諸節則諸種異平面力系之合力,乃將諸力投射於任意直交二座標面,於各面上作各射影之示力多邊形與索邊形而求得之.故異平面力系之平衡條件為任意二直交平面上射影之示力多邊形與索邊形皆須同時閉合.

39. 平衡之代數條件 由前節所述,一般力系之平衡條件為示力多邊形及索邊形須同時閉合.若示力多邊形閉合

時，則各力沿任意一直線上之射影示必閉合，即各力沿任意一直線上分力之代數和為零，如第91圖所示。若索邊形閉合時，則索邊形之第一邊與最後一邊須在同一直線上。此二邊上之二力可代替全部力系，今在同一直線且相等反向，故此二力對於任意一軸（在同平面時對於



第91圖

任意一點)之力勢代數和必為零。但此二力力勢之代數和，即等於力系中各力對於該軸力勢之代數和，故索邊形閉合時，即力系中各力對於任意一軸力勢之代數和必為零。因之平衡力系之代數條件如下：

(1) 沿任意一直線上各分力之代數和須為零。

(2) 對於任意一軸，各力力勢之代數和須同時為零。

由此二條件則可寫出無限個方程式，蓋對於空間任何一直線及任何一力勢軸皆可寫出一方程式也。但此等方程式非盡相獨立，相互獨立之平衡條件方程式之數因各種力系而不同，分述於以後各節，但對於一種力系之獨立方程式須為必要而兼充分者也。

平衡力系中諸力，若有未知力時，則其未知元如力之大小，方向等可自平衡條件獨立方程式求得之。若此未知元之

數等於獨立方程式之個數，則用此全部方程式可決定各未知元。若未知元之數小於獨立方程式之個數，則僅用獨立方程式中之一部分可決定各未知元。平衡方程式須選取適當之直線及力勢軸以使該方程式成爲簡單之形。作成方程式之前，須徹底明瞭物體上全部外力之作用狀況。故須先繪出分離體圖附以各外力，而後由平衡條件寫出各獨立方程式以解各未知元。

### 同直線力系

40. 同直線上力系之平衡方程式 平衡之獨立條件僅有一個，

$$\text{即 } \Sigma F = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{或 } \Sigma M_A = 0 \dots\dots\dots(2)$$

但  $A$  爲該直線外任意一點

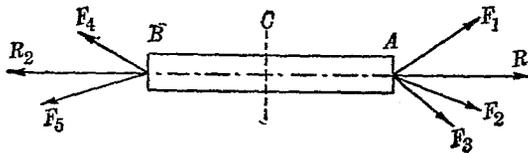
證 若一直線上諸力非平衡時，則其合力  $R = \Sigma F$ ，故若諸力滿足於  $\Sigma F = 0$  之方程式時，則合力必爲零，即諸力相互平衡。

又若諸力滿足於方程式  $\Sigma M_A = 0$  時，則合力  $R$  必通過  $A$  點。因合力  $R$  必在力之作用線上，故不能通過  $A$  點，因之  $R = 0$ ，故力系相互平衡。

(1), (2) 兩式任何一者滿足時，力系即可平衡。故獨立方程式爲 (1), (2) 中之一者。且 (1) 式滿足時，(2) 式必同時成立，(2) 式滿足時，(1) 式亦可同時成立也。故 (1), (2) 兩式中僅一者爲獨立

條件也,因之未知力之元僅得有一個,若有一個以上即為不定。

例 第92圖中  $AB$  棒兩端受  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5$  五力之作用而

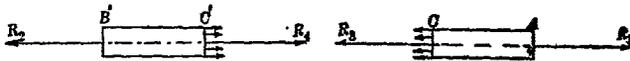


第 92 圖

相平衡,求棒內任意一橫斷面  $C$  上之內力 (Stress). 但棒之自重可略去之

解  $A$  點上之力  $F_1, F_2, F_3$ , 其合力設為  $R_1$ ,  $B$  點上之力  $F_4, F_5$  其合力設為  $R_2$ , 因  $AB$  棒在於平衡, 故  $R_1, R_2$  必在同一直線上且相等反向. 棒之  $A$  端對於  $R_1$  生反作用力, 與  $R_1$  相等反向, 同樣  $B$  端亦生反作用力與  $R_2$  相等反向, 圖示方向之  $R_1, R_2$  為拉力 (Pull, or Tension), 若其方向反逆時, 則成壓力 (Pressure, or Compression).

今設於任意橫斷面  $C$ , 假想  $AB$  棒分成  $AC$  及  $BC$  二部分各成一分離體圖論之如第93圖.  $AC$  分離體之  $A$  端受外力  $R_1$ , 因



第 93 圖

$AC$  亦為平衡, 故  $C$  端必有力之作用以與  $R_2$  相平衡  $C$  端斷面上之力當為分布於斷面積上之分布力, 此分布力, 作用於棒之內部斷面上, 故為內力 (Internal force, or Stress). 此分布力之

合力設為  $R_3$ ，作用於斷面積之中心，則  $R_3$  亦必與  $R_1$  為同直線，且相等反向者。同樣自  $BC$  分離體言之，則  $C$  端斷面之內力與  $R_2$  相平衡，其合力設為  $R_4$ ，則  $R_4$  亦必與  $R_2$  在同直線，且相等向者。

### 同平面合交力系

41. 同平面合交力系之平衡方程式 此力系之獨立平衡方程式有二個，可以下之三形表示之。

$$(A) \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \text{ (但 } x, y \text{ 爲該平面內任意二軸)} \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases}$$

$$(B) \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \text{ (但 } x \text{ 爲該平面內任意一軸, } A \text{ 爲該平面內不在 } y \text{ 軸上之任意一點)} \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases}$$

$$(C) \begin{cases} \Sigma M_A = 0 \text{ (但 } A, B \text{ 爲該平面內任意二點, 惟 } A, B \text{ 連結線不通過力之合交點)} \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases}$$

此三形中他二者可由其餘一者導得之，故 (A), (B), (C) 中任取一者爲獨立之平衡方程式。

(A)之證明 同平面合交力系之合力，由第16節所述，可由其  $x, y$  兩座標軸上之分力  $\Sigma F_x$  及  $\Sigma F_y$  得之。故若力系中諸力滿足於  $\Sigma F_x = 0$  之方程式時，則合力不能有  $x$  軸上之分力。又滿足於  $\Sigma F_y = 0$  之方程式時，該合力不能有  $y$  軸上之分力。故二方程式同時滿足時，該合力不能存在，即原有力系成爲平衡。因之 (A) 中  $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$  二方程式即爲同平面合交力系之獨立平衡方程式。

上之  $x, y$  軸爲任何二軸, 便利上通常取二直交軸對於  $x, y$  二軸,  $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$  可成立時, 則對於他任意軸  $u, \Sigma F_u$  亦必爲零, 故獨立方程式除 (A) 中二式以外已無存在。

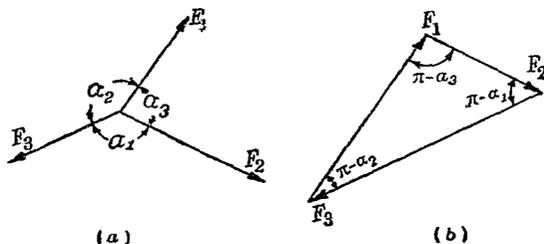
(B) 之證明 設  $x$  爲任意一直線, 若  $\Sigma F_x = 0$  能滿足時, 則合力沿  $x$  軸上無分力, 而分力惟能存在於  $y$  軸上。又若同時  $\Sigma M_A = 0$  能滿足時, 則合力必通過  $A$  點。今  $A$  不爲  $y$  軸上之點, 故此爲不可能。因之亦必  $\Sigma F_y = 0$ , 故 (B) 中二方程式即與 (A) 中二方程式爲同值 (Equivalent)。

(C) 之證明 因力系滿足於  $\Sigma M_A = 0$  及  $\Sigma M_B = 0$ , 故合力必通過  $A, B$  二點。但由假定  $A, B$  二點之連結線不通過諸力之合交點, 故此爲不可能。因之必  $R = 0$ , 即力系爲平衡。且由  $R = 0$ , 可得  $\Sigma F_x = 0, \Sigma F_y = 0$ , 故 (C) 之二方程式亦與 (A) 之二方程式爲同值。

綜上所述, 同平面合交力系之獨立平衡方程式僅有二個, 故未知力有二元以下時可完全決定。若二元以上, 則爲不定力系。

此力系平衡之圖解條件, 爲示力多邊形須閉合, 蓋閉合時其合力爲零。

42. 拉米定理 若同平面合交力系僅有三力時, 則平衡方程式可以拉米定理 (Lami's Theorem) 表示之。第 94 圖 (a) 中  $F_1, F_2, F_3$  爲同平面合交於一點之三力, 作示力多邊形如 (b) 圖。此時僅有三力之示力多邊形, 稱曰示力三角形 (Force triangle)。



第 94 圖

因合力為零，故示力多邊形閉合，其向線均依同一之旋轉方向即為時針方向，或同為反時針方向。因三角形各邊與其對角正弦成正比例，故有下之方程式：

$$\frac{F_1}{\sin(\pi - \alpha_1)} = \frac{F_2}{\sin(\pi - \alpha_2)} = \frac{F_3}{\sin(\pi - \alpha_3)},$$

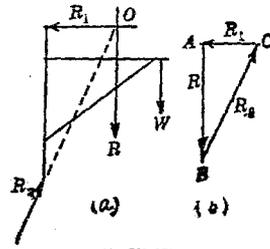
或

$$\frac{F_1}{\sin \alpha_1} = \frac{F_2}{\sin \alpha_2} = \frac{F_3}{\sin \alpha_3}.$$

故三合力相平衡時，則各力之大小與其餘二力作用線間夾角之正弦成正比例，此關係即稱為拉米定理。

**43 三力之平衡** 凡三力相平衡時，則此三力必同平面，且或同交於一點，或相互平行。蓋若此三力非互相平行，則其任何二力之合力必通過該二力之交點，而其餘一力必與該合力在同一直線上，且相等反向。故三力必同平面而相交於一點。若此三力相平行時，則任何二力之合力亦必與他一力在同一直線上，且相等反向，故亦必在同一平面上。此關係極為重要，蓋多數問題往往因此而得簡易之解。例如第 95 圖 (a) 中示一起重機，作用於該機上之外力，為荷重  $W$ ，起重機之

自重,頂端之反作用力  $R_1$  (假定其為水平),及底端之反作用力  $R_2$ ,其未知力為  $R_1$  之大小及  $R_2$  之大小與方向。其未知量雖有三元,但本例可導成三力之平衡力系,即將荷重與起重機自重合成為  $R$  力,則  $R$  力之大小方



第 95 圖

向及作用線均為已知,故  $R$  力與  $R_1$  及  $R_2$  二力相互平衡,因之三力必同交於一點  $O$ ,由此可知  $R_2$  之作用線必通過  $O$  點及起重機之底端而未知量僅為  $R_1$  及  $R_2$  之大小作示力三角形如 (b) 圖,先引  $\vec{AB}$  向量表示  $R$  力次由  $A, B$  二端引  $R_1, R_2$  作用線之平行線,相交於  $O$ ,則  $\vec{OA}$  示  $R_1$  力,  $\vec{OB}$  示  $R_2$  力。

由上所述,則三力相平衡時,苟知一力,及他一力之作用線,則其餘之未知元均可解得。

例 1. 第 96 圖之物體受圖示三力而平衡,求  $P$  力之大小及方向。

解 平衡方程式如下:

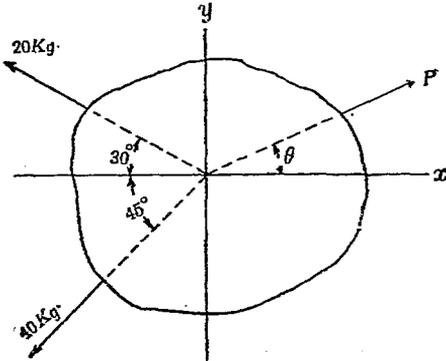
$$\Sigma F_x = P \cos \theta - 20 \cos 30^\circ - 40 \cos 45^\circ = 0$$

$$\therefore P \cos \theta = 17.32 + 28.28 = 45.60 \text{ kg} \dots \dots \dots (1)$$

$$\Sigma F_y = P \sin \theta + 20 \sin 30^\circ - 40 \sin 45^\circ = 0$$

$$\therefore P \sin \theta = 28.28 - 10 = 18.28 \text{ kg} \dots \dots \dots (2)$$

(2) 式以 (1) 式除之,得



第 96 圖

$$\tan \theta = \frac{18.28}{45.60} = 0.401$$

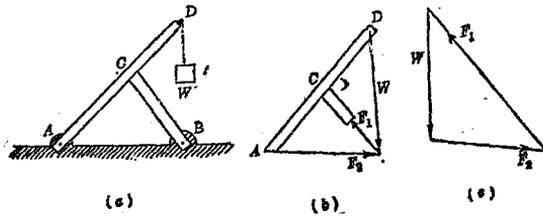
$$\therefore \theta = 21^{\circ}50'$$

(1),(2) 兩式各自乘相加得

$$P^2 = (45.6)^2 + (18.28)^2 = 2414.3$$

$$\therefore P = 49.1 \text{ kg.}$$

例 2. 第 97 圖 (a) 所示之架 端懸一荷重  $W$ , 支於  $A, B$  二點  
求  $A, B$  二支點上之反作用力.



第 97 圖

解 因  $BC$  僅其兩端受力, 故  $B$  平衡時, 其兩端外力必同

在於一直線上， $B$ 點反作用力  $F_1$  之方向必為  $BC$  線之方向。但  $ACD$  上三點受力，故  $A$  點反作用力之方向為未知。作  $ACD$  之分離體圖 (b)，因  $W, F_1, F_2$  三力相平衡，故必同交於一點。沿  $W$  及  $F_1$  之作用線求其交點，由此交點與  $A$  相連結，即為  $F_2$  之作用線。如是則三力作用線完全確定。再作示力三角形如 (c) 圖，得  $F_1$  及  $F_2$  二未知力之大小及指向。

注意 凡在平衡狀態之構造物中諸直線棒，以銷釘相接合時，若受力點僅二點，則其所受外力，或反作用均沿該直線方向，此棒稱曰二力材 (Two-force member)。若受力點有三點時，則所受外力必同交於一點，此棒稱曰三力材 (Three-force member)。受力點有四點以上時，則類推。本例中  $BC$  為二力材， $ACD$  為三力材。

44. 同平面合交力系平衡條件之應用 平衡條件之普通應用，乃用以解力學上諸重要問題，此等問題如下之形狀。

某物體受多數他物體之諸作用力而平衡時，其作用力中有數個力各為全部已知，有數個力或為一部分未知，或為全部未知。今須求諸未知力之諸未知量，即大小與方向。

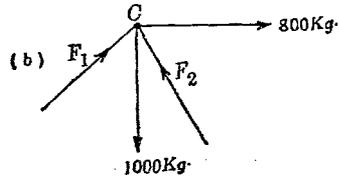
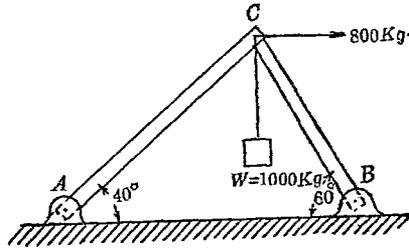
此種問題之解法，先作分離體圖。次應用適當之平衡條件於該分離體圖上諸外力，而決定未知量。

同平面合交力系之平衡條件方程式僅有二個 (第 41 節)，故問題中未知量若僅有二個，則可解之，若二個以上，則為不定且此有二個未知量之問題必不外乎下之二形。

(i) 力系中有二力為未知 二未知力之作用線為已知,其大小為未知,求二力之大小與指向 (Sense).

例 1. 第 98 圖 (a)

上  $AC, BC$  二棒各以銷釘 (Pin) 固定於地面, 且相互以銷釘接合於上端  $C$  點.  $C$  點上懸以重量  $W=1000\text{kg}$ . 同時加以水平拉力  $800\text{kg}$ . 求  $A, B$  二點之反作用力.



第 98 圖

解 (第一解.代數解法) 作  $C$  點之分離體圖如 (b) 圖. 因  $AC,$

$BC$  為二力材, 故  $F_1, F_2$  二力作用線各沿  $AC$  及  $BC$  之方向. 但其大小及指向為未知. 先假定  $F_1$  及  $F_2$  之指向如 (b) 圖所示 (倘假定指向與實際相反時, 則解答當有負號). 由平衡條件  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ , 得

$$\Sigma F_x = F_1 \cos 40^\circ - F_2 \cos 60^\circ + 800 = 0,$$

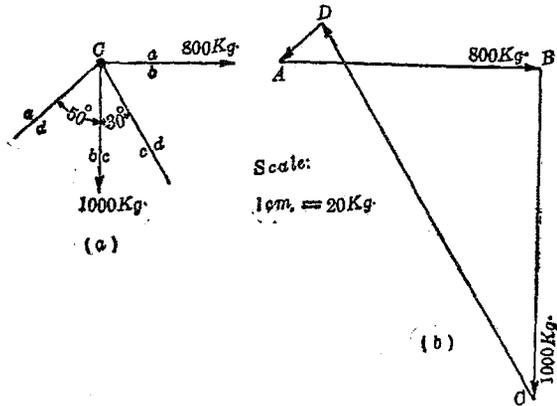
$$\Sigma F_y = F_1 \sin 40^\circ + F_2 \sin 60^\circ - 1,000 = 0$$

解之, 得  $F_1 = -196\text{kg}.$        $F_2 = 1300\text{kg}.$

故  $F_1$  之指向當與圖示所假定者相反.

(第二解, 圖解法) 先作第 99 圖 (a) 之分離體圖. 因  $ad, cd$  二

力指向未知,故未假定.但各力作用線皆為已知,因之以適當



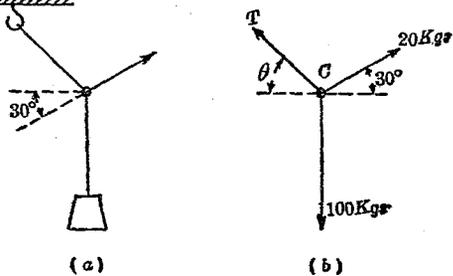
第 99 圖

縮尺可作示力圖如 (b).由圖量取  $\vec{CD}$  及  $\vec{DA}$  二未知力之大小,并推知其指向.得  $\vec{CD} = 1300\text{kg}$ ,  $\vec{DA} = 190\text{kg}$ .

(ii) 力系中僅有一力為未知,其大小及方向均為未知,須求出之.

例 2. 第 100 圖 (a) 中一重量  $W = 100\text{kg}$ . 懸於一環  $C$ , 此環以繩懸於屋頂, 并以 20 kg. 之力拉之, 此力自水平向上  $30^\circ$ , 求繩中拉力及繩之方向.

解 (第一解代數解法) 作  $C$  環之分離體圖如 (b). 由平衡



第 100 圖

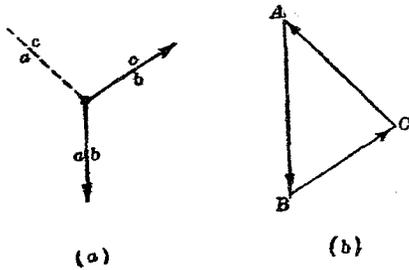
條件  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ , 得

$$\Sigma F_x = 20\cos 30^\circ - T\cos\theta = 0,$$

$$\Sigma F_y = -100 + 20\sin 30^\circ + T\sin\theta = 0,$$

解之得  $T = 91.6\text{Kg}$ .  $\theta = 79^\circ 10'$

(第二解, 圖解法) 作 C 環之分離體圖如第 101 圖 (a), 以適當縮尺作示力三角形如 (b) 圖. 量取  $\vec{CA}$  力之大小及方向即可.

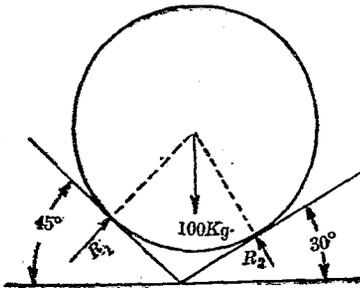


第 101 圖

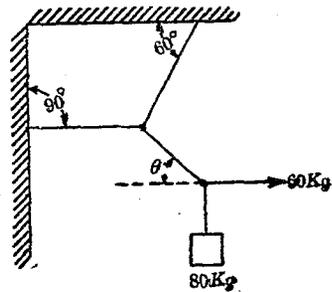
### 習 題 5.

1. 重 100kg. 之球置於二平滑斜面間如第 102 圖, 求斜面對於球上之反作用力.

2. 第 103 圖上一物體重 80kg. 以數繩懸之. 求各繩之拉力, 并求  $\theta$  角.



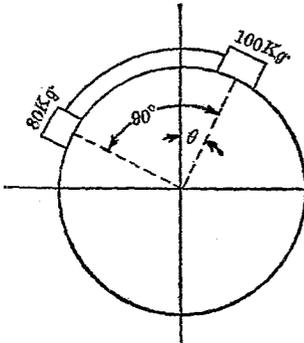
第 102 圖



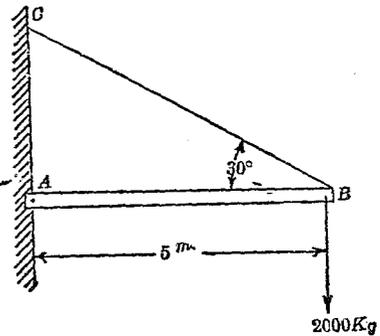
第 103 圖

3. 二物體重  $80\text{kg}$ . 及  $100\text{kg}$ . 靜止於平滑之圓柱體面上. 以繩連結之如第104圖, 求圓柱體對於二物體之反作用力及  $\theta$  角.

4. 第105圖上一水平桿以銷釘  $A$  固定於壁  $CA$  上, 他端  $B$  以  $CB$  繩繫於壁上  $C$  點, 該繩與水平成  $30^\circ$  角,  $B$  端懸一重  $2000\text{kg}$ . 之物體, 試求  $A$  端之反作用力及繩之拉力, 但桿及繩之重量均略去之.



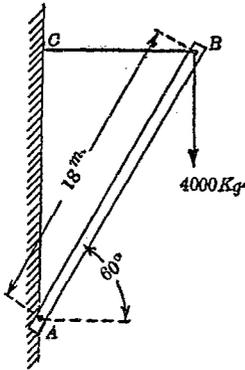
第 104 圖



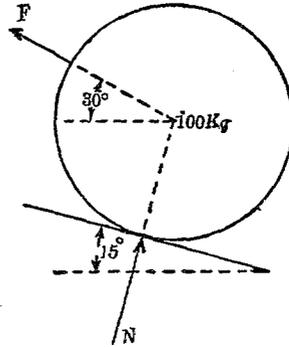
第 105 圖

5. 第106圖上  $AB$  桿長  $18\text{m}$ . 與水平成  $60^\circ$ , 以銷釘連接於壁上  $A$  點  $B$  端懸一重  $4000\text{kg}$ . 之物, 以水平索  $CB$  拉之. 求  $AB$  與  $CB$  之內力

6. 重  $100\text{kg}$ . 之輪靜止於  $15^\circ$  之斜面上如第107圖. 拉力  $F$  與水平成  $30^\circ$ , 使該輪平衡, 設反作用力  $N$  與斜面成直角, 求  $N$  及  $F$  二力.



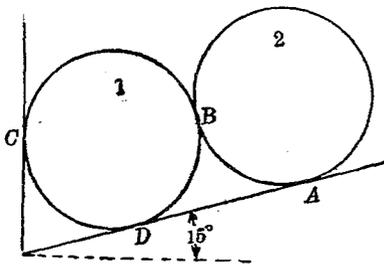
第 106 圖



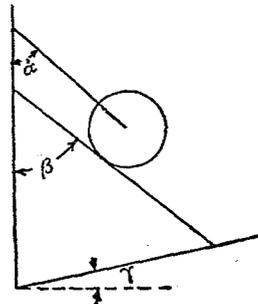
第 107 圖

7. 第108圖中二圓筒靜止於垂直面及斜面間, No.1 圓筒重 1600kg. No.2 圓筒重 1000kg., 求 A, B, C, D 四點上之反作用力

8. 一球重 200kg., 以繩懸之而靜止如第109圖  $\alpha, \beta, \gamma$  三角各為 25°, 40° 及 30°, 各接觸面皆平滑. 求球上所受反作用力及繩之拉力



第 108 圖

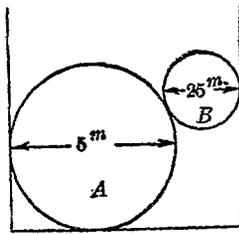


第 109 圖

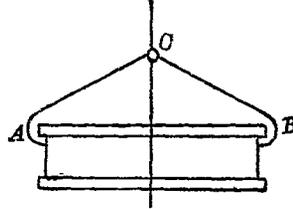
9. 第110圖上二圓筒靜止於一匣中, A 重 160kg., B 重 100kg. 該匣寬 6cm., 各接觸面均為平滑, 試求各接觸面上之反作

用力。

10. 第111圖中 $AC, BC$ 二鏈各長 $2\text{m}$ .,  $AB=3\text{m}$ ., 懸重 $2000\text{kg}$ ., 求各鏈之內力若各鏈之安全拉力(Safe pull)為 $3000\text{kg}$ ., 則 $AB$ 間最大距離若干。



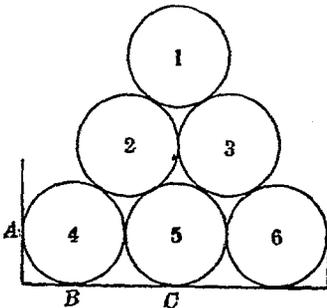
第 110 圖



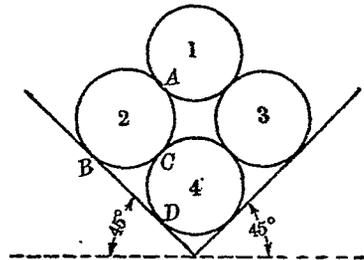
第 111 圖

11. 相等直徑之六個圓柱體疊成第112圖之形, 1,2,3圓柱各重 $800\text{kg}$ ., 4,5,6圓柱各重 $1000\text{kg}$ ., 求 $A, B, C$ 各點之反作用力。

12. 四個同大之圓柱體各重 $1000\text{kg}$ ., 疊成第113圖之形, 求 $A, B, C, D$ 各點之壓力。



第 112 圖

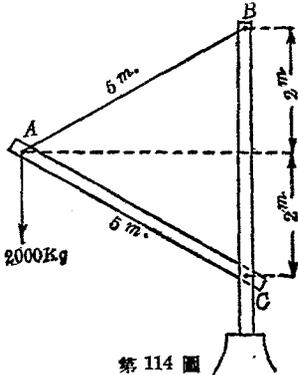


第 113 圖

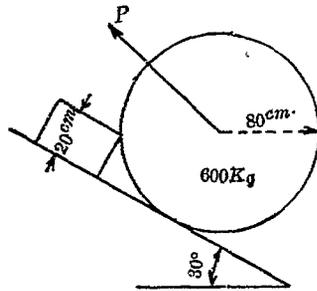
13. 簡單之起重機如第114圖, 其 $2000\text{kg}$ ., 重量可於通過

AC之垂直平面內迴轉,求AB之最大內力及AC之相應內力

14. 第115圖上之輪欲使開始輾(Roll)上於高20cm.之塊上,問拉力P至少幾何?

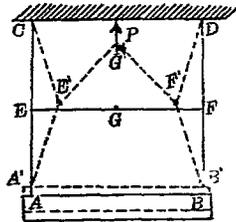


第114圖



第115圖

15. 第116圖中,AB棒重1,000kg.,以垂直繩AC及BD懸於屋頂,AC與BD中點E,F另以一繩連結之. AB=AC=BD=3m. EF中點G以垂直力P拉之向上,使繩移至點線位置,而AB向上移動. 問AB向上動10cm,時則支持其重量之P力之大小若何?



第116圖

同平面平行力系

45. 同平面平行力系之平衡方程式 同平面平行力系諸力滿足於下列(A)或(B)中之二方程式時,則力系在於平衡.

$$(A) \begin{cases} \sum F = 0 \\ \sum M_A = 0 \end{cases} \quad (\text{但 } A \text{ 爲平面內任意一點})$$

$$(B) \begin{cases} \Sigma M_A = 0 & (\text{但 } A, B \text{ 爲平面內任意二點, 惟 } A \text{ 與 } B \text{ 之} \\ \Sigma M_B = 0 & \text{連結線須不與諸力作用線相平行。}) \end{cases}$$

此(A),(B)二形中僅有一者爲獨立,他一者可由其餘一者導出之,即(A),(B)中任取一者爲獨立平衡方程式。

(A)之證明 同平面平行力系之合力或爲一力,或爲一偶力(第17節及第20節)。若爲一力,則該合力 $R$ 爲 $R = \Sigma F$ ,若爲一偶力,則該偶力 $C$ 爲 $C = \Sigma M$ ,故若 $\Sigma F = 0$ ,則合力不爲一力,若 $\Sigma M_A = 0$ ,則合力不爲一偶力。因之二方程式同時滿足時,則合力不爲一力,亦不爲偶力,即力系成爲平衡。由此知(A)之二式爲平行力系平衡上之必要兼充分之條件。

(B)之證明 若 $\Sigma M_A = 0$ ,則合力不爲一偶力而爲通過 $A$ 點之一力。若同時 $\Sigma M_B = 0$ ,即通過 $A$ 點之合力對於不在於其作用線上之 $B$ 點,其力勢爲零,故必合力爲零。

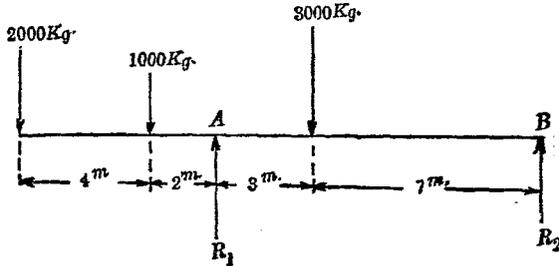
此力系平衡之圖解條件有二,即示力多邊形與索邊形須同時閉合。蓋若力示多邊形閉合時,合力不爲一力,若同時索邊形閉合時,則合力亦不爲偶力,故合力必等於零也。

46. 同平面平行力系平衡條件之應用 此力系之平衡條件有二個,故問題中未知力之未知量若在二個以下可決定之,若在二個以上則爲不定,且此未知力之未知量不外乎下之二種形式。

(1) 力系中有二個未知力 二未知力之作用線爲已知,僅其大小與指向爲未知,而須求得之者。此種問題最爲重要,尤

以其圖解法之應用最廣。

例1. 第117圖中示一水平樑，長16m，支於右端及自左端6m處。上載三平行垂直荷重，如圖所示。樑之自重可略去之。求二支點之反作用力。



第117圖

解 (第一解:代數解法) 分離體圖如第117圖所示。有二未知力，但其作用線已知，且指向可假定其向上，僅須求其大小。由平衡方程式  $\Sigma M_A = \Sigma M_B = 0$ ，各於  $R_1$  及  $R_2$  作用線上取  $A, B$  二點(使方程式中減少一個未知數)得

$$\Sigma M_A = 2000 \times 6 + 1000 \times 2 - 3000 \times 3 + R_2 \times 10 = 0$$

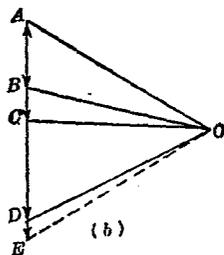
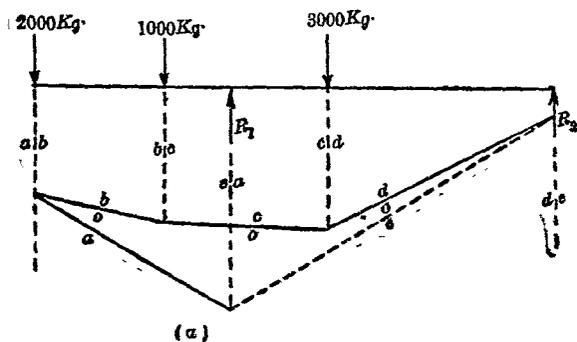
$$\Sigma M_B = 2000 \times 16 + 1000 \times 12 + 3000 \times 7 - R_1 \times 10 = 0$$

解之得  $R_1 = +6500\text{kg}$       $R_2 = -500\text{kg}$ 。

故  $R_2$  之指向與圖上所假定者相反，即向下作用。此可檢算之如下。

$$\Sigma F_y = -2000 - 1000 - 3000 + 6500 - 500 = 0$$

(第二解:圖解法) 圖解平衡條件爲示力多邊形與索邊形均須閉合.故作成閉合之示力多邊形及索邊形,即可決定未知力.作分離體圖如第118圖(a),由已知諸力先作示力多



第 118 圖

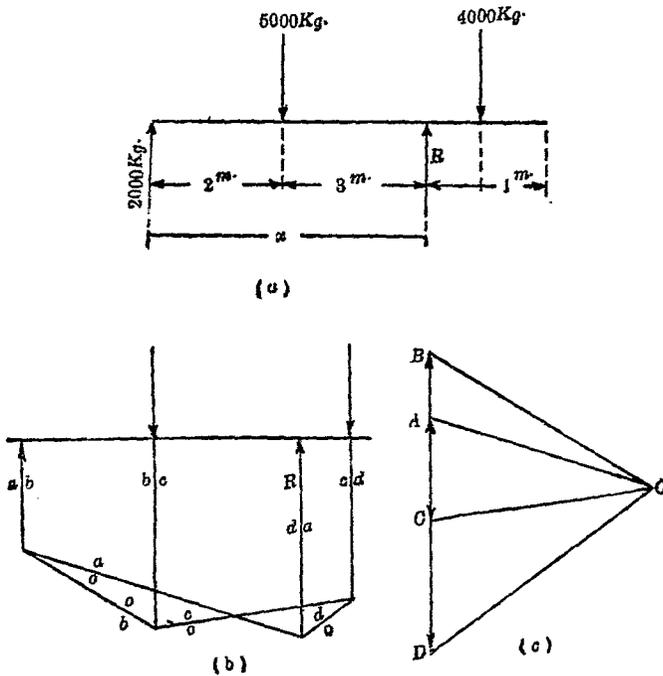
邊形之大部分未知力  $\overrightarrow{DE}$  ( $R_2$ ) 與  $\overrightarrow{EA}$  ( $R_1$ ) 使此多邊形閉合,須決定  $E$  點.取極點  $O$ ,連結  $OA, OB, OC, OD$  諸線.若射線  $OE$  已知後,則  $E$  點位置即可決定.此射線  $OE$  必與索邊形  $Oe$  邊相平行.自 (a) 圖中  $ab$  作用線上任意一點引  $oa \parallel OA, ob \parallel OB$ ,自  $ob$  與  $bc$  交



$OE \parallel oe$ , 得  $E$  點。故  $\vec{DE} = R_2$ ,  $\vec{EA} = R_1$ , 以縮尺量取即得其大小。

(ii) 力系中有一個未知力, 未知力之大小指向及其作用線均未知, 而須求出之者, 其未知量亦有二個, 即力之大小與作用線位置是也。

例 3. 第 120 圖 (a) 所示水平樑, 略去其自重, 求反作用力  $R$  及其作用線之位置。



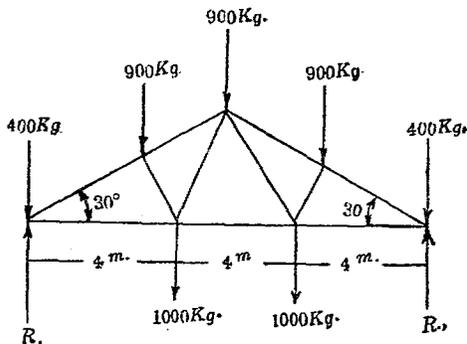
第 120 圖

解 作分離體圖如 120 圖 (b). 本題宛如求同平面平行力

系之合力,故方法亦相似,惟未知力之方向與合力相反耳.作示力圖如(c)圖,則  $R = \overrightarrow{DA}$ , 更作索邊形於(b)圖,由  $oz$ ,  $oa$  之交點引  $da \parallel DA$ , 即得  $R$  之作用線.

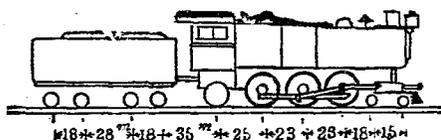
### 習 題 6.

1. 第121圖之屋構(Roof-truss)試求  $R_1, R_2$  二反作用力.



第121圖

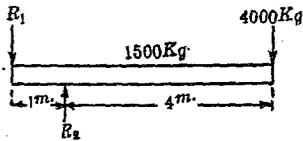
2. 第122圖所示之機關車各牽動輪(Driving wheel)上所受重量各為 7500 kg, 各後輪上所受重量為 1400 kg. 各前輪上所受重量為 1900 kg, 炭水車(Tender)之重量為 6900 kg, 試求轉台(Turn-table)邊至最前輪間之距離, 以使完全平衡. 但轉台直徑為 34 m.



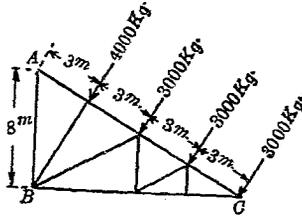
第122圖

3. 第123圖之水平樑，試求反作用力  $R_1$  及  $R_2$ 。

4. 試求第124圖中  $A, B$  二點上之反作用力。但  $A$  點反作用力之作用線為水平。



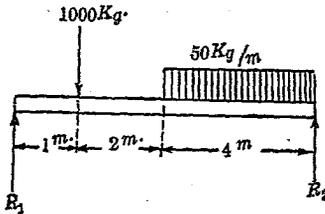
第123圖



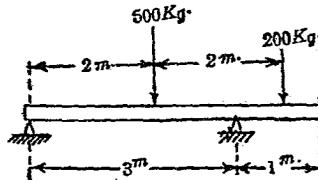
第124圖

5. 第125圖示水平之樑，支於兩端，受集中力  $1000\text{ kg}$ ，及分布力每公尺  $50\text{ kg}$ ，若樑之自重為  $400\text{ kg}$ ，試求  $R_1$  及  $R_2$ 。

6. 第126圖之樑每公尺重  $50\text{ kg}$ ，試求兩支點之反作用力。



第125圖

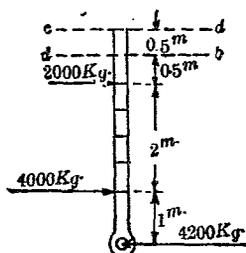


第126圖

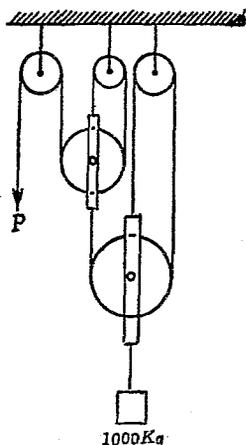
7. 第127圖之棒由  $ab, cd$  兩力得保平衡，求該二力之大小及指向。

8. 第128圖之滑輪列 (Series of pulleys) 上懸以  $1000\text{ kg}$  之

重量,以  $P$  力拉之. 求  $P$  力之大小及各繩中之內力. 但略去滑輪及繩之重量并軸之摩阻力.



第 127 圖

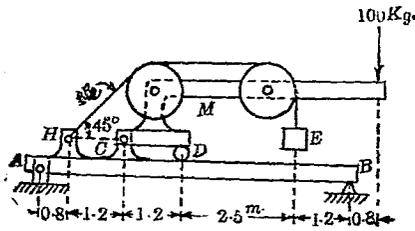


第 128 圖

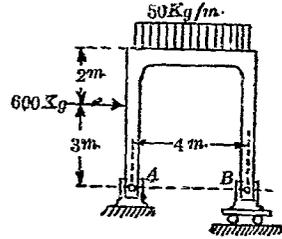
9. 長 3m. 之輕棒, 下端以直交於棒之水平銷釘附着於地板上, 上端支於平滑之垂直壁面. 棒與地板成  $50^\circ$  角. 棒上自下端 1m. 及 2m. 處, 各懸以 300 kg. 及 200 kg. 之荷重. 試求上下端之反作用力.

10. 第 129 圖之  $B$  重 300 kg. 求  $AB$  桿上  $A, B$  二點之反作用力, 及  $M$  桿上  $C, D$  二點之反作用力.

11. 第 130 圖之架構 (Frame) 上受水平力 600 kg. 及均勻布力 50 kg./m., 求  $B$  點之反作用力, 及  $A$  點上反作用力之水平與垂直分力.



第 129 圖



第 130 圖

同平面非合交非平行力系

47. 同平面非合交非平行力系之平衡方程式 此力系之獨立平衡方程式有三個,可以下之三形表之. 即

$$\begin{aligned}
 (A) \quad & \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \quad (\text{但 } A \text{ 爲該平面上任意一點}) \\ \Sigma M_A = 0 \end{cases} \\
 (B) \quad & \begin{cases} \Sigma F_x = 0 \\ \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \end{cases} \quad (\text{但 } A, B \text{ 爲該平面上任意二點, 惟 } AB \text{ 線不與 } y \text{ 軸平行}) \\
 (C) \quad & \begin{cases} \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma M_B = 0 \\ \Sigma M_C = 0 \end{cases} \quad (\text{但 } A, B, C \text{ 爲該平面內不同在一直線上之三點})
 \end{aligned}$$

(A), (B), (C) 中任意二者各可由其他一者導出之. 故三形中任取一形爲獨立平衡方程式.

(A) 之證明 同平面非合交非平行力系之合力或爲一

力,其 $x, y$ 軸上分力各為 $\Sigma F_x$ 與 $\Sigma F_y$ ,或為一偶力,其力勢為 $\Sigma M_A$ (第18節及第21節)若方程式 $\Sigma F_x=0$ 能滿足時,則合力苟為一力,必與 $y$ 軸平行.若 $\Sigma F_y=0$ 能滿足時,則合力苟為一力,必與 $x$ 軸平行.二方程式同時滿足時,則因一力不能同時平行於 $x$ 及 $y$ 兩軸,故合力不能為一力.若方程式 $\Sigma M_A=0$ 能滿足時,則合力不能為一偶力.故(A)中三方程式同時滿足時,合力為零,即力系為平衡.

(B)之證明 若方程式 $\Sigma F_x=0$ 能滿足時,則合力苟為一力必與 $y$ 軸平行,若 $\Sigma M_A=0$ 能滿足時,則合力不能為一偶力,而必通過 $A$ 點.若 $\Sigma M_B=0$ 能滿足時,則合力不能為一偶力而必通過 $B$ 點.今三方程式同時滿足時,則合力不為一偶力,而通過 $A, B$ 兩點,且同時與 $y$ 軸平行,但由假定 $AB$ 直線不與 $y$ 軸平行,故合力必等於零,否則為不可能.即力系亦必為平衡.

(C)之證明 若方程式 $\Sigma M_A=0$ 能滿足時,則合力不為一偶力,而必通過 $A$ 點.若 $\Sigma M_B=0$ 能滿足時,則合力不為一偶力而必通過 $B$ 點.若 $\Sigma M_C=0$ 能滿足時則合力不為一偶力而必通過 $C$ 點.故合力不為一偶力而必通過 $A, B, C$ 三點.但由假定 $A, B, C$ 三點不在一直線上,故合力必為零,即力系必為平衡.

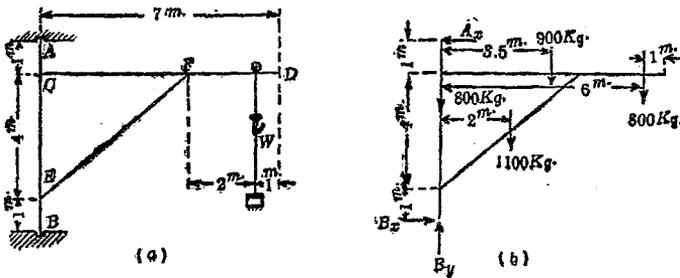
同平面非合交非平行力系平衡之圖解條件有二個,即示力多邊形及索邊形須同時閉合與同平面平行力系相同.

48. 同平面非合交非平行力系平衡條件之應用 因平

衡方程式有三個，故未知力之未知量有三個以下時可完全決定，若三個以上則為不定。

(i) 力系中有三個未知力 未知力之作用線皆為已知，其大小與指向為未知，須求之者。

例 1 第 131 圖 (a) 中示一起重機有垂直柱  $AB$  與水平桿  $CD$  及撐  $EF$ ，各自重為 800, 900 及 1100 kg。垂直柱下端入於地面凹孔中，上端入於屋頂一孔中。懸一重量  $W=8000$  kg，求  $A, B$  兩點之反作用力。



第 131 圖

解 (第一解: 代數解法) 作分離體圖如 (b) 圖，其外力均示於圖上。  $A$  點之反作用力，因屋頂無壓力，僅有水平力  $A_x$ ，其指向假定為向左。  $B$  點之反作用力必有垂直分力  $B_y$  及水平分力  $B_x$ ，其指向亦假定如圖所示，由平衡方程式  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ ，及對於  $B$  點之力勢  $\Sigma M_B = 0$  (因方程式中可除去  $B_x, B_y$  之未知量，故對於  $B$  點取力勢)，得

$$\Sigma M_B = (A_x \times 6) - (8000 \times 6) - (900 \times 3.5) - (1100 \times 2) = 0$$

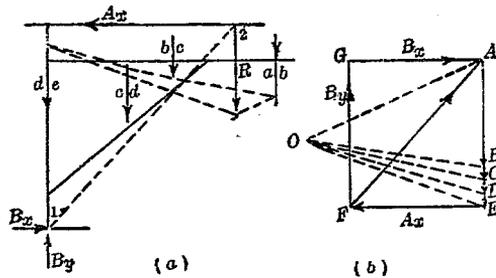
$$\therefore A_x = 8892 \text{ kg}$$

$$\text{又 } \Sigma F_x = B_x - 8892 = 0 \quad \therefore B_x = 8892 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = B_y - 800 - 1100 - 900 - 9000 = 0$$

$$\therefore B_y = 10800 \text{ kg.}$$

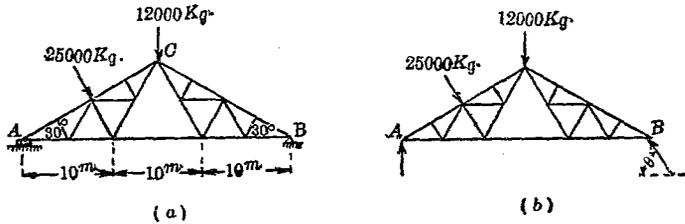
(第二解:圖解法) 第132圖中先將諸平行力合成一力  $R$ , 此  $R$  與  $A_x, B_x, B_y$  相平衡. 凡同平面非合交非平行之四力相平衡時, 則二力之合力必與他二力合力相平衡. 故  $B_x, B_y$  之合力必與  $R$  及  $A_x$  之合力相平衡. 此二合力必同直線, 即通過 1 與 2 兩點之直線上. 作示力三角形  $AEF$ , 得  $\vec{EF}$  力 ( $= A_x$ ) 及  $\vec{FA}$  力 ( $= B_x$  與  $B_y$  之合力). 又將  $\vec{FA}$  力分解為垂直及水平二分力, 得示力三角形  $AGF$ , 而  $\vec{FG} = B_y, \vec{GA} = B_x$ .



第132圖

(ii) 力系中有二個未知力 一個未知力之作用線為已知, 他個未知力, 僅知其作用線上一點, 而須求二個未知力之大小及一個未知力之方向.

例 2. 第 133 圖 (a) 所示之屋構 (Roof-truss) 受屋頂荷重 12000 kg. 及風壓 25000 kg., 左端 A 支於輾輦 (Rollers) 上, 可水平自由滑動. 右端 B 以銷釘固着. 求 A, B 兩點之反作用力.



第 133 圖

解 (第一解:代數解法) 作分離體圖如 (b) 圖, 附以外力. A 點上反作用力僅有垂直方向之力, 此因支於輾輦, 無水平方向之抵抗力. B 點上反作用力, 其作用線方向為未知, 僅知其通過 B 點. 今假定如圖之方向, 與水平成  $\theta$  角. 今用平衡方程式  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M_B = 0$ , 得

$$\Sigma M_B = (12000 \times 15) + (25000 \times 20 \cos 30^\circ) - (A \times 30) = 0,$$

$$\therefore A = 20433 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = 25000 \sin 30^\circ - B \cos \theta = 0$$

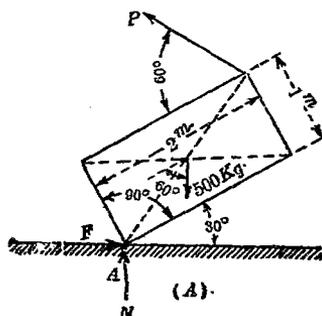
$$\Sigma F_y = B \sin \theta + 20433 - 12000 - 25000 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\therefore B = 18105 \text{ kg.} \quad \theta = 46^\circ 40'$$

(第二解:圖解法) 作分離體圖於 134 圖 (a), 再作 (b) 圖之示力圖. 引  $\vec{AB} \parallel ab$ ,  $\vec{BC} \parallel bc$ , 自 C 端引一力線平行於  $cd$ , 但因  $cd$  力之大小為未知, 故 D 點未能決定. 任意取一極點 O, 作射線 OA,



於圖示之位置. 求  $P$  力之大小及  $A$  點上平面與物體間之摩擦阻力與垂直壓力.



第 136 圖

解 設摩擦阻力為  $F$ , 垂直壓力為  $N$ , 其指向如圖所示. 由平衡條件  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma M_A = 0$ , 得

$$\Sigma M_A = P(1 \times \cos 60^\circ + 2 \times \sin 60^\circ) + 500 \cos 60^\circ \times 0.5$$

$$- 500 \sin 60^\circ \times 1 = 0,$$

$$\therefore P = 138 \text{ kg.}$$

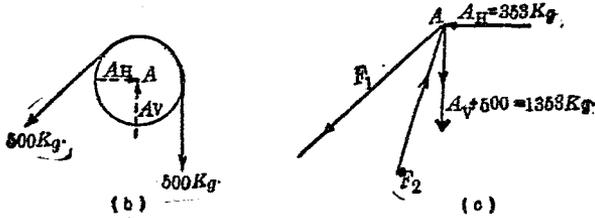
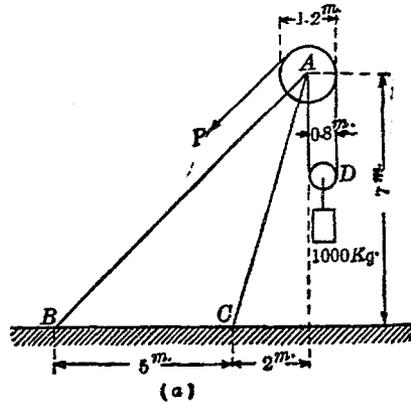
$$\Sigma F_x = F - 138 \cos 30^\circ$$

$$\therefore F = 119.5 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = N - 500 + 138 \sin 30^\circ$$

$$\therefore N = 431 \text{ kg.}$$

例 2. 第 137 圖 a) 中重 1000 kg. 之物體以繩及  $D$  輪懸於  $A$  輪繩端加以  $P$  力, 與  $AB$  成平行方向. 而使物體靜止. 求  $AB$  及  $AC$  之內力但假定輪軸上無摩擦阻力.



第 137 圖

解  $P$  力當等於 500 kg. 作用於  $A$  輪上之外力為繩上二個 500 kg. 之力, 及  $A$  點反作用力  $A_H, A_V$ , 如 (b) 圖所示.

$$\therefore A_H = 500 \cos 45^\circ = 353 \text{ kg.}$$

$$\therefore A_V = 500 + 500 \sin 45^\circ = 853 \text{ kg.}$$

次取  $A$  點為分離體, 作分離體圖如 (c) 圖, 并假定  $AB$  中內力為  $F_1$ ,  $AC$  中內力為  $F_2$ , 將各力分成水平 ( $H$ ) 與垂直 ( $V$ ) 各分力,

$$\text{則 } \Sigma H = F_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2 + 7^2}} - F_1 \cdot \cos 45^\circ - 353 = 0$$

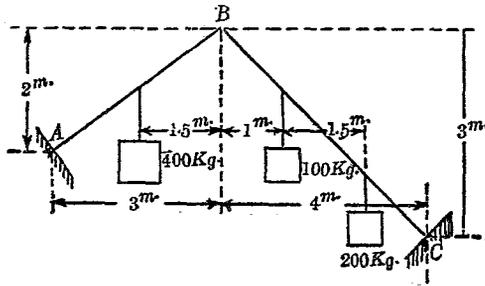
$$\Sigma V = F_2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2^2+7^2}} - F_1 \cdot \sin 45^\circ - 1353 = 0$$

$$\therefore F_1 = 68 \text{ kg. (AB 中拉力)}$$

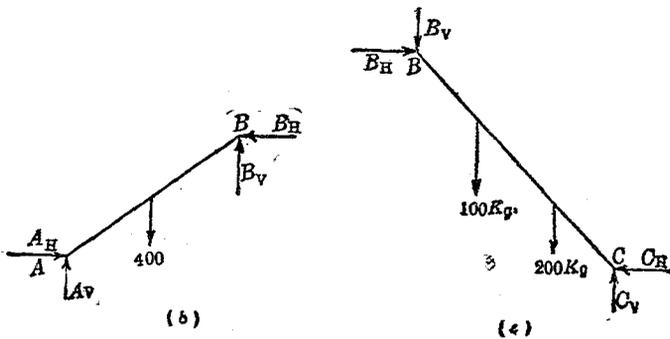
$$F_2 = 1458 \text{ kg. (AC 中壓力)}$$

因  $F_1$  與  $F_2$  皆為正,故 (c) 圖上所假定之方向無誤。

例 3. 第 138 圖 (a) 中所示  $AB$  與  $BC$  兩桿以銷釘接合於  $A, B, C$  三點. 懸以三荷重如圖所示. 試求  $A, B, C$  三點之水平與垂直分力。



(a)



第 138 圖

解 本問題若以  $ABC$  全體視為分離體時，則  $A, C$  二點上二個未知力之大小與方向均屬未知，有四個未知量，故不能決定之。但將  $AB$  與  $BC$  分別視為分離體而考慮之，則可決定。

先將  $AB$  視為分離體，如 (b) 圖。假定各未知力之指向如圖所示。次將  $BC$  亦視為分離體，各未知力指向假定如 (c) 圖。各分離體圖上均有四個未知力。但  $B$  點上二未知力，在 (b), (c) 二圖上其相應力各相等反向。因之全部共有六個未知力。二分離體圖上各有三個平衡方程式，共有六個平衡方程式，故可決定六個未知力。

先就 (b) 圖上，取  $A$  點為勢心，得

$$\Sigma M_A = 2B_H + 3B_V - 400 \times 1.5 = 0$$

次就 (c) 圖上，取  $C$  點為勢心，得

$$\Sigma M_C = 4B_V - 3B_H + 100 \times 3 + 200 \times 1.5 = 0$$

解上之二聯立方程式，得

$$B_V = 35 \text{ kg.} \quad B_H = 245 \text{ kg.}$$

因  $B_V$  與  $B_H$  皆為正，故圖中假定之指向無誤。

再就 (b) 圖，由  $\Sigma H = 0$  及  $\Sigma V = 0$ ，得

$$A_H = B_H = 245 \text{ kg.}$$

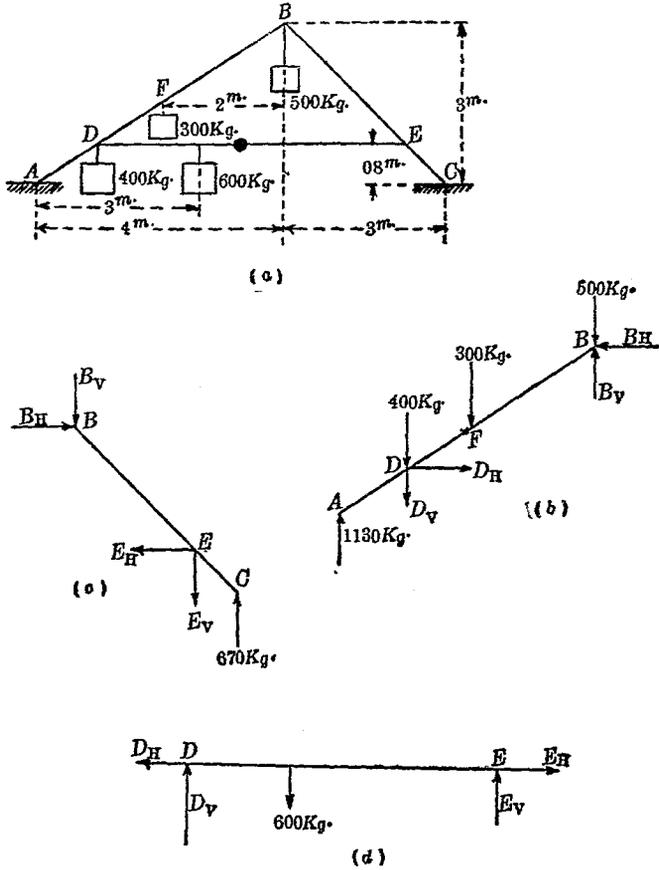
$$A_V = 400 - B_V = 365 \text{ kg.}$$

同樣由 (c) 圖，得

$$C_H = B_H = 245 \text{ kg.}$$

$$C_V = 100 + 200 + 35 = 335 \text{ kg.}$$

例4. 第139圖示 $AB, BC, DE$ 三桿, 以銷釘相連接於 $D, B, E$ 諸點, 而支於 $A, C$ 二點, 但 $A, C$ 二點上無摩擦力. 受圖示諸



第139圖

荷重時, 求 $A, C$ 二點上之反作用力, 及 $D, B, E$ 各點上作用力

之垂直及水平分力。

解  $A, C$  兩點間, 反作用力爲垂直。對於  $A$  點取力勢,

$$\Sigma M_A = 7C_V - 400 \times 0.8 \times \frac{4}{3} - 300 \times 2 - 600 \times 3 - 500 \times 4 = 0$$

$$\therefore C_V = 670 \text{ kg.}$$

因之  $A_V = 400 + 600 + 300 + 500 - 670 = 1130 \text{ kg.}$

次取  $AB$  爲分離體, 作分離體圖如 (b) 圖。對於  $D$  點取力勢如下。

$$\begin{aligned} \Sigma M_D = & \left(4 - 0.8 \times \frac{4}{3}\right) B_V + \left(3 - 0.8\right) B_H - 500 \times \left(4 - 0.8 \times \frac{4}{3}\right) \\ & - 300 \times \left(2 - 0.8 \times \frac{4}{3}\right) - 1130 \times 0.8 \times \frac{4}{3} = 0 \end{aligned}$$

但假定  $B, D$  兩點之荷重均作用於  $AB$  桿上。次取  $BC$  爲分離體, 作分離體圖如 (c) 圖。對於  $E$  點取力勢如下。

$$\Sigma M_E = (3 - 0.8) B_V - (3 - 0.8) B_H + 670 \times 0.8 = 0$$

解上兩式, 得

$$B_V = 475 \text{ kg.}$$

$$B_H = 719 \text{ kg.}$$

再由 (b) 圖,

$$\Sigma H = 0, \quad \Sigma V = 0, \quad \text{得}$$

$$DH = B_H = 719 \text{ kg.}$$

$$D_V = 1130 + 475 - 400 - 300 - 500 = 405 \text{ kg.}$$

同樣, 由 (c) 圖得

$$E_H = 719 \text{ kg.}$$

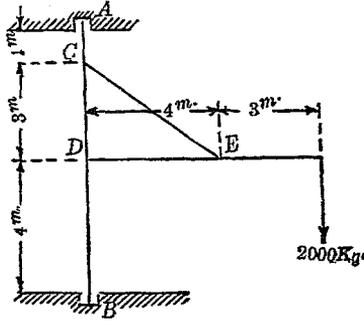
$$E_V = 670 - 475 = 195 \text{ kg.}$$

$AB$  桿上  $B$  點之垂直分力結果爲  $500 - 475 = 25 \text{ kg.}$   $D$  點之垂直分力爲

$$400 + 405 = 805 \text{ kg.}$$

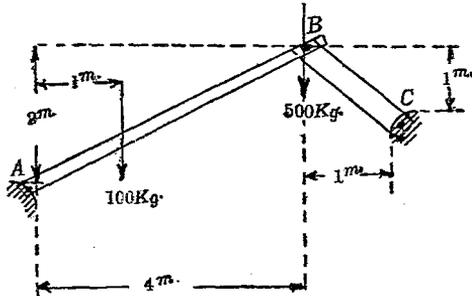


5. 第 143 圖上求  $A, B$  兩點之反作用力及  $C, D, E$  三點之力



第 143 圖

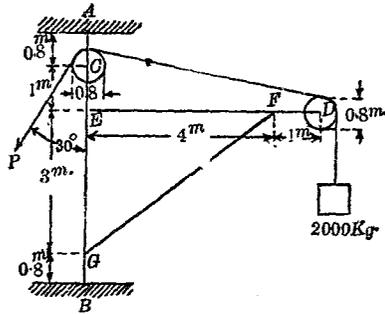
6. 第 144 圖上  $AB, BC$  二桿, 以銷釘連接於  $A, B, C$  三點, 求  $A, C$  二點之反作用力, 及  $B$  點上之力. 但  $AB$  重  $50 \text{ kg}$ ,  $BC$  重  $20 \text{ kg}$ .



第 144 圖

7. 第 145 圖上重  $2000 \text{ kg}$ . 之物體, 經  $D, C$  二輪, 以繩懸之, 并以  $P$  力拉之使成平衡. 求  $A, B$  二點之反作用力及  $E, F, G$

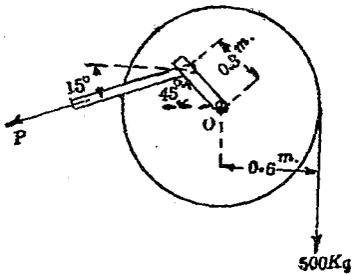
三點上之力，但略去各輪上之摩阻力及其自重。



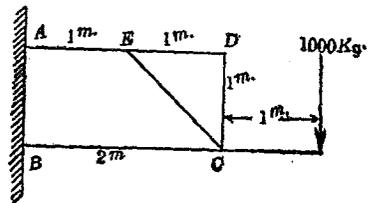
第 145 圖

8. 第 146 圖之輪上以繩懸一 500 kg. 之重物. 該輪支於 O 軸上, 輪之自重為 100 kg. 今以 P 力拉之, 使之靜止. 求 P 力及 O 點上之反作用力.

9. 第 147 圖之突樑架構(Gantilever frame). 求 A, B 二點之反作用力.



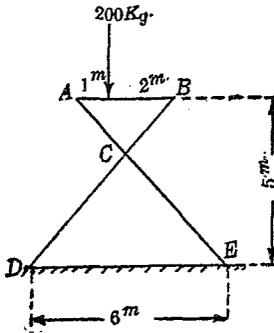
第 146 圖



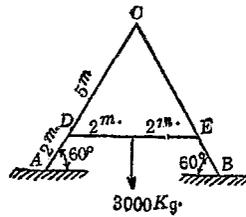
第 147 圖

10. 第 148 圖之架支於平滑地板  $DE$  上. 求  $D, E$  兩點之反作用力, 及  $A, B, C$  三點之力.

11. 第 149 圖之  $A$  形架構上,  $B$  端以銷釘固定於地板,  $A$  端支於平滑之地板上. 求  $A, B$  二點上之反作用力及  $C, D, E$  三點上垂直與水平分力. 但  $AC, BC, DE$  之自重, 每公尺重  $20 \text{ kg}$ .

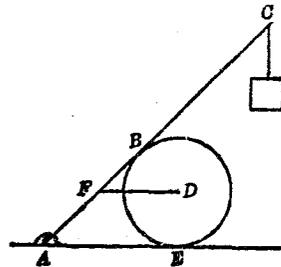


第 148 圖



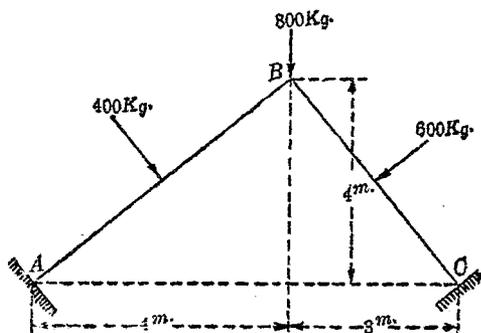
第 149 圖

12. 第 150 圖上  $AC$  棒長  $4 \text{ m}$ , 以銷釘固着於地板, 靜止於平滑圓筒面上  $B$  點, 該圓筒直徑  $1 \text{ m}$ , 其中心離  $A$  點  $2 \text{ m}$ , 以水平繩  $DE$  繫於棒上. 棒之  $C$  端懸以  $100 \text{ kg}$  之物. 求棒與圓筒間之壓力, 及圓筒與地板間之壓力, 并求繩內拉力及  $A$  點反作用力. 假定棒與圓筒無重量.



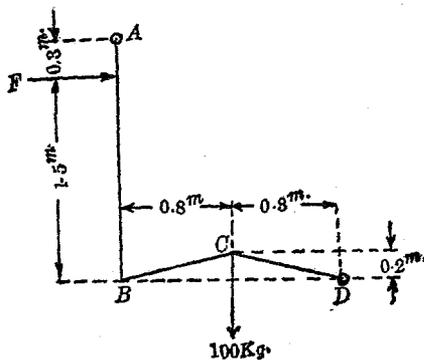
第 150 圖

13. 第 151 圖之  $AB$  與  $BC$  棒各以銷釘固着, 其中點各受 400 與 600 kg. 之直交荷重,  $B$  點上受 800 kg. 之垂直荷重, 求  $A, B, C$  三點上之水平與垂直分力.



第 151 圖

14. 第 152 圖中固定  $A, D$  兩端, 而以銷釘接合  $B, C$  兩點受水平力  $F$  及  $C$  點上之垂直力 100 kg., 求  $F$  力及  $A, D$  兩點上之垂直與水平分力, 并求  $BC$  與  $CD$  之內力.

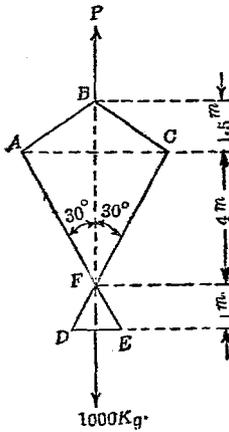


第 152 圖

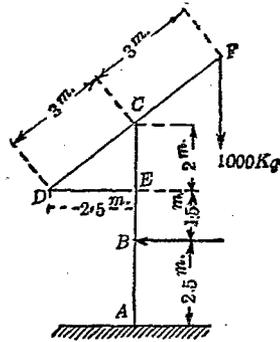
15. 第 153 圖中各棒均以銷釘接合之。DE 中點懸一荷重 1000 kg., B 點以垂直力 P 平衡之。求 AB, BC 之內力, 及 D, F, C 三點之水平與垂直分力。

16. 第 154 圖中之起重機支於 A 點, 另以 B 點上水平力保持其垂直位置。求 B 點上之水平力及 A 點上之反作用力。并問 DE 內力及 C 點上之力。

17. 第 154 圖中求 D 點上的鐵重 (Counter weight), 以使 B 點上之水平力為零。并求此時 A 點之反作用力與 DE 內力及 C 點之力。

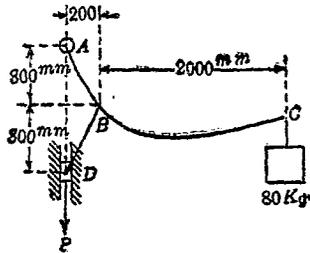


第 153 圖



第 154 圖

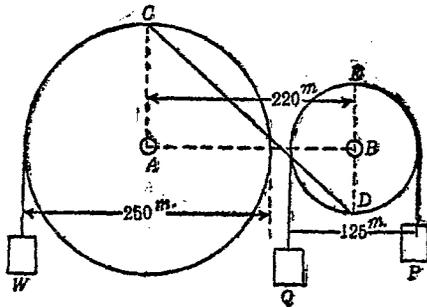
18. 第 155 圖 AC 桿固定於 A 點, D 點可垂直滑動。試求 P 力, 及 A, B, D 三點各水平與垂直分力。但略去各部之摩擦阻力。



第 155 圖

19. 第 156 圖中二輪支於軸  $A, B$  上, 以  $CD$  桿連結之. 懸以  $P, Q$  及  $W$  三重量而平衡之, 若  $P=500 \text{ kg}, Q=800 \text{ kg}$ . 求  $W$ , 但略去軸上之摩阻力. 并求  $CD$  內力及  $A$  與  $B$  軸上反作用力.

20. 第 156 圖中若  $CD$  桿取去, 而代以連結  $CB$  之桿,  $P=1000 \text{ kg}, K=400 \text{ kg}$ , 求  $W$ , 及  $CB$  內力與  $A, B$  上反作用力.



第 156 圖

### 空間合交力系

50. 空間合交力系之平衡方程式 空間合交力系之獨立條件, 平衡方程式有三個. 即

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma F_y = 0, \quad \Sigma F_z = 0$$

$x, y, z$  可為異平面上之任何合交於一點之三直線，但通常即為直交三座標軸。

證 空間合交力系之合力為一力。若  $\Sigma F_x = 0$  能滿足時，則合力必在於  $yz$  平面內。若  $\Sigma F_y = 0$  同時能滿足時，則合力必在於  $z$  軸上。若又同時  $\Sigma F_z = 0$  能滿足時，則合力不能存在，必等於零，即力系為平衡。

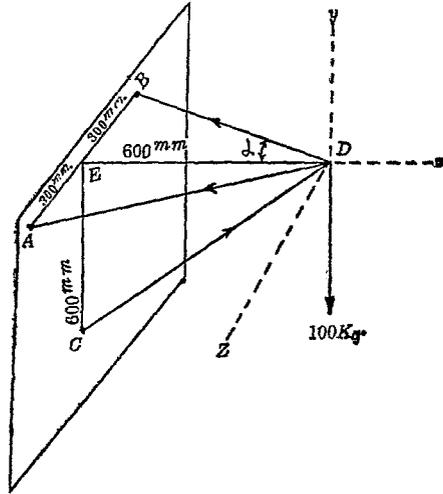
此力系之平衡方程式有三個，故僅能決定三個未知量。若問題中有三個以上之未知量時，即為不定。

通常重要問題乃有三個未知力，僅知其作用線，須決定其大小與指向。

空間合交力系之圖解條件為該力系對於三座標面上射影之示力多邊形均須閉合，由此條件則力系中有未知力時，將該力系投射於各座標面上，作射影之示力多邊形，使其閉合，而決定未知力。因一面上射影僅有二個平衡條件，故僅能決定二個未知力之射影。便利上第一投射面須適當擇定，使二未知力之射影能相疊合，若未知力中一者與該面平行時，該力即可決定。

例 1. 第 157 圖上  $AD, BD$  為二繩， $CD$  為棒以銷釘連接於  $C$  及  $D$ ，懸荷重  $100 \text{ kg}$ 。於  $D$  上。  $A, B, D$  三點同在一水平面上， $A, B, C$  同在一垂直面上。  $E$  為  $AB$  中點， $C$  在  $E$  點之垂直下方。求  $AD, BD$  及  $CD$  之內力。

解  $D$  點之  
分離體圖示於  
第 157 圖, 擇  $ED$   
方向為  $x$  軸,  $D$   
點上垂直方向  
為  $y$  軸,  $D$  點上  
與  $AB$  平行方  
向為  $z$  軸三未  
知力之作用線  
方向為已知, 由  
平衡方程式



第 157 圖

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0, \quad \text{得}$$

$$\Sigma F_y = CD \cos 45^\circ - 100 = 0,$$

$$\therefore CD = 141.4 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_z = DA \cos (90^\circ - \alpha) - DB \cos (90^\circ - \alpha) = 0,$$

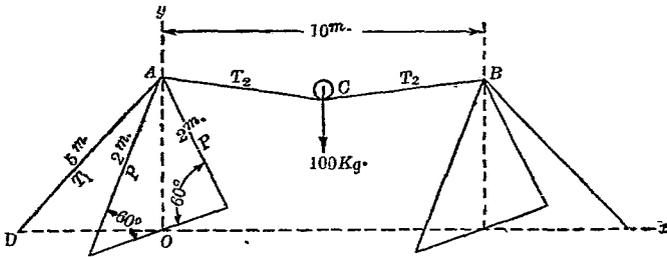
$$\therefore DA = DB.$$

$$\Sigma F_x = 141.4 \cos 45^\circ - DA \cos \alpha - DB \cos \alpha = 0,$$

$$\therefore DA = \frac{141.4 \cos 45^\circ}{2 \cos \alpha} = \frac{141.4 \times 0.707}{2 \times 0.894} = 55.9 \text{ kg.} = DB.$$

因諸力皆為正, 故圖中假定方向無誤。

例 2 第 158 圖所示走鋼索之裝置,  $AB$  中點受荷重 100 kg. 後, 離  $AB$  水平線垂下 1 m., 求繩中內力  $T_1$  與  $T_2$  及  $P$  力。



第 158 圖

解 取  $C$  點為分離體因

$AC = \sqrt{5^2 + 1^2} = 5.09 \text{ m.}$  由  $\Sigma F_y = 0$ , 得

$$2T_2 \times \frac{1}{5.09} = 100$$

$$\therefore T_2 = \frac{509}{2} = 254.5 \text{ kg.}$$

又  $\overline{AO} = 2 \sin 60^\circ = 1.73 \text{ m.}, \quad \overline{OD} = \sqrt{5^2 - 1.73^2} = 4.7 \text{ m.},$

次取  $A$  點為分離體. 由  $\Sigma F_x = 0$ , 得

$$254.5 \times \frac{5}{5.09} - \frac{4.7}{5} T_1 = 0,$$

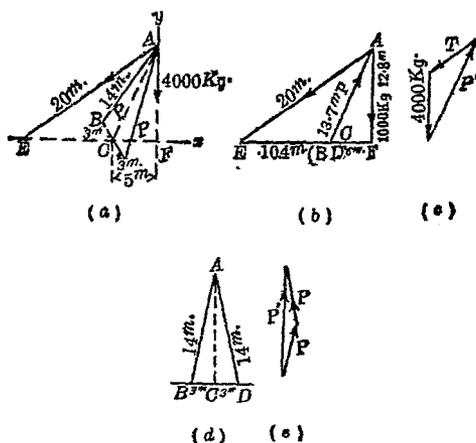
$$\therefore T_1 = 265.3 \text{ kg.}$$

由對稱關係, 知  $A$  點兩腳上之  $P$  力相等, 由  $\Sigma F_y = 0$  得

$$265.3 \times \frac{1.73}{5} + 254.5 \times 5 \frac{5}{5.09} - 2P \times \frac{1.73}{2} = 0,$$

$$\therefore P = 198 \text{ kg.}$$

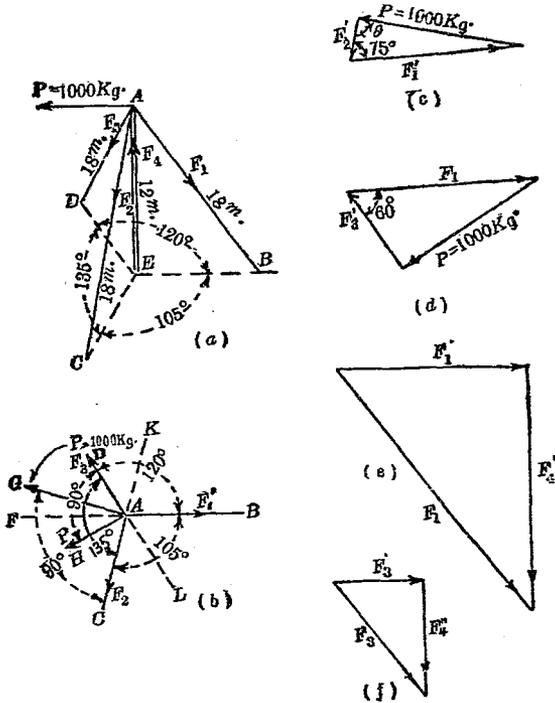
例 3. 第 159 圖 (a) 示一簡單之吊重裝置, 求  $AE$  與  $AB$  之內力.



第 159 圖

解 取  $x, y$  軸如第 159 圖 (a), 將力系投射於  $x, y$  面內如 (b) 圖。此 (b) 圖可視為  $A$  點之分離體圖, 但  $AB$  與  $AC$  之內力相疊合。  
 $\overline{AC} = \sqrt{14^2 - 3^2} = 13.7, \quad \overline{AF} = \sqrt{13.7^2 - 5^2} = 12.8,$   
 $\overline{EC} = \sqrt{20^2 - 12.8^2} - 5 = 10.4$  作示力圖如 (c) 圖得  $P$  力射影之二倍  $P'$  及  $AE$  內力  $T$ , 以縮尺量取得  $T$  及  $P'$  之大小。  $P'$  沿  $AC$  線上作用, 實為  $AB$  與  $AD$  上內力之合力。故就  $ABD$  平面內視之, 作 (d) 圖及示力圖 (e), 即將  $P'$  力分解於  $AB$  及  $AD$  方向, 而得二個相等之  $P$  力。以縮尺量取得  $P$  力之大小。

例 4. 第 160 圖 (a) 中  $AE$  柱長 12 m. 以  $AB, AC, AD$  三繩拉緊之, 各繩長 18 m.,  $A$  點加以水平拉力 1000 kg. 此力可在水平面內週轉  $360^\circ$ . 求  $AB$  繩內最大拉力, 并求此時  $AE$  柱之內力。



第 160 圖

解 視 A 點為分離體，將 A 點上諸外力投影於水平面上得 (b) 圖。因繩索不能抵抗壓力故若水平拉力在 AK 至 AF 間僅 AB 與 AC 受力，AD 不生內力。設  $F_1, F_2, F_3$  三力之水平面射影為  $F_1', F_2', F_3'$ ，則此時 P 力與  $F_1'$  及  $F_2'$  相平衡。此三力之示力三角形相閉合。  $F_1', F_2'$  之作用線方向為已知，P 力之大小為已知，其方向可任意迴轉。故  $F_1'$  若為最大時，則 P 力必與

$F_2'$  方向爲直交. 蓋由 (c) 圖, 則

$$F_1' = \frac{1000}{\sin 75^\circ} \sin \theta, \quad \therefore \max. F_1' = \frac{1000}{\sin 75^\circ} \sin 90^\circ.$$

即  $F_1'$  爲最大時,  $\theta$  爲  $90^\circ$  故也. 因之於 (c) 圖上引  $F_1' \parallel AB$ ,  $F_2' \parallel AC$ , 再作三角形之第三邊, 使其長等於  $1000 \text{ kg.}$ , 且與  $F_2'$  作用線相直交, 即得  $F_1'$  力之最大值. 此時水平拉力取 (b) 圖上  $AG$  之位置. 同樣  $P$  力若在  $AF$  至  $AL$  間時, 僅  $AB$  與  $AD$  受力,  $AC$  不生內力, 而  $P$  力在 (b) 圖上  $AH$  位置時,  $AB$  上亦生最大內力. 由 (d) 圖可得比較 (c), (d) 兩圖, 則 (d) 圖上之  $F_1'$  較大. 故水平拉力在 (b) 圖上  $AH$  位置時,  $AB$  有最大內力. 此時  $AB$  上之最大內力  $F_1$  及  $AE$  之最大壓力  $F_2$  可求之如 (e), (f) 兩圖.

### 習 題 8.

1. 三個勻質同大之球, 各重  $18 \text{ kg.}$  裝入於三角形匣內, 各與匣壁匣底接觸, 且相互接觸. 另有同大同重之球, 置於三球之上. 求各球對於匣壁匣底相接觸之三點上之力.

2. 第 161 圖上, 求  $AD$  與  $DE$  之內力.

3. 若第 161 圖之外力  $1000 \text{ kg.}$ , 向下作用於右方, 在垂直平面內與  $DE$  成  $60^\circ$  角時則若何.

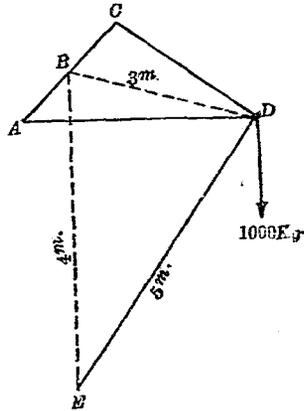
4. 第 162 圖之吊重裝置, 求  $AC$  與  $DC$  之內力.

5. 若第 162 圖之  $4000 \text{ kg}$  力向左作用於水平面內則若何.

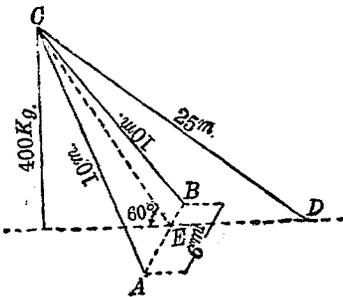
6. 若第 162 圖之 4000 kg. 力於水平面內向 A 迴轉 30° 時則如何.

7. 三脚架之三脚 AB, AC, AD 各長 5 m., 置於水平面上. B, C 相距 3 m., C, D 相距 2 m., D, B 相距 2.5 m., 今 A 點上置荷重 500 kg., 求各脚之內力.

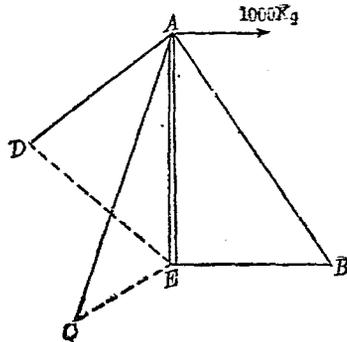
8. 第 163 圖中垂直柱 AE 高 15 m., 以三繩 AB, AC, AD 拉之, 各繩與柱成 30° 角, 而 B, C, D 間距離各相等. 水平力 1000 kg., 加於 A 點, 可水平迴轉於 A 點周圍. 當水平力平分 BEU 角時, 求各繩與 AE 柱之內力.



第 161 圖



第 162 圖

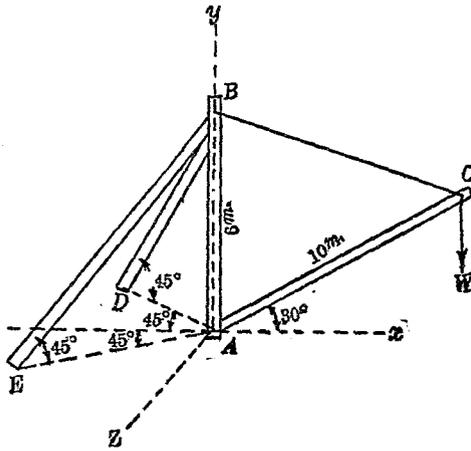


第 163 圖

9. 第 8 題中當水平力迴轉時求 AD 之最大內力及此時

AE柱之內力.

0. 第164圖中若BC繩之拉力為2000 kg. 時, 求 AC, BD, BE之內力.



第164圖

空間平行力系

51 空間平行力系之平衡方程式 空間平行力系之獨立平衡條件有三個. 以下之二形表之.

$$(A) \begin{cases} \Sigma F = 0 \\ \Sigma M_1 = 0 \\ \Sigma M_2 = 0 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \Sigma M_1 = 0 \\ \Sigma M_2 = 0 \\ \Sigma M_3 = 0 \end{cases}$$

(A), (B) 中一者可自他一者導出之. 但 1, 2, 3 為同平面不合交之三線, 各與諸力成直交, 且任何二者不相平行. 若諸力

與 $z$ 軸成平行時,則1,2兩線可爲 $x,y$ 軸.

(A) 之證明 空間平行力系之合力或爲一力或爲一偶力.若方程式  $\Sigma F=0$  能滿足時,則合力不爲一力.若合力爲一偶力時,苟方程式  $\Sigma M_1=0$  能滿足時,則該偶力平面必平行於1線.又同時苟方程式  $\Sigma M_2=0$  能滿足時,則該偶力平面又必平行於2線.但此屬不可能,故合力亦不能爲一偶力.即力系必爲平衡.

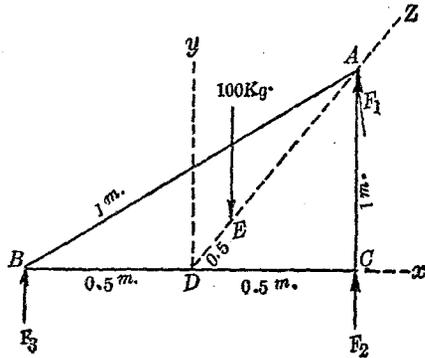
(B) 之證明 若  $\Sigma M_1=0, \Sigma M_2=0$  同時能滿足時,則合力不能爲一偶力.必爲一力.且該力通過1,2二線之交點.又同時  $\Sigma M_3=0$  能滿足時,則該合力又必通過3線.即1,2,3三線必成交於一點,但此與假定矛盾,故合力爲零,即力系爲平衡.

如上所述此力系之平衡方程式有三個,即可決定三個未知量.通常問題中最重要者,乃有三個未知力,其作用線方向均爲已知,而須決定其大小與指向.

空間平行力系平衡之圖解條件乃投射於任何平面時,射影之示力多邊形與索邊形均須同時閉合.一投射平面上之力系射影爲同平面平行力系,僅能決定二個未知力.若力系中有三個未知力時,則該投射平面須適當選定,使二未知力之射影相疊合.於此平面上可決定第三未知力.其他二未知力可於另一投射平面上決定之.

例1. 第165圖示 $ABC$ 正三角形,各邊均長1m.,支於 $A,B,C$ 三點,在水平位置. $AD$ 中線上 $E$ 點置一重100 kg.之物體, $DE$

距離為 0.5 m., 求  $A, B, C$  三點上之反作用力.



第 165 圖

解 設  $A, B, C$  三點上之反作用力各為  $F_1, F_2, F_3$ ,

由  $\Sigma M_2 = 0$ , 得  $\Sigma M_2 = F_1 \times 1 \sin 60^\circ - 100 \times 0.5 = 0$ ,

$$\therefore F_1 = 57.7 \text{ kg.}$$

又由  $\Sigma M_3 = 0$ , 得  $\Sigma M_3 = F_3 \times 0.5 - F_2 \times 0.5 = 0$

$$\therefore F_2 = F_3$$

更由  $\Sigma F = 0$ , 得  $\Sigma F = F_2 + F_3 + 57.7 = 100$ ,

$$\therefore F_2 = 21.2 \text{ kg.} \quad F_3 = 21.2 \text{ kg.}$$

別解 由  $\Sigma M_1 = \Sigma M_2 = \Sigma M_3 = 0$ , 對於  $AB, BC, AC$  三線各取力勢, 得  $\Sigma M_{AB} = F_2 \times 1 \sin 60^\circ - 100 \times (1 \sin 60^\circ - 0.5) \sin 30^\circ = 0$ ,

$$\therefore F_2 = 21.2 \text{ kg.}$$

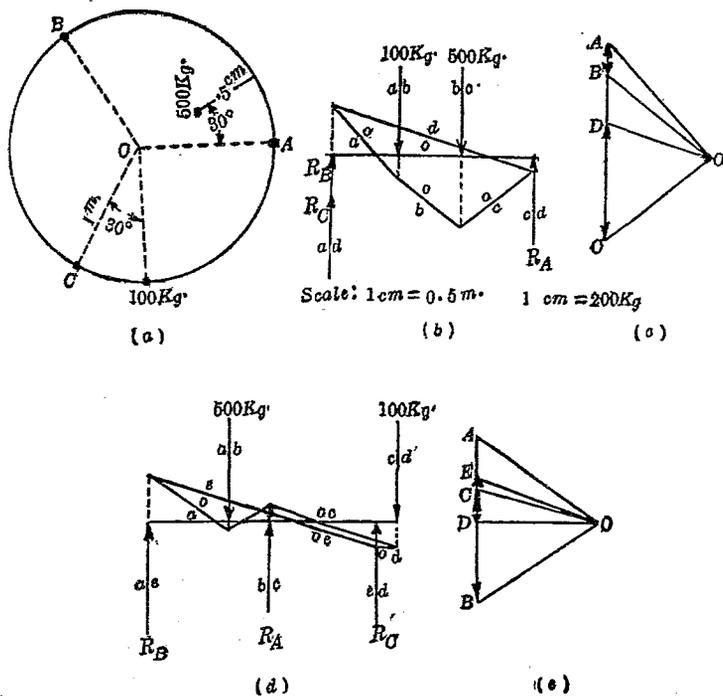
$$\Sigma M_{AC} = F_3 \times 1 \sin 60^\circ - 100 \times (1 \sin 60^\circ - 0.5) \sin 30^\circ = 0,$$

$$\therefore F_3 = 21.2 \text{ kg.}$$

$$\Sigma M_{BC} = F_1 \times 1 \sin 60^\circ - 100 \times 0.5 = 0,$$

$$\therefore F_1 = 57.7 \text{ kg.}$$

例2. 第166圖(a)上示一直徑2m.之水平圓桌,支於A,B,C  
 三脚,其距離相等,置一荷重100kg.於邊緣,及他荷重500kg.  
 於離邊0.5m.之處,其位置如圖所示,求三脚上之反作用力.



第166圖

解 設 A, B, C 三脚上之反作用力各為  $R_A, R_B, R_C$ , 將力

系投射於與  $OA$  平行之垂直平面上。作索邊形圖及示力圖如 (b), (c) 兩圖。由 (c) 圖得

$$R_A = \overrightarrow{CD} = 345 \text{ kg.}$$

次將投射於與  $BC$  平行之垂直平面上，作索邊形與示力多邊形如 (d), (e) 兩圖。由 ( ) 圖上得

$$R_C = \overrightarrow{DE} = 113 \text{ kg.}, \quad R_B = \overrightarrow{EA} = 142 \text{ kg.}$$

### 習 題 9.

1. 矩形之桌，寬 1 m.，長 2 m.，支於一端兩隅之  $A, B$  二脚及他端之  $C$  脚，但  $C$  脚自他端邊緣中點偏向  $B$  邊 0.1 m.。桌重 300 kg.，為勻布力。試求三脚上之反作用力

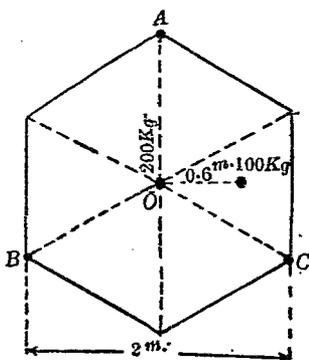
2. 第 1 題中若桌面上離  $AB$  端 0.5 m.，離  $B$  邊 0.5 m. 處，再置以重 600 kg. 之物體，求  $A, B, C$  三脚上因桌重及該物體重之反作用力。

3. 第 167 圖上六角形桌，支於  $A, B, C$  三脚，上載 200 kg. 及 100 kg. 二重物，略去桌之自重，求三脚上之反作用力。

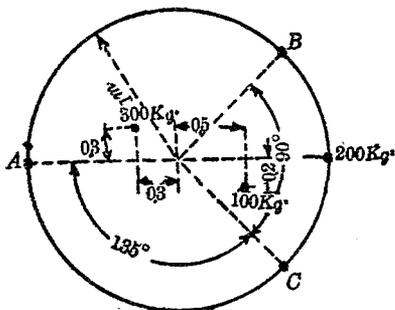
4. 第 167 圖中若另一荷重 300 kg.，添加於  $BO$  線上，離  $B$  點 0.3 m. 處，求  $A, B, C$  三脚上之反作用力。

5. 第 168 圖所示圓桌支於  $A, B, C$  三脚，受圖示位置之各荷重，求三脚上之反作用力。

6. 重 50 kg. 之方桌，支於各邊中點之四脚。問不使該桌傾倒之限度內，可置於一隅上之最大荷重幾何？



第 167 圖



第 168 圖

空間非合交非平行力系

52. 空間非合交非平行力系之平衡方程式 空間非合交非平行力系之獨立平衡方程式有六個如下：

$$\Sigma F_x = 0, \quad \Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad \Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma F_z = 0, \quad \Sigma M_z = 0$$

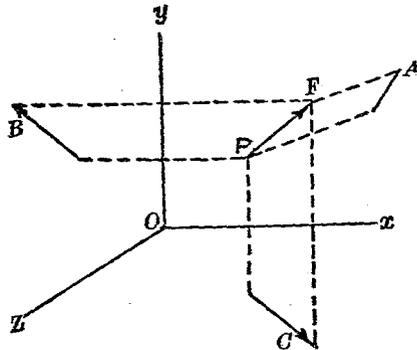
但  $x, y, z$  為不同平面之任意三直線, 任何二者不相平行, 通常即為三直交座標軸。

證 空間非合交非平行力系之合力通常為一力及一偶力(第 32 節)。若方程式  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = \Sigma F_z = 0$ , 能滿足時, 則合力不能為一力。又若方程式  $\Sigma M_x = \Sigma M_y = \Sigma M_z = 0$ , 能滿足時, 則合力不能為一偶力。故合力為零, 即力系為平衡。

若力系中各力以向線示之, 皆投射於直交三座標面上,

則此三射影力系皆可平衡。因同平面非合交力系一般有三個平衡方程式。此三座標面上射影力系共有九個平衡方程式。但此九個方程式中僅有六個為獨立方程式。茲證之如下。

第169圖中  $F$  示力系中一力， $P(x, y, z)$  為其作用點， $A, B, C$  為  $F$  力在  $xy, yz, xz$  各座標面上之射影。因  $A$  力之  $x$  與  $y$  軸上分力即為  $F_x$  與  $F_y$ ， $B$  力之  $y$  與  $z$  軸上分力即為  $F_y$  與  $F_z$ ， $C$  力之  $x$  與  $z$  軸上分力即為  $F_x$  與  $F_z$ ；今原有力系之平衡條件為



第169圖

$$\begin{aligned} (1) \quad \Sigma F_x &= 0, & (4) \quad \Sigma M_x &= \Sigma(F_z y - F_y z) = 0 \\ (2) \quad \Sigma F_y &= 0, & (5) \quad \Sigma M_y &= \Sigma(F_z x - F_x z) = 0 \\ (3) \quad \Sigma F_z &= 0, & (6) \quad \Sigma M_z &= \Sigma(F_y x - F_x y) = 0 \end{aligned}$$

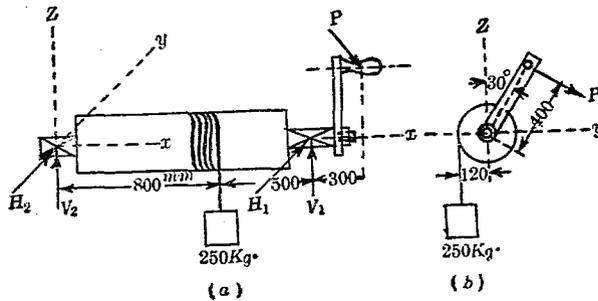
此中  $\Sigma F_x$  為  $A$  系（即  $xy$  面上射影力系）之  $x$  軸上分力代數和； $\Sigma F_y$  為  $A$  系之  $y$  軸上分力代數和； $\Sigma(F_y x - F_x y)$  為  $A$  系對於  $O$  點力勢之代數和。故 (1), (2), (6) 三式為  $A$  系之平衡方程式。同樣可知 (2), (3), (4) 為  $B$  系之平衡方程式，(1), (3), (5) 為  $C$  系之平衡方程式。故九個平衡方程式僅有上之六個為相互獨立。

因空間非合交非平行力系有六個平衡方程式。故可決定六個未知量。問題中最重要者有六個未知力，其作用線均

爲已知,而求其大小與指向.

空間非合交非平行力系平衡之圖解條件爲任意二直交平面上射影之示力多邊形與索邊形皆須同時閉合.

例 1. 第 170 圖爲一捲重機 (Windlass), 用以舉 250 kg. 之重物. 適在平衡狀態. 其兩端軸承 (Bearing) 假定其無摩阻力. 加  $P$  力於曲柄 (Crank) 上, 此  $P$  力與圓筒軸成直交, 且與曲柄亦成直交. 當曲柄與垂直線成  $30^\circ$  角時, 求  $P$  力及軸承之反作用力.



第 170 圖

解 取  $x, y, z$  軸如圖所示. 視該捲重機之圓筒爲分離體, 其上外力共有四個, 即重量 250 kg., 曲柄上之  $P$  力, 及兩軸承部之反作用力. 此二反作用力之方向與大小皆爲未知, 今設其水平與垂直二方向之分力各爲  $H_1, V_1$  及  $H_2, V_2$ , 各如圖中所假定之指向. 則本例中共有五個未知力. 其作用線方向均已知, 而其大小與指向須求出之. 由平衡方程式得

$$\Sigma F_y = P \cos 30^\circ + H_1 + H_2 = 0$$

$$\Sigma F_z = V_1 + V_2 - P \sin 30^\circ - 250 = 0$$

$$\Sigma M_x = 400 P - 120 \times 250 = 0$$

$$\Sigma M_y = P \sin 30^\circ \times 1600 + 250 \times 800 - V_1 \times 1300 = 0$$

$$\Sigma M_z = P \cos 30^\circ \times 1600 + H_1 \times 1300 = 0$$

解上列五個方程式,得

$$P = 75 \text{ kg.},$$

$$H_1 = -80 \text{ kg.}, \quad V_1 = 200 \text{ kg.},$$

$$H_2 = 15 \text{ kg.}, \quad V_2 = 87 \text{ kg.},$$

故  $H_1$  分力之指向當與圖所假定者相反,其他各力指向如圖所示。

例2. 第171圖(a)示一吊架(Derrick),由CF柱及CD,CE,BF諸棒而成。試求各內力及反作用力。但略去各摩擦阻力與自重。

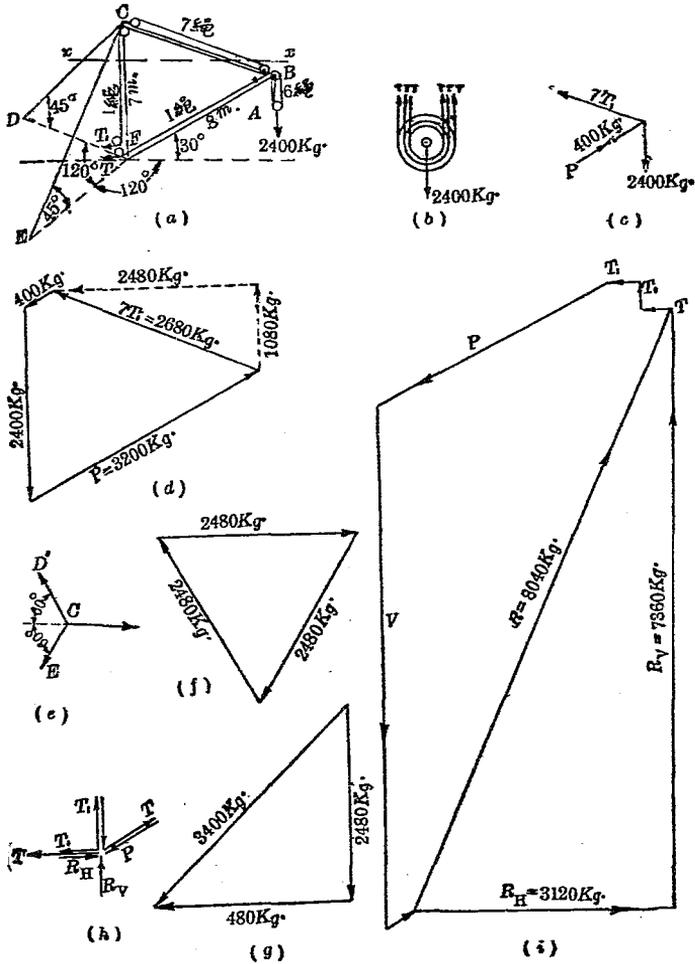
解 將上圖分為數個分離體而各別討論之,則得數個之空間合交力系。先由(b)圖將滑輪A,視為分離體。若略去摩擦阻力,則各繩之拉力均相等。故

$$6T = 2400 \text{ kg.}$$

即  $T = 400 \text{ kg.}$

次就B點之分離體圖(c)考察之。未知力為  $T_1$  及  $P$ , 由(d)圖之示力多邊形得

$$T_1 = 383 \text{ kg.} \quad P = 3200 \text{ kg.}$$



第 171 圖

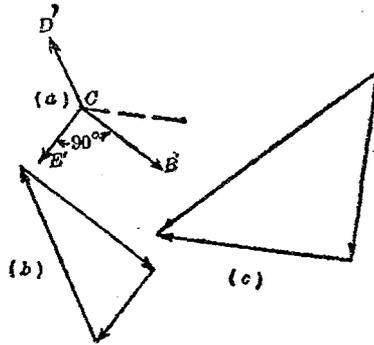
次作水平面  $X-X$ ，將 (a) 圖上  $C$  點分離體之外力，投射於其上，如 (e) 圖。由 (f) 圖之示力三角形得  $CD$  與  $CE$  中內力之水平射影，更由 (g) 圖得  $CD$  與  $CE$  中之內力。

$CF$  柱中之內力為  $7T_1$  之垂直分力 1080 kg.,  $CD$  之垂直分力 2480 kg.,  $CE$  之垂直分力 2480 kg., 及  $T_1$  之和，故得 6423 kg.

最後取  $F$  為分離體，作分離體圖 (h) 及示力多邊形 (i)，得  $R_H = 3120$  kg.,  $R_V = 7360$  kg., 且  $R$  與垂直方向所成角度  $\theta$  為  $23^\circ 40'$ .

若  $BF$  棒迴轉於  $CF$  柱之周圍時，則  $CD$  與  $CE$  之內力有變化。若轉近  $CE$ ，則  $CE$  內力減而  $CD$  內力增。第 172 圖 (a) 示  $X-X$  平面上部之分離體圖。該圖上  $BF$  之垂直面與  $CE$  之垂直面成  $90^\circ$ ，由第 172 圖 (b) 可知此時  $CD$  內力之水平分力為最大。更由第 172 圖 (c) 可得  $CD$  之最大內力。

若  $BF$  棒轉至  $CB'$  與  $CD'$  同一直線時，則  $CE$  之內力為零。若更轉近  $CE$  時，則  $CE$  之內力變為壓力。若  $BF$  轉入於  $CE$  之垂直面內，則  $CD$  內力為零。

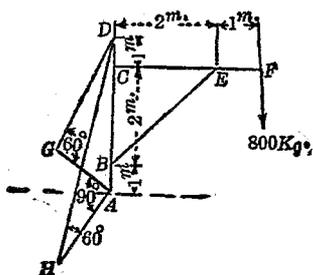


第 172 圖

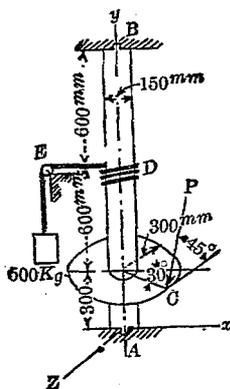
習 題 10.

1. 第173圖上求  $BE$  之內力. 若  $CF$  迴轉於  $DA$  之周圍時, 求  $DH$  及  $DG$  之最大拉力與最大壓力.

2. 第174圖之垂直捲重機, 捲以  $D$  繩, 此繩於水平方向經滑輪  $E$  懸一重  $500\text{ kg}$ . 之物體. 加  $P$  力於  $C$  輪之周緣以與荷重平衡.  $P$  力加於  $C$  點上切線之垂直平面內, 與水平成  $45^\circ$  角. 求  $P$  力及  $A, B$  兩點之反作用力.



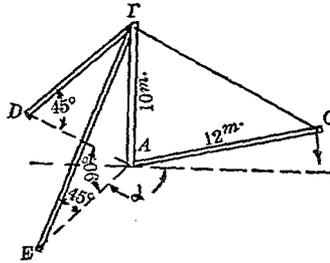
第 173 圖



第 174 圖

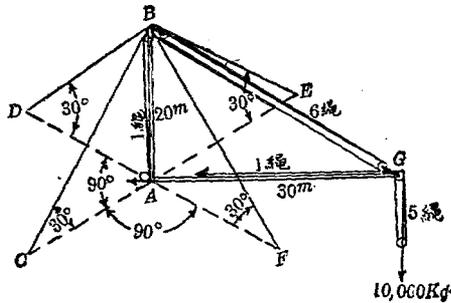
3. 第175圖之吊架上  $AC$  棒可於垂直平面內迴轉於  $A$  點. 最低至水平位置, 最高至與垂直棒  $AB$  成  $20^\circ$  之位置. 問  $BC$  繩有最大內力時  $AC$  棒之位置. 今  $AC$  保持此垂直面內之位置, 而迴轉於  $AB$  柱之周圍, 問  $BE$  受最大壓力時  $\alpha$  角之值當

如何? 又  $BE$  受最大拉力時  $a$  之值若何? 若  $C$  點荷重為 1000 kg. 時, 則  $BC, AC, BE, BA$  之最大內力各若何?



第 175 圖

4. 第 176 圖之吊架中  $AB$  柱以  $BC, BD, BE, BF$  四繩拉之.  $AG$  棒在水平位置,  $G$  端吊重 10000 kg., 求  $AG, BG$  繩內之拉力, 及  $AG$  棒中之內力若  $AG$  棒水平迴轉時,  $BC, BD, BE, BF$  四繩之最大內力如何?



第 176 圖

53. 各力系平衡條件之總括 以上各節所論諸力系之平衡條件茲總括如下:

## (I) 代數條件:

## (A) 同平面力系:

1. 同直線力系:  $\Sigma F=0$ ;           或  $\Sigma M=0$ .
2. 合交力系:  $\Sigma F_x=\Sigma F_y=0$ ; 或  $\Sigma F_x=\Sigma M_A=0$ ;  
或  $\Sigma M_A=\Sigma M_B=0$ .
3. 平行力系:  $\Sigma F=\Sigma M=0$ ; 或  $\Sigma M=\Sigma M_B=0$ .
4. 非合交非平行力系:  $\Sigma F_x=\Sigma F_y=\Sigma M=0$ ;  
或  $\Sigma F_x=\Sigma M_A=\Sigma M_B=0$ ; 或  $\Sigma M_A=\Sigma M_B=\Sigma M_C=0$ .

## (B) 異平面力系:

1. 合交力系:  $\Sigma F_x=\Sigma F_y=\Sigma F_z=0$ .
2. 平行力系:  $\Sigma F=\Sigma M_1=\Sigma M_2=0$ ;  
或  $\Sigma M_1=\Sigma M_2=\Sigma M_3=0$ .
3. 非合交非平行力系:  
 $\Sigma F_x=\Sigma F_y=\Sigma F_z=\Sigma M_x=\Sigma M_y=\Sigma M_z=0$ .

## (II) 圖解條件:

## (A) 同平面力系:

1. 同直線及合交力系: 示力多邊形閉合.
2. 平行力系: 示力多邊形及索邊形同時閉合.
3. 非合交非平行力系: 示力多邊形及索邊形同時閉合.

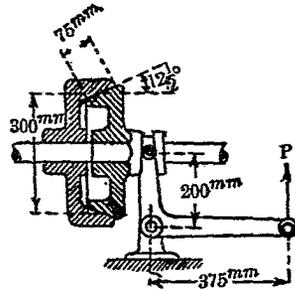
## (B) 異平面力系:

投射於任意二座標面平面上之射影, 其示力多

邊形與索邊形皆須閉合,但此力系之圖解條件,應用較甚少。

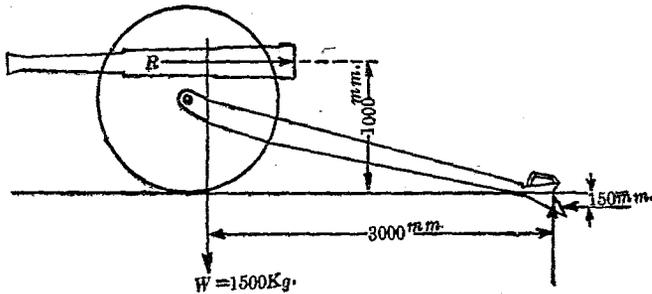
### 習 題 11.

1. 第 177 圖示一摩擦接合子 (Friction clutch), 其摩擦面上受壓力  $1 \text{ kg./cm}^2$ , 壓力方向與摩擦面直交。問發生此壓力時之  $P$  力若何?



第 177 圖

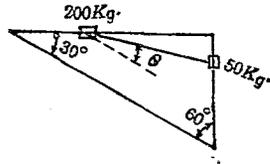
2. 第 178 圖示一砲車, 當發射時若使車輪不離原位, 則最大後退力 (Recoil pressure)  $R$  當為若干。設砲及車重之合力如圖示之作用線。



第 178 圖

3. 一均質之棒重  $W \text{ kg}$ , 靜止於二平滑面, 此二面各與水平成  $60^\circ$  與  $30^\circ$  之傾角, 求棒與水平所成之角度。

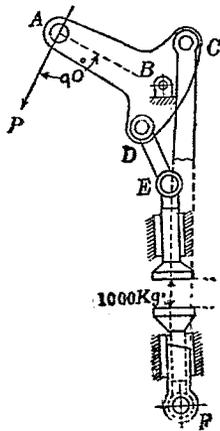
4. 第 179 圖上二物體以繩連接之, 靜止於平滑之二棒上. 求繩之拉力及棒上反作用力, 并求  $\theta$  角.



第 179 圖

5. 第 180 圖示一壓力機.  $AB=750\text{m.m.}$ ,  $BC=BD=300\text{m.m.}$ ,  $DE=450\text{m.m.}$ ,  $FC=2400\text{m.m.}$ ,  $FB=2130\text{m.m.}$ ,  $B, E, F$  三點在同一垂直線上. 問加壓面間發生  $1000\text{kg}$ . 之壓力時,  $P$  力當有若干?

6. 第 181 圖上半徑  $r_1$  與  $r_2$  之二輪相固定. 一連續之鏈由小輪經直徑  $r_1+r_2$  之動輪 (Movable pulley) 及大輪. 今略去摩擦阻力, 試求  $F$  與  $W$  相平衡時二力間之關係.

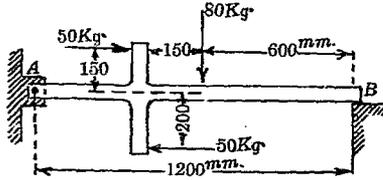


第 180 圖



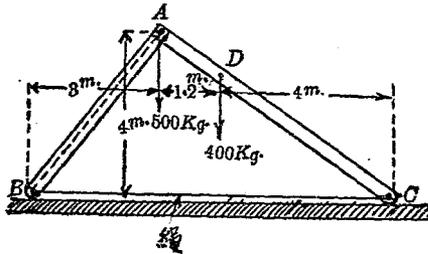
第 181 圖

7. 第 182 圖之  $AB$  棒, 固定於  $A$  端,  $B$  端支於平滑面上. 求  $A, B$  兩端之反作用力.



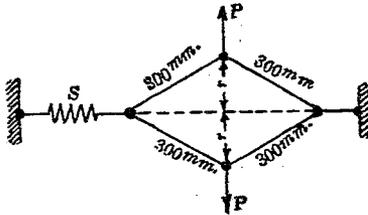
第 182 圖

8. 第 183 圖之  $AB, AC$  兩棒以銷訂接合其  $A$  端.  $B, C$  兩端支於平滑水平面上, 并以繩連結之.  $AB$  棒重  $100 \text{ kg}$ ,  $AC$  棒重  $150 \text{ kg}$ ,  $A, D$  兩點受圖示之荷重. 試求  $B, C$  兩點, 平面上之反作用力及繩內之拉力.



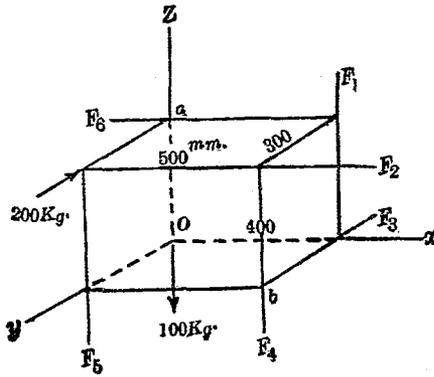
第 183 圖

9. 第 184 圖中當  $r$  為零時,  $S$  之拉力為  $50 \text{ kg}$ ,  $S$  彈簧每伸長  $1 \text{ cm}$ . 須力  $20 \text{ kg}$ , 問  $r = 80 \text{ mm}$ . 時  $P$  之拉力當為幾何? 并問此時彈簧伸長若干?



第 184 圖

10. 第 185 圖所示 100 kg., 200 kg.,  $F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$  諸力作用於直角柱體之諸隅上, 且與各邊平行, 而保持平衡. 試求諸未知力. 若  $F_4$  力沿  $ab$  對角線作用時則若何?



第 185 圖

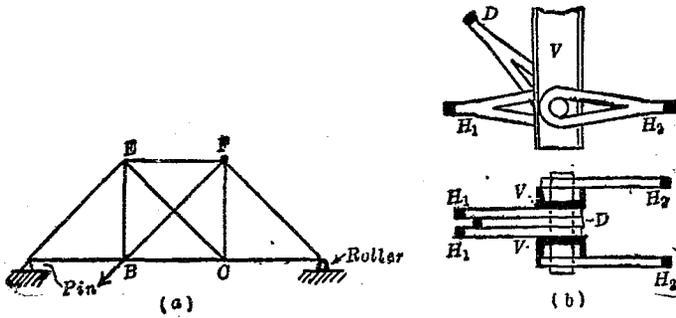
## 第四章

### 簡單架構之內力分析

54. 定義 凡主要構肢 (Structural members) 有三種:(i) 受軸向拉力之棒曰繫肢 (Tie), (ii) 受軸向壓力之棒曰柱 (Column), (iii) 荷重與軸向成直交者曰樑 (Beam), 其他尚有所謂軸 (Shaft) 者受扭力 (Torsion), 但建築物上非屬重要部分, 凡用前述三種主要構肢所構成者稱曰架構 (Framework).

架構之構肢若其中心軸均在於同一平面內, 以銷釘結合各肢 (Member) 之兩端, 形成多數三角形之集合物者曰結構 (Truss). 結構之各構肢除其自重外, 主受軸向上之拉力或壓力, 荷重僅加於構肢之結合點 (Joint). 若架構之構肢間不以銷釘結合, 相固着而不能變動二構肢間之角度者曰剛構 (Rigid frame), 例如第186圖(b)所示者為(a)圖結構內結合點上各構肢間之結合部.

起重機之架構, 其構肢雖亦用銷釘結合, 構肢之中心軸雖亦可在於一平面內, 但一構肢上之結合點有二個以上者, 且荷重可加於構肢中任何部份, 非僅加於結合點, 故各構肢不僅受拉力與壓力, 且亦受彎力也.



第 186 圖

本章中就結構與起重機架構二者分論之。

結構型架構

55. 概說 結構中各肢 (Member) 之軸須在同一平面內，故結構對於該平面為對稱。因之有數處構肢須分成該平面兩側對稱二部，或其結合端形成叉形。例如第 186 圖 (b) 為 (a) 之結構中結合點 C 之相互結合狀況。C 處有四個構肢，即一個垂直肢 V (複肢)，一個對角線肢 D (單肢)，及二個水平肢 (各為複肢)。如是則各肢之中心軸均在同一平面內。

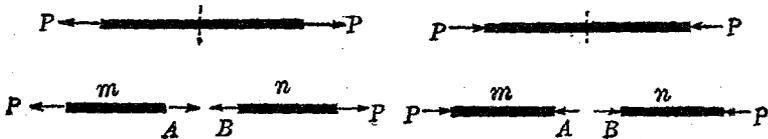
銷釘結合點理論上均視為完全無摩阻力。結構兩端受反作用之部有  $\frac{\Delta}{\text{|||||}}$  記號者乃以銷釘支持，反作用力之作用點完全確定，而其作用線方向與大小為未定。有  $\frac{O}{\text{|||||}}$  記號者乃支於輾棍 (Roller) 或鏈桿 (Link) 上，反作用力之作用線垂直於支持面。

結構用於屋頂構造者為屋構 (Roof-truss)，用於橋樑構造

者為橋構 (Bridge-truss); 要之用於支點間距離甚大之處。其材料通常用木材, 軟鋼, 或二者混合使用。用木材者, 各構肢通常為矩形斷面, 用螺銷釘 (Bolt) 結合, 用鋼材者, 各構肢斷面用  $L$ ,  $\square$ ,  $I$ ,  $H$ ,  $T$  等形, 以銷釘或鉚釘 (Rivet) 結合之。

本章內所論之結構, 假定 (i) 各構肢僅互相結合於兩端, (ii) 結合點用無摩阻力之銷釘, 此釘與結構平面成直交, (iii) 荷重及反作用力僅加於銷釘, 且力之作用線均通過銷釘之中心軸, (iv) 各構肢重量, 若不略去, 則以作用於兩端之分力 (即重量之半部) 代之。由此假定, 則各肢均僅受二力, 即受兩端銷釘上所作用之力。且此二力相互平衡, 故相等反向, 沿構肢軸向而作用者。

56. 構肢之內力 由上所述各構肢上所受之外力皆沿其軸向作用, 或為相等反向之拉力, 或為相等反向之壓力。第 187 圖示受拉力之肢, 第 188 圖示受壓力之肢。今於構肢中任一斷面上, 分構肢為兩部考察之, 設  $n$  對於  $m$  之內力為  $A$ ,  $m$  對於  $n$  之內力為  $B$ , 則  $A$  與  $B$  各與外力  $P$  相等反向, 且在一直線上。外力  $P$  若為拉力, 則  $A$  與  $B$  亦為拉力, 外力若為壓力, 則

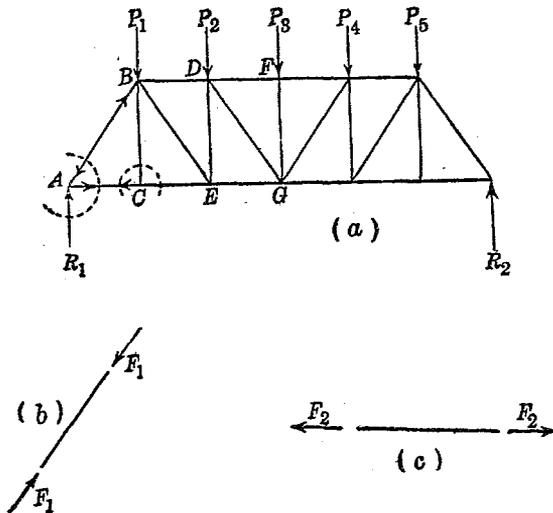


第 187 圖

第 188 圖

$A$  與  $B$  亦為壓力. 不論假想斷面之在何處, 上之關係皆可成立.

凡構肢中任意一斷面兩側相互作用之相等反向之力如  $A$  與  $B$  稱曰構肢之內力.  $A$  與  $B$  若為拉力時, 則該內力稱曰拉內力 (Tensile stress), 若為壓力時, 則稱曰壓內力 (Compressive stress). 第 189 圖 (a) 所示之結構中,  $AB$  構肢之兩端受銷釘壓力  $F_1, F_1$ , 而生壓內力如 (b) 圖,  $AC$  構肢之兩端受銷釘拉力  $F_2, F_2$ , 而生拉內力如 (c) 圖. 通常構肢中內力種類 (Kind of stress), 即拉內力或壓內力, 以箭頭表示之, 此箭頭乃示構肢對於銷釘上作用力之種類. 即構肢有壓內力時, 則箭頭向近



第 189 圖

銷釘，有拉內力時，則箭頭離開銷釘。如(a)圖上 $AB$ 構肢中之箭頭表示銷釘受構肢之壓力，亦即構肢受銷釘之壓力，故 $AB$ 為受壓構肢，又同樣可知 $AC$ 為受拉構肢。

結構中各構肢上內力種類(Kind of stress)之分析方法有二即結合點分離法(Method of joints)及部份分離法(Method of sections)是也。

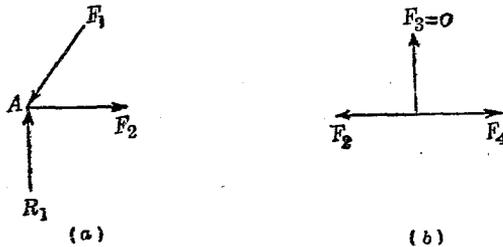
57. 結合點分離法 此法乃將各結合點(Joint)之銷釘及其周圍構肢之極短部份視為分離體，假想其與連接部分相切離。如是則結合點受外力(荷重與反作用力)及構肢中內力之作用而保持其平衡。此作用於結合點上之力系為同平面合交力系。由第41節則此力系之平衡方程式有二個，僅可求得二未知元。此未知力即為構肢之內力，其作用線皆已知，僅須求其大小與指向。故結合點周圍僅有二未知內力時，則可依平衡條件求得之。若有二個以上構肢內力未知時，則此結合點周圍之內力不能決定。須先由僅有二未知內力之他結合點次第解得之。故結構內力之分析，當依下之順序進行。

(i) 先將結構全體視為分離體，則荷重與各支點反作用力成為同平面力系。依平衡方程式或圖解條件求得各支點之反作用力。

(ii) 次就僅有二個以下未知力之結合點依平衡方程式或圖解條件求其未知內力，決定構肢上之內力種類

(iii) 反覆 (ii) 之方法, 至最後全部構肢內力盡行求得而後止。

今就第 189 圖 (a) 所示之結構言之, 先視該結構全部為一分離體, 則其上之外力為同平面平行力系, 求得反作用力  $R_1$  與  $R_2$ , 次選取結合點  $A$  為分離體, 作分離體圖如第 190 圖 (a)。因  $R_1$  為已知, 可求得  $F_1$  與  $F_2$  二內力。次取結合點  $C$  為分離體, 作分離體圖如第 190 圖 (b),  $F_2$  為已知, 其指向與第 190 圖 (a) 中  $F_2$  之指向相反。由平衡條件可知  $F_4$  與  $F_2$  相等反向, 而  $F_3 = 0$ , 次再依  $B, E, D, G, F$  等順序, 取各結合點為分離體而解得各構肢之內力。

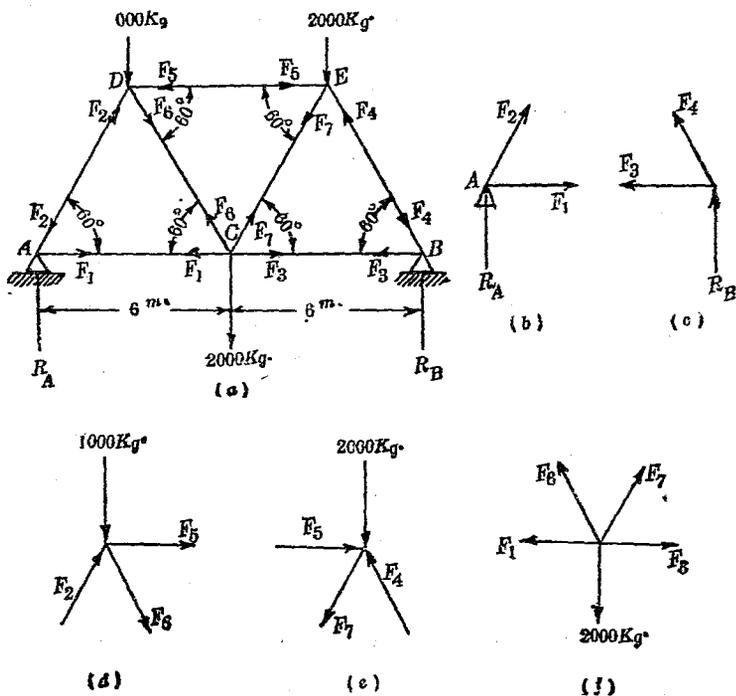


第 190 圖

若用代數解法求各結合點分離體上未知內力時, 其指向有時未能預定。此時先假定其指向離開結合點, 即假定其為拉內力。待方程式解得後, 未知力若為正時, 則假定之指向無誤。若為負時則未知力之指向當與假定之指向相反。但通常構肢內未知力之指向往往由觀察可知。

用結合點分離法時須用多數平衡方程式，若欲求結構中央部一構肢上未知內力時，須先由兩端各結合點開始依次分析，至最後達所要之構肢而後止。此方法較費時間，而多錯誤之機會，此時宜用後述之部分分離法為簡便。

例. 第 191 圖 (a) 所示之結構，支於兩端，各角為  $60^\circ$ ，受圖示之荷重，試求各構肢之內力。



第 191 圖

解 先求  $A, B$  兩點之反作用力. 對於  $B$  點取諸外力之力勢, 得

$$\Sigma M_B = 12 R_A - 2000 \times 6 - 1000 \times 9 - 2000 \times 3 = 0,$$

$$\therefore R_A = 2250 \text{ kg.}$$

再對於  $A$  點取力勢, 得

$$\Sigma M_A = 12 R_B - 2000 \times 6 - 2000 \times 9 - 1000 \times 3 = 0,$$

$$\therefore R_B = 2750 \text{ kg.}$$

次取  $A$  點爲分離體作 (b) 圖, 設  $AC$  中內力爲  $F_1$ ,  $AD$  中內力爲  $F_2$ , 此二力爲未知, 假定其爲拉力, 則

$$\Sigma F_y = 2250 + F_2 \sin 60^\circ = 0, \quad \therefore F_2 = -2600 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x - F_1 - 2600 \cos 60^\circ = 0, \quad \therefore F_1 = 1300 \text{ kg.}$$

故  $F_1$  爲拉內力,  $F_2$  爲壓內力.

取  $B$  點爲分離體作 (c) 圖, 設  $BC$  之內力爲  $F_3$ ,  $BE$  之內力爲  $F_4$ , 此二力爲未知, 假定爲拉力. 則

$$\Sigma F_y = 2750 + F_4 \sin 60^\circ = 0, \quad \therefore F_4 = -3176 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = F_3 - 3176 \cos 60^\circ = 0, \quad \therefore F_3 = 1588 \text{ kg.}$$

故  $F_3$  爲拉內力,  $F_4$  爲壓內力.

次取  $D$  點爲分離體, 作 (d) 圖, 則

$$\Sigma F_y = 2600 \cos 30^\circ - 1000 - F_5 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\therefore F_5 = 421 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = 2600 \sin 30^\circ + 1421 \cos 60^\circ + F_6 = 0,$$

$$F_6 = -2010 \text{ kg.}$$

故  $F_5$  爲壓內力,  $F_6$  爲拉內力.

再取  $E$  點爲分離體作 (e) 圖則

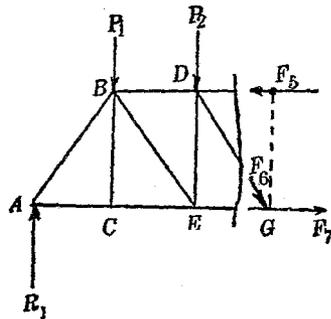
$$\Sigma F_y = 3176 \cos 30^\circ - 2000 - F_7 \cos 30^\circ = 0,$$

$$\therefore F_7 = 867 \text{ kg.}$$

$C$  點上之內力已無未知力, 但作分離體圖 (f), 可供檢算之用. 此時於  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$  中以上所求得之值. 代入之, 可資檢算.

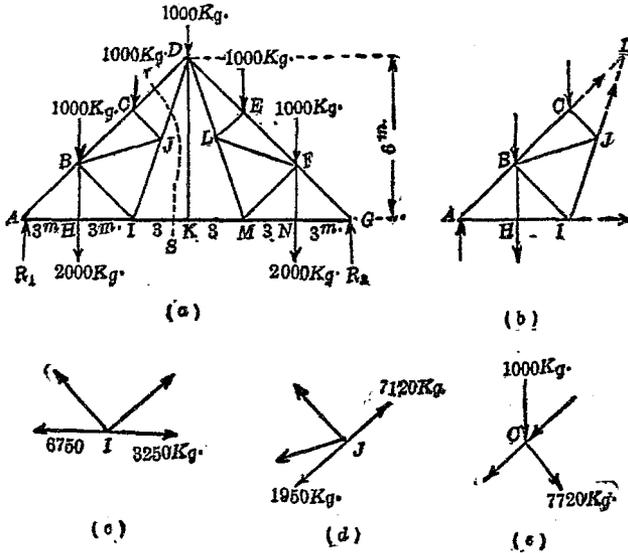
綜上結果  $AD, DE, BE$  爲受壓構肢;  $AC, BC, DC, EC$  爲受拉構肢.

**58. 部份分離法** 將結構以適當之面切斷分成兩部份, 取其一者, 視爲分離體. 但所切斷之有未知內力之構肢不能超過三個以上, 因同平面非合交非平行力系, 僅有三個平衡方程式故也. 例如第 189 圖 (a) 之結構中, 欲求  $DG$  構肢之內力時, 以一面切斷  $DF, DG, EG$  三構肢, 取其左側部份爲分離體如第 192 圖所示. 該分離體上受已知外力  $P_1, P_2, R_1$  及未知內力  $F_5, F_6, F_7$  之作用而保持平衡. 由  $\Sigma F_y = 0$ , 即可求得  $DG$  構肢之內力  $F_6$ . 因此時方程式中無  $F_5$  與  $F_7$  之未知力故也. 同樣  $DF$  之內力  $F_5$  可由方程式  $\Sigma M_G = 0$ , 求得之.  $EG$  之內力  $F_7$  可由方程式  $\Sigma M_D = 0$ , 求得之.



第 192 圖

例. 第193圖之結構上試求各構肢中之內力. 但  $J$  為  $DI$  之中點,  $L$  為  $DM$  之中點.



第193圖

解 因荷重為對稱, 故  $R_1 = R_2 = 4500\text{ kg}$ . 又  $BH = 2\text{ m}$ ,

$$AB = \sqrt{3^2 + 2^2} = 3.6\text{ m}. \quad \sin \theta = \frac{2}{3.6} = 0.557, \quad \cos \theta = \frac{3}{3.6} = 0.835.$$

先取  $A$  點為分離體, 由  $\Sigma F_y = 0$ , 得  $AB \times 0.557 + 4500 = 0$ ,  
 $\therefore AB = -8080\text{ kg}$ . (壓). 又由  $\Sigma F_x = 0$ , 得  $AH - 8080 \times 0.835 = 0$ ,  
 $\therefore AH = 6750\text{ kg}$ . (拉).

次取  $H$  點為分離體, 由  $\Sigma F_y = 0$ , 得

$$B_H - 2000 = 0, \quad \therefore B_H = 2000\text{ kg}. \text{ (拉).}$$

由  $\Sigma F_x = 0$ , 得  $HI - AH = 0$ ,  $\therefore HI = 6750 \text{ kg. (拉)}$ .

但  $B, C, D, I, J, K$  各點上均有二個以上之未知力, 故用結合點分離法不能解之.

今以  $rS$  面切斷  $CD, JD, IK$  三構肢, 視左側部份為分離體如第 193 圖 (b). 由  $\Sigma M_D = 0$ , 得

$$6 IK - 4500 \times 9 + 3000 \times 6 \times 1000 \times 3 = 0,$$

$$\therefore IK = 3250 \text{ kg. (拉)}$$

由  $\Sigma M_I = 0$ , 得  $-DC \times 6 \times 0.557 + 300 \times 3 - 4500 \times 6 = 0$ ,

$$\therefore DC = -7720 \text{ kg. (壓)}$$

由  $\Sigma F_x = 0$ , 得  $3250 + JD \times \frac{3}{\sqrt{3^2 + 6^2}} - 7720 \times 0.835 = 0$ ,

$$\therefore JD = 7120 \text{ kg. (拉)}$$

次取  $I$  點為分離體作 (c) 圖. 由  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ , 得

$$\Sigma F_x = IJ \times 0.448 - BI \times 0.835 + 3250 - 6750 = 0$$

$$\Sigma F_y = IJ \times 0.896 + BI \times 0.557 = 0$$

解之得  $IJ = 1950 \text{ kg. (拉)}$   $BI = -3140 \text{ kg. (壓)}$

再取  $J$  點為分離體作 (d) 圖. 由  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ , 得

$$\Sigma F_x = CJ \times 0.835 + BJ \times \frac{4.5}{\sqrt{1^2 + 4.5^2}} + 1950 \times 0.448 - 7120 \times 0.448 = 0$$

$$\Sigma F_y = CJ \times 0.557 - BJ \times \frac{1}{\sqrt{1^2 + 4.5^2}} - 1950 \times 0.896 + 7120 \times 0.896 = 0$$

解之得  $CJ = -5480 \text{ kg. (壓)}$

$$BJ = 6915 \text{ kg. (拉)}$$

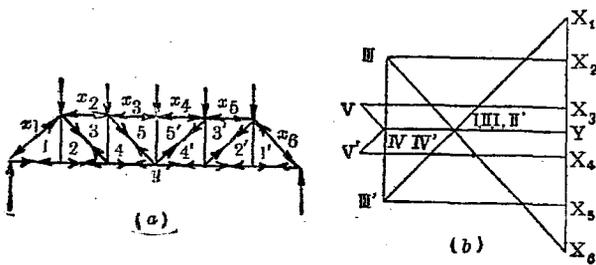
最後取  $C$  點爲分離體,作 (e) 圖. 由  $\Sigma F_x = 0$ , 得

$$\Sigma F_x = BC \times 0.835 + 7720 \times 0.835 + 5480 \times 0.835 = 0$$

$$\therefore BC = -13200 \text{ kg. (壓).}$$

59. 圖解分析法 架構之圖解法有時較代數解法甚爲簡便. 此法就各結合點分離體上之同平面合交力系, 作閉合之示力多邊形, 以求諸未知力. 且將各示力多邊形適當疊成內力圖 (Stress diagram). 以省去不必要之作圖. 且圖中記號以用鮑氏記號爲便.

例如第 194 圖 (a) 示一柏拉德氏結構 (Pratt truss). 上部各結合點所受荷重皆相等. 各力間區域附以圖示之記號, 而各力以其作用線兩傍區域之記號稱之. 例如左端反作用力以  $x_1-y$  表之, 上部左端荷重以  $x_1-x_2$  表之記號中字之順序不拘, 即左端第二格 (Panel) 對角線之內力亦可以 3-2 表之. 第 194 圖 (b) 之內力圖如下之順序作用之.



第 194 圖

先作荷重力線 (Load line)  $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_4, X_4X_5, X_5X_6$ , 因

荷重爲對稱，故反作用力相等。因之  $Y$  必在該線中點。次就最左端支點上之三合交力考察之，此三力中  $x_1-y$  爲已知， $x-1$  與  $1-y$  其作用線雖已知，而力之大小及指向爲未知。因此三力相平衡，故其示力多邊形必閉合。今由第 194 圖 (b) 上之  $X_1$  點引一直線與  $x_1-1$  平行，再由  $Y$  引一直線與  $1-y$  平行，此二直線交於  $I$  點，如是則二未知力之大小可由 (b) 圖上  $X_1-I$  及  $Y-I$  之長度得之。且  $X_1-I$  對於銷釘上之指向向左下方，故該構肢爲受壓構肢， $Y-I$  對於銷釘上之指向向右方，故該構肢爲受拉構肢。各構肢中內力對於銷釘之指向均記入於 (a) 圖中。

次就下方左端第二結合點論之內力  $y-1$  爲已知，因示力多邊形須閉合，故  $I$  與  $II$  兩點不得不疊合而爲一點，即內力  $1-2$  爲零，而內力  $2-y$  與  $1-y$  相等反向。其他諸結合點上之示力圖均可同樣作成，得 (b) 圖。讀者須自研究之。

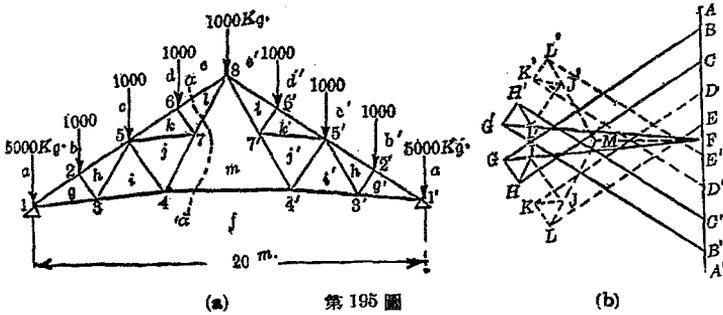
內力圖之作法可簡括如下：

- (i) 先將結構圖上附以適當之鮑氏記號。
- (ii) 求結構支點上之反作用力 (但特別情形時可略去之)。
- (iii) 作結構上所受諸外力 (荷重及反作用力) 之示力多邊形，依各作用點之一定順序，如時針方向或反時針方向，表出各外力。此外力之示力多邊形稱曰荷重力線 (對於特種之例亦可略去之)。

(iv) 在此示力多邊形之各邊上作各結合點之示力各邊形，其第一個之多邊形須由結合二個構肢之點開始，通常即為結構之支點。就僅有二個未知內力之結合點，順次各作示力多邊形。

依上順序作圖時若中途遇未解出之各結合點上，其未知內力均在二個以上時，則由第58節所述部分分離法，解得其所要之一個或一個以上之內力，然後再用此解得之內力，完成該問題全部之作圖。

例 試求第195圖之結構中各構肢內力。



解 兩支點上反作用力各為4000 kg，作荷重力線  $ABCD$   $EE'D'C'$ ， $B'A'FA$ 以表示荷重及反作用力。

先就結合點1作示力多邊形於(b)圖，得  $ABGF A$  (依時針方向)。次就2點作示力多邊形  $BCHGB$ ，再就3點作示力多邊形  $GHI FG$ ，次對於1', 2', 3'三點同樣各得示力多邊形  $B'A'FG'B'$ ， $C'B'G'H'C'$  及  $H'G'F'I'H'$  等。

其餘諸結合點上未知內力均在二個以上。今用 $\alpha$ 面將結構切斷於圖示位置，求 $m-f$ 之內力。對於結合點8取力勢，得

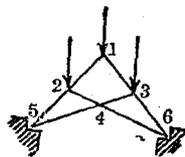
$$\begin{aligned} \Sigma M_8 = & -4000 \times 10 + 500 \times 10 + 100 \times 7.5 + 100 \times 5 + 100 \\ & \times 2.5 + mf \times 5.8 = 0 \end{aligned}$$

$$\therefore mf = 5776 \text{ kg. (拉).}$$

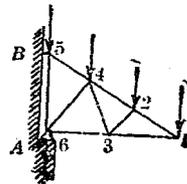
此內力表示於(b)圖上之 $MF$ ，對於結合點4作示力多邊形 $MFIJM$ ，對於其餘各結合點，定成(b)圖之作圖，讀者須自研究之。

60. 特種之例 有種結構，其支點上反作用力不能預先求得，但苟結構為靜力的確定時，內力圖仍可作之。對於支點上由已知內力可求反作用力。例如第196圖所示之結構，以銷釘結合於支點。依一定順序將1, 2, 3, 4各結合點示力多邊形作成後，再對於5, 6兩點，作示力多邊形，而得兩支點上之反作用力。

又如第197圖所示之結構，其反作用力可預先求得，但此反作用力，對於內力圖上非屬必要。支點A以銷釘結合，支點B以水平繫肢(Tie)拉緊之，各結合點1, 2, 3, 4, 5之示力多邊



第 96 圖

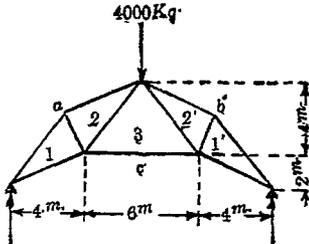


第 197 圖

形可依次作成.由5點上之多邊形可求B點上之反作用力.由6點上之多邊形,可求A點上之反作用力.

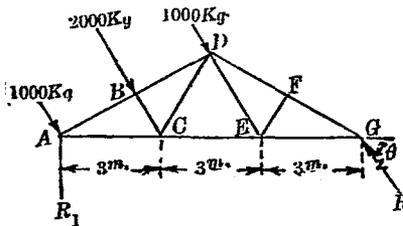
### 習 題 12.

1. 試求第198圖所示結構中各構肢之內力.但  $a-1$  與  $2-3$  相平行.  $a-2$  與  $c-1$  相平行.



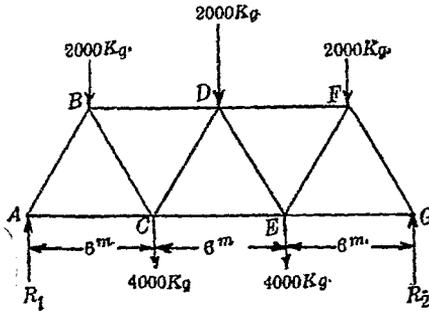
第198圖

2. 第199圖之結構上所受風壓力與  $AD$  直交.左端支於平滑之面上.其反作用力為垂直,右端則以銷釘連結於支點上.求右端之反作用力及各構肢中內力.



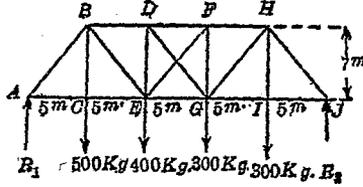
第199圖

3. 求第200圖所示結構中各內力.



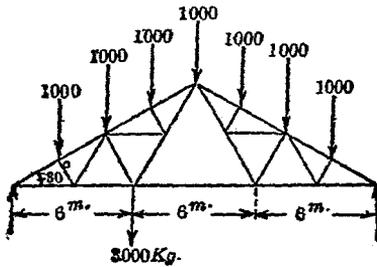
第200圖

4. 第201圖中,若DG與EF僅能抵抗拉力,問二者中何者有內力,并求各構肢中之內力.



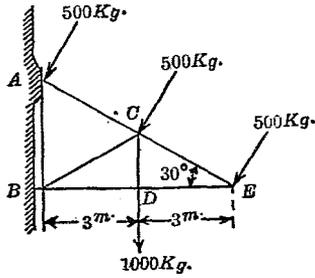
第201圖

5. 試求第202圖中各構肢之內力.



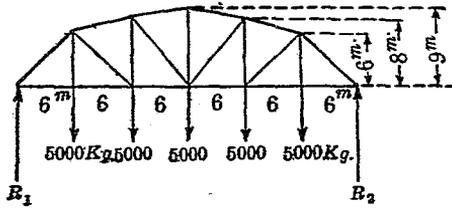
第202圖

6. 第203圖之結構以銷釘結着於A端以水平繫肢支於B端,試求各構肢之內力.



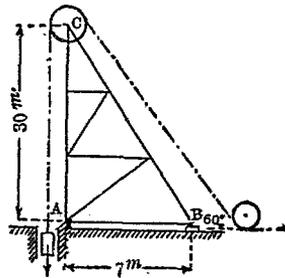
第203圖

7. 求第204圖之結構中各構肢之內力.



第204圖

8. 第205圖示一鑛山豎井 (Shaft) 口之捲揚 (Hoisting) 架構. A點以銷釘結合於支點, B點以錨釘 (Anchor bolt) 固着於地, 可抵抗向上或向下之反作用力. 求各構肢中之內力.



第205圖



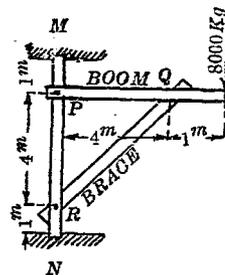
體,用平衡條件求出諸未知力.

起重機之各構肢通常非為二力肢 (Two-force member),故銷釘結合點上之作用力,通常不沿構肢之軸向,其方向為未知.代數解法中常分解之為水平與垂直二方向,而假定其指向.銷釘結合點上各構肢間之力均由銷釘傳達,非直接相互作用.若結合點僅有二個構肢相結合時,則因銷釘將力之全部自一方傳於他方,故可視為二構肢直接相互作用.若結合點有二個以上之構肢時,則各構肢上之力須視為由銷釘所作用,而銷釘則因各構肢上之反作用而保持平衡.

起重機構肢除兩端受銷釘作用外,尚有他點上受外力之作用.即其內力不限於拉內力與壓內力,并同時可有彎內力 (Bending stress) 及剪內力 (Shearing stress) 之發生.故各構肢內力之完全決定須賴乎材料力學 (Strength of materials) 上智識之輔助,此處不能詳論之,茲僅就各構肢所受諸力決定之.又因構肢上所有內力不僅軸向之力,故部份分離法亦不能應用之.通常僅取得各構肢為分離體而決定作用於其上之諸力也.

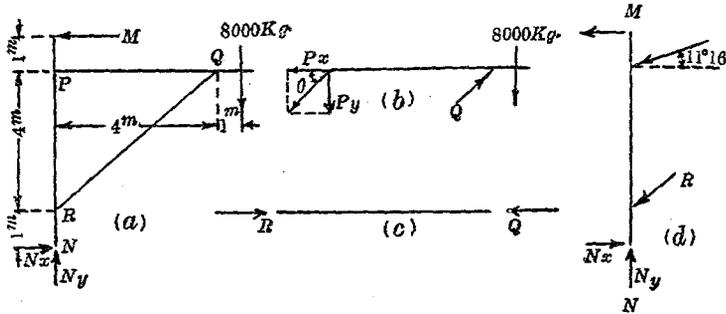
例 1. 第 208 圖之起重機,其垂直柱支於  $M, N$  兩凹座 (Socket) 內.略去各構肢之自重,試分析各力.

解 先視起重機全部為分離體,作分離體圖如第 209 圖 (a) 并假定其各



第 208 圖

未知力之指向如圖。



第 209 圖

$$\Sigma M_N = 6M - 8000 \times 5 = 0, \quad \therefore M = 6670 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = N_x - 6670 = 0, \quad \therefore N_x = 6670 \text{ kg}$$

$$\Sigma F_y = N_y - 8000 = 0, \quad \therefore N_y = 8000 \text{ kg.}$$

其方向均如圖所假定。其次因斜撐 (Brace) BQ 上之力均為未知，故須先就水平臂 (Boom) PQ 或垂直柱 (Post) MN 分析之。茲就水平臂考察之。作分離體圖如第 209 圖 (b)，其外力為 8000 kg. 之荷重，及 Q 力 (此力因斜撐為二力脫，故其作用線沿 BQ 之軸向)，與  $P_x$  及  $P_y$ ，其指向均假定如圖。

$$\Sigma M_P = Q \times 4 \sin 45^\circ - 8000 \times 5 = 0, \quad \therefore Q = 14134 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = 14134 \cos 45^\circ - P_x = 0, \quad \therefore P_x = 9993 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = 14134 \sin 45^\circ - P_y - 8000 = 0, \quad \therefore P_y = 1993 \text{ kg.}$$

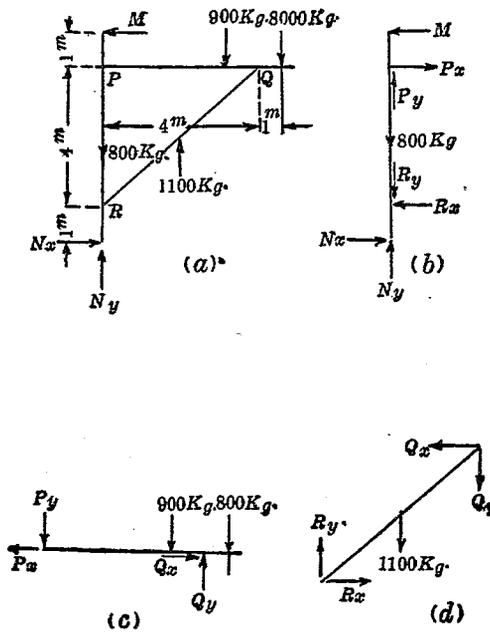
故 Q 與  $P_x$  及  $P_y$  之指向均如圖所示。 $P_x$  與  $P_y$  之合力為

$$P = \sqrt{9993^2 + 1993^2} = 10200 \text{ kg.}$$

其與水平所成之角  $\theta$  為  $\theta = \tan^{-1} \frac{1993}{9993} = 11^\circ 16'$ . 斜撐  $RQ$  之分離體圖如 (c) 圖. 垂直柱  $MN$  之分離體圖如 (d) 圖, 其上諸作用均為已知.

例 2. 今設例 1 之起重機各構肢有自重如下. 垂直柱重 800 kg., 水平臂重 900 kg., 斜撐重 1100 kg., 試分析之.

解 先作起重機全部之分離體圖如第 210 圖 (a).



第 210 圖

$$\Sigma M_N = 6M - 8000 \times 5 - 900 \times 2.5 - 1100 \times 2 = 1, \therefore M = 7408 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = N_x - M = 0, \quad \therefore N_x = 7408 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = N_y - 8000 - 900 - 1100 - 800 = 0, \quad \therefore N_y = 10800 \text{ kg.}$$

次作垂直柱之分離體圖如(b)圖。

$$\Sigma M_R = 4P_x - 7408 \times 5 - 7408 \times 1 = 0, \quad \therefore P_x = 11112 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = R_x - 7408 - 11112 + 7408 = 0, \quad \therefore R_x = 11112 \text{ kg.}$$

但  $P_y$  與  $R_y$  不能決定之。次作水平臂之分離體圖如(c)圖。

$$\Sigma M_Q = 1P_y + 900 \times 1.5 - 8000 \times 1 = 0, \quad \therefore P_y = 1662 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = Q_x - 11112 = 0, \quad \therefore Q_x = 11112 \text{ kg.}$$

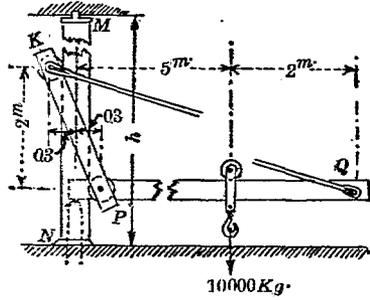
$$\Sigma F_y = Q_y - 8000 - 900 - 1662 = 0, \quad \therefore Q_y = 10562 \text{ kg.}$$

再由(b)圖，

$$\Sigma F_y = R_y + 800 - 10800 - 1662 = 0, \quad \therefore R_y = 11662 \text{ kg.}$$

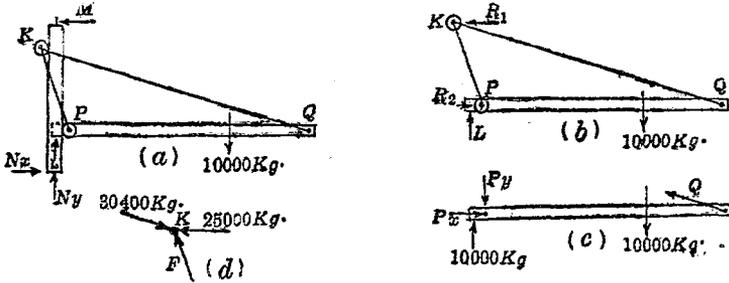
最後作斜撐之分離體圖如(d)圖，因其上諸力均為已知，可由  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$  之條件，供檢算之用。以上求得諸值代入後可知無誤。

例3. 第211圖示一水力起重機 (Hydraulic crane)，垂直柱  $MN$  為中空柱，內有活塞 (Piston)。架構  $KPQ$  以  $K, P$  二輾輓 (Roller) 支於  $MN$  柱上，賴活塞之壓力可上下運動。 $K, P, Q$  三點均為銷釘結合。此起重機共有十二個部份。即一柱  $MN$ ，一水平臂  $PQ$ ，二拉棒  $KQ$  (各在  $MN$  柱之兩側)，二撐棒  $KP$  (各在  $MN$  柱之兩側)，一銷釘  $P$ ，一銷釘  $Q$ ，一銷釘  $K$ ，二輾輓  $P$ ，一輾輓  $K$ ，共十二部。試將此起重機分析之。但略去起重機各構肢自重。



第 211 圖

解 先作該機全部之分離體圖如第 212 圖 (a)。其外力為荷重, 活塞之向上壓力  $L$ , 頂部水平反作用力  $M$ , 底部反作用力  $N_x, N_y$ , 共五力。



第 212 圖

$$\Sigma M_N = hM - 10000 \times 5 = 0, \quad \therefore M = \frac{50000}{h} \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = N_x - M = 0, \quad \therefore N_x = M.$$

$L$  與  $N_y$  尚不能求出之。次將  $KQP$  及輻輳併合視為一分離體如 (b) 圖。其外力為荷重, 活塞壓力  $L$ , 垂直柱對於輻輳上之水

平反作用力  $R_1, R_2$ , 共四力.

$$\Sigma F_y = L - 10000 = 0, \quad \therefore L = 10000 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = R_1 - R_2 = 0, \quad \therefore R_1 = R_2$$

$$\Sigma M_p = 2R_1 - 10000 \times 5 = 0, \quad \therefore R_1 = 25000 \text{ kg.} = R_2$$

次作水平臂  $PQ$  之分離體圖如 (c) 圖, 其外力為荷重, 活塞向上壓力  $10000 \text{ kg.}$ ,  $KQ$  之拉力  $Q$  (其作用線沿  $KQ$  之軸向, 因  $KQ$  為二力肢),  $P$  點銷釘上之作用力  $P_x$  及  $P_y$ , 共五力.

$$\Sigma M_p = Q \times 6.7 \times \frac{2}{\sqrt{7.3^2 + 2^2}} - 10000 \times 5 - 10000 \times 0.3 = 0,$$

$$\therefore Q = 30400 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = P_x - 30400 \times \frac{7.3}{\sqrt{7.3^2 + 2^2}} = 0,$$

$$\therefore P_x = 29500 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = P_y + 10000 - 30400 \times \frac{2}{\sqrt{7.3^2 + 2^2}} - 10000 = 0,$$

$$\therefore P_y = 7900 \text{ kg.}$$

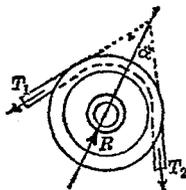
次取輻輳  $K$  為分離體, 其上受柱之向左壓力  $25000 \text{ Kg.}$  及銷釘之向右壓力  $25000 \text{ kg.}$ , 而得平衡. 更取銷釘  $K$  為分離體如 (d) 圖, 其外力為  $KQ$  之拉力  $30400 \text{ kg.}$ , 輻輳壓力  $25000 \text{ kg.}$  及  $KP$  之作用力  $F$  (因  $KP$  為二力材故  $F$  沿  $KP$  之軸向).

$$\Sigma F_y = F \times \frac{2}{\sqrt{2^2 + 0.6^2}} - 30400 \times \frac{2}{\sqrt{7.3^2 + 2^2}} = 0,$$

$$\therefore F = 8300 \text{ kg.}$$

其餘部份如  $KQ$ ,  $KP$ ,  $MN$ , 及諸帳輓與銷釘  $P$  上諸分離體圖讀者宜自作之。

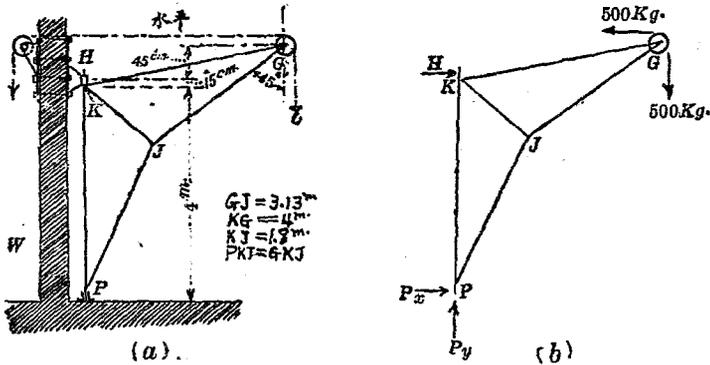
62. 繩與滑輪上之力 荷重懸於起重機上,常用多數滑輪及繩或鏈 (Chain) 之裝置,本節專討論此裝置上所作用之力。今假定支持滑輪之銷釘上無摩阻力,繩與鏈均有完全曲撓性 (Flexibility),且滑輪兩側繩上之拉力  $T_1$  與  $T_2$  相等,第 213 圖將滑輪與繩視爲一分離體,因  $T_1$  與  $T_2$  相等,故銷釘對於滑輪之反作用力  $R$  必平分  $T_1$  與  $T_2$  間之夾角  $\alpha$ ,等於  $2T \cos \alpha$ ,但  $T = T_1 = T_2$ ,繩作用於滑輪上之力實際上分布於接觸弧面上之全部,但此力與作用於繩中直線部之  $T_1$  及  $T_2$  相同值,  $T_1$  與  $T_2$  之作用線,當二力同時討論時,可移於滑輪之切線上,或移至滑輪中心,蓋此移動對於  $T_1$  與  $T_2$  之合力固無異也。



第 213 圖

繩可視爲起重機之一部份,或又可視爲與起重機相獨立之物,而作用外力於其接觸部者,若視爲起重機之一部份時則可假想將繩切斷於適當部份,視爲分離體,該斷面上之拉力視爲作用於繩之其餘部份上之外力,若視爲與起重機相獨立之物時,則作用於接觸部各點上之外力,均須考察之。

例1. 第214圖 (a) 示一起重機, 下端支於  $P$ , 上端支於  $H$ , 由圖示之滑輪及鏈之裝置, 可於  $W$  處之搖手將  $500 \text{ kg}$ . 之物舉起, 滑輪  $G$  之直徑為  $30 \text{ cm}$ . 各構肢自重可略去之. 試將該起重機分析之.



第 214 圖

解 第214圖 (b) 示該起重機全部之分離體圖, 其外力為鏈對於滑輪之壓力(即二個分力  $500 \text{ kg}$ . 之合力), 水平反作用力  $H$ , 及  $P$  點反作用力  $P_x$  與  $P_y$  等五力. 未知力之指向各假定如圖

$$\Sigma M_P = 4.15 H + 500 + (\sqrt{4^2 - 0.6^2} + 0.15) - 500 \times 4.75 = 0,$$

$$\therefore H = 77 \text{ kg}.$$

$$\Sigma F_x = P_x + 77 - 500 = 0, \quad \therefore P_x = 423 \text{ kg}.$$

$$\Sigma F_y = P_y - 500 = 0, \quad \therefore P_y = 500 \text{ kg}.$$

自垂直柱  $HKP$  外其他構肢均為二力肢. 故與結構同樣將各

結合點依次視為分離體而解之。取  $G$  點為分離體，將繩之二拉力移於滑輪中心

$$\Sigma F_x = GK \times \frac{\sqrt{4^2 - 0.6^2}}{4} + GJ \sin 54^\circ + 500 = 0$$

$$\Sigma F_y = GK \times \frac{0.6}{4} + FJ \cos 54^\circ + 500 = 0$$

解之得  $GJ = -1000 \text{ kg. (壓)}$ ,  $GK = 300 \text{ kg. (拉)}$ 。

再取  $J$  點為分離體，得

$$\Sigma F_x = JK \times \frac{1.42}{1.8} + JP \times \frac{1.42}{3.13} + 1000 \times \sin 54^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = JK \times \frac{\sqrt{1.8^2 + 1.42^2}}{1.8} - JP + \frac{\sqrt{3.13^2 - 1.42^2}}{3.13}$$

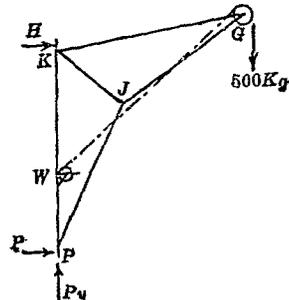
$$-1000 \times \cos 54^\circ = 0$$

解之得  $JK = -434 \text{ kg. (壓)}$ ,  $JP = -924 \text{ kg.}$

垂直柱上所作用之力全屬已知，其平衡條件  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ ，可供檢算之用。

例 2. 前例中若荷重以垂直柱  $HKP$  上所置搖手  $W$  舉之，則如何。

解 先作起重機全部之分離體圖如第 215 圖。則外力為鈎上之荷重，水平反作用力  $H$ ， $P$  點上反作用力  $P_x$  及  $P_y$ ，讀者須與第 214 圖 (b) 比較之。



第 215 圖

$$\Sigma M_p = 4.15 H + (\sqrt{4^2 - 0.6^2} + 0.15) \times 500 = 0,$$

$$\therefore H = -495 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = P_x - 495 = 0, \quad \therefore P_x = 495 \text{ kg.}$$

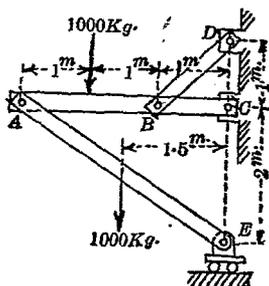
$$\Sigma F_y = P_y - 500 = 0, \quad \therefore P_y = 500 \text{ kg.}$$

故  $H$  之指向與圖所假定者相反。對於其他諸構肢上之力讀者宜自求之，其結果當與前例相異。

注意 搖手  $W$  若置於起重機自身之柱上，則  $W$  雖在任何位置， $H$  與  $P$  上之反作用力無變化。若置於起重機外部如前例所示，則因  $W$  之位置，即繩或鏈之方向，而  $H$  與  $P$  上之反作用力不相同。

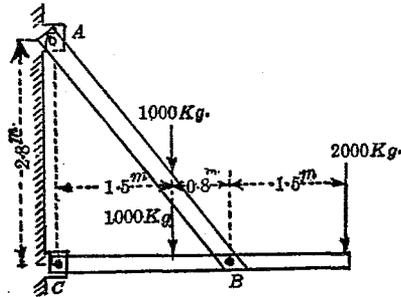
### 習 題 13.

1. 試求第 216 圖所示架構中，銷釘  $A, B, C$  對於  $AC$  構材上之反作用力。



第 216 圖

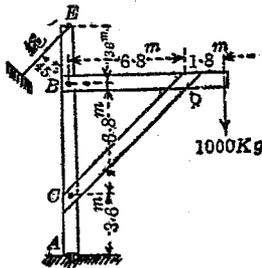
2. 試求第217圖所示架構中,  $A, B, C$  三銷釘上反作用力之垂直及水平分力。



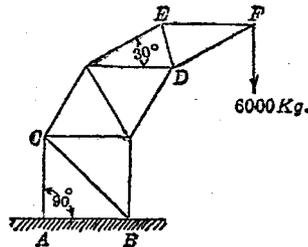
第 217 圖

3. 試求第218圖之起重機上  $BC$  構肢中銷釘  $B$  上反作用力之水平與垂直分力, 并求繩內拉力及  $BC$  中銷釘  $C$  上之反作用力。

4. 第219圖之起重機, 除  $BC, DE$  外, 各構肢均長  $3\text{m}$ , 求各構肢中內力, 并求  $A, B$  兩支點上反作用力之水平與垂直分力。

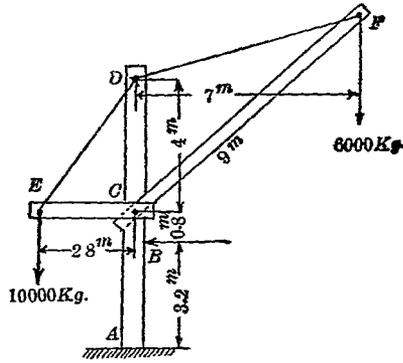


第 218 圖



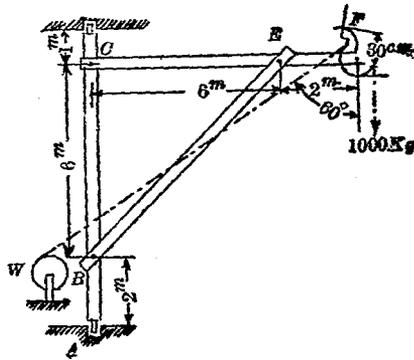
第 219 圖

5. 第220圖之起重機上求B與A兩支點上之反作用力, 但假定B點之反作用力為水平, 并求DF內之拉力及銷釘C對於CF之壓力。



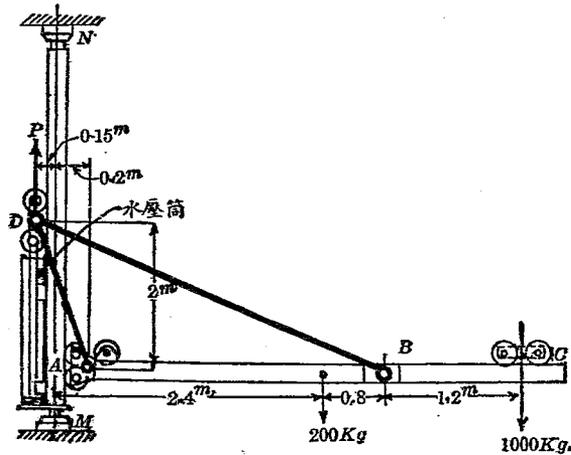
第 220 圖

6. 第221圖之起重機垂直柱AD重600 kg, 水平臂CF重400 kg. 斜撐BE重300 kg., 略去繩與滑輪之重量. 試分析該起重機各部之力。



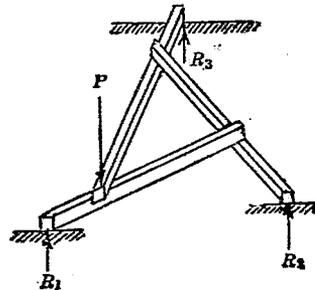
第 221 圖

7. 第 222 圖所示之水力起重機, 水平臂  $ABC$  重  $200 \text{ kg}$ , 如圖所示  $AD$  與  $BD$  之自重可略去之, 水壓力  $P$  加於銷釘  $D$  上, 使  $ABD$  之架構上下運動. 今略去一切摩阻力, 試求舉起受荷重之水平臂時所必需之  $P$  力, 并求  $BD$  與  $AD$  之內力, 及  $A, D$  二樞軸對於垂直柱之壓力.



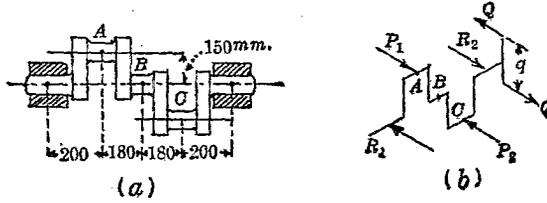
第 222 圖

8. 各長  $l$  之棒相互疊置如第 223 圖, 中央成等邊三角形, 各邊長  $\frac{2}{3}l$ , 其一隅上加荷重  $P$ , 試求  $R_1, R_2, R_3$  之反作用力.



第 223 圖

9. 第224圖之曲柄軸 (Crank-shaft)  $P_1, P_2$  各為 3000 kg. 與 2400 kg., 求軸承 (Bearing) 上反作用力  $R_1$  與  $R_2$  及力勢  $Qq$ , 以保持該軸之平衡.



第 224 圖

## 第五章

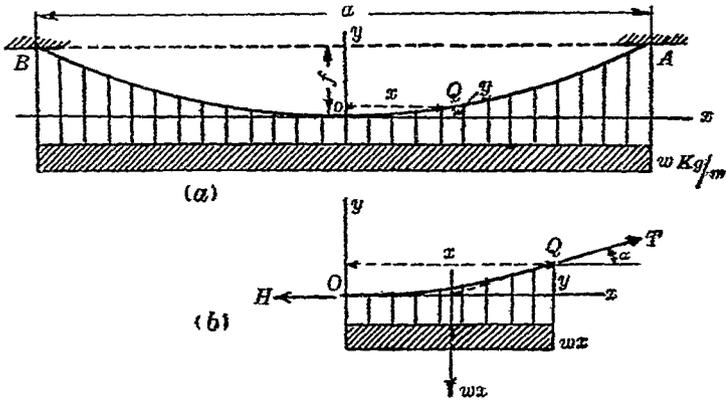
### 懸 繩

63. 概說 本章討論懸繩 (Suspended cable, wire, chain, etc.) 上力之平衡, 但假定繩索或鏈等均為完全可撓曲 (Perfectly flexible) 者, 即對於彎曲 (Bending) 不生抵抗, 僅能沿其軸向傳達其拉內力, 此內力之方向與繩之曲線相切, 實際上之繩雖非完全可撓曲者, 但對於彎曲之抵抗甚小, 可略去之, 本章內就完全可撓曲而不能拉伸之繩討論之。

64. 成拋物線形之懸繩 將繩懸於兩端, 繩上荷重沿水平距離均勻分佈, 且荷重間隔甚近, 可視為連續分布於繩上, 此時之懸繩所取曲線, 由下之證明為拋物線形, 故稱曰成拋物線形之懸繩 (Parabolic cable). 近於拋物線繩之實例, 為吊橋 (Suspension bridge) 上之索, 蓋橋面荷重可視為均勻分布於水平方向, 而索與吊鉤之自重較橋面荷重甚小, 可略去之, 又一實例為拉緊之繩, 即垂度 (Sag) 較跨長 (Span) 為小, 除自重外不受他種荷重, 例如送電線 (Transmission line), 電報線等是也, 此時繩之自重沿曲線上均勻分布, 但因垂度甚小, 曲線上部份弧長之水平射影略等於該弧長, 故荷重可視為均勻

分布於水平方向。茲分對稱形與非對稱形二種拋物線形之懸繩論之

(i) 對稱形 繩之兩端在同一水平線上，則拋物線形之懸繩成爲對稱形。設第225圖(a)上繩AOB懸於A, B兩點。水



第225圖

平距離每單位長上所受荷重設爲  $w$ ，A, B 間跨長設爲  $a$ ，垂度設爲  $f$ ，繩之最低點上拉力設爲  $H$ ，任意一點  $Q$  (其座標爲  $x, y$ ) 上拉力設爲  $T$ ，今取圖中  $OQ$  部份之繩視爲分離體，作分離體圖如第225圖 (b)。荷重  $w x$  作用於  $x$  之中點，因該分離體爲平衡，故對於  $Q$  點取力勢得

$$Hy = wx \cdot \frac{x}{2}$$

由此得  $y = \frac{w}{2H} x^2$  .....(1)

此爲拋物線之方程式，其軸與  $y$  軸一致，而頂點與  $O$  一致。以  $A$

點座標即  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = f$  代入於(1)式, 得

$$H = \frac{wa^2}{8f} \dots\dots\dots(2)$$

以(2)代入於(1), 得

$$y = \frac{4f}{a^2}x^2 \dots\dots\dots(3)$$

任意一點拉力  $T$  可求之如下. 設  $\alpha$  為  $Q$  點上曲線之傾斜角, 由第 225 圖 (b) 得  $T \sin \alpha = wx$ ,  $T \cos \alpha = H$ , 二式自乘相加開方之得

$$T = \sqrt{w^2x^2 + H^2} = w\sqrt{x^2 + \frac{a^4}{64f^2}} \dots\dots\dots(4)$$

在繩之兩懸點即  $A, B$  處, 則  $x = \pm \frac{a}{2}$ , 代入(4)式, 得

$$T = \frac{1}{2}wa\sqrt{1 + \frac{a^2}{16f^2}} \dots\dots\dots(5)$$

下表示對於各種垂度比 (Sag ratio)  $n$  (即  $\frac{f}{a}$ ) 之  $\frac{T}{wa}$  值.

$n$	1.0	0.5	0.25	0.125	0.1	0.05	0.01
$\frac{T}{wa}$	0.515	0.559	0.707	1.118	1.346	2.550	12.81

對於已知跨長  $a$  及垂度  $f$  之繩長  $s$  可求之如下. 設  $ds$  為繩上極小部份之長, 則因該繩為平面曲線, 故

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

由(2)式得  $\frac{dy}{dx} = \frac{8f}{a^2}x$ ,

$$\therefore ds = dx \sqrt{1 + \frac{64f^2}{a^4} x^2} \dots\dots\dots(6)$$

$$s = 2 \int_0^{\frac{a}{2}} dx \sqrt{1 + \frac{64f^2}{a^4} x^2} \dots\dots\dots(7)$$

上式積分之，得

$$s = a \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + 16 \frac{f^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{a}{8f} \log_e \left\{ 4 \frac{f}{a} + \left( 1 + 16 \frac{f^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right] \dots\dots\dots(8)$$

\* 之近似式可將(6)式展開之如下。

$$ds = \left( 1 + 32 \frac{f^2}{a^2} \cdot \frac{x^2}{a^2} - 512 \frac{f^4}{a^4} \cdot \frac{x^4}{a^4} + \dots\dots \right) dx$$

將此代入(7)式積分之，得 s 之近似式如下。

$$s = a \left( 1 + \frac{8}{3} \cdot \frac{f^2}{a^2} - \frac{32}{5} \cdot \frac{f^4}{a^4} + \dots\dots \right) \dots\dots\dots(9)$$

下表示對於數個垂度比  $n = \frac{f}{a}$  時，由精密式(8)及近似式(9)

所得  $\frac{s}{a}$  之值。

$n =$	1.0	0.5	0.25	0.125	0.1	0.05	0.01
$\frac{s}{a}$ 精密值	2.3234	1.4789	1.1478	1.0402	1.0260	1.0066	1.0003
$\frac{s}{a}$ 近似值			0.1417	1.0401	1.0260	1.0066	1.0003

實際上  $\frac{f}{a}$  小於  $\frac{1}{8}$  時，用近似式(9)中之首先三項可得充分精密程度。

例。一吊橋每索上所受荷重沿水平方向每公尺有 1500 kg，橋之跨長為 300 m，垂度 20 m，求索之兩端與中點

之拉力,并求索之長度.

解 由(2)式

$$H = \frac{1500 \times 300^2}{8 \times 20} = 843750 \text{ kg.}$$

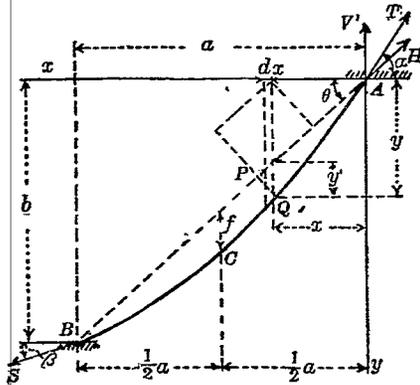
由(5)式得

$$T = \frac{1}{2} \times 1500 \times 300 \sqrt{1 + \frac{300^2}{16 \times 20^2}} = 870750 \text{ kg}$$

由(9)式得

$$s = 300 \left[ 1 \times \frac{8}{3} + \left( \frac{20}{300} \right)^2 - \frac{32}{3} \left( \frac{20}{300} \right)^4 \right] = 303.6 \text{ m.}$$

(ii) 非對稱形 繩之兩端不在一水平線上時為非對稱形.例如226圖上  $ACB$  示一繩懸於  $A, B$  兩點.此時由下之證



第226圖

明,  $ACB$  曲線亦為拋物線之一部份.今設  $a$  為  $A, B$  兩端水平距離,  $b$  為  $A, B$  兩端垂直距離,  $\theta$  為  $A, B$  直線與水平所成之角,

即  $\theta = \tan^{-1} \frac{b}{a}$ , 取  $A$  爲原點,  $x$  與  $y$  軸各如圖所示,  $ACB$  曲線上任意一點  $Q$  之座標爲  $x, y$ , 又設  $T$  爲最高點  $A$  處之拉力,  $H', V'$  爲沿  $AB$  與  $Ay$  方向上之  $T$  之分力. 今取  $AQ$  爲分離體, 作用於  $AQ$  上之力爲  $T, wx$  及  $Q$  點之拉力. 由平衡條件, 對於  $Q$  點取力勢必爲零故  $V'x - wx \cdot \frac{x}{2} - H' \cdot \overline{QP} = 0$ .

$$\text{或} \quad V'x - \frac{wx^2}{2} - H'(y \cos \theta - x \sin \theta) = 0 \dots\dots\dots(10)$$

上式爲  $x, y$  之拋物線方程式. 次將上之曲線方程式以  $a, b$  及  $AB$  弦中點之垂直垂度  $f_1$  三者表示之. 作用於繩之全部上之力爲荷重  $wa$ ,  $A$  點之拉力  $T$  及  $B$  點之拉力  $S$  三者. 對於  $B$  點取力勢得平衡方程式如下:

$$wa \frac{a}{2} - V'a = 0,$$

$$\therefore V' = \frac{wa}{2} \dots\dots\dots(11)$$

作用於繩之上半部  $AC$  上之力爲荷重  $\frac{wa}{2}$ ,  $A$  點拉力  $T$ , 及  $C$  點拉力三者. 對於  $C$  點取力勢得平衡方程式如下:

$$\frac{wa}{2} \cdot \frac{a}{4} - V' \frac{a}{2} + H' f_1 \cos \theta = 0,$$

$$\therefore H' = \frac{wa^2}{8 f_1 \cos \theta} \dots\dots\dots(12)$$

以 (11) 及 (12) 兩式代入於 (10), 得

$$\frac{4 f_1 x}{a^2} (a - x) = y - x \tan \theta,$$

或 
$$y = (4f_1 + b) \frac{x}{a} - 4f_1 \frac{x^2}{a^2} \dots\dots\dots(13)$$

上式即表示曲線  $ACB$  之方程式, 故知  $ACB$  亦為拋物線之一部份. 任意一點  $Q$  離  $AB$  弦之垂直距離  $y'$  如下:

$$y' = y - x \tan \theta = \frac{4f_1 x}{a^2} (a - x) \dots\dots\dots(14)$$

拋物線之頂點座標  $x_0, y_0$  可由  $\frac{dy}{dx} = 0$  之條件求之. 由 (13) 式得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f_1}{a} + \frac{b}{a} - \frac{8f_1}{a} \frac{x}{a}$$

上式等於零時,

$$x_0 = \frac{a(4f_1 + b)}{8f_1}, \text{ 因之 } y_0 = \frac{(4f_1 + b)^2}{16f_1} \dots\dots\dots(15)$$

次求  $A$  點拉力  $T$  如下. 設  $V, H$  為  $T$  之垂直與水平分力, 則

$$H = H' \cos \theta = \frac{wx^2}{8f_1}$$

$$V = V' + H' \sin \theta = \frac{wa}{2} \left( 1 + \frac{a}{4f_1} \tan \theta \right)$$

$$\begin{aligned} \therefore T &= \sqrt{H^2 + V^2} = \frac{wa^2}{8f_1} \sqrt{1 + \left( \frac{Hf_1}{a} + \tan \theta \right)^2} \\ &= \frac{1}{2} wa \left[ \frac{1}{16n_1^2} + \frac{\sin \theta}{2n_1} + 1 \right]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots(16) \end{aligned}$$

但  $n_1$  為垂度比, 即  $f_1 \div \overline{AB} = \frac{f_1}{a \sec \theta}$ , 由 (16) 式則  $w, a, f_1$  為一定時

荷增大  $T$  亦增加. 且  $w, a, \theta$  一定時則  $n_1$  減小時  $T$  增加.

最後求拋物線弧  $AB$  之長. 設  $a_1$  為弦  $AB$  之長,  $s_1$  為弧  $AB$

之長，因  $ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

由 (13) 式，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4f_1}{a} \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \tan \theta = \left[4n_1 \left(1 + \frac{2x}{a}\right) + \sin \theta\right] \sec \theta$$

代入前式，得

$$ds = \left\{1 + 8n_1 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left[2n_1 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \sin \theta\right]\right\}^{\frac{1}{2}} \sec \theta dx$$

上式以  $ds = (1+X)^{\frac{1}{2}} \sec \theta dx$  之形式代之，但

$$X = 8n_1 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left[2n_1 \left(1 - \frac{2x}{a}\right) + \sin \theta\right]$$

若垂度不甚大，則曲線上各點  $ds$  略與  $\sec \theta dx$  相等，故  $(1+X)$  略等於 1，即  $X$  較 1 甚小。 $(1+X)$  可以二項定理展開之，併略去其高次項，得近似式如下。

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2\right) \sec \theta dx$$

$$\therefore s_1 = \int_0^a \left(1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2\right) \sec \theta dx$$

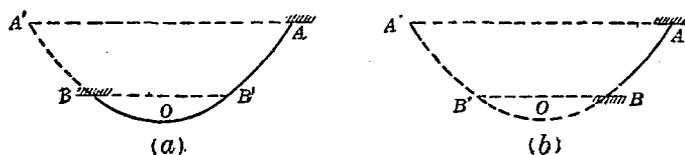
將  $X$  與  $X^2$  之值代入，得

$$s_1 = a_1 \left(1 + \frac{8}{3} \cos^2 \theta \cdot n_1^2 - \frac{32}{5} n_1^4\right) \dots\dots\dots (17)$$

注意 上之近似式若不便應用時，可用下法求  $AB$  弧之精確長度。設  $a, b, f_1$  為已知，先用 (5) 式求拋物線之頂點。如第 227 圖 (a), (b)，再由 (8) 式求弧  $AOA'$  及  $BOB'$  之長，然後求  $AB$  弧長  $s_1$  如下：

$$s_1 = \frac{1}{2} AO A' + \frac{1}{2} BO B' \quad (\text{第 227 圖 (a)})$$

或 
$$s_1 = \frac{1}{2} AO A' - \frac{1}{2} BO B' \quad (\text{第 227 圖 (b)})$$



第 227 圖

65. 成懸垂線形之懸繩 可完全撓曲而斷面均勻之繩索或鏈懸於兩端，僅受沿曲線上勻布之自重，不受其他任何荷重時，則曲線之形由下之證明成爲懸垂線 (Catenary)。成懸垂線形之懸繩 (Catenary cable) 中實用上重要者，乃垂度比爲較大之懸繩，蓋垂度比小者略可視爲成拋物線形之繩。可用前節公式求近似結果。茲分對稱形與非對稱形二者論之。

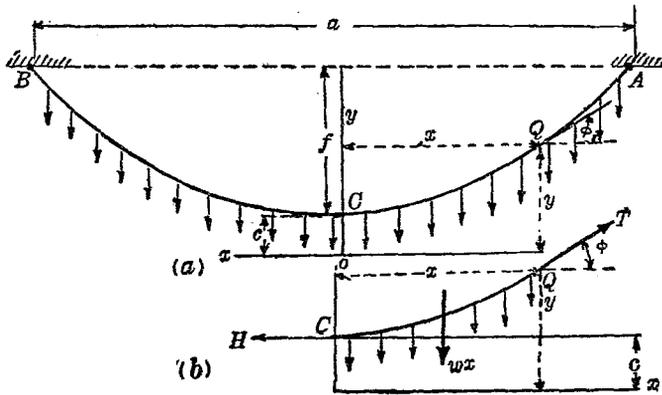
(i) 對稱形 二端懸點在同一水平線上者即爲對稱形懸垂線。第 228 圖 (a) 中  $ACB$  爲懸繩， $A, B$  在同一水平線上， $C$  爲其中點。 $Q$  爲繩上任意一點， $s$  爲  $CQ$  曲線之長， $H$  爲  $C$  點上拉力， $T$  爲  $Q$  點拉力， $\phi$  爲  $Q$  點上切線之傾斜角， $w$  爲沿繩上單位長之重量， $c$  爲相當於  $\frac{H}{w}$  之長度。今以  $CQ$  爲分離體，作分離體圖如 228 圖 (b)。其上之外力爲  $H, T$  及  $ws$ ，由平衡條件得

$$T \cos \phi = H,$$

$$T \sin \phi = ws,$$

$$\therefore \tan \phi = \frac{wS}{H} = \frac{s}{c} \quad \text{但 } \tan \phi = \frac{dy}{dx},$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{S}{c} \dots\dots\dots(1)$$



第 228 圖

因  $dS^2 = dx^2 + dy^2$ ,  $\therefore \left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1$ ,  $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

因之  $\left(\frac{ds}{dy}\right)^2 = \frac{c^2}{s^2} + 1 = \frac{c^2 + s^2}{s^2}$ ,  $\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{s^2}{c^2} = \frac{c^2 + s^2}{c^2}$  } .....(2)

將(2)式中第一式積分之,得  $y = \sqrt{c^2 + s^2} + A$ , 但  $A$  為積分常數.

若  $y=c$ , 則  $s=0$ ,  $\therefore A=0$ , 因之

$$y^2 = c^2 + s^2, \quad \text{或 } s^2 = y^2 - c^2 \dots\dots\dots(3)$$

將(2)式中第二式積分之,得

$$x = c \log_e \left[ \frac{s}{c} + \sqrt{\left(\frac{s}{c}\right)^2 + 1} \right] = c \operatorname{sinh}^{-1} \frac{s}{c} \dots\dots\dots(4)$$

其積分常數爲零,因  $x=0$  時,  $s=0$  故也.由(4)式得

$$s = \frac{1}{2}c \left( e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right) = c \operatorname{sinh} \frac{x}{c} \dots\dots\dots(5)$$

由(3)與(4)或(3)與(5)消去  $s$ , 可得懸垂線之方程式. 將(5)式自乘之與(3)式相比較,得

$$y = \frac{1}{2}c \left( e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right) = c \operatorname{cosh} \frac{x}{c} \dots\dots\dots(6)$$

或 
$$x = c \log_e \left[ \frac{y}{c} + \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1} \right] = c \operatorname{cosh}^{-1} \frac{y}{c} \dots\dots\dots(7)$$

任意一點上切線之傾斜角  $\phi$  可以  $x, y$  表之. 如下:

$$\tan \phi = \frac{s}{c} = \frac{1}{2}c \left( e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}} \right) = \operatorname{sinh} \frac{x}{c} \dots\dots\dots(8)$$

$$\sin \phi = \frac{s}{y}, \quad \cos \phi = \frac{c}{y} \dots\dots\dots(9)$$

再由平衡條件,任意一點  $Q$  上拉力  $T$  及  $C$  點上拉力  $H$  可求之如下:

$$T \sin \phi = ws, \quad T \cos \phi = wc, \dots\dots\dots(10)$$

由(9)式,得

$$T = wy \dots\dots\dots(11)$$

即  $Q$  上拉力  $T$  等於繩單位長之重量與  $y$  之乘積. 故  $T$  之值與  $y$  成比例,即自  $C$  至  $A$  繼續增加,再由  $c$  之定義,得

$$H = wc \dots\dots\dots(12)$$

由 (10), (11), (12) 三式得下之結論.

1. 任意一點上拉力之水平分力爲常數,其值等於  $wc$ .
2. 任意一點上拉力之垂直分力爲  $ws$ , 與  $s$  成比例.
3. 任意一點上拉力爲  $wy$ , 與  $y$  成比例.

工程上最重要者爲懸點之拉力,蓋此處拉力爲最大值. 設跨長爲  $a$ , 垂度爲  $f$ , 繩  $ACB$  之長爲  $s_1$ , 則懸點上  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = c + f$ ,  $s = \frac{s_1}{2}$ , 故得懸點上之拉力如下:

$$T = w(c + f), \quad H = wc \dots \dots \dots (13)$$

$c$  之值可如下求之. 以  $A$  點座標代入於 (3), 得

$$(c + f)^2 = c^2 + \frac{s_1^2}{4}, \quad \therefore c = \frac{s_1^2}{8f} - \frac{f}{2} \dots \dots \dots (14)$$

又或由 (4) 式, 得

$$\frac{a}{2} = c \sin h^{-1} \frac{f_1}{2c} \dots \dots \dots (15)$$

又或由 (6) 式, 得

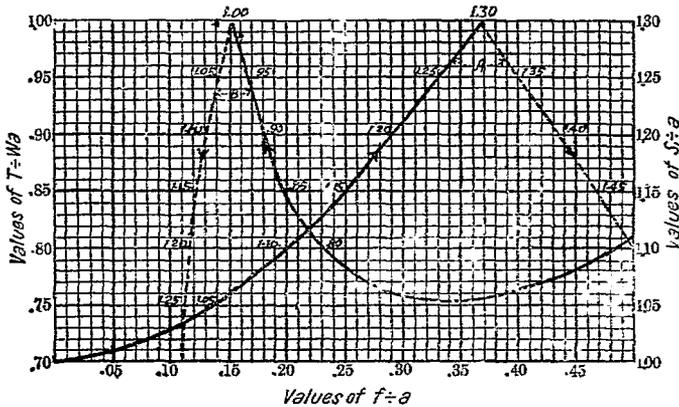
$$f + c = c \cos h \frac{a}{2c} \dots \dots \dots (16)$$

故  $a, s_1, f$  三者中任意知其兩者可求  $c$  值, 因之由 (6), (7) 兩式可決定懸垂線. (15) 與 (16) 兩式僅能由試探法 (Trail method) 解之. 但此法冗長, 故用第 229 圖可省煩勞. 圖中曲線  $A$  示  $\frac{f}{a}$  與  $\frac{s_1}{a}$  之關係,  $\frac{f}{a}$  之值自 0 至 0.5, 其相應之  $\frac{s_1}{a}$  值自 1 至 1.50 左右. 例如  $a = 300 \text{ m.}$ ,  $f = 50 \text{ m.}$ , 則  $\frac{f}{a} = 0.17$ , 由曲線  $A$  得  $\frac{s_1}{a} = 1.07$ , 故

$s_1 = 300 \times 1.07 = 321 \text{ m.}$ , 由 (14) 式可求得  $c$  值.

若第 229 圖不能利用時, 僅得由試探法解之. 例如已知繩之強度  $T$ , 單位長重量  $w$ , 及跨長  $a$ , 而求繩長  $s_1$  時, 則由 (13) 式, 得

$$\frac{T}{wa} = \frac{f}{a} + \frac{c}{a} \dots\dots\dots(17)$$



第 229 圖

上式中  $f$  與  $c$  為未知, 由 (16) 與 (17) 式可求出之. 但此解法僅能由試探法解之.  $c$  與  $f$  既知後, 即可由 (14) 式求  $s_1$  之值. 第 229 圖上曲線 B 示  $\frac{f}{a}$  與  $\frac{T}{wa}$  之關係. 前例中  $\frac{f}{a} = 0.17$ , 由圖上得

$$\frac{T}{wa} = 0.93, \quad \therefore T = 0.93 wa$$

例 1. 一繩每公尺重 6 kg., 懸於同一水平線上之兩端繩長 200 m., 懸點之拉力 1000 kg., 求垂度及跨長.

解 由第(11)式  $y = \frac{T}{w} = \frac{1000}{6} = 166.7 \text{ m.}$

由(3)式  $c = \sqrt{y^2 - s^2} = \sqrt{(166.7)^2 - (100)^2} = 133.4 \text{ m.}$

$$f = y - c = 166.7 - 133.4 = 33.3 \text{ m.}$$

由(4)式  $x = 133.4 \log_e \left[ \frac{100}{133.4} + \sqrt{\left( \frac{100}{133.4} \right)^2 + 1} \right]$   
 $= 133.4 \log_e 2 = 92.5 \text{ m.}$

$$\therefore a = 2x = 185.0 \text{ m.}$$

例2. 一繩每公尺重 3 kg., 懸於兩端, 跨長 300 m., 垂度 30 m., 求兩端拉力及繩長.

解 因  $a = 300 \text{ m.}$ ,  $f = 30 \text{ m.}$ , 故  $\frac{f}{a} = 0.1$ , 由第 229 圖曲線 A, 得

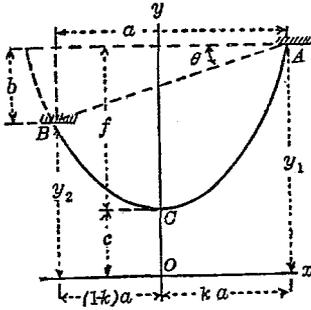
$$\frac{s_1}{a} = 1.03, \quad \therefore s_1 = 1.03 \times 300 = 309 \text{ m.}$$

由第(14)式, 得  $c = \frac{(319)^2}{8 \times 30} - \frac{30}{2} = 383 \text{ m.}$

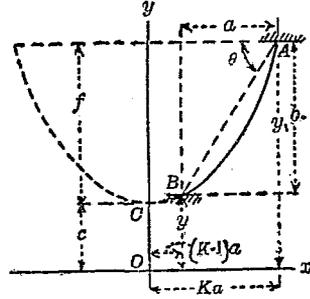
再由(13)式中第一式

$$T = 3(383 + 30) = 1239 \text{ kg.}$$

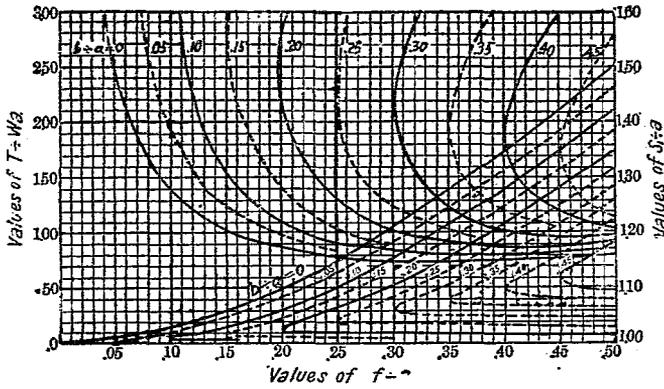
(ii) 非對稱形 兩懸點非在同一水平線上, 即成非對稱形. 此時頂點  $C$  或在繩內, 如第 230 圖, 或在繩外, 如第 231 圖. 二圖中  $a$  為兩懸點  $A, B$  間水平距離,  $b$  為其垂直距離  $\theta$  為  $AB$  直線與水平所成角度, 即  $A, C$  兩點間垂直距離,  $s_1$  為  $AB$  弧長. 多數問題均須用試探法解之, 實際上用第 232 圖以解之, 較為便利.



第 230 圖



第 231 圖



第 232 圖

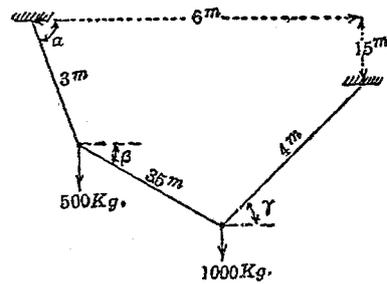
第 232 圖中右下部之曲線示  $\frac{f}{a}$  與  $\frac{s_1}{a}$  之關係，對於 10 個  $\frac{b}{a}$  之值有 10 個曲線。圖中上部之曲線示  $\frac{f}{a}$  與  $\frac{T}{wa}$  之關係，對於同樣 10 個之  $\frac{b}{a}$  值而有 10 個曲線，但  $T$  表示上端懸點之拉力， $w$  示單位繩長之重量。例如  $a=200\text{ m.}$ ,  $b=40\text{ m.}$ ,  $s_1=240\text{ m.}$ ,

$w = 2 \text{ kg./m.}$ , 由圖上右下部之曲線羣中擇  $\frac{b}{a} = 0.2$  之曲線, 因  $\frac{s_1}{a} = 1.2$ , 故得  $\frac{f}{a} = 0.385$ , 因之  $f = 0.385 \times 200 = 77 \text{ m.}$ , 再由上方曲線羣中擇  $\frac{b}{a} = 0.2$  之曲線, 得  $\frac{T}{wa} = 0.9$ , 故

$$T = 0.9 \times 2 \times 200 = 360 \text{ kg.}$$

註 第 229 圖及 232 圖根據 E. R. Maurer 及 R. J. Roark 二氏所著 "Technical Mechanics" 第五版 p. 122 及 p. 123.

66. 受集中荷重之懸繩 (i) 繩之自重可略去時——繩上若受一個荷重時, 則繩所取之傾斜度及其拉力方向易於決定, 作示力圖即得拉力之值. 若繩上受數個荷重時, 繩雖取一定位置, 但其各部傾斜度為未知, 而拉力方向亦屬未知. 例如第 233 圖上以一定縮尺作圖, 其長度雖無誤而傾斜度  $\alpha, \beta, \gamma$  則未確定. 設  $OA$  部拉力為  $T_1$ ,  $AB$  部拉力為  $T_2$ ,  $BN$  部拉



第 233 圖

力為  $T_3$ , 各懸點  $A, B$  上均有三力作用. 由平衡條件得

$$T_1 \cos \alpha = T_2 \cos \beta, \quad T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \beta = 500,$$

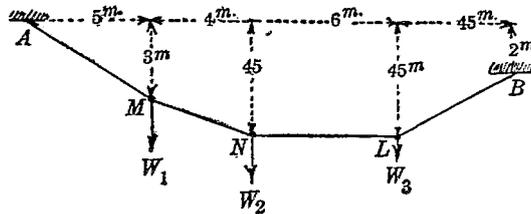
$$T_2 \cos \beta = T_3 \cos \gamma, \quad T_2 \sin \beta + T_3 \sin \gamma = 1000.$$

又

$$3 \cos \alpha + 3.5 \cos \beta + 4 \cos \gamma = 6,$$

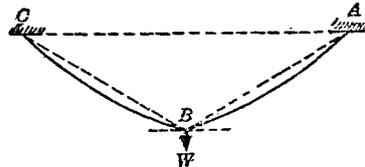
$$3 \sin \alpha + 3.5 \sin \beta - 4 \sin \gamma = 1.5.$$

由上之六個聯立方程式可解六個未知數  $\alpha, \beta, \gamma, T_1, T_2, T_3$  之值但此解算已屬不易若荷重個數增多時, 方程式之數愈多, 解算更屬困難. 反之若繩取一定位置而求各懸點上荷重之時則可假定諸荷重中任意一者而後決定其他荷重. 例如第 234 圖上假定  $W_1 = 500 \text{ kg}$ , 則  $AM, MN$  內拉力可由示力三角形決定之.  $MN$  內拉力既知後, 則  $W_2$  及  $NL$  內拉力亦可同樣求得. 再由  $NL$  拉力可求  $W_3$  及  $LB$  內拉力.



第 234 圖

(ii) 繩之自重不可略去時——繩上懸荷重時, 假定各部之繩所取曲線形狀甚扁平, 可視為拋物線之一部份者. 此時各部繩之重量略等於該部弦之重量. 例如第 235 圖中繩



第 235 圖

$ABC$  懸於  $AC$  兩點荷重懸於中點  $B$  上. 則  $AB$  或  $BC$  各依第 64 節 (ii) 所論, 可解未知量, 但施算較煩, 茲不贅述.

## 習 題 14.

1. 一電線每公尺重  $0.15 \text{ kg}$ . 拉於相距  $50 \text{ 公尺}$  兩電柱間, 同在一水平線上之絕緣子 (Insulators) 處. 拉力為  $250 \text{ kg}$ . 求垂度, 及線長. 假定電線自重勻布於水平方向.
2. 吊橋上每索所受荷重沿水平方向均勻分布. 每公尺為  $1800 \text{ kg}$ , 跨長為  $350 \text{ m}$ , 垂度  $30 \text{ m}$ , 求索中最大內力及索長.
3. 索長  $33 \text{ m}$ . 懸於相距  $32.5 \text{ m}$ . 之同一水平線上兩點. 若索上荷重勻布於水平方向, 試求垂度.
4. 一繩長  $300 \text{ m}$ , 每公尺重  $0.8 \text{ kg}$ , 兩端拉力為  $140 \text{ kg}$ , 求垂度及兩懸點之水平距離. 假定兩懸點在於同一水平線上且成懸垂線.
5. 一繩之准受拉力 (Allowable tension) 為  $100 \text{ kg}$ , 其重量每公尺為  $0.08 \text{ kg}$ . 若最大垂度為  $5 \text{ m}$ , 求水平線上兩懸點間之最大距離. 假定該繩取拋物線形.
6. 一繩每公尺重  $3 \text{ kg}$ . 懸於同一水平線上之兩點, 該兩點相距  $50 \text{ m}$ , 若垂度為  $2 \text{ m}$ , 求繩長及懸點上拉力. 假定該繩取懸垂線形.
7. 一繩長  $33 \text{ m}$ , 懸於同一水平線上之兩點, 其相距為  $25 \text{ m}$ , 求中點之垂度. 假定該繩取懸垂線形.
8. 一繩每公尺重  $0.15 \text{ kg}$ . 准受拉力為  $800 \text{ kg}$ , 懸於同一

水平線上相距 300 m. 之兩點. 假定該繩取拋物線形, 試求最短繩長.

9. 一繩懸於同一水平線上相距 70 m. 之兩點上, 垂度 30 m., 求繩長.

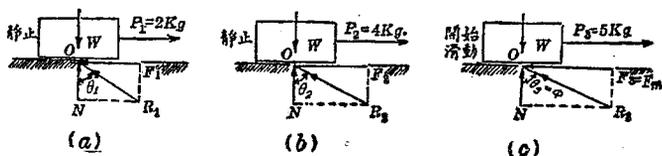
10. 一繩長 84 m. 懸於同一水平線上相距 25 m. 之兩點  $A, B$  間, 另一物體重 500 kg. 懸於繩上一點  $C$ ,  $C$  點離  $A$  為  $x$  公尺, 求  $x=0, 5, 10, 15, 20, 25$  m. 時  $AC$  部份之拉力. 試作曲線以示拉力與  $x$  之關係.

## 第六章 摩阻力

67. 概說 甲物體若將開始滑動或正在滑動於乙物體之面時，則接觸面上常發生阻止二物體間相對的運動之力，此力稱之曰摩阻力 (Friction)。摩阻力在工程上極為重要。因此力常阻止運動，為多種機械上動力損失之主要原因，通常用潤滑劑 (Lubricant) 以減少此摩阻力，但有種機械如制動機 (Brake)，摩擦傳動 (Friction drive) 等須利用此摩阻力。吾人走路時實亦賴此摩阻力，完全光滑之面如冰面等，吾人皆不能行動於其上。

凡一物體上加以外力，而仍靜止於他靜止面上時，阻止該物體所有運動傾向 (Tendency to move) 之阻力稱曰靜摩阻力 (Static friction)。當該物體因外力之增大而開始運動時，此時靜摩阻力達最大值，此值稱曰限界摩阻力 (Limiting friction)。

第236圖 (a) 上一物體重  $W$  kg. 靜止於一水平面，加以水平力  $P_1 = 2$  kg. 拉之而仍靜止。此平衡力系中之諸力為重量  $W$ ；直交壓力 (Normal pressure)  $N (=W)$ ，拉力  $P_1$ ，靜摩阻力



第 236 圖

$F_1 (=P_1)$  等四力。靜摩阻力之作用線與接觸面成切線或沿該面，直交壓力之作用線與接觸面成直交。直交壓力與靜摩阻力  $F_1$  之合力  $R_1$  為該物體接觸面上之全反作用力 (Total reaction)。當  $P_1$  增大為  $P_2 = 4 \text{ kg}$  時，則  $F_1$  亦增大為  $F_2 (=P_2)$  如 (b) 圖，待拉力增至  $F_3 = 5 \text{ kg}$  時，該物體適開始滑動，如 (c) 圖，此時之摩阻力  $F_3 (=P_3)$  為限界摩阻力。要之靜摩阻力隨拉力  $P$  之變化而亦同樣變化，但限界摩阻力對於一定物質及接觸面上一定直交壓力，有一定之值。設以  $F_m$  表示之，且由前圖可知角度  $RON$  即全反作用力對於接觸面上直交線之夾角，亦隨拉力之大小而變化，拉力增大時該角亦增大。待拉力  $P$  等於限界摩阻力時，物體開始滑動，該角亦達一定之限界值。設以  $\phi$  表示之，此限界值之角  $\phi$  稱曰靜摩阻角 (Angle of static friction)。若二物體之接觸面不為平面時，則上述關係均對於接觸面上各極小部份而言。

前例中之物體當開始滑動後，摩阻力即較限界摩阻力減少，但仍作用於二物體之接觸面間，阻止其相對的運動。此時之摩阻力稱為動摩阻力 (Kinetic friction)。

凡靜摩阻力與動摩阻力之作用方向均與物體所起運動之方向相反。

摩阻力與附着力 (Adhesion) 不同。附着力因二接觸面間相互引力 (Attraction) 而生，與接觸面之面積有關係，與接觸面上直交壓力無關係。但摩阻力則與接觸面之面積無關係，與接觸面上直交壓力有關係。工程上對於附着力無甚重要，可略去之。

二物體接觸面若甚硬而磨成極平滑時，則摩阻力極小，幾近於零。此時接觸面上之反作用力可視為與接觸面成直交。以前各章中均假定摩阻力較其他諸力為甚小，故均曾略去之。

68. 摩阻力係數 二物體接觸面間之靜摩阻力係數 (Coefficient of static friction) 者，乃對於該接觸面上所受直交壓力之限界摩阻力  $F_m$  與該直交壓力  $N$  之比，通常以  $\mu$  表示

之。即 
$$\mu = \frac{F_m}{N},$$

或 
$$F_m = \mu N.$$

且 
$$F \leq \mu N.$$

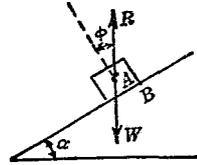
但  $F$  為不大於限界摩阻力之靜摩阻力。

靜摩阻角  $\phi$  與靜摩阻力係  $\mu$  間有一定之關係。由前節

第 225 圖 (c) 得 
$$\tan \phi = \frac{F_m}{N}.$$

$$\therefore \mu = \tan \phi.$$

今設將第236圖之物體置於斜面上,如第237圖. 不加拉力,僅將該斜面之傾角漸漸增加,待傾角達一定值 $\alpha$ 時,則該物體即開始沿斜面滑下.此 $\alpha$ 角稱曰靜心角(Angle of repose),即等於靜摩阻角 $\phi$ ,今證之如下.



第237圖

設第237圖之物體 $A$ 在於將開始滑下之瞬間,將物體 $A$ 視為分離體,則其外力為重力 $W$ 及其接觸面上反作用力 $R$ ,此二者相互平衡,必在於一直線上,如圖所示.因物體適開始滑動,故 $R$ 與接觸面直交線間之夾角必為靜摩阻角 $\phi$ ,由幾何學上關係,可知 $\alpha = \phi$ ,故靜止角即等於靜摩阻角.

二物體 $A$ 與 $B$ 間之靜止摩阻力係數 $\mu$ 可由實驗決定之,其方法有二

(i) 如第236圖所示,將 $A$ 置於 $B$ 上,以力拉之,待 $A$ 適開始滑動時,測定該瞬間之拉力 $P$ ,以 $A$ 之重量除之,即得 $\mu$ 之數值.

(ii) 將 $B$ 面漸漸由水平傾轉,待 $A$ 因地球引力之作用適開始滑下時,測定該瞬間之傾角,則 $\mu$ 等於該傾角之正切值.

據實驗結果,靜摩阻力係數主因相互摩擦(Rubbing)之二物質及摩擦面之狀況而異,若摩擦面間用潤滑劑時,則又因潤滑劑之種類而不同.

茲據毛林(Moin)等氏之實驗結果,舉示數種物質之靜摩

阻力係數如下：

木材在木材上	0.2 至 0.5
木材在金屬上	0.2 至 0.6
木材在石上	約 0.4
木材在皮革上	0.25 至 0.5
鐵在石上	0.3 至 0.7
金屬在木材上	0.2 至 0.6
金屬在金屬上	0.15 至 0.25
金屬在皮革上	0.3 至 0.6
石在石上	0.4 至 0.65
泥土在泥土上	0.25 至 1.0

二物體間之接觸面起相對的運動時，全反作用力與接觸面直交壓力二者之夾角，稱為動摩阻角 (Angle of kinetic friction)。此角較靜摩阻角略小，因動摩阻力較小於限界摩阻力故也。運動中所生之動摩阻力與接觸面上直交壓力之比為動摩阻力係數 (Coefficient of kinetic friction)。設動摩阻力為  $F$ ，直交壓力為  $N$ ，動摩阻力係數為  $\mu'$ ，則

$$\mu' = \frac{F}{N}$$

動摩阻力係數之實驗上決定法，可將重  $W$  之  $A$  物體以  $P$  力拉之，使在  $B$  之水平面上為等速度運動，此時之  $P$  以  $W$  除之即得。又或置  $A$  於  $B$  之斜面上，增加斜面之傾角，使  $A$  為等速度運動，由此傾角之正切值可得之。動摩阻力係數較靜摩

阻力係數約小 20—40%。

6.2. 關於摩阻力之定律 關於摩阻力方面研究最早者爲柯倫 (Coulomb) 氏, 彼於 1781 年曾發表乾燥平面上摩阻力之實驗結果, 其後有毛林氏等繼其實驗, 由此等實驗結果可綜合之得下之諸定律, 但 (1) 至 (4), 對於乾燥面而言, (5) 對於潤滑面 (Lubricated surface) 而言。

(1) 限界摩阻力與二摩擦面間直交壓力成正比例。

(2) 限界摩阻力與接觸面之面積無關係。

(3) 動摩阻力係數與滑動面之相對的速度無關係。

(4) 靜摩阻力係數常大於動摩阻力係數。

(5) 潤滑面之摩阻力概較乾燥面之摩阻力爲小, 且受面之性質之影響較小, 受潤滑劑之性質及其使用法等影響爲大。

其後實驗之結果知直交壓力過小 (小於  $\frac{3}{4}$  lb./ $\square''$ ) 或過大 (較 100 lb./ $\square''$  甚大) 時, 則靜摩阻力係數稍增, 又運動速度大於 10 ft./sec. 時, 動摩阻力係數因速度之增加而減小, 運動速度極小 (達 0.0002 ft./sec.) 時, 動摩阻力係數增加, 故動摩阻力係數, 當速度爲零時, 即增加成爲靜摩阻力係數, 此蓋運動時摩擦面間有空氣侵入而成爲潤滑劑之作用故歟, 又壓力過大時, 則接觸面間薄層空氣被擠出而減少空氣層之潤滑作用, 靜摩阻力係數亦當增加也。

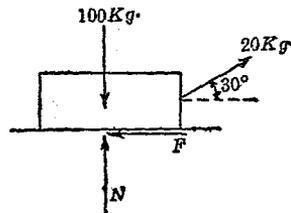
潤滑面間之摩阻力與潤滑劑添加量之遲速有關係, 若

軸承中滿浸以油時，則摩阻力發生於流體層間，依流體摩擦之定律，其摩阻力與壓力之強無關係，略與接觸面之面積為正比例，與速度平方為正比例。平滑之乾燥金屬面間靜摩阻力係數約 0.15 至 0.35，若加以油脂為潤滑劑，在普通壓力下，降為 0.05 至 0.5，通常之軸承內浸滿以潤滑劑時，則其摩阻力係數當更減低也。且潤滑劑因溫度之增高而改變其性質，故潤滑面之摩阻力係數亦受溫度之影響，但乾燥面通常與溫度變化無甚關係。

**70 靜止或運動之判定** 物體受摩阻力之作用，若外力小時，則不起運動。今於物體上加以外力須判定其是否滑動，并求其摩阻力。下述其代數解法及圖解法。

(i) 代數解法 先假定物體為靜止作分離體圖，於其滑動之諸接觸部，表出反作用力之分力，即直交壓力  $N$  與摩阻力  $F$ ，用適當之平衡條件求  $N$  與  $F$ ，而比較  $F$  與  $\mu N$  之大小。若  $F < \mu N$  時，則物體不起運動，而求得之  $F$  即為摩阻力。若  $F > \mu N$ ，則物體運動，而求得之  $F$  不能存在，其摩阻力當為動摩阻力，小於  $\mu N$  也。

**例 1** 第 238 圖之物體靜止於水平地板上，該物體與地板間之摩阻力係數為 0.3，今以與水平向上成  $30^\circ$  角之 20 kg. 力拉之，求該物體滑動否？



第 238 圖

解 先假定該物體為靜止,作分離體圖. 其外力為拉力 20 kg., 重量 100 kg., 反作用力  $N$ , 及摩阻力  $F$ , 此四力為同平面合交力系.

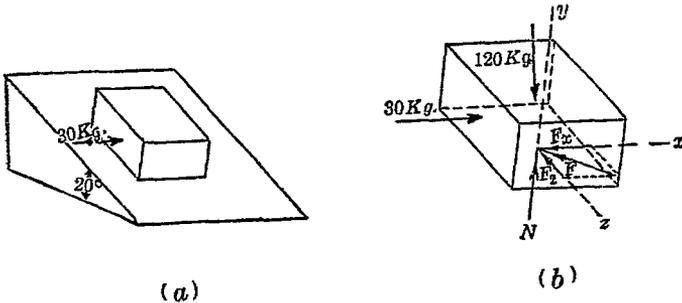
$$\Sigma F_x = F - 20 \cos 30^\circ = 0 \quad \therefore F = 17.32 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = N - 100 + 20 \sin 30^\circ = 0 \quad \therefore N = 90 \text{ kg.}$$

$$\mu N = 0.3 \times 90 = 27 \text{ kg.}$$

因  $F < \mu N$ , 故物體不能滑動.

例 2 重 120 kg. 之物體置於  $20^\circ$  之斜面上, 靜摩阻力係數為 0.25, 今加以水平力 30 kg. 與斜面平行, 如第 239 圖 (a) 所示. 問該物體滑動否?



第 239 圖

解 假定該物體靜止,作分離體圖如第 239 圖 (b) 所示. 作  $x$  軸與 30 kg. 力平行, 作  $y$  軸與斜面直交, 作  $z$  軸與  $x, y$ , 成直交. 外力為重量 120 kg., 水平力 30 kg., 及斜面之反作用力. 此反作用力以直交壓力  $N$  及摩阻力  $F$  表示之. 此摩阻力又分成

$F_x$  及  $F_y$  二分力. 如此力系成爲異平面合交力系, 由

$$\Sigma F_x = \Sigma F_y, \quad \Sigma F_z = 0,$$

得  $\Sigma F_x = F_x - 30 = 0, \quad \therefore F_x = 30 \text{ kg.}$

$$\Sigma F_y = N - 120 \cos 20^\circ = 0,$$

$$\therefore N = 112.8 \text{ kg.} \quad \mu N = 28.2 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_z = F_z - 120 \sin 20^\circ = 0, \quad \therefore F_z = 41 \text{ kg.}$$

$$F = \sqrt{30^2 + 41^2} = 50.8 \text{ kg.}$$

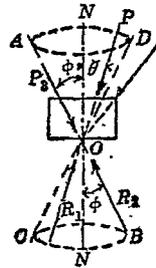
因  $F > \mu N$ , 故物體滑動.

(ii) 圖解法 先假定物體爲靜止, 作分離體圖. 但諸接觸部上反作用力不以摩阻力及直交壓力表示, 而以其全反作用力示之. 以摩阻錐 (Cone of friction) 判定其是否平衡.

所謂接觸面摩阻錐者乃於接觸面上直交線之周圍, 以一直線與該直交線成摩阻角  $\phi$  而旋轉之, 所得之錐體是也. 第 240 圖  $AB$  直線與直交線  $NN$  成  $\phi$  角. 旋轉後成  $OAD$  及  $OCB$  錐體. 除接觸面上全反作用力以外, 其他作用於物體上諸外力之合力, 若在摩阻錐以內, 則物體靜止, 若在摩阻錐以外, 則物體滑動, 若適在摩阻錐表面上則物體開始滑動. 今設作用力  $P_1$  與  $NN$  成  $\theta$  角, 則推動物體之力爲  $P_1 \sin \theta$ , 接觸面上直交壓力爲  $P_1 \cos \theta$ , 若

$$P_1 \sin \theta < \mu P_1 \cos \theta$$

即  $\tan \theta < \mu$ , 或  $\tan \theta < \tan \phi$ , 或  $\theta < \phi$ , 則物體不動. 故  $P_1$  在錐體

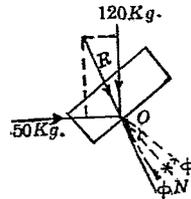


第 240 圖

內時，即全反作用力  $R_1$  亦在錐體內時，物體靜止。若  $\theta > \phi$ ，即  $P_2$  在錐體外時，物體滑動，若  $\theta = \phi$ ，即  $P_3$  在錐體上時，全反作用力  $R_3$  亦在錐體上，物體適開始滑動。

**例 3** 一物體重 120 kg，置於  $40^\circ$  之斜面上，摩阻力係數為 0.2，今加以 50 kg. 之水平力，欲使向上滑動，問該物體能動否？

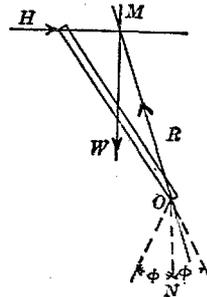
**解** 作第 241 圖之分離體圖，求 120 kg. 與 50 kg. 之合力  $R$ ， $R$  與接觸面之交點設為  $O$ ，於  $O$  點上直交線  $ON$  兩側作兩直線，各與  $ON$  成  $\phi = \tan^{-1} 0.2 = 11^\circ 19'$  之角，此即表示摩阻錐體；因  $R$  在此錐外方，故反作用力不能與合力  $R$  為同直線，即物體不能靜止。



第 241 圖

**例 4** 一梯上端倚於平滑之壁面，下端支於水平地板上，其斜度與水平成  $55^\circ$ ，梯與地板間之摩阻力係數為 0.5，問該梯能靜止否？

**解** 假定梯為平衡，作梯之分離體圖如第 242 圖。其上之作用力為重量  $W$ ，平滑壁面之水平反作用力  $H$  及下端地板上之反作用力  $R$ ，因三力平衡時必同交於一點，故  $R$  必通過  $M$  點。今於  $O$  點作摩阻錐， $\phi = \tan^{-1} 0.5 = 26^\circ 34'$ ； $R$  在此錐內方，故該梯靜止。



第 242 圖

**71. 物體開始滑動時之作用力** 物體開始滑動之時即在於平衡之最後瞬間，可用平衡條件求出使該物體開始滑

動於一定方向之最小作用力。

例1 一物體重  $W$  靜止於水平地面上。物體與地面間之摩擦阻力係數設為  $\mu$ ，求使此物體向右滑動於地面上之最小拉力。

解 (代數解法) 作分離體圖如第 243 圖。

$$\Sigma F_x = P \cos \theta - \mu N = 0, \quad P \cos \theta = \mu N$$

$$\Sigma F_y = P \sin \theta - W + N = 0, \quad P \sin \theta = W - N$$

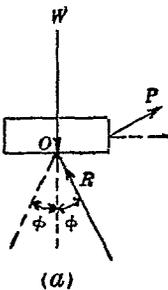
此二方程式中  $P, \theta, N$  為未知，解之得

$$P = \frac{W \sin \phi}{\cos (\theta - \phi)}$$

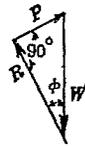
$P$  為最小時  $\theta = \phi$ ，而  $P$  之最小值為  $W \sin \phi$ 。 第 243 圖

若  $\theta = 0$ ，則  $P = W \tan \phi$ ，若  $\theta = -(90^\circ - \phi)$ ，則  $P$  力為無限大，即此時雖任何大力亦不能使之向右滑動。若  $\theta < -(90^\circ - \phi)$ ，則  $P$  為負值。即使該物體向右滑動之力亦不能存在。

(圖解法) 第 244 圖 (a) 之接觸面上  $O$  點作摩擦錐。因物體



第 244 圖

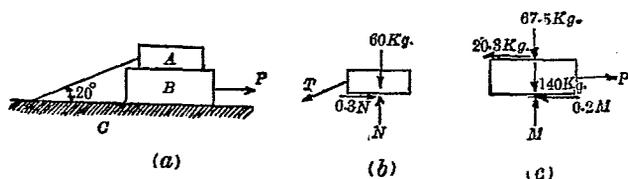


(b)

開始向右滑動之瞬間，接觸面上全反作用力必在錐面上，其方向一定。今於 (b) 圖上作  $W$  向線，於其箭端作平行於  $R$  之向線，更自  $W$  之他端作直交於  $R$  之線。由此得  $P$  力之最小值及其方向。自圖上即知

$$P = W \sin \phi.$$

例2 第245圖(a)中置A於B上, B又置於水平地面C上. 更以繩將A繫於地面. A重60 kg., B重140 kg., A與B間之摩阻力係數為0.3, B與C間之摩阻力係數為0.2, 今以水平力P拉B, 使B自A下滑出, 求P力.



第245圖

解 先作A之分離體圖如第245圖(b).

$$\Sigma F_x = 0.3N - T \cos 20^\circ = 0,$$

$$\Sigma F_y = N - 60 - T \sin 20^\circ = 0.$$

解之得  $N = 67.5 \text{ kg.}$        $0.3N = 20.3 \text{ kg.}$

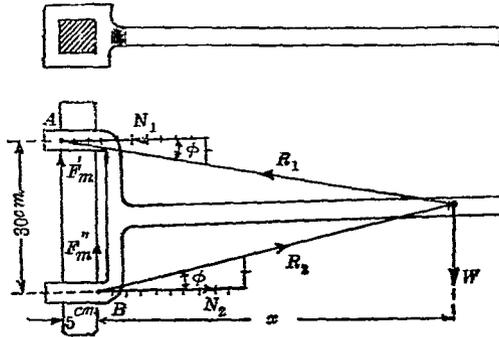
因T非屬必要,故未解出.次取B為分離體圖如第245圖(c).

$$\Sigma F_x = P - 20.3 - 0.2M = 0,$$

$$\Sigma F_y = M - 67.5 - 140 = 0.$$

解之得  $P = 61.8 \text{ kg.}$

例3 第246圖示一叉形桿, 賴摩阻力而支於方形柱上. 該柱每邊長5 cm., 柱與桿間之摩阻力係數為0.2, 桿之重量可略去之. 該桿上懸一重W之物, 求W離柱側面之距離x可使該桿不滑下.



第 246 圖

解 (圖解法) 於柱之兩側接觸面上  $A, B$  兩點作  $R_1$  及  $R_2$  之作用線各與  $N_1, N_2$  成  $\phi = \tan^{-1} 0.2 = 11^\circ 19'$  之角。此作圖法可於  $N_1$  及  $N_2$  直線上分為十等分, 其右端直交線上取二等分, 則  $R_1$  與  $R_2$  之作用線可引出。因  $W$  與  $R_1$  及  $R_2$  相平衡, 必同交於一點, 故由  $R_1$  與  $R_2$  之交點處作垂直線, 即得  $x$  之距離。

(代數解法) 因  $F_m', N_1, F_m'', N_2, W$  五力相平衡, 由

$$\Sigma F_x = N_2 - N_1 = 0$$

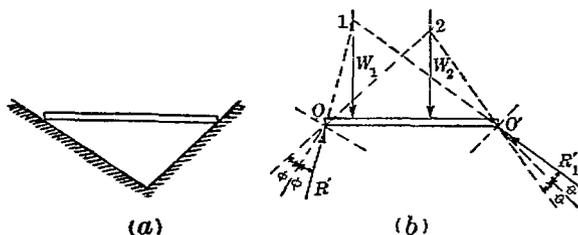
$$\Sigma F_y = 0.2 N_1 + 0.2 N_2 - W = 0$$

$$\Sigma M_3 = 30 N_1 - 5 \times 0.2 N_1 - W_x = 0$$

解之得

$$x = 72.5 \text{ cm.}$$

例 4 一水平棒置於二斜面間如第 247 圖 (a) 所示棒與斜面間之摩阻力係數為已知。今於棒上欲置一重物, 但須使該棒不滑動。問此重物宜置之限界。但棒之重量可略去之。

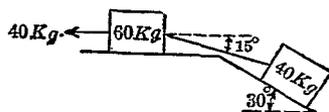


第 247 圖

解 作水平棒之分離體圖如第 247 圖 (b). 二接觸點  $O, O'$  上各作摩阻錐. 重物置於左端時,  $O$  點向下滑動,  $O'$  向上滑動. 故開始滑動時,  $O$  點之全反作用力取  $R_1$  之位置,  $O'$  點之全反作用力取  $R_1'$  之位置.  $R_1, R_1'$  及  $W_1$  三力相平衡必同交於一點. 故由  $R_1, R_1'$  之交點 1 作垂直線  $W_1$  即得重物在左端之限界位置. 若重物較此再偏於左方, 棒即滑動. 同樣可得右方之限界位置  $W_2$ .

習 題 15.

1. 第 248 圖中 40 kg. 之物體支於  $30^\circ$  之斜面上, 60 kg. 之物體支於水平面上, 以繩連結之繩與水平成  $15^\circ$  角. 今以水平力 40 kg. 拉 60 kg. 之物. 問是否靜止?



第 248 圖

2. 前題中之二物體以  $P$  拉力之使向左方滑動, 問  $P$  之最小值及其方向.

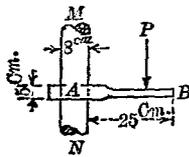
3. 長 7 m. 之梯重 25 kg, 上端倚於垂直壁面. 下端支於水平地面. 若該梯與垂直面成  $15^\circ$  角, 梯與壁及地面之摩阻力係數均為 0.6, 問該梯是否靜止? 今若於下端加以水平力使向外滑出, 則此力幾何? 又若使向內方滑動, 此力幾何?

4. 第 3 題之梯若因其自重而開始離開壁面滑動時, 則與壁面所成之最小角若干?

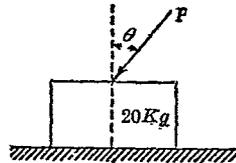
5. 第 3 題之梯若於上端懸一 75 kg. 之重物, 問該梯不至於滑動時之最小摩阻力係數.

6. 第 249 圖  $MN$  柱賴摩阻力而支持一  $AB$  桿, 此桿在  $A$  端有圓孔, 適套緊於  $MN$  圓柱面.  $MN$  之直徑為 8 cm., 問荷重  $P$  離柱面距離之最小限界, 宜為若何, 方使  $AB$  桿不至於滑下. 但摩阻力係數  $\mu = 0.25$ , 併略去  $AB$  桿之重量.

7. 第 250 圖之物體置於水平面上,  $\mu = 0.3$ , 求最小力  $P$  以推之, 使該物體開始滑動



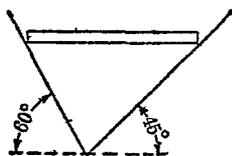
第 249 圖



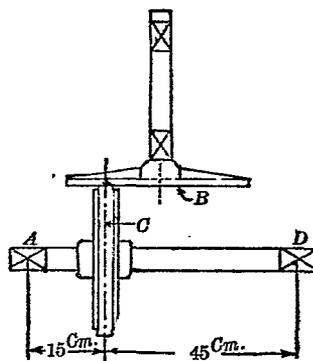
第 250 圖

8. 第251圖之水平板長4 m,支於兩斜面.若 $\mu = \tan 25^\circ$ ,問該板上置一重物,不至於滑動時之限界位置.但略去板重.

9. 第252圖示一摩擦傳動裝置(Crown friction drive). $B$ 輪旋轉速度為100 r. p. in. 牽動 $C$ 輪. $C$ 輪之面用皮革包圍,直徑為50 cm.,  $\mu = 0.35$ ,今有一扭轉力勢(Turning moment) 30 kg. 傳於 $C$ 輪之軸上時,適起滑動. 求 $C$ 與 $B$ 間之直交壓力,併求 $A, D$ 二軸承上之反作用力.

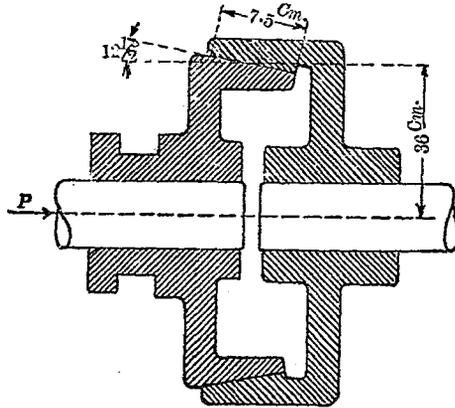


第251圖



第252圖

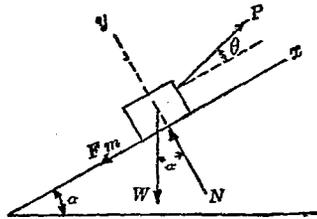
10. 第253圖示一錐形摩擦接合子(Cone clutch),用於汽車上,自發動機傳動於後輪.接觸面間由彈簧所發生之直交壓力設為 $1 \text{ kg./cm}^2$ . 摩阻力係數設為0.25, 求該接合子能傳動之最大扭轉力勢(Torque). 併求發生此直交壓力之彈簧壓力 $P$ .



第 253 圖

72. 斜面 斜面問題應用於機械上各部份,如螺旋扛重器 (Screw-jack), 楔 (Widge) 等,茲分三項討論之.

(i) 使物體沿斜面向上開始滑動之力 第 254 圖視物



第 254 圖

體為分離體,由平衡條件得.

$$\Sigma F_x = P \cos \theta - \mu N - W \sin \alpha = 0$$

$$\Sigma F_y = P \sin \theta + N - W \cos \alpha = 0$$

消去  $N$  得

$$P = W \cdot \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos(\theta - \phi)}$$

故  $P$  爲  $\theta$  之函數.  $\theta = \phi$  時,  $P$  爲最小. 而  $P$  之最小值爲

$$P_{\min} = W \cdot \sin(\alpha + \phi)$$

若  $P$  平行於斜面時, 則

$$P = W \frac{\sin(\alpha + \phi)}{\cos \phi}$$

(ii)  $\alpha > \phi$  時阻止物體滑下之力 此時  $P$  力仍如第 254 圖作用於物體, 但摩阻力則向上作用. 與上同樣得

$$P = W \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos(\theta + \phi)}$$

$\theta = -\phi$  時,  $P$  力最小, 其最小值爲

$$P_{\min} = W \cdot \sin(\alpha - \phi).$$

若  $P$  力平行於斜面時, 則

$$P = \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\cos \phi}.$$

(iii)  $\alpha < \phi$  時, 使物體沿斜面開始滑下之力 此時  $P$  及  $\mu N$  之方向均與第 254 圖所示者相反. 與前同樣得

$$P = W \cdot \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos(\theta + \phi)}$$

$\theta = -\phi$  時,  $P$  爲最小, 其最小值爲

$$P_{\min} = W \cdot \sin(\phi - \alpha).$$

若  $P$  平行於斜面時, 則

$$P = W \cdot \frac{\sin(\phi - \alpha)}{\cos \phi}.$$

例 一小物重 50 kg. 置於  $30^\circ$  之斜面上, 加以  $P$  力. 此力

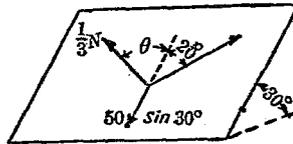
作用線與斜面內最大傾斜線成  $20^\circ$  角,且在於斜面內. 摩阻力係數為  $\frac{1}{3}$ , 求使該物體開始滑動之  $P$  力, 並求物體開始滑動之方向.

解 作用於物體上之力為重力  $50 \text{ kg}$ , 拉力  $P$ , 及斜面之反作用力. 重力可分成斜面內之  $50 \sin 30^\circ$ , 及直交於斜面之  $50 \cos 30^\circ$  二分力. 斜面之反作用力可分成直交壓力  $N$  及限界摩阻力  $\frac{1}{3} N$ . 此限界摩阻力作用於斜面內, 併與物體開始滑動之方向為反方向. 今設該限界摩阻力與最大傾斜線成  $\theta$  角. 因直交於斜面之二力相互平衡, 故

$$N = 50 \cos 30^\circ \dots \dots \dots (1)$$

又斜面內三力 (示於第 255 圖) 亦相平衡, 故由拉米定理得

$$\frac{50 \sin 30^\circ}{\sin (\theta + 20^\circ)} = \frac{P}{\sin \theta} = \frac{\frac{1}{3} N}{\sin 20^\circ} \dots \dots \dots (2)$$



第 255 圖

由 (1), (2) 消去  $N$ , 得

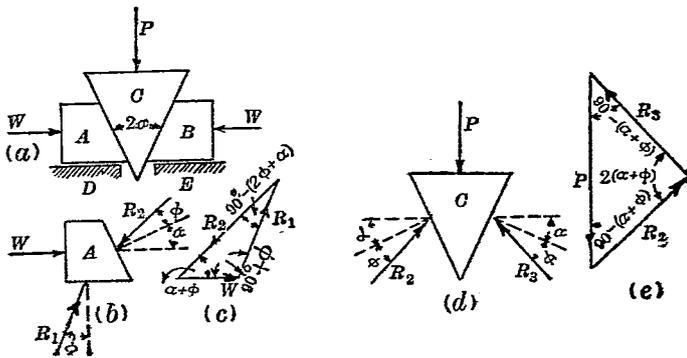
$$\sin (\theta + 20^\circ) = \frac{3 \sin 20^\circ \sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = 0.592$$

$$\therefore \theta = 36^\circ 18' - 20^\circ = 16^\circ 18'$$

因之

$$P = 25 \text{ kg}.$$

73. 楔 楔用以舉重,且用於機械上栓 (Cotter-pin), 榫 (Key) 等部. 第 256 圖中  $C$  為楔, 以垂直之  $P$  力與  $A, B$  上水平抵抗力  $W, W$  相平衡, 各摩擦面上之摩阻角假定為相同. 今欲求  $P$  力, 先將  $A$  之分離體圖示於第 256 圖 (b), 因  $W$  為已知, 故由 (c) 圖可得  $R_1$  及  $R_2$  二力. 次將  $C$  之分離體圖示於第 256 圖 (d). 因  $R_2$  為已知, 故由 (e) 圖可得  $P$  力. 由 (c), (e) 兩圖可得, 以  $W, \alpha, \phi$  表示  $P$  之式. 但由平衡方程式亦可得之. 茲示如下:



第 256 圖

由 (b) 圖對於分離體  $A$ , 得

$$\sum F_x = W + R_1 \sin \phi - R_2 \cos (\alpha + \phi) = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\sum F_y = R_1 \cos \phi - R_2 \sin (\alpha + \phi) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

由 (d) 圖對於分離體  $C$ , 得

$$\sum F_x = R_2 \cos (\alpha + \phi) - R_3 \cos (\alpha + \phi) = 0 \dots\dots\dots(3)$$

$$\sum F_y = P - R_2 \sin (\alpha + \phi) - R_3 \sin (\alpha + \phi) = 0 \dots\dots\dots(4)$$

由 (1), 與 (2), 得

$$R_2 = W \cdot \frac{\cos \phi}{\cos(\alpha + 2\phi)} \dots\dots\dots(5)$$

由 (3) 與 (4), 得

$$P = 2 R_2 \sin(\alpha + \phi) \dots\dots\dots(6)$$

再由 (5) 與 (6), 得

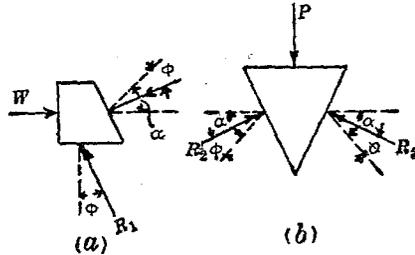
$$P = 2 W \cdot \frac{\cos \phi \sin(\alpha + \phi)}{\cos(\alpha + 2\phi)}$$

次再討論防止該楔爲  $W, W$  二力所擠出時所應加最小之  $P$  力. 此時摩阻力方向與上相反. 作分離體圖如第 257 圖 (a) 及

(b). 由 (a) 圖得

$$\Sigma F_x = W - R_1 \sin \phi - R_2 \cos(\alpha - \phi) = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 \cos \phi - R_2 \sin(\alpha - \phi) = 0$$



第 257 圖

由 (b) 圖, 得

$$\Sigma F_x = R_2 \cos(\alpha - \phi) - R_3 \cos(\alpha - \phi) = 0$$

$$\Sigma F_y = P - R_2 \sin(\alpha - \phi) - R_3 \sin(\alpha - \phi) = 0$$

由上之四式解之,得

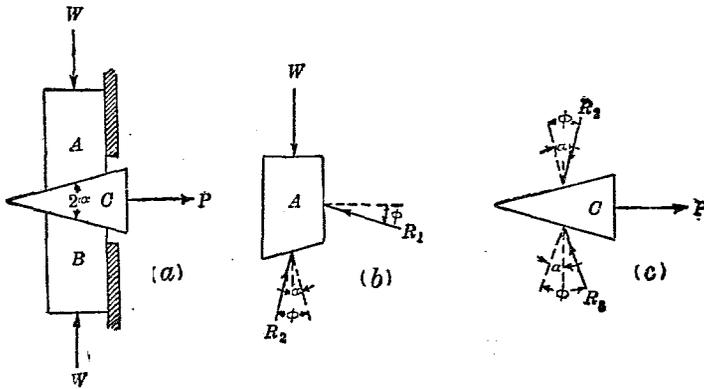
$$P = 2W \frac{\cos \phi \sin (\alpha - \phi)}{\cos (\alpha - \phi)}$$

若  $\alpha < \phi$ , 則  $P$  爲負, 即不加  $P$  力時, 楔可賴摩阻力而留於其位置不被擠出, 而能自然銜緊 (Self-locking).

最後對於能自然銜緊之楔欲拔出時, 求其應加最小之拉力  $P$ , 第 258 圖 (a), 示一楔, 以  $P$  拉出之, 由 (b) 圖得

$$\Sigma F_x = R_2 \sin (\phi - \alpha) - R_1 \cos \phi = 0$$

$$\Sigma F_y = R_2 \cos (\phi - \alpha) + R_1 \sin \phi - W = 0$$



第 258 圖

由 (c) 圖得

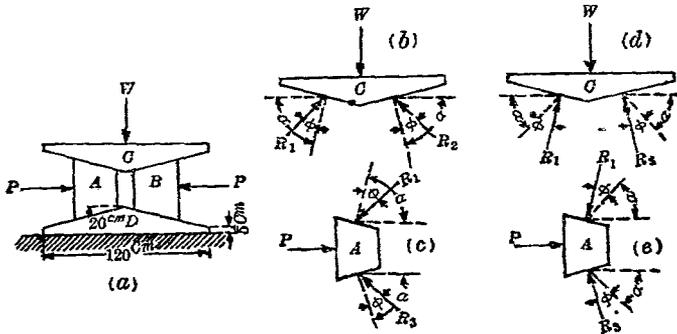
$$\Sigma F_x = R_2 \sin (\phi - \alpha) + R_3 \cos (\phi - \alpha) - P = 0$$

$$\Sigma F_y = R_2 \cos (\phi - \alpha) - R_3 \cos (\phi - \alpha) = 0$$

解之得

$$P = 2W \frac{\cos \phi \sin (\phi - \alpha)}{\cos \alpha}$$

例 第 259 圖 (a) 中  $A, B$  二楔, 用以舉起或放下重物。 $W=100,000 \text{ kg}$ .  $\mu=0.5$ , 問所要舉重之推力  $P$ , 及用以放下重物之拉力  $P$  各若何?



第 259 圖

解 先就舉重時求推力  $P$ , 作  $G$  之分離體圖如第 259 圖 (b).

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{60}{120} = 75^\circ 58', \quad \beta = \tan^{-1} 0.5 = 26^\circ 34'$$

$$\Sigma F_x = R_1 \cos (75^\circ 58' - 26^\circ 34') - R_2 \cos (75^\circ 58' - 26^\circ 34') = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 \sin (75^\circ 58' - 26^\circ 34') + R_2 \sin (75^\circ 58' - 26^\circ 34') - 100,000 = 0$$

$$\therefore R_1 = R_2 = 65,790 \text{ kg}.$$

次作  $A$  之分離體圖如第 259 圖 (c).

$$\Sigma F_x = R_1 \cos (75^\circ 58' - 26^\circ 34') + R_3 \cos (75^\circ 58' - 26^\circ 34') - P = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 \sin (75^\circ 58' - 26^\circ 34') - R_3 \sin (75^\circ 58' - 26^\circ 34') = 0$$

$$\therefore P = 85,527 \text{ kg}.$$

次就放下重物時求拉力  $P$ , 作  $C$  之分離體圖如第 259 圖 (d).

$$\Sigma F_x = R_1 \cos (75^\circ 58' + 26^\circ 34') - R_2 \cos (75^\circ 58' + 26^\circ 34') = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 \sin (75^\circ 58' + 26^\circ 34') + R_2 \sin (75^\circ 58' + 26^\circ 34') - W = 0$$

$$\therefore R_1 = R_2 = 51,282 \text{ kg.}$$

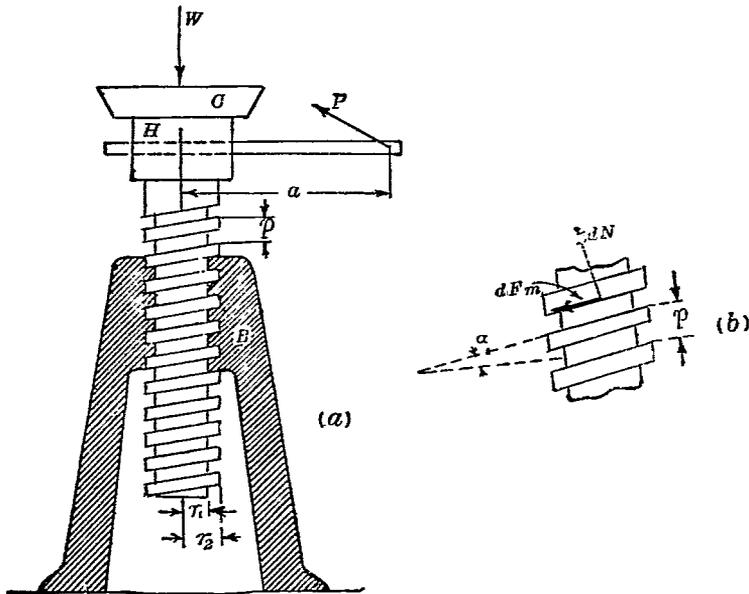
再作  $A$  之分離體圖如第 259 圖 (e),

$$\Sigma F_x = R_1 \cos (75^\circ 58' + 26^\circ 34') + R_2 \cos (75^\circ 58' + 26^\circ 34') + P = 0$$

$$\Sigma F_y = R_1 \sin (75^\circ 58' + 26^\circ 34') - R_2 \sin (75^\circ 58' + 26^\circ 34') = 0$$

$$\therefore P = 22,256 \text{ kg.}$$

74. 螺旋 螺旋 (Screw) 實為一斜面, 捲於圓筒面上者螺



第 260 圖

線 (Screw threads) 有方形, 有三角形, 茲將方形螺線討論之。

第 260 圖 (a) 示一方形螺線之扛重螺旋 (Jack-screw)。螺線底半徑  $r_1$ , 螺線頂半徑  $r_2$ , 螺線之步距 (Pitch) 設為  $p$ , 步角 (Pitch angle) 設為  $\alpha$ , 此時荷重若不與頂盤 (Cap)  $C$  同轉時, 則頂盤與螺頭 (Screw Head)  $H$  間及螺旋與螺套 (Nut)  $B$  間均有摩阻力之作用。使此螺旋平衡之力為外力  $P$ , 荷重  $W$  即  $C$  對於  $H$  上之直交壓力,  $C$  與  $H$  間之摩阻力,  $B$  對於螺旋之反作用力是也。最後之反作用力分布於螺線與螺套接觸面。今假定略去  $C$  與  $H$  間之摩阻力, 而求作用於長  $a$  之臂上所必要之  $P$  力。

(i) 螺旋開始上昇時 取螺旋軸為  $z$  軸, 用二個平衡條件方程式即  $\Sigma F_z = \Sigma M_z = 0$ , 即可決定  $P$  力。今設螺線與螺套間接觸面中極小面積  $dA$  上之反作用力為  $dR$ , 則  $dR$  可分解成爲直交於螺線之  $dN$  及平行於螺線之  $dF_m$  二分力。如第 260 圖 (b) 所示。今對於  $z$  軸取力勢時, 可假定  $dF_m$  之力臂為螺線之平均半徑  $r$ , 即  $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ , 又設  $P_1$  為舉起荷重所必要之力, 則

$$\Sigma F_z = \Sigma dN \cos \alpha - \Sigma dF_m \sin \alpha - W = 0$$

$$\Sigma M_z = P_1 a - \Sigma r dN \sin \alpha - \Sigma r dF_m \cos \alpha = 0$$

因  $dF_m = \mu dN$ , 故上二式可改書爲

$$\cos \alpha \Sigma dN - \mu \sin \alpha \Sigma dN - W = 0$$

$$P_1 a - r \sin \alpha \Sigma dN - \mu r \cos \alpha \Sigma dN = 0$$

$$\therefore P_1 a = W r \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}$$

$$\text{但 } \mu = \tan \phi \quad \therefore P_1 a = Wr \tan(\alpha + \phi) \dots\dots\dots (1)$$

$P_1 a$  即為舉起荷重時,所必要之力勢

(ii) 螺旋開始下降時 當螺旋開始下降時,  $dF_m$  之作用方向與第260圖 (b) 所示者相反而向上. 設  $P_2$  為放下荷重所必要之力,則與  $P_1$  方向亦相反

$$\Sigma F_z = \cos \alpha \Sigma dN + \mu \sin \alpha \Sigma dN - W = 0$$

$$\Sigma M_x = -P_2 a + \mu r \cos \alpha \Sigma dN - r \sin \alpha \Sigma dN = 0$$

$$\therefore P_2 a = Wr \tan(\phi - \alpha) \dots\dots\dots (2)$$

$P_2 a$  為放下荷重時所必要之力勢.

由(2)式若  $\alpha = \phi$ , 則螺旋受  $W$  之作用,即開始旋轉下降,放下荷重之力勢為零,惟賴摩阻力而保持其平衡.若  $\alpha > \phi$ , 則放下荷重之力勢  $P_2 a$  為負,即螺旋受  $W$  之作用,足使下降,須另加力勢  $P_2 a$  以防止之,方得平衡.若  $\alpha < \phi$ , 則力勢  $P_2 a$  為正,即螺旋受  $W$  作用時不能旋轉下降,須另加(2)式所示之力勢以助其下降.故  $\alpha < \phi$  時之螺旋亦為自然銜緊 (Self-locking). 扛重螺旋必須為自然銜緊,其步角通常為  $4-6^\circ$ , 而其摩阻力係數在通常之潤滑狀態時為 0.15 以上.

前示(1),(2)兩式之  $P$ ,若考慮頂盤與螺頭間之摩阻力時,其值稍異.若其接觸面為全圓時,則摩阻力之効臂 (Effective arm) 當為該圓半徑之三分之二.(參閱第80節)但實際上接觸面為一中空圓,且可假定摩滅為均勻,可取其平均半徑  $r'$  為摩阻力之効臂.今假定頂盤與螺頭間摩阻力係數為  $\mu'$ , 則  $P$

值可由下式求之

舉起荷重時,

$$P_1 a = Wr \tan (\alpha + \phi) + \mu' Wr' \dots\dots\dots (1')$$

放下荷重時 ( $\alpha > \phi$ ),

$$P_2 a = Wr \tan (\phi - \alpha) + \mu' Wr' \dots\dots\dots (2')$$

防止荷重落下時 ( $\alpha > \phi$ ),

$$P_3 a = Wr \tan (\alpha - \phi) - \mu' Wr' \dots\dots\dots (3')$$

75. 軸摩阻力 第251圖示一軸 Axle or journal 在於軸

承 (Bearing) 內, 軸承直徑因磨滅 (Wear) 而稍大於軸徑, 但圖示

者因明瞭計, 特過度擴大之. 若軸與軸

承均為完全之圓筒形, 則接觸部僅為

一極狹小之直條, 荷為剛體, 可視為一

直線. 軸承對於軸之反作用力即沿此

接觸線上作用, 可以作用於該線中點

之合力  $R$  表示之. 當軸依時針方向迴

轉時, 接觸點設為圖示之  $A$  點,  $R$  即通

過該點.  $R$  與接觸面上直交線所成之

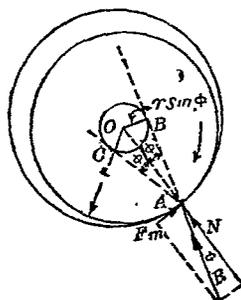
角為摩阻角  $\phi$ , 當軸迴轉時, 則此角為動摩阻角, 若開始滑動

時, 則此角為靜摩阻角. 設軸之半徑為  $r$ , 今另作一圓, 其中心

即與軸之中心  $O$  相合一, 其半徑等於  $r \sin \phi$ , 則此圓與  $R$  之作

用線相切. 此圓稱曰摩阻力圓 (Friction circle). 若  $\phi$  甚小, 則

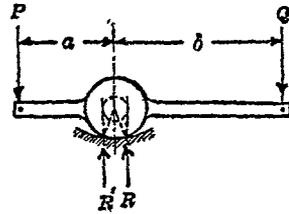
$\sin \phi$  略等於  $\tan \phi$ , 故此時摩阻力圓之半徑略等於  $\mu r$ .



第 251 圖



迴轉之側。今若欲求  $P$  力，以與抵抗力  $Q$  相平衡，而使該曲桿開始轉動於反時針方向時，則當取  $CB$  切線。此時之  $P$  力當由第 262 圖上  $C'A$  之長度定之。



第 263 圖

又如第 263 圖所示，水平桿上加以二平行力  $P, Q$ ，若依時針方向開始迴轉時，則反作用力之作

$$P(a+r \sin \phi) - Q(b-r \sin \phi) = 0$$

$$\therefore P = \frac{b-r \sin \phi}{a+r \sin \phi} Q$$

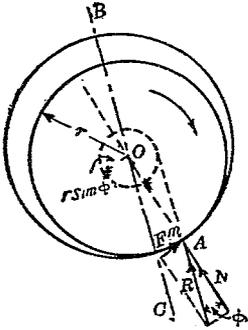
若依反時針方向開始迴轉時，則反作用力以  $R'$  表之。

$$P(a-r \sin \phi) - Q(b+r \sin \phi) = 0$$

$$\therefore P = \frac{b+r \sin \phi}{a-r \sin \phi} Q$$

對於已知之  $Q$  力，若  $P$  力之值在於上二式之中間時，則該桿平衡。故設上桿為一秤桿，以鎮重 (Counter weight)  $Q$  測定  $P$  力時，則  $r$  愈小時，該秤感度 (Sensitiveness) 愈大。實際上秤桿之支點用刃尖 (Knife-edge) 製成之。

次設第 254 圖上一輪軸 (Shaft) 受扭轉力勢而迴轉於時針方向，軸承上各種壓力之合力 (例如輪軸重量、滑輪重量、或輪帶傳動 (Belting)、齒輪傳動 (Gearing) 等時所發生之橫壓力) 設為  $BC$  方向。此時反作用力  $R$  即與  $BC$  平行，與軸承上壓力



第 264 圖

之合力相等反向,且與摩阻力圓切相。故  $R$  之作用線為已知。扭轉力勢設為  $M$ , 則依下式而平衡。

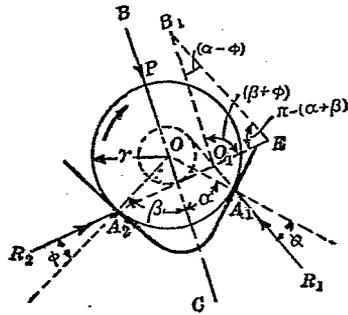
$$M = R \cdot r \sin \phi = r \cdot R \sin \phi = F_m \cdot r$$

每一迴轉時對於摩阻力所耗費之功可由下式求之。

$$2\pi M = 2\pi R \cdot r \sin \phi$$

$\phi$  減小時, 即充分潤滑之軸承中, 此耗費可減少。

76. 接觸於二直線時之軸摩阻力 今設軸承受摩滅或製作不良等影響, 非為正確之圓筒形, 與軸接觸於  $A_1, A_2$  兩直線。該兩處摩阻力係數假定其為相等。設軸依時針方向迴轉, 將開始滑動時, 則  $A_1$  有滑下之傾向,  $A_2$  有滑上之傾向, 故  $R_1, R_2$  二反作用力之作用線當如圖所示。此二



第 265 圖

反作用力與軸承上之壓力  $F$  及扭轉力勢  $M$  相平衡, 設  $BC$  為軸承上諸壓力之合力方向,  $O_1$  為  $R_1$  與  $R_2$  二作用線之交點。則  $R_1$  與  $R_2$  之合力必通過  $O_1$  點, 與  $BC$  平行, 且與軸承上壓力之合力  $P$  相等反向。設三角形  $B_1O_1E$  之三邊  $B_1O_1, B_1E, EO_1$  各表

示  $P, R_1, R_2$  三力, 則

$$R_1 = P \frac{\sin(\beta + \phi)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad R_2 = P \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$(F_m)_1 = P \frac{\sin(\beta + \phi)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (F_m)_2 = P \frac{\sin(\alpha - \phi)}{\sin(\alpha + \beta)} \sin \phi$$

當平衡時  $M = R_1 \cdot r \sin \phi + R_2 \cdot r \sin \phi = (F_m)_1 r + (F_m)_2 r$

$$= \frac{Pr \sin \phi}{\sin(\alpha + \beta)} [\sin(\beta + \phi) + \sin(\alpha - \phi)]$$

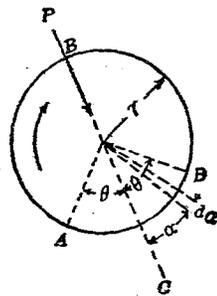
此力勢亦即為對於摩阻力所耗費之損失。

若  $\alpha = \beta$  時,

$$M = \frac{Pr \sin \phi}{\sin 2\alpha} \cdot (2 \sin \alpha \cos \phi) = Pr \frac{\sin \phi \cos \phi}{\cos \alpha}$$

故  $\alpha$  增加時, 對於摩阻力所耗費之力勢亦增, 而與  $\frac{1}{\cos \alpha}$  成比例, 且大於前節之結果。若  $\alpha = \beta = \phi$  時, 則上之結果與前節所得者相同。

77. 接觸於面時之軸摩阻力 第 266 圖之軸, 與軸承接觸於  $AB$  面, 設直交於紙面之長為 1, 接觸面上任意一點直交壓力之強為  $p$ , 且  $p$  為常數。今於接觸面中極小部份上, 中心角等於  $da$  之處, 其直交壓力當為  $prda$ , 其與  $BC$  平行之分力為  $pr \cos \alpha da$ , 其與  $BC$  直交之分力則  $BC$  兩側相互抵消, 故接觸面上直交壓力之合力為



第 266 圖

$$P = pr \int_{-\theta}^{\theta} \cos \alpha d\alpha = 2 pr \sin \theta$$

$$\therefore p = \frac{P}{2r \sin \theta}$$

極小面積  $r d\alpha$  上之摩阻力為  $\mu p r d\alpha$ ，此摩阻力對於中心  $O$  之力勢為  $\mu p r^2 d\alpha$ ，當軸開始滑動時，則

$$M = \mu_I r^2 \int_{-\theta}^{\theta} d\alpha = 2 \mu p r^2 \theta = \frac{\mu P r \theta}{\sin \theta}$$

但  $M$  為加於軸上之扭轉力勢，與摩阻力之力勢相平衡。

若接觸面積甚小則  $\theta$  極小略等於  $\sin \theta$ ，故

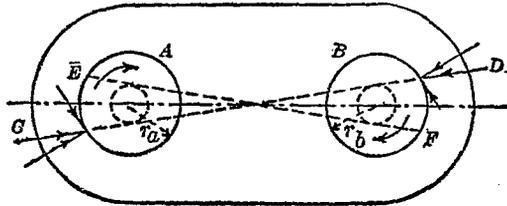
$$M = \mu I r.$$

若充分潤滑之面  $\mu$  略等於  $\sin \phi$ ，此與第 75 節所得之結果相一致。

以上假定  $p$  為常數，但實際上接觸面之一側，其摩減較他側為甚，故接觸面上壓力之分布亦非均勻，故通常用第 75 節之公式，即

$$M = Fr \sin \phi$$

78. 銷釘摩阻力 鏈桿構造 (Link work) 及架構 (Frame work) 等之結合點 (Joint) 上所有銷釘摩阻力 (Pin friction) 亦同於軸摩阻力，第 267 圖上設  $A, B$  為二銷釘，與他桿相連接，假定摩阻力係數相同，其摩阻角皆為  $\phi$ ，則摩阻力圓半徑在  $A$  銷釘上為  $r_a \sin \phi$ ，在  $B$  銷釘上為  $r_b \sin \phi$ ，作摩阻力圓如圖所示。



第 267 圖

今假定該鏈桿 (Link) 受拉力而各銷釘依圖示之時針方向旋轉, 與第 75 節之軸相比較, 則桿對於銷釘之反作用力當如第 267 圖所示沿  $CD$  線作用。

若鏈桿受壓力時, 則桿對於銷釘之反作用力當沿  $EF$  線作用。故因銷釘受摩阻力之結果, 桿上所受拉力與壓力均不沿桿之軸向, 而與之成一小角, 此角等於

$$\sin^{-1} \frac{\rho_a \pm \rho_b}{l}$$

但  $l$  為  $A, B$  兩銷釘中心距離,  $\rho_a = r_a \sin \phi$ ,  $\rho_b = r_b \sin \phi$ , 當兩銷釘對於鏈桿同方向迴轉時, 上式內取正號, 異方向迴轉時, 上式內取負號。

**例 1** 第 238 圖之滑輪, 其軸與軸承間摩阻力係數為 0.15, 求舉起 100 kg. 重物時之最小  $P$  力。但繩與滑輪間之摩阻力足以充分防止滑動, 滑輪重量可略去之。

**解** 軸承上之反作用力  $R$  與摩阻力圓相切, 並平行於  $P$  力及 100 kg. 之作用線。因欲舉起荷重, 故軸依時針方向迴轉,

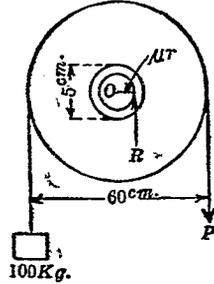
而  $R$  與摩阻力圓切於右側。假定  $\phi$  角極小，摩阻力圓半徑可視為等於  $\mu r$ ，由平衡條件得

$$\Sigma F_x = R - P - 100 = 0,$$

$$\Sigma M_o = 100 \times 30 + 0.15 \times 2.5 \times R - P \times 30 = 0.$$

由上二式消去  $R$  得

$$P = 102.5 \text{ kg.}$$



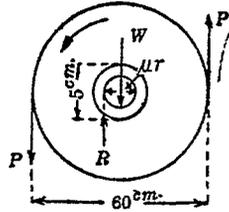
第 268 圖

例 2 第 269 圖之滑輪及其軸重 50 kg，軸與軸承間之動摩阻力係數為 0.10，今加以  $P$  力加圖示之方向使滑輪以等速度迴轉時，求  $P$  力。

解 摩阻力圓之半徑為

$$\mu' r = 0.10 \times 25 = 0.25 \text{ cm.},$$

反作用力  $R$  作用於垂直方向，與摩阻力圓切於左側，由平衡條件得



第 269 圖

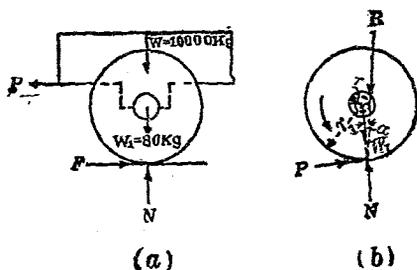
$$P \times 60 = 50 \times 0.25$$

$$\therefore P = \frac{50 \times 0.25}{60} = 0.21 \text{ kg.}$$

例 3 有一貨車重 40,000 kg。有四輪，各輪直徑 82 cm，輪軸徑 10 cm，各輪與輪軸之自重為 80 kg，若靜止摩阻力係數  $\mu = 0.1$ ，問使該車開始運動於水平軌道上之牽引力 (Draw-bar pull) 幾何？

解 該車每輪上所負車之重量  $W$  為 10,000 kg，輪及軸

之自重  $W_1$  為 80 kg, 今將車之四分之一部示於第 270 圖 (a), 視為分離體, 則軌道上垂直壓力  $N$  為 10,080 kg, 軌道面上摩阻力  $F$  等於  $P$  力。次作輪之分離體圖如第 270 圖 (b), 其外力為  $P, N, W$  及軸承上反作用力  $R$ , 此  $R$  之作用線與摩阻力圓相切, 而通過  $P$  與  $F$  之交點。摩阻力圓半徑為



第 270 圖

$$r \sin \phi = \frac{\mu r}{\sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{r_1^2 + \mu^2 r_1^2 - \mu^2 r^2}}{r_1 \sqrt{1 + \mu^2}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\mu r}{r_1 \sqrt{1 + \mu^2}}$$

由平衡條件  $\Sigma F_x = \Sigma F_y = 0$ , 得

$$P - R = \frac{\mu r}{r_1 \sqrt{1 + \mu^2}} = 0,$$

$$N - W_1 - R \frac{\sqrt{r_1^2 + \mu^2 r_1^2 - \mu^2 r^2}}{r_1 \sqrt{1 + \mu^2}} = 0.$$

但  $N - W_1 = W$ , 解上之二式得

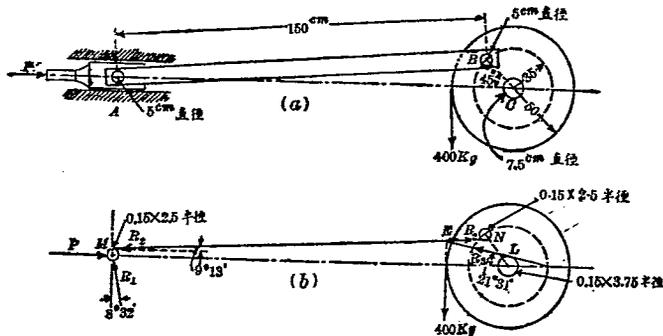
$$P = \frac{\mu r W}{\sqrt{r^2 + \mu^2 r_1^2} - \mu r^2}$$

以題示數值代入上之公式得

$$P = \frac{0.1 \times 5 \times 10000}{\sqrt{41^2 + (0.1 \times 41)^2} - (0.1 \times 5)^2} = 121.3 \text{ kg.}$$

故該貨車全部所需牽引力為  $121.3 \times 4 = 485.2 \text{ kg.}$

例4 第271圖(a)示一簡單之蒸汽捲揚機(Steam hoist)各滑動面間動摩阻力係數皆為  $\mu = 0.15$ , 間以等速度迴轉於圖示位置時, 試求  $P$  力。



第 271 圖

解  $A, B$  二銷釘對於  $AB$  桿迴轉方向均為時針方向, 且  $AB$  桿受壓力, 故由第78節所述,  $AB$  桿對於銷釘之反作用力  $R_2$  與  $A, B$  兩銷釘上摩阻力圓之相切狀況如第271圖(b)所示. 此圖上  $M, N$  兩摩阻力圓及輪軸  $C$  上之摩阻力圓  $L$  均擴大之以便易於明瞭.  $R_2$  作用線之方向, 可由第78節之公式

$\sin^{-1} \frac{\rho_a + \rho_b}{l}$  求之。與水平所成之角為  $9^\circ 13'$ ，今視 (b) 圖中右端之輪為分離體，作用於其上之力為  $400 \text{ kg}$  之荷重，銷釘  $B$  上之反作用力  $R_2$  及軸上之反作用力  $R_3$ ，此三力必同交於一點  $E$ ，故  $R_3$  通過  $E$  點而與摩阻力圓  $L$  相切， $R_3$  與水平所成角度約為  $21^\circ 31'$ ，故就  $C$  輪之平衡條件得：

$$\Sigma F_x = R_2 \cos 9^\circ 13' - R_3 \cos 21^\circ 31' = 0,$$

$$\Sigma F_y = R_2 \sin 9^\circ 13' + R_3 \sin 21^\circ 31' - 400 = 0.$$

解之得  $R_2 = 729 \text{ kg}$ .

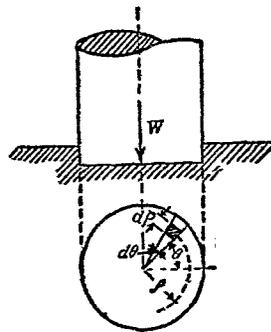
又就 (b) 圖左端銷釘  $A$  之分離體圖，得平衡條件如下：

$$\Sigma F_x = 729 \cos 9^\circ 13' + R_1 \sin 8^\circ 32' - P = 0,$$

$$\Sigma F_y = 729 \sin 9^\circ 13' - R_1 \cos 8^\circ 32' = 0.$$

解之得  $P = 738 \text{ kg}$ .

**79. 支軸摩阻力** 若軸 (Axle) 與輪軸 (Shaft) 在於垂直或傾斜位置 (有時亦在水平位置) 時，其端推力 (End thrust) 類軸之支座 (Support or bearing) 抵抗之。凡入於支座中受端推力之軸即成為支軸 (Pivot)。第 272 圖示一垂直支軸，端面為平底。支軸旋轉於支座中，故支軸摩阻力 (Pivot friction) 為動摩阻力。決定此支軸端面摩阻力之抵抗力勢 (Resisting moment) 時，先假定下列二項：



第 272 圖

(1) 支軸端接觸面上所受壓力或(a)各部皆同一,或(b)依一定規則變化,使支軸端面各部軸向磨滅 (Axial wear) 皆為均勻,換言之端面任意一點上與摩擦面成直角之直交磨滅 (Normal wear) 與摩阻力之功 (work) 成正比例。

(2) 支軸端面上各部摩阻力係數皆為同一。

動摩阻力係數當速度大時,略與摩擦面速度有關係。但軸端面各部之速度與其對於中心軸之距離成比例。故端面上動摩阻力係數非為同一。但若取平均摩阻力係數,則(2)之假定,其誤差不大。(1)中之(a),可適用於新製支軸,但磨滅開始時,各部壓力即不均勻。若任意點之直交磨滅與該點上摩阻力之功成正比例,即與摩阻力  $F$  及其所經過距離之乘積為正比例時,則直交磨滅亦與直交壓力成正比例,因  $F = \mu' N$  故也。故若始初直交壓力為均勻時,則經過若干時間端面外緣之磨滅較大,其結果遂使端面中心部份增加其直交壓力之強,而邊緣部減少其直交壓力。但中心部直交壓力既增加後,又增加其中心部之磨滅,而減少邊緣部之磨滅。如是則達適當時間直交壓力又趨均勻。以上方法互相反覆,其結果使端面之磨滅,各部皆趨於均勻。故(1)中之(b)對於使用若干時間後之支軸可適用之。以下對於各種支軸,決定其對於摩阻力所耗費之抵抗力勢。

80 實心平端支軸 (i) 壓力為均勻時 第272圖示一實心平端支軸 (Solid flat pivot) 受軸向荷重  $W$ , 設半徑為  $r$ , 端面

積為  $A$ , 則摩阻力之抵抗力勢如下求之.

$$\text{單位面積之壓力} = \frac{W}{\pi r^2}$$

$$\text{極小面積上之壓力} = \frac{W}{\pi r^2} dA = \frac{W}{\pi r^2} \rho d\rho d\theta$$

$$\text{極小面積上之摩阻力} = \frac{\mu' W}{\pi r^2} \rho d\rho d\theta$$

$$\text{極小面積上摩阻力之抵抗力勢} = \frac{\mu' W}{\pi r^2} \rho^2 d\rho d\theta$$

端面上全部之抵抗力勢

$$= \frac{\mu' W}{\pi r^2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho^2 d\rho d\theta = \frac{2}{3} \mu' W r \dots\dots\dots (A)$$

(ii) 摩滅為均勻時 因摩滅與該點經過距離成正比例, 故與  $\rho$  亦成正比例. 又摩滅與摩阻力成正比例, 故亦與單面積上直交壓力  $p$  成正比例. 即

$$p\rho = K$$

故抵抗力勢可求之如下.

$$\begin{aligned} \text{抵抗力勢} &= \int_0^{2\pi} \int_0^r \mu' p \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \mu' K \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho d\rho d\theta = \mu' K \pi r^2 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

但壓力總和必等於  $W$ , 故

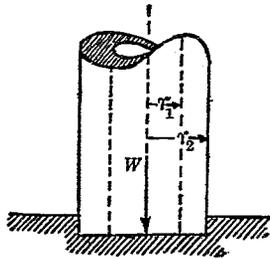
$$W = \int_0^{2\pi} \int_0^r p \rho d\rho d\theta = K \int_0^{2\pi} \int_0^r d\rho d\theta = 2\pi K r \dots\dots\dots (2)$$

由 (1) 與 (2) 得

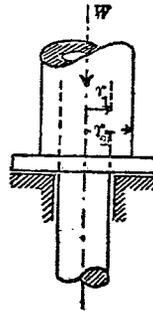
$$\text{抵抗力勢} = \frac{1}{2} \mu' W r \dots\dots\dots (B)$$

(A) 式之抵抗力勢可視為將全面摩阻力集中於離中心軸  $\frac{2}{3}r$  處所生之力勢。(B) 式之抵抗力勢則可視為集中於離中心軸  $\frac{r}{2}$  處。此時之  $\frac{2}{3}r$  與  $\frac{r}{2}$  各稱為效臂 (Effective arm)。

81. 空心平端支軸及頸座支軸 第 273 圖示空心平端支軸 (Hollow flat pivot), 第 274 圖示頸座支軸 (Collar bearing)。其抵抗力勢之求法與前節相同。茲示如下。



第 273 圖



第 274 圖

對於均勻壓力,則

$$\begin{aligned} \text{抵抗力勢} &= \frac{\mu' W}{\pi (r_2^2 - r_1^2)} \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu' W (r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \dots\dots\dots (C) \end{aligned}$$

對於均勻摩擦,則

$$\begin{aligned} \text{抵抗勢力} &= \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \mu' p \rho^2 d\rho d\theta \\ &= \mu' K \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} \rho d\rho d\theta = \mu' K \pi (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned}$$

$$\text{但 } W = \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} p \rho d\rho d\theta = K \int_0^{2\pi} \int_{r_1}^{r_2} d\rho d\theta = 2 K \pi (r_2 - r_1)$$

$$\therefore \text{抵抗力勢} = \frac{1}{2} \mu' W (r_2 + r_1) \dots\dots\dots (D)$$

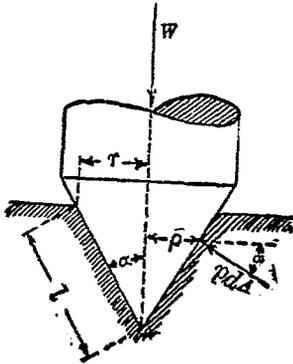
(C) 式之效臂為  $\frac{2}{3} \cdot \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2}$ , (D) 式之效臂為  $\frac{1}{2}(r_2 + r_1)$

82. 錐端支軸 (i) 壓力為均勻時 第 275 圖示一實心 (Solid) 之錐端支軸 (Conical pivot). 設直交於錐面之壓力, 其強為  $p$ , 且各點相等, 而各點上之摩阻力為水平。

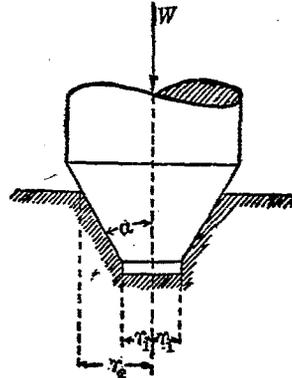
$$\begin{aligned} \text{抵抗力勢} &= \int \mu' p \rho dA = \int_0^r \mu' p \rho 2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin\alpha} \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{\pi \mu' p r^3}{\sin\alpha} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

因  $p$  之垂直分力總和必等於  $W$ , 故  $p$  可求之如下。

$$W = \int p dA \sin\alpha = p \sin\alpha \int dA = p A \sin\alpha.$$



第 275 圖



第 276 圖

但  $A$  爲支軸與支座間之接觸面積, 因  $A \sin \alpha = \pi r^2$ ,

$$\therefore W = p \pi r^2 \dots \dots \dots (2)$$

由 (1) 與 (2) 得

$$\text{抵抗力勢} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu' r W}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (E)$$

但  $\frac{r}{\sin \alpha} = l$ ,  $l$  爲錐面接觸部之長, 故上式又可書爲

$$\text{抵抗力勢} = \frac{2}{3} \mu' W l \dots \dots \dots (E')$$

將 (E') 與 (A) 兩式相比較, 則錐端支軸上之摩阻力抵抗力勢等於以其接觸部長爲半徑之平端支軸之抵抗力勢. 此時之效臂等於  $\frac{2}{3} l$ .

(ii) 摩滅爲均勻時 若軸向摩滅, 各點相同時, 則與第 76 節 (ii) 同樣得

$$\rho p \sin \alpha = K.$$

$$\begin{aligned} \text{抵抗力勢} &= \int \mu' p \rho dA = \int_0^r \mu' p \rho 2\pi \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \\ &= \frac{2\pi \mu' K}{\sin \alpha} \int_0^r \rho d\rho = \frac{\pi \mu' K r^2}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } W &= \int p dA \sin \alpha = \sin \alpha \int p dA = \sin \alpha \int 2\pi p \rho \frac{d\rho}{\sin \alpha} \\ &= \frac{2\pi K}{\sin \alpha} \int_0^r \rho d\rho = \frac{2\pi K r}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (2) \end{aligned}$$

由 (1), (2) 兩式得

$$\text{抵抗力勢} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu' W r}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (F)$$

將  $\frac{r}{\sin \alpha} = l$  代入之,則

$$\text{抵抗力勢} = \frac{1}{2} \mu' W l \dots\dots\dots (F')$$

(F)式與(B)式相比較,則上之抵抗力勢亦等於以其接觸部長為半徑之平端支軸之抵抗力勢,其效臂為  $\frac{1}{2}l$ .

若為截頭錐端支軸 (Frustrated conical pivot) 如第276圖所示,則求法與上全同,惟  $\rho$  之積分限界當自  $r_1$  至  $r_2$ , 其結果如下.

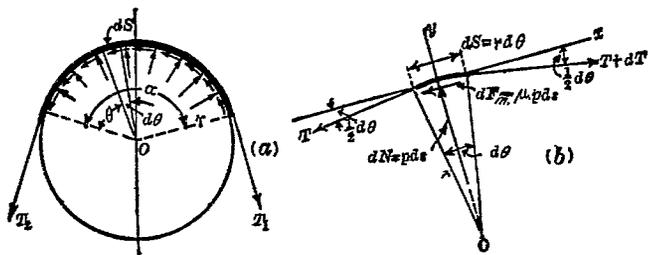
對於均勻壓力時,

$$\text{抵抗力勢} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\mu' W}{\sin \alpha} \cdot \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \dots\dots\dots (G)$$

對於均勻摩擦時,

$$\text{抵抗力勢} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu' W}{\sin \alpha} (r_2 + r_1) \dots\dots\dots (H)$$

83. 輪帶摩阻力 輪帶摩阻力 (Belt friction) 對於以輪帶 (Belt) 傳達動力上極為重要之問題.若輪帶繞於平滑之滑輪 (Pulley),則兩側輪帶之拉力當相等.若滑輪非屬平滑則兩側輪帶之拉力一般不等.本節中乃決定輪帶當開始滑動時,兩側輪帶中拉力之關係.但較大之拉力至少必須與較小之拉力及輪帶與滑輪間摩阻力之總和相平衡.第277圖(a)示滑輪上之輪帶,接觸之中心角為  $\alpha$ ,兩側輪帶上拉力為  $T_1$  與  $T_2$ ,今設  $T_1 > T_2$ ,且輪帶正在滑動之瞬間.設輪帶與滑輪間每單位長度之直交壓力,即任意一點壓力之強為  $p$ ,該點上輪帶



第 277 圖

內之拉力為  $T$ ，取輪帶上極小部  $ds$  之長為分離體，作分離體圖如第 277 圖 (b)。作用於此極小部輪帶上之外力為  $T$ ， $T+dT$ ，及滑輪對於輪帶之反作用力。此反作用力可分成直交於滑輪面之  $dN = pds$ ，及滑輪面切線方向之限界摩擦力  $dF_n = \mu pds$  二分力。由平衡條件得

$$\Sigma F_x = (T+dT) \cos \frac{d\theta}{2} - T \cos \frac{d\theta}{2} - \mu pds = 0,$$

$$\Sigma F_y = pds - (T+dT) \sin \frac{d\theta}{2} - T \sin \frac{d\theta}{2} = 0.$$

因  $\frac{d\theta}{2}$  甚小，故  $\cos \frac{d\theta}{2}$  略等於 1， $\sin \frac{d\theta}{2}$  略等於  $\frac{d\theta}{2}$ ，而  $dT \sin \frac{d\theta}{2}$  項

可略去之。因之上二式可書之如下：

$$dT - \mu pds = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$pds - T d\theta = 0 \dots\dots\dots (2)$$

或消去  $pds$  得

$$\frac{dT}{T} = \mu d\theta$$

積分之,得

$$\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T} = \int_0^{\alpha} \mu d\theta$$

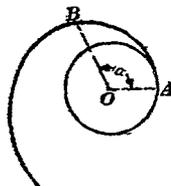
$$\log e \frac{T_1}{T_2} = \mu \alpha$$

$$\therefore \frac{T_1}{T_2} = e^{\mu \alpha} \dots\dots\dots(A) \quad \text{或} \quad T_1 = T_2 e^{\mu \alpha} \dots\dots\dots(A')$$

上式中 $\alpha$ 以弧度表之。此式假定輪帶為可完全曲撓(Perfectly flexible)者。 $T_2$ 為已知時,則 $T_1$ 因 $\alpha$ 之增加,而增加甚速。第278圖乃極座標(Polar Coordinates)上示 $\alpha$ 變化時 $T_1$ 之變化狀況。

圖中  $T_2 = OA, \quad e = 2.718, \quad \mu = \frac{1}{4}.$

(A)式中對於離心力(Centrifugal force)未考慮及之,若輪帶有高速度時,則離心力減小直交壓力,因之亦減小輪帶與滑輪間之摩阻力。換言之,輪帶內拉力中一部份發生向心力(Centripetal force),以使輪帶之各質點運動於圓周上,其餘部份則發生直交壓力如(2)式所示。此(2)



第278圖

式或可改書之如下:

$$p = T \frac{d\theta}{ds} = \frac{T}{r} \dots\dots\dots(3)$$

設 $v$ =輪帶之速(m).  $w$ =輪帶單位長之重(kg). 則第277圖(b)上輪帶極小部之向心力如下。但 $g=9.8$ m.

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{w r d\theta}{g r} v^2 = \frac{w d\theta}{g} v^2$$

其作用方向乃向於中心O,且必為該極小部兩端所有相等

拉力之合力。設此拉力之值爲  $t$ ，則

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{w d\theta}{g} v^2 = t \sin \frac{d\theta}{2}$$

$$\therefore t = \frac{wv^2}{g} \cdot \frac{d\theta}{2 \sin \frac{d\theta}{2}}$$

因  $d\theta$  極小時， $\sin \frac{d\theta}{2}$  略等於  $\frac{d\theta}{2}$ ，故上式爲

$$t = \frac{wv^2}{g} \dots\dots\dots(4)$$

設輪帶有均一之斷面及密度，則上式之  $t$  可視爲各斷面上對於離心力所需要之拉力。今設  $T_1$  與  $T_2$  表示輪帶兩側總拉力，則 (A) 式成爲

$$\frac{T_1 - t}{T_2 - t} = e^{\mu\alpha} \dots\dots\dots(B)$$

若每秒間輪帶所傳達之功爲  $W$ ，則

$$W = (T_1 - T_2)v \dots\dots\dots(5)$$

因之輪帶所傳達之馬力爲

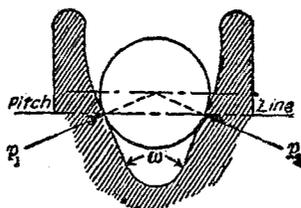
$$\text{h. p.} = \frac{(T_1 - T_2)v}{75} \dots\dots\dots(6)$$

由 (4), (B), (6) 三式可由輪帶速度計算其所傳達之馬力。

**84 繩之傳動** 以麻或棉製成之繩用以傳動時，常用有溝滑輪 (Grooved pulley)。溝之斷面略如第 279 圖所示之形。設繩之單位長上直交壓力爲  $p_1$ ，繩與輪間摩阻力係數爲  $\mu$ ，準

線 (Pitch line) 半徑為  $r$ , 則溝之兩側壓力  $p_1$  之合力  $p$  為

$$p = 2 p_1 \sin \frac{\omega}{2}.$$



第 279 圖

作用於半徑方向。與第 83 節同樣得繩與輪間作用於弧  $ds$  上之限界摩阻力為

$$dF_m = 2 \mu p_1 ds = \frac{\mu p ds}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

而第 83 節之 (1), (2) 兩式即變為

$$dT - \frac{\mu p ds}{\sin \frac{\omega}{2}} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$p ds - T d\theta = 0 \dots\dots\dots(2)$$

由此得

$$\frac{dT}{T} = \frac{\mu d\theta}{\sin \frac{\omega}{2}}.$$

積分之得

$$\frac{T_1}{T_2} = e^{\frac{\mu - \alpha}{\sin \frac{\omega}{2}}} \dots\dots\dots(C)$$

通常之溝,  $\omega = 45^\circ$ ,  $\therefore \frac{T_1}{T_2} = e^{2.61 \mu} \dots\dots\dots(C')$

若將離心力影響考慮之，則

$$\frac{T_1 - t}{T_2 - t} = e^{2.61 \mu a} \dots\dots\dots (D)$$

但  $t = \frac{wv^2}{g}$ ,  $w =$  繩單位長之重 (kg.),  $v =$  繩之速 (m). 繩所傳達馬力之公式仍如前節之形，即

$$h. p. = \frac{(T_1 - T_2)v}{75}$$

85. 輪帶或繩所傳達之最大馬力 由上二節則輪帶或繩上兩側拉力之比由下式求之，即

$$\frac{T_1 - t}{T_2 - t} = e^{c\mu a}$$

但  $c$  為常數，對於輪帶其值為 1. 對於有溝滑輪上之繩，則其值因溝壁斜度而異，上式可改書之如下：

$$\frac{T_1 - T_2}{T_1 - t} = \frac{e^{c\mu a} - 1}{e^{c\mu a}} = 1 - e^{-c\mu a}$$

每秒間輪帶與繩所傳達之功，可求之如下：

$$W = (T_1 - T_2)v = (1 - e^{-c\mu a})(T_1 - t)v = (1 - e^{-c\mu a})\left(T_1 - \frac{wv^2}{g}\right)v$$

或 
$$h. p. = \frac{1 - e^{-c\mu a}}{75} \cdot \left(T_1 - \frac{wv^2}{g}\right)v \dots\dots\dots (1)$$

$W$  與  $h. p.$  均為  $v$  之函數，故傳達最大馬力時，則

$$\frac{d(h. p.)}{dv} = (1 - e^{-c\mu a})\left(T_1 - \frac{3wv^2}{g}\right) = 0$$

$$\therefore v = \sqrt{\frac{gT_1}{3w}} = 1.82 \sqrt{\frac{T_1}{w}} \dots\dots\dots (2),$$

由上式可知輪帶或繩傳達最大馬力時之速度因最大准受拉力 (Maximun allowable tension) 及其單位長之重量而定。

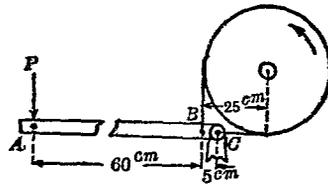
由 (1) 式則速度低時, 所傳達之馬力與速度同增, 達最大值後則速度增時所傳達之馬力反減小, 最後若速度增至適當大值, 使離心力所生拉力等於輪帶之准受拉力 (Allowable tension) 時, 則所傳達之馬力等於零。

以 (2) 代入於 (1), 得輪帶或繩所傳達之最大馬力如下式求之。

$$\max. h. p. = 0.016(1 - e^{-c\mu\alpha}) T_1 \sqrt{\frac{T_1}{w}} \dots\dots\dots(3)$$

例 第 280 圖示一簡單之帶條制動器 (Band brake), 接觸弧  $\alpha = \frac{3}{2}\pi$ ,  $\mu = 0.2$ ,  $P = 100 \text{ kg.}$ ,

若輪依反時針方向迴轉, 試求帶條之拉力及抵抗力勢。



第 280 圖

解 ABC 桿為平衡, 設 C 處帶條拉力為  $T_1$ , B 處帶條拉力為  $T_2$ , 則

$$\Sigma M_C = 100 \times 65 - T_2 \times 5 = 0 \quad \therefore T_2 = 1300 \text{ kg.}$$

由第 83 節 (A') 式得

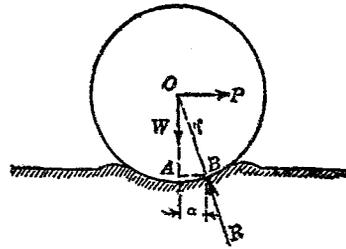
$$T_1 = 1300 \times e^{0.2 \times \frac{3}{2}\pi} \quad \therefore T_1 = 3330 \text{ kg.}$$

$$\text{抵抗力勢} = (T_1 - T_2) \times 25 = 50750 \text{ kg. cm.}$$

86. 輾阻力勢 剛體之車輪或輾輓 (Roller) 受垂直荷重

而靜止於他剛體之水平面上時，則雖加以甚小之水平力，必輾動 (Roll) 於該面上。但該面若可變形而非完全之剛體時，則因車輪之前方面上起變形而生抵抗運動之阻力。此阻力主因接觸面之性質及輪與面間之壓力而異。水平面若乏彈性 (Elasticity) 時，則輪後留一凹痕，若為完全彈性時，則輪後不留凹痕。第 281 圖上之輪受垂直

荷重  $W$ ，加以水平力  $P$ ，使輪之中心以等速度運動於水平方向。因水平面可變形，故輪與面間之壓力分布於接觸面之全部。其合力即為面



第 281 圖

對於輪之反作用力，通過於接觸面中一點  $B$ ，因輪之速度為一定，故作用於輪上之三力必相平衡，而反作用力  $R$  必通過  $O$  點。

$$\Sigma M_B = W \times \overline{AB} - P \times \overline{OA} = 0$$

通常接觸面之凹下甚小，故  $\overline{OA}$  可視為等於  $r$ ，又設  $\overline{AB}$  之長以  $a$  代之，則

$$Pr = Wa$$

此  $P$  力即等於反作用力  $R$  之水平分力，有時稱為輾阻力 (Rolling friction or rolling resistance)。但此名稱非屬適當。長度  $a$  稱為輾阻力係數 (Coefficient of rolling resistance)。但  $a$  以長度之數值表示之非為純粹之數係數。

第 282 圖 (a) 中輪軸上捲以繩，加以水平拉力  $P$ ，設反作用

力作用點為  $B$ ，該輪開始運動或以等速度運動時，則

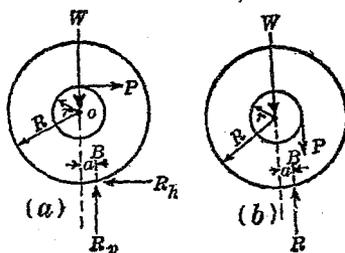
$$P(R+r) = Wa$$

$$\therefore P = R_h = \frac{Wa}{R+r}$$

又同樣於第 282 圖 (b) 中  $P$  力垂直向下，則開始運動或以等速度運動時，

$$P(r-a) = Wa$$

$$\therefore P = \frac{Wa}{r-a}$$



第 282 圖

由上二例則  $P$  力因作用位置而異。若  $R$  之水平分力稱為輾阻力，則如第 282 圖 (a) 之例，輾阻力因  $R$  之值而不同，如第 282 圖 (b) 之例，輾阻力為零，此顯然不合。

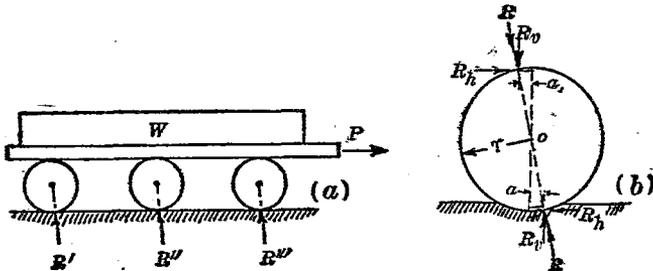
由上所論，則輾阻力當以力勢  $Wa$  表示之，即輾阻力非為一力，而為一偶力之力勢也。

關於輾阻力之定律尙未充分詳知。輾阻力係數因輪與路面之種類而異，且又似因輪之直徑，輪胎 (Wheel tire) 寬度，或輾輻之長，及荷重等而異。有謂與直徑及荷重無關而亦有

謂與直徑平方根成比例。要之各人實驗結果尙未能一致。須待此後之充分研究者也。茲舉數種輾阻阻力係數之實驗值如下。

輪之材質	軌面材質	$\alpha$ 之數值(單位為吋)	實驗者
Lignum vitae	Oak	0.0189	Coulomb
Cast-iron wheel 20' dia.	Cast-iron rail	0.0183	Weisback
Cast-iron wheel 20' dia.	Cast-iron rail	0.0193	Rittinger
Iron rail road wheel 30.4' dia.		0.0196—0.0216	Pambour
Steel	Steel	0.007 —0.015	
Steel	Wood	0.06 —0.10	
Steel	Macadam road	0.05 —0.20	
Steel	Soft ground	3.0 —5.0	
Pneumatic tires	Good road	0.02 —0.022	
Pneumatic tires	Mud road	0.04 —0.06	
Solid rubber tire	Good road	0.04	
Soeid rubber tire	Mud road	0.09 —0.11	

運搬重物時常用數多輾輥置於重物下方如第 283 圖



第 283 圖

(a) 所示，作輾輥之分離體圖如第 283 圖 (b)。各輾輥之上下面均因輾轉而有反作用力。上下接觸面中反作用力之作用點設為  $A, B$ ，此二點與垂直徑之水平距離設為  $a_1$  及  $a$ ，假定略去輾輥自重，則  $A, B$  二點上反作用力必相等而在同一直線上。此作用力各分解為水平與垂直二分力，對於  $B$  點取力勢，得近似式如下：

$$R_o(a + a_1) = R_h 2r \quad R_h = \frac{a + a_1}{2r} R_o$$

今設  $R', R''$ ，等為路面對於各輾輥之反作用力，而各輾輥上之  $a$  與  $a_1$  均相等，且各輾輥之直徑亦相等，則

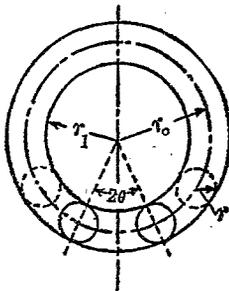
$$R'_h = \frac{a + a_1}{2r} R'_o, \quad R''_h = \frac{a + a_1}{2r} R''_o, \quad \dots\dots$$

故  $P = R'_h + R''_h + \dots\dots = \frac{a + a_1}{r} (R'_o + R''_o + \dots\dots) = \frac{a + a_1}{2r} W$

若  $a = a_1$  時，則

$$P = \frac{a}{r} W$$

87. 輾輥軸承 第 284 圖所示之輾輥軸承 (Roller bearing)



第 284 圖

設  $r_1$  為軸之半徑， $r$  為輾輥之半徑  $W$  為軸承上所受壓力之合力。輾輥對於軸與軸承之輾阻力係數設各為  $\alpha$  及  $\alpha_1$ 。

(i) 先設  $W$  為一個輾輥所擔負，若加以  $P$  力於輾輥中心以抵抗輾阻力，則此  $P$  力當為對於軸承面及對於軸

面二輻阻力之和,即由第86節得

$$P = \frac{a}{r} W + \frac{a_1}{r} W = \frac{W}{r} (a + a_1).$$

此  $P$  力對於軸心之力勢  $M$ , 即抵抗力勢為

$$M = P(r_1 + r) = \frac{W(a + a_1)}{r} \cdot (r_1 + r).$$

設  $r_0 = r_1 + r$ , 即輻輳至軸心之距離, 則

$$M = W(a + a_1) \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (1)$$

若  $a = a_1$ , 則

$$M = 2 W a \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (2)$$

(ii) 次設  $W$  平均分布於二輻輳上, 此二輻輳中心對於軸心所夾之角為  $2\theta$ , 則各輻輳上所負壓力  $W_1$  為

$$W_1 = \frac{W}{2 \cos \theta}.$$

二輻輳上抵抗力勢之和為

$$M = 2 W_1 (a + a_1) \frac{r_0}{r} = \frac{W(a + a_1)}{\cos \theta} \cdot \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (3)$$

若  $a = a_1$ , 則

$$M = 2 W a \cdot \frac{r_0}{r \cos \theta} \dots\dots\dots (4)$$

(iii) 最後設  $W$  平均分布於  $n$  個輻輳上, 每一輻輳所受壓力設為  $W$ , 則

$$M = n W (a + a_1) \cdot \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (5)$$

若  $a = a_1$ , 則

$$M = 2 n w a \cdot \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (6)$$

若各輻輳相並接, 而  $n$  不大時, 則近似的可視為  $n w = W$ , 此時 (5), (6) 兩式即與 (1), (2) 兩式相同.

若輻輳相並接而  $n$  分布於  $180^\circ$  之圓弧上, 則近似的可視為

$$n w = \frac{W}{2r} \cdot \pi r = \frac{W\pi}{2}$$

但  $\frac{W}{2r}$  為接觸面上壓力之強, 且假定該壓力為均布者. 因之由 (5) 式得

$$M = \frac{W\pi(a+a_1)}{2} \cdot \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (7)$$

若  $a_1 = a$ , 則

$$M = \pi W a \cdot \frac{r_0}{r} \dots\dots\dots (8)$$

## 習 題 16.

1. 一物重  $W$  kg. 靜止於斜面上, 其傾斜角為  $\theta$ , 摩阻角為  $\phi$ , 求使該物向上開始滑動時所要之水平力. 試將此力以  $\phi$  表之, 又以  $\mu$  表之.

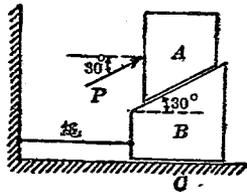
2. 一均質矩形柱體, 斷面為  $1^m \times 1^m$ , 高  $2^m$ , 直立於方形平板上. 柱體底面之邊與板之邊相平行. 摩阻力係數為 0.2, 今將方板一邊漸漸舉起, 問該柱體將滑動乎抑傾倒乎?

3. 重 50 kg. 與 100 kg. 之物體靜止於斜面上, 以繩連結

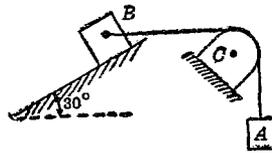
之。該繩與最大傾斜線相平行。50 kg. 之物體在於 100 kg. 物體之下方。50 kg. 物體之摩阻力係數為  $\frac{1}{3}$ , 100 kg. 物體之摩阻力係數為  $\frac{1}{4}$ , 當開始滑動時, 問斜面之傾斜角及繩之拉力?

4. 第 285 圖中  $P=24$  kg.,  $B$  與  $C$  間之摩阻力係數為  $\frac{1}{10}$ ,  $A$  與  $B$  間之摩阻力係數為  $\frac{1}{3}$ , 求各接觸面間之摩阻力, 及繩內拉力.  $A$  之重量為 100 kg.,  $B$  之重量為 60 kg., 假定  $B$  與  $C$  間摩阻力未達限界摩阻力時, 繩中不發生拉力.

5. 第 286 圖  $B$  與斜面間之摩阻力係數為 0.5, 繩與  $C$  間之摩阻力係數為  $\frac{1}{\pi}$ ,  $B$  與  $C$  間之繩為水平.  $B$  重 100 kg., 問使  $B$  開始向上滑動時, 所要最小之  $A$  重?



第 285 圖

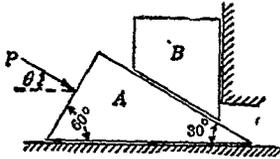


第 286 圖

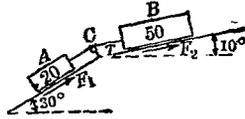
6. 第 287 圖上  $A$  與水平面間摩阻力係數為  $\frac{1}{10}$ ,  $A$  與  $B$  間摩阻力係數為  $\frac{1}{8}$ ,  $B$  與垂直面間摩阻力係數為  $\frac{1}{4}$ ,  $A$  重 300 kg.,  $B$  重 200 kg., 求  $P$  之最小值及其方向, 以使  $B$  開始升高.

7. 第 288 圖中  $A$  重 20 kg. 在於  $30^\circ$  之斜面上,  $B$  重 50 kg. 在於  $10^\circ$  之斜面上. 二物體以繩連結之, 此繩通過滑輪  $C$ , 其摩阻力可略去之. 二物體與斜面間之摩阻力係數皆為 0.3, 問此二

物體能滑動否? 并求  $F_1$ ,  $F_2$  及  $T$  之值.



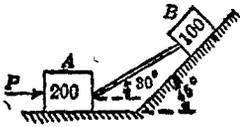
第 287 圖



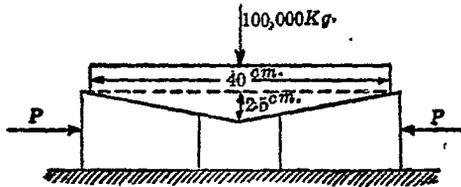
第 288 圖

8. 第 289 圖中  $B$  重  $100 \text{ kg}$ . 在於  $45^\circ$  斜面上,  $A$  重  $200 \text{ kg}$ . 在於水平面上. 二物間支以一棒, 該棒與水平成  $30^\circ$ , 若  $\mu = 0.3$ , 試求水平力  $P$ , 使二物體開始滑動.

9. 第 290 圖中一荷重  $100,000 \text{ kg}$ . 用二楔舉起之. 各接觸面間摩阻力係數皆為  $0.2$ , 求水平力  $P$  之值.



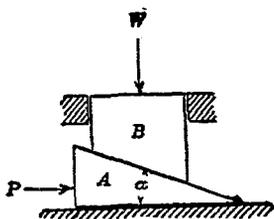
第 289 圖



第 290 圖

10. 第 291 圖中求水平力  $P$  以舉起荷重  $W$ , 假定各接觸面間摩阻力係數皆相等.

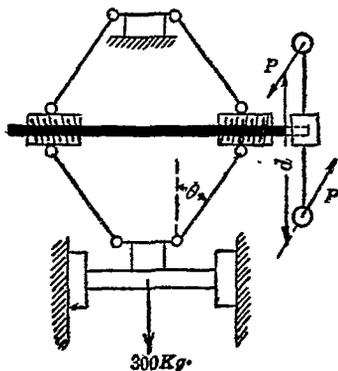
11. 方形螺旋扛重器外徑  $7.5 \text{ cm}$ ., 以  $120 \text{ cm}$  之棒旋轉之. 若螺旋步距為每  $5 \text{ cm}$ . 有四螺線, 螺線上受壓面寬  $0.65 \text{ cm}$ ., 問棒端加以  $50 \text{ kg}$ . 之力時, 可舉重幾何? 但  $\mu = 0.10$ , 并略去螺頭與頂盤間之摩阻力.



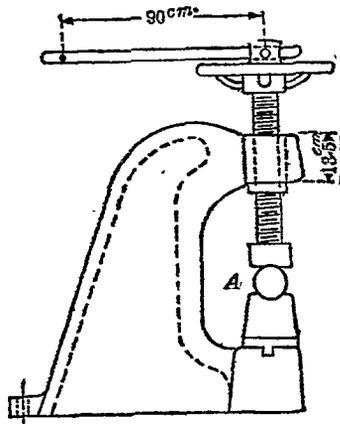
第 291 圖

12. 500 kg之重物以偶力  $Pd$  舉起之. 其裝置如第 292 圖所示.  $d=50$  cm., 螺旋之平均直徑 = 3.8 cm., 螺線步距 = 0.8 cm.,  $\mu=0.15$ ,  $\theta=1.5^\circ$ , 求  $P$  力.

13. 第 293 圖示一壓力機. 螺旋平均直徑 5 cm., 每 5 cm. 有 8 螺線. 僅考慮螺旋與螺帽間摩阻力. 假定  $\mu=0.2$ , 被壓物體  $A$  上發生 12000 kg. 時, 求棒端所應加之力  $P$ .



第 292 圖



第 293 圖

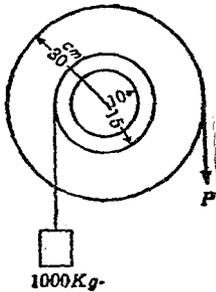
14. 第294圖之滑輪, 軸與軸承間摩阻力係數為0.4, 求舉起荷重時之最小 $P$ 力. 并問放下荷重時, 荷重開始下降之際,  $P$ 力幾何?

15. 一軸之直徑10 cm., 軸承上所受壓力為800 kg.,  $\mu=0.01$ , 求每週轉時對於摩阻力所耗費之功.

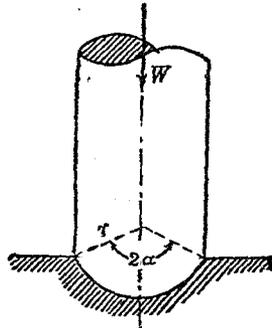
16. 一垂直支軸及其他迴轉部共重50000 kg., 軸之直徑為30 cm.,  $\mu'=0.015$ , 軸端為實心平端. 求(i) 壓力為均勻時及(ii) 摩滅為均勻時各抵抗力勢.

17. 頸座支軸上受壓力3000 kg., 若軸上突出部半徑各為8 cm. 及5.5 cm., 摩阻力係數為0.03, 摩滅為均勻時, 求一週轉對於摩阻力所耗費之功.

18. 第295圖示一球端支軸 (Spherical pivot) 假定(i) 直交壓力為均勻時, 及(ii) 軸向摩滅為均勻時, 試證明求摩阻力抵



第294圖



第295圖

抗力勢之公式各為

$$(i) \quad W\mu r \left( \frac{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \right) \quad \text{及} \quad (ii) \quad \frac{W\mu r \sin^2 \alpha}{\alpha + \sin \alpha \cos \alpha}.$$

19. 直徑 10 cm. 之實心平端支軸, 迴轉速度為 600 r. p. m., 受荷重 1000 kg., 若  $\mu = 0.01$ , 求摩擦為均勻時, 每分間對於摩阻力所耗費之功.

20. 寬 15 cm. 之輪帶, 速度每分 1000 m., 今設該輪帶每寬 1 cm. 長 1 m. 之部份重 0.6 kg.,  $T_1$  之值每寬 1 cm. 為 30 kg.,  $\alpha = 180^\circ$ ,  $\mu = 0.3$ , 試求該輪帶所傳達之馬力.

21. 前題之輪帶若繞於二相等直徑之滑輪, 各重 100 kg., 其軸在同一水平面內. 求各軸對於各軸承之壓力. 假定軸與軸承間之  $\mu = 0.008$ , 滑輪直徑為 1.2 m. 各軸直徑為 10 cm., 求二軸上對於摩阻力, 每分所耗費之功.

22. 寬 20 cm. 之軸帶,  $\alpha = 180^\circ$ , 每寬 1 cm. 長 1 m. 之重為 0.6 kg. 准受拉力  $T_1$  每寬 1 cm. 為 30 kg.,  $\mu = 0.26$ , 求該輪帶所能傳達之最大馬力. 併求其時之速度及  $T_2$ .

23. 重 4000 kg. 之物其底面載於多數直徑 15 cm. 之輾輓, 而靜止於水平地面上. 以 50 kg. 之水平力適可牽動之. 假定輾阻阻力係數對於地面者為對於重物之二倍, 求各輾阻阻力係數.

24. 一繩迴繞於水平圓樑, 計繞四周半. 若靜止摩阻力係數為 0.3, 求繩之一端以 500 kg. 之力可舉起其他端上之荷重幾何?

25. 一貨車重 50000 kg. 運轉於水平鋼軌上, 車輪之輾阻力係數  $a=0.025$  cm., 輪軸與軸承間之摩阻力係數為 0.03, 輪之直徑為 80 cm., 輪軸之直徑為 10 cm., 求該車以等速度運動時所需之水平牽引力. 并求此時軌面之最大坡度 (Grade), 使該車不能駛上.

26. 一輾輓軸承內之軸, 其直徑為 10 cm., 輾輓直徑 1.2 cm., 軸承上所受重量為 5000 kg., 假定 (i) 全部重量負擔於一個輾輓時, (ii) 均勻分布於軸承周圍半圓範圍內之輾輓上, 且對於上之二種情形  $a=0.02$  cm., 試求每一迴轉時對於輾阻力所耗費之功.

## 第七章 距心及重心

88. 第一次勢 凡某力對於一點或一直線之距離與該力之乘積爲該力對於該點或該直線之力勢 (Moment of force), 已如前各章所述. 同樣線長, 面積, 體積, 質量等各極小部份對於一直線或一平面之距離與各該極小部份之乘積爲該極小部份之勢 (Moment), 此勢之代數和各爲對於該線長或該平面之線長勢 (Moment of line), 面積勢 (Moment of area), 體積勢 (Moment of volume), 質量勢 (Moment of mass) 等. 此種之勢均稱爲第一次勢 (First moment), 以與後章所述之情性勢 (Moment of inertia) 或第二次勢 (Second moment) 相區別. 蓋第一次勢乃線長, 面積, 體積, 質量等極小部份與距離一次方之乘積, 而第二次勢乃各極小部份與距離二次方之乘積也. 同樣各極小部份與距離三次方或四次方乃至  $n$  次方之乘積各爲第三次勢, 第四次勢乃至第  $n$  次勢.

89 距心 同平面上或空間之平行力系各力對於一點或一直線力勢之代數和等於其合力對於該點或該直線之力勢, 此即爲力勢原理, 已證明於前. 如第26節 (ii) 所述

$$\Sigma Fy = R\bar{y},$$

由此式可求合力  $R$  作用線之位置. 即

$$\bar{y} = \frac{\sum Fy}{\sum F}$$

同樣線長,面積,體積,質量等各極小部份對於一軸或一平面之第一次勢代數和亦可以全線長,全面積,全體積或全質量各與一距離之乘積表示之.此距離對於該軸或該平面而言,以  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  等記號示之.例如面積之極小部份設為  $dA$ , 對於一軸之距離設為  $x$ , 則

$$\int dA \cdot x = \bar{x} \int dA = A \cdot \bar{x}$$

滿足於上式之  $\bar{x}$  必可求得, 而由  $\bar{x}$  或  $\bar{y}$  等所定之點稱曰該線長,面積,體積或質量之距心 (Centroid). 換言之,全線長,全面積,全體積,全質量若集中於該距心上時,其對於一軸或一平面之第一次勢等於此等線長,面積,體積,質量當分散如原狀時對於該軸或該平面之第一次勢.

設線長之極小部份為  $dL$ , 全長為  $L$ , 則其距心可由下式求之.

$$\bar{x} = \frac{\int x dL}{L}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \dots\dots\dots (1)$$

又面積之極小部份設為  $dA$ , 全面積為  $A$ , 則其距心可由下式求之.

$$\bar{x} = \frac{\int x dA}{A}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \dots\dots\dots (2)$$

同樣全體積之極小部份設為  $dV$ , 全體積為  $V$ , 則其距心可由下式求之即設距心之座標為  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , 則

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V} \dots\dots\dots (3)$$

又質量之極小部份設為  $dM$  全質量為  $M$ , 則其距心之座標  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  如下:

$$\bar{x} = \frac{\int x dM}{M}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dM}{M}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dM}{M} \dots\dots\dots (4)$$

90. 距心之求法 (i) 對稱形體之距心 若線長, 面積, 體積等幾何學圖形對於一直線或一平面有對稱關係時, 則距心即存在於該直線或該平面上. 此因該直線或該平面兩側對稱距離處各極小部份之勢為相反向, 故距心離該直線或該平面之距離為零. 若圖形對於二直線或二平面各皆對稱時, 則距心即在該二直線之交點上, 或在該二平面之相交直線上. 若圖形對於三平面各皆對稱時, 則距心即在該三平面之交點上. 對於勻質物體, 則其質量距心即與其所佔體積距心相合一, 故質量若對於一個或二個以上之平面為對稱時, 其距心亦在於該平面上或在於二個以上平面之交線或交點上. 凡簡單形體之距心即可由此對稱關係以局部或全部決定此距心. 故下列各形體之距心易於決定.

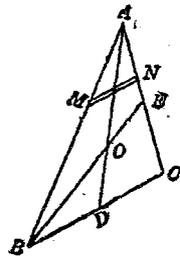
- (1) 球體或橢圓體之距心在於球心或橢圓體之心上.
- (2) 直角柱體或圓柱體之距心在於其中心軸之中點上.

- (3) 半球體之距心在於與底面直交之半徑上.
- (4) 直角錐體之距心在於其中心軸上.
- (5) 圓或橢圓之距心在於其中心上.
- (6) 三等邊三角形之距心在於三中線之交點上.
- (7) 半圓之距心在於直交於底邊之半徑上.
- (8) 直線之距心在於其中點上.
- (9) 圓弧之距心在於平分該弧之半徑上.
- (10) 矩形之距心或矩形周邊之距心在於平分相對邊之二直線交點上. 或即在於其二對角線之交點上, 但此時對角線非為對稱軸.

(ii) 簡單形體之距心 若圖形無對稱軸或對稱面, 然數種簡單形體仍可易於求得其距心, 例示如下.

(1) 任意之三角形 第296圖示一任意之三角形, 平行於底邊  $BC$  之極小部份  $MN$  之距心易知其在中點上, 故三角形全體之距心在於中線  $AD$  上. 同樣其距心亦在於中線  $BE$  上. 故該三角形之距心在於中線交點  $O$  上.

由幾何學知  $OD = \frac{1}{3}AD$ , 故距心在於任一中線上離底邊  $\frac{1}{3}$  高之處.



第 296 圖

(2) 斜三角錐之側面積 若以平行於底面而相距極近之二平面切斷該錐, 則此極小部側面積(包括三側面)之距心在於錐之心軸上, 故全面積之距心亦在於心軸

上. 又各三角形表面積之距心在於離底面 $\frac{1}{3}$ 錐高之平面上. 故斜三角錐全部側面積之距心在於其心軸與該平面之交點上.

圓錐側面積可視為斜三角錐側面數有極多者, 故上述關係對於圓錐側面亦同樣成立.

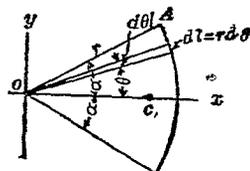
(3) 兩端面相平行之斜柱體 將平行於端面之二平面切斷柱體, 成爲極薄之板, 則其距心與該板面積之距心略相一致. 連結此等極薄板距心之直線即爲斜柱體之軸, 故斜柱體之距心即在其中心軸形. 又將此斜柱體視為平行於其心軸之多數直線棒所集成, 則各棒距心均在其中點. 故兩端面相平行之柱體, 其距心在於中心軸之中點.

(4) 斜多角錐體及斜圓錐體 平行於底面之極薄板, 其距心略與該板面積之距心相一致. 此等之板面積與底面積相似, 故錐體之距心在其中心軸上.

(iii) 距心之一般求法 線長, 面積, 體積, 質量之距心, 一般可由積分求之. 即由第89節(1), (2), (3), (4)各式積分而得. 此時關於極小線長 $L$ , 極小面積 $dA$ 等之選定對於積分之難易大有關係. 要之使極小部份中各點對於所取第一次勢之軸或平面之距離皆須同一或使極小部份之距心爲已知, 而該極小部份對於一軸或一平面之勢即等於該極小部份與其距心對於該軸或該平面之距離之成積.

**例1** 圓弧之距心——取平分圓弧之半徑爲 $x$ 軸, 由對稱

關係,距心必在此半徑上,故  $\bar{y}=0$ ,今設圓弧半徑為  $r$ ,圓弧中心角為  $2\alpha$ ,極小部份長為  $dL$ ,極小部份對於  $y$  軸之距離為  $x$ ,則



第 297 圖

$$dL = r d\theta$$

$$x = r \cos \theta$$

$$\therefore L\bar{x} = \int x dL = \int_{-\alpha}^{+\alpha} r^2 \cos \theta d\theta = 2r^2 \sin \alpha.$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{L} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{2r\alpha} = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}.$$

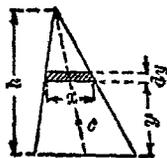
若為半圓弧,則

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \bar{x} = \frac{2r}{\pi} = 0.637 r.$$

若為四分之一圓弧,則

$$\alpha = \frac{\pi}{4}, \quad \therefore \bar{x} = \frac{4r}{\pi} \times 0.707 = 0.901 r.$$

**例 2** 三角形面積之距心——取平行於底邊之極小部份如第 298 圖所示,該部份為中線所平分,故其距心必在中線上,設  $x$  為該部份之寬,則其面積



第 298 圖

$$dA = x dy, \quad \therefore A\bar{y} = \int xy dy$$

由相似三角形之關係,得

$$\frac{x}{h-y} = \frac{b}{h}, \quad x = \frac{b}{h}(h-y)$$

故 
$$A\bar{y} = \frac{b}{h} \int_0^h (h-y)y dy = \frac{1}{6} bh^2$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\frac{1}{6}bh^2}{\frac{1}{2}bh} = \frac{1}{3}h.$$

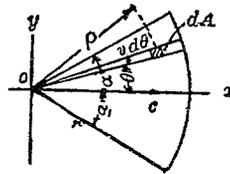
故距心在於中線上，離底邊  $\frac{1}{3}$  高之處。

例3 扇形 (Sector of a circle) 之距心——第 299 圖上取極小部份

$$dA = \rho d\theta d\rho,$$

因該扇形對於  $x$  軸為對稱，故

$$\bar{y} = 0.$$



第 299 圖

又 
$$A\bar{x} = \int x dA = \int_0^r \int_{-\alpha}^{+\alpha} \rho \cos \theta \cdot \rho d\theta d\rho = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \alpha}{A} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \alpha}{r^2 \alpha} = \frac{2}{3} r \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

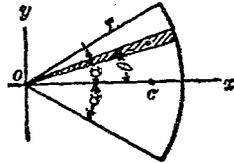
若  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ，即半圓面積，則

$$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi} = 0.425 r.$$

若  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ，即一象限之面積，則

$$\bar{x} = \frac{8r}{3\pi} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{8r}{3\pi} \times 0.707 = 0.6 r.$$

別法 本法中  $dA$  之取法與上不同。如第 300 圖  $dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta$ ，此極小部份可視為一小三角形，故其距心離  $y$  軸為  $\frac{2}{3} r \cos \theta$ ，因之



第 300 圖

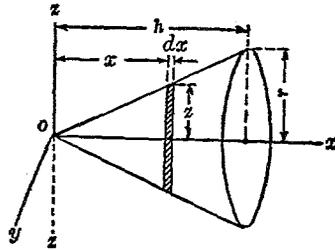
$$A\bar{x} = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{2}{3} r \cos \theta \times \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{1}{3} r^3 \cos \theta d\theta = \frac{2}{3} r^3 \sin \alpha$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{2}{3} r^3 \sin \alpha}{r^2 \alpha} = \frac{2}{3} \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

例 4 直圓錐體 (Right circular cone) 之距心——將直圓錐體之軸取為  $x$  軸。由對稱關係，距心在此軸上，故

$$\bar{y} = 0, \quad \bar{z} = 0,$$

今取平行於底面之薄層為該體積之極小部份，則此薄層之距心離  $yz$  面為  $x$ ，因之得下式：



第 301 圖

$$V\bar{x} = \int x dV = \int_0^h x \pi z^2 dx$$

由第 301 圖上相似三角形之關係，則

$$\frac{z}{x} = \frac{r}{h}, \quad z = \frac{r}{h} x$$

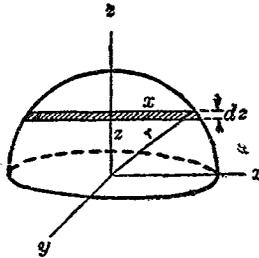
$$\therefore V\bar{x} = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^3 dx = \frac{1}{4} \pi r^2 h^2$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{1}{2} \pi r^2 h^2}{\frac{1}{3} \pi r^2 h} = \frac{3}{4} h$$

**例5** 半球體之距心——將對稱軸取為  $z$  軸, 則  $\bar{x}=0, \bar{y}=0$ , 取平行於底面之薄層為極小部之體積, 則該薄層之距心離  $xy$  面為  $z$ , 因之

$$V\bar{z} = \int z dV = \int_0^r z \pi x^2 dz = \pi \int_0^r z(r^2 - z^2) dz = \frac{1}{4} \pi r^4$$

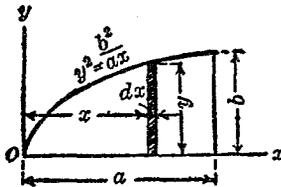
$$\therefore \bar{z} = \frac{\frac{1}{4} \pi r^4}{\frac{2}{3} \pi r^3} = \frac{3}{8} r$$



第 302 圖

**例6** 部份拋物線面積 (Parabolic segment) 之距心——第 303 圖示一拋物線面積之一部份. 取一極小部份平行於  $y$  軸, 則

$$dA = y dx$$



第 303 圖

$$A = \int a dA = \int_0^a y dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a \sqrt{x} dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^a = \frac{2}{3} a b$$

先求  $\bar{x}$  如下：

$$A\bar{x} = \int x dA = \int_0^a xy dx = \frac{b}{\sqrt{a}} \int_0^a x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5} ba^2$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{2}{5} ba^2}{\frac{2}{3} ab} = \frac{3}{5} a$$

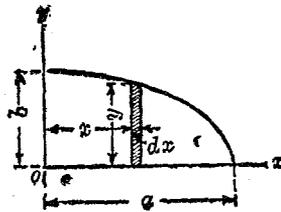
次求  $\bar{y}$ ，因圖示  $dA$  之小部份中各點離  $x$  軸之距離各不相同，故以該小部份之距心即  $\frac{y}{2}$  與  $dA$  之乘積表示各小部份之勢，即

$$A\bar{y} = \int_0^a \frac{1}{2} y^2 dx = \frac{1}{2} \frac{b^2}{a} \int_0^a x dx = \frac{1}{4} b^2 a$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\frac{1}{4} b^2 a}{\frac{2}{3} a b} = \frac{3}{8} b$$

**例7** 橢圓一象限面積之距心——橢圓方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{或} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



第 304 圖

取極小部份與  $y$  軸平行如圖所示。

$$A = \int_0^a y dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{4} \pi ab$$

先求  $\bar{x}$  如下.

$$A\bar{x} = \int x dA = \int_0^a xy dx = \frac{b}{a} \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{3} a^2 b$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\frac{1}{3} a^2 b}{\frac{1}{4} \pi a b} = \frac{4a}{3\pi}$$

次求  $\bar{y}$ , 因該極小部份距心對於  $x$  軸之距離為  $\frac{1}{2}y$ , 故

$$A\bar{y} = \int_0^a \frac{1}{2} y^2 dx = \frac{b^2}{2a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{3} a b^2$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{\frac{1}{3} a b^2}{\frac{1}{4} \pi a b} = \frac{4b}{3\pi}$$

注意 旋轉面 (Surface of revolution) 及旋轉體 (Solid of revolution) 之距心求法——一線旋轉於該平面內一軸之周所得旋轉面之距心在於該軸上. 積分時可取該線上  $ds$  長之旋轉面積為  $dA$  則較便利.

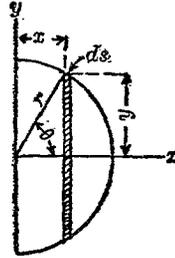
一面積旋轉於該平面內一軸之周, 所得旋轉體之距心亦在於該軸上. 積分時可取該面積上  $dA$  小面積之旋轉體積為  $dV$  則較便利. 例示如下.

例8 半球面之距心——由對稱關係,  $\bar{y}=0$ ,  $\bar{z}=0$ , 由第305圖

$$A = 2\pi r^2, \quad dA = 2\pi y ds,$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad ds = r d\theta,$$

$$\begin{aligned}
 \therefore A\bar{x} &= \int x dA \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^3 \cos \theta \sin \theta d\theta \\
 &= \pi r^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta = \pi r^3 \\
 \therefore \bar{x} &= \frac{\pi r^3}{2\pi r^2} = \frac{r}{2}.
 \end{aligned}$$



第 305 圖

例 9 部份球體 (Spherical segment) 之距心——部份球體 ABC 示於第 306 圖。由對稱關係， $\bar{y}=0$ ， $\bar{z}=0$ 。

$$dV = \pi y^2 dx, \quad V = \int \pi y^2 dx,$$

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad dx = -r \sin \theta d\theta,$$

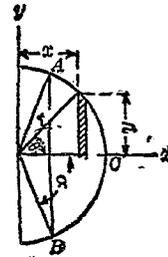
由  $V\bar{x} = \int x dV$ ，得

$$-\bar{x} \int_0^\alpha \pi r^3 \sin^3 \theta d\theta = - \int_0^\alpha \pi r^4 \cos \theta \sin^3 \theta d\theta$$

$$x \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = r \int_0^\alpha \cos \theta \sin^3 \theta d\theta$$

$$-\frac{\bar{x}}{3} [\sin^2 \theta \cos \theta + 2 \cos \theta]_0^\alpha = \frac{r}{4} [\sin^4 \theta]_0^\alpha$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3}{4} r \frac{\sin^4 \alpha}{2 - 3 \cos \alpha + \cos^3 \alpha}$$



第 306 圖

91. 巴甘二氏定理 巴甘二氏定理 (Theorems of Pappus and Guldinus) 凡二，各證明之如下。

定理一。平面曲線旋轉於同平面而不相交之軸之周圍，所得旋轉面之面積  $S$  等於該曲線之長與其距心當旋轉

時所經軌跡(Trace)之長之乘積。

證 設第307圖所示曲線之長為 $L$ , 則

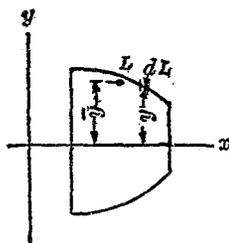
$$L\bar{y} = \int y dL$$

但

$$S = 2\pi \int y dL$$

由上二式得

$$S = 2\pi\bar{y}L.$$



第307圖

定理二. 平面面積旋轉於同平面而不相交之軸之周圍, 所得旋轉

體之體積 $V$ 等於該面積與其距心當旋轉時所經軌跡之長之乘積。

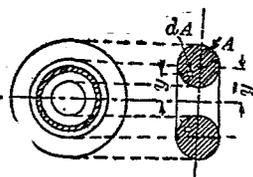
證 第308圖中設面積為 $A$ , 則

$$A\bar{y} = \int y dA$$

極小面積 $dA$ 旋轉而生之體積 $dV$ 等於 $2\pi y dA$ , 因之

$$V = 2\pi \int y dA$$

$$\therefore V = 2\pi\bar{y}A.$$



第308圖

例1 試求圓錐之曲面積及其體積。

解 由定理 I,  $S = 2\pi \times \frac{r}{2} l = \pi r l$ , 但 $r$ 為底面半徑,  $l$ 為錐面母線之長. 再由定理 II,  $V = 2\pi \times \frac{r}{3} \times \frac{1}{2} \times r \times h = \frac{1}{3} \pi r^2 h$ , 但 $h$ 為錐高.

例2 已知球體積  $= \frac{4}{3}\pi r^3$ , 求證半圓弧之距心離直徑為  $\frac{4r}{3\pi}$ .

解 設半圓弧之距心離直徑為  $\bar{y}$ , 由定理 II,

$$V = 2\pi\bar{y} \frac{\pi}{2} r^2$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi^2 r^2 \bar{y}$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

92. 複形體之距心 凡線長,面積,體積,質量等若能分為數部份而各部份之距心皆為已知,則全線長,全面積,全體積,全質量對於一軸或一平面之勢等於各部份對於該軸或該平面之勢之代數和.如此由各部份之勢可求全部之勢時,此全部之形體稱曰複形體 (Composite figure and body).今設全部之面積  $A$  可分成  $a_1, a_2, a_3, \dots$  等各部份,距心之  $x$  座標設為  $x_0', x_0'', x_0'''$  等,則

$$A\bar{x} = a_1 x_0' + a_2 x_0'' + a_3 x_0''' + \dots$$

或  $A\bar{x} = \Sigma(ax_0)$

同樣  $A\bar{y} = \Sigma(ay_0)$

又對於線長,體積,質量等亦可同樣得

$$L\bar{x} = \Sigma(lx_0), \quad L\bar{y} = \Sigma(ly_0)$$

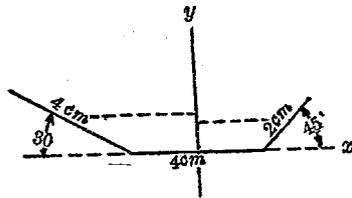
$$V\bar{x} = \Sigma(vx_0), \quad V\bar{y} = \Sigma(vy_0), \quad V\bar{z} = \Sigma(vz_0)$$

$$M\bar{x} = \Sigma(mx_0), \quad M\bar{y} = \Sigma(my_0), \quad M\bar{z} = \Sigma(mz_0)$$

全線長,全面積,全體積,全質量若為簡單形體而易知其距心,且其一部份亦為簡單形體而易知其距心時,則其餘部份之距心可自全部形體對於某軸或某平面之勢減去他已知距心之部對於該軸或該平面之勢而求得之. 設全部面積  $A$ , 其距心座標為  $\bar{x}$ , 各已知距心之部, 其面積各為  $a_1, a_2, a_3$  等, 其距心座標各為  $x_0', x_0'', x_0'''$  等, 其餘未知距心之部, 其面積為  $a$ , 其距心座標為  $x_0$ , 則

$$ax_0 = A\bar{x} - a_1x_0' - a_2x_0'' - a_3x_0''' - \dots$$

例1 今有一線長 10 cm. 彎成第 309 圖之形, 求其距心.



第 309 圖

解 第 309 圖中取  $x$  軸與 4 cm. 之水平部份相一致, 通過其中點之垂直線為  $y$  軸, 則

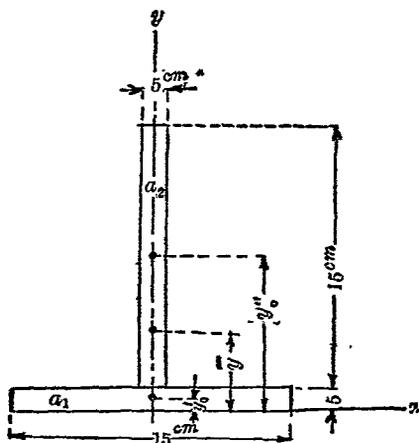
$$10\bar{x} = 2(2 + 1 \cos 45^\circ) - 4(2 + 2 \cos 30^\circ)$$

$$10\bar{y} = 2 \times 1 \sin 45^\circ + 4 \times 2 \sin 30^\circ$$

解之, 得

$$\bar{x} = -0.95 \text{ cm.}, \quad \bar{y} = 0.54 \text{ cm.}$$

例2 求第 310 圖所示 T 形斷面之距心.



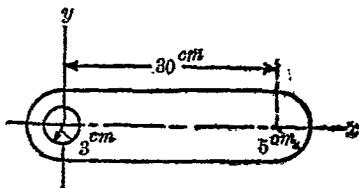
第 310 圖

解 取  $x$  軸與  $y$  軸如圖所示. 由對稱關係知  $\bar{x}=0$ , 將  $T$  形分成  $a_1$  與  $a_2$  二矩形, 其距心各為已知, 故得

$$A\bar{y} = \Sigma(ay_0)$$

$$\therefore \bar{y} = \frac{75 \times 25 + 75 \times 12.5}{150} = 7.5 \text{ cm.}$$

例 3 求第 311 圖所示面積之距心.



第 311 圖

解 將孔心為原點取  $x$  軸與  $y$  軸如圖所示. 由對稱關係知

$$\bar{y} = 0,$$

$$\text{全部面積} = 30 \times 10 + \pi \times 5^2 = 378.5 \text{ cm}^2$$

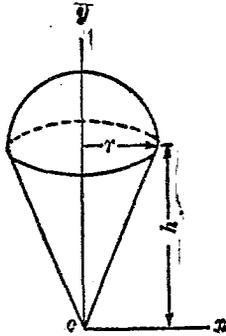
$$\text{孔之面積} = \pi \times 3^2 = 28.26 \text{ cm}^2$$

$$\text{餘剩部之面積} = 378.5 - 28.26 = 350.2 \text{ cm}^2$$

$$350.2 \bar{x} = 378.5 \times 15 - 28.26 \times 0$$

$$\therefore \bar{x} = 16.2 \text{ cm.}$$

例4 試求第312圖所示半球體與圓錐體之距心。



第312圖

解 取  $x$  軸與  $y$  軸如圖所示. 由對稱關係知  $x=0$ , 由

$V\bar{y} = \Sigma(vy_0)$ , 得

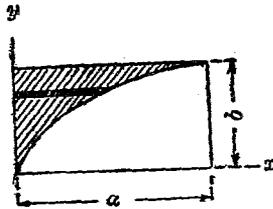
$$\left(\frac{1}{3}\pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3\right)\bar{y} = \frac{1}{3}\pi r^2 h \times \frac{3}{4}h + \frac{2}{3}\pi r^3\left(h + \frac{3}{8}r\right)$$

即 
$$\frac{1}{3}\pi r^2(h+2r)\bar{y} = \frac{1}{3}\pi r^2\left(\frac{3}{4}h^2 + 2rh + \frac{3}{4}r^2\right)$$

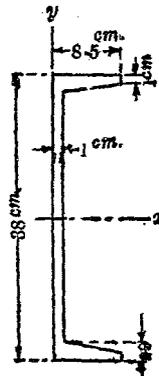
$$\therefore \bar{y} = \frac{\frac{3}{4}h^2 + 2rh + \frac{3}{4}r^2}{h+2r}$$

## 習 題 17.

1. 求第313圖上  $x=0$ ,  $y=b$ ,  $y^2 = \frac{b^2x}{a}$  三線間面積之距心. 取極小部份面積  $dA$  如圖所示.
2. 一拋物線  $y^2 = px$  旋轉於  $x$  軸之周圍所成之拋物線體及  $x=0$  平面間所有體積之距心試求出之.
3. 試求第314圖溝形斷面 (Channel section) 之距心.

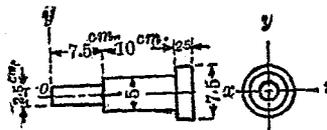


第 313 圖



第 314 圖

4. 試求第315圖所示銷釘之距心.



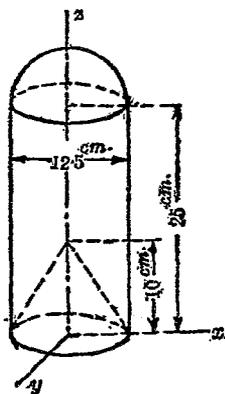
第 315 圖

5. 第4題中若自右端鑽一孔, 直徑 2.5 cm., 深 10 cm., 其中

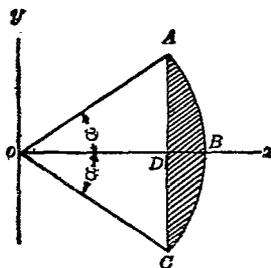
心軸與  $x$  軸一致,則其距心當在何處?

6. 第316圖示一直圓柱體及一半球體,因拉柱體之底部又缺除一直圓錐體,試求其距心.

7. 第317圖示圓之一部份  $ABCD$ , 求其距心. 并於  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  時,其距心當在何處?



第316圖

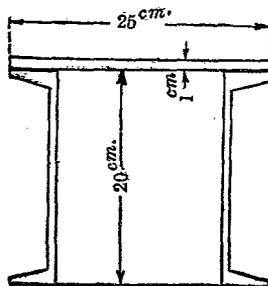


第317圖

8. 第318圖示橋樑構材之一斷面,各溝形鋼(Channe steel) 之斷面積為  $29.9 \text{ cm}^2$ . 求其距心至蓋板頂面之距離.

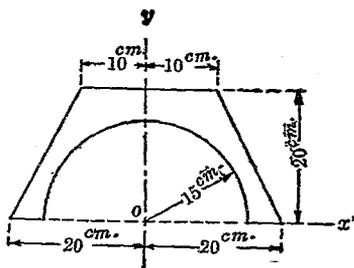
9. 求第319圖所示面積之距心.

10. 第320圖示一整速器(Governor)之球及其圓棒,

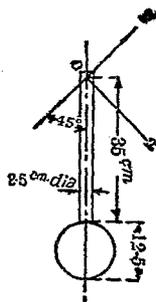


第318圖

在於圖示之位置求距心之位置。假定其用同質物質製成。

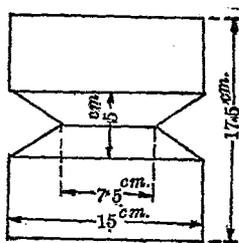


第 319 圖

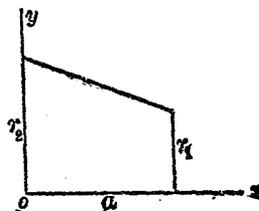


第 320 圖

11. 第 321 圖所示圓柱體周圍之 V 形溝, 求此溝之體積。
12. 第 322 圖之梯形距心在何處? 今將此梯形旋轉於  $y$  軸之周圍, 所得旋轉體之體積幾何?



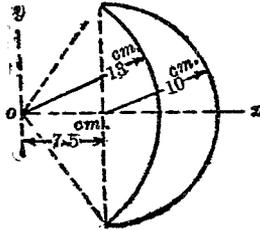
第 321 圖



第 322 圖

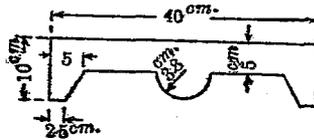
13. 將橢圓  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  之右側半部旋轉於  $y$  軸之周圍所得橢圓體之體積幾何?

14. 試求第323圖所示月形面積之距心



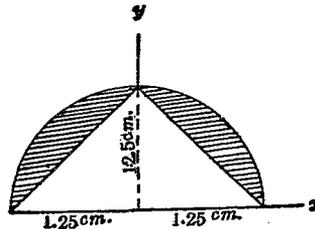
第323圖

15. 第324圖示一直徑4m.之飛輪(Fly wheel)之邊緣(Rim)斷面,試求該邊圓之體積.



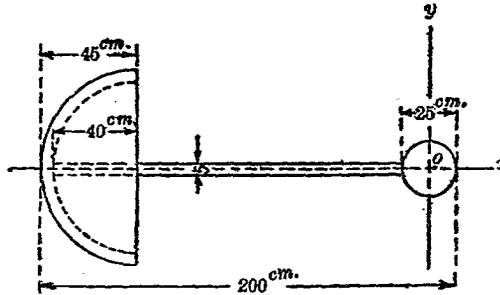
第324圖

16. 試求第325圖所示陰影部份面積之距心.



第325圖

17. 求第326圖所示體積之距心. 但假定 5cm. 棒爲一圓柱體, 略去其兩端彎度.



第 326 圖

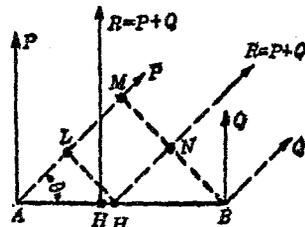
98. 平行力系之中心.

定理 平行力系中諸力若 (1) 不變更其作用點, (2) 不變更其相對的數值, (3) 不變更其相互平行之關係, 而任意轉變其方向時, 則諸力之合力作用線必通過一定點. 此定點即稱曰平行力系之中心 (Center of the system of parallel forces).

證 先就平行力系中二力證明之. 第327圖示二平行力  $P, Q$  作用於  $A, B$  兩點. 設作用於圖示實線位置時, 其合力  $R$  與  $AB$  直線交於  $H$  點. 則

$$AH = \frac{Q}{P+Q} \times AB$$

次設  $P, Q$  二力各於其作用點周圍同方向旋轉  $90^\circ - \theta$  角, 如圖中



第 327 圖

點線所示,此時合力  $R$  作用線設與  $AB$  直線交於  $H'$  點,作  $BM$ ,  $H'L$  與  $P$  力作用線成直交,  $BM$  與合力  $R$  作用線之交點設為  $N$ , 則

$$MN = LH' = \frac{Q}{P+Q} BM = \frac{Q}{P+Q} AB \sin \theta$$

$$\therefore AH' = \frac{LH'}{\sin \theta} = \frac{Q}{P+Q} AB$$

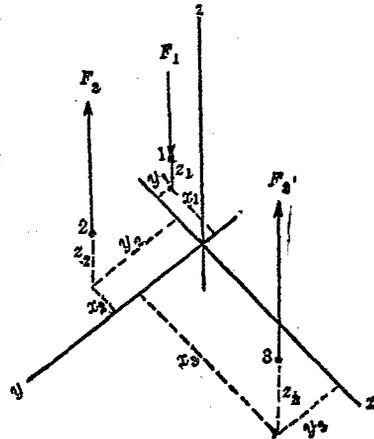
$$\therefore AH' = AH.$$

即  $H$  與  $H'$  兩點相合一故  $P, Q$  二平行力之合力,當  $P, Q$  作用線任意同時旋轉於作用點之周圍時,則其合力通過一定點  $H$ .

三平行力之合力亦通過一定點,亦可合樣證明. 蓋二平行力之合力與第三力合成後,此合力當由二平行力時之證明亦必通過一定點. 同樣四平行力以上乃至任何個空間平行力系之合力,可證其通過

一定點.

此定點之座標可求之如下:第 328 圖中  $F_1, F_2, F_3$ , 等為平行力系,選定  $ox, oy, oz$  三軸,使  $oz$  與諸力作用線相平行.  $F_1$  之作用點設為  $1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $F_2$  之作用點設為  $2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $F_3$  之作用點設為  $3(x_3, y_3, z_3)$  等. 今設  $R$  為該力系之合力,



第 328 圖

其作用點之  $x$  與  $y$  軸座標設為  $\bar{x}, \bar{y}$ , 將諸力投射於  $xz$  平面上可得合力作用線之  $x$  軸座標, 投射於  $yz$  平面上, 可得其  $y$  軸座標. 由第 27 節得

$$R = \Sigma F, \quad \bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}$$

今設諸力轉變其作用方向, 與  $ox$  軸相平行而不變更其作用點, 則合力  $R$  作用線之  $y$  與  $z$  軸座標如下:

$$\bar{y} = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}$$

次將諸力作用線再轉變成為與  $oy$  軸相平行, 而不變更其作用點, 則合力  $R$  作用線之  $x$  與  $z$  軸座標為

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F}$$

以上三種方向之合力  $R$  作用線通過一共通點, 其座標如下:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma Fx}{\Sigma F}, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma Fy}{\Sigma F}, \quad \bar{z} = \frac{\Sigma Fz}{\Sigma F} \dots\dots\dots (A)$$

此點即平行力系之中心, 亦即為該力系合力之作用點. 當  $\Sigma F = 0$  時,  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$  為無限大, 即合力為偶力時無此中心點之存在.

平行力系作用於物體上各質點時, 若將物體旋轉, 而力之方向不變時, 則平行力系中諸力作用點對於該物體之關係, 毫無變更. 與物體靜止而變更力之方向時, 其結果全同. 故作用於物體上平行力系之中心, 當物體旋轉而力之方向一定時, 在物體內為一定點. 此定點即為該力系合力在物體內

之作用點。

注意 第 34 節所述之分布力亦屬平行力系，故其合力亦通過一定點，此定點之求法全與本節所述者相同。

94. 物體之重心 物體內各質點上受重力之作用，此重力略可視為垂直方向之平行力系，各力之作用點即為各質點，對於物體有一定位置，各力之大小與各質點之質量成比例。由前節證明，則此各質點上重力之合力，不論物體取若何位置，必通過物體內一定點，此點即稱為物體之重心 (Center of gravity)。重心位置由前節 (A) 式求之。

若勻質物體 (Homogeneous body)，則單位容積重量  $w$  為常數，故全重量  $W = w \int dV$ ，而重心位置由下式定之。

$$\bar{x} = \frac{\int x dV}{V}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V} \dots\dots\dots (B)$$

故勻質物體之重心與體積之距心相一致。同樣勻質之極薄板狀物之重心與面積之距心相一致，極細勻質棒之重心與線長之距心相一致。若非屬勻質之物體，則重心之位置，由前節 (A) 式可求之如下。

$$\bar{x} = \frac{\int x dW}{W}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W} \dots\dots\dots (C)$$

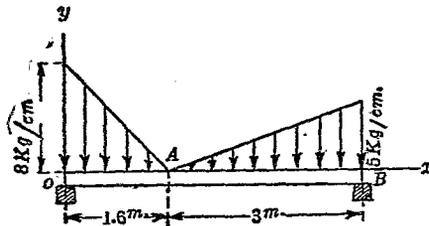
前述質量之距心在動力學上常用質量中心 (Center of mass or mass-center) 之名稱以代之，此中心實際上即與重心相一致，二者可視為同一點，其異同由下式可明。

$$\bar{x} = \frac{\int x dM}{M} = \frac{\int x g dW}{gW}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dM}{M} = \frac{\int y g dW}{gW},$$

$$\bar{z} = \frac{\int z dM}{M} = \frac{\int z g dW}{gW} \dots \dots \dots (D)$$

實際上  $g$  為常數故 (D) 與 (C) 相一致。

例 第 329 圖示一樑，其上疊磚，其荷重分布如圖所示。試求此荷重合力作用線沿樑上之位置。



第 329 圖

解 取  $x$  軸與  $y$  軸如圖所示。設  $OA$  部份合力之作用線距  $O$  點為  $x_1$ ， $AB$  部份合力之作用線距  $O$  點為  $x_2$ ，

$$OA \text{ 部份之總壓力} = \frac{8}{2} \times 160 = 640 \text{ kg.}$$

$$x_1 = \frac{1}{3} \times 160 = 53.3 \text{ cm.}$$

$$AB \text{ 部份之總壓力} = \frac{5}{2} \times 300 = 750 \text{ kg.}$$

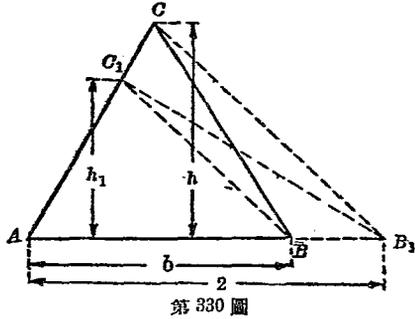
$$x_2 = \frac{2}{3} \times 300 + 160 = 360 \text{ cm.}$$

今設全部壓力之作用線距  $O$  點為  $\bar{x}$ ，則

$$\bar{x} = \frac{640 \times 53.3 + 750 \times 360}{640 + 750} = 219 \text{ cm.}$$

95. 面積之作圖求法

1. 三角形 因三角形面積=底×高÷2, 今於第330圖中設  $ABC$  為已知三角形, 將此變形為三角形  $AB_1C_1$ , 使與原三角形等積而底邊之長為 2 (用適當縮尺為單位). 設三角形  $AB_1C_1$  之高為  $h_1$ , 則



$$\text{面積 } A = AB_1 \frac{h_1}{2} = 2 \cdot \frac{h_1}{2} = h_1$$

量取  $h_1$  之長度, 其值以  $\text{cm}_2$  表示之即得所求三角形之面積.

其作圖法先沿  $AB$  底上以單位縮尺取  $AB_1 = 2$ , 連結  $B_1C$ , 自  $B$  點引  $BC_1 \parallel B_1C$ , 則  $\triangle BCC_1 = \triangle B_1BC_1$ , 故  $\triangle ABC = \triangle AB_1C_1$

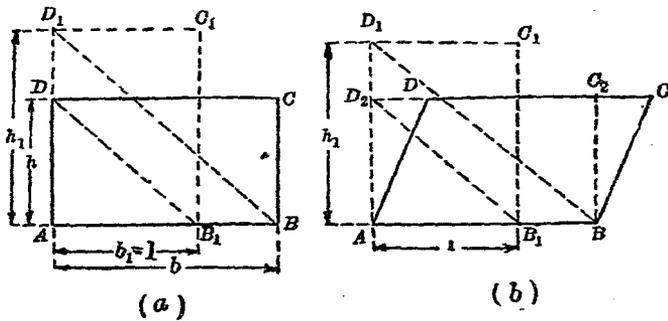
2. 四邊形

a. 矩形及平行四邊形. 第331圖(a)及(b)所示之矩形或平行四邊形  $ABCD$  (若為平行四邊形先變形為矩形), 變形之為他等積矩形, 其底邊  $b_1$  使等於 1 (以適當縮尺). 此時沿  $AB$  邊取  $AB_1 = b_1 = 1$ , 連結  $B_1D$ , 自  $B$  引  $BD_1 \parallel B_1D$ , 則  $AD_1 = h_1$ , 即為所求矩形之高. 因

$$b : b_1 = h_1 : h \quad \therefore bh = b_1 h_1$$

$$\therefore ABCD = AB_1C_1D_1 = b_1 h_1 = 1 \cdot h_1 = h_1$$

$h_1$  之高度以  $\text{cm}_2$  表示其數值, 即為所求矩形之面積.

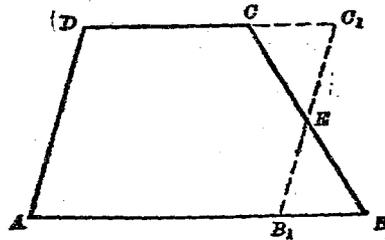


第 331 圖

b. 梯形 先將已知梯形變形為等積之平行四邊形. 此時如第 332 圖就不相平行之邊, 例如  $BC$  邊, 取其中點  $E$ , 通過  $E$  作平行於  $AD$  之線  $B_1C_1$ , 則

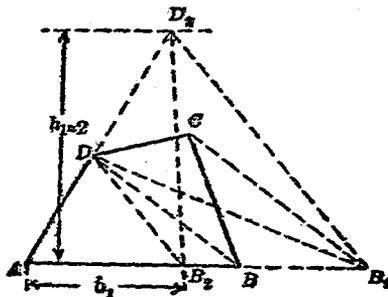
$$ABCD = AB_1C_1D_1,$$

由此平行四邊形  $AB_1C_1D$  再如 a 中所述方法可以線長表此面積.



第 332 圖

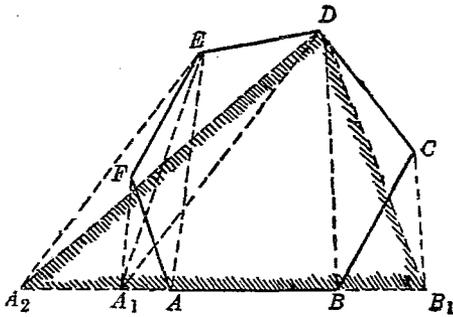
c. 不規則四邊形 將已知不規則四邊形變形為等積之三角形. 第 333 圖上已知四邊形  $ABCD$  上引  $BD$  對角線, 自



第 333 圖

$C$ 引  $CB_1 \parallel BD$ , 連結  $DB_1$ , 則  $\triangle AB_1D = ABCD$ , 次再由  $I$  中所述方法使  $\triangle AB_1D = \triangle AB_2D_2$ , 此時  $h_1 = 2$ , 求  $AB_2$  長度以  $cm^2$  表之, 即得所求不規則四邊形之面積。

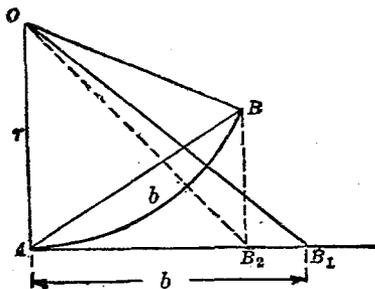
3. 多邊形 如上所述, 四邊形可變為三角形, 今同樣將已知多邊形順次變為邊數較少之形, 最後亦成為三角形而如 1. 中方法求其面積。第 334 圖中  $ABCDEF$  為已知多邊形, 依 2. 中之方法將  $ABCDE$  變為  $AB_1DEF$ , 再變為  $A_1B_1DE$ , 再變為  $A_2B_1D$  之三角形。則容易證明。



第 334 圖

$$\triangle A_2B_1D = ABCDEF.$$

4. 扇形及弓形 (Circular sector and segment) 第 335 圖中



第 335 圖

已知扇形  $OAB$  上設弧長  $AB = b$ , 則

$$\frac{\text{扇形 } OAB}{\pi r^2} = \frac{b}{2\pi r}$$

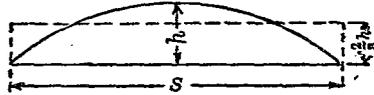
$$\therefore \text{扇形 } OAB = \frac{1}{2}rb.$$

故扇形面積可以高  $r$  底  $b$  之三角形面積表示之。故

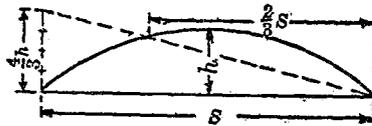
於  $A$  點引切線使  $AB_1 = b$ , 則三角形  $OAB_1$  等於扇形  $OAB$  之面積.

次求弓形  $AB$  之面積. 引  $BB_2 \parallel OA$ , 連結  $OB_2$ , 則  $\triangle AOB = \triangle AOB_2$ , 故弓形  $AB$  之面積等於三角形  $OB_1B_2$  之面積.

若圓弧極扁平時, 可視為拋物線. 凡拋物線可如第 336 圖, 第 337 圖變形為矩形或三角形.



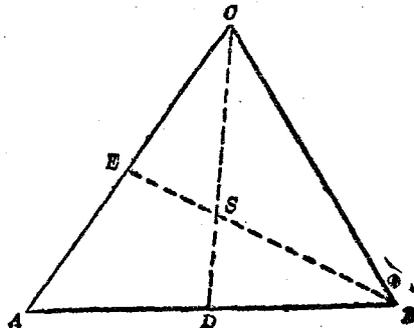
第 336 圖



第 337 圖

96. 面積距心之作圖求法.

1. 三角形 任意三  
角形  $ABC$  一邊  $AB$  中點  
 $D$  與頂點  $C$  相連結得  $CD$   
中線, 距心必在該線上.  
同樣  $AC$  中點  $E$  與  $B$  連結  
得  $BE$  中線, 距心又必在  
該線上. 二中線交點  $S$  即  
為所求之距心.

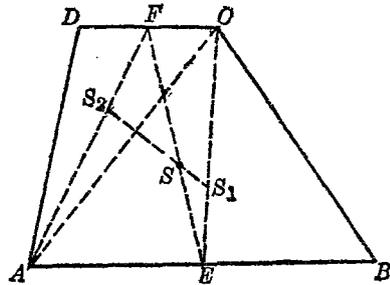


第 338 圖

又或因距心在於自底邊  $\frac{1}{3}$  高之處，故將  $BE$  或  $CD$  任意一中線三等分之即得  $S$  點。

2. 四邊形 平行四邊形，矩形，正方形之距心可引二對角線，求其交點即得其距心。

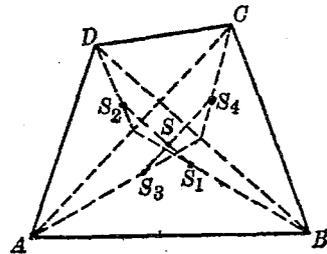
若為梯形則如第 339 圖所示，連結二平行邊  $AB$ ， $CD$  各中點  $E$  及  $F$ ，則距心必在  $EF$  上。次引對角線  $AC$ ，將梯形分成  $ABC$  及  $ADC$  二三角形。由 1. 中方法求各三角形之距心  $S_1$  與  $S_2$ ，則梯形之距心必在  $S_1, S_2$  直線上。



第 339 圖

上  $S_1 S_2$  與  $EF$  之交點  $S$ ，即為所求之距心。

不規則四邊形之距心，如第 340 圖所示方法求之。引對角線  $AC$ ，分成二三角形，求其重心各為  $S_1, S_2$ ，同樣引對角線  $BD$ ，分成二三角形，求其重心各為  $S_3, S_4$ ，連結  $S_1 S_2$  與  $S_3 S_4$ ，求其交點  $S$  即得。

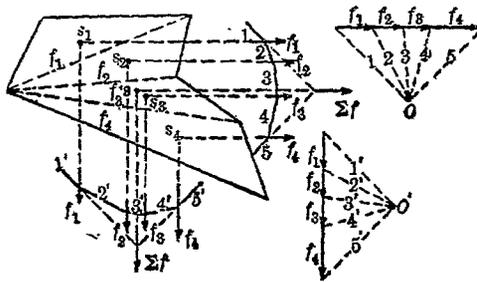


第 340 圖

3. 多邊形 多邊形距心之求法，乃以對角線分成數多三角形，求各三角形之距心。次將各三角形之面積視為各作用於其距心上任意方向之平行力，作示力多邊形及索邊形，

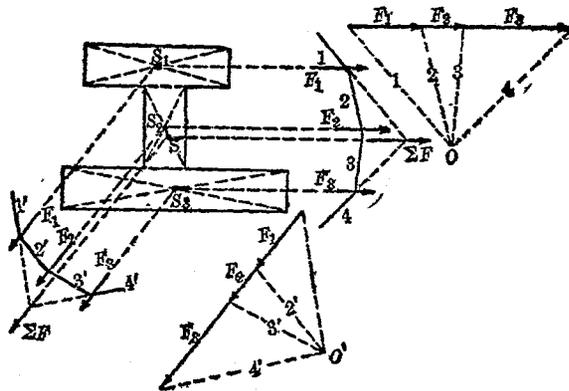
求其合力作用線，則距心即在此線上。同樣變更諸平行力之方向，得另一合力作用線，此作用線與前作用線之交點即所求之距心。

例如第341圖所示方法，讀者可自研究之。各三角形之面積由計算或作圖求之。



第 341 圖

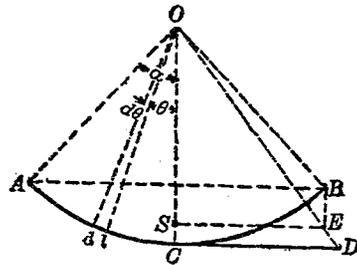
4. 複形 (Composite figure) 凡複形先分為面積與距心



第 342 圖

均容易求得之圖形，而後將面積各視爲作用於距心上之平行力，作示力多邊形與索邊形，求二種方向上平行力之合力，其交點即爲所求之距心。作圖方法示於第342圖。

5. 圓弧，扇形及弓形 圓弧之距心求法如第343圖所示。先取直線  $OD$  使等於圓弧  $CB$  之長，連結  $OD$ ，次引  $BE \parallel OC$ ，由  $E$  點引  $ES \parallel AB$ ，則  $ES$  與  $OC$  交點  $S$  即爲距心。



第343圖

此作圖法可證明之如下。圓弧上取  $dl$  之長，對於  $O$  點之勢爲  $r \cos \theta dl = r^2 \cos \theta d\theta$ ，對於全圓弧積分之，得

$$2 \int_0^\alpha r^2 \cos \theta d\theta = 2r^2 \sin \alpha,$$

設圓弧  $AB$  長爲  $2l$ ，則距心位置  $OS$  即  $\bar{y}$  可求之如下：

$$\bar{y} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{2l} = \frac{r^2 \sin \alpha}{l}.$$

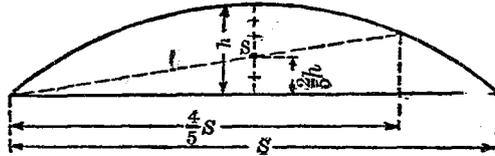
故  $S$  爲所求圓弧之距心。

次求扇形之距心。第344圖之扇形可視爲  $Oab$  小三角形之集合。各小三角形之距心在於以  $O$  爲中心， $\frac{2}{3}r$  爲半徑之圓弧上。故扇形之距心與半徑  $\frac{2}{3}r$  圓弧之距心相一致。因之由圓弧距心之求法可得。第344圖中先取直線  $CD$  等於弧  $CB$  之長，連結  $OD$ ，次將  $OB$  三等分於  $F$ ，引  $FE \parallel OC$ ，與  $OD$  交於  $E$ ，自



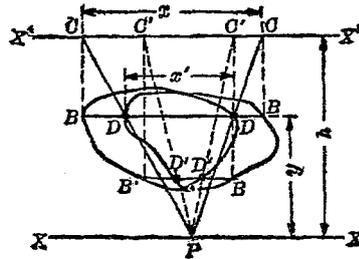
此式與作圖之結果相符合，故  $S_1$  即為所求弓形之距心。

若弓形為扁平之形時，可視為拋物線形。拋物線形之距心在於底邊上  $\frac{2}{5}$  高之處，故如第 346 圖可知其距心。



第 346 圖

6. 任意不規則形 第 347 圖示一不規則形  $B'B'B'$ ，作二平行線  $XX, X'X'$ ，其距離  $h$  為任意。作  $BB \parallel XX$ ，將  $B, B'$  二點，投射於  $X'X'$  上得  $C, C'$  二點。與  $XX$  上任取一點  $P$  各與  $C, C'$  相連結。設  $CP$  與  $BB'$  之交點為  $D, D'$ ，如此反覆上法對於  $B'B', B''B''$  等直線同樣



第 347 圖

可得  $D', D''; D'', D'''$  等點。連結  $D, D'; D', D''; D'', D'''$  等點得一平滑曲線。設此曲線所包圍之面積為  $A'$ ，原有不規則形之面積為  $A$ ，則所求距心對於  $XX$  之距離  $\bar{y}$  可求之如下：

$$\bar{y} = \frac{A'}{A} h.$$

此作圖法可證之如下。設  $CC'$  與  $DD'$  之長各以  $x, x'$  表示之。由相似三角形  $PCC'$  及  $PDB'$ ，得

$$\frac{x}{h} = \frac{x'}{y}, \quad \therefore xy = x'h$$

今  $\bar{y}$  可由下式得之。

$$\bar{y} = \frac{\int yx dy}{A} = \frac{h \int x' dx}{A} = h \frac{A'}{A}$$

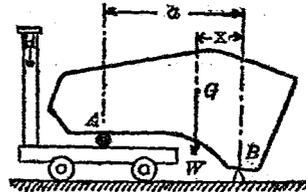
面積  $A$  與  $A'$  可用面積測量器 (Planimeter), 或其他便利方法求之。同樣取  $YY, Y'Y'$  二平行直線, 則距心對於  $YY$  之距離  $\bar{y}$  可如上同樣求之。

97. 重心之實驗求法 若物體為不規則形, 其重心不能由計算求得之時, 則用實驗方法以決定之。其方法有三。

(a) 懸吊法 (Method of suspension). — 將物體自其上一點懸吊之。由該點引一垂直線於物體上, 再自他點懸吊之。同樣引一垂直線。此等垂直線之交點即為該物體之重心, 如薄板等物可用此法定之。

(b) 平衡法 (Method of balancing). — 將物體支於刃尖 (Knife edge), 使平衡之。過刃尖作垂直面。再變更物體支於刃尖之位置, 而平衡之。同樣作垂直面, 如是反覆二次, 共得三垂直面。此三垂直面之交點即為所求之重心。

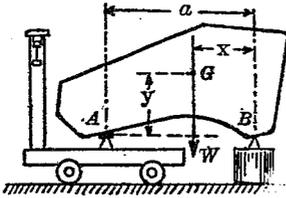
(c) 秤量法 (Method of weighing). — 第 348 圖中先秤定物體之重量  $W$ , 次將物體支於刃尖  $B$ ,



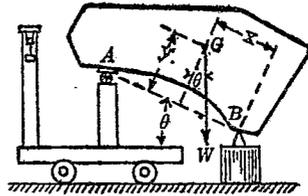
及台秤 (Platform scale) 上另一支點  $A$ , 秤定  $A$  點上反作用力  $W'$ , 并量取  $A, B$  間水平距離  $a$ , 則重心離刀尖  $B$  之水平距離  $\bar{x} = \frac{W' a}{W}$ , 如此決定由數處之刀尖支點至重心之水平距離, 而求得重心之位置。

又通過物體上三點之平面至重心之距離亦可求之如下。如第 349 圖, 設  $A, B, C$  為物體上三點 ( $C$  點在  $B$  點後方, 圖中未示出)。  $a$  為  $A$  點至  $BC$  連結線之距離,  $W$  為物體之重量,  $A, B, C$  在水平面上時 (第 349 圖), 台秤所示反作用力設為  $W'$ ,  $A$  若較  $B, C$  高  $h$  時 (第 350 圖), 台秤所示  $A$  點反作用力設為  $W''$ , 則重心離  $ABC$  平面之距離  $\bar{y}$  可求之如下:

$$\bar{y} = \frac{\sqrt{a^2 - h^2}}{h} \cdot \frac{W' - W''}{W} a$$



第 349 圖



第 350 圖

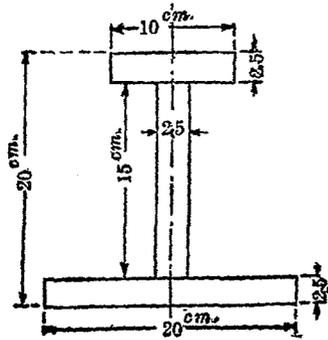
上式可證之如下。由第 349 圖得  $W' a = W x$ , 由第 350 圖得  $W'' a \cos \theta = W(x \cos \theta - y \sin \theta)$ , 解此二式, 得

$$y = (W' - W'')(a \cot \theta) / W,$$

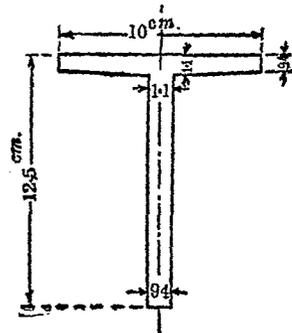
但  $\cot \theta = \sqrt{a^2 - h^2} / h$ , 故得上式。

## 習 題 18.

1. 試用作圖法求第351圖I形斷面之距心.
2. 試用作圖法求第352圖T形斷面之距心.

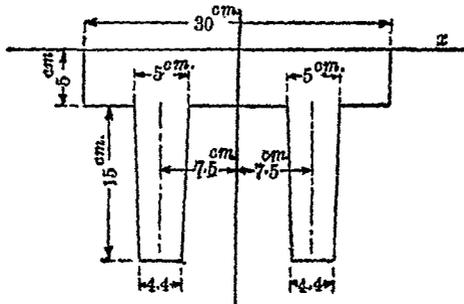


第 351 圖

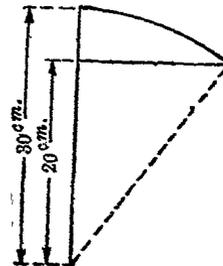


第 352 圖

3. 試用作圖法求第353圖面積之距心
4. 試用作圖法求第354圖之半弓形(Half circular segment)面積之距心.

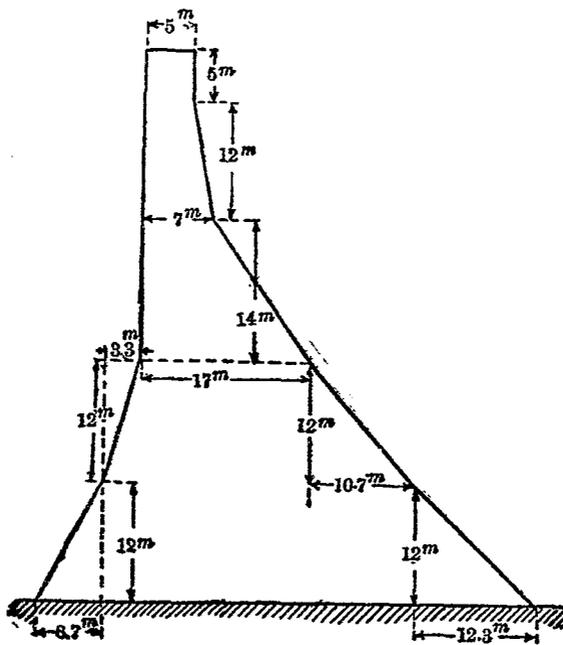


第 353 圖



第 354 圖

5. 試用作圖法求第355圖所示堰堤 (Dam) 斷面之面積及其重心。



第 355 圖

## 第八章 情性勢

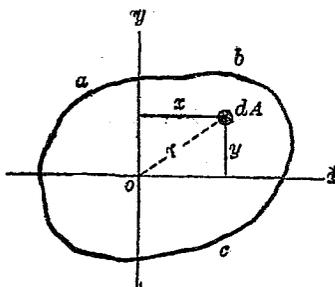
### A 面積之情性勢

98. 面積之情性勢 工程上之算式中常有  $\int x^2 dA$ ,  $\int r^2 dA$ ,  $\int r^2 dM$  等式, 即面積與質量各極小部份對於一軸之第二次勢之總和.  $dA$  與  $dM$  各為面積與質量之極小部份,  $x$  與  $r$  等各為該極小部份至定軸之距離. 此等各稱為面積之情性勢 (Moment of inertia of areas), 及質量之情性勢 (Moment of inertia of masses), 質量之情性勢有物理學上意義, 述於第109節, 乃對於迴轉運動 (Rotation) 上與質量相當之量. 面積之情性勢僅為一種數量, 無物理學上意義, 但工程計算式中如樑、柱等算式內常所遭遇. 質言之面積本無情性, 故亦無情性勢 (Moment of inertia), 惟質量乃有情性勢, 故面積之情性勢云者並非適當之名稱, 實即面積之第二次勢 (Second moment of areas) 之意也. 換言之  $x^2 dA$  可書為  $x(xdA)$  即面積極小部份之勢之勢, 即面積極小部份之第二次勢是也. 但面積第二次勢之式  $\int x^2 dA$  與質量情性勢之式  $\int r^2 dM$  相似, 故面積之第二次勢習慣上亦稱為面積之情性勢.

面積之情性勢, 通常對於平面面積而言, 其定義如下.

對於一軸之面積惰性勢者，乃極小部份之面積與該部份至定軸間距離自乘之乘積，就全面積之總和。

惰性勢通常以  $I$  表示之。第 356 圖上任意一平面面積  $abc$ ，取該平面內適當一點為原點  $o$ ，作  $ox$  與  $oy$  兩直交軸於該平面內，又與該平面直交作  $oz$  軸。設面積之極小部份為  $dA$ ，其座標為  $x, y$ ，至原點之距離設為  $r$ ，則  $I_x = \int y^2 dA$ ， $I_y = \int x^2 dA$ ， $I_z = r^2 dA$



第 356 圖

但  $I_x, I_y, I_z$  各為該面積對於  $x, y$ ，及  $z$  軸之惰性勢  $I_z$  即對於與平面直交之軸之面積惰性勢稱曰面積之極惰性勢 (Polar moment of inertia).

因

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\therefore I_z = \int (x^2 + y^2) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$

即

$$I_z = I_x + I_y$$

面積之極惰性勢通常又以  $J$  表示之，即

$$J_z = I_x + I_y$$

故平面面積對於任意一軸(與該平面直交)之極惰性勢等於該軸與平面交點上在該平面內任意二直交軸周圍各惰性勢之和。

面積慣性勢之單位由定義可知其為長度之四次方，長度若以 cm. 表示時，其單位為 (cm.)<sup>4</sup>，若以 in. 表示時，其單位為 (in.)<sup>4</sup> 等。

又  $x^2 dA$  式中  $x^2$  必為正號， $dA$  表示面積亦為正號，故慣性勢之符號常為正，亦即第二次勢之符號常為正，但第一次勢則可為正為負且亦可為零也。

99. 旋動半徑 面積慣性勢  $\int x^2 dA$ ,  $\int y^2 dA$  等既以長度四次方表示之，則亦必可以全面積  $A$  與他一適當距離  $k$  自乘之乘積表示之即

$$I_x = \int y^2 dA = Ak_x^2$$

$$I_y = \int x^2 dA = Ak_y^2$$

$$I_z = \int r^2 dA = Ak_z^2$$

滿足於上式之  $k$  必可存在，此  $k$  即稱曰對於一定軸之面積旋動半徑 (Radius of gyration)。今假想全面積集中於離該軸  $k$  距離處一點上，則對於該軸之慣性勢等於原有未集中時面積對於該軸之慣性勢。

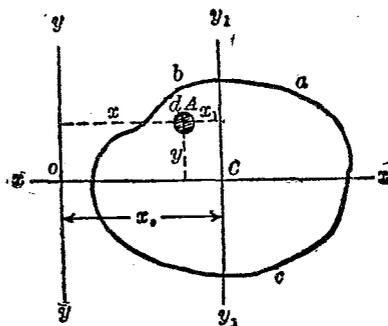
注意 由上三式則  $k_x^2$ ,  $k_y^2$ ,  $k_z^2$  為面積之極小部份對於定軸距離自乘之平均，並非距離平均之自乘，故與  $(\bar{x})^2$ ,  $(\bar{y})^2$ ,  $(\bar{z})^2$  等相異，即  $A\bar{x}^2$ ,  $A\bar{y}^2$ ,  $A\bar{z}^2$  等非表示慣性勢。

#### 100. 平行軸間面積慣性勢之關係

定理 1. 某面積對於該平面內不通過其重心之軸，其慣

性勢等於該面積對於通過距心之平行軸之惰性勢及全面積與兩軸間距離自乘之乘積之總和。

證 設第 357 圖上  $abc$  為任意平面積, 其全面積為  $A$ ,  $yy$  為該平面內任意一軸. 今通過距心  $C$  作  $y_1y_1$  軸與  $yy$  軸平行, 又作  $xx$  軸直交於  $yy$  軸. 今設  $dA$  為極小部份之面積, 其座標對於  $ox, oy$  軸為  $x, y$ ; 對於  $ox_1, oy_1$  軸  $x_1, y_1$  而  $yy$  軸與  $y_1y_1$  軸間距離為  $x_0$ , 今對於  $yy$  軸之惰性勢為



第 357 圖

$$I = \int x^2 dA$$

又對於  $y_1y_1$  軸之惰性勢為

$$I_0 = \int x_1^2 dA$$

因  $x = x_1 + x_0$  故

$$\begin{aligned} I &= \int x^2 dA = \int (x_1 + x_0)^2 dA = \int (x_1^2 + 2x_0x_1 + x_0^2) dA \\ &= \int x_1^2 dA + 2x_0 \int x_1 dA + x_0^2 \int dA \\ &= I_0 + x_0^2 A + 2x_0 \int x_1 dA \end{aligned}$$

但  $C$  點為距心, 故  $\int x_1 dA = 0$

$$\therefore I = I_0 + x_0^2 A \dots\dots\dots(1)$$

本定理已得證明。

設對於  $yy$  軸之旋動半徑為  $k$ , 對於  $y_1y_1$  軸之旋動半徑為  $k_0$ , 則由(1)式得

$$Ak^2 = Ak_0^2 + x_0^2A,$$

$$\therefore k^2 = k_0^2 + x_0^2 \dots\dots\dots (2)$$

定理 II. 某面積對於直交於該平面而不通過其距心之軸, 其極慣性勢等於該面積對於通過距心之平行軸之極慣性勢及全面積與兩軸間距離自乘之乘積之總和.

證 第 358 圖  $abc$  為任意平面面積, 其全面積為  $A$ ,  $C$  為其距心,  $o$  為該平面上任意一點.

過  $o$  點取  $xx, yy$  二直交軸, 過  $C$  點又取  $x_1x_1, y_1y_1$  二直交軸, 各與  $xx, yy$  軸相平行. 由定理 I 得

$$I_x = I_{x_1} + Ay_0^2$$

$$I_y = I_{y_1} + Ax_0^2$$

設對於  $o$  點上直交於該平面之軸其極慣性勢為  $J$ , 對於  $C$  點

上直交於該平面之軸, 其極慣性勢為  $J_C$  則

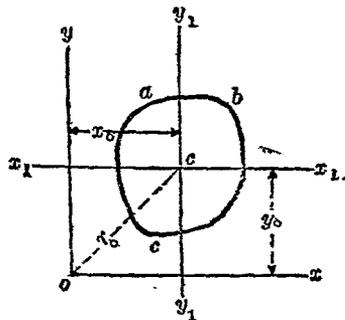
$$J = I_x + I_y = I_{x_1} + I_{y_1} + A(x_0^2 + y_0^2)$$

但  $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2, \quad J_C = I_{x_1} + I_{y_1}$

$$\therefore J = J_C + Ar_0^2 \dots\dots\dots (3)$$

故本定理已證明之.

設對於  $o$  點上直交於該平面之軸之旋動半徑為  $k$ , 對於



第 358 圖

$C$  點上直交於該平面之軸之旋動半徑為  $k_0$ ，則由 (3) 式得

$$Ak^2 = Ak_0^2 + Ar_0^2$$

$$\therefore k^2 = k_0^2 + r_0^2 \dots\dots\dots(4)$$

註 本節二定理稱曰平行軸定理 (Parallel axis theorem).

101. 面積慣性勢之積分求法 用積分法求面積慣性勢時，極小部份面積  $dA$  之取法可有種種，分述如下。

(1) 極小部份中各點對於定軸之距離須相等或

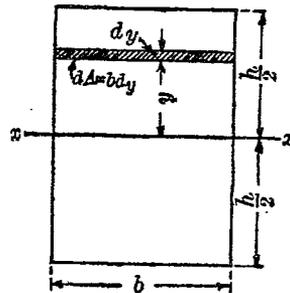
(2) 極小部份對於定軸之慣性勢為已知，如是則全面積對於該軸之慣性勢等於各極小部份慣性勢之總和。又或

(3) 極小部份之距心為已知，而對於通過此距心且與定軸相平行之軸，該極小部份之慣性勢亦為已知，則由前節定理可求該極小部份對於定軸之慣性勢茲示數例如下。

例 1 矩形 (a) 對於通過距心而平行於底邊之軸及 (b) 對於一致於底邊之軸之慣性勢。

解 (a) 對於通過距心之軸。

第 359 圖所示矩形寬  $b$ ，高  $h$ ， $xx$  為通過其距心而平行於底邊之軸。設  $\bar{I}_x$  為對於通過距心軸  $xx$  之慣性勢，則



第 359 圖

$$\bar{I}_x = \int y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} by^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

(b) 對於一致於底邊之軸。由第100節定理 I, 設  $I_b$  為對於底邊之慣性勢, 則

$$I_b = \bar{I}_x + A\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{bh^3}{12} + bh \times \frac{h^2}{4} = \frac{1}{3}bh^3$$

例2 三角形 (a) 對於一致於底邊之軸及 (b) 通過距心而平行於底邊之軸之慣性勢。

解 (a) 對於一致於底邊之軸。

第360圖所示三角形底邊  $b$ , 高  $h$ , 對於底邊之慣性勢  $I_b$  如下式求之。

$$I_b = \int y^2 dA = \int y^2 x dy$$

但由相似三角形得

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$

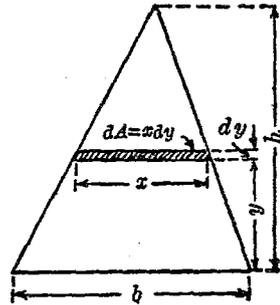
$$\therefore x = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$\therefore I_b = \frac{b}{h} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{1}{2}bh^3$$

(b) 對於通過距心之軸。設  $\bar{I}_x$  為對於通過距心而平行於底邊之軸之慣性勢, 則由第100節定理 I 得

$$\bar{I}_x = I_b - A\left(\frac{1}{3}h\right)^2 = \frac{1}{12}bh^3 - \frac{1}{2}bh \times \frac{1}{9}h^2 = \frac{1}{36}bh^3$$

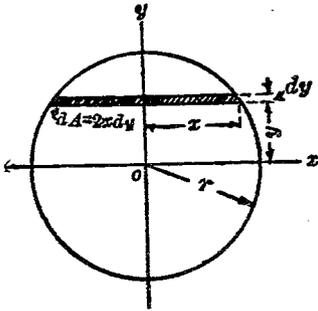
例3 圓面積對於一直徑之慣性勢, (a) 用直交座標, (b) 用極座標。



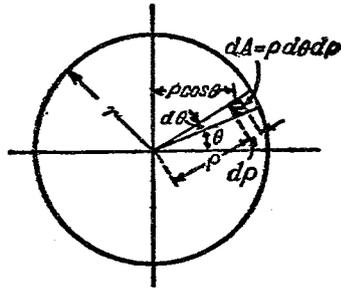
第 360 圖

解 (a) 直交座標. 由第 361 圖, 得

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \int y^2 dA = \int 2y^2 x dy \\ &= 2 \int_{-r}^r y^2 \sqrt{r^2 - y^2} dy = \frac{1}{4} \pi r^4\end{aligned}$$



第 361 圖



第 362 圖

(b) 極座標. 由第 362 圖, 得

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \int y^2 dA = \int_0^r \int_0^{2\pi} (\rho \sin \theta)^2 \rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \rho \sin^2 \theta d\rho d\theta \\ &= \frac{r^4}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = \frac{r^4}{4} \times \pi \\ &= \frac{1}{4} \pi r^4\end{aligned}$$

例 4 圓面積對於中心上直交於平面之軸之極慣性勢.

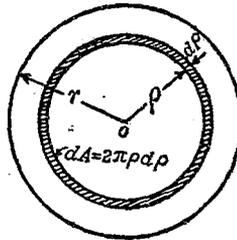
解 (a) 用積分求法 由第 363 圖, 得

$$J_0 = \int \rho^2 dA = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} \pi r^4$$

(b) 用第 98 節所證明之關係. 因  $\bar{I}_x$  與  $\bar{I}_y$  各等於  $\frac{1}{4} \pi r^4$ , 但

$$J_0 = \bar{I}_x + \bar{I}_y$$

$$\therefore J_0 = 2 \times \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{2} \pi r^4$$

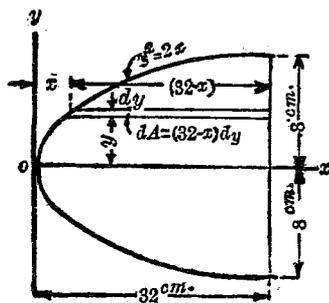


第 363 圖

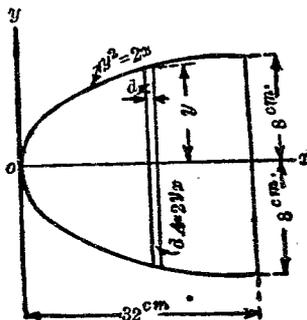
例 5  $y^2 = 2x$ , 及  $x = 32$  cm. 所包圍之拋物線面積對於  $x$  軸之慣性勢.

解 (第一法) 由第 64 圖, 得

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA = 2 \int y^2 (32 - x) dy \\ &= 2 \int_0^8 y^2 \left( 32 - \frac{y^2}{2} \right) dy = 2 \left[ \frac{32}{3} y^3 - \frac{y^5}{10} \right]_0^8 \\ &= 4569 \text{ cm.}^4 \end{aligned}$$



第 364 圖



第 365 圖

(第二法) 極小部份面積若取如第 365 圖, 則該極小部份為矩形, 其對於  $x$  軸之情性勢為

$$\frac{1}{12} dx (2y)^2 = \frac{2}{3} y^2 dx,$$

故

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{2}{3} \int_0^{32} y^2 dx = \frac{2}{3} \int_0^{32} (2x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} \times 2^{\frac{3}{2}} \int_0^{32} x^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2}{3} \times 2^{\frac{3}{2}} \left[ \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_0^{32} \\ &= 4369 \text{ cm}^4 \end{aligned}$$

**102. 複形面積之情性勢** 複形面積 (Composite areas) 若能分成數多簡單面積如三角形, 矩形, 圓等時, 則全面積之情性勢即等於各部分面積情性勢之總和, 反之, 一面積若自全面積減去簡單面積而成之時, 則該餘留面積之情性勢等於全面積情性勢減去簡單面積之情性勢面積。

例1 第366圖之T形斷面求通過距心之水平軸  $xx$ , 并求對於  $xx$  軸之慣性勢。

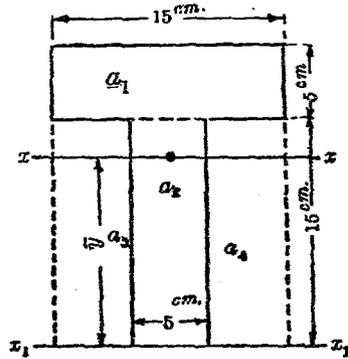
解 先求距心離  $x_1x_2$  軸之距離  $\bar{y}$  如下

$$A\bar{y} = \Sigma a'y_0$$

$$\bar{y} = \frac{15 \times 5 \times 17.5 + 15 \times 5 \times 7.5}{2 \times 15 \times 5}$$

$$= 12.5 \text{ cm.}$$

次求對於  $xx$  軸之慣性勢。此T形面積可視為由  $a_1, a_2, a_3, a_4$  所



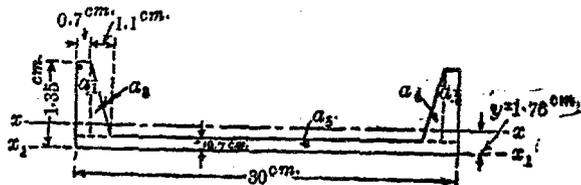
第 366 圖

合成之大矩形減去  $a_3, a_4$  兩小矩形而成。先求對於  $x_1x_2$  軸之慣性勢  $I_{x_1}$  如下。

$$I_{x_1} = \frac{1}{3} \times 15 \times 20^3 - 2 \times \frac{1}{3} \times 5 \times 15^3 = 28750 \text{ cm.}^4$$

因之  $I_x = 28750 - 2 \times 15 \times 5 \times (12.5)^2 = 5312.5 \text{ cm.}^4$

例2 第367圖之溝形斷面, 求對於  $x_1x_2$  軸之慣性勢, 并求對於通過距心之平行軸之慣性勢。



第 367 圖

解 溝形斷面可分成圖示之三角形及矩形如  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  等。茲將解答表示如下。表中  $y_0$  為各部份面積距心離  $x_1x_1$  軸之距離,  $I_0$  為各部份面積對於其距心上平行於  $x_1x_1$  軸之情性勢。

部分面積	$a$	$y_0$	$ay_0$	$I_0$	$ay_0^2$	$I_x = I_0 + ay_0^2$
$a_1$	4.655	4.03	18.76	17.16	75.6	92.8
$a_2$	4.655	4.03	18.76	17.16	75.6	92.8
$a_3$	3.658	2.92	10.68	8.99	31.2	40.2
$a_4$	3.658	2.92	10.68	8.99	31.2	40.2
$a_5$	21.000	0.35	7.35	8.60	2.6	11.2
	37.626 cm. <sup>2</sup>		66.23 cm. <sup>3</sup>			177.2 cm. <sup>4</sup>

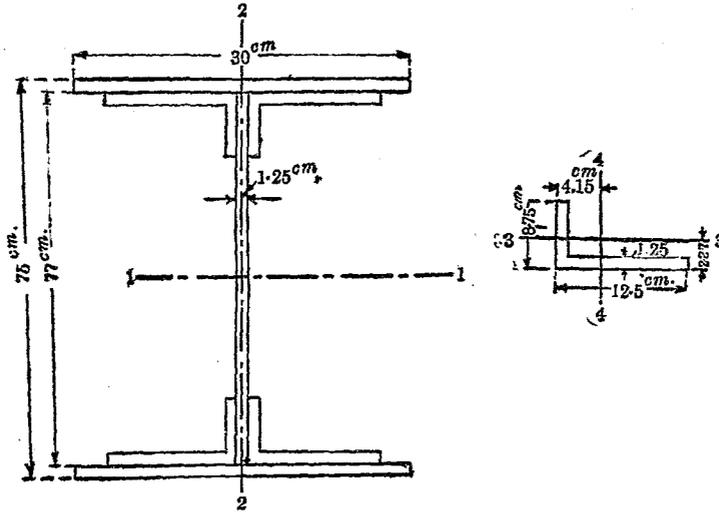
$$\text{由上表得} \quad \bar{y} = \frac{\sum(ay_0)}{A} = \frac{66.23}{37.626} = 1.76 \text{ cm.}$$

$$\begin{aligned} \bar{I}_x &= I_1 - A(\bar{y})^2 = 277.2 - 37.626 \times (1.76)^2 \\ &= 160.7 \text{ cm.}^4 \end{aligned}$$

**例3** 求第368圖之配合斷面 (Built-up section) 對於通過距心之1-1軸之情性勢。

解 原有配合斷面之情性勢  $I_{1-1}$  可由矩形面積  $30 \times 77 \text{ cm}^2$  之情性勢減去矩形面積  $28.75 \times 75$  之情性勢再加四個 L 形斷面對於1-1軸之情性勢而得。故

$$\begin{aligned} I_{1-1} &= \frac{1}{12} \times 30 \times (77)^3 - \frac{1}{12} \times 28.75 \times (75)^3 + 4 \\ &\quad \times [158.2 + 25 \times (35.23)^2] \\ &= 255844.8 \text{ cm.}^2 \end{aligned}$$



第 363 圖

## 習 題 19.

1. 試求圓面積以切線為軸之面積慣性勢。
2. 長徑與短徑各為  $2a$  及  $2b$  之橢圓對於 (a) 一致於長徑之軸及 (b) 一致於短徑之軸，試各求其面積慣性勢。
3. 三角形底邊 20 cm., 高 25 cm., 求其對於底邊之面積慣性勢及旋動半徑。
4. 試求每邊 40 cm. 正方形面積對於通過其一隅之軸之極慣性勢與旋動半徑。
5. 三等邊三角形底邊為  $b$ , 高為  $h$ , 試求該面積對於通過

距心之軸之極惰性勢。

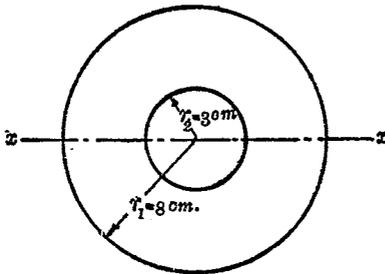
6. 對於通過三角形頂點而平行於底邊之軸，試求三角形面積惰性勢之式。

7. 對於通過圓周上一點之軸，試求圓面積之極惰性勢與旋動半徑。

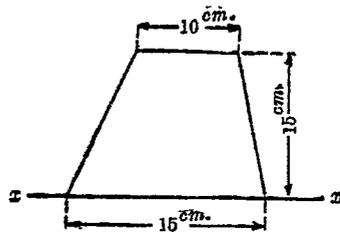
8. 第 369 圖所示之圓環外半徑  $r_1 = 8 \text{ cm.}$ ，內半徑  $r_2 = 3 \text{ cm.}$ ，試求該圓環面積對於  $xx$  軸之惰性勢。

9. 第 369 圖上半圓環之距心在何處，並求對於通過距心而平行於直徑之軸，該半圓環面積之惰性勢。

10. 第 370 圖所示之梯形面積，試求其對於  $xx$  軸之惰性勢。



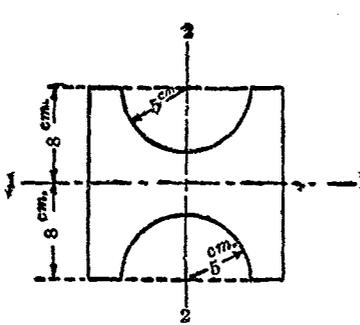
第 369 圖



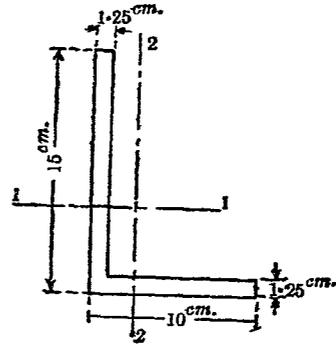
第 370 圖

11. 第 371 圖所示之斷面積對於通過距心之 1—1 軸與 2—2 軸之惰性勢各若何。

12. 第 372 圖所示 L 形斷面積對於通過距心之 1—1 軸與 2—2 軸之惰性勢各若何。



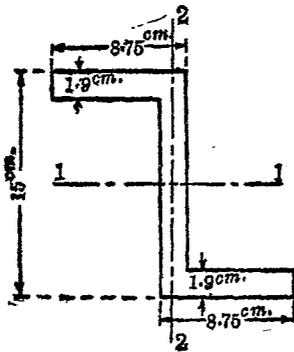
第 371 圖



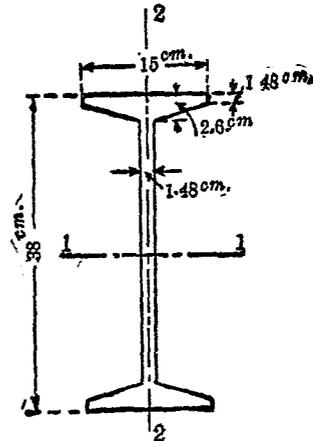
第 372 圖

13. 第 373 圖所示之 Z 形斷面對於通過距心之 1-1 軸與 2-2 軸之慣性勢各若何.

14. 第 374 圖所示 I 形斷面對於通過距心之 1-1 軸與 2-2 軸之慣性勢各若何.

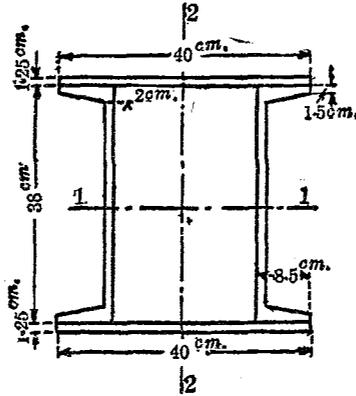


第 373 圖



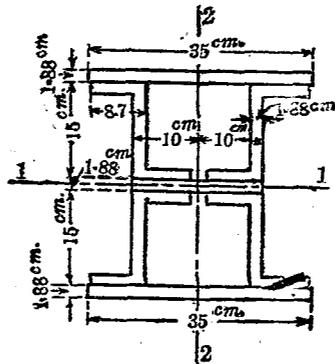
第 374 圖

15. 試求第375圖所示配合斷面對於通過距心之1—1軸與2—2軸之惰性勢各若何。



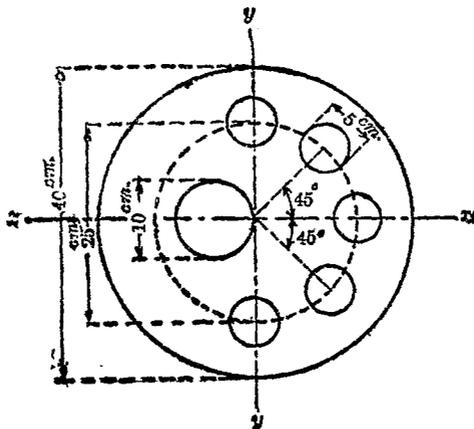
第 375 圖

16. 第 376 圖所示配合斷面對於通過距心之 1—1 軸與 2—2 軸之惰性勢各若何。



第 376 圖

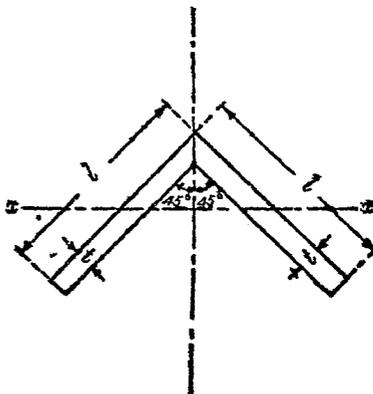
17. 第 377 圖示一圓板, 內有一大孔及三小孔, 各如圖所示。試求該圓板面積對於  $xx$  軸與  $yy$  軸之慣性勢。



第 377 圖

18. 第 378 圖示一 L 形, 其全面積為  $A$ ,  $x-x$  軸通過距心, 假定厚度  $t$  甚小, 兩股 (Leg) 面積可視為集中於其中心線上。求證該面積對於  $xx$  軸之慣性勢為

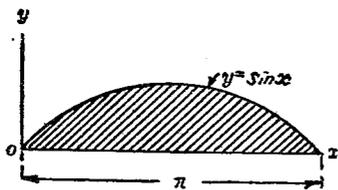
$$I_x = \frac{1}{12} Al^2$$



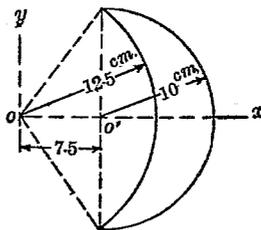
第 378 圖

19. 第379圖之面積對於 $x$ 軸及 $y$ 軸之惰性勢各若何.

20. 第380圖之月形面積對於 $x$ 軸之惰性勢若何.



第379圖



第380圖

103. 面積之惰性積 下述各節討論惰性勢時有下列各式所表示之量存在於計算式中.

$$\int xy dA, \quad \int xy dM, \quad \text{等}$$

此等之式所表示之量稱曰惰性積 (Product of inertia). 如面積之惰性積或質量之惰性積等. 此量僅為數值之量, 無物理學上意義, 且可有正負符號, 以記號  $P_{xy}$  表示之.

面積之惰性積可定義之如下.

對於二直交軸之面積惰性積者, 乃面積之極小部份與該部份至二軸間各距離之乘積之總和量也.

就第356圖中言之.

$$P_{xy} = \int xy dA$$

其單位與面積之惰性勢之單位相同, 可以長度之四次方表示之, 即如  $\text{cm}^4, \text{in}^4$ . 等面積若在第一與第三象限中, 則  $\int xy dA$

爲正,若在第二與第四象限中,則 $\int xy dA$  爲負. 因面積對於二直交軸位置之如何,其慣性積可爲正爲負或爲零.

**定理** 若二直交軸中任意一者爲面積之對稱軸 (Axis of symmetry) 時,則對於該二軸之面積慣性積爲零.

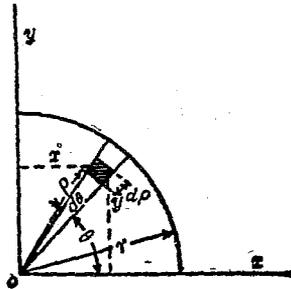
**證** 設對稱軸爲 $y$ 軸,則對稱軸一側每有一極小部份面積之慣性積 $(+x)y dA$  時,則其他側必有一相應之他極小部份面積,其慣性積爲 $(-x)y dA$  與前者適可相消. 故全面積之 $\int xy dA$  必爲零也. 若二直交軸皆爲對稱軸時,則對於該二軸之慣性積當然仍爲零.

**例** 第381圖之一圓象限面積,試求其對於二直交軸 $x, y$ 之慣性積.

**解** 圖上取 $dA$ , 則 $dA = \rho d\theta d\rho$ , 又

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta$$

$$\therefore P_{xy} = \int xy dA = \int_0^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^3 \sin \theta \cos \theta d\theta d\rho = \frac{1}{8} r^4$$

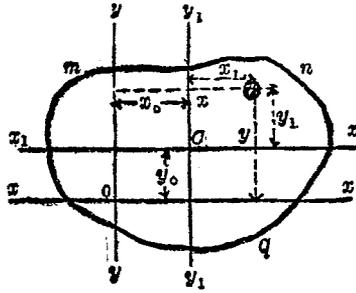


第381圖

## 104. 平行軸間面積惰性積之關係

定理 任意面積對於同平面內任意二直交軸之惰性積等於該面積對於通過其重心之二平行直交軸之惰性積上加以該面積與其重心至原有二軸間距離之乘積二者之總和。

證 第 382 圖中  $mnq$  為任意之面積,  $xx, yy$  為該平面內既定二直交軸,  $O$  為重心,  $x_1x_1, y_1y_1$  為通過重心之二直交軸各與  $xx, yy$  相平行.  $x_1x_1$  與  $xx$  兩軸間距離設為  $x_0$ ,  $y_1y_1$  與  $yy$  兩軸間距離設為  $y_0$ . 任意一極小部份面積  $dA$  之座標對於  $xx, yy$  軸設為  $x, y$ , 對於  $x_1x_1, y_1y_1$  之座標設為  $x_1, y_1$ . 今設該面積對於  $xx, yy$  軸之惰性積為  $P_{xy}$ , 對於  $x_1x_1, y_1y_1$  軸之惰性積為  $\bar{P}_{x_1y_1}$ , 則



第 382 圖

$$\begin{aligned}\bar{P}_{x_1y_1} &= \int x_1y_1dA = \int (x_1+x_0)(y_1+y_0)dA \\ &= \int (x_1y_1+x_1y_0+x_0y_1+x_0y_0)dA \\ &= \int x_1y_1dA + y_0 \int x_1dA + x_0 \int y_1dA + x_0y_0 \int dA\end{aligned}$$

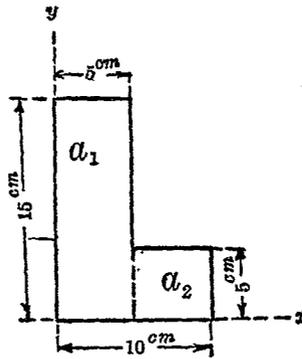
但  $O$  點為重心, 故

$$\int x_1 dA = 0, \quad \int y_1 dA = 0,$$

$$\therefore P_{xy} = \bar{P}_{xy} + x_0 y_0 A$$

即本定理已得證明。

例1 求第383圖所示面積對於 $x$ 與 $y$ 軸之慣性積。



第383圖

解 該面積可分為 $a_1$ 與 $a_2$ 二部份。由本節定理，對於 $a_1$ 面積，得

$$P_{xy} = 0 + 75 \times 2.5 \times 7.5 = 1406.3 \text{ cm}^4$$

對於 $a_2$ 面積，得

$$P_{xy} = 0 + 25 \times 2.5 \times 7.5 = 468.8 \text{ cm}^4$$

故對於全面積，得

$$P_{xy} = 1406.3 + 468.8 = 1875.1 \text{ cm}^4$$

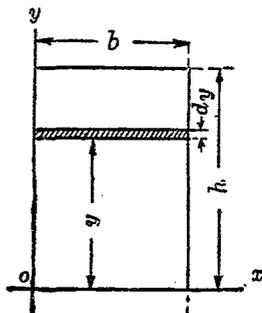
例2 求第384圖所示矩形對於 $ox, oy$ 兩軸之慣性積。

$$\begin{aligned} \text{解 } P_{xy} &= \int xy dA \\ &= \int_0^h xy b dy \end{aligned}$$

但各極小面積距心對於 $oy$ 軸之距離

皆為 $\frac{b}{2}$ ，故

$$\begin{aligned} P_{xy} &= \int_0^h \frac{b}{2} y b dy = \frac{b^2}{2} \int_0^h y dy \\ &= \frac{b^2 h^2}{4} \end{aligned}$$



第384圖

例3 求第385圖所示三角形對於 $ox, oy$ 兩軸之慣性積併求對於過通距心平行軸之慣性積。

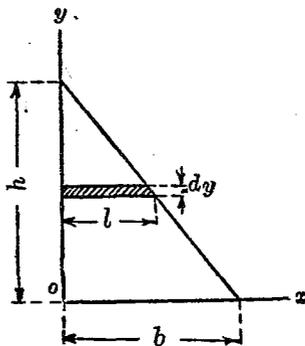
$$\text{解 } P_{xy} = \int xy dA$$

$$\text{但 } dA = L dy = \frac{b}{h}(h-y) dy$$

又各極小面積距心對於 $oy$ 軸之

$$\text{距離為 } \frac{L}{2} = \frac{b}{2h}(h-y)$$

$$\begin{aligned} \therefore P_{xy} &= \int_0^h \frac{b^2}{2h^2}(h-y)^2 y dy \\ &= \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h^2 y - 2hy^2 + y^3) dy \\ &= \frac{b^2 h^2}{24} \end{aligned}$$

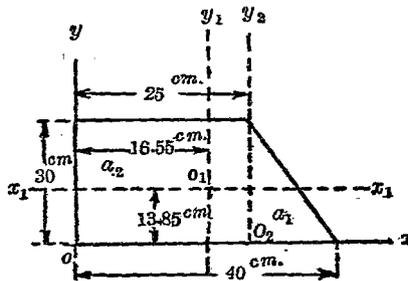


第385圖

對於通過距心平行軸之慣性積設為  $\bar{P}_{xy}$ , 則

$$P_{xy} = \bar{P}_{xy} - \frac{bh}{2} \times \frac{b}{3} \times \frac{h}{3} = \frac{b^2h^2}{24} - \frac{b^2h^2}{18} = -\frac{b^2h^2}{72}$$

例4. 第386圖之梯形面積對於  $ox, oy$ ;  $o_1x_1, o_1y_1$ ;  $o_2x_2, o_2y_2$  各軸之慣性積若何. 但  $o_1$  為距心.



第386圖

解 先求對於  $o_2x_2, o_2y_2$  二軸之慣性積  $P_{xy}$ , 將原面積分成三角形  $a_1$  及矩形  $a_2$ , 則由例2與例3得

$$P_{xy}' = \frac{15^2 \times 30^2}{24} - \frac{25^2 \times 30^2}{4} = -132187.5 \text{ cm.}^3$$

次求對於  $o_1x_1, o_1y_1$  二軸之慣性積  $\bar{P}_{xy}$ , 則由本節定理得

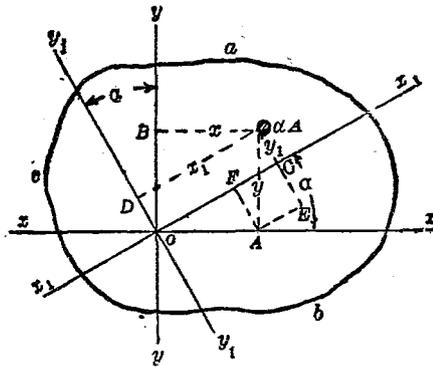
$$\begin{aligned} \bar{P}_{xy} &= -132187.5 - \left( 25 \times 30 + \frac{1}{2} \times 15 \times 30 \right) \times (+13.85) \times (-8.45) \\ &= -18080.8 \text{ cm.}^4 \end{aligned}$$

最後求對於  $ox, oy$  兩軸之慣性積  $P_{xy}''$ , 由本節定理得

$$\begin{aligned} P_{xy}'' &= -18080.8 + \left( 25 \times 30 + \frac{1}{2} \times 15 \times 30 \right) \times 13.85 \times 16.55 \\ &= 206082.3 \text{ cm.}^4 \end{aligned}$$

105. 同交於一點上兩對直交軸間惰性勢及惰性積之關係 平面面積對於該平面上同交於一點之相異之軸,其惰性勢一般不相同.前述積分方法僅對於一定之軸可容易求得惰性勢,但對於其他之軸則非易事.本節目的乃對於一定二直交軸之惰性勢既求得後,欲求得於通過該二直交軸交點之其他同平面上任意軸之惰性勢.

第387圖上  $abc$  為任意平面面積.對於  $ox, oy$  兩直交軸之惰性勢設為  $I_x, I_y$ , 其惰性積設為  $P_{xy}$ ; 通過  $o$  點設有他二直交軸  $ox_1, oy_1$ , 各與  $ox, oy$  成  $\alpha$  角, 對於  $ox_1, oy_1$  兩直交軸之惰性勢設為  $I_{x_1}, I_{y_1}$ , 其惰性積設為  $P_{x_1y_1}$ ; 今設極小部份面積  $dA$  之座標對於  $ox, oy$  軸為  $x, y$ ; 對於  $ox_1, oy_1$  軸為  $x_1, y_1$ , 則



第 387 圖

$$I_x = \int y^2 dA, \quad I_y = \int x^2 dA, \quad P_{xy} = \int xy dA,$$

$$I_{x_1} = \int y_1^2 dA, \quad I_{y_1} = \int x_1^2 dA, \quad P_{x_1y_1} = \int x_1 y_1 dA.$$

但  $x_1 = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_1 = y \cos \alpha - x \sin \alpha$

$$\begin{aligned} \text{故} \quad x_1^2 &= x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \sin^2 \alpha + 2xy \cos \alpha \sin \alpha, \\ y_1^2 &= x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha - 2xy \cos \alpha \sin \alpha, \\ x_1 y_1 &= xy(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) - (x^2 - y^2) \cos \alpha \sin \alpha \end{aligned}$$

因之得

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \sin^2 \alpha \int x^2 dA + \cos^2 \alpha \int y^2 dA - 2 \cos \alpha \sin \alpha \int xy dA \\ I_{y_1} &= \cos^2 \alpha \int x^2 dA + \sin^2 \alpha \int y^2 dA + 2 \cos \alpha \sin \alpha \int xy dA \\ P_{x_1 y_1} &= \cos \alpha \sin \alpha \left[ \int y^2 dA - \int x^2 dA \right] + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \int xy dA \end{aligned}$$

由上三式即得

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - 2P_{xy} \cos \alpha \sin \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + 2P_{xy} \cos \alpha \sin \alpha \dots\dots\dots (2)$$

$$P_{x_1 y_1} = \cos \alpha \sin \alpha (I_x - I_y) + P_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \dots\dots (3)$$

再由 (1), (2) 兩式得

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \dots\dots\dots 4)$$

由 (3) 式知  $\tan^2 \alpha = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x}$  時  $P_{x_1 y_1} = 0$ , 即通過面積內任何一點

上必有一對之軸, 可使其慣性必為零。

### 106 面積之主慣性勢及主軸

**定理** 任意之平面面積內任取一點為原點, 則通過該點至少必有一對之直交軸, 對於其一者有最大慣性勢, 對於他者有最小慣性勢, 此最大與最小慣性勢稱曰主慣性勢 (Principal moments of inertia), 有主慣性勢之軸稱曰主軸

(Principal axes). 即任何斷面至少必有成直交之一對主軸

證 將第105節(1)式之  $I_{x_1}$  對於  $\alpha$  取微分,使等於零,得

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = 2 \cos \alpha \sin \alpha I_y - 2 \cos \alpha \sin \alpha I_x - 2P_{xy}(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = 0$$

解之,得

$$\tan 2\alpha = \frac{2P_{xy}}{I_y - I_x} \dots\dots\dots (1)$$

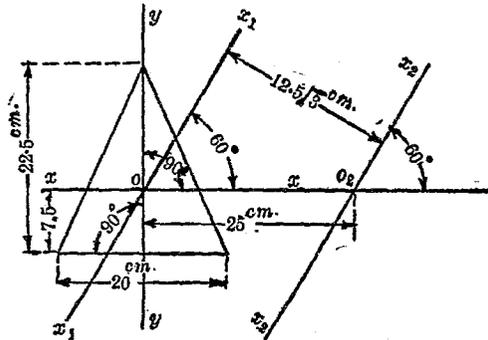
若將第105節(2)式之  $I_{y_1}$  對於  $\alpha$  取微分,使等於零,亦得同一結果.故滿足於(1)式所示方向之軸,可使惰性勢為最大及最小.但  $\tan 2\alpha$  與  $\tan(180^\circ + 2\alpha)$  有同值,故滿足於(1)式之方向有  $\alpha$  及  $\alpha + 90^\circ$  之二個.其中一軸有最大惰性勢,與之成直交之他一軸有最小惰性勢.故本定理已得證明.

由第105節,知對於一對主軸,其面積惰性積為零.由第103節定理,則面積若有一個對稱軸時,則該軸即為一主軸,而他一主軸與對稱軸成直交.若有二個對稱軸時,則此一對之對稱軸即為該面積之一對主軸.

若對於二主軸之面積惰性勢互相等時,則由第105節(4)式可證明對於通過二主軸交點之任何軸,其惰性勢皆相等.例如正方形,圓,正多邊形等是也.

**例1** 第388圖所示二等邊三角形面積對於  $x_2x_2$  軸之惰性勢若何.圖中  $o$  點為距心.

**解** 通過  $o$  點作  $x_1x_1$  軸,平行於  $x_2x_2$  軸.先求對於  $x_1x_1$  軸之惰性勢  $I_{x_1}$  如下.



第 388 圖

因  $yy$  為對稱軸故  $P_{xy} = 0$ ，因之得

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 60^\circ + I_y \sin^2 60^\circ$$

但 
$$I_x = \frac{1}{36} \times 20 \times (22.5)^3 = 6328.1 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \frac{1}{48} \times 22.5 \times (20)^3 = 3750 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{x_1} = 6328 \times \frac{1}{4} + 3750 \times \frac{3}{4} = 4394.5 \text{ cm}^4$$

由是得 
$$I_{x_2} = 4394.5 + \frac{1}{2} \times 20 \times 22.5 \times (12.5\sqrt{3})^2 = 109863.3 \text{ cm}^4$$

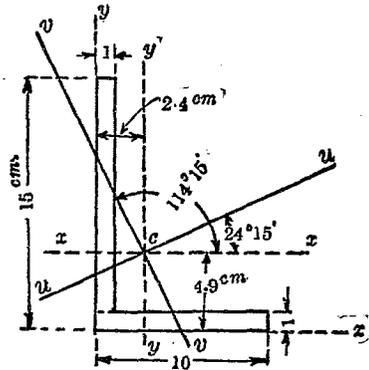
例 2 求第 389 圖所示 L 形斷面對於通過距心之主軸之主慣性勢

解 本例之解分下之數步。

(1) 先求距心之位置。

$$\bar{x} = \frac{10 \times 5 + 14 \times 0.5}{24} = 2.4 \text{ cm.}$$

$$\bar{y} = \frac{10 \times 0.5 + 14 \times 8}{24} = 4.9 \text{ cm.}$$



第 339 圖

(2) 次求對於通過距心  $c$  之  $xx$  軸與  $yy$  軸之慣性勢  $\bar{I}_x, \bar{I}_y$  及慣性積  $\bar{P}_{xy}$  如下。

$$\begin{aligned}\bar{I}_x &= \frac{1}{12} \times 10 \times 1^3 + 10 \times (4.4)^2 + \frac{1}{12} \times 1 \times (14)^3 + 14 \times (3.1)^2 \\ &= 557.8 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_y &= \frac{1}{12} \times 1 \times (10)^3 + 10 \times (2.6)^2 + \frac{1}{12} \times 14 \times 1^3 + 14 \times (1.9)^2 \\ &= 203.0 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

求  $\bar{P}_{xy}$  之前, 先須求出  $P_{x'y'}$  如下。

$$\begin{aligned}P_{x'y'} &= \int_0^{10} \int_0^1 xy dx dy + \int_1^{15} \int_0^{10} xy dx dy \\ &= 25 + 56 = 81 \text{ cm}^4.\end{aligned}$$

$$\therefore \bar{P}_{xy} = 81 - 24 \times (-4.9) \times (-2.4) = -201.24 \text{ cm}^4$$

(3) 次求主軸之方向.由本節(1)式得

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \times (-201.24)}{203.0 - 557.8} = 1.13$$

$$\therefore 2\alpha = 48^\circ 30', \quad \text{或} \quad 228^\circ 30'$$

即  $\alpha = 24^\circ 15', \quad \text{或} \quad 114^\circ 15'$

由第105節(1)式則  $\alpha = 24^\circ 15'$  時

$$\begin{aligned} I_u &= 557.8 \cos^2 24^\circ 15' + 203.0 \sin^2 24^\circ 15' \\ &\quad + 2 \times 201.24 \cos 24^\circ 15' \sin 24^\circ 15' \\ &= 462.97 + 34.51 + 148.94 = 646.42 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

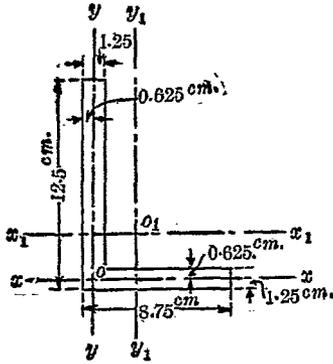
$\alpha = 114^\circ 15'$  時

$$\begin{aligned} I_v &= 557.8 \cos^2 114^\circ 15' + 203.0 \sin^2 114^\circ 15' \\ &\quad + 2 \times 201.24 \cos 114^\circ 15' \sin 114^\circ 15' \\ &= 94.83 + 168.49 - 148.94 = 114.38 \text{ cm}^4. \end{aligned}$$

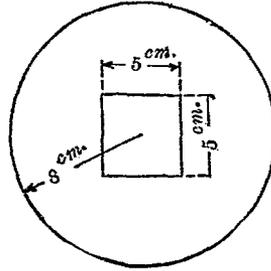
故主慣性勢為  $646.42 \text{ cm}^4$  及  $114.38 \text{ cm}^4$ , 其相應之旋動半徑各為  $5.17 \text{ cm}$ . 及  $2.18 \text{ cm}$ .

## 習 題 20.

1. 第390圖之L形斷面,求對於  $o_1x_1, o_1y_1$  二軸之慣性積,但  $o_1$  為距心.
2. 求證第391圖斷面積對於通過中心各軸,其慣性勢相等.



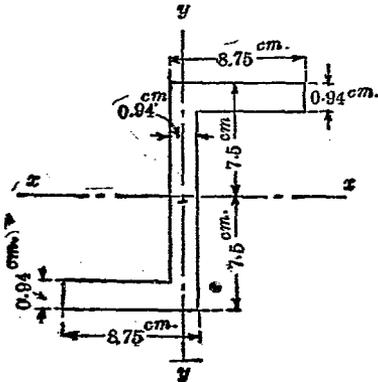
第 390 圖



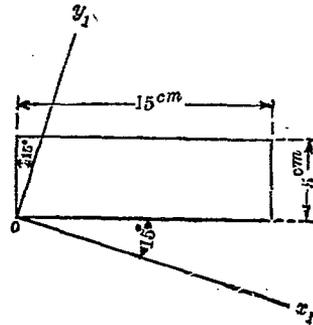
第 391 圖

3. 第 392 圖之 Z 形斷面積, 求其通過距心之主軸及主惰性勢。

4. 一矩形面積  $15 \times 5 \text{ cm}^2$  如第 393 圖所示。試求對於  $ox_1$   $oy_1$  二軸之惰性勢及惰性積。



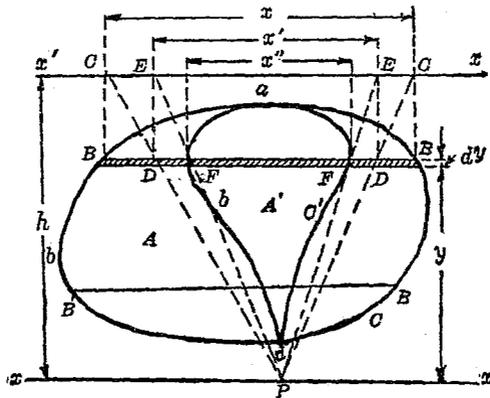
第 392 圖



第 393 圖

5. 求 390 圖 L 形斷面通過距心之主軸及主慣性勢。
6. 求 15 cm.  $\times$  15 cm.  $\times$  1.25 cm. 之 L 形斷面之主軸及主慣性勢。
7. 求 393 圖之矩形對於二對角線之慣性勢及慣性積。
107. 面積慣性勢之作圖求法 不規則形之面積, 其慣性勢可由作圖法以求之。

第 394 圖上  $abcd$  示一不規則形面積. 其面積設為  $A$ ,  $xx$  為



第 394 圖

所取慣性勢之軸, 作  $x'x' \parallel xx$ , 其與  $xx$  之距離  $h$  為任意. 今於面積內任引一弦  $BB \parallel xx$ , 將  $B, B$  兩點投射於  $x'x'$  線上, 得  $C, C$  兩點. 今於  $xx$  軸上任取一點  $P$ , 連結  $CP, CP$  兩點各與  $BB$  直線交於  $D, D$ , 再將  $D, D$  兩點投射於  $x'x'$  線上得  $E, E$  兩點, 連結  $FP, EP$  兩線, 各與  $BB$  直線交於  $F, F$  兩點. 今於面積內引多數之

$F, F'$ 等點將此等之  $F$  點以平滑曲線 (Smooth curve) 連結之得  $ab'cd$  之圖形。此面積設為  $A''$ ，則原有面積對於  $xx$  軸之惰性勢  $I_x$  如下式求之。

$$I_x = h^2 A''$$

茲證明之如下。

設  $\overline{BB}$  之長為  $x$ ， $\overline{DD}$  之長為  $x'$ ， $\overline{FF}$  之長為  $x''$ ，由相似三角形  $PBE$  及  $PF'F'$  得

$$\frac{x'}{h} = \frac{x''}{y}$$

又由相似三角形  $PCG$  及  $PDD$  得

$$\frac{x}{h} = \frac{x'}{y}$$

由上二式得

$$xy^2 = h^2 x''$$

$$\therefore I_x = \int y^2 dA = \int y^2 x dy = h^2 \int x'' dy$$

但

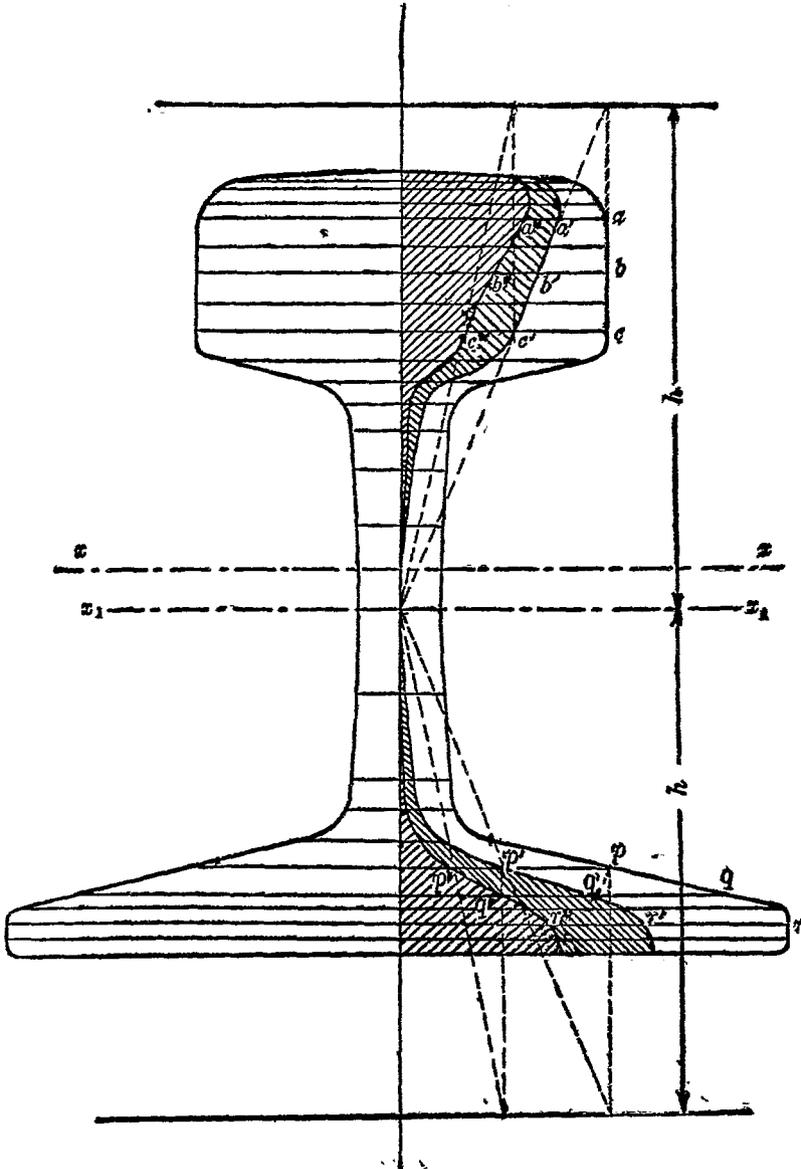
$$\int x'' dy = A''$$

$$\therefore I_x = h^2 A''$$

面積  $A''$  可以面積測量器求之

例 求 A. S. C. E. (美國土木工程師學會) 型 70 lbs. 軌條斷面之惰性勢及旋動半徑。

解 第 395 圖用 1''=2'' 之縮尺，作軌條斷面。由圖得  $A=7.03\text{in}^2$  任取一平行於底面之軸  $x_1x_1$ ，取  $h=3''$ ，將斷面分成數多薄片如圖所示。由第 96 節 (6) 之作圖法先定距心之位置。



第 395 圖

此時  $x_1x_1$  軸上方  $a'b'c'$  等曲線所包之面積設為  $A_1'$ , 下方  $p'q'r'$  等曲線所包之面積設為  $A_2'$ , 由圖得  $A_1' = 2.13 \square''$ ,  $A_2' = 1.61 \square''$ ,  $A_1'$  為正,  $A_2'$  為負, 故距心至  $x_1x_1$  軸之距離  $\bar{y}$  如下:

$$\bar{y} = h \frac{A_1' - A_2'}{A} = 3 \times \frac{2.13 - 1.61}{7.03} = 0.22''$$

故通過距心之軸  $xx$  在  $x_1x_1$  軸上方  $0.22''$  之處

次由本節作圖法得  $a''b''c'' \dots p''q''r''$  等曲線所包之面積  $A'$  為  $2.36 \square''$ , 故

$$Ix_1x_1 = 3^2 \times 2.36 = 21.24 \text{ in}^4.$$

$$\therefore I_{xx} = 21.24 - (0.22)^2 \times 7.03 = 20.9 \text{ in}^4.$$

因之得旋動半徑  $k_{xx}$  如下:

$$k_{xx} = \sqrt{\frac{20.9}{7.03}} = 1.7''$$

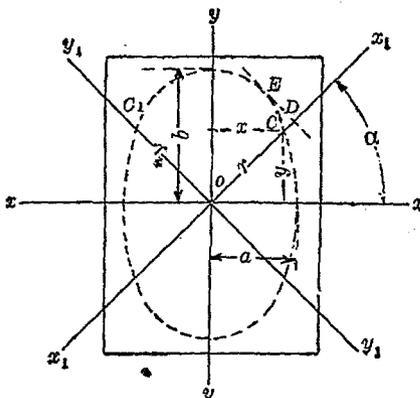
**103 惰性橢圓** 由第 105 節所述, 平面面積之惰性勢及旋動半徑因軸之方向而種種變化. 今設  $xx, yy$  為主軸 (第 396 圖), 則對於任意二直交軸  $x_1x_1, y_1y_1$  之惰性勢由第 105 節 (1), (2) 兩式, 因  $P_{xy} = 0$ , 得

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha \dots\dots\dots (1)$$

$$I_{y_1} = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha \dots\dots\dots (2)$$

但  $\alpha$  為  $x_1x_1$  軸與  $xx$  軸之夾角. 今若作一橢圓, 其短軸之半設為  $a$ , 長軸之半設為  $b$ , 且使  $a, b$  各與  $ox, oy$  相一致, 沿  $x_1x_1$  軸橢圓直徑之半  $\overline{OC}$  設為  $r$ , 則  $C$  點座標  $x, y$  如下:

$$x = r \cos \alpha, \quad y = r \sin \alpha$$



第 398 圖

將此式代入於橢圓方程式  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  中得

$$a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha = \frac{a^2 b^2}{r^2} \dots\dots\dots (3)$$

將(3)式與(1)式相比較,若使  $I_x = b^2, I_y = a^2$ , 則

$$I_{x_1} = \frac{a^2 b^2}{r^2} = \frac{I_x I_y}{r^2} \dots\dots\dots (4)$$

同樣可得

$$I_{y_1} = \frac{I_x I_y}{r_1^2} \dots\dots\dots (5)$$

但  $r_1$  表示  $y_1 y_1$  方向上直徑之半  $OC_1$ , 由上所述, 以主橢圓勢之平方根為長徑與短徑各半, 取於各該主軸之直交方向而作橢圓, 則對於通過原點上任意軸之慣性勢即等於主慣性勢之積以該軸方向上橢圓直徑之半除得之商。如此所作成之

橢圓稱曰惰性橢圓 (Ellipse of inertia).

由 (4), (5) 兩式則平面面積對於同平面上通過任意一點之軸, 其惰性勢與該軸方向上惰性橢圓直徑之半之自乘成反比例, 因之得下列諸結論.

(i) 若主惰性勢相等時, 則惰性橢圓成爲一圓, 故通過原點任意軸之惰性勢皆相等.

(ii) 若對於二個以上同交於一點之非相互直交軸, 面積之惰性勢相等時則惰性橢圓成爲一圓, 故對於通過該點之任意軸, 其惰性勢皆相等.

(iii) 對於通過既定點之任意惰性軸, 必有其他一軸, 與主軸成相等反向之角, 而二者之惰性勢相等.

由 (1), (2) 兩式又可證明

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y \dots\dots\dots (6)$$

即通過一點之任意一對直交軸, 其惰性勢之和等於通過該點之主軸上之惰性勢和.

由 (6) 式又可得旋動半徑間之關係如下:

$$k_{x_1}^2 + k_{y_1}^2 = k_x^2 + k_y^2 \dots\dots\dots (7)$$

但  $k_{x_1}, k_{y_1}$  爲對於  $x_1x_1$  及  $y_1y_1$  二直交軸之旋動半徑,  $k_x, k_y$  爲對於  $xx, yy$  二主軸之旋動半徑.

關於惰性橢圓之又一性質可述之如下:

由 (1), (2) 兩式得

$$k_{x_1}^2 = k_x^2 \cos^2 \alpha + k_y^2 \sin^2 \alpha \dots\dots\dots (8)$$

$$k_{y_1}^2 = k_x^2 \sin^2 \alpha + k_y^2 \cos^2 \alpha \dots\dots\dots (9)$$

今設  $ED$  為平行於  $y_1y_1$  軸之橢圓切線,則由橢圓之性質得

$$OI^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$$

今若作橢圓使  $k_x = b, k_y = a$ , 則

$$OI^2 = k_y^2 \cos^2 \alpha + k_x^2 \sin^2 \alpha \dots\dots\dots (10)$$

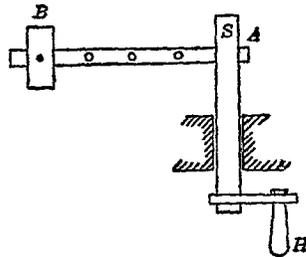
將(10)與(9)兩式相比較,則

$$OD = ky_1 \dots\dots\dots (11)$$

同樣作切線平行於  $x_1x_1$  軸,則  $k_{x_1}$  亦可同樣求得。

### B. 質量之慣性勢

109. 質量之慣性勢 使物體開始迴轉運動 (Rotation) 於一定軸之周圍,則迴轉之難易,不特與該物體之質量有關係,與該物體質量之分佈即質量離迴轉軸之遠近亦有關係例如第 397 圖所示之裝置,以手搖  $H$  柄使  $S$  軸迴轉,  $A$  桿隨  $S$  軸而迴轉,  $A$  桿上附有重物  $B$ , 若  $S$  軸以等速迴轉,則  $B$  物愈遠離  $S$  軸時,手搖之力須愈大,蓋由動力學上關於迴轉運動有下之公式,即



第 397 圖

$$\frac{\text{力勢}}{\int r^2 dM} = \text{迴轉加速度 (角加速度)}$$

但  $r$  為質量各極小部份對於迴轉軸之距離,故  $\int r^2 dM$  之量

乃所以抵抗物體之迴轉運動，宛如直線運動時下列公式中質量之作用。

$$\frac{\text{力}}{\text{質量}} = \text{加速度 (線加速度)}$$

故  $\int r^2 dM$  在迴轉運動上乃與質量相當之量，此量稱曰質量之惰性勢 (Moment of inertia of masses)，或即質量對於迴轉軸之第二次勢。惰性勢大者，物體迴轉愈難，惰性勢小者，物體迴轉愈易。

質量惰性勢之定義可述之如下：

一物體對於一既定軸之惰性勢者，乃各極小部份質量與該極小部份至定軸間距離自乘之乘積，對於物體全部之總和是也。設質量之極小部份為  $dM$ ，各部份至定軸間距離為  $r$ ，質量惰性勢以  $I$  表示之，則

$$I = \int r^2 dM$$

若勻質物體，設單位容積之質量即密度為  $\delta$ ，體積之極小部份為  $dV$ ，則

$$I = \delta \int r^2 dV$$

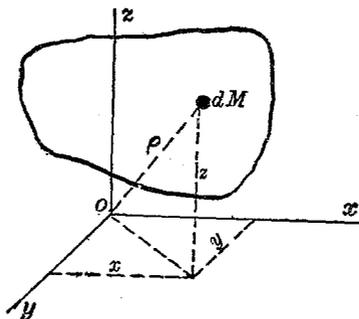
故對於勻質物體，質量之惰性勢與體積之惰性勢成正比例。

實用上常用重力單位，設物體之重量惰性勢為  $I_w$ ，則  $I_w = \int r^2 dW$ ，即物體各極小部份重量與該部份至定軸間距離自乘之乘積總和。對於勻質物體，單位容積之重量設為  $w$ ，

則 
$$I_w = w \int r^2 dV,$$

但 
$$\delta = \frac{w}{g}, \quad \therefore I_w = gI$$

討論物體之質量慣性勢時常用  $\int x^2 dM$ ,  $\int y^2 dM$ ,  $\int z^2 dM$  等量。此乃座標為  $x, y, z$  處之極小質量  $dM$ , 各對於  $yz$  平面,  $xz$  平面, 及  $xy$  平面之慣性勢之總和也。(第 398 圖) 又有用  $\int \rho^2 dM$  之量, 此乃極小質量  $dM$  對於  $o$  點之慣性勢之總和也。



第 398 圖

由第 398 圖則物體對於  $ox, oy, oz$  三直交軸之慣性勢, 各可以對於平面之慣性勢表之即

$$I_x = \int r^2 dM = \int (y^2 + z^2) dM = \int y^2 dM + \int z^2 dM$$

$$I_y = \int r^2 dM = \int (x^2 + z^2) dM = \int x^2 dM + \int z^2 dM$$

$$I_z = \int \rho^2 dM = \int (x^2 + y^2) dM = \int x^2 dM + \int y^2 dM$$

又對於  $o$  點之惰性勢亦可以對於平面之惰性勢表之即

$$\int \rho^2 dM = \int (x^2 + y^2 + z^2) dM = \int x^2 dM + \int y^2 dM + \int z^2 dM$$

工程上之計算問題中僅對於軸之惰性勢為有用。

質量惰性勢  $\int r^2 dM$  之單位，由質量及長度之單位定之。工程上  $kg.$  與  $lb.$  常用為力之單位，而質量  $M$  為  $\frac{W}{g}$ ，但  $W$  為物體之重量。  $\frac{W}{g}$  之次元為  $F \div \frac{L}{T^2}$  即  $\frac{F T^2}{L}$ ，故惰性勢之次元為

$$ML^2 = \frac{F T^2}{L} \times L^2 = F T^2 L,$$

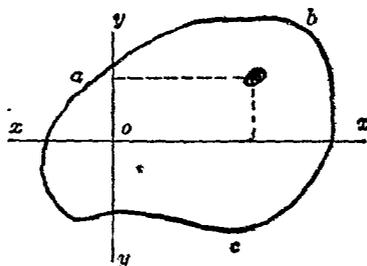
其單位為  $kg. - sec.^2 - cm.$ ，或  $lb. - sec.^2 - ft.$  等是也。

110 旋動半徑 因質量惰性勢之單位為質量與長度自乘之積，故可以物體全部質量  $M$  及一長度  $k$  自乘之積表示之。即對於一定軸之惰性勢可以下式表示之。

$$I = \int r^2 dM = Mk^2 \quad \text{或} \quad k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

滿足於上式之  $k$  即稱曰對於該定軸之旋動半徑 (Radius of gyration)。物體質量若全部集中於距定軸  $k$  之處，則其對於定軸之惰性勢當與原有未集中前之惰性勢相等。

111. 薄平板之惰性勢與面積惰性勢間之關係 第399圖上  $abc$  為勻質之薄平板 (Thin flat plate)，其均一之厚度為  $t$ ，單位容積之均一重量為  $w$ ，設對於板之中央層上  $xx$  軸，該板之惰性勢為  $I = \int r^2 dM$ ，今設此層厚度極小，則質量之極小



第 300 圖

部份可取一柱體，其兩端底面積為  $dA$ ，其高為  $t$ ，至  $xx$  軸之直交距離為  $y$ 。由此假定，則  $dM = \frac{w}{g} t dA$ ，對於  $xx$  軸之慣性勢為  $\frac{w}{g} t x^2 dA$ ，故板之全部份對於  $xx$  軸之慣性勢如下：

$$I = \int r^2 dM = \frac{w}{g} t \int x^2 dA$$

但  $\int x^2 dA$  為該板面積對於  $xx$  軸之慣性勢，故得下之結論。

勻質均一厚度之薄平板，對於板之中央層平面內一軸之慣性勢等於該板中央層面積對於該軸之慣性勢與單位容積之質量及厚度之乘積。

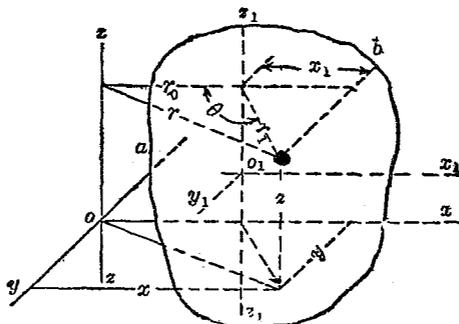
上之關係對於直交於板面一軸之慣性勢亦同。

### 112. 平行軸間質量慣性勢之關係

定理 物體對於任意一軸之慣性勢等於通過其質量中心 (Mass-center) 之平行軸之慣性勢上加以該物體全質量與兩軸間距離自乘之積二者之總和。

證 設  $aic$  為任意一物體，其全質量為  $M$ ，對於  $xx$  軸之慣

性勢設為  $I$ , 今設  $o_1$  為其質量中心, 即重心,  $z_1z_1$  為通過  $o_1$  點而平行於  $zz$  之軸物體一極小部份之質量設為  $dM$ , 其至  $zz$  軸與  $z_1z_1$  軸之直交距離設為  $r$  及  $r_1$ , 兩軸間之直交距離設為  $r_0$ ,  $r_1$  與  $r_0$  間之夾角設為  $\theta$ .



第 400 圖

物體對於  $zz$  軸之慣性勢為

$$I = \int r^2 dM$$

對於  $z_1z_1$  軸之慣性勢為

$$I_0 = \int r_1^2 dM$$

由圖中三角形, 得

$$r = r_1^2 + r_0^2 - 2 r_1 r_0 \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore I &= \int (r_1^2 + r_0^2 - 2 r_1 r_0 \cos \theta) dM \\ &= \int r_1^2 dM + r_0^2 \int dM - 2 r_0 \int r_1 \cos \theta dM \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

今於  $z_2$  軸與  $z_1z_1$  軸之平面內, 設一  $o_1x_1$  軸, 通過質量中心  $o_1$  點. 又設  $x_1$  為  $dM$  部份對於  $z_1y_1$  平面之座標, 則

$$x_1 = r_1 \cos(180^\circ - \theta) = -r_1 \cos \theta$$

故由 (1) 式得

$$I = I_0 + r_0^2 M - 2r_0 \int x_1 dM \dots\dots\dots (2)$$

但  $z_1z_1$  軸通過質量中心, 故對於  $z_1y_1$  平面之  $\int x_1 dM$  為零. 因之

$$I = I_0 + r_0^2 M \dots\dots\dots (3)$$

故本定理已得證明. 此定理稱曰平行軸定理 (Parallel axis theorem). 又 (2) 式又可表示任意二平行軸間慣性勢之關係.

今設物體對於  $z_2$  軸之旋動半徑為  $k$ , 對於  $z_1z_1$  之旋動半徑為  $k_0$ , 則由 (3) 式得

$$k^2 = k_0^2 + r_0^2 \dots\dots\dots (4)$$

**113. 簡形勻質物體之慣性勢** 用積分法求勻質物體之慣性勢時, 將物體分成各極小部份之質量而求極小部份對於定軸之慣性勢, 就全物體求其積分. 此極小部份之取法有下列數種.

(1) 極小部份中各點至定軸(或 定平面)之距離須皆相等. 或

(2) 極小部份對於定軸之慣性勢為已知, 如是則物體全對對於該軸之慣性勢即等於各極小部份慣性勢之總和. 或

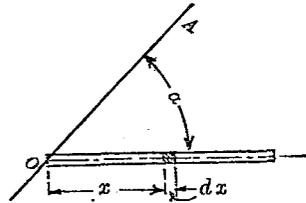
(3) 各極小部份之質量中心為已知, 且對於通過該中心

而平行於定軸之極小部份惰性勢亦為已知,如是則極小部份對於定軸之惰性勢由前節(3)式即可求得.物體全部對於定軸之惰性勢等於各極小部份惰性勢之總和.

茲舉數例如下.但各例中以 $\delta$ 代表均質物體之密度

例1 均勻斷面積之細直棒對於通過棒端一軸之惰性勢.

解 若斷面積甚小,假定棒之質量集中於中心線上.設 $L$ 為棒之全長, $OA$ 為定軸,棒之中心線與 $OA$ 軸成 $\alpha$ 角(第401圖).斷面積為 $a$ ,則



第401圖

$$dM = \delta a dx,$$

$$r^2 dM = (x^2 \sin^2 \alpha) \delta a dx$$

$$\therefore I = \int r^2 dM = \delta a \sin^2 \alpha \int_0^L x^2 dx$$

$$= \frac{\delta a L^3 \sin^2 \alpha}{3} = \frac{ML^2 \sin^2 \alpha}{3} \dots\dots\dots (1)$$

但 $M$ 為棒之全質量.

若棒與 $OA$ 成直角時,  $\alpha = 90^\circ$ ,

$$\therefore I = \frac{ML^2}{3} \dots\dots\dots (2)$$

若 $OA$ 軸通過棒之中點即質量中心時,則由第112節(3)式上之(1)式成爲

$$I_0 = \frac{ML^2 \sin^2 \alpha}{3} - \left(\frac{L}{2} \sin \alpha\right)^2 M = \frac{1}{12} ML^2 \sin^2 \alpha \dots\dots (1)$$

$\alpha = 90^\circ$  時, 則

$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2 \dots\dots\dots (2)$$

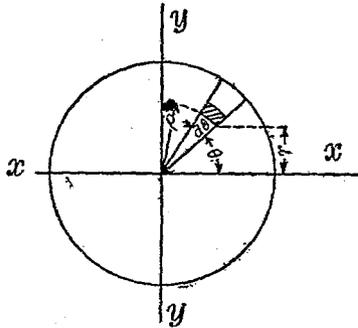
例 2 均質薄圓板對於一直徑之慣性勢。

解 設  $t$  為圓板厚度, 半徑為  $R$ , 全質量為  $M$ ,  $xx$  為定軸。則

$$dM = \delta t \rho d\theta d\rho, \quad r = \rho \sin \theta,$$

$$\therefore I_x = \int r^2 dM = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\rho \sin \theta)^2 \delta t \rho d\theta d\rho$$

$$= \delta t \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin^2 \theta d\theta d\rho = \frac{1}{4} MR^2$$



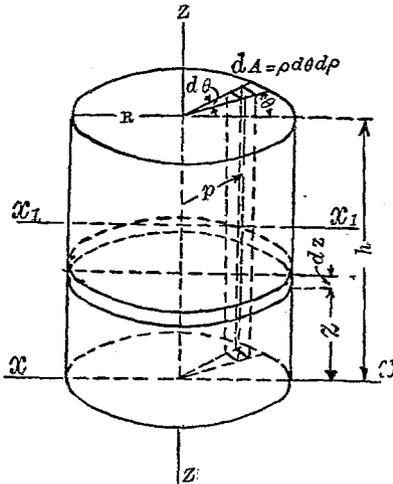
第 402 圖

例 3 均質直圓柱 (a) 對於中心軸  $zz$ ; (b) 對於底面一直徑  $xx$ ; (c) 對於通過重心之  $x_1, x_2$  軸之各慣性勢。

解 (a) 如第 403 圖取平行於  $zz$  軸之小柱體爲質量之極小部份 則

$$dM = \delta h \rho d\theta dp,$$

$$\begin{aligned} I_z &= \int \rho^2 dM = \delta h \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^3 d\rho d\theta = \frac{1}{2} \pi \delta h R^4 \\ &= \frac{1}{2} MR^2 \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$



第 403 圖

(b) 取平行於底面之薄圓片爲極小部份，則由例 2 及第 112 節 (3) 式得該極小部份對於  $xx$  軸之惰性勢爲

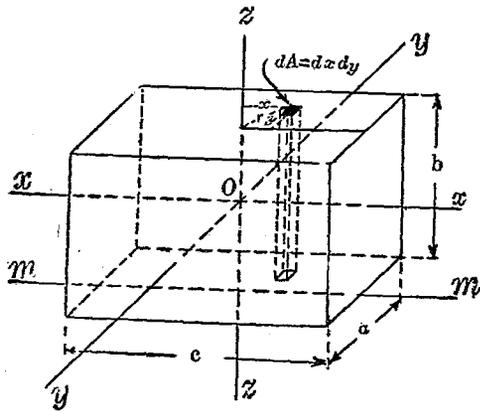
$$\begin{aligned} \frac{1}{4} dMR^2 + z^2 dM &= \frac{1}{4} \delta \pi R^4 dz + \delta \pi R^2 z^2 dz \\ \therefore I_z &= \int_0^h \frac{1}{4} \delta \pi R^4 dz + \int_0^h \delta \pi R^2 z^2 dz \\ &= \frac{1}{4} \delta \pi R^4 h + \frac{1}{3} \delta \pi R^2 h^3 = \frac{1}{12} M(3R^2 + 4h^2) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

(c) 最後由第112節(3)式得

$$I_{x_1} = I_x - M\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}M(3R^2 + 4h^2) - \frac{M}{4}h^2$$

$$\therefore I_{x_1} = \frac{1}{12}M(3R^2 + h^2) \dots \dots \dots (3)$$

例4 勻質矩形直柱體(Regular prism)(第404圖)對於  
(a) 通過質量中心而直交於側面之軸  $zz$ , (b) 中心軸  $xx$ , (c) 一  
側面之中線  $nm$  各慣性勢。



第404圖

解 (a) 對於  $zz$  軸設柱體之斷面積為  $a \times b \text{ cm.}^2$ , 長為  $c \text{ cm.}$ ,  
 $M$  為其全質量則  $M = \delta abc$  取極小部份如圖所示, 則

$$dM = \delta b dx dy$$

$$\begin{aligned}
 I_x &= \int r^2 dM = \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \delta b(x^2 + y^2) dx dy \\
 &= \int_{-\frac{a}{2}}^{+\frac{a}{2}} \delta b \left( \frac{c^3}{12} + y^2 c \right) dy \\
 &= \frac{1}{12} \delta b c (a^2 + c^2) \\
 &= \frac{1}{12} M (a^2 + c^2) \dots\dots\dots (1)
 \end{aligned}$$

(b) 對於中心軸  $xx$ , 與 (a) 同樣得

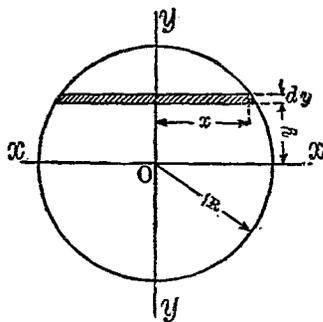
$$I_x = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) \dots\dots\dots (2)$$

(c) 對於中線 (Median line)  $mm$ . 第 112 節 (3) 式得

$$\begin{aligned}
 I_m &= I_x + M \frac{b^2}{4} = \frac{1}{12} M (a^2 + b^2) + \frac{M b^2}{4} \\
 &= \frac{1}{12} M (a^2 + 4b^2) \dots\dots\dots (3)
 \end{aligned}$$

**例 5** 勻質球體對於一直徑之慣性勢。

**解** 第 405 圖示  $xy$  面內球體之切斷面。直徑  $yy$  為定軸。今平行於  $xz$  面取一極薄圓片，其半徑為  $x$ ，其厚度為  $dy$ ，由例 3，該薄圓片對於  $yy$  軸之慣性勢為



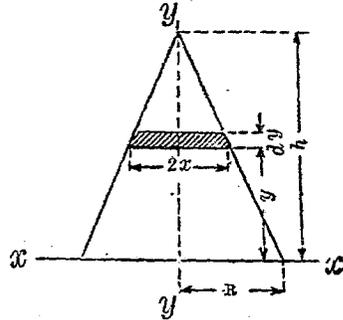
第 405 圖

$$\frac{1}{2}dMx^2 = \frac{1}{2}\delta\pi x^4 dy$$

$$\begin{aligned} \therefore I_y &= \frac{1}{2}\delta\pi \int_{-R}^{+R} x^4 dy = \frac{1}{2}\delta\pi \int_{-R}^{+R} (R^2 - y^2) dy \\ &= \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

**例6** 勻質直圓錐體 (a) 對於中心軸及 (b) 對於底面一直徑各慣性勢。

解 (a) 對於中心軸。設圓錐體中心軸取為  $yy$  軸， $xy$  平面內圓錐之斷面示於第 406 圖。取圓薄片如圖所示，其半徑設為  $x$ ，厚度設為  $dy$ ，則由例 3 得該薄片對於  $yy$  軸之慣性勢為



第 406 圖

$$\frac{1}{2}dMx^2 = \frac{1}{2}\delta\pi x^4 dy$$

$$\therefore I_y = \frac{1}{2}\delta\pi \int_0^h x^4 dy$$

設底半徑為  $R$ ，則

$$\frac{x}{R} = \frac{h-y}{h}$$

$$\therefore x = \frac{R}{h}(h-y)$$

故

$$I_y = \frac{1}{2}\delta\pi \frac{R^4}{h^4} \int_0^h (h-y)^4 dy = \frac{3}{10}MR^2$$

(b) 對於底面直徑. 取  $xx$  軸為所取惰性勢之軸. 如第 106 圖所取薄圓片對於  $xx$  軸之惰性勢, 由例 2 得

$$\frac{1}{4}x^2 dM + y^2 dM = \frac{1}{4} \delta \pi x^4 dy + \delta \pi x^2 y^2 dy$$

$$\therefore I_x = \frac{1}{4} \delta \pi \int_0^h x^4 dy + \delta \pi \int_0^h x^2 y^2 dy$$

但由 (a), 則  $x = \frac{R}{h}(h-y)$

$$\therefore I_x = \frac{1}{4} \delta \pi \frac{R^4}{h^4} \int_0^h (h-y)^4 dy + \delta \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (h-y)^2 y^2 dy$$

$$= \frac{1}{20} M(3R^2 + 2h^2)$$

114. 複形物體之惰性勢 若物體形狀可分成數個部份, 其惰性勢各為已知, 則物體全部之惰性勢等於各部份惰性勢之總和. 同樣若一物體減去其中數部份, 則其餘留部份之惰性勢等於原有物體之惰性勢減去諸被減部份之惰性勢.

例 1 求均質中空圓柱體對於中心軸之惰性勢.

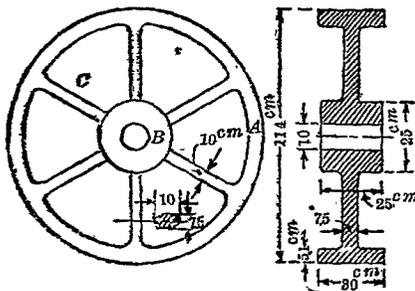
解 中空圓柱體之外徑設為  $R_1$ , 內徑設為  $R_2$ , 高設為  $h$ , 半徑  $R_1$  之圓柱體之質量設為  $M_1$ , 半徑  $R_2$  之圓柱體之質量設為  $M_2$ , 則

$$I = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 - \frac{1}{2} M_2 R_2^2 = \frac{1}{2} \delta \pi R_1^4 h - \frac{1}{2} \delta \pi R_2^4 h$$

$$= \frac{1}{2} \delta \pi h (R_1^4 - R_2^4) = \frac{1}{2} \delta \pi h (R_1^2 - R_2^2)(R_1^2 + R_2^2)$$

$$= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2)$$

例2 第407圖所示之生鐵飛輪 (Fly-wheel), 試求其對於週轉軸之慣性勢, 但假定生鐵每  $\text{cm}^3$  重 8.3 g.



第407圖

解 飛輪之邊緣 (Rim) 及殼 (Hub) 可各視為中空圓柱體, 而腕 (Spoke) 可視為細棒

邊緣之重量為

$$\pi(57^2 - 52^2) \times 30 \times \frac{8.3}{1000} = 430.0 \text{ kg.}$$

殼之重量為

$$\frac{\pi}{4}(25^2 - 10^2) \times 25 \times \frac{8.3}{1000} = 95.5 \text{ kg.}$$

每腕之重量為

$$\pi \times 5 \times 3.75 \times 39.5 \times \frac{8.3}{1000} = 19.3 \text{ kg.}$$

故邊緣之慣性勢為

$$J_1 = \frac{1}{2} \times \frac{430.0}{980} (57^2 + 52^2) = 1305.3 \text{ kg.} \cdot \text{sec.}^2 \cdot \text{cm.}$$

殼之惰性勢爲

$$I_2 = \frac{1}{2} \times \frac{95.5}{980} (12.5^2 + 5^2) = 8.8 \text{ kg. - sec.}^2 \text{ - cm.}$$

腕之惰性勢爲

$$\begin{aligned} I_3 &= 6 \times \left( \frac{1}{12} \times \frac{1.98}{980} \times 39.5^2 + \frac{19.3}{980} \times 32.25^2 \right) \\ &= 140.16 \text{ kg. - sec.}^2 \text{ - cm.} \end{aligned}$$

故飛輪全部之惰性勢如下：

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1305.3 + 8.8 + 140.16 = 1454.26 \text{ kg. - sec.}^2 \text{ - cm.}$$

飛輪旋動半徑  $k$  可求之如下：

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}} = \sqrt{\frac{1454.26}{\frac{1}{980}(430.0 + 95.5 + 6 \times 19.3)}} = 47.2 \text{ cm.}$$

**115. 質量之惰性積** 關於物體之質量惰性積者乃物體各極小部份質量與該部份至通過一定點三直交座標面中二座標面上之距離之乘積。

第 398 圖中物體對於  $yz$  及  $xz$  二平面之惰性積設爲  $P_{yz}$ ，則

$$P_{yz} = \int xy dM$$

對於  $xz$  及  $xy$  兩平面之惰性積設爲  $P_{xz}$ ，則

$$P_{xz} = \int yz dM$$

對於  $yz$  及  $xy$  兩平面之惰性積設爲  $P_{xy}$ ，則

$$P_{xy} = \int xz dM$$

若為勻質物體, 則  $dM = \delta dV$

$$\therefore P_{xy} = \delta \int xy dV, \text{ 等}$$

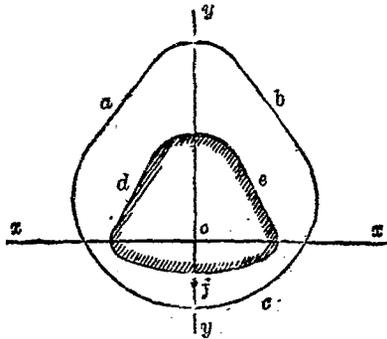
若勻質之薄平板則與第111節可同樣證明.

$$P_{xy} = \int xy dM = \frac{w}{g} t \int xy dA, \text{ 等}$$

慣性積之單位與慣性勢之單位同.

**定理** 若二直交座標面中一者為勻質物體之對稱面時, 則該物體對於此二直交平面之慣性積等於零.

**證** 第408圖中  $abc$  為任意之物體, 對於  $yz$  座標面為對稱



第408圖

但  $ox$  軸與紙面直交, 平行於  $xy$  平面之該物體任一斷面皆對於該斷面與  $yz$  面交線成對稱, 設  $def$  為此種斷面, 該面積對於其平面與  $yz$  及  $xz$  兩平面之二交線, 其面積慣性積為零, 即

$$\int xy dA = 0$$

故  $def$  之極薄片, 設厚度為  $dz$ , 則對於  $yz$  及  $xz$  二平面之質量惰性積當為零, 即

$$\frac{w}{g} dz \int xy dA = 0$$

因之全部質量對於  $yz$  及  $xz$  二平面之質量惰性積亦為零, 即

$$P_{xy} = 0$$

故本定理已得證明。

同樣可證全部質量對於  $yz$  及  $xy$  二平面之質量惰性積亦為零, 即

$$P_{xz} = 0$$

若二直交平面皆為物體之對稱面時, 則對於該二平面之質量惰性積當然仍等於零。

116. 物體之主惰性勢及主軸 與平面面積時同樣可得下列諸結論, 其證明從略。

(a) 對於通過一已知點之任意一軸, 物體之質量惰性勢, 可以通過該點之三直交座標軸之惰性勢及惰性積表示之。

例如通過一定點  $O$  之三直交座標軸為  $Ox, Oy, Oz$  對於此三軸之惰性勢與惰性積設為  $I_x, I_y, I_z, I_{xy}, P_{xz}, P_{yz}$ , 今設另有一軸通過該定點  $O$  而與  $Ox, Oy, Oz$  各成  $\alpha, \beta, \gamma$  之三角, 物體對於此軸之惰性勢設為  $I$ , 則

$$\begin{aligned} I = & I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2P_{xy} \cos \alpha \cos \beta \\ & - 2P_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2P_{yz} \cos \beta \cos \gamma \dots \dots \dots (1) \end{aligned}$$

(b) 通過物體中一點必有三直交軸, 對於其中一軸, 其質

質慣性勢為最大，對於他一軸，其質量慣性勢為最小，對於第三軸，其質量慣性勢在於最大與最小之間或與最大或最小中一者相等。此三軸稱曰主軸 (Principal axes)。對於主軸之慣性勢稱曰主慣性勢 (Principal moment of inertia) 與主軸成直交之平面，各稱曰主面 (Principal planes)。

(c) 對於主軸之慣性積等於零。

因之通過一定點之任意一軸與該點上主軸  $Ox, Oy, Oz$  各成  $\alpha, \beta, \gamma$  角時，則對於該軸之慣性勢  $I$  如下：

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma \dots \dots \dots (2)$$

三直交平面中若有二者為對稱面時，則其交線上各軸即成主軸。

(d) 通過一定點之各軸，其質量慣性勢間之關係可以一慣性橢圓體 (Ellipsoid of inertia) 表示之。

(e) 對於一點上三主軸之質量慣性勢若相等時，則對於該點上任何之軸，其慣性勢皆相等。

(f) 對於一點上二主軸之質量慣性勢皆相等時，則該二主軸平面內通過該點上任意之軸，其慣性勢相等。

117. 質量慣性勢之實驗上求法 物體形狀為不規則時，其慣性勢不易計算，可用實驗法求之。實驗法中之簡易者為應用重力擺 (Gravity pendulum) 之方法。物體若易於懸吊而使振動時均可用之於物體內取一適當之軸，使與慣性勢軸相一致，或與之平行，而懸吊於該軸上。此時該物體可視為一

複擺 Compound pendulum，設其週期 (Period) 爲  $T$ ，質量中心至懸吊處軸之距離爲  $c$ ，物體重量爲  $W$ ，重力加速度爲  $g$ ，對於懸吊處軸之惰性勢爲  $I$ ，旋動半徑爲  $k$ ，則由動力學中關於擺之公式得

$$k = \frac{T}{2\pi} \sqrt{cg}, \quad I = \frac{T^2 c W}{4\pi^2} \dots\dots\dots (1)$$

(參閱第 170 節)

## 習 題 21.

1. 試求均質直圓柱體對於通過重心而直交於其中心線之軸之惰性勢：

2. 一鋼圓柱體，直徑 15 cm.，高 30 cm.，試求其對於中心軸之惰性勢，但假定每  $\text{cm}^3$  鋼之重量爲 9 g.

3. 求證直橢圓柱體 (Right elliptic cylinder) 對於其中心軸  $xx$  之惰性勢爲

$$I_x = \frac{8\pi c b h}{4} (a^2 + b^2) = \frac{M}{4} (a^2 + b^2)$$

但  $a, b$  爲橢圓長徑與短徑之半， $h$  爲柱體之高。

4. 求證直橢圓柱體對於通過重心而一致於橫斷面上橢圓短徑  $2b$  之軸之惰性勢爲

$$I_0 = \frac{8\pi a b h}{4} \left( a^2 + \frac{h^2}{3} \right) = \frac{M}{4} \left( a^2 + \frac{h^2}{3} \right)$$

5. 求證中空薄圓筒對於中心軸  $xx$  之惰性勢爲

$$I_x = MR^2$$

但  $R$  爲其半徑.

6. 求證中空薄圓筒對於通過重心而直交於中心軸之軸,其惰性勢爲

$$I_y = \frac{M}{2} \left( R^2 + \frac{h^2}{6} \right)$$

但  $R$  爲半徑,  $h$  爲高.

7. 勻質橢圓柱體 (Ellipsoid) 之長軸,中軸與短軸各爲  $2a$  及  $2b$ , 求證對於長軸之惰性勢爲

$$I = \frac{M}{5} (b^2 + c^2)$$

8. 求證中空薄球對於直徑之惰性勢爲

$$I = \frac{2}{3} MR^2$$

但  $R$  爲其半徑.

9. 求證直圓錐體對於通過頂點而直交於中心線之軸之惰性勢爲

$$I = \frac{3}{5} M \left( \frac{R^2}{4} + h^2 \right)$$

但  $h$  爲錐高.

10. 求證截頭直圓錐體對於中心軸之惰性勢爲

$$I = \frac{3}{10} M \frac{R_2^5 - R_1^5}{R_2^3 - R_1^3}$$

但  $R_1, R_2$  爲底面半徑.

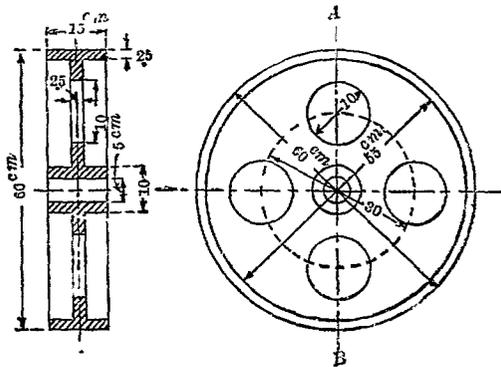
11. 二球以一水平直棒連結之,可迴轉於二球中央一垂直軸之周圍各球之直徑為 22 cm., 二球中心距離為 60 cm., 試求其惰性勢假定球與棒均為生鐵製成,其重量每  $\text{cm}^3$  為 8.3g.

12. 一中空生鐵球外徑 20 cm., 內徑 15 cm. 求其對於切線之惰性勢.

13. 一中空鋼圓柱體, 外徑 2.5 m., 內徑 0.5 m., 高 15 cm, 求其對於內壁面上平行於中心線之軸之惰性勢.

14. 第 13 題中對於外側面上平行於中心線之軸之惰性勢若何.

15. 一生鐵滑輪如第 409 圖所示, 求其對於迴轉軸之惰性勢及其旋動半徑.



第 409 圖

16. 試求各邊長  $c$  之一立方體對於其對角線之惰性勢.

17. 一直圓柱體任意一點之密度與其至中心軸之距離成正比例。試求該圓柱體對於中心軸之慣性勢。

18. 一球中任意一點之密度與其至一通過中心之平面之距離成正比例。試求對於其直交該平面之軸之慣性勢。

3073



大學叢書

# 工程力學

下冊

陸志鴻編



商務印書館發行

# 大學叢書委員會

## 委 員

丁燮林君 王世杰君 王雲五君  
任鴻雋君 朱經農君 朱家驊君  
李四光君 李建勛君 李書華君  
李書田君 李聖五君 李權時君  
余青松君 何炳松君 辛樹幟君  
吳澤霖君 吳經熊君 周仁君  
周昌壽君 秉志君 竺可楨君  
胡適君 胡庶華君 姜立夫君  
翁文灝君 翁文灝君 陳可忠君  
馬君武君 馬寅初君 孫貴定君  
徐誦明君 唐鈺君 郭任遠君  
陶孟和君 陳裕光君 曹惠羣君  
張伯苓君 梅貽琦君 程天放君  
程演生君 馮友蘭君 傅斯年君  
傅運森君 鄭魯君 鄭貞文君  
鄭振鐸君 劉秉麟君 劉湛恩君  
黎照寰君 蔡元培君 蔣夢麟君  
歐元懷君 顏任光君 顏福慶君  
羅家倫君 顧頡剛君

MG  
TB12  
1  
22

大學叢書  
工程力學  
下冊  
陸志鴻編



商務印書館發行

臺灣農民經濟協會  
合作社工作指導委員會

書位號數-----

登記號碼-----

## 第二篇

## 運動學

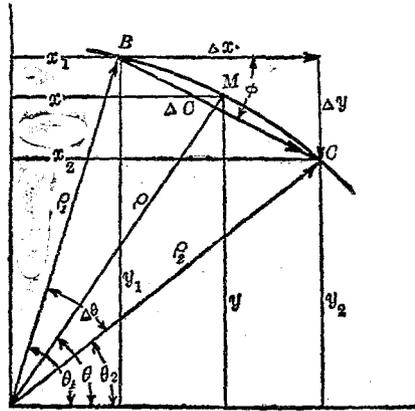
### 第九章 質點之運動

118. 概說 運動學(Kinematics)專論物體之運動,而不論及使物體運動之力,與物體自身之質量.將物體視為幾何學上之形體.運動學上所論者為距離,時間,速度,加速度等關係.物體為質點所構成,論物體之運動時,先須論質點之運動,此質點可視之為幾何學上之一點,即無大小與質量之一點也.

質點沿直線上運動時,其運動為直線運動(Rectilinear motion),沿曲線上運動時,其運動為曲線運動(Curvilinear motion).質點於相等時間內經過相等距離時,此運動稱曰等速運動(Uniform motion).若質點於相等時間內所經過距離不相等時,此運動稱曰變速運動(Non-uniform motion).例如一蒸汽機其曲柄軸(Crank shaft)每分間有一定迴轉數(Number of revolutions),則其叉頭(Cross head)有變速直線運動,曲柄銷釘(Crank pin)有等速曲線運動,而連接桿(Connecting rod)上其他諸點有變速曲線運動.

119. 線變位 在運動中之質點,其位置變化之量,稱曰變位 (Displacement). 運動中之質點,其任何瞬間之位置可以直交座標 (Rectangular coordinates) 或極座標 (Polar coordinates) 表示之. 例如第 410 圖中質點  $M$  沿曲線上自  $B$  運動至  $C$ , 其任意瞬間之位置可以座標  $x, y$

或  $\rho, \theta$  表示之. 質點自  $B$  之位置  $(x_1, y_1$  或  $\rho_1, \theta_1)$  運動至  $C$  之位置  $(x_2, y_2$  或  $\rho_2, \theta_2)$  時, 其間所有直線距離  $\overline{BC}$  之長即表示該兩點間變位之大小, 而向線  $\vec{BC}$  乃表示該兩點間變位之大小及方向, 即變位亦為向量. 此變



第 410 圖

位  $\vec{BC}$  稱曰線變位 (Linear displacement).

變位  $\vec{BC}$  設以  $\Delta C$  表之, 其向量可分解成為  $x, y$  二方向上之向量, 即以向量和 (Vector sum) 之式表示之如下:

$$\Delta C = \Delta x \rightarrow \Delta y$$

但記號  $\rightarrow$  表示向量之相加, 如求合力時所用三角形定律之方法將數個向量由幾何學上作圖法而求其合成向量, 同樣記號  $\rightarrow$  用以表示向量之相減, 即向量差 (Vector difference).

又  $\Delta x = x_2 - x_1$  為  $x$  方向上之變位,  $\Delta y = y_2 - y_1$  為  $y$  方向上之

變位。如是則變位  $\vec{BC}$  之大小爲

$$\Delta C = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

變位  $\vec{BC}$  與  $x$  軸所成之角度爲

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

同樣，變位  $\vec{BC}$  亦可以向量差之式表之如下：

$$\Delta C = \rho_2 - \rho_1$$

而變位  $\vec{BC}$  之大小又可以下式示之。

$$\Delta C = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \Delta\theta}$$

變位之單位即用長度之單位，如 cm., m., km., in., ft. 等等。變位可如合力與分力時，同樣用平行四邊形或三角形定律，合成之或分解之。

若物體之變位減成極小，即第 410 圖中  $C$  點與  $B$  點甚接近，則其極限可使弦  $\Delta C$  與  $B$  點上曲線之切線相一致，故質點沿曲線上運動時，其任意一點上運動之方向與曲線上該點相切。

**120. 角變位** 在運動中之質點，其角變位 (Angular displacement) 者乃該點上動徑 (Radius vector) 與他基準線 (Reference line) 所成之角度是也。故第 410 圖中與線變位  $\Delta C$  相應之角變位  $\Delta\theta$  爲

$$\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$$

角變位之單位與角度之單位同。如度數，週轉數，或弧度

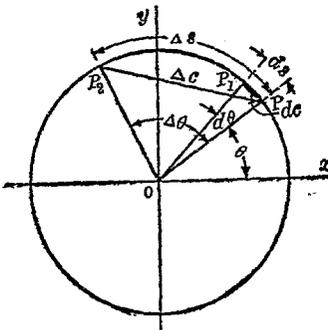
(Radian) 等是也. 但一質點之角變位, 因所取基準點 (Reference point) 或極點 (Pole) 而不同. 動徑即視為迴轉於此極點之周圍. 若質點運動於圓弧上時, 則即取該圓半徑為動徑, 而取該圓中心為極點.

121. 線變位與角變位間之關係 一質點若運動於圓弧上,  $P, P_1$  二點設為圓弧上相離極近之二點, 其線變位設為  $dc$ , 其相應之角變位設為  $d\theta$ , 該圓弧半徑設為  $r$ , 因  $dc$  與圓弧之長  $ds$  略相等, 故

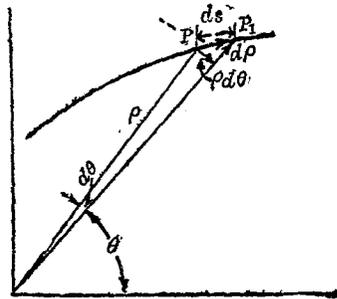
$$dc = ds = r d\theta$$

若  $P, P_2$  二點相離非極近時, 則線變位  $\Delta c$  不等於  $r \Delta \theta$ , 但  $\Delta s$  仍等於  $r \Delta \theta$

若質點非運動於圓弧上, 即質點徑路 (path) 之曲度半徑 (Radius of curvature) 非為一定時, 則對於徑路上某點之曲度半徑設為  $r$ , 取該點上曲度中心 (Center of curvature) 為極點, 在



第 411 圖



第 412 圖

該點附近  $dc = ds = r d\theta$  之式仍可應用。

若極點不取於曲度中心上，如第 412 圖所示，取於座標軸之原點，則極近兩點  $P, P_1$  間之線變位可以下式表示之。

$$dc = ds = \rho d\theta + dp$$

即分解為互成直角之二變位以示之。上式中  $\rho$  為  $P$  點之動徑，非為該點上之曲度半徑。

122. 線速度與速 在運動中之質點，其線速度 (Linear velocity) 者乃該質點之位置變化對於時間之比率，即線變位對於時間之比率也。質點徑路上某點之速度方向即與該點上運動方向相同，故即於該點上與徑路之曲線相切。換言之速度亦為向量，即有大小與方向之量。速度之大小稱為該質點之速 (Speed)，故速為僅有大小而無方向之量，即為度量。換言之，速者乃質點所徑距離對於時間之比率，非為變位對於時間之比率也。

質點若沿任意之徑路為等速運動時，設於  $\Delta t$  時間內經過  $\Delta s$  之距離，則該質點之速  $v$  如下，但  $\Delta s$  為直線距離，即曲線上兩點間之弦長。

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \dots\dots\dots (1)$$

質點若沿直線或曲線上為等速運動時，其速為一定，但速度則僅對於直線等速運動時為一定，蓋此時速度之方向不變而其大小亦不變。若對於曲線等速運動，則速度非一定，

因速度之方向隨處變化故也。

若質點為變速運動時，則(1)式不能表示 $\Delta t$ 時間內各點上之速，僅能表示在該時間內之平均速。各瞬間之速隨時變化。若時間縮為極短時，則該時間內之平均速可視為該瞬間之速。設某瞬間之速為 $v$ ，則

$$v = \lim_{\Delta \rightarrow \Delta t} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

此 $v$ 之方向，即與徑路相切於該時間內質點所佔之點上。

凡任何時間內速度相等之運動，即速度之大小與方向無變化。質點沿一直線進行之運動稱曰等速度運動 (Motion with uniform velocity)。否則稱為變速度運動 (Motion with non-uniform velocity)。

速度之單位以 ft/sec., mi/hr., cm/sec. 等示之。(2)式若取微分而求 $v$ 時，則須先將 $s$ 寫成 $t$ 之函數。

例1. 一質點進行於直線上，其變位與時間之關係為  $s = 3t^2 + 2t + \frac{1}{t}$ ，但 $s$ 以 cm.,  $t$ 以秒表示之。問2秒後該點之速度。

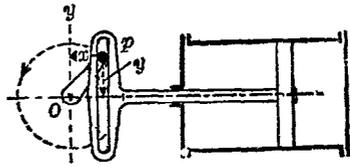
$$\text{解 } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \left( 3t^2 + 2t + \frac{1}{t} \right) = 6t + 2 - \frac{1}{t^2}$$

$t = 2$  秒時

$$v = 6 \times 2 + 2 - \frac{1}{2^2} = 13.75 \text{ cm/sec.}$$

例2 第413圖示一史高基式叉頭 (Scotch crosshead)，當曲

柄 (Crank) 迴轉時, 活塞 (Piston) 前後運動於直線上. 設曲柄銷釘 (Crank pin)  $P$  之位置為  $x, y$ ; 曲柄長  $OP$  為  $r$ , 每單位時間內曲柄之迴轉數為  $n$ , 求活塞速度之一般公式. 又設  $r = 22.5 \text{ cm.}$ ,  $n = 150 \text{ r. p. m.}$



第 413 圖

求 (i)  $x = 7.5 \text{ cm.}$ ;  $y$  為正; 及 (ii)  $x = 7.5 \text{ cm.}$ ,  $y$  為負時活塞之度. 但曲柄之迴轉為反時針方向.

解 今取活塞衝程 (Stroke) 中點為原點, 自此點活塞之變位設為  $s$ , 且該點取為時間  $t$  之起點. 先求  $s$  與  $t$  之關係式如下. 設  $\theta$  為曲柄與水平所成之角, 每單位時間內曲柄銷釘  $P$  之角度變為  $2 \cdot n$  (弧度), 故時間  $t$  後  $P$  之角變位即

$$\theta = 2\pi nt, \quad \text{但 } s = x, \quad x = r \cos \theta,$$

$$\therefore s = r \cos 2\pi nt \dots\dots\dots(1)$$

對於  $t$  取微分, 得

$$v = -2\pi nr \sin 2\pi nt \dots\dots\dots(2)$$

或由 1) 式得

$$\sin 2\pi nt = \sqrt{1 - (\cos 2\pi nt)^2} = \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}},$$

故得

$$v = -2\pi nr \sqrt{1 - \frac{s^2}{r^2}} \dots\dots\dots(3)$$

此即為活塞速度以  $s$  表示時之一般公式.

若  $r = 22.5 \text{ cm.}$ ,  $n = 150 \text{ r. p. m.}$

則 (2) 式成爲  $v = -112.5 \sin 5\pi t$

但  $t$  以秒表之,  $v$  以  $\text{cm/sec.}$  表之, 對於 (i) 之位置, 即  $s = 7.5 \text{ cm.}$ ,

$$\theta = \cos^{-1} \frac{7.5}{22.5} = 70^\circ 30', \quad \therefore t = 0.0782 \text{ 秒,}$$

代入 (2) 式得  $v = -333 \text{ cm/sec.}$

此負號表示活塞向左運動. 對於 (ii) 之位置,

$$\theta = 289^\circ 30', \quad \therefore t = 0.322 \text{ 秒}$$

代入 (2) 式得  $v = 333 \text{ cm/sec.}$

此正號表示活塞向右運動. 上之結果由 (3) 式求之亦同.

**123. 角速度** 在運動中之物體, 其角速度 (Angular velocity) 者乃該質點之角變位對於時間之比率是也. 若任何相等時間內其角變位皆相等時, 則於  $\Delta t$  時間內有角變位  $\Delta\theta$  之質點, 其角速度  $\omega$  爲

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

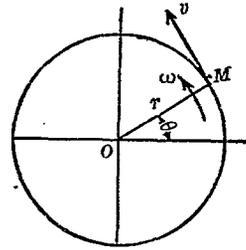
若相等時間內, 角變位不相等時, 則上式之  $\omega$  僅表示  $\Delta t$  時間內之平均角速度. 此時極短時間內之平均角速度可視爲該瞬間之角速度, 即

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

角速度之單位以  $\text{deg/sec.}$ ,  $\text{rad/sec.}$ , 或  $\text{r. p. m.}$  等表示之.

由上式求角速度時, 先須將  $\theta$  寫成  $t$  之函數.

124. 線速度與角速度間之關係 分速度 設質點  $M$  運動於第 414 圖之圓周上, 圓之半徑設為  $r$ , 設  $M$  點於某瞬間之線速度為  $v$ , 角速度為  $\omega$ , 則



第 414 圖

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

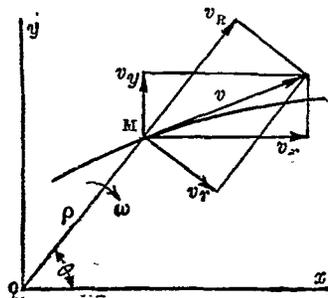
由第 414 圖得

$$ds = r d\theta$$

$$\therefore v = \frac{r d\theta}{dt} = r\omega \dots\dots\dots (1)$$

若質點不於圓周上運動, 則視  $r$  為質點徑路上該瞬間所佔位置之點之曲度半徑,  $\omega$  為對於該點上曲度中心為極點時之角速度, 上式  $v = r\omega$  仍可應用。

次設質點運動於任意之曲線徑路, 而極點不取於曲度中心時, 如第 415 圖, 設  $\rho$  為某瞬間時質點  $M$  所佔位置處之動徑, 此時  $M$  處之線速度  $v$  與徑路相切, 此速度可分成二個分速度 (Component of velocity). 通常有二種分解方法, 即 (i) 分成平行於座標軸



第 415 圖

之軸向分速度 (Axial components of velocity)  $v_x, v_y, v_z$ , 或 (ii) 分成

動徑方向之徑向分速度 (Radial component of velocity)  $v_r$  及與動徑成直角之橫向分速度 (Transverse component of velocity)  $v_T$ , 如圖所示因線速度乃位置變化對於時間之比率, 故得下式.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \dots\dots\dots (2)$$

若  $x, y, z$  座標之變化為均一時, 則

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}, \quad v_y = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}, \quad v_z = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{z_2 - z_1}{t_2 - t_1}$$

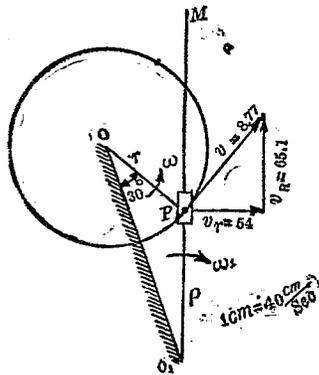
同樣得

$$v_r = \frac{d\rho}{dt}, \quad v_T = \frac{\rho d\theta}{dt} = \rho\omega \dots\dots\dots (3)$$

但  $d\rho$  與  $d\theta$  為  $dt$  時間內質點沿徑方向及與動徑成直角方向之變位而  $\omega$  為對於極點  $O$  之角速度. 若極點取於曲度中心上時, 則橫向分速度即為總速度  $v$ , 而與徑路相切, 徑向分速度  $v_r$  為零. 換言之若徑路為圓弧而極點在於其中心上時, 或極點在於任意曲線徑路之曲度中心上時, 則  $d\rho$  及  $\frac{d\rho}{dt}$  皆為零, 而  $v_T$  與  $v$  相同, 皆等於  $\rho\omega$ .

因第 415 圖上之極點  $O$  為任意取定者, 故若極點改變時,  $M$  點之  $v_T$  與  $v_r$  均有變動. 但  $M$  點之  $v_x, v_y, v_z$  對於  $O$  點之位置無關係. 苟座標軸方向不變時, 此三分速度常為一定. 若為平面運動時, 則  $v_z$  為零.

例1 第416圖所示之機構 (Mechanism)  $O$  與  $O_1$  爲固定.  $P$  點運動於  $O$  之圓周上,  $O_1M$  桿因之前後搖動於  $O_1$  點. 設  $\overline{OO_1}$  爲 45 cm, 曲柄  $\overline{OP}$  爲 20 cm, 曲柄之角速度爲 40 r. p. m., 求  $P$  點速度. 又試用圖解法求  $P$  點速度之直交於  $O_1M$  桿之分速度, 并求  $O_1M$  桿之角速度.



第 416 圖

解 設  $P$  點對於圓周中心  $O$  之角速度爲  $\omega$ , 對於  $O_1$  極點之角速度爲  $\omega_1$ ,  $\overline{OP}$  之長爲  $\rho$ , 則  $P$  點之線速度與圓周相切. 其大小如下:

$$v = \omega r = \frac{40 \times 2\pi}{60} \times 20 = 87.7 \text{ cm/sec.}$$

用作圖法將  $v$  分成二分速度, 得

$$v_T = 54 \text{ cm/sec.}, \quad v_R = 65.1 \text{ cm/sec.}$$

但  $v_T = \omega_1 \rho = \omega_1 \times O_1P$ ,

但由三角形  $OPC_1$  解得

$$O_1P = 29.5 \text{ cm.}$$

$$\therefore \omega_1 = \frac{54}{29.5} = 1.83 \text{ rad/sec.} = 17.6 \text{ r. p. m.}$$

例2 一質點由原點出發, 沿曲線  $y = \frac{1}{4}x^2$  運動, 使水平分速度常爲 2 m./sec. 求該質點在二秒末之速度.

解 因  $v_x=2$ ,  $x = \int v_x dt = 2t + C$ , 因  $x=0$  時,  $t=0$ , 故  $C=0$ ,  
 因之  $x=2t$ , 又  $y = \frac{1}{4}x^2 = t^2$ ,  $v_y = \frac{dy}{dt} = 2t$ , 故  $t=2$  時,  $v_x=2$ , 其方  
 向向右.  $v_y=4$ , 其方向向上. 故速度  $v$  向右上方, 其大小為

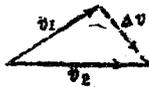
$$v = \sqrt{2^2 + 4^2} = 4.47 \text{ m./sec.}$$

此速度與水平所成之角  $\theta$  為

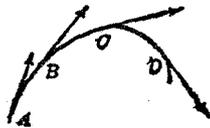
$$\theta = \tan^{-1} \frac{4}{2} = 63^\circ 26'.$$

125. 線加速度 運動中一質點於某瞬間內之加速度者  
 乃該瞬間質點之速度變化對於時間之比率是也.

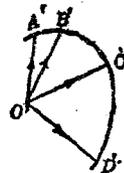
速度之方向及大小均有變化, 某瞬間內變化之總量為  
 該瞬間內速度增量 (Velocity-increment). 其符號當然可有正  
 負, 設  $v_1$  = 初速度,  $v_2$  = 終速度,  $\Delta v$  = 速度增量, 則  $v_1 + \Delta v = v_2$ ,  
 $\Delta v = v_2 - v_1$ , 此關係可示於第 417 圖.  $\Delta v$  非表示  $v_2$  與  $v_1$  間大小  
 之相差. 速度由  $v_1$  變化為  $v_2$  時, 速度增量  $\Delta v$  非起於同一瞬間  
 速度之變化乃於某時間內連續起生. 第 418 圖中質點  $P$  沿曲  
 線運動, 次第經過  $A, B, C, D$  等點. 各點上作切線表示該點上



第 417 圖



第 418 圖

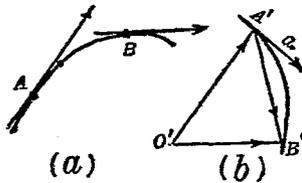


第 419 圖

速度之向線。今設由一點  $O'$  作此等速度向線，如第 419 圖之  $O'A', O'B', O'C', O'D'$  等。其  $A', B', C', D'$  等點可以一平滑曲線連結之。此曲線稱曰質點  $P$  之速端曲線 (Hodograph)。質點自  $A$  運動至  $B$  時，速度之變化自  $O'A'$  變為  $O'B'$ ，故  $A', B'$  等點各與  $A, B$  等點相應。由速端線可決定各瞬間之速度增量。例如質點自  $A$  變位至  $B$  時，該時間中速度之增量為  $\overrightarrow{A'B'}$  向量；質點自  $B$  變位至  $D$  時，速度增量為  $\overrightarrow{B'D'}$  向量。速端曲線上設有  $P'$  點運動，與徑路上  $P$  點相對應，則  $P'$  點運動遲緩時，速度之變化亦遲緩，若  $P'$  點運動急速時，速度之變化亦急速。 $P'$  點運動之方向即為速度增量之方向。

因速度增量為向量，故加速度亦為向量。設加速度之大小為  $a$ ，某時間內之平均加速度為該時間內速度增量以時間除得之值，其方向與速度增量相同。若時間極短時，則該短時間內平均加速度可視為該瞬間之加速度。

第 420 圖 (a) 示質點  $P$  之徑路，於  $\Delta t$  時間內質點由  $A$  至  $B$ ，其間速度變化之速端曲線示於第 420 圖 (b)， $A$  點之速度為



第 420 圖

$O'A, B$  點之速度為  $O'B'$ ,  $\Delta t$  時間內速度增量為  $\overrightarrow{A'B'}$ , 若  $B$  點無限接近於  $A$  點時, 則  $A$  點上加速度之大小即等於(弦  $A'B' \div \Delta t$ ) 之極限值, 故

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{A'B'}}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

因  $B$  點極接近於  $A$  時,  $B'$  亦極接近於  $A'$ ,  $A'B'$  弦之極限略等於  $A'B'$  弧, 此極小之  $A'B'$  弧長以  $ds'$  表之, 上式示  $A$  點加速度之大小, 其方向則為  $B$  極近於  $A$  時, 速度增量  $A'B'$  之極限方向, 由第 420 圖 (b) 知此極限方向切於速端曲線上之  $A'$  點, 如圖中之向線  $\alpha$  所示。

質點運動於直線上時, 速度之方向無變化, 僅可變其大小, 此時之速端曲線亦為一直線, 加速度之向線亦與該直線相一致, 若質點運動於曲線上, 則速度必變其方向而亦可變其大小, 即質點若無加速度時, 不能為曲線運動。

質點之加速度在任何時間內其大小與方向均為一定之運動, 稱曰等加速度運動 (Motion with uniform acceleration), 直線運動時可有等加速度運動, 若加速度之大小或方向時有變化者, 稱曰變加速度運動 (Motion with non-uniform acceleration), 曲線運動必為變加速度運動。

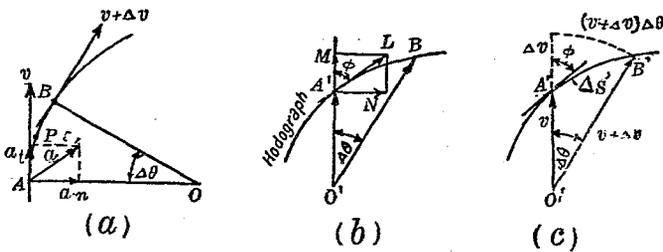
加速度之單位為  $\text{cm./sec}^2$ ,  $\text{ft./sec}^2$ ,  $\text{mi./hi./sec}$ . 等等。

126. 切線加速度與法線加速度 質點作曲線運動時, 其加速度無論在任何瞬間可分成二分加速度 (Components

of acceleration), 一為由該點與徑路相切之分加速度, 一為與該點切線成正交之分加速度。前者曰切線加速度(Tangential acceleration), 後者曰法線加速度(Normal acceleration)。前者之大小設以  $a_t$  表示之, 後者之大小設以  $a_n$  表示之。

今於第 421 圖(a)中  $AB$  為質點  $P$  之徑路,  $A$  點之速度為  $v$ ,  $B$  點之速度為  $v+\Delta v$ ,  $A, B$  兩點上法線(或切線)之夾角設為  $\Delta\theta$ ; 又設於第 421 圖(b)上  $O'A', O'B'$  各為  $A, B$  兩點間速度之向線,  $A', B$  兩點在於質點運動之速端曲線上, 而角  $A'O'B'$  亦等於  $\Delta\theta$ ,  $A$  點上之加速度必與切線  $A'L$  相平行, 而向線  $\vec{A'L}$  即表示  $A$  點上加速度之向線, 此  $\vec{A'L}$  之大小設為  $a$ , 其與  $O'A'$  所夾之角設為  $\phi$ , 將  $\vec{A'L}$  分成  $\vec{A'M}$  及  $\vec{A'N}$ , 前者與  $\vec{O'A'}$  相一致, 後者與之成直角則此即表示切線加速度及法線加速度。故得

$$a_t = a \cos \phi = \frac{ds'}{dt} \cos \phi, \quad a_n = a \sin \phi = \frac{ds'}{dt} \sin \phi$$



第 421 圖

今就第 421 圖(c)中弧  $A'B'$  為  $\Delta S'$ , 故  $A', B'$  兩點極接近時, 弧長

可視為直線長,因之得

$$\cos \phi = \lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta s'} = \frac{dv}{ds}, \quad \sin \phi = \lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v)\Delta\theta}{\Delta s'} = \frac{v d\theta}{ds}$$

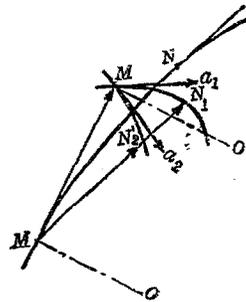
又由第 421 圖 (a),  $d\theta = \frac{ds}{r}$ , 故得

$$a_t = \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dv}{ds} = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{v d\theta}{ds} = \frac{v}{r} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{r^2}}$$

但  $r$  為該點上之曲度半徑.

今更將  $a_t$  與  $a_n$  之指向 (Sense) 研究之. 第 422 圖上設曲線  $MN$  表示質點之徑路,  $MO$  為  $M$  點上之法線.  $M$  點處速度設為  $MM'$ , 取  $M$  點為速端曲線之原點. 假定速度當增加時,  $N$  點處之速度設為  $MN_1'$  (與  $N$  點之切線相平行). 若  $M, N$  兩點極接近時, 速端曲線  $M'N_1'$  必全在  $M'O'$  (與  $MO$  平行) 上. 若速端曲線凸向下方時, 加速度  $a_1$  (即  $M'$  點速端曲線之切線) 之方向仍當如圖所示. 假定速度當減少時,  $N$  點處之速度設為  $MN_2'$ ,  $M'N_2'$  為其速端曲線, 若  $M, N$  兩點極接近時,  $M'N_2'$  曲線亦必全在  $MO$  直線上. 此速度曲線雖亦可凸向下方, 但加速度  $a_2$  之方向亦仍必如圖所示. 由圖之  $a_1$  與  $a_2$  兩加



第 422 圖

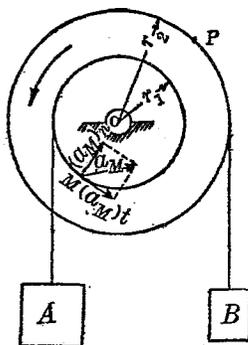
速度方向,可知  $a_1$  之切線分加速度,其指向與速度之指向相同,  $a_2$  之切線分加速度,其指向與速度之指向相反,但  $a_1$  與  $a_2$  之法線分加速度,其指向均向於徑路之內側,即向於徑路之曲度中心.

質點運動於直線上時,則曲度半徑  $r$  為無限大,故  $a_n = 0$ , 僅

有 
$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

注意 物體運動之速度若僅變其大小時,則僅有切線加速度,其方向與速度方向相同或相反;若僅變其方向時則僅有法線加速度,其方向與速度直交.大小與方向同變時,則切線加速度與法線加速度同時存在.

例1 第 423 圖示二滑輪,相互連結,可同時旋轉於中心  $O$  之周圍.  $A$  物向下動而  $B$  物向上動. 若  $M, P$  兩點之角速度於兩秒間,自 10 r. p. m. 均勻變化至 60 r. p. m., 求 (a) 兩秒間任何瞬間內該兩點之切線加速度; (b)  $A$  及  $B$  之加速度; 及 (c) 兩秒間開始時  $M$  點之總加速度 (Total acceleration) 與兩秒終了時  $P$  點之總加速度. 但



第 423 圖

$$r_1 = 22.5 \text{ cm.}, \quad r_2 = 30 \text{ cm.}$$

解 (a)  $M$  點於兩秒開始時之速度設為  $v_1$ , 兩秒終了時之

速度設為  $v_2$ , 則

$$v_1 = \omega_1 r_1 = \frac{10 \times 2\pi}{60} \times 22.5 = 23.5 \text{ cm./sec.},$$

$$v_2 = \omega_2 r_1 = \frac{60 \times 2\pi}{60} \times 22.5 = 141.3 \text{ cm./sec.}$$

故  $M$  點之切線加速度為

$$(a_M)_t = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{141.3 - 23.5}{2} = 58.9 \text{ cm./sec}^2.$$

$$P \text{ 點之 } v_1 = \frac{10 \times 2\pi}{60} \times 30 = 31.4 \text{ cm./sec.},$$

$$P \text{ 點之 } v_2 = \frac{60 \times 2\pi}{60} \times 30 = 188 \text{ cm./sec.}$$

故  $P$  點之切線加速度為

$$(a_P)_t = \frac{188 - 31.4}{2} = 78.3 \text{ cm./sec}^2.$$

(b) 小滑輪上各點速度變化之大小與  $A$  物速度變化之大小相等故  $M$  點之切線加速度之大小即等於  $A$  物加速度之大小因之

$$a_A = (a_M)_t = 58.9 \text{ cm./sec}^2.$$

同樣

$$a_B = (a_P)_t = 78.3 \text{ cm./sec}^2.$$

(c)  $M$  點在兩秒開始時之法線加速度為

$$(a_M)_n = \frac{v_1^2}{r_1} = \frac{(23.5)^2}{22.5} = 24.4 \text{ cm./sec}^2.$$

$P$  點在兩秒末之法線加速度爲

$$(a_p)_n = \frac{v_2^2}{r^2} = \frac{(188)^2}{30} = 1178.1 \text{ cm./sec}^2.$$

故兩秒開始時  $M$  點之總加速度爲

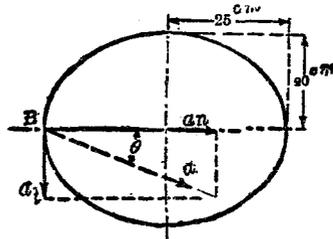
$$a_M = \sqrt{(58.9)^2 + (24.4)^2} = 63.7 \text{ cm./sec}^2.$$

兩秒末時  $P$  點之總加速度爲

$$a_P = \sqrt{(78.3)^2 + (1178.1)^2} = 1180 \text{ cm./sec}^2.$$

**例 2** 一質點  $P$  沿第 424 圖所示之橢圓上運動於反時針方向其變位與時間之關係爲

$s = \frac{1}{2}t^2$  (但  $s$  以 cm. 表之,  $t$  以 sec. 表之). 今由某點出發  $t=4$  時質點適在  $B$  上. 求  $P$  在  $B$  點時之加速度.



第 424 圖

解 因  $s = \frac{1}{2}t^2$ , 故  $v = t$ ,  $a_t = 1$ ,

$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{t^2}{r}$ .  $B$  點上之曲度半徑  $r = \frac{20^2}{25} = 16 \text{ cm}$ . 故  $t=4$  時,  $a_n = 1 \text{ cm./sec}^2$ .  $a_t$  與  $a_n$  之方向如圖所示. 其總加速度之大小如下:

$$a = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1.4 \text{ cm./sec}^2.$$

$\alpha$  與水平所成之  $\theta$  角如下:

$$\theta = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

**127. 角加速度** 在運動中之質點, 其角加速度 (Angular

acceleration) 者乃該點角速度變化對於時間之比率是也。若角速度  $\omega$  均勻變化時，即各相等時間內其變化量相等時，則角加速度  $\alpha$  之大小如下：

$$\alpha = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$$

但  $\Delta \omega$  為  $\Delta t$  時間內角速度之變化量。若質點之角速度非均勻變化時，則上式僅表示  $\Delta t$  時間內之平均角加速度。角加速度隨時隨刻變化時，其極短某瞬間內之平均角加速度，可視為該瞬間之角加速度。即某瞬間之角加速度  $\alpha$  為

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

因 
$$\omega = \frac{d\theta}{dt},$$

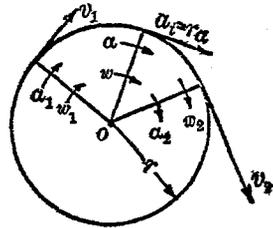
$$\therefore \alpha = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$\omega$  及  $\theta$  若可寫成  $t$  之函數時，則由上之二式求角加速度。

角加速度之單位為 deg./sec<sup>2</sup>., rev./min./sec., rad./sec<sup>2</sup>. 等等。

128. 線加速度與角加速度間之關係 第 425 圖中設有一質點運動於圓周之上，其中心為  $O$ ，其半徑為  $r$ 。若該質點速度之大小有變化時，則各瞬間有切線加速度如下式：

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$



第 425 圖

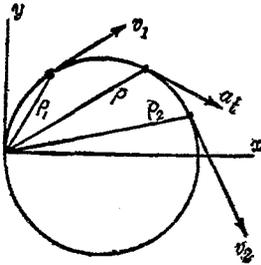
但  $v=r\omega$ , 故  $a_t = \frac{d(r\omega)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}$ , 又  $\frac{d\omega}{dt}$  等於角加速度  $\alpha$ , 故

$$a_t = r\alpha$$

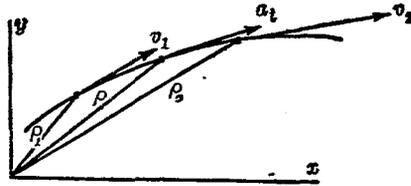
由上式可得切線加速度與角加速度間之關係。

若質點不運動於圓周上時, 設  $r$  表示徑路上各該點之曲度半徑,  $\alpha$  表示各該點對於曲度中心之角加速度, 則上式仍可應用。

若極點不取於各該點之曲度中心上, 如第 426 與 427 兩圖, 則  $a_t = \frac{dv}{dt}$  仍可成立, 惟  $a_t$  不等於  $\rho\alpha$ , 因  $v$  不等於  $\rho\omega$ , 故也。



第 426 圖



第 427 圖

質點之運動方向有變化時, 則有法線加速度如下式:

$$a_n = \frac{v^2}{r}$$

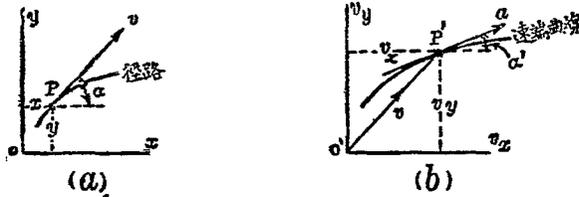
但  $r$  為各該點上徑路之曲度中心. 因  $v=r\omega$ , 故

$$a_n = r\omega^2 \quad \text{或} \quad a_n = v\omega$$

此  $a_n$  與角加速度  $\alpha$  無關係與各瞬間之角速度有關係. 換言之,  $a_n$  與各瞬間角速度之變化率無關係也

129. 軸向分加速度 加速度既為向量,可分成為任何方向之分加速度.若分加速度平行於座標軸之方向時,稱曰軸向分加速度 (Axial components of acceleration), 以  $a_x, a_y, a_z$  等表示之.今設質點之徑路為一平面曲線,在  $xy$  平面內. 第428圖 (a) 上  $P$  為運動中之質點,第428圖 (b) 中  $O'P'$  為平行於  $P$  點之速度  $v$ , 且與之相等,  $P'$  與  $P$  相對應,  $P$  點之加速度方向與  $P'$  點上速端曲線相切. 設  $\alpha'$  為加速度  $a$  與  $x$  軸所成之角, 則

$$a_x = a \cos \alpha', \quad a_y = a \sin \alpha';$$



第 428 圖

但  $a = \frac{ds'}{dt}$ ,  $s'$  為速端曲線上極小之長度,  $P'$  之座標為  $v_x, v_y$ , 故

$$\cos \alpha' = \frac{dv_x}{ds'}, \quad \sin \alpha' = \frac{dv_y}{ds'}, \quad \text{因之}$$

$$a_x = \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dv_x}{ds'} = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{ds'}{dt} \cdot \frac{dv_y}{ds'} = \frac{dv_y}{dt}$$

由第124節(2)式得

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_s = \frac{ds^2}{dt^2}$$

若  $x, y, z$ , 或  $v_x, v_y, v_z$  可以  $t$  之函數表示時, 可由微分法求軸向分加速度.

**注意** 質點於某方向上之速度為零時, 該方向上之加速度未必為零. 例如質點沿圓周運動時, 其法線方向無速度, 即  $v_n = 0$ , 其總速度即為  $v_t$ ; 但法線加速度必存在, 其大小等於  $\frac{v^2}{r}$ ; 又一球投射於水平方向時, 其出發瞬間之垂直速度為零, 但此時之垂直加速度為  $980 \text{ cm./sec}^2$ ; 又蒸汽機之叉頭 (Cross head) 當在衝程 (Stroke) 末端時, 其速度為零, 但加速度  $\frac{dv}{dt}$  之值為最大.

**例** 一質點自原點出發, 運動於拋物線  $y^2 = 36x$  上, 其  $y$  軸方向之分加速度為一定, 等於  $15 \text{ cm./sec}^2$ , 求開始出發後二秒末之位置, 速度, 及加速度.

$$\text{解 因 } a_y = 15, \text{ 故 } v_y = \int a_y dt = 15t, \quad y = \int v_y dt = 7.5t^2$$

$$\text{又 } x = \frac{1}{36}y^2 = 1.6t^4, \quad v_x = \frac{dx}{dt} = 6.4t^3, \quad a_x = \frac{dv_x}{dt} = 19.2t^2$$

將  $t=2$  代入於上列各式中, 得

$$x = 25.6 \text{ cm.} \qquad y = 30.0 \text{ cm.}$$

$$v_x = 51.2 \text{ cm./sec.} \qquad v_y = 30.0 \text{ cm./sec.}$$

$$a_x = 76.8 \text{ cm./sec}^2. \qquad a_y = 15.0 \text{ cm./sec}^2.$$

故 2 秒末質點在於原點右方 25.6 cm., 上方 30.0 cm. 之處. 其速度之大小為  $v = \sqrt{(51.2)^2 + (30.0)^2} = 59.4 \text{ cm./sec.}$  其方向向右上

方,與水平所成之角度爲  $\tan^{-1} \frac{30.0}{51.2} = 30^\circ 22'$ , 其加速度之大小爲  $a = \sqrt{(76.8)^2 + (15.0)^2} = 78.3 \text{ cm./sec}^2$ . 其方向向右上,與水平所成之角爲  $\tan^{-1} \frac{15.0}{76.8} = 11^\circ 2'$ .

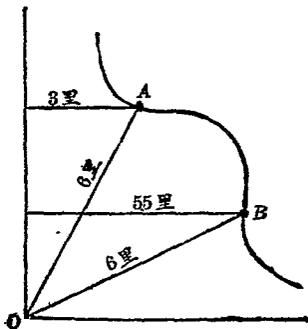
### 習 題 22.

1. 第 429 圖示汽車之徑路,自  $A$  點出發,沿圖示之曲線達  $B$  點,求 (a) 線變位之大小及方向; (b) 角變位.

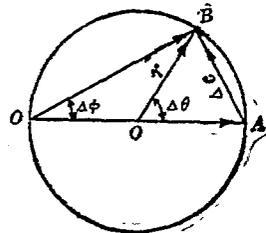
2. 第 430 圖中一質點運動於半徑  $r$  之圓周上,自  $A$  至  $B$ , 其對於中心  $O$  之角變位以  $\Delta\theta$  表示之,對於極點  $O_1$  之角變位以  $\Delta\phi$  表示之,求證線變位之大小  $\Delta c$  可以下式示之.

$$\Delta c = 2r \sin \frac{\Delta\theta}{2}$$

若  $\Delta\theta = \frac{\pi}{4}$  時,  $\Delta\phi$  當若何?



第 429 圖



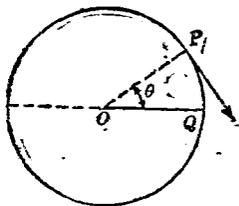
第 430 圖

3. 一質點運動於一直線上,其線速度  $v$  與時間  $t$  之關係為  $v = t^3 + 4t^2 + 2$ , 若  $t = 2$  秒時,  $s = 10$  cm., 則  $t = 3$  秒時  $s$  之值若何?

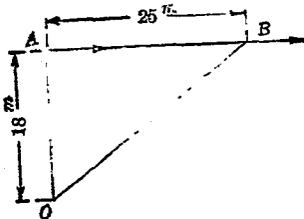
4. 第 431 圖上一質點  $P$  自  $Q$  點出發沿圓周運動,線變位  $s$  與時間  $t$  之關係為  $s = 24 - 2t^3$ ,  $s$  之距離自  $Q$  點起,於反時針方向者為正.求  $t = 3$  秒時,該質點之速度.

5. 一飛輪之直徑為 2 m., 每分週轉數為 150 r. p. m., 求該輪周緣上一點之線速度.

6. 第 432 圖上一汽車行於  $AB$  直線路上,其速度為每小時 30 公里.  $O$  點上立一觀測者,求 (a) 汽車在  $A$  點時對於  $O$  之速度及 (b) 汽車在  $B$  點時對於  $O$  之角速度.



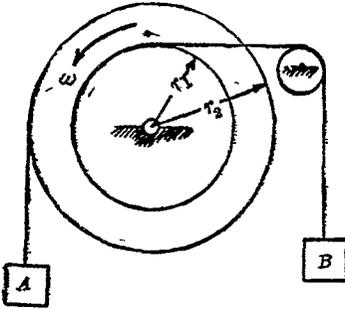
第 431 圖



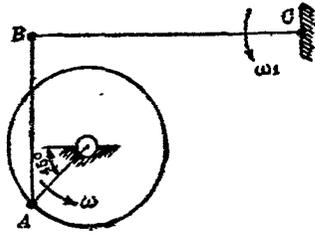
第 432 圖

7. 第 433 圖上大小二滑輪相連結,同迴轉於中心  $O$  之周圍.其迴轉速度為 80 r. p. m. 若  $r_1 = 1.5$  cm.,  $r_2 = 2.5$  cm. 時,求  $A$  物與  $B$  物各速度.并求 6 秒後  $A$  與  $B$  各經過距離.

8. 第 434 圖上  $BC$  桿長 1.8 m., 其角速度  $\omega_1$  為 50 r. p. m., 問  $BA$  與  $BC$  成直交之瞬間時,求曲柄  $OA$  之角速度但  $OA$  長 30 cm

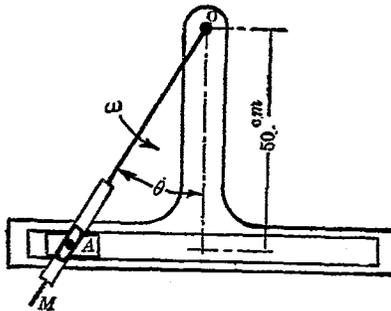


第 433 圖



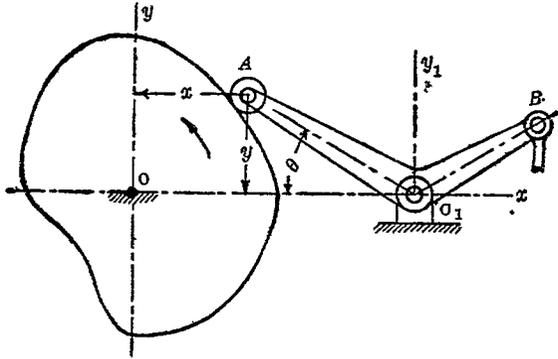
第 434 圖

9. 第 435 圖之搖桿  $OM$ , 在  $\theta = 30^\circ$  之位置時, 其角速度為  $40 \text{ r. p. m.}$ , 求  $A$  對於極點  $O$  之橫向分速度, 并求  $A$  之總速度.



第 435 圖

10. 第 436 圖所示之桃輪 (Cam) 迴轉於  $O$  軸之周圍, 使  $A$  之滾筒變化其  $x$  座標, 當  $\theta = 30^\circ$  時, 其  $x$  座標每秒變化  $10 \text{ cm.}$ , 若  $O_1A = 45 \text{ cm.}$  時求  $AO_1B$  曲桿 (Bell crank) 之角速度.

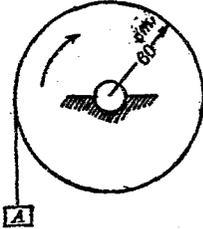


第 436 圖

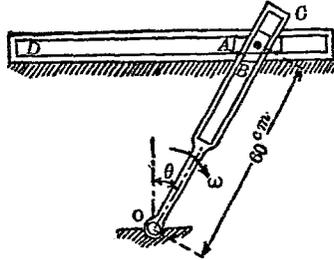
11. 一飛輪直徑 2.5m. 於四秒內其迴轉速度依均勻變化率自 100 r. p. m. 變成 40 r. p. m., 求邊緣上一點當四秒間之切線加速度, 并求四秒末該點之總加速度, 又該點之角加速度.
12. 一質點運動於半徑 60 cm. 之圓周上, 若其速均勻變化, 於 3 秒間自 300 cm./sec. 變為 7200 cm./sec. 時, 求 (a) 3 秒開始時及 3 秒末各切線加速度, 與法線加速度.
13. 一質點以  $\theta = 3t^2 + 2t$  之關係, 運動於圓周上, 問該點在 4 秒末之角速度與角加速度.
14. 第 437 圖所示之圓筒迴轉於時針方向, 將 A 物捲上. A 物之速每秒減少 600 cm., 問圓筒邊緣上一點之角加速度.
15. 滑輪邊緣上一點之總加速度在某瞬間時為 1200 cm./sec<sup>2</sup>. 其方向與該點上半徑成 20°, 若滑輪半徑為 45 cm., 求該瞬間時該點之角速度與角加速度.

16. 一質點沿  $xy=4$  之徑路上以  $x=2t^2$  之關係而運動 (a) 求 2 秒末  $x$  與  $y$  軸向之分速度及分加速度. (b) 求總加速度. 以圖解法示之. (c) 用圖解法求總加速度之切線分加速度與法線分加速度.

17. 一質點以  $x=t^3+2t^2$ ,  $y=4t^2+5t$  之關係而運動. 求 2 秒末該點之速度與加速度.



第 437 圖



第 438 圖

18. 第 438 圖上  $A, B$  相連結.  $A$  滑動於水平溝縫 (Slot)  $D$  間,  $B$  滑動於  $OC$  上之溝縫內.  $OC$  迴轉於  $O$  點周圍, 圖示  $\theta=30^\circ$ ,  $\omega=20$  rad./sec. 時, 求  $B$  沿  $OC$  方向之速度.

19. 第 439 圖上曲柄  $OA$  迴轉時,  $CD$  桿可搖動.  $\omega=90$  r. p. m., 圖示  $AB$  直交於  $OA$ ,  $OA$  之長為 15 cm., 求  $C$  桿之角速度及  $D$  之線速度.

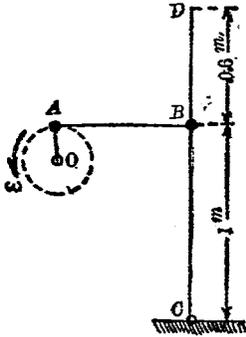
20. 若第 439 圖上曲柄  $OA$  之角速度為 6 rad./sec. 角加速度為 9 rad./sec<sup>2</sup>. 時, 求  $CD$  之角加速度. 并求  $D$  點之切線加速度與法線加速度. 假定  $OA$  之長為 15 cm.

21. 第 438 圖之  $OC$  若以一定之角速度  $20 \text{ r. p. m.}$  迴轉, 求  $\theta = 30^\circ$  時  $A$  之加速度.

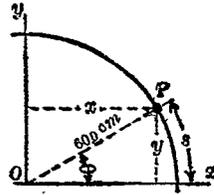
22. 一質點  $P$  自第 440 圖之圓上水平直徑之右端出發, 以  $s = 2t^3$  之關係, 運動於反時針方向, 求  $x, y$  軸向分速度之一般式, 并求  $t = 2$  時之軸向分速度.

23. 第 22 題中,  $x, y$  軸向分加速度之一般式若何?  $t = 2.4$  時, 此二分加速度之值各如何?

24. 第 22 題中切線分加速度與法線分加速度之一般式若何? 由此分加速度, 求  $t = 2.4$  時之加速度.



第 439 圖

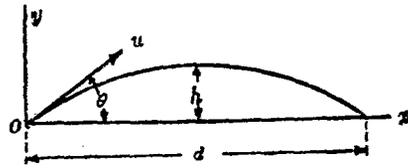


第 440 圖

130. 拋射體之運動 前數節所述之公式, 今可應用之以討論拋射體 (Projectile) 之運動. 拋射體中如彈丸者, 其運動複雜, 如受鎗管內膛旋紋之影響而生迴轉運動, 在空氣中又受風力, 空氣抵抗, 濕度等等關係, 其運動大異於理想上所假定

之情形。但本節假定拋射體進行於真空內而不生迴轉運動者，其運動可分成  $x, y$  二方向而討論之。

設拋射體之初速為  $u$ ，其方向與水平成  $\theta$  角。拋射處之點  $O$  取為原點。如第 441 圖。拋射體之加速度為常數，垂直向下。此加速度設以  $g$  示之，乃地球引力之加速度。拋射體當運動中除地球引力外不受他力之作用，而成自由落下體。故得



第 441 圖

$$a_x = \frac{v_x - u_x}{t} = 0,$$

即 
$$v_x = u_x = u \cos \theta \dots \dots \dots (1)$$

$$a_y = \frac{v_y - u_y}{t} = -g,$$

即 
$$v = u_y - gt = u \sin \theta - gt \dots \dots \dots (2)$$

此  $v_y$  與  $u_y$  向上者為正。

$t$  時間所經過之水平距離  $x$  為

$$x = v_x t = u \cos \theta \cdot t \dots \dots \dots (3)$$

$t$  時間內所經過之垂直距離  $y$  為平均速度與時間之乘積，即

$$y = \frac{u \sin \theta + (u \sin \theta - gt)}{2} \cdot t = u \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \dots \dots \dots (4)$$

由以上諸式可求拋射體在水平面上之射程 (Range), 最大高度, 及時間等。

(i) 拋射體到達射出處水平面上之時間 (Time of flight)  $t_r$ ——由 (4) 式使  $y=0$ , 得

$$y = u \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 0$$

$$\therefore t_r = \frac{2u \sin \theta}{g} \dots\dots\dots (5)$$

(ii) 射程 (Range)  $r$ ——由 (3) 式使  $t=t_r$ , 則

$$r = u \cos \theta \cdot \frac{2u \sin \theta}{g} = \frac{u^2 \sin 2\theta}{g} \dots\dots\dots (6)$$

(iii) 拋射體達最大高度之時間  $t_h$ ——因此時  $v_y=0$ , 得

$$v_y = v \sin \theta - g t = 0,$$

$$\therefore t_h = \frac{u \sin \theta}{g} \dots\dots\dots (7)$$

(iv) 最大高度  $h$ ——由 (4) 式使  $t=t_h$ , 得

$$h = u \sin \theta \cdot \frac{u \sin \theta}{g} - \frac{g}{2} \cdot \frac{u^2 \sin^2 \theta}{g^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(u \sin \theta)^2}{g} \dots\dots\dots (8)$$

拋射體所經過徑路稱曰彈道 (Trajectory). 其方程式可由 (3), (4) 兩式消去  $t$  而得即

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2u^2 \cos^2 \theta}.$$

故彈道為拋物線 (Parabola), 其軸在於垂直位置。

131. 等加速度直線運動 工程上有多種之例屬於等加

速度直線運動。例如自由落下體 (Freely falling body) 之運動，或列車離站後，受一定牽引力 (Draw-bar pull) 作用時之運動等是也。此時質點之變位速度，加速度，及時間等之關係可求之如下。設  $u$  為初速度， $v$  為末速度， $a$  為加速度， $t$  為  $u$  變成  $v$  時所需之時間，則由定義得

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v-u}{t} \dots\dots\dots (1)$$

或 
$$v = u + at \dots\dots\dots (2)$$

因速度均勻變化，故該時間內平均速度為  $\frac{u+v}{2}$ ，因之  $t$  時間內所經過之距離如下：

$$s = \frac{u+v}{2} t = \frac{u+u+at}{2} t = ut + \frac{1}{2} at^2 \dots\dots\dots (3)$$

由 (2) 與 (3) 消去  $t$ ，得

$$v^2 = u + 2as \dots\dots\dots (4)$$

若質點自靜止開始運動時，則上式中  $u=0$ ，故

$$a = \frac{v}{t}, \dots\dots\dots (1')$$

$$v = at, \dots\dots\dots (2')$$

$$s = \frac{1}{2} at^2, \dots\dots\dots (3')$$

$$v^2 = 2as, \dots\dots\dots (4')$$

若自由落下之物體，則  $a = g = 980 \text{ cm./sec}^2$ 。 (或  $32.2 \text{ ft./sec}^2$ .)

又對於曲線運動中之等速運動，即速之變化為均

勻時，則上列各式中以切線加速度  $a_t$  代  $a$  後，諸式仍可應用。

132. 等角加速度圓運動 工程上有多種之例屬於等角加速度圓運動。其角變位，角速度，角加速度，及時間之關係可求之如下。設  $\omega_0$  爲初角速度， $\omega$  爲末角速度，其變化所需之時間爲  $\Delta t$  或  $t$ ，角變位爲  $\theta$ ，角加速度爲  $\alpha$ ，則由定義得

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t} \dots\dots\dots (1)$$

或 
$$\omega = \omega_0 + \alpha t \dots\dots\dots (2)$$

又 
$$\theta = \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = \frac{\omega_0 + \omega_0 + \alpha t}{2} t = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots\dots\dots (3)$$

由 (2), (3) 消去  $t$ ，得

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta \dots\dots\dots (4)$$

若  $\omega_0 = 0$  時

$$\alpha = \frac{\omega}{t} \dots\dots\dots (1')$$

$$\omega = 2t \dots\dots\dots (2')$$

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \dots\dots\dots (3')$$

$$\omega^2 = 2\alpha\theta \dots\dots\dots (4')$$

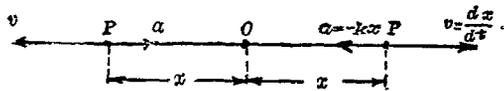
此等之式由第 131 節 (1), (2), (3), (4) 諸式中以  $u = \omega_0 r$ ,  $v = \omega r$ ,  $a_t = r\alpha$ ,  $s = r\theta$  代入時亦可導出之。

133. 單弦運動 不等加速度之直線運動中之一例，即爲單弦運動 (Simple harmonic motion)。單弦運動者乃一質點之

加速度與自原點  $O$  之距離成比例之直線運動,且加速度之方向常向於  $O$  點,以式表之如下:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \dots\dots\dots (1)$$

但  $k$  為正值之常數,負號之意義乃表示加速度與變位  $x$  之方向相反者.即  $x$  為正時  $a$  為負,  $x$  為負時  $a$  為正,其關係如第 442 圖所示.



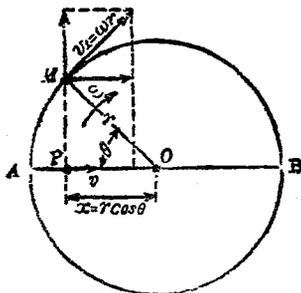
第 442 圖

單弦運動之一例為垂直懸於上端之彈簧,其下端附有一物體,該彈簧自由振動時,物體即成單弦運動.蒸汽機上之叉頭當連接桿較曲柄甚長時,其運動亦近於單弦運動.振動中之擺 (Pendulum) 若往復振動之弧甚小時,亦近於單弦運動.又質點以等速運動於圓周上時,該點在直徑上射影之運動亦為單弦運動.今將最後之例證明之.

第 443 圖中  $M$  為運動於圓周上之質點,其速  $v_1$  為一定,其角速度  $\omega$  亦為一定.設圓半徑為  $r$ ,  $M$  自  $A$  出發至圖示位置之時間設為  $t$ , 則

$$\theta = \omega t \dots\dots\dots (2)$$

$$x = r \cos \theta = r \cos \omega t \dots\dots\dots (3)$$



第 443 圖

故  $M$  點射影  $P$  之速度及加速度為

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega r \sin \omega t = -\omega y \dots\dots\dots (4)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 r \cos \omega t = -\omega^2 x \dots\dots\dots (5)$$

故  $P$  點之運動為單弦運動，而(1)式中之  $k$  即為  $\omega^2$ 。

上述由圓運動所導成之單弦運動，可說明一般單弦運動之性質。即射影  $P$  在  $A, B$  兩點時，速度為零，而加速度為最大。因之  $P$  點達徑路兩端後即反方向運動，而成週期運動 (Periodic motion)；且  $P$  點至徑路中央時，加速度為零，而速度最大。

單弦運動徑路之半即  $OA$  或  $OB$  之長，稱曰振幅 (Amplitude)。單位時間內質點在徑路上完全往復 (例如自  $O$  點出發向  $B$  運動，達  $B$  點後又向  $A$  運動，達  $A$  點後，再回復於  $O$  點) 之次數稱曰振動數 (Frequency)，即等於  $M$  點在圓周上單位時間內

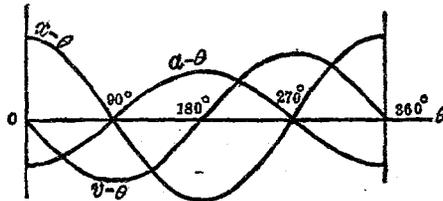
之週轉數。每一次完全往復所費之時間稱曰週期 (Period), 即等於  $M$  點在圓周上一週轉之時間。故週期  $T$  如下:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \dots\dots\dots (6)$$

設振動數為  $n$ , 則

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \dots\dots\dots (7)$$

由 (3), (4), (5) 三式則  $x, v, a$  對於  $\theta$  之關係可以適當縮尺示於第 444 圖。由圖可知  $v$  為零時,  $a$  之絕對值為最大,  $v$  之絕對值最大時,  $a$  之值為零。且  $a$  與變位  $x$  有反對符號, 而與  $x$  絕對值成比例。



第 444 圖

生單弦運動之裝置如第 413 圖所示。圖中曲柄以一定角速度迴轉,  $P$  滑動於溝縫中, 當曲柄迴轉時, 則活塞生水平方向上之單弦運動。

例 一機關車 (Locomotive) 之牽動輪 (Driver) 直徑 150 cm., 曲柄長 37.5 cm., 若機關車之速為每小時 48 km.. 求叉頭及活塞對於車臺之最大速度與最大加速度, 但假定連接桿甚長,

視叉頭之運動爲單弦運動。

解 
$$\omega = \frac{v}{r},$$

但 
$$v = \frac{4800000}{60 \times 60} = 1333.3 \text{ cm./sec.}, \quad r = 75 \text{ cm.}$$

$$\therefore \omega = 17.8 \text{ rad.}$$

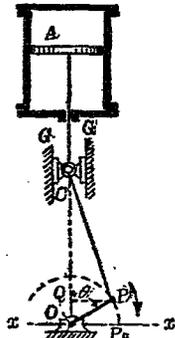
因之最大值之  $v$  爲  $\omega r$ , 即  $17.8 \times 37.5 = 667.5 \text{ cm./sec.}$ , 最大值之  $a$  爲  $\omega^2 r = 1188.1 \text{ cm./sec}^2$ .

134. 活塞之運動 第 445 圖中示一最簡單之蒸汽機,  $CP$  爲連接桿,  $OP$  爲曲柄,  $C$  爲叉頭,  $A$  爲活塞,  $AC$  爲活塞桿 (Piston rod). 曲柄迴轉時, 叉頭  $C$  僅能爲直線運動於導座 (Guide)  $G, G'$  間. 今就曲柄以等角速度迴轉時, 求叉頭與活塞及加速度之一般方程式. 設曲柄之長爲  $r$ , 連接桿之長爲  $l$ ,  $\frac{r}{l}$  爲  $c$ , 曲柄單位時間內迴轉數爲  $n$  (設爲一定), 曲柄之角速度爲  $\omega$ , 叉頭離最高位置之距離爲  $s$ , 角  $QOP$  爲  $\theta$ , 則  $s$  與  $\theta$  (或  $t$ ) 間有一定關係, 由此關係可求  $v$  (即  $\frac{ds}{dt}$ ). 叉頭在最高位置時, 其至  $O$  點之距離爲  $l+r$ , 故叉頭在任何位置時, 則

$$s = (l+r) - CQ \mp OQ$$

曲柄  $OP$  在  $Ox$  上方時, 上之  $\mp OQ$  中取負號, 在下方時取正號. 但

$$CQ = \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \theta} = l\sqrt{1 - c^2 \sin^2 \theta}$$



第 445 圖

又  $OQ = \pm r \cos \theta$

$$\therefore s = (l+r) - l\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} - r \cos \theta \dots\dots\dots(1)$$

因  $\theta = \omega t = 2\pi n t$ , 且  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ , 故由 (1) 式求  $\frac{ds}{dt}$ , 得

$$v = r\omega \left( \sin \theta + \frac{c \sin 2\theta}{2\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta}} \right) \dots\dots\dots(2)$$

上式中  $\omega$  爲一定, 求  $\frac{dv}{dt}$ , 得

$$a = r\omega^2 \left( \cos \theta + \frac{c \cos 2\theta + c^3 \sin^4 \theta}{\sqrt{(1-c^2 \sin^2 \theta)^3}} \right) \dots\dots\dots(3)$$

(2),(3) 兩式爲叉頭及活塞之速度與加速度之一般方程式, 其近似式可求之如下。

因 (1) 式中

$$\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} = 1 - \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{8} c^4 \sin^4 \theta - \dots\dots\dots,$$

但通常  $c$  小於  $\frac{1}{3}$ , 故展開式中第三項以下可略去之, 因之得

$$l\sqrt{1-c^2 \sin^2 \theta} = l \left( 1 - \frac{1}{2} c^2 \sin^2 \theta \right) = l \left( 1 - \frac{1}{4} c^2 + \frac{1}{4} c^2 \cos 2\theta \right)$$

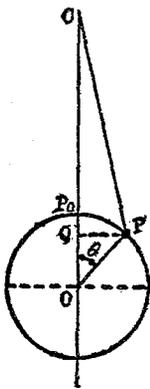
故  $s = r(1 - \cos \theta) + \frac{1}{4} cr(1 - \cos 2\theta) \dots\dots\dots(4)$

由此得  $v = r\omega \left( \sin \theta + \frac{1}{2} c \sin 2\theta \right) \dots\dots\dots(5)$

$$a = r\omega^2 (\cos \theta + c \cos 2\theta) \dots\dots\dots(6)$$

(3)式與近似式(6)可比較之如下表,但表中設  $c = \frac{1}{3.5}$ .

$\theta$	由(3)式所得正確值 $a$	由(6)式所得近似值 $a$
$0^\circ$	$+1.286 r\omega^2$	$+1.286 r\omega^2$
$30^\circ$	$+1.015$	$+1.009$
$60^\circ$	$+0.357$	$+0.357$
$90^\circ$	$-0.298$	$-0.286$
$120^\circ$	$-0.643$	$-0.643$
$150^\circ$	$-0.717$	$-0.724$
$180^\circ$	$-0.714$	$-0.714$



第 446 圖

第 446 圖中  $P$  以等角速度運動於圓周上,則其直徑上射影  $Q$  點之運動當為單弦運動。 $Q$  點自  $P_0$  之距離設為  $z$ , 則

$$z = r(1 - \cos \theta) \dots \dots \dots (7)$$

對於  $t$  取微分, 得

$$v = r\omega \sin \theta \dots \dots \dots (8)$$

$$a = r\omega^2 \cos \theta \dots \dots \dots (9)$$

將(1)與(7);(2)與(8);(3)與(9)各相互比較之,則  $c \left( = \frac{r}{l} \right)$  愈小時愈接近。故連接桿較曲柄

甚長時,又頭及活塞之運動可視為單弦運動。

135. 不等加速度運動 不等加速度運動之一例已述於前兩節。此種運動各有其特性,但變位,速度,加速度及時間等

之關係皆相同對於不等加速度直線運動,有下列各式

$$v = \frac{ds}{dt} \dots\dots\dots (1)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \dots\dots\dots (2)$$

由上二式消去  $t$ , 得

$$a ds = v dv \dots\dots\dots (3)$$

由(1)式積分之,得

$$\int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

或  $s_2 - s_1 = \Delta s = \int_{t_1}^{t_2} v dt \dots\dots\dots (4)$

又  $\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} ds$

$$t_2 - t_1 = \Delta t = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{v} ds \dots\dots\dots (5)$$

由(2)式積分之,得

$$\int_{v_1}^{v_2} dv = \int_{t_1}^{t_2} a dt$$

或  $v_2 - v_1 = \Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a dt \dots\dots\dots (6)$

又  $\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{a} dv \dots\dots\dots (7)$

或  $t_2 - t_1 = \Delta t = \int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{a} dv \dots\dots\dots (8)$

以上諸式若以切線加速度  $a_t$  代  $a$ , 則對於曲線運動仍可應用. 因  $a_t = \frac{dv}{dt}$  故也. 又對於曲線運動之某方向上分運動 (Component of motion), 以上諸式亦可應用. 但  $s, v$  及  $a$  均須以該方向之分變位, 分速度及分加速度, 等代入之. 例如

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_x dx = v_x dv_x \text{ 等}$$

例 1 一質點沿曲線上運動, 其  $a_t$  與  $t$  之關係為  $a_t = 10t + 5$ , 若  $t = 4$  秒時  $v = 10$  cm./sec., 問  $t = 7$  秒時  $v$  之值若何?

解 
$$a_t = \frac{dv}{dt} = 10t + 5$$

$$\therefore \Delta v = \int_{t_1}^{t_2} a_t dt = \int_4^7 (10t + 5) dt = [5t^2 + 5t]_4^7 = 180 \text{ cm./sec.}$$

故  $t = 7$  秒時  $v$  之值為

$$10 + 180 = 190 \text{ cm./sec.}$$

別法

$$v = \int a_t dt = \int (10t + 5) dt = 5t^2 + 5t + C$$

積分常數  $C$  可如下決定之. 因  $t = 4$  時  $v = 10$ , 代入上式得

$$C = -90,$$

因之  $t = 7$  時,  $v_7 = 5 \times 7^2 + 5 \times 7 - 90 = 190$  cm./sec.

例 2 一質點自拋物線  $y^2 = x$  之頂點上由靜止出發, 沿拋物線運動, 有  $x = \frac{t^2}{4}$  之關係, 但  $x, y$  以 cm. 示之,  $t$  以秒示之. 求 2 秒末速度與加速度之大小.

解  $t=2$  秒時

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t^2}{4}\right) = \frac{t}{2} = 1 \text{ cm./sec.}$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ cm./sec.}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ cm./sec.}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

故  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1.12 \text{ cm./sec}$

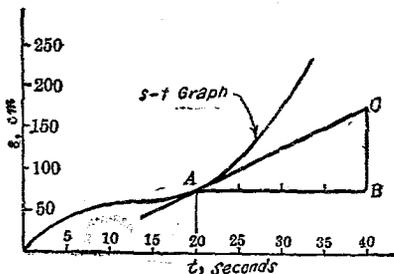
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0} = 0.5 \text{ cm./sec}$$

136. 變位,速度,及加速度之圖解。隨時隨刻記錄運動之狀態,例如每分或每秒記錄變位量,作成表,或作成曲線,由此可求速度及加速度,例如一汽車自某站出發,沿直線方向進行得下列之表。

$s(m)$	0	20	56	105	164	229	296	363	423	489	542
$t(sec)$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$s_2 - s_1$	20	36	49	59	65	67	67	64	61	53	
$t_2 - t_1$	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	
$v = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$	0	4.0	7.2	9.8	11.8	13	13.4	13.4	13	12.2	10.6
$v_2 - v_1$	4.0	3.2	2.6	2.0	1.2	0.4	0	-0.4	-0.8	-1.6	
$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$	0.8	0.64	0.52	0.4	0.24	0.08	0	-0.08	-0.16	-0.32	

上表中由每5秒間變位之變化,可求每5秒間平均速度與平均加速度之變化,此變化以曲線示之,更為明瞭.

第122節所述之線速度  $v = \frac{ds}{dt}$  之式中若  $s$  可以  $t$  之函數表示時,則由計算可求  $v$ , 若  $s$  不能以  $t$  之函數表示時, 或  $s$  與  $t$  之關係, 不能以一個之方程式表示時, 則速度常可由距離時間曲線 (Distance-time graph) (即  $s-t$  曲線) 求出之. 例如第



第 447 圖

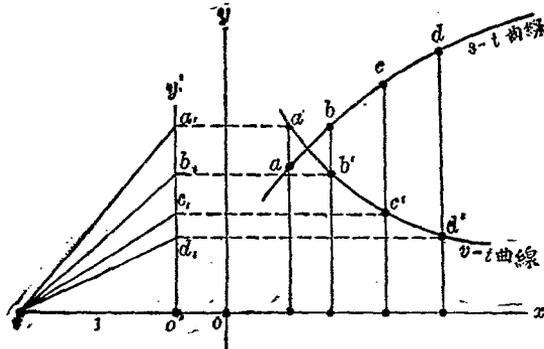
447 圖中水平軸上示時間, 垂直軸上示變位, 即得  $s-t$  曲線. 此曲線上之斜度 (Slope) 即為  $\frac{ds}{dt}$ , 故即表示  $v$ , 例如一質點沿直線運動, 其  $s-t$  曲線即如第 447 圖所示, 第 20 秒末之速度為  $A$  點上之斜度. 由  $ABC$  三角形得

$$A \text{ 點上斜度} = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{垂直方向 2 單位長}}{\text{水平方向 4 單位長}}$$

但垂直軸上每單位長示 50 cm., 水平軸上每單位長示 5 秒. 故  $A$  點上速度為

$$\frac{2 \times 50}{4 \times 5} = 5 \text{ cm./sec.}$$

由距離時間曲線可作速度時間曲線 (Speed-time graph) (即  $v-t$  曲線), 第 448 圖中設  $x$  軸上表示時間,  $y$  軸上表示變位之距離,

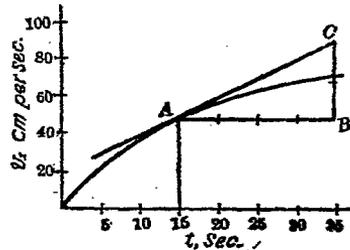


第 448 圖

$abcd$  曲線為  $s-t$  曲線。x 軸上任意取  $o'$  點作  $o'y'$  軸平行於  $oy$  軸，又於 x 軸上取  $o'z$  等於單位時間。由  $s-t$  曲線上任意一點  $b$  引切線作  $zb_1$  平行於該切線，與  $o'y'$  交於  $b_1$ ，則  $o'b_1$  即表示與  $b$  點相應之速度。故由  $b_1$  引水平線交  $b'$  處，垂直線於  $b'$  即為  $v-t$  曲線上之一點。同樣得  $v-t$  曲線上  $a', c', d'$  等點，連成之得  $v-t$  曲線。

直線運動時之加速度  $a = \frac{dv}{dt}$ ，或曲線運動時之切線加速

度  $a_t = \frac{dv}{dt}$  之式中，若用  $v-t$  曲線，可由圖上決定  $a$  或  $a_t$  之值。設第 449 圖之曲線為  $v-t$  曲線，因該曲線上之斜度為  $\frac{dv}{dt}$ ，故此斜度即表示該瞬間之加速度。



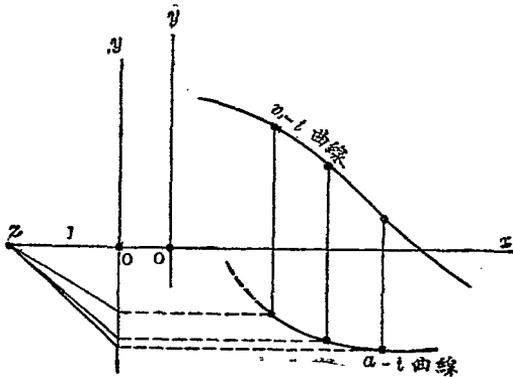
第 449 圖

今設一質點在圓周上運

動,其  $v-t$  曲線如第 449 圖上所示則第 15 秒末之切線加速度如下:

$$a_t = A \text{ 點上斜度} = \frac{2 \times 20}{4 \times 5} = 2 \text{ cm./sec}^2$$

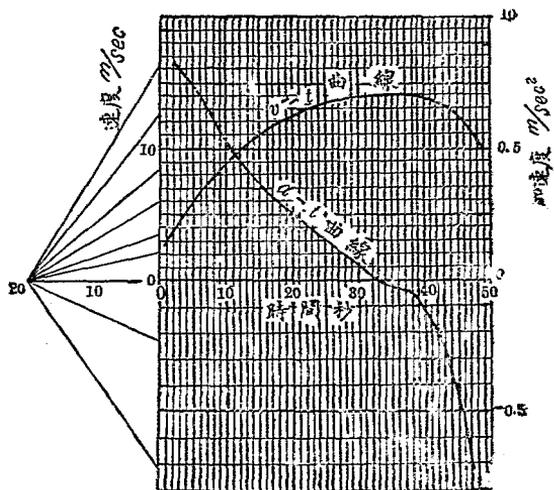
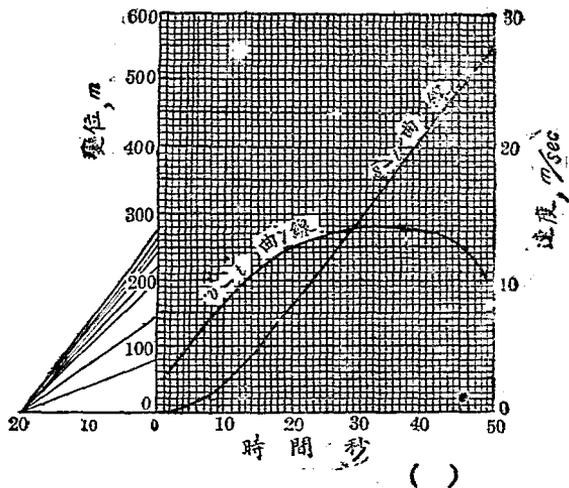
由速度時間曲線可作加速度時間曲線 (Acceleration-time graph)(即  $a-t$  曲線),其作圖法全與第 448 圖相同,茲示於第 450 圖.第 451 圖 (a) 與 (b) 示一作圖之實例.



第 450 圖

要之加速度之對於速度關係及速度對於變位之關係全相同,可總括之得下之諸定理.

- (i) 速度為零時,變位達其終端.
- (ii) 加速度為零時,速度為極大或極小.
- (iii) 變位曲線上昇時,表示運動方向之無變化,其下降時,表示運動方向之有變化.



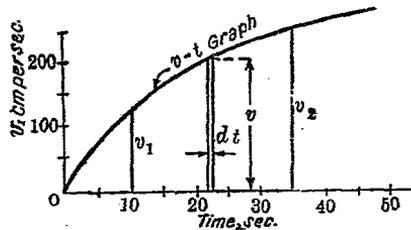
(iv) 速度曲線上昇時,表示有加速度,其下降表示有減速度.

第135節(4),(6)兩式,若 $v$ 與 $t$ 及 $a$ 與 $t$ 之關係較複雜時,亦可由 $v-t$ 曲線及 $a-t$ 曲線於圖上解之.其加速度在直線運動時為總加速度,在曲線運動時為切線加速度.第452圖為一直線運動之 $v-t$ 曲線.此曲線下在 $v_1, v_2$ 間之面積為

$$\int_{t_1}^{t_2} v dt,$$

由第135節(4)式得

$$s_2 - s_1 = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$



第452圖

故 $v-t$ 曲線下方之面積,即以適當縮尺表示質點於 $t_2-t_1$ 之時間內所經過之距離.

例如一質點沿直線運動,有第452圖之 $v-t$ 曲線,其垂直軸尺度每1 cm. = 100 cm./sec. 水平軸尺度每1 cm. = 10 sec. 曲線下在 $t=10$ 至 $t=35$ 間面積為4.8 sq. cm., 則

$$1 \text{ sq. cm.} = 100 \text{ cm./sec.} \times 10 \text{ sec.} = 1000 \text{ cm.},$$

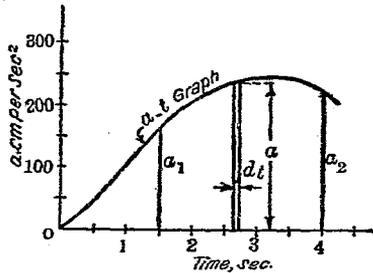
故10秒至35秒間質點經過距離為 $4.8 \times 1000 = 4800 \text{ cm.}$

第 453 圖爲一直線運動之  $a-t$  曲線. 此曲線下在  $a_1$  至  $a_2$  間之面積爲

$$\int_{t_1}^{t_2} a dt$$

但由第 135 節 (6) 式得

$$v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a dt$$



第 453 圖

故  $a-t$  曲線下方之面積即以適當縮尺表示質點於  $t_2-t_1$  時間內速之變化

例如一質點沿直線運動,有第 453 圖之  $a-t$  曲線. 其垂直軸縮尺爲 1 cm. = 10 cm./sec<sup>2</sup>., 水平軸縮尺爲 1 cm. = 1 sec., 曲線下方在  $t=1.5$  至  $t=4$  間之面積爲 5.2 sq. cm. 則

$$1 \text{ sq. cm.} = 100 \text{ cm./sec}^2. \times 1 \text{ sec.} = 100 \text{ cm./sec.}$$

故 1.5 秒至 4 秒間之速度變化爲

$$5.2 \times 100 = 520 \text{ cm./sec.},$$

若  $t=1.5$  秒之初速爲 50 cm./sec., 則 3.5 秒時之末速爲

$$570 \text{ cm./sec.}$$

**137. 相對運動** 前述各節中之運動均對於一固定點或數個固定軸而言。地球上及其上一切物體與質點均在於運動中，但便利上假定地球為固定，通過地球上任意一點之數個之軸可視為固定，凡一質點對於地球上固定點之運動稱曰絕對運動 (Absolute motion)。一質點對於地球上運動中之他點所起之運動稱曰相對運動 (Relative motion)。絕對運動即為對於地球之相對運動。

討論二質點之運動時，即須求出一質點對於他質點之相對運動。A, B 兩質點 (假定運動於同一平面上) 間相對運動與絕對運動間之關係，有下之定理。

**定理** A 點之絕對變位，絕對速度，或絕對加速度等於 A 對於 B 之相對變位，相對速度，或相對加速度與 B 點之絕對變位，絕對速度，或絕對加速度之向量和 (Vector sum)。

設  $S_A$  為 A 點之絕對變位， $S_B$  為 B 之絕對變位， $S_{\frac{A}{B}}$  為 A 對於 B 之相對變位；同樣  $v_A, v_B$  各為 A 及 B 之絕對速度； $a_A, a_B$  各為 A 及 B 之絕對加速度； $v_{\frac{A}{B}}, a_{\frac{A}{B}}$  各為 A 對於 B 之相對速度與相對加速度。則上之定理可以式表示之如下：

$$S_A = S_{\frac{A}{B}} + S_B \quad \text{或} \quad S_{\frac{A}{B}} = S_A - S_B$$

$$v_A = v_{\frac{A}{B}} + v_B \quad \text{或} \quad v_{\frac{A}{B}} = v_A - v_B$$

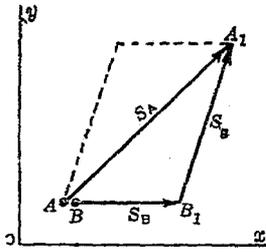
$$a_A = a_{\frac{A}{B}} + a_B \quad \text{或} \quad a_{\frac{A}{B}} = a_A - a_B$$

茲就 (i) 相對變位，(ii) 相對速度，及 (iii) 相對加速度各分別證之如下：

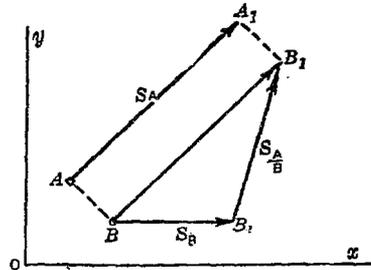
(i) 相對變位 例如第 454 圖上  $A, B$  二質點對於  $x, y$  軸有同一位置.  $A$  之絕對變位  $S_A$  設為  $\overrightarrow{AA_1}$ ,  $B$  之絕對變位設為  $\overrightarrow{BB_1}$ , 則  $A$  對於  $B$  之變位為  $\overrightarrow{B_1A_1}$  由圖上即易知

$$S_A = S_{\frac{A}{B}} + S_B \quad \text{或} \quad S_{\frac{A}{B}} = S_A - S_B$$

若  $A, B$  不在同一位置如第 455 圖, 則由圖可知變位之大小與方向仍可由上之定理定之.



第 454 圖



第 455 圖

**例 1** 第 456 圖中有兩岸相平行之河, 水流速度每小時 4 km., 今有一輪船自一岸邊與該岸成直角方向出發, 每小時速度 6 km., 設河寬為 1 km., 求該輪達對岸時之絕對變位.

**解** 設  $B$  表示輪船,  $W$  表示水流. 當輪船出發時, 設水與船相接觸, 則

$$S_B = S_W + S_{\frac{B}{W}}$$

輪船橫斷該河流之時間內, 水之變位為

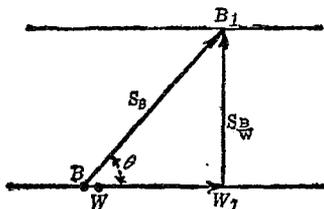
$$S_W = \overrightarrow{WW_1} = \frac{1}{6} \times 4 = \frac{2}{3} \text{ km.}$$

輪船達對岸時，對於水之變位為

$$\overrightarrow{S_B} = \overrightarrow{W_1 B_1} = 1 \text{ km}$$

$$\therefore S_B = 1 \rightarrow \frac{2}{3} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1.2 \text{ km.}$$

$$\tan \theta = \frac{S_B}{S_W} = \frac{3}{2}, \quad \therefore \theta = 56^\circ 20'$$



第 456 圖

(ii) 相對速度 第 457 圖中  $A$  與  $B$  為任意運動中之二質點(假定在同一平面內運動).  $A$  之絕對速度  $v_A$  設為  $\overrightarrow{AA_1}$ ,  $B$  之絕對速度  $v_B$  設為  $\overrightarrow{BB_1}$ , 今假定各質點上付與以  $-v_B$  之速度, 則  $B$  點將不動而靜止, 此時  $A$  點之合成速度當為  $A$  對於  $B$  之相對速度. 由圖上易知

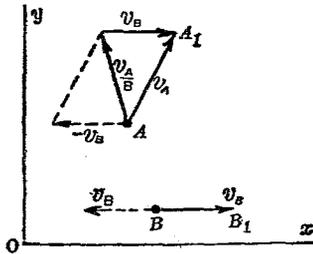
$$v_a = v_A \rightarrow v_B$$

上之證明乃假定各質點上加以相等速度時, 無影響於各點間之相對速度. 此假定  $B$  根據於動力學上之原理, 即二質點上所有共同之運動不影響於其相對運動.

由上之方程式,可得

$$v_{\frac{A}{B}} = v_A - v_B$$

即二質點間相對速度等於其絕對速度之向量差 (Vector difference).



第 457 圖

**例 2** 第 458 圖之機構上,  $A$  為滑動於搖桿上之物,  $B$  為搖桿  $O_1BM$  上之一點, 在圖示之瞬間內  $A$  與  $B$  適相一致.  $OO_1$  為  $50 \text{ cm.}$ ,  $\theta$  為  $30^\circ$ , 若  $\omega = 20 \text{ r. p. m.}$ ,  $r = 15 \text{ cm.}$ , 試求  $B$  之絕對速度  $v_B$  及  $A$  對於  $B$  之相對速度  $v_{\frac{A}{B}}$ .

**解** 因  $A$  運動於圓弧上, 有等角加速度, 故其速度為

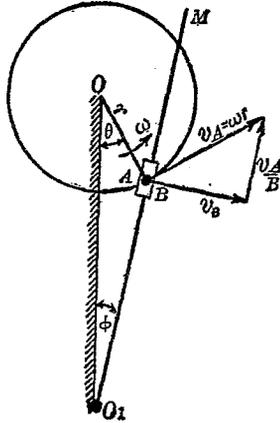
$$v_A = \omega r = \frac{20 \times 2\pi}{60} \times 15 = 31.4 \text{ cm./sec.}$$

其方向與半徑  $r$  成直交.  $B$  之絕對速度之方向與  $O_1BM$  成直交, 其大小為未知由

$$v_A = v_{\frac{A}{B}} + v_B$$

作向量之圖自圖上得

$$v_{\frac{A}{B}} = 21 \text{ cm./sec.} \quad v_B = 24 \text{ cm./sec.}$$



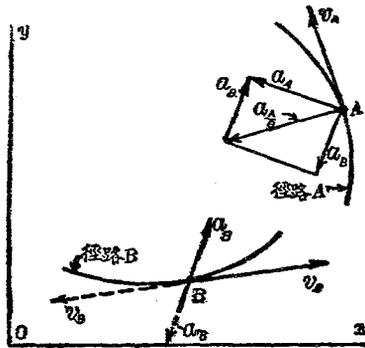
第 458 圖

(iii) 相對加速度 今假定二質點上除原有加速度外同付與以相等之其他加速度時,二點間相對加速度不變.此假定與相對速度時之假定相同.第 459 圖上設有 A, B 二質點,各沿其徑路運動. 設於 A, B 二點上各加以與 B 點上原有速度相等及向之速度  $-v_B$  (圖中 A 點上未示之), 且又於二點上同時加以與 B 點原有加速度  $a_B$  相等反向之加速度  $-a_B$ , 如是則 A 對於 B 之相對運動仍無變化. 但 B 點上加以  $-v_B$  及  $-a_B$  後, 該點即歸靜止, 故 A 對於 B 之相對加速度即等於 A 點之

絕對加速度. 但  $A$  點之加速度為  $a_A$  及  $-a_B$  之向量和, 故由圖上得

$$a_A = a_{\frac{A}{B}} + a_B \quad \text{或} \quad a_{\frac{A}{B}} = a_A - a_B$$

故一點對於他點之相對加速度等於該兩點上絕對加速度之向量差.



第 459 圖

例 3 二摩擦輪相互接觸如第 460 圖所示, 以等角速度運轉. 設  $A$  為大輪上一點,  $B$  為小輪上一點. 若

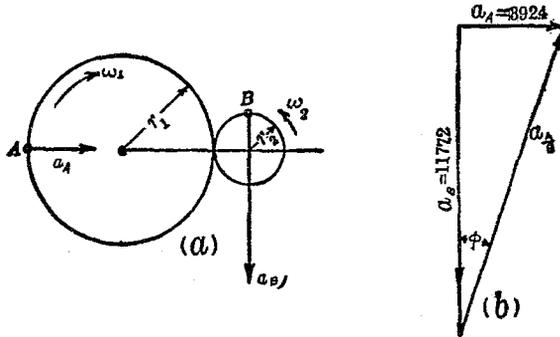
$$\omega_1 = 40 \text{ r. p. m.}, \quad r_1 = 22.5 \text{ cm.}, \quad r_2 = 7.5 \text{ cm.},$$

求  $A$  對於  $B$  之加速度之大小及方向.

解 因

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2,$$

$$\therefore \omega_2 = \frac{\omega_1 r_1}{r_2} = \frac{40 \times 22.5}{7.5} = 120 \text{ r. p. m.}$$



第 460 圖

$$a_A = \omega_1^2 r_1 = \left(\frac{40 \times 2\pi}{60}\right)^2 \times 22.5 = 392.4 \text{ cm./sec}^2.$$

$$a_B = \omega_2^2 r_2 = \left(\frac{120 \times 2\pi}{60}\right)^2 \times 7.5 = 1177.2 \text{ cm./sec}^2.$$

$$\therefore a_{\frac{A}{B}} = a_A \rightarrow a_B = \sqrt{(392.4)^2 + (1177.2)^2} = 1241 \text{ cm./sec}^2.$$

$$\tan \phi = \frac{a_A}{a_B} = \frac{392.4}{1177.2} = 0.33$$

$$\therefore \phi = 18^\circ 25'.$$

133. 徑向及橫向分加速度 加速度除  $x$  及  $y$  軸方向分加速度與切線及法線分加速度以外，尚有徑向與橫向分加速度 (Radial and transverse components of acceleration)，有時便於應用。任取一點為極點，沿動徑之方向或平行於動徑之方向，稱曰徑向 (Radial direction)，與動徑成直交之方向，稱曰橫向 (Transverse direction)。



(4) 加速度  $v_T\omega = \omega^2\rho = \frac{v_T^2}{\rho}$  與  $v_T$  成直交, 乃  $v_T$  之方向對於時間之變化率.

故徑向與橫向加速度之總量為

$$a_R = \frac{dv_R}{dt} - v_T\omega = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\omega^2$$

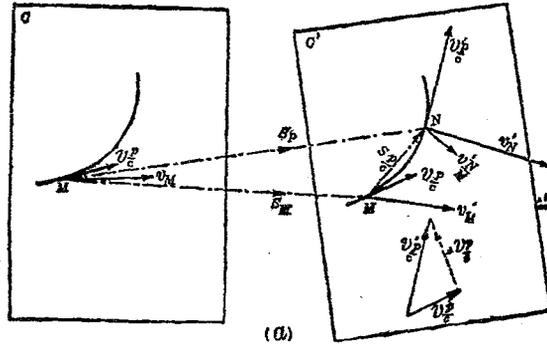
$$a_T = v_R\omega + (v_R\omega + \rho\alpha) = 2v_R\omega + \rho\alpha = 2\omega\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d\omega}{dt}$$

139. **高薩里氏定律** 物體內一質點之運動可視為該質點沿某徑路上之運動及該徑路之運動二者所合成.

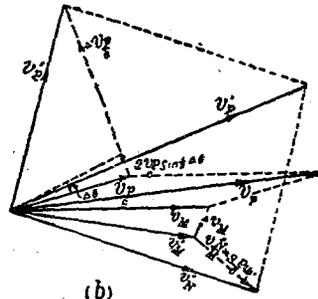
一質點若沿進行運動之徑路上運動時, 則該點之加速度為其對於徑路之相對加速度及該瞬間內該質點所佔徑路上一點之加速度(因徑路為進行運動故即為徑路上任意一點之加速度)二者之向量和. 上述結果由第 137 節之式可明, 由本節末尾亦可證明之.

今設一質點沿某徑路運動而該徑路有迴轉運動時, 則該質點之絕對加速度為三個分加速度之向量和. 此質點之絕對總加速度與三個分加速度間之關係即為 **高薩里氏定律** (Coriolis' law). 茲求之如下.

第 462 圖 (a) 上  $C$  為硬紙片, 其上繪一曲線即為徑路. 今有一質點  $P$  在紙片上沿徑路運動, 而紙片  $C$  在書頁面上為平面運動. 某瞬間開始時紙片在  $C$  之位置, 質點  $P$  佔徑路上之  $M$  點,  $P$  對於  $C$  之相對速度設為  $v_{P/C}$ , 紙片上  $M$  點之絕對速度設



(a)



(b)

第 462 圖

為  $v_M$ ，在該瞬間之末設紙片  $C$  變為  $C'$  之位置，而質點  $P$  佔有徑路上  $N$  點之位置。此時  $P$  對於  $C$  之相對速度設為  $v''_P$ ， $N$  點之絕對速度設為  $v'_N$ ，由第 137 節，設瞬間之初  $P$  點絕對速度為  $v_P$ ，瞬間之末  $P$  點絕對速度為  $v'_P$ ，則

$$v'_P = v''_P + v'_C \dots\dots\dots(1)$$

$$v_P' = v_{\frac{P}{C}}' \rightarrow v_N' \dots\dots\dots (2)$$

相對速度自  $v_{\frac{P}{C}}$  變為  $v_{\frac{P}{C}}'$  時，其變化有二種原因。(i) 假定紙片不動，質點沿徑路自  $M$  點移至  $N$  點時所生之速度變化  $\Delta v_{\frac{P}{C}}$ ，(ii) 因紙片在平面上迴轉  $\Delta\theta$  角，若質點靜止於  $M$  點時，在  $C$  處之  $v_{\frac{P}{C}}$  與在  $C'$  處之  $v_{\frac{P}{C}}$  其大小雖同而方向亦有變化。此後者之變化量由第 462 圖 (b) 可知其為  $2v_{\frac{P}{C}} \sin \frac{1}{2}\Delta\theta$ ，故

$$v_{\frac{P}{C}}' = v_{\frac{P}{C}} \rightarrow \Delta v_{\frac{P}{C}} \rightarrow 2v_{\frac{P}{C}} \sin \frac{1}{2}\Delta\theta \dots\dots\dots (3)$$

該瞬間末  $M$  點之絕對速度設為  $v_M'$ ， $N$  對於  $M$  點之相對速度設為  $v_{\frac{N}{M}}'$ ，則

$$v_N' = v_M' \rightarrow v_{\frac{N}{M}}'$$

但  $v_M' = v_M \rightarrow \Delta v_M$ ， $v_{\frac{N}{M}}' = s_P \omega'$ ，式中  $\omega'$  為紙片  $C$  在瞬間末之角速度。故

$$v_N' = v_M \rightarrow \Delta v_M \rightarrow s_P \omega' \dots\dots\dots (4)$$

以上各速度及速度變化均詳示於第 462 圖 (a), (b) 兩圖。由 (3), (4) 兩式代入於 (2) 得

$$v_P' = v_{\frac{P}{C}} \rightarrow \Delta v_{\frac{P}{C}} \rightarrow 2v_{\frac{P}{C}} \sin \frac{1}{2}\Delta\theta \rightarrow v_M \rightarrow \Delta v_M \rightarrow s_P \omega' \dots\dots (5)$$

由 (5) 式減去 (1) 式得

$$\Delta v_P = \Delta v_{\frac{P}{C}} \rightarrow 2v_{\frac{P}{C}} \sin \frac{1}{2}\Delta\theta \rightarrow \Delta v_M \rightarrow s_P \omega' \dots\dots\dots (6)$$

故  $P$  點之絕對加速度設為  $a_P$ , 則

$$\begin{aligned} a_P &= \lim \frac{\Delta v_P}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta v_P}{\frac{\sigma}{\Delta t}} \rightarrow 2 \lim \frac{v_P \sin \frac{1}{2} \Delta \theta}{\Delta t} \rightarrow \lim \frac{\Delta v_M}{\Delta t} \\ &\rightarrow \lim \frac{s_P \omega'}{\Delta t} \end{aligned}$$

$$\text{但} \quad \lim \frac{\Delta v_P}{\Delta t} = a_P ;$$

$$2 \lim \frac{v_P \sin \frac{1}{2} \Delta \theta}{\Delta t} = v_P \lim \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = v_P \omega ;$$

$$\lim \frac{\Delta v_M}{\Delta t} = a_M ;$$

$$\lim \frac{s_P \omega'}{\Delta t} = \lim \frac{s_P}{\Delta t} \lim \omega' = v_P \omega$$

$$\therefore \quad a_P = a_P \rightarrow a_M \rightarrow 2v_P \omega \dots \dots \dots (7)$$

速度變化  $2v_P \sin \frac{1}{2} \Delta \theta$  之方向在極限時, 與  $M$  點處  $v_P$  成直交, 紙片迴轉方向若與徑路彎曲同方向時該速度變化之方向向於徑路之曲度中心側, 若異方向時, 該速度變化之方向向於徑路之曲度中心之反對側。速度變化  $v_M'$  即  $s_P \omega'$  之方向向於  $N$  點處與  $P$  點之相對的徑路成直交, 其極限時於  $M$  點處與該徑路成直交, 故亦與  $M$  點處  $v_P$  成直交。此速度變化為  $N$  點對於  $M$  點之相對速度, 即固定  $M$  點後使紙片迴轉時所生之  $N$  點上速度。故其指向全與速度變化  $2v_P \sin \frac{1}{2} \Delta \theta$  之指向

相同。此二種速度變化；其大小既相同而方向又相一致，故其向量和等於  $2v_p\omega$ 。（極限位置時第 462 圖 (b) 上之  $2v_p \sin \frac{1}{2}\Delta\theta$  及  $s_p\omega'$  二向線當全相一致）。

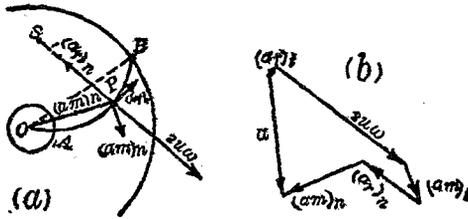
上之 (7) 式又可述之如下。一質點運動於一徑路上，同時該徑路迴轉時，則質點之絕對加速度為下列三項分加速度之向量和。即 (i) 荷徑路固定時質點當有之加速度，(ii) 荷質點固定於徑路上，當徑路迴轉時質點所有之加速度，及 (iii) 所謂複成補加速度 (Compound supplementary acceleration) 之  $2v_p\omega$  等三項是也。此即謂之高遼里氏定律。

當徑路無迴轉運動時  $\omega=0$ ，即徑路為進行運動時，

$$a_p = a_p' + a_y$$

此與第 137 節所述之式相一致。

例 第 463 圖 (a) 上示一離心唧筒 (Centrifugal pump) 之一翼 (Vane),  $P$  為水之質點。今設某瞬間時翼之迴轉角速度為時針方向  $10 \text{ rad./sec}$ ，角加速度為時針方向  $50 \text{ rad./sec}^2$ ， $P$  點離軸心  $O$  為  $30 \text{ cm}$ ，求  $P$  點之加速度，但水質點沿翼之切線相對



第 463 圖

速度爲  $300 \text{ cm./sec.}$ , 其切線相對加速度爲  $300 \text{ cm./sec}^2$ ,  $OB$  與水平成  $45^\circ$ , 其長爲  $45 \text{ cm.}$ ,  $OA$  爲  $7.5 \text{ cm.}$ ,  $OP$  爲  $30 \text{ cm.}$ , 弧  $AFB$  之半徑爲  $33 \text{ cm.}$

解 由高遼里氏定律設  $P$  點絕對加速度爲  $a$ , 對於翼之相對加速度爲  $a_r$ , 對於翼之相對速度爲  $u$ , 則

$$a = a_r + a_m + 2u\omega$$

$a_r$  與  $a_m$  各分成切線與法線加速度, 最爲便利. 故得

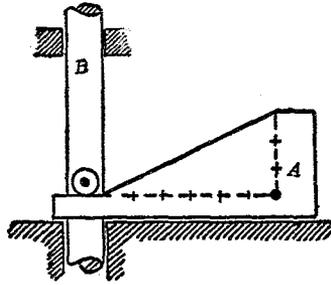
$$\begin{aligned} a &= (a_r)_t + (a_r)_n + (a_m)_t + (a_m)_n + 2u\omega \\ &= 300 + \frac{300^2}{33} + 50 \times 30 + 30 \times 10^2 + 2 \times 300 \times 10 \\ &= 300 + 2727 + 1500 + 3000 + 6000 \end{aligned}$$

由第 463 圖 (b) 之作圖, 得  $4350 \text{ cm./sec}^2$ .

### 習 題 23.

1. 高  $400 \text{ m.}$  之高丘上一砲, 仰角爲  $30^\circ$ , 以初速  $230 \text{ m./sec}$  射出一彈, 求丘麓水平面上之射程
2. 昇降機之最大准許速度 (Maximum allowable speed) 爲  $200 \text{ m./min.}$ , 若於  $4 \text{ m.}$  距離間以等加速度達此速度, 求其加速度.
3. 一列車以等加速度開始運動, 於五分間達  $60 \text{ mi./hr.}$  之速. 以此速經過若干時間後, 加以制動器 (Brake), 以等減速度經四分間停止. 若全部經過距離爲  $10$  英里, 求其所需總時間.

4. 第464圖中  $A$  以等加速度  $12.5 \text{ cm./sec}^2$  向左運動, 當 (a) 輻輳  $C$  與  $A$  接觸之前, (b)  $C$  與  $A$  適開始接觸之瞬間, (c)  $C$  與  $A$  正相接觸之時, 求垂直桿  $B$  之各加速度.



第464圖

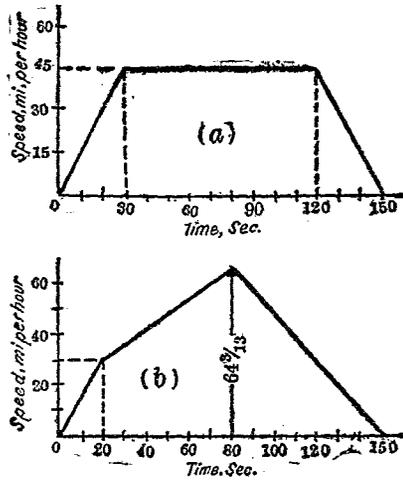
5. 一輪自靜止開始迴轉, 其邊緣上一點之角速度於 6 秒間以等角加速度增至  $400 \text{ r. p. m.}$ , 以此速度經過若干時間後, 加以制動器, 以等角減速度於 5 秒間停止, 若總迴轉數為 3200, 求其所需總時間.

6. 一質點為單弦運動, 其振幅為  $30 \text{ cm.}$  週期為 2 秒, 求最大速度與最大加速度.

7. 一質點為單弦運動, 其最大速度為  $4 \text{ m./sec.}$  週期為  $\frac{1}{3}$  秒, 求其振幅與最大加速度.

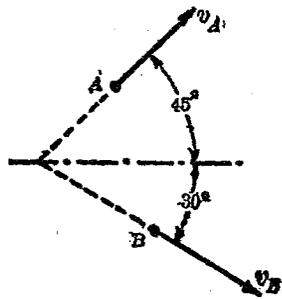
8. 二車站間有二直線平行軌道,  $A, B$  兩列車各自靜止出發於 150 秒間自一站至他站.  $A$  之速度時間曲線示於第 465 圖 (a),  $B$  之速度時間曲線示於第 465 圖 (b), 求作各列車之

加速度時間曲線并求兩車站間距離之英里數。



第 465 圖

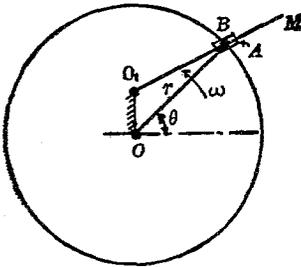
9. 第 466 圖示列車 A 之速度  $v_A = 40$  mi./hr., 列車 B 之速度  $v_B = 60$  mi./hr., 其方向如圖所示求 B 對於 A 之相對速度。



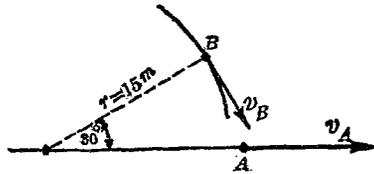
第 466 圖

10. 第 467 圖上  $A$  之長方形體以等角速度  $\omega = 30$  r. p. m. 運動於  $O$  圓周上,  $B$  為桿  $O_1BM$  上一點, 圖示之瞬間時,  $A$  與  $B$  適相疊合. 若  $r = OA = 22.5$  cm.,  $OO_1 = 7.5$  cm.,  $\theta = 45^\circ$  時, 求  $B$  之絕對速度.

11. 一汽車  $A$  駛於一直線形道路上, 於第 468 圖之位置時, 速之增加為  $100$  m./min./sec., 同時間內他汽車  $B$  沿圓形路上駛行, 其速之增加為  $2$  m./sec<sup>2</sup>, 圖示位置時, 若  $v_B = 14$  km./hr., 圓弧半徑為  $15$  m., 求  $A$  對於  $B$  之加速度.



第 467 圖



第 468 圖

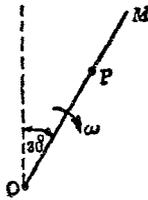
12. 第 469 圖上  $P$  點沿  $OM$  桿運動, 而  $OM$  桿迴轉於  $O$  點之周. 圖示位置時,  $OP = 2$  m.,  $P$  點沿桿上速度為  $1.8$  m./sec. 而向於  $M$ , 其速之增加率為  $1.8$  m./sec<sup>2</sup>, 桿之角速度為時針方向  $2$  rad./sec., 其減少率為  $1.5$  rad./sec<sup>2</sup>, 求  $P$  點之加速度. (附註: 用  $1$  cm. =  $\frac{1}{4}$  m.,  $1$  cm. =  $0.9$  m./sec<sup>2</sup>. 之縮尺取  $20$  cm.  $\times$   $30$  cm. 大小之紙, 以長邊為底邊, 作圖於左半部. 將  $P$  點各分加速度依縮尺比例示於圖上, 用作圖法將各分加速度合成之. 依  $(a_m)_n$ ,  $(a_m)_t$ ,

$a_r$  及  $2u\omega$  之順序合成之)

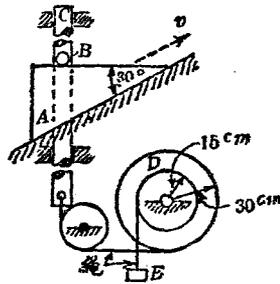
13. 一沙袋自上昇中之氣球投下,氣球之速度為  $1.2 \text{ m./sec.}$ , 該袋於 6 秒間達地面求該袋初投下時氣球離地之高度.

14. 一石投於井中,其音於 2 秒後聞之.假定音速為  $400 \text{ m./sec.}$ , 求水面之深.

15. 第 470 圖上於某瞬間內  $A$  之速度為  $10 \text{ cm./sec.}$ , 其等加速度為  $13 \text{ cm./sec}^2$ , 求  $C$  之線加速度,圓筒  $D$  之角加速度,及  $E$  之線加速度.



第 469 圖



第 470 圖

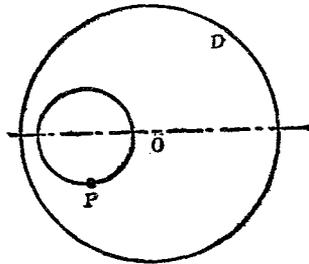
16. 自傾斜角  $\beta$  之斜面上一點射出一彈其初速為  $v$ , 射出之角度, 在斜面上沿最大斜度之直交面內與水平成  $\alpha$  角. 求證沿斜面上昇方向之射程為

$$\frac{2v^2 \cdot \cos \alpha \sin (\alpha - \beta)}{g \cos^2 \beta}$$

17. 第 470 圖中假定  $C$  之速度為向上  $1 \text{ m./sec.}$ , 其加速度為向上  $1 \text{ m./sec}^2$ , 求  $A$  對於  $E$  之相對加速度.

18. 一輪之直徑為  $1\text{ m}$ . 迴轉於水平直線軌道上, 假定不起滑動. 其中心速度在某瞬間內為向左  $1\text{ m./sec.}$ , 中心加速度為向右  $6\text{ m./sec}^2$ , 求水平直徑左端一點之速度與加速度. 該輪中心垂直上方, 在中心與圓周間半徑中點之速度與加速度各若何?

19. 第 471 圖中水平圓板之直徑為  $1.5\text{ m}$ , 其面上有一溝, 成圓形軌道, 直徑為  $0.5\text{ m}$ . 其中心離圓板之中心有  $0.3\text{ m}$ . 圓板以反時針方向 (自紙面前方視之) 迴轉於  $O$  點上垂直軸之周圍, 其角加速度為  $15\text{ rad./sec}^2$ . 另有一小球以等角速度, 沿圓溝軌道以時針方向為等速圓運動, 每分鐘迴轉  $80$  次. 當圓板  $D$  之角速度達  $10\text{ rad./sec.}$  時, 圓板與球 (即  $P$ ) 在圖示位置, 求該瞬間時球之絕對速度與絕對加速度.



第 471 圖

20. 直徑  $4\text{ m}$ . 之圓輪以  $60\text{ r.p.m.}$  之角速度迴轉於其水平中心軸之周圍. 該輪面有一直線自中心向圓周. 今有一質點沿該直線上自中心向外運動. 當質點達輪緣上一點時, 其相

對速度爲向外  $2\text{ m./sec.}$ , 相對加速度爲向內  $6\text{ m./sec}^2$ , 求該瞬間時質點之絕對速度及絕對加速度.

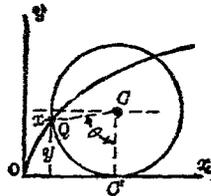
21. 第 472 圖中迴轉於直線上之輪, 其周上一  $Q$  點所畫成之徑路曲線, 稱曰擺線 (Cycloid). 設  $v$  爲輪之中心  $C$  之速度,  $a$  爲  $C$  之加速度,  $R$  爲輪之半徑. 圖示位置時, 求  $Q$  點速度於  $x$  與  $y$  軸向之分速度公式. 并求  $Q$  點  $a_x$   $a_y$  之公式.

22. 一汽車發動機, 其衝程之長度 (Length of the stroke) 爲  $6\text{ cm.}$ , 連接桿之長爲  $20\text{ cm.}$ , 求其活塞之速度與加速度. 但曲柄軸以等角速度迴轉, 其迴轉數爲  $3000\text{ r. p. m.}$ , 曲柄適與水平成  $90^\circ$  之角, 用精密之式以計算之.

23. 第 21 題中試用近似式以計算之. 又曲柄與水平成  $180^\circ$  時, 試用精密之式與近似式各計算之.

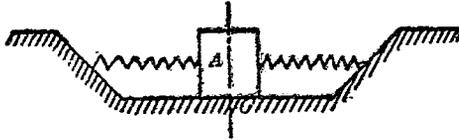
24. 第 21 題之活塞若有最大速度時, 曲柄與水平所成之角度當若何? 其最大速度若何? 試用近似式計算之.

25. 第 21 題之活塞若有最大加速度時, 曲柄與水平所成之角若何? 其最大加速度幾何? 試用近似式以計算之.



第 472 圖

26. 第473圖之 $A$ 支於平滑水平面上,兩側有螺線彈簧(Helical spring),將 $A$ 向左推動30 cm.後,使 $A$ 自靜止運動,成單弦運動,以 $O$ 為其中心.彈簧之剛性(Stiffness)與 $A$ 之重量使 $A$ 之運動定律為 $a = -96s$ ,但 $a$ 以 $\text{cm./sec}^2$ , $s$ 以 $\text{cm.}$ 表示之.試求 $A$ 之最大速度及週期,併求其最大加速度.



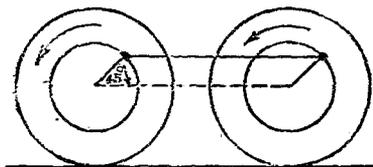
第473圖

## 第十章 剛體之運動

140. 概說 前章論質點之運動及二質點間之相對運動，但剛體之運動在工程學上亦甚重要。若剛體之大小較其運動範圍為甚小時，則剛體內各質點可視為有同一之運動而即可視之為質點之運動，前章諸公式即可應用。但一般剛體內各質點有相異之運動。本章內分進行運動(Translation)，迴轉運動(Rotation)，平面運動(Plane motion)及三次空間內之運動(Three dimensional motion)等四項分述之。

141. 進行運動 剛體運動時，其內任意一直線不變其方向時，即任意一直線保持其最初之方向而不生迴轉時，該剛體之運動稱曰進行運動(Translation)，故任何瞬間，剛體內各點均沿平行徑路運動有共同之速度與加速度。若進行運動使剛體內各質點沿曲線運動者，稱曰曲線進行運動(Curvilinear translation)，例如第474圖上列車進行於直線軌道時，連結一側兩牽動輪(Driving wheel)上之平行桿(Parallel or side rod)之運動是也。若使剛體內各質點沿直線運動者，稱曰直線進行運動(Rectilinear translation)。剛體可有等加速度運動及變加速度運動，故進行運動之物體內各質點可有前章所論之各

種運動。因剛體內各質點於任何瞬間皆有同一運動，故剛體之變位，速度及加速度可以其內任意一點之變位，速度及加速度表示之。



第 474 圖

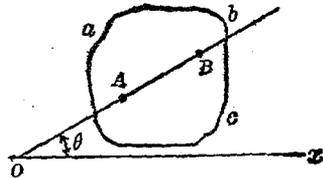
142. 迴轉運動 剛體內或剛體之延長部份內一直線保持其空間之固定位置，而該直線外各點以該直線上一點為中心循圓形徑路而運動時，該剛體之運動稱為迴轉運動 (Rotation)。此固定直線稱曰迴轉軸 (Axis of rotation)。物體重心所運動之平面，稱曰迴轉平面 (Plane of rotation)。迴轉軸與迴轉平面之交點稱曰迴轉中心 (Center of rotation)。平行於迴轉軸各直線上諸點，其運動皆相同。故一直線在迴轉平面上之射影點，其運動可代表該直線上諸點之運動。剛體自身之運動亦可以該物體在迴轉平面上射影之運動代表之。

剛體迴轉運動時，其內各點之線變位，線速度及線加速度皆相異。但各點之角變位，角速度與角加速度則相同。故迴轉中剛體之運動可以物體內任意一點之角運動 (Angular motation) 代表之。

143. 平面運動 剛體運動時,其內任意一點離一固定平面之距離,在任何瞬間皆相等者,該運動稱曰平面運動 (Plane motion). 物體內各點皆運動於一平面上,但物體重心所運動之平面,特稱之曰剛體之運動平面 (Plane of motion). 例如機關車 (Locomotive) 沿直線軌道上運動時,其輪為平面運動,進行運動未必為平面運動,但一固定軸周圍之迴轉運動常為平面運動.

平面運動之物體,與運動平面相直交之一直線上諸點,其運動皆相同一,該線在運動平面上之射影即表示該線上各點之運動. 故剛體在運動平面上射影之運動,即可表示該物體自身之運動.

144. 剛體之角變位,角速度及角加速度 為平面運動中之剛體,其角變位者,乃運動平面上,物體內任一直線所畫出之角度是也. 該平面上任何一直線在同一時間內所畫出之角度皆相等. 第475圖上  $abc$  示剛體在運動平面上之射影,  $AB$  為該射影內一直線,  $ox$  為固定之基準線 (Reference line).  $AB$  與  $ox$  所成之角設為  $\theta$ , 此  $\theta$  角由  $ox$  依反時針方向出發者為正,依時針方向出發者為負. 當物體運動時在某時間內  $\theta$  若由  $\theta_1$  變成  $\theta_2$  時,則物體之角變位為



第 475 圖

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

平面運動中之剛體，其角變位變化對於時間之比率為角速度，角速度變化對於時間之比率為角加速度。

平面運動中物體之角變位，角速度及角加速度與物體對於一固定軸之迴轉運動時，所有角變位，角速度及角加速度，其意義全相同，故平面運動中物體之角速度  $\omega$  與角加速度  $a$  之式如下：

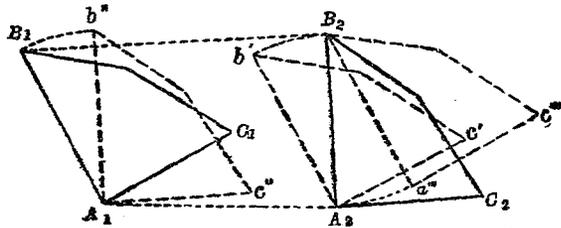
$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \quad a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

**145. 平面運動之分解** 剛體之平面運動可分解成爲進行運動與迴轉運動，有下之定理。

**定理** 剛體之平面運動在任何瞬間內爲該物體之純粹迴轉運動與進行運動二者所合成。迴轉運動乃對於該物體內任意一點  $B$  上直交於運動平面之軸而運動，其角速度與角加速度皆等於該瞬間內物體之所有者。進行運動使物體內各點之線速度與線加速度在該瞬間內與  $B$  點上所有者全相同。

上定理中所述  $B$  點稱曰基點 (Base point)。通過  $B$  點而直交於運動平面上之軸稱曰基軸 (Base axis)。例如第 476 圖上物體  $ABC$  之初時位置設爲  $A_1B_1C_1$ ，最後之位置設爲  $A_2B_2C_2$ ；由進行運動  $A_1B_1C_1$  可移至  $A_2b'c'$ 。其次再由迴轉運動， $A_2b'c'$  對於  $A_2$  點迴轉而達  $A_2B_2C_2$  之位置。又或先由迴轉運動， $A_1B_1C_1$  對於  $A_1$  點迴轉而至  $A_1b''c''$  之位置，其次再由進行運動移至

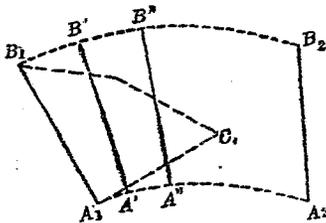
$A_2B_2C_2$  之位置. 以上之運動乃取  $A$  點為迴轉運動之基點, 但  
 又可取  $B$  點為基點, 其結果全相同. 即先由進行運動將  $A_1B_1C_1$   
 移至  $a''B_2c''$  之位置, 次再對於  $B_2$  點迴轉而成  $A_2B_2C_2$  之位置



第 476 圖

進行運動之量因所取基點之不同而相異, 例如第 476 圖  
 上取  $A$  為基點時, 其進行為  $A_1A_2$ , 但取  $B$  為基點時則進行為  
 $B_1B_2$ ; 然迴轉運動之量不因基點之變動而有異, 即  $A$  為基點  
 時之角  $b'A_2B_2$  與  $B$  為基點時之角  $a''B_2A_2$  相等.

若  $ABC$  物體自  $A_1B_1C_1$  位置變位至最後之  $A_2B_2C_2$  位置時,



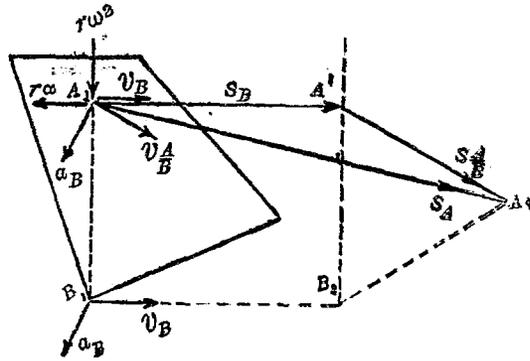
第 477 圖

其間設連續經過  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$   
 等位置 (第 477 圖). 此時中間之一  
 切位置皆可以小量之進行運動  
 及迴轉運動合成之. 若取任意一  
 點為基點則平面內任何運動皆  
 可視為基點之進行運動及對於

基點之迴轉運動二者所合成

146. 剛體內任意一點之運動 由前節所述,平面運動中之物體內任意一點之變位速度及加速度各由進行運動及迴轉運動兩種分變位分速度及分加速度所合成. 設第 478 圖上之物體內  $A$  為任意一點,  $B$  為基點,  $A$  自  $A_1$  位置移至  $A_2$  位置時,  $A$  點由進行運動而生之變位為  $S_B$  即  $\overrightarrow{A_1A'}$ , 此  $S_B$  即與  $B$  點之變位  $\overrightarrow{B_1B_2}$  相等;  $A$  點由迴轉運動所生對於  $B$  點之變位為  $S_A$ , 即  $\overrightarrow{A'A_2}$ ; 合成變位  $S_A$  可以下式表之.

$$S_A = S_B + S_A$$



第 478 圖

今假定  $B_1B_2$  與  $A'A_2$  之變位甚小時,在圖示  $A_1B_1$  位置之瞬間內,設  $v_B$  為  $B$  點之速度,  $\omega$  為物體之角速度,則  $A$  點上由進行運動之分速度亦為  $v_B$ , 與  $B$  點上之速度相平行而相等,  $A$  點上由迴轉運動之分速度為  $r\omega$  (但  $r=AB$  之長), 其方向與  $AB$

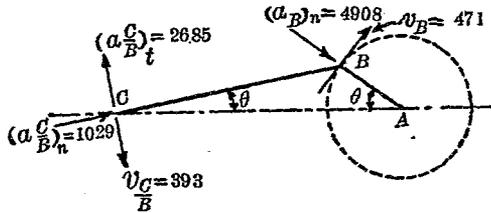
成直交,其指向因 $\omega$ 之方向而定故圖示瞬間內 $A$ 點之合成速度 $v_A$ 爲

$$v_A = v_B \rightarrow v_B = \omega r \rightarrow v_B$$

又設 $a_B$ 爲 $B$ 點之加速度, $\alpha$ 爲物體之角加速度,則 $A$ 點上因進行運動之加速度亦爲 $a_B$ ,與 $B$ 點上之加速度相平行而相等; $A$ 點上由迴轉運動之加速度可以二分加速度表示之一爲法線加速度等於 $r\omega^2$ ,沿 $AB$ 之方向,其指向常向於 $B$ 點,一爲切線加速度等於 $r\alpha$ ,與 $AB$ 成直交,其指向因角加速度之方向而定故圖示瞬間內 $A$ 點之合成加速度爲

$$a_A = a_B \rightarrow a_B = r\omega^2 \rightarrow r\alpha \rightarrow a_B$$

例 第479圖上 $AB$ 爲曲柄, $BC$ 爲連接桿。 $AB$ 長45 cm., $BC$ 長150 cm.,當曲柄之等角速度爲時針方向100 r. p. m.,且連接桿與曲柄在圖示位置即 $\theta = 35^\circ$ 時,求叉頭 $C$ 之速度與加速度。



第479圖

解 取 $B$ 點爲基點,其速度設爲 $v_B$ ,其法線加速度設爲 $(a_B)_n$ ,其切線加速度爲零, $AB$ 之角速度設爲 $\omega'$ ;又設 $C$ 點對於 $B$ 點由迴轉運動所生之速度爲 $v_{C/B}$ ,由迴轉運動所起之切

線加速度設爲  $(a_C)_t$ , 其法線加速度設爲  $(a_C)_n$ ,  $BC$  桿之角速度設爲  $\omega$ , 其角加速度設爲  $\alpha$ ; 各速度與加速度之向線均示於圖上, 但  $(a_C)_{B/t}$  之指向爲假定者, 其他之指向則易明. 由圖得

$$\phi = \sin^{-1}(0.3 \sin 35^\circ) = 9^\circ 54'$$

$$\text{因 } \frac{d\theta}{dt} = \omega', \quad \phi = \sin^{-1}(0.3 \sin \theta),$$

$$\text{故得 } \omega = \frac{d\phi}{dt} = \left( \frac{0.3 \sin \theta}{\sqrt{1 - (0.3 \sin \theta)^2}} \right) \omega' = 2.62 \text{ rad./sec.}$$

又因  $\omega'$  爲常數, 故得

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{d\omega}{dt} \\ &= \left( \frac{-0.3 \sin \theta \sqrt{1 - (0.3 \sin \theta)^2} + 0.027 \sin \theta \cos^2 \theta / \sqrt{1 - (0.3 \sin \theta)^2}}{1 - (0.3 \sin \theta)^2} \right) (\omega')^2 \\ &= -17.9 \text{ rad./sec}^2. \end{aligned}$$

故連接桿對於  $B$  點迴轉於反時針方向, 而角加速度爲時針方向, 因之  $(a_C)_{B/t}$  之指向當如圖所假定者.

$$\text{又 } v_C = 150 \times 2.62 = 393 \text{ cm./sec.},$$

$$(a_C)_{B/t} = 150 \times 17.9 = 2685 \text{ cm./sec}^2.,$$

$$(a_C)_n = 150 \times (2.62)^2 = 1029 \text{ cm./sec}^2.,$$

$$v_B = 45 \times \frac{100}{60} \times 2\pi = 471 \text{ cm./sec.},$$

$$(a_B)_n = 45 \times \left( \frac{100}{60} \times 2\pi \right)^2 = 4908 \text{ cm./sec}^2.$$

$C$  之實有速度  $v_C$  由  $v_B$  及  $v_C$  之合成而得, 今分之爲水平與垂直二分速度表示之.

$$(v_C)_x = 393 \sin 9^\circ 54' + 471 \sin 35^\circ = 335 \text{ cm./sec.}$$

$$(v_C)_y = -393 \cos 9^\circ 54' + 471 \cos 35^\circ = 0$$

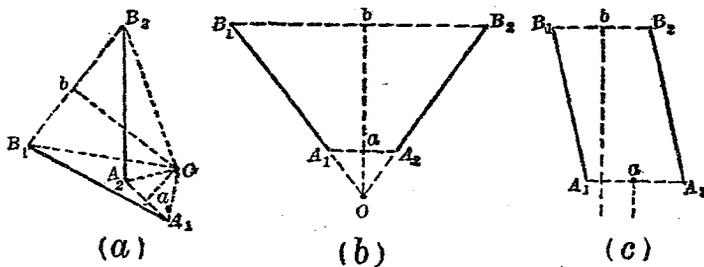
$C$ 之實有加速度 $a_C$ 同樣可以水平及垂直二分加速度表示之。

$$\begin{aligned} (a_C)_x &= 4908 \cos 35^\circ - 2685 \sin 9^\circ 54' + 1029 \cos 9^\circ 54' \\ &= 4576 \text{ cm./sec}^2. \end{aligned}$$

$$(a_C)_y = -4908 \sin 35^\circ + 2685 \cos 9^\circ 54' + 1029 \sin 9^\circ 54' = 0$$

故圖示位置之叉頭 $C$ 之速度為向右338 cm./sec.,其加速度為向右4576 cm./sec<sup>2</sup>.

147. 平面運動可視為對於一動軸之迴轉運動 瞬間中心 任何平面運動可視為單純之迴轉運動.第480圖(a)上物



第480圖

體 $ABC$ 自 $A_1B_1C_1$ 移至 $A_2B_2C_2$ 之位置時, $A$ 點自 $A_1$ 移至 $A_2$ ,可視為物體以 $A_1A_2$ 之二等分直交線 $Oa$ 上任意一點為中心迴轉而成.又 $B$ 自 $B_1$ 移至 $B_2$ ,可視為物體以 $B_1B_2$ 之二等分直交線 $Ob$ 上任意一點為中心迴轉而成.若將 $Oa$ 與 $Ob$ 之交點 $O$ 為

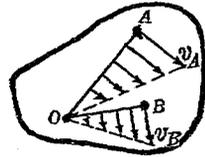
$A, B$  之迴轉中心,則迴轉角度  $A_1OA_2$  及  $B_1OB_2$  相等故  $AB$  直線 (或  $ABC$  物體) 可由一次之迴轉運動自  $A_1B_1$  位置移至  $A_2B_2$  位置.

如第 480 圖 (b) 上,兩二等分線  $Oa$  與  $Ob$  相疊合時,則  $A_1B_1$  與  $A_2B_2$  各延長線交點在於  $ab$  之延長線上,此交點  $O$  即為  $AB$  之迴轉中心. 又如第 480 圖 (c) 則兩二等分線相平行,其交點即迴轉中心在於無窮遠處,而  $AB$  之變位為進行運動. 故平面上之進行運動可視為對於無窮遠處中心之迴轉運動.

$AB$  沿平面曲線運動於平面上,設自  $A_1B_1$  位置連續變位至他位置  $A_2B_2$  (第 477 圖),此時可視為自  $A_1B_1$  連續迴轉至  $A'E'$ ,  $A''B''$  等中間位置,最後達  $A_2B_2$  之位置. 各微小迴轉運動皆有其一定之迴轉中心  $O', O''$  等,若取極多數之中間位置,可得極多數之迴轉中心,而連續之迴轉運動可愈近於實際之運動. 其極限時,實際之平面運動完全可由迴轉運動構成. 而各迴轉中心成一連續之曲線. 故任何之平面運動可視為連續之迴轉運動,其迴轉中心亦連續運動. 此各瞬間之迴轉中心  $O$  稱曰物體平面運動時該瞬間或該位置之瞬間中心 (Instantaneous center), 通過瞬間中心而與運動平面成直交之軸稱曰瞬間軸 (Instantaneous axis).

對於固定軸之迴轉運動,物體內各點之速度,與該點至迴轉軸之距離成正比例. 且速度方向與該距離成直交. 第 481 圖上  $A, B$  為運動平面上物體內任意二點,設  $v_A$  為  $A$  點速度,

$v_B$  爲  $B$  點速度, 自  $A$  點作速度向線  $v_A$ , 自  $B$  點作速度向線  $v_B$ , 再自  $A$  作  $v_A$  之直交線, 自  $B$  作  $v_B$  之直交線, 此二直交線設交於  $O$ , 物體若非靜止則  $OA$  上任意一點之速度必與  $OA$  直交, 同樣  $OB$  上任意一點之速度必與  $OB$  直交, 因之  $OA$  與  $OB$  之交點  $O$  必靜止, 蓋因該點不能運動於兩種方向故也。故圖示瞬間內, 物體苟非靜止, 必迴轉於  $O$  點之周圍。由



第 481 圖

$$v_A = v_O + \omega \times OA,$$

但  $\omega$  爲物體之角速度, 同一瞬間內對於物體各點皆相等。由此可知  $A, B$  兩點速度之比等於各該點至瞬間中心距離之比, 即

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{\omega \cdot \overline{OA}}{\omega \cdot \overline{OB}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

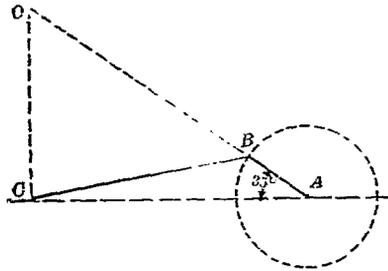
注意 瞬間中心爲零速度之中心, 非爲零加速度之中心。若物體迴轉於固定軸之周圍時, 則該固定軸即爲瞬間軸, 此時其速度與加速度皆爲零。但一般之平面運動, 瞬間中心在物體內, 在空間內均變其位置。瞬間中心之速度雖爲零, 但此時之零速度仍有變化, 故加速度不爲零。即

$$a_A = a_O + \alpha \times OA$$

上式中  $A$  爲物體內任意一點,  $O$  爲瞬間中心,  $a_O$  不爲零。

例1 第146節之例中,求叉頭C之速度.

解 茲示圖解法如下. 第482圖中B點之速度沿曲柄銷釘周圍上之切線方向,故連接桿BC之瞬間中心在於法線OB之上.又C點沿水平運動,其速度為水平,故瞬間中心在AC之直交線OC之上.故OB與OC之交點O即為連接桿BC之

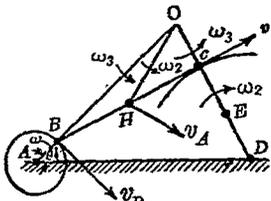


第482圖

瞬間中心.由作圖得  $OB=180$  cm.,  $OC=128$  cm., 因B點之速度為  $471$  cm./sec., 故連接桿之角速度為  $\frac{471}{OB}=2.62$  rad./sec., 因之得C點之速為

$$OC \times 2.62 = 335 \text{ cm./sec.}$$

例2 第483圖示AB,BC,CD,AD四鏈桿(Link),  $AB=15$  cm.,



第483圖

$BC=90$  cm.,  $AD=120$  cm.,  $DC=60$  cm.,  $\theta=45^\circ$ , 求BC桿之瞬間中心.若AB以等角速度運動,其  $\omega=10$  rad./sec., 求DC之角速度  $\omega_2$ , 及BC之角速度  $\omega_3$ , 併求BC中點H之線速度  $v_H$ .

解 瞬間中心易知其為DC與AB二延長線之交點O, 由圖得  $OB=93.2$  cm.,  $OC=28.5$  cm.,  $OH=51.5$  cm.

又  $v_B = \omega_1 \times AB = 10 \times 15 = 150$  cm./sec.,

故  $BO$  上之  $B$  點其角速度為

$$\omega_3 = \frac{v_B}{OB} = \frac{150}{93.2} = 1.61 \text{ rad./sec.}$$

又  $v_C = \omega_3 \times OC = 1.61 \times 28.5 = 45.9 \text{ cm./sec.}$

$$v_H = \omega_3 \times OH = 1.61 \times 51.5 = 82.9 \text{ cm./sec.}$$

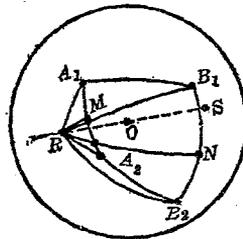
$$\therefore \omega_2 = \frac{v_C}{DC} = \frac{45.9}{60} = 0.77 \text{ rad./sec.}$$

**148. 球面運動** 球面運動 (Spherical motion) 者物體內僅有一點為固定時之運動也。物體內除固定點以外其他各點均運動於一球面上。

凡球面運動可視為對於一通過定點之動軸之迴轉運動。有下之定理。

**定理** 物體之球面變位可視為對於通過物體內固定點而固定於空間一軸之迴轉運動所成。

**證** 決定物體之位置時可取物體內不與固定點成一直線之任意二點。第 484 圖上，設  $O$  為固定點， $A, B$  為物體內上述之二點，與  $O$  點之距離相等。當物體任何運動時， $A$  與  $B$  運動於同一球面上。今設  $OA_1B_1$  為物體之最初位置， $OA_2B_2$  為最後位置。設  $A_1B_1$  與  $A_2B_2$  二線為球面大圓之弧，因  $A, B$  為剛體內二點，故此二弧當全相等。 $A_1A_2$  與  $B_1B_2$  皆為大圓



第 484 圖

之弧,  $M$  與  $N$  爲平分此二弧之點,  $MR$  與  $NR$  各爲直交於  $A_1A_2$  及  $B_1B_2$  之二大圓, 此二大圓一般不相疊合而交於  $R$  與  $S$  兩點, 直徑  $ROS$  卽爲所求之軸, 圖示之變位卽由對於此軸之迴轉運動所成. 今證之如下. 設  $A_1R, A_2R, B_1R, B_2R$ , 均爲大圓弧, 因  $A_1A_2R$  與  $B_1B_2R$  爲二等邊三角形, 故  $A_1R = A_2R, B_1R = B_2R$ , 且  $A_1B_1 = A_2B_2$ , 因之兩三角形  $A_1B_1R$  與  $A_2B_2R$  相等, 而角  $A_1RB_1$  等於角  $A_2RB_2$ , 由此得

$$A_1RA_2 = A_1RB_2 - A_2RB_2 = A_1RB_2 - A_1RB_1 = B_1RB_2$$

故  $A_1R$  與  $B_1R$  對於  $RS$  軸各迴轉  $A_1RA_2$  角時, 可使  $A$  點自  $A_1$  變位至  $A_2$ ,  $B$  點自  $B_1$  變位至  $B_2$ , 故對於圖示之變位, 本定理已得證明.

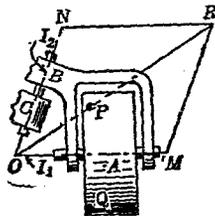
今就物體內  $A, B$  兩點各自  $A_1$  變位至  $A_2$ ,  $B_1$  變位至  $B_2$  之途中, 所經過之實有連續球面運動研究之. 設  $A$  點之途中數個位置爲  $A', A''$  等,  $B$  點之相應數個位置爲  $B', B''$  等, 則由前之證明可知  $AB$  自  $A_1B_1$  變位至  $A'B'$ , 又自  $A'B'$  變位至  $A''B''$ , 更自  $A''B''$  變位至  $A'''B'''$  等時, 均可由對於固定軸  $R'OS', R''OS'', R'''OS'''$  等之迴轉運動而生成. 此等中途位置  $A'B', A''B''$  等愈多時, 而迴轉運動之次數亦等於此中途位置之數時, 則此等連續之迴轉運動愈可近於實有之球面運動. 故其極限. 凡任何球面運動均可視爲對於通過定點  $O$  而連續轉動於物體及空間內之動軸周圍之連續迴轉運動所成. 此迴轉運動之軸稱曰各該瞬間內之瞬間迴轉軸 (Instantaneous axis of

rotation).

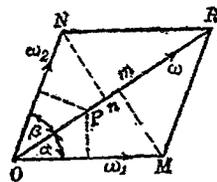
149. 球面運動之角速度 球面運動在任何瞬間內,物體均對於瞬間軸有迴轉運動,某瞬間內迴轉運動之角速度稱為該瞬間時物體球面運動之角速度.以 $\omega$ 表示之.物體內一點在某瞬間時之線速度等於該瞬間之角速度與該點至瞬間軸直交距離即半徑之乘積,其方向與通過半徑及瞬間軸之平面成直交.

角速度 $\omega$ 以瞬間軸上一向線表示之,其長度用適當縮尺表示 $\omega$ ,其指向依下之規約表示迴轉方向,即右旋螺釘迴轉方向,與 $\omega$ 之方向相一致時,向線指向須與螺釘之進行方向,相一致.

角速度可合成或分解之.第485圖中物體A迴轉於 $l_1$ 軸之周圍,此 $l_1$ 軸固定於物體B內,B又迴轉於 $l_2$ 軸之周圍,此 $l_2$ 軸與 $l_1$ 軸相交而固定於物體C內.A之運動可視為對於 $l_1$ 之迴轉運動及對於 $l_2$ 之迴轉運動所合成.(i)此二者之合成運動為球面運動,且(ii)合成角速度可由平行四邊形法則決定之,即



第 485 圖



第 486 圖

如第 486 圖中  $OM, ON$  各表示分迴轉運動 (Component rotation) 之角速度時,  $OR$  即表示  $A$  之合成運動之角速度, 而  $OR$  即為合成運動之瞬間軸今證之如下.

(i) 之證明 因  $O$  點為  $A$  物體之延長部分內惟一之不動點, 故易知物體  $A$  為球面運動.

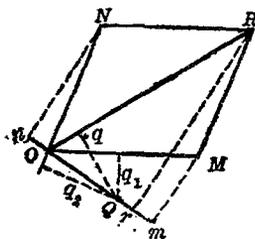
(ii) 之證明 設  $\omega_1, \omega_2$  各為對於  $l_1$  及  $l_2$  之分迴轉運動之角速度,  $\omega$  為合成運動之角速度. 第 486 圖中  $P$  為對角線  $OR$  上  $A$  物體內任意一點, 因  $l_1$  周圍之迴轉運動,  $P$  點欲向紙面上方運動. 又因  $l_2$  周圍之迴轉運動,  $P$  點欲向紙面下方運動. 故  $P$  點因兩種迴轉運動之結果, 該瞬間內線速度為同直線而反方向者. 其兩個線速度之大小各為

$$(\overline{OP} \sin \alpha) \omega_1 = \overline{CP}(\overline{OM} \sin \alpha) = \overline{OP} \times \overline{Mm}$$

及  $(\overline{OP} \sin \beta) \omega_2 = \overline{OP}(\overline{ON} \sin \beta) = \overline{OP} \times \overline{Nn}$

但  $Mm$  與  $Nn$  相等, 故  $P$  之兩個線速度相等反向而同直線. 因之  $A$  物體內在對角線  $OR$  上諸點, 其合成速度為零.

今如第 487 圖上, 設  $Q$  為物體  $A$  內任意一點.  $q_1, q_2, q$  各為該



第 487 圖

點離  $OM, ON, OR$  之距離, 則因  $I_1$  及  $I_2$  周圍迴轉運動所生  $Q$  點之分速度爲

$$q_1\omega_1 = q_1 \cdot \overline{OM}, \quad q_2\omega_2 = q_2 \cdot \overline{ON}$$

其合成速度爲  $q\omega$ , 因分速度爲同方向, 故合成速度等於二者之和, 即

$$q\omega = q_1 \cdot \overline{OM} + q_2 \cdot \overline{ON}$$

但  $q_1 \cdot \overline{OM} = 2(\text{面積 } OQM) = \overline{OQ} \times \overline{Mm},$

$$q_2 \cdot \overline{ON} = 2(\text{面積 } OQN) = \overline{OQ} \times \overline{Nn},$$

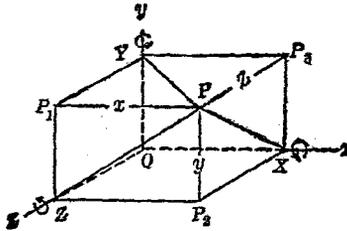
故  $q\omega = \overline{OQ}(\overline{Mm} + \overline{Nn}) = \overline{OQ} \times Rr$

$$= 2(\text{面積 } OQR) = q\overline{OR},$$

$$\therefore \overline{OR} = \omega$$

即對角線  $\overline{OR}$  表示合成角速度, 其縮尺與  $\overline{OM}, \overline{ON}$  之表示  $\omega_1$  與  $\omega_2$  者相同。

150. 球面運動物體內任意一點之速度 第488圖中設  $P$  爲運動物體中任意一點, 而該物體固定於  $O$  點,  $x, y, z$  爲  $P$  點之座標,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  爲該物體對於  $x, y, z$  三軸之分角速度,  $v$  爲  $P$  點



第 488 圖

之線速度,  $v_x, v_y, v_z$  爲  $v$  沿  $x, y, z$  三軸上之分速度. 今欲證明下之三關係.

$$\left. \begin{aligned} v_x &= z\omega_y - y\omega_z \\ v_y &= x\omega_z - z\omega_x \\ v_z &= y\omega_x - x\omega_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

若物體僅迴轉於  $x$  軸之周圍, 則  $P$  點在  $x$  軸之周圍畫成一圓周, 其速度爲  $\overline{XP} \times \omega_x$ , 此速度無  $x$  軸方向分速度, 其  $y$  與  $z$  軸方向之分速度爲  $-z\omega_x$  及  $y\omega_x$ ; 同樣可求得  $P$  點對於  $y$  軸及  $z$  軸迴轉運動時所生之速度, 茲分列如下:

對於  $x$  軸之迴轉運動:

$$v_x = 0, \quad v_y = -z\omega_x, \quad v_z = y\omega_x$$

對於  $y$  軸之迴轉運動:

$$v_x = z\omega_y, \quad v_y = 0, \quad v_z = -x\omega_y$$

對於  $z$  軸之迴轉運動:

$$v_x = -y\omega_z, \quad v_y = x\omega_z, \quad v_z = 0.$$

故  $x, y, z$  軸上之總分速度如 (1) 式所示.

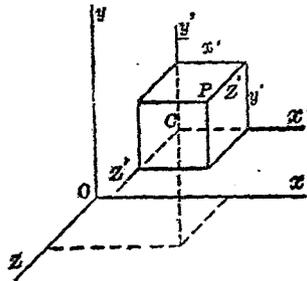
**151. 一般空間運動之分解** 一般空間運動可視爲進行運動及迴轉運動所合成. 設一剛體自  $A$  之位置變位至  $B$  之位置時, 可先使物體內一定點  $O$  自原位置  $A$  由進行運動移至新位置  $B$  內相應之位置, 此  $O$  點稱爲基點 (Base point), 次對於通過此  $O$  點新位置一定軸, 使物體迴轉至最後位置. 此變位

又可依上之相反順序，即先起迴轉運動，後起進行運動。

上之迴轉運動及進行運動可同時起生。故一物體自一位置移至他位置時，其實有運動可視為微小之進行運動與迴轉運動同時連續起生而成者。各進行運動可對於同一基點起生，但各迴轉運動非對於同一軸而起生者。故剛體之任何運動可視為由進行運動與迴轉運動合成，進行運動時物體內各點與基點有同一之運動，迴轉運動對於通過該基點之軸起生，但此軸常在物體內變動。

今於第 489 圖上  $C$  為物體內之基點， $P$  為其他任意一點。 $O_x, O_y, O_z$  為空間固定之座標軸， $O'_x, O'_y, O'_z$  為平行於  $x, y, z$  之軸，隨  $C$  點而移動。設  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  為物體角速度對於三座標軸方向上之分角速度， $\bar{v}_x, \bar{v}_y, \bar{v}_z$  為基點之座標軸方向上分線速度， $v_x, v_y, v_z$  為  $P$  點之座標軸方向上分線速度。又設  $v'_x$  為  $P$  點對於  $C$  點之  $x$  軸方向上分線速度，則

$$v_x = v_x + v'_x$$



第 489 圖

又由第150節(1)式得

$$v_x' = z' \omega_x - y' \omega_z$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} v_x &= \bar{v}_x + (z' \omega_x - y' \omega_z) \\ v_y &= v_y + (x' \omega_z - z' \omega_x) \\ v_z &= \bar{v}_z + (y' \omega_x - x' \omega_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

同樣可證

習 題 24.

1. 一機關車行於直線軌道上為等速運動, 每小時40公里, 其牽動輪直徑2 m., 曲柄銷釘圓(Crank pin circle)之半徑為38 cm., 若平行桿在第474圖所示之位置, 求平行桿對於車架之相對速度與相對加速度之大小及方向, 並求其絕對速度與絕對加速度.

2. 一輾延機(Rolling-mill engine)之飛輪直徑420 cm., 鋼塊未置入時, 飛輪之速為90 r. p. m., 鋼塊置入後, 其速於半秒間均勻減少, 若角加速度為每秒20 r. p. m. (負值), 求半秒末該飛輪之速, 以r. p. m. 表示之.

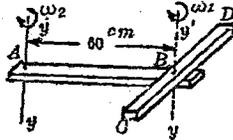
3. 直徑120 cm. 之輪, 無滑動而迴轉於一水平軌道上, 其中心在某瞬間時, 速度為向右120 cm./sec. 加速度為向右180 cm/sec<sup>2</sup>, 求A, B兩點之速度及加速度. 但A為輪與軌道相接觸之點, B為輪之水平直徑與右側邊緣相交之點.

4. 第483圖上DC鏈桿中點E之速度, 其大小及方向各若何?

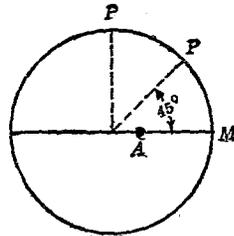
5. 第3題中之輪求其瞬間中心, 并求輪之速度及  $B, C, D$  三點上各線速度之大小及方向. 但  $D$  為水平直徑與左側邊緣相交之點,  $C$  為垂直直徑與上側邊緣相交之點.

6. 水平桿  $AB$  迴轉於垂直軸  $yy$  之周圍, 其角速度為時針方向  $30 \text{ r. p. m.}$ , 同時水平桿  $CD$  以時針方向  $60 \text{ r. p. m.}$  之角速度迴轉於垂直軸  $y'y'$  之周圍. 若  $\overline{CB} = \overline{BD} = 30 \text{ cm.}$ , 求 (a)  $CD$  與  $AB$  平行且  $C$  點在  $AB$  中央時, (b)  $CD$  與  $AB$  直交時, (c)  $CD$  與  $AB$  平行且  $D$  點在  $AB$  中央時,  $C$  點之各線速度之大小與方向.

7. 第6題中若  $AB$  於  $yy$  軸之周圍以角速度  $2 \text{ rad./sec.}$ , 角加速度  $5 \text{ rad./sec}^2$ . 迴轉, 同時  $CD$  以等角速度  $3 \text{ rad./sec.}$  迴轉於  $y'y'$  軸之周圍, 求  $CD$  與  $AB$  成直交時,  $C$  點及  $D$  點之加速度. 假定速度與加速度均為時針方向, 而  $CB = BD = 30 \text{ cm.}$



第 490 圖

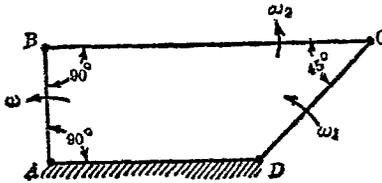


第 491 圖

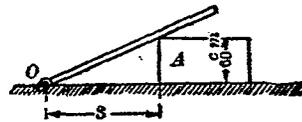
8. 第 491 圖上  $P$  點沿直徑  $60 \text{ cm.}$  之圓周上以等速度  $120 \text{ cm./sec.}$  運動, 他點  $A$  同時沿水平直徑上自  $M$  向  $N$  以等加速度  $300 \text{ cm./sec}^2$ . 運動. 求 (a)  $P$  在圖示位置時, (b) 及  $P$  在  $P'$  位置時,  $P$  點對於  $A$  點之相對加速度.

9. 第492圖上  $\omega = 4 \text{ rad./sec.}$ ,  $\overline{AB} = 15 \text{ cm.}$ ,  $\overline{BC} = 45 \text{ cm.}$ , 求 (a)  $DC$  之角速度  $\omega_1$ , (b)  $BC$  之角速度  $\omega_2$ , 若  $\omega$  以  $4 \text{ rad./sec}^2$  增加時, 求  $DC$  與  $BC$  之角加速度.

10. 一直棒以銷釘連結於  $O$  點, 支於高  $60 \text{ cm.}$  之物體  $A$  上, 如第493圖所示. 若  $A$  能左右移動, 則棒迴轉於  $O$  點, 求棒之角速度及角加速度方程式. 若  $A$  向左以  $180 \text{ cm./sec.}$  之速度移動時, 棒之角速度若何? 又  $A$  之加速度為向左  $90 \text{ cm./sec}^2$ . 時, 棒之角加速度若何?



第492圖



第493圖

## 第三篇

## 動力學

### 第十一章 質點之動力學

152. 概說 動力學 (Kinetics) 者乃力學中討論關於運動物體上力與運動間諸關係之部門。例如已知物體上加以已知之力時該物體當如何運動，又已知物體為既定運動時，其上所作用之力當如何？此等問題須賴動力學方得解決之。

物體上受不平衡之力系作用時，常起運動之變化，故力系中不平衡部份之合力即為誘起運動變化之原因。但吾人由經驗知物體運動之變化受二種影響，一為作用於該物體上不平衡力系合力之大小與方向，一為物體自身之性質。例如同一物體上受各種不同力系之作用時，該物體運動之變化不相同，又同一力系作用於各種不同之物體上時，雖各物體之大小與形狀為同一，但各物體(如鐵之1cm.立方體與木材之1cm.立方體)之運動變化不相同。

牛頓 (Sir Isaac Newton, 1642—1727) 氏創設三大運動定律(第一篇第一章第四節)。但此定律僅應用於質點受一個力

作用之時。工程上須考慮物體受力系之作用。此力系可使物體起任何之運動。例如進行運動，迴轉運動，平面運動，空間運動等是也。但各種運動之通性皆相同一。即物體受力系合力之作用必起運動之變化。研究動力學上各問題時，仍以牛頓氏三運動定律為基礎。而導出運動方程式 (Equations of motion) 以表示 (1) 力系之合力，(2) 物體之動力學上性質，及 (3) 物體運動之變化，三者之關係。如是則已知物體受已知力系作用時，其運動可決定。又或已知物體起已知運動時之所需力系亦可確定。

上之 (1), (2), (3) 三項中力系之合力求法已述於第二章。物體運動之變化，以距離、時間、速度及加速度等表示之。此等關係已述於第九章及第十章中。物體之動力學上性質則討論於次節。

**153. 惰性與質量** 凡物體均有抵抗運動變化之性質，此性質即稱為惰性 (Inertia)。相異物體具有相異量之惰性，其惰性影響於物體運動之法則相同一，但其程度則各不相同。即各物體受力系合力之作用時，均受其惰性之抵抗，生運動之變化，此運動變化與力系合力間之關係對於一切物體皆適從於共同之定律，但其惰性抵抗之影響即所生運動變化程度之大小則各種物體不相同也。

動力學上討論物體運動變化之時，即須同時考慮物體之惰性。討論此惰性對於物體運動變化之影響程度時，吾人

須設一量稱曰質量 (Mass). 即物體之質量者乃物體內之常數, 用以表示該物體惰性之大小也. 惰性之大小由實驗決定之.

例如一物體  $A$  受一力  $F_1$  作用時起運動變化, 而其加速度為  $a_1$ , 同樣該物體受  $F_2, F_3$  等力作用時, 其加速度設各為  $a_2, a_3$  等, 由實驗結果得

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \dots = \text{常數 } C_1$$

今有他物體  $B$  同樣受力  $F', F'', F'''$  等各別作用時, 其所生加速度設各為  $a', a'', a'''$  等, 則同樣可由實驗證明.

$$\frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''} = \frac{F'''}{a'''} = \dots = \text{常數 } C_2$$

故由此實驗可知任何物體, 其惰性之抵抗運動變化, 適從於公共之定律, 即使力與加速度之比為一常數, 但此常數對於各物體不相同, 即  $C_1$  與  $C_2$  不相等. 此  $C_1$  與  $C_2$  等常數即表示物體對於運動變化所有惰性之大小, 蓋此等之值乃等於使物體有一定加速度時所需要之力, 以克勝其惰性故也. 故  $C_1, C_2$  等常數各與該物體之質量成正比例. 換言之, 設各物體之質量為  $M_1, M_2$  等,  $k$  為比例常數, 則  $C_1 = kM_1, C_2 = kM_2$ , 今若取  $M_2$  為質量之單位, 則  $\frac{C_1}{C_2}$  表示第一物體所有質量之數值, 此值因  $C_2$  之值而不同, 即亦因所取質量之單位而異. 但

$$C_1 = kM_2 = \frac{F}{a}$$

故質量之單位因力與加速度之單位而定。地球上各物體僅受地球之引力即重量  $W$  作用時，其加速度  $g$  在同一地點對於各物體皆相同，此乃由實驗之所證明。此  $g$  之值對於多數地點可取為  $9.8 \text{ m./sec}^2$ . (或  $32.2 \text{ ft./sec}^2$ ). 定質量單位時，便利上將物體秤其重量  $W$ ，求  $\frac{W}{g}$  之比，則由上述，知  $\frac{W}{g} = \frac{F}{a}$ ，但  $F$  為加於該物體上任意之力，而  $a$  為其相應之加速度。又因

$$\frac{F}{a} = kM,$$

故 
$$\frac{W}{g} = kM.$$

今對於  $W, g, M$  三者，取適當之單位，使  $k=1$ ，則質量之數值可由下式求之

$$M = \frac{W}{g}.$$

今設有重  $1 \text{ kg}$ . 之物體，則該物體受  $1 \text{ kg}$ . 之力作用時其加速度為  $9.8 \text{ m./sec}^2$ ，若該物體受  $0.5 \text{ kg}$ . 之力作用時，則其加速度當為  $4.9 \text{ m./sec}^2$ 。同樣重  $9.8 \text{ kg}$ . 之物體受  $9.8 \text{ kg}$  之力作用時，其加速度當為  $9.8 \text{ m./sec}^2$ ，若該物體受  $1 \text{ kg}$ . 之力作用時，其加速度當為  $1 \text{ m./sec}^2$ 。此時就  $\frac{F}{a} = kM$  式中， $F=1 \text{ kg}$ ， $a=1 \text{ m./sec}^2$ 。故  $\frac{F}{a}=1$ 。今若取此重  $9.8 \text{ kg}$ . 之物體所有質量為質量之單位，則  $k$  可使為  $1$ 。換言之，就重  $g$  之物體所有質量取為質量之單位。此種單位稱曰重力單位 (Gravitational unit)。若力之單位為  $\text{lb}$ ，加速度之單位為  $\text{ft./sec}^2$ ，則重  $32.2 \text{ lb}$ . 之物體所有質量取為

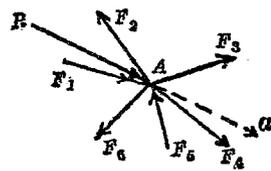
質量之單位.

質量之次元 (Dimension) 爲

$$\text{質量} = \frac{\text{力}}{\text{加速度}} = \frac{F}{\frac{L}{T^2}} = \frac{FT^2}{L}$$

若取 kg. 爲力之單位, m. 爲長度之單位, sec. 爲時間之單位, 則質量之單位爲  $\frac{\text{kg. sec}^2}{\text{m.}}$ , 又或取 lb. 爲力之單位, ft. 爲長度之單位, sec. 爲時間之單位時, 則質量之單位爲  $\frac{\text{lb. sec}^2}{\text{ft.}}$ .

154. 質點之運動方程式 牛頓氏運動定律 僅可直接應用於質點. 且質點受一單獨之力或其合力爲一單獨之力之力系所作用. 蓋力系作用於質點時必爲合交力系, 而其交點卽爲該質點, 故其合力卽爲通過該質點之一單獨之力. 例如第 494 圖上 A 示一質點, 此質點受物體內周圍各他質點之作用力系, 如圖所示. 此力系之合力, 必爲一單獨之力設爲 R. 質點受此合力之作用時, 依 牛頓氏第二定律, 卽於該合力方向生加速度 a, 此加速度 a 與力 R. 及質點之質量 m 三者間之關係如下式所示.



第 494 圖

$$R = ma.$$

但質量用前述之單位表示之, 設該質點之重量爲 W,

則

$$R = \frac{W}{g} a.$$

今設  $x, y, z$  為空間三直交軸, 上之合力  $R$  沿此三軸上分力設各為  $R_x, R_y, R_z$ . 加速度  $a$  沿此三軸上之分加速度設各為  $a_x, a_y, a_z$ , 則因  $R_x = \Sigma F_x, R_y = \Sigma F_y, R_z = \Sigma F_z$ , 故得

$$\Sigma F_x = \frac{W}{g} a_x \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y = \frac{W}{g} a_y \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma F_z = \frac{W}{g} a_z \dots\dots\dots(3)$$

但  $\Sigma F_x, \Sigma F_y, \Sigma F_z$  為質點上力系中各力沿  $x, y, z$  軸方向上之分力代數和。

例 1 一昇降機底面上載一重  $8\text{kg}$ . 之物體. 而以  $2\text{m./sec}^2$ . 之加速度向上運動求該昇降機底面上所受壓力。

解 第 495 圖上視物體為一質點, 該物體受昇降機底面上之壓力  $P$  及其自重  $W$  二力之作用而有向上加速度  $2\text{m./sec}^2$ .

今設取垂直方向為  $y$  軸, 則由  $\Sigma F_y = \frac{W}{g} a_y$

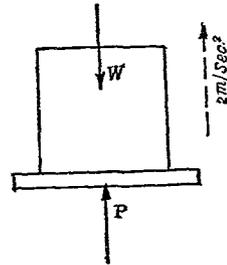
之公式, 得

$$P - W = \frac{W}{g} a_y$$

$$\therefore P - 8 = \frac{8}{9.8} \times 2$$

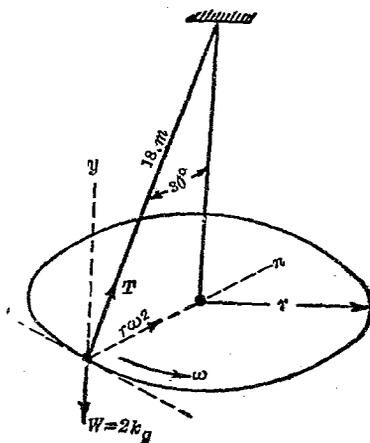
解之得

$$P = 9.6\text{ kg.}$$



第 495 圖

例2 一小物體重  $2\text{ kg}$ ，繫於長  $1.8\text{ m}$  之繩之一端，以等角速度  $\omega$ ，迴轉於垂直線之周圍，繩與垂直線成  $30^\circ$ ，如第 496 圖所示，求繩中拉力  $T$  及物體之線速度  $v$  各若何？



第 496 圖

解 物體上受  $T$  及  $W$  二外力之作用，其加速度為  $r\omega^2$  或  $\frac{v^2}{r}$  而向於圓之中心  $O$  點，故得運動方程式如下：

$$\Sigma F_n = ma_n = \frac{W}{g} r \omega^2 = \frac{W}{g} \frac{v^2}{r} \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t = \frac{W}{g} r \alpha = 0 \text{ (因 } \alpha = 0 \text{)} \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma F_y = m a_y = 0 \text{ (因 } a_y = 0 \text{)} \dots\dots\dots (3)$$

故由 (1) 得  $T \cos 60^\circ = \frac{2}{9.8} \times \frac{v^2}{1.8 \sin 30^\circ} \dots\dots\dots (4)$

由(3)得  $T \cos 30^\circ = 2 = 0 \dots\dots\dots(5)$

由(5)得  $T = \frac{2}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{0.866} = 2.31 \text{ kg.}$

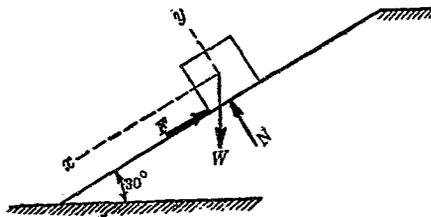
由(4)得  $2.31 \cos 60^\circ = \frac{2}{9.8} \times \frac{v^2}{1.8 \sin 30^\circ}$

因之  $v^2 = \frac{2.31 \times 0.5 \times 9.8 \times 1.8 \times 0.5}{2} = 5.1$

$\therefore v = 2.26 \text{ m., sec.}$

**例3** 一物體自一  $30^\circ$  之斜面頂滑下, 該斜面長 6.6 m., 物體之初速  $v_0$  為 3.3 m./sec. 若摩阻力係數為 0.4, 求該物體達斜面底時之速度  $v$ , 及其所需時間.

解 物體上之外力如第 497 圖所示. 取  $x$  軸於總加速度之



第 497 圖

方向, 則  $a_x = a$ , 得運動方程式如下:

$\Sigma F_x = m a_x = m a \dots\dots\dots(1)$

$\Sigma F_y = m a_y = 0 \dots\dots\dots(2)$

$$\text{又} \quad F = \mu N \dots\dots\dots(3)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2aS \dots\dots\dots(4)$$

$$v = v_0 + at \dots\dots\dots(5)$$

$$\text{由 (1) 得} \quad W \sin 30^\circ - F = \frac{W}{g}a \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{由 (2) 得} \quad N - W \cos 30^\circ = 0 \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{由 (3) 得} \quad F = 0.4 N \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{由 (7) 與 (8) 得} \quad F = 0.4 W \cos 30^\circ$$

$$\text{由 (6) 得} \quad W \sin 30^\circ - 0.4 W \cos 30^\circ = \frac{W}{g}a$$

$$\therefore a = 1.5 \text{ m./sec}^2.$$

$$\text{由 (4) 式得} \quad v = 5.54 \text{ m./sec}^2.$$

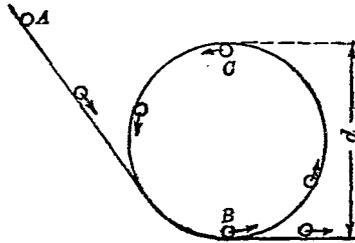
$$\text{由 (5) 式得} \quad t = 1.49 \text{ sec.}$$

## 習 題 25.

1. 一氣球重 200 kg., 其垂直加速度為 1 m./sec<sup>2</sup>., 因水平風壓力使該氣球進行方向與水平成 45° 之角. 求該氣球之水平加速度及其水平風壓力.

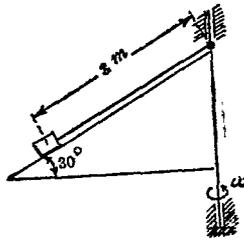
2. 一機關車(Locomotive)重 70 公噸 (1 公噸 = 1000 kg.) 沿半徑 300 m. 之圓弧軌道上進行, 其等速度為 30 km./hr., 求軌道上所受水平壓力.

3. 今有一球沿垂直環形軌道滑下. 如第498圖所示. 該球在  $C$  點時若不與軌道脫離, 有最小速度  $\sqrt{\frac{ga}{2}}$  試證之. 但略去摩阻力.



第498圖

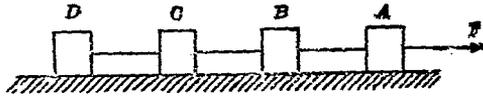
4. 第499圖上一小物體重  $6\text{kg}$ , 靜止於  $30^\circ$  之斜面上. 此斜面以等角速度  $30\text{r.p.m.}$  迴轉於垂直軸之周圍. 該物體以繩繫於垂直軸上之一點. 今若略去摩阻力, 求繩中拉力  $T$  當若何?



第499圖

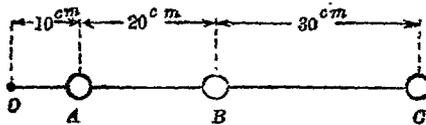
5. 一方匣以初速  $800 \text{ m./min.}$  於  $20^\circ$  之斜面上向上運動。摩阻力係數為  $0.2$ ，問該匣於靜止前在斜面上向上運動之距離。問該物體能靜止於斜面否？若不能靜止，則該物體到達斜面上原有位置時之時間當若何？

6. 第 500 圖上  $A, B, C, D$  四物體各重  $10 \text{ kg.}, 20 \text{ kg.}, 15 \text{ kg.}, 30 \text{ kg.}$ ，以繩連接之。今以  $20 \text{ kg.}$   $F$  力拉之使沿水平面上滑動。若略去摩阻力及繩之重量，求各物體之加速度，及繩  $AB, BC, CD$  各拉力。并問四物體自出發後經  $5 \text{ m.}$  時之速度。



第 500 圖

7. 第 501 圖上  $A, B, C$  三物體各重  $20 \text{ kg.}, 15 \text{ kg.}, 10 \text{ kg.}$ ，以繩連結之。同時迴轉於  $O$  點之周圍，為水平圓運動。其等角速度為  $150 \text{ r. p. m.}$ 。求繩  $OA, AB, BC$  各拉力。



第 501 圖

8. 一物體重  $120 \text{ kg.}$ ，繫於繩之下端，以等加速度下降。若繩之抗拉力為  $80 \text{ kg.}$ ，求該物體之最小加速度。

---

9. 一人重  $70 \text{ kg}$ ，立於重  $1000 \text{ kg}$  之升降機內。若升降機之吊繩內拉力為  $1300 \text{ kg}$ ，問該升降機上昇時之加速度，并問該人對於升降機底面之壓力若干？

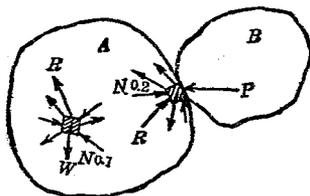
## 第十二章 剛體之動力學

**155. 概說** 物體運動可有進行運動,迴轉運動,平面運動及空間運動等,但此等運動皆因作用於物體上之力系有合力而起.對於各種運動,其(1)外力力系之合力,(2)物體之性質即質量與慣性勢等,及(3)物體運動之變化等三者間之關係皆可求得.表示此等關係之方程式即為運動方程式,可依下之次序求之.

第一 由物體之運動求其各質點所有加速度  $a$  之大小及方向.此時可應用第二篇運動學內所述各方程式.

第二 應用牛頓氏第二運動定律,由物體內各質點之加速度  $a$  及其質量  $m$ ,可求其生此加速度之力,定其大小與方向.此力設為  $R$ ,則可以  $R=ma$  之方程式表示之,其方向與加速度  $a$  相一致.此力稱曰質點上之有效力 (Effective force),即為作用於質點上實有各力之合力.物體內大部份之質點除其重量外,僅受內力之作用,即受隣接之他質點上反作用力之作用.而一部份之質點則受內力與外力二者之同時作用.故質點上之有效力或僅為其上所受內力之合力,或為其上所受內力與外力之合力.例如第 502 圖中物體  $A$  與物體  $B$  相

接觸,  $A$  受  $B$  之作用而起運動.  $A$  內 No. 1 之質點除自重  $W$  外全受周圍他質點之內力作用, 而 No. 2 之質點則一部份受外力之作用, 一部份為內力之作用.  $R$  為各質點上所有諸作用力之合力, 即為其有效力.



第 502 圖

### 第三 各質點上之有效力既

決定其大小與方向後, (此力即以各質點之質量與其加速度表示之), 即可用第二章所述方法求物體內各質點上諸有效力之合力. 此合力可以  $x, y, z$  軸上之分合力及分偶力表示之. 由此分合力及分偶力可得物體之運動方程式. 其數一般有六個.

第四 上述諸質點上有效力之合力即為各質點上所有一切內力與外力之合力. 求此合力之  $x, y, z$  軸上分力與分偶力時, 即將各質點上之內力與外力求其  $x, y, z$  軸上之分力與分偶力而後求其代數和. 此時一切內力之  $x, y, z$  軸上分力與分偶力之代數和當相互抵消而為零. 因各質點之內力均兩兩成對且同直線而相等反向 (依據牛頓氏第三定律). 故物體內全部質點上有效力之合力即為該物體上所受外力之合力. 因之得下之定理.

凡物體內全部質點上有效力之合力若假定反逆其方向而使與諸外力同時作用於該物體上時, 則可使該物體復

歸於平衡。

此即為達倫勃氏原理 (D'Alembert's principle). 由此原理則動力學問題可誘導成為靜力學問題, 而此新加入之假想力與有效力合力成反對方向可由物體之運動求得之. 此力稱曰逆有效力 (Reversed effective force) 或慣性力 (Inertia force).

一般由達倫勃氏原理理解動力學問題之法, 可簡括之如下: (第一) 先求物體內全部質點上有效力之合力, 以物體性質及運動變化表示之, (第二) 次假想將此有效力之合力, 反逆其方向而加於該物體上, 如是則此假想力與實有外力成一平衡力系, (第三) 應用平衡條件解該力系中之未知量.

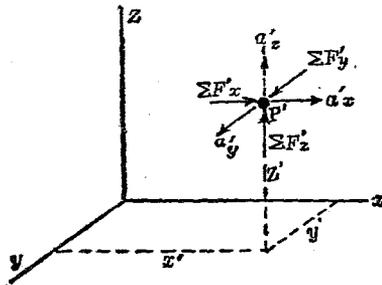
本章主就進行運動, 迴轉運動, 及平面運動時, 剛體之動力學討論之.

11.6. 質量中心之運動方程式. 第503圖上  $P'$  示物體內任意一質點, 其座標設為  $x', y', z'$ , 其質量為  $m'$ , 其加速度為  $a'$ , 此加速度沿  $x$  軸向上之分加速度設為  $a'_x$ , 作用於該質點上有效力之合力沿  $x$  軸方向上分力設為  $\Sigma F'_x$ , 則

$$\Sigma F'_x = m' a'_x$$

同樣對於他質點  $P''$  可得

$$\Sigma F''_x = m' a''_x$$



第 503 圖

對於物體全部各質點得

$$\Sigma F_x' + \Sigma F_x'' + \Sigma F_x''' + \dots = m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \dots \dots (1)$$

上式左端包含全部質點上外力與內力之  $x$  軸方向上分力之代數和，但內力必兩兩成對而相抵消，故上式左端僅為作用於物體上外力之  $x$  軸方向上分力之代數和  $\Sigma F_x$ 。上式右端等於  $M\bar{a}_x$ ，但  $M$  為物體之質量， $\bar{a}_x$  為物體質量中心之  $x$  軸方向上分加速度，可證之如次。蓋由第 94 節，對於  $xy$  面，質量中心  $\bar{x}$  之位置乃自下式定之。

$$m'x' + m''x'' + m'''x''' + \dots = M\bar{x}$$

對於時間  $t$  取二次微分，得

$$m'a_x' + m''a_x'' + m'''a_x''' + \dots = M\bar{a}_x \dots \dots (2)$$

故 (1) 式可書為

$$\Sigma F_x = Ma_x \dots \dots (3)$$

同樣得

$$\Sigma F_y = Ma_y \dots \dots (4)$$

$$\Sigma F_z = Ma_z \dots \dots (5)$$

此即為質點中心之運動方程式，由此可知外力合力之方向與質量中心之加速度方向相一致。

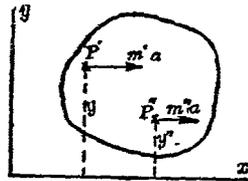
### I. 進行運動

157. 進行運動時剛體之動力學 物體受不平衡力系之作用而起進行運動時，各質點之加速度，其大小與方向均相同。各質點上之有效力方向均與其所共有之加速度方向相一致，故全部質點上之有效力系成空間平行力系，且其指

向皆相同一，因之有效力系之合力必成爲一單獨之力，而決不成爲偶力。此合力之方向與諸有效力之方向相同。

**定理** 進行運動時之剛體上諸外力之合力爲一單獨之力，其作用線通過該剛體之質量中心，此合力之大小與物體質量全部集中於質量中心時相同。

**證** 第 504 圖示任意一物體，受外力作用而其加速度向  
右方，加速度之大小設爲  $a$ ， $P, P'$  等爲  
其內之質點。今取  $x, y, z$  軸，使  $x$  軸與加  
速度  $a$  之方向相一致， $z$  軸與紙面成直  
角。 $P, P'$  等點之質量設爲  $m', m''$  等。各  
質點上之有效力當爲  $m'a', m''a'$  等，此



第 504 圖

等之力皆與加速度方向平行。此有效力系之合力亦與加速度方向平行。有效力系合力之大小設爲  $R$ ，物體全部之質量設爲  $M$ ，則

$$R = m'a + m''a + \dots = (m' + m'' + \dots)a = Ma$$

此合力之作用線可由力勢原理定之。今設對於  $z$  軸取力勢則

$$m'ay' + m''ay'' + \dots = a(m'y' + m''y'' + \dots) = Ma\bar{y}$$

但  $\bar{y}$  爲質量中心之  $y$  軸座標。故有效力系合力對於  $z$  軸力勢之勢臂爲

$$\frac{Ma\bar{y}}{Ma} = \bar{y}$$

同樣對於  $y$  軸取力勢, 則合力  $R$  之勢臂爲  $\bar{z}$ , 但  $\bar{z}$  爲質量中心之  $z$  軸座標. 故有效力系之合力通過物體之質量中心而平行於  $x$  軸即加速度之方向, 其指向與加速度之指向相同. 此合力  $R$  即爲全部質點上一切內力與外力之合力, 但內力兩兩成對而相互抵消, 故合力  $R$  亦即爲作用於物體上全部外力之合力. 因之進行運動時物體上外力於  $x$  軸方向分力總和設爲  $\Sigma F_x$ ,  $y$  軸方向分力總和設爲  $\Sigma F_y$ ,  $z$  軸方向分力總和設爲  $\Sigma F_z$ , 則

$$\Sigma F_x = Ma \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma F_z = 0 \dots\dots\dots(3)$$

又因外力之合力通過質量中心, 故對於通過質量中心之任意一軸 諸外力之力勢總和亦必爲零. 今若將第 504 圖之  $x, y, z$  三軸平行移動使原點一致於質量中心, 則 (1), (2), (3) 三式仍可成立, 而同時下之三式亦可成立.

$$\Sigma T_x = 0 \dots\dots\dots(4)$$

$$\Sigma T_y = 0 \dots\dots\dots(5)$$

$$\Sigma T_z = 0 \dots\dots\dots(6)$$

但  $\Sigma T_x, \Sigma T_y, \Sigma T_z$  爲諸外力對於通過質量中心之  $x, y, z$  三軸之

力勢總和。此(4), (5), (6)三式與(1), (2), (3)三式同為物體進行運動時之必要兼充分之條件

若物體有通過質量中心之對稱面時，則有效力之平行力系可導成該平面上之同平面平行力系。於該平面上取  $x, y$  軸，并取質量中心為原點，則物體之運動方程式僅有三個。即

$$\Sigma F_x = Ma_x \dots\dots\dots(1)$$

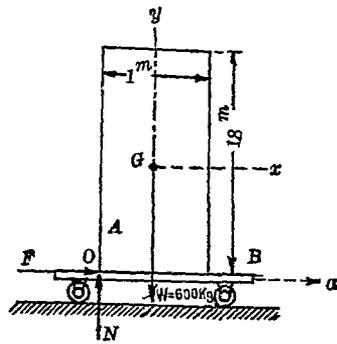
$$\Sigma F_y = Ma_y \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma T_z = 0 \dots\dots\dots(3)$$

但  $a_x, a_y$  為沿  $x, y$  軸方向之分加速度。

**例1** 第505圖之柱體  $A$  其大小為  $1\text{m} \times 1\text{m} \times 1.8\text{m}$ ，重  $600\text{kg}$ ，載於  $B$  車上。此車以加速度  $a$  向右進行。若  $A$  與  $B$  間摩阻力可充分阻止滑動，問  $B$  車之最大加速度若何，方可不使  $A$  柱體傾倒。

**解(第一法)** 柱體  $A$  受重量  $W$  及  $B$  車上反作用力  $R$  二外力之作用而為進行運動。紙面為柱體  $A$  之對稱面，外力可成為同平



第505圖

面力系。柱體當開始傾倒時，此反作用力作用於  $O$  點。將此反作用力分解成為垂直壓力  $N$  及摩阻力  $F$ ，則對於柱體  $A$  之運動方程式如下：

$$\Sigma F_x = Ma \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma T_z = 0 \dots\dots\dots(3)$$

由 (1) 式得  $F = \frac{600}{9.8} a \dots\dots\dots(4)$

由 (2) 式得  $N - 600 = 0 \dots\dots\dots(5)$

由 (3) 式得  $0.9 F - 0.5 N = 0 \dots\dots\dots(6)$

解之得  $F = 333 \text{ kg.}$

$$a = 5.44 \text{ m./sec}^2.$$

(第二法) 假定於柱體  $A$  之質量中心上加一逆有效力, 則據達倫勃氏定理, 柱體可復歸於平衡. 此逆有效力之大小即等於有效力之合力, 故為

$$Ma = \frac{600}{9.8} a$$

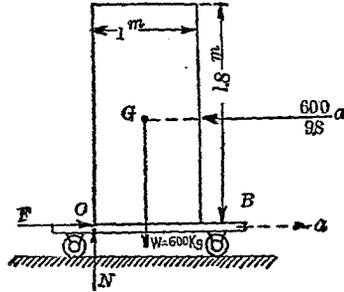
其方向與加速度之方向相反. 如第 506 圖所示, 柱體  $A$  受  $F, N, W$ , 及  $Ma$  四外力之作用而成平衡, 故由平衡條件得

$$\Sigma F_x = F - \frac{600}{9.8} a = 0,$$

$$\Sigma F_y = N - 600 = 0,$$

$$\Sigma M_o = \frac{600}{9.8} a \times 0.9 - 600 \times 0.5 = 0$$

此三式與第一法中之 (4), (5), (6) 三式全相同.



第 506 圖

(注意) 第一法中(3)式之力勢方程式( $\Sigma T_x$ ),須對於質量中心取力勢,但第二法中之力勢方程式( $\Sigma M_o$ )可對於力之平面上任意一點取力勢。

例2 三物體 A, B, C 以二繩連結之,使三物體以同一加速度運動,如第 507 圖所示.假定滑輪 D 無重量且無摩阻力.物體 A 重 18 kg., B 重 30 kg., C 重 60 kg., A 與平面間之摩阻力係數為 0.25, B 與平面間之摩阻力係數為 0.2, 求 (1) 諸物體之加速度, (2) A 與 B 間繩之拉力  $T_1$ , (3) B 與 C 間繩之拉力  $T_2$  各若何?

解 各物體僅有進行運動,紙面為通過各物體質量中心之對稱平面.對於各物體有下列諸運動方程式.

$$\Sigma F_x = Ma_x \dots\dots\dots(1)$$

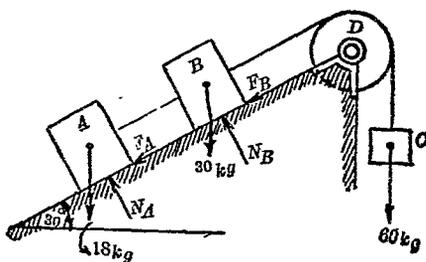
$$\Sigma F_y = Ma_y \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma T_x = 0 \dots\dots\dots(3)$$

此外對於  $A, B$  二物體更有下之二式

$$F_A = 0.25 N_A \dots\dots\dots(4)$$

$$F_B = 0.2 N_B \dots\dots\dots(5)$$



第 507 圖

(3)式僅對於求  $N_A$  與  $N_B$  時為必要,對於題內各問則(3)式可不必用之。

先作物體  $A$  之分離體圖如第 508 圖 (a), 應用上之運動方程式,由 (1) 式得

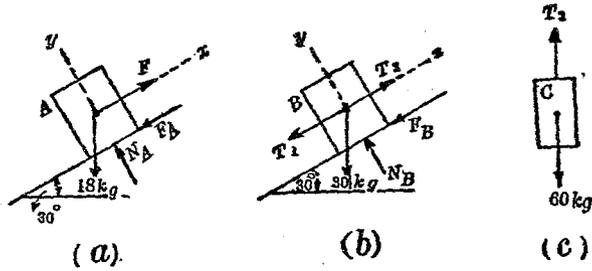
$$T_1 - 18 \sin 30^\circ - F_A = \frac{18}{9.8} a_x$$

由 (2) 式得  $N_A - 18 \cos 30^\circ = 0$

由 (4) 式得  $F_A = 0.25 N_A$

解之得  $T_1 = 18 \sin 30^\circ + 0.25 \times 18 \cos 30^\circ + \frac{18}{9.8} a_x \dots\dots\dots(6)$

次作物體  $B$  之分離體圖如第 508 圖 (b), 應用上之運動方



第 508 圖

程式, 得 
$$T_2 - T_1 - F_B - 30 \sin 30^\circ = \frac{30}{9.8} a_x$$

$$N_B - 30 \cos 30^\circ = 0$$

$$F_B = 0.2 N_B$$

解之得 
$$T_2 - T_1 = 30 \sin 30^\circ + 0.2 \times 30 \cos 30^\circ + \frac{30}{9.8} a_x \dots\dots (7)$$

再作 C 之分離體圖如第 508 圖 (c), 其運動方程式為

$$60 - T_2 = \frac{60}{9.8} a_x \dots\dots\dots (8)$$

由 (6), (7), (8) 解得 
$$a = a_x = 2.44 \text{ m./sec}^2.$$

$$T_1 = 17.38 \text{ kg.}$$

$$T_2 = 45.05 \text{ kg.}$$

例 3 一昇降機自靜止向上運動, 經過 6 m. 後得速度

267 m./min., 若加速度為常數問機內重 80 kg. 之人, 對於機底面之壓力若何?

解 今視人為一物體, 為進行運動取  $y$  軸於運動方向, 則運動方程式, 此時僅有一個, 即  $\Sigma F_y = Ma_y$ , 其他尚有一式即  $v^2 = v_0^2 + 2as$  可資應用. 作人之分離體圖如第 509 圖, 其外力僅有人之重量及昇降機底面之反作用力, 此二力為同直線. 由上之二式得

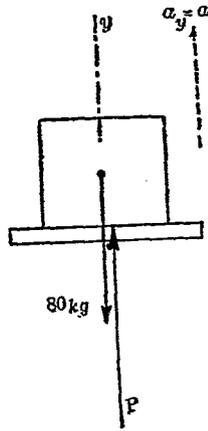
$$P - 80 = \frac{80}{9.8} a_y = \frac{80}{9.8} a$$

$$\frac{(267)^2}{60} = 0 + 2a \times 6$$

解之得

$$a = 1.65 \text{ m./sec}^2.$$

$$P = 93.47 \text{ kg.}$$



第 509 圖

例 4 第 510 圖示一鐵箱重 1000 kg., 底邊突出部  $A, B$  支於水平面上. 摩阻力係數為 0.15, 加以水平力 180 kg., 使成進行運動, 但不於水平面上起迴轉運動. 求該箱之加速度, 并求摩阻力及  $A, B$  上反作用力.

解 加速度為水平向左, 當為負值. 取質量中心  $G$  為原點, 定  $x, y$  兩軸如圖所示,  $z$  軸亦通過  $G$ , 而直交於紙面. 今設紙面為物體上通過質量中心之對稱面, 則運動方程式如下.

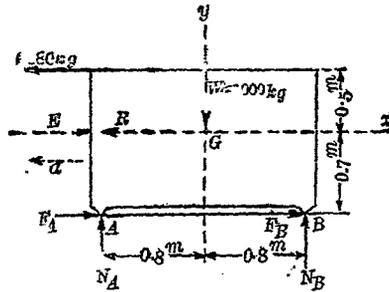


圖 510

$$\text{由 } \Sigma F_x = \frac{W}{g} a_x \text{ 得 } -180 + F_A + F_B = \frac{1000}{9.8}(-a)$$

$$\text{由 } \Sigma F_y = 0, \text{ 得 } -1000 + N_A + N_B = 0$$

$$\text{由 } \Sigma T_x = 0, \text{ 得}$$

$$180 \times 0.5 - 0.8 N_A + 0.7 F_A + 0.8 N_B + 0.7 F_B = 0$$

$$\text{又因 } F_A = 0.15 N_A, \quad F_B = 0.15 N_B$$

$$\text{解之得 } a = 0.294 \text{ m./sec}^2,$$

$$F_A = 76.4 \text{ kg.} \quad N_A = 509.4 \text{ kg.}$$

$$F_B = 73.6 \text{ kg.} \quad N_B = 490.6 \text{ kg.}$$

(別法1) 第 510 圖設  $R$  表示諸外力之合力, 則由本節定理,  $R$  方向與加速度方向平行, 其指向亦相同, 其作用線通過物體之質量中心, 故當如圖所示. 此  $R$  之大小當等於  $\frac{1000}{9.8} a$ ,

故由分力與合力之關係及力勢原理得下列諸式：

$$R = \frac{1000}{9.8} a$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x = R_x, & \quad \text{或} & \quad -180 + F_A + F_B = -R, \\ \Sigma F_y = R_y, & \quad \text{或} & \quad -1000 + N_A + N_B = 0, \\ \Sigma M_B = (M_R)_B, & \quad \text{或} & \quad 180 \times 1.2 + 1000 \times 0.8 - 1.6 N_A \\ & & \quad = 0.7 R, \\ F_A = \mu N_A, & \quad \text{或} & \quad F_A = 0.15 N_A, \\ F_B = \mu N_B, & \quad \text{或} & \quad F_B = 0.15 N_B, \end{aligned}$$

此等諸式與上述諸式相同值。

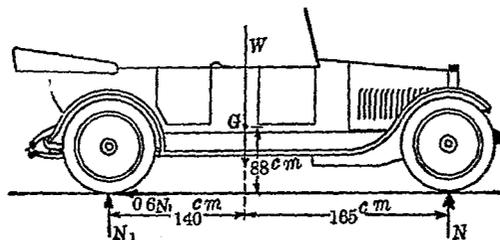
(別法2) 今設於第510圖之物體上加加以與  $R$  反向之逆有效力或惰性力  $E$ ，則此  $E$  力亦通過質量中心，而全力系成平衡，故得下列諸式：

$$E = \frac{1000}{9.8} a$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_x + E_x = 0, & \quad \text{或} & \quad -180 + F_A + F_B + E = 0, \\ \Sigma F_y + E_y = 0, & \quad \text{或} & \quad -1000 + N_A + N_B = 0, \\ \Sigma M_B + (M_E)_B = 0, & \quad \text{或} & \quad 180 \times 1.2 + 1000 \times 0.8 - 1.6 N_A \\ & & \quad - 0.7 E = 0, \\ F_A = \mu N_A, & \quad \text{或} & \quad F_A = 0.15 N_A, \\ F_B = \mu N_B, & \quad \text{或} & \quad F_B = 0.15 N_B. \end{aligned}$$

此等諸式全與(別法1)中諸式相同。

例5 第511圖之汽車前後輪之輪底距 (Wheel base) 爲 305 cm., 其重心離後輪軸爲 140 cm., 離地面 88 cm., 輪胎與地面間摩阻力係數爲 0.6, 求 (a) 後輪上加制動器 (Brake) 時及 (b) 四輪上均加制動器時, 停止該車之各加速度. 併求 (a), (b) 二種情形內前後輪上反作用力之垂直分力.



第 511 圖

解 (a) 前輪之重量較全車重量爲甚小, 雖前輪有迴轉運動, 而全車之運動, 可視爲進行運動. 第 511 圖示其分離體圖. 其外力爲車重  $W$ , 兩後輪上反作用力之垂直分力之合成力  $N_1$ , 兩後輪上摩阻力之合成力  $0.6 N_1$ , 前輪上之垂直反作用力之合力  $N_2$ , 共有四個外力. 今取質量中心  $G$  爲原點, 取  $x$  軸於加速度方向, 取  $y$  軸於垂直方向, 取  $z$  軸直交於紙面. 得運動方程式如下:

$$\Sigma T_z = 165 N_2 - 140 N_1 - 88 \times 0.6 N_1 = 0$$

$$\Sigma F_y = N_1 + N_2 - W = 0$$

$$\Sigma F_x = 0.6 N_1 = \frac{W}{980} a$$

解之得

$$N_1 = 0.457 W, \quad N_2 = 0.544 W, \quad a = 2.69 \text{ m./sec}^2.$$

(b) 此時全車爲進行運動。因  $N_1 + N_2 = W$ ，故全部之摩擦阻力爲  $0.6 N_1 + 0.6 N_2 = 0.6 W$ 。故得運動方程式如下：

$$\Sigma T_z = 165 N_2 - 140 N_1 - 0.6 W \times 88 = 0$$

$$\Sigma F_y = N_1 + N_2 - W = 0$$

$$\Sigma F_x = 0.6 W = \frac{W}{980} a$$

解之得

$$a = 5.88 \text{ m./sec}^2, \quad N_2 = 0.632 W, \quad N_1 = 0.368 W.$$

以上諸例均爲直線進行運動。下列示曲線進行運動。

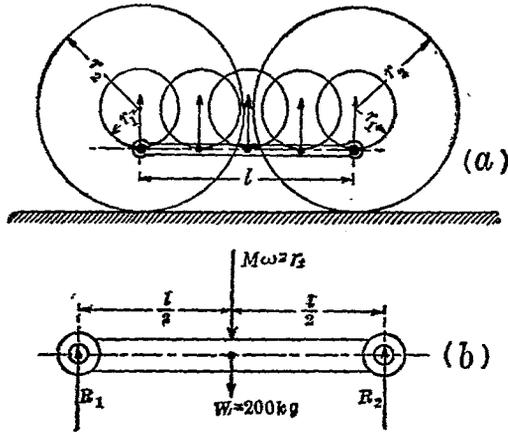
**例 6** 第 512 圖示機關車之平行桿 (Parallel rod) 重 200 kg，其曲柄長  $r_1$  爲 38 cm，牽動輪 (Driver) 之半徑  $r_2$  爲 90 cm，若機關車之速度爲每小時 85 km，問平行桿在最低位置時，桿之兩端銷釘上之反作用力各若干？

**解** 平行桿上各點在任何瞬間有同一加速度。若桿在最低位置時，桿內諸質點對於車架之加速度爲垂直向上。其值爲  $\omega^2 r_1$ ，但角速度  $\omega$  爲

$$\omega = \frac{v}{r_2} = \frac{85000}{60 \times 60} \times \frac{1}{0.9} = 26.2 \text{ rad./sec.}$$

桿內全部質點上有效力之合力通過其質量中心，其大小爲

$$Ma = M\omega^2 r_1 = \frac{200}{9.8} \times (26.2)^2 \times 0.38 = 5323.4 \text{ kg.}$$



第 512 圖

今若加以逆有效力於桿之質量中心,如第 512 圖(b)所示,則該桿可平衡,由平衡條件得下列各式.

$$\Sigma F = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\Sigma M = 0 \dots\dots\dots (2)$$

由 (1) 式得  $R_1 + R_2 - 5323.4 - 200 = 0$

由 (2) 式得  $R_1 l - (5323.4 + 200) \times \frac{l}{2} = 0$

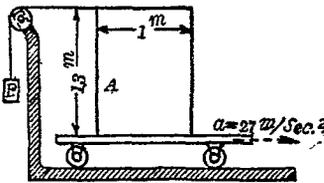
解之得  $R_1 = R_2 = 2761.7 \text{ kg.}$

習 題 26.

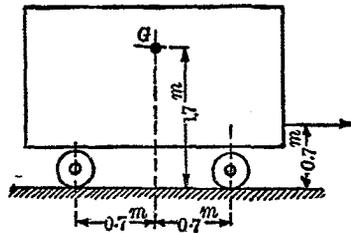
1. 一人立在地面時能舉起 75 kg. 之重物. 若該人立在以某加速度下降之昇降機內時, 能自昇降機底面舉起 100 kg. 之重物. 問該加速度若何. 若昇降機以同一加速度上昇時, 該人能自昇降機底面舉重若干?

2. 一吊籠 (Cage) 下降於豎井 (Shaft) 內, 其速度為 9 m./sec. 今以等加速度使該吊籠於 6 m. 之距離間完全停止. 求該吊籠靜止時, 籠頂吊繩之拉力.

3. 第 513 圖上之物體 A, 其大小為 1 m.  $\times$  0.7 m.  $\times$  1.3 m., 其重量為 500 kg., 假定該物體不能滑動於車上. 若車之加速度為 2.7 m./sec<sup>2</sup>. 時, 問 B 之最大重量當如何方不使 A 傾倒. 但滑輪 D 假定無摩擦阻力且無重量.



第 513 圖

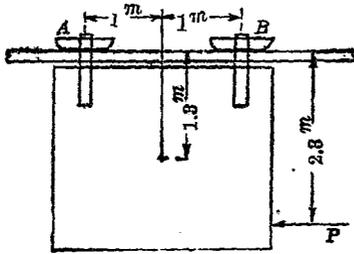


第 514 圖

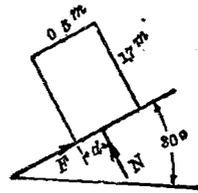
4. 一車重 400 kg., 其重心示於第 514 圖之位置. 今加以 P

力其大小為  $60 \text{ kg}$ 。如圖所示略去摩阻力，求該車之加速度及軌道對於前後各對輪上之反作用力若  $P$  力通過  $G$  點時，此反作用力當如何？

5. 第 515 圖之門懸於上方門軌上， $A, B$  與門軌間之摩阻力係數為  $0.25$ ，該門重  $150 \text{ kg}$ ，問該門有  $1.3 \text{ m/sec}^2$  之加速度時， $P$  力若何？并求  $A$  與  $B$  上各反作用力。二秒後該門運動之距離若何？



第 515 圖

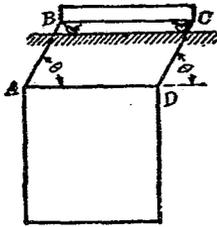


第 516 圖

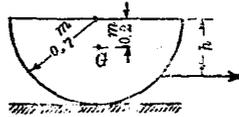
6. 第 516 圖所示之勻質矩形物體重  $100 \text{ kg}$ ，以直線進行運動滑下於斜面。動摩阻力係數為  $0.25$ ，問  $F, N$  及  $d$  之值各若何？并問自靜止出發經 4 秒後所經過之距離。

7. 第 517 圖示一方形鐵板，重  $300 \text{ kg}$ ，以  $AB$  及  $CD$  二繩懸於一車。此車拉向右方，以等加速度  $3 \text{ m/sec}^2$  進行。求角度  $\theta$ ，并計算各繩之拉力。

8. 第518圖示一均質半球, 重 160 kg., 半徑 0.7 m., 以水平力  $P$  拉向右边, 使沿水平面進行, 其加速度為  $9.8 \text{ m./sec}^2$ , 其重心在於  $G$  處.  $P$  之作用點不使該半球傾倒. 摩擦阻力係數為 0.15, 試計算  $h$  之值.



第 517 圖

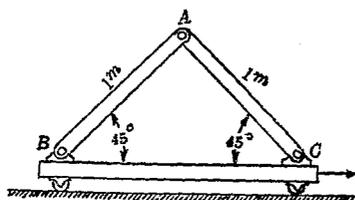


第 518 圖

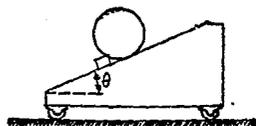
9. 第519圖之均質桿  $AB$  及  $AC$  以銷釘連結於  $A, B, C$ , 各桿重 25 kg., 今略去摩擦阻力, 以水平力拉車使向右边進行於水平面, 其加速度為  $1.5 \text{ m./sec}^2$ , 試求各銷釘上壓力之垂直及水平分力

10. 第9題中若  $C$  支重 (Shoe) 可自由滑動於平滑之車面上, 求各桿與水平所成之角度.

11. 第520圖之斜面, 下附以輪, 上有一圓柱體, 臥於一小塊之上方. 今使該斜面向左進行, 不使圓柱體輾上於斜面時, 求證該斜面能有最大加速度之公式, 為  $a = g \tan \theta$ .



第 519 圖



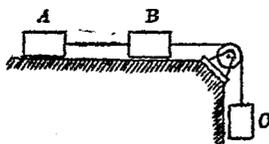
第 520 圖

12. 第11題之圓柱體若代以矩形柱體,此柱體與斜面間之摩阻力係數設為 $\mu$ ,今使斜面向左進行,不使該柱體滑上於斜面時,求證最大加速度之公式為

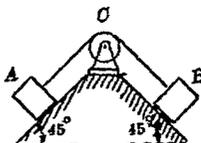
$$a = g \frac{\mu + \tan \theta}{1 - \mu \tan \theta}$$

13. 第521圖上物體 $A, B, C$ 各重 $5\text{ kg}, 10\text{ kg}$ 及 $15\text{ kg}$ ,以繩連結之,此繩經過無摩阻力之滑輪, $A, B$ 對於平面之摩阻力係數為 $0.2$ ,求各物體之加速度,及各繩內之拉力。

14. 第522圖之物體 $A$ 重 $50\text{ kg}$ ,物體 $B$ 重 $100\text{ kg}$ ,以繩連結之,滑輪 $C$ 無重量及摩阻力, $A, B$ 對於斜面之摩阻力係數為 $0.1$ ,求各物體之加速度及繩內拉力。



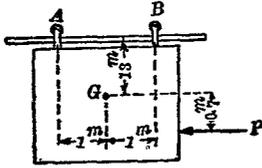
第 521 圖



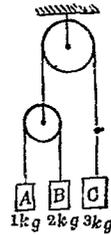
第 522 圖

15. 第523圖之門重80 kg, 若 $P$ 力為30 kg, 求門之加速度及 $A, B$ 上反作用力. 但輾輦 $A$ 已損壞而滑動於門軌上, 其摩擦阻力係數為 $\frac{1}{3}$ .

16. 第524圖上三物體 $A, B, C$ 各重1 kg, 2 kg, 3 kg, 支於圖示之位置, 同時開始運動. 問隔2秒各物體之速度, 但略去繩及滑輪之質量.

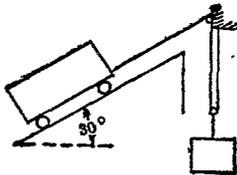


第523圖



第524圖

17. 第525圖上之車內裝煤6000 kg, 以 $30 \text{ cm./sec}^2$ 之加速度沿 $30^\circ$ 之斜面下降. 對於車之阻力(如輾阻力等)每1000 kg. 有15 kg, 今假定車上四輪平均負擔荷重, 制動器與輪間動摩擦阻力係數為0.3, 問此時制動器加於各輪上之壓力幾何?



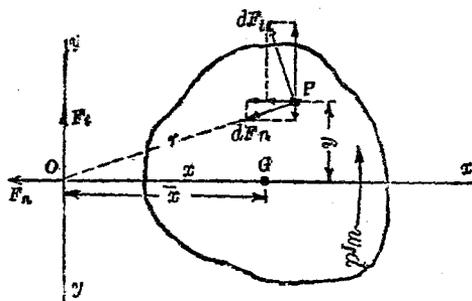
第525圖

## II. 迴轉運動

158. 迴轉運動時剛體之動力學 剛體若受不平衡力系之作用而起迴轉運動時,其內各質點之線加速度均不相同. 但任何瞬間內各質點之角加速度 $\alpha$ 與角速度 $\omega$ 均相同.各質點之線加速度由第128節,其切線加速度 $a_t=r\alpha$ ,法線加速度 $a_n=r\omega^2$ ,故各質點之線加速度與其離迴轉軸之距離 $r$ 成正比例.

第526圖上之物體,  $G$ 為其質量中心,物體迴轉於通過 $O$ 點而直交於紙面之迴轉軸之周圍,其迴轉方向如圖所示.今取 $z$ 軸與迴轉軸相

一致,取 $x$ 軸通過 $OG$ ,取 $y$ 軸與 $x, z$ 兩軸成直交,  $x, y$ 軸與物體同時迴轉. 設 $x, y$ 面即為運動平面,  $M$ 為物體之質量,  $\omega$ 為某瞬間之角速度.  $\alpha$ 為



第526圖

該瞬間之角加速度該瞬間內質量中心 $G$ 取圖示之位置.今先求剛體內各質點上有效力之合力如下.

設任意一質點 $P$ ,其質量為 $dM$ ,其座標為 $x, y, z$ ,對於 $z$ 軸之直交距離為 $r$ ,線加速度 $a$ ,可分為切線加速度 $a_t$ ,與 $OP$ 直交,及法線加速度 $a_n$ ,沿 $OP$ 方向.今將作用於質點上諸力之合

力即有效力分解成爲切線方向之分力  $dF_t$  及法線方向之分力  $dF_n$ , 則得

$$dF_t = a_t dM \dots\dots\dots(1)$$

$$dF_n = a_n dM \dots\dots\dots(2)$$

其他各質點上之有效力均可同樣分解之. 因之全部質點上之有效力分成平行於  $xy$  面之二種力系, 第一種爲切線力系如(1)式所示, 第二種爲法線力系如(2)式所示. 第一種力系之作用線方向與質點之切線加速度方向相一致, 第二種力系之作用線方向, 向於迴轉軸即  $z$  軸而與之成直交. 今將二種力系各求其合力如下.

(i) 切線力系之合力 以  $a_t = r\alpha$  代入於(1)式得

$$dF_t = \alpha r dM$$

此力系爲異平面非合交非平行力系, 但各力與  $xy$  面平行, 故其合力一般可成爲通過  $O$  點之一力及一偶力. 今將各切線力分解成爲平行於  $x$  軸方向及平行於  $y$  軸方向之分力, 則其平行於  $x$  軸方向之分力爲

$$-\frac{y}{r} dF_t = -\alpha y dM,$$

其平行於  $y$  軸方向之分力爲

$$\frac{x}{r} dF_t = \alpha x dM,$$

其平行於  $z$  軸方向之分力爲零因之切線力系合力中  $x$  軸上之分力爲

$$\Sigma X_i = -\alpha \int y dM = -\alpha \bar{y} M.$$

但  $\bar{y}$  爲物體質量中心之  $y$  軸座標, 因  $x$  軸通過質量中心故  $\bar{y}=0$ , 因之上式爲

$$\Sigma X_i = 0 \dots \dots \dots (3)$$

合力中  $y$  軸上之分力爲

$$\Sigma Y_i = \alpha \int x dM = \alpha \bar{x} M \dots \dots \dots (4)$$

合力中  $z$  軸上之分力爲

$$\Sigma Z_i = 0 \dots \dots \dots (5)$$

(3), (4), (5) 三式爲切線力系合力中單獨之力, 沿  $x, y, z$  軸上之分力. 三分合力可合成一單獨之力  $F_i$  如下:

$$F_i = \sqrt{(\Sigma X_i)^2 + (\Sigma Y_i)^2 + (\Sigma Z_i)^2} = \Sigma Y_i$$

或 
$$F_i = \alpha \bar{x} M = \alpha_i M \dots \dots \dots (6)$$

但  $\alpha_i$  爲物體質量中心之切線分加速度. 此單獨之力通過  $O$  點而沿  $y$  軸方向上作用. 其大小宛如物體質量全部集中於質量中心時, 所有切線方向之力.

次求質點  $P$  上  $dF_i$  對於  $z$  軸之力勢, 得

$$r dF_i = \alpha r^2 dM$$

對於  $y$  軸之力勢爲

$$-z \frac{y}{r} dF_i = -\alpha zy dM$$

對於  $x$  軸之力勢爲

$$-z \frac{x}{r} dF_i = -\alpha xz dM$$

各質點上有效力各切線方向分力對於  $x, y, z$  軸力勢之總和各爲

$$\Sigma M_{xi} = -\alpha \int xz dM = -\alpha P_{xz} \dots\dots\dots (7)$$

$$\Sigma N_{yi} = -\alpha \int yz dM = -\alpha P_{yz} \dots\dots\dots (8)$$

$$\Sigma M_{zi} = \alpha \int r^2 dM = \alpha I_z \dots\dots\dots (9)$$

但  $I_z$  爲物體對於  $z$  軸之質量慣性勢,  $P_{yz}$  及  $P_{xz}$  各爲物體對於  $xz$  面與  $xy$  面及對於  $yz$  面與  $xy$  面之質量慣性積.

(7), (8), (9) 三式爲切線力系合力中之偶力沿  $x, y, z$  軸之分偶力.

故切線力系之合力可以 (3), (4), (5) 及 (7), (8), (9) 六式表示之.

(ii) 法線力系之合力 由 (2) 式以  $a_n = r\omega^2$  代入之得

$$dF_n = \omega^2 r dM$$

將此力分解爲平行於  $x$  及  $y$  軸之二分力, 則  $x$  軸方向上之分力爲

$$-\frac{x}{r} dF_n = -\omega^2 x dM$$

$y$  軸方向上之分力爲

$$-\frac{y}{r} dF_n = -\omega^2 y dM$$

各質點上之法線力系均同樣分解之，則平行於  $x$  軸方向上分力之和與平行於  $y$  軸方向上分力之和及平行於  $z$  軸方向上分力之和各如下：

$$\Sigma X_n = -\omega^2 \int x dM = -\omega^2 \bar{x} M \dots \dots \dots (10)$$

$$\Sigma Y_n = -\omega \int y dM = -\omega^2 \bar{y} M = 0 \dots \dots \dots (11)$$

$$\Sigma Z_n = 0 \dots \dots \dots (12)$$

但  $\bar{x}$  爲質量中心之  $x$  軸座標。(10), (11), (12) 三式爲法線力系合力中單獨之力沿  $x, y, z$  軸上之分力。三分力又可合成一單獨之力  $F_n$  如下：

$$F_n = \sqrt{(\Sigma X_n)^2 + (\Sigma Y_n)^2 + (\Sigma Z_n)^2} = \Sigma X_n$$

或 
$$F_n = -\omega \bar{x} M = \bar{a}_n M \dots \dots \dots (13)$$

但  $\bar{a}_n$  爲質量中心之法線分加速度。此單獨之力亦通過  $O$  點而沿  $x$  軸方向上作用。其大小宛如物體全部質量集中於質量中心時所有法線方向上之力。

次求質點  $P$  上  $dF_n$  對於  $x$  軸之力勢得

$$z \frac{y}{r} dF_n = \omega^2 z y dM$$

對於  $y$  軸之力勢爲

$$-z \frac{x}{r} dF_n = -\omega^2 x z dM$$

對於  $z$  軸之力勢因  $dF_n$  通過  $z$  軸故爲零。

各質點上有效力之法線方向分力對於  $x, y, z$  軸力勢之

總和爲 
$$\Sigma M_{x_n} = \omega^2 \int yz dM = \omega^2 P_{yz} \dots\dots\dots(14)$$

$$\Sigma M_{y_n} = -\omega^2 \int xz dM = -\omega^2 P_{xz} \dots\dots\dots(15)$$

$$\Sigma M_{z_n} = 0 \dots\dots\dots(16)$$

(14), (15), (16) 三式爲法線力系合力中之偶力沿  $x, y, z$  軸之分偶力。

故法線力系之合力可以 (10), (11), (12), (14), (15), (16) 六式表示之。

綜上所述,則剛體內一切質點上有效力系之合力,即爲上之切線力系與法線力系二者之合成,此總合力可以下之六式表示之:

$$F_x = a\bar{x}M \dots\dots\dots(17)$$

$$F_n = -\omega^2 \bar{x}M \dots\dots\dots(18)$$

$$F_z = 0 \dots\dots\dots(19)$$

$$\Sigma M_x = -aP_{xz} + \omega^2 P_{yz} \dots\dots\dots(20)$$

$$\Sigma M_y = -aP_{yz} - \omega^2 P_{xz} \dots\dots\dots(21)$$

$$\Sigma M_z = aI_x \dots\dots\dots(22)$$

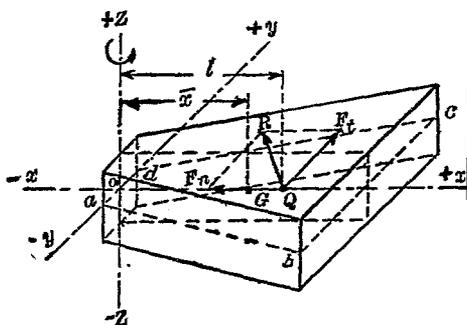
有效力系之合力即爲剛體各質點上諸外力與內力之合力,但內力之合力相互抵消,故有效力系之合力即爲作用於剛體上全部外力之合力,今設外力之合力沿  $x$  軸上之分

力為  $F_x$ , 沿  $y$  軸上之分力為  $F_y$ , 沿  $z$  軸上之分力為  $F_z$ , 對於  $x$  軸之力勢為  $\Sigma M_x$ , 對於  $y$  軸之力勢為  $\Sigma M_y$ , 對於  $z$  軸之力勢為  $\Sigma M_z$ , 則上之 (17) 至 (22) 六個方程式即成爲迴轉運動時一般剛體之運動方程式。

159. 特種剛體之運動方程式

[I] 通常工程上迴轉運動之勻質剛體多以運動平面

即以  $xy$  面爲其對稱平面. 第 527 圖上  $z$  軸爲迴轉軸, 與經過質量中心  $G$  之運動平面成直交,  $z$  軸通過質量中心  $G$ . 圖示之  $abcd$  平面即爲運動平面而亦爲物體之



第 527 圖

對稱平面. 此時由第 115 節  $P_{xz} = 0$ ,  $P_{yz} = 0$ , 而前節中 (20) 與 (21) 兩式等於零. 故運動方程式爲

$$F_x = \alpha \bar{x} M \dots\dots\dots (1)$$

$$F_z = -\omega^2 \bar{x} M \dots\dots\dots (2)$$

$$\Sigma M_z = \alpha T_z \dots\dots\dots (3)$$

但  $\Sigma M_z$  即爲外力使物體迴轉於  $z$  軸周圍之扭勢 (Torque).

此時  $\Sigma M_x$ ,  $\Sigma M_y$ ,  $\Sigma M_x$ ,  $\Sigma M_y$ , 均等於零. 故切線力系之合力僅爲一力  $F_x$ , 及一偶力  $\Sigma M_x$ , 且此二者必同在於  $xy$  面內, 由第

22節定理VI. 又可合成一力, 設該合力作用線對於  $z$  軸之直交距離為  $l$ , 則依據定理得

$$l = \frac{\sum M_{zi}}{F_i} = \frac{\alpha I_z}{\alpha \bar{x} M} = \frac{I_z}{\bar{x} M} = \frac{k_z^2}{\bar{x}} \dots \dots \dots (4)$$

但  $k_z$  為剛體質量對於  $z$  軸之旋動半徑, 因之切線力系之合力成一力, 其作用線通過  $x$  軸與  $y$  軸平行, 而與  $z$  軸之距離為  $l$

法線力系之合力僅為一力  $F_n$ , 而在於  $xy$  面內, 其作用線與  $x$  軸一致.  $F_i$  與  $F_n$  之交點離  $O$  點之距離即為  $l$ , 此交點亦即為剛體上全部外力之合力  $R$  所通過之點, 此點稱曰對於迴轉軸  $z$  之撞心 (Center of percussion). 第 527 圖上之  $Q$  點即為撞心, 外力之合力  $R$ , 其大小與方向由下二式求之.

$$R = \sqrt{(F_i)^2 + (F_n)^2} = M\bar{a}$$

$$\tan \phi = \frac{F_i}{F_n}$$

但  $\bar{a}$  為質量中心之總加速度,  $\phi$  為  $R$  與  $x$  軸正向所成之角.

若剛體為等角速度迴轉運動時,  $\alpha = 0$ . 故  $F_i = 0, \sum M_z = 0$ , 此時外力僅為  $F_n$  一力.

若  $z$  軸通過物體之質量中心, 而與對稱面直交時, 則  $\bar{x} = 0$ , 故  $F_i = 0, F_n = 0$ , 此時外力合力僅為一偶力, 其平面平行於  $xy$  面, 此偶力稱曰加速偶力 (Accelerating couple). 其運動方程式僅有一式即 .

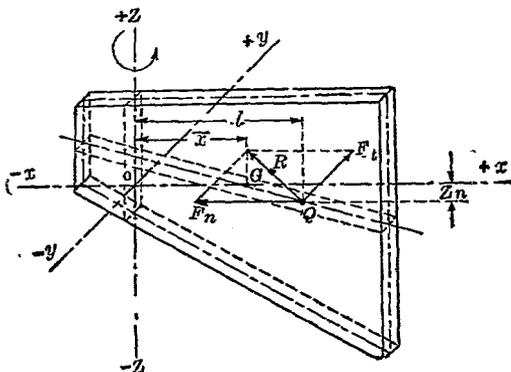
$$\sum M_z = \alpha I_z$$

此時若物體為等角速度迴轉運動時,  $\alpha = 0$ , 故  $\sum M_z = 0$ , 作

用於物體上諸外力成爲平衡。

若物體有一對稱軸而迴轉軸平行於此軸時，則  $P_{xz} = 0$ ,  $P_{yz} = 0$ , 上之結果全可應用。

[II] 若物體之對稱面非爲運動平面而爲通過質量中心及迴轉軸  $z$  之面，則物體以  $xz$  面爲對稱面，而迴轉於  $z$  軸之周圍，如第 528 圖所示。



第 528 圖

此時  $P_{yz} = 0$ ,  $P_{xz} \neq 0$ , 即  $\Sigma M_{y_t} = 0$ ,  $\Sigma M_{x_n} = 0$ , 故運動方程式爲

$$F_t = \alpha \bar{x} M \dots\dots\dots(5)$$

$$F_n = -\omega^2 \bar{x} M \dots\dots\dots(6)$$

$$\Sigma M_x = -\alpha P_{xz} \dots\dots\dots(7)$$

$$\Sigma M_y = -\omega^2 P_{xz} \dots\dots\dots(8)$$

$$\Sigma M_z = \alpha I_z \dots\dots\dots(9)$$

切線力系之合力爲  $F_t$  及偶力  $\Sigma M_{x_t}$  與  $\Sigma M_{z_t}$  此三者可合成一

力,此力之大小即等於  $F_i$ , 其作用線與  $y$  軸平行,其與  $z$  軸之直交距離  $l$ . 由第 22 節定理 VI, 爲

$$l = \frac{\Sigma M_{z_i}}{F_i} = \frac{I_z}{\bar{x}M} \dots\dots\dots(10)$$

其與  $x$  軸之距離  $z_i$  由該定理爲

$$z_i = \frac{\Sigma M_{x_i}}{F_i} = \frac{\alpha P_{xt}}{\alpha \bar{x}M} = \frac{P_{xz}}{\bar{x}M} \dots\dots\dots 11)$$

法線合力力系之合力爲  $F_n$  及  $\Sigma M_{yn}$  其合力由第 22 節定理 VI 亦可合成一力,此力之大小等於  $F_n$ , 其作用線當在於  $yz$  平面內而與  $x$  軸平行.其與  $z$  軸之直交距離  $z_n$ , 由該定理當爲

$$z_n = \frac{\Sigma M_{yn}}{F_n} = \frac{\omega^2 P_{yz}}{\omega^2 \bar{x}M} = \frac{P_{yz}}{\bar{x}M} \dots\dots\dots(12)$$

故  $z_i - z_n$ , 而  $F_i$  與  $F_n$  亦同交於一點,此點亦稱曰對於  $z$  軸之撞心.如第 528 圖之  $Q$  點.剛體上外力之合力  $R$  即通過此點,與 [I] 中同樣得

$$R = \sqrt{(F_i)^2 + (F_n)^2} = M\alpha$$

$$\tan \phi = \frac{F_i}{F_n}$$

若剛體爲等角速度運動時,  $\alpha = 0$ , 故  $F_i = 0$ ,  $\Sigma M_x = 0$ ,  $\Sigma M_z = 0$  外力之合力僅有  $F_n$  一力及  $\Sigma M_y$  一偶力.通常擺整速器 (Pendulum governor) 即爲此種迴轉物體之一例.

若  $z$  軸通過質量中心  $G$ , 則  $\bar{x} = 0$ , 故  $F_i = 0$ ,  $F_n = 0$ , 僅有三個偶力.如 (7), (8), (9) 三式所示. 9) 式之偶力  $\Sigma M_x$  亦爲加速偶力.

(7),(8)兩式之偶力對於迴轉之角加速度無關係,僅作用於迴轉軸上.稱曰均衡偶力(Balancing couple)

若此時為等角速度運動時,  $\alpha=0$ , 故  $\Sigma M_x=0, \Sigma M_z=0$  外力僅為  $\Sigma M_y$  之偶力,作用於迴轉軸上.例如一直棒對於通過質量中心,在於對稱平面內,而與棒軸成斜交之軸迴轉時為其一例.

[III] 若  $P_{xz}=0, P_{yz} \neq 0$ , 即  $\Sigma M_{xz}=0, \Sigma M_{yz} \neq 0$  時,則運動方程式為

$$F_t = \alpha \bar{x} M \dots \dots \dots (13)$$

$$F_n = -\omega^2 \bar{x} M \dots \dots \dots (14)$$

$$\Sigma M_x = \omega^2 P_{yz} \dots \dots \dots (15)$$

$$\Sigma M_y = -\alpha P_{yz} \dots \dots \dots (16)$$

$$\Sigma M_z = \alpha I_x \dots \dots \dots (17)$$

切線力系之合力為  $F_t$  及偶力  $\Sigma M_{yt}$ , 與  $\Sigma M_{zt}$ ,  $F_t$  與  $\Sigma M_{zt}$  可合成一力其作用線在於  $xy$  平面內,與  $y$  軸平行,其與  $z$  軸之直交距離等於  $l$ . 偶力  $\Sigma M_{yt}$ , 在  $xz$  面內. 法線力系之合力為  $F_n$  及偶力  $\Sigma M_{xn}$ ,  $F_n$  沿  $x$  軸作用,偶力  $\Sigma M_{xn}$  在  $yz$  面內.

故合力中之單獨之力必通過撞心,與[I]相同. 偶力  $\Sigma M_{zt}$ ,  $\Sigma M_{yt}$ , 則成為均衡偶力.

若  $\alpha=0$ , 則  $F_t=0, \Sigma M_x=0, \Sigma M_y=0$ , 外力之合力僅為  $F_n$  與  $\Sigma M_z$ .

若  $z$  軸通過質量中心,則  $\bar{x}=0$ , 此時  $F_t=0, F_n=0$ . 則合力僅

爲三偶力，即  $\Sigma M_z$  之加速偶力與  $\Sigma M_x$  及  $\Sigma M_y$  之均衡偶力，此時若  $\alpha=0$ ，則外力合力僅有一偶力  $\Sigma M_z$ 。

[III] 與 [I] 之不同者僅在於均衡偶力之有無，其他則全相同。一直線形棒其質量中心在於  $x$  軸上，但不與迴轉軸相交亦不平行時即爲本種情形之一例。

[IV] 若  $P_{xz} \neq 0$ ,  $P_{yz} \neq 0$ ，則運動方程式如第 158 節 (17) 至 (22) 之六式所示。切線力系之合力爲  $F_t$  及偶力  $\Sigma M_{x_t}$ ,  $\Sigma M_{y_t}$  與  $\Sigma M_{z_t}$ ， $F_t$  與  $\Sigma M_{x_t}$  及  $\Sigma M_{z_t}$  三者可合成一力其作用線與  $y$  軸平行，其與  $z$  軸之直交距離等於  $l$  (如 (10) 式所示)，其與  $x$  軸之直交距離等於  $z_t$  (如第 (11) 式所示)，偶力  $\Sigma M_{y_t}$  在於平行於  $xz$  面之平面內。法線力系之合力爲  $F_n$  及偶力  $\Sigma M_{x_n}$  與  $\Sigma M_{y_n}$ ， $F_n$  與  $\Sigma M_{y_n}$  可合成一力，其作用線在  $xz$  平面內，與  $x$  軸平行，與  $x$  軸之距離等於  $z_n$  (如第 (12) 式所示)。偶力  $\Sigma M_{x_n}$  在於  $yz$  面之平行面內。

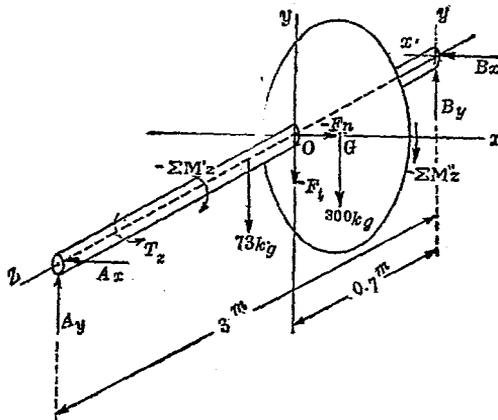
故合力中單獨之力通過撞心，此撞心在  $xz$  平面內，離  $z$  軸之距離爲  $l$ ，離  $x$  軸之距離等於  $z_t = z_n$ ，與 [II] 相同。偶力  $\Sigma M_{y_t}$  與  $\Sigma M_{x_n}$  則成均衡偶力。

若剛體爲等角速度運動時， $F_t = 0, \Sigma M_{x_t} = 0, \Sigma M_{y_t} = 0, \Sigma M_{z_t} = 0$ ，而外力之合力爲  $F_n$  及偶力  $\Sigma M_{x_n}$  與  $\Sigma M_{y_n}$ 。

若迴轉軸通過質量中心，則  $\bar{x} = 0$ ，此時  $F_t = 0$ ,  $F_n = 0$ ，作用於物體上外力之合力，僅有三個偶力，即加速偶力  $\Sigma M_z$  與均衡偶力  $\Sigma M_x$  及  $\Sigma M_y$ ，此時若爲等角速度運動時，則  $\alpha = 0$ ，故

$\Sigma M_z = 0, \Sigma M_{x_1} = 0, \Sigma M_{y_1} = 0$ , 而外力之合力成爲二均衡偶力  $\Sigma M_{x_2}$  及  $\Sigma M_{y_2}$

例1 一水平軸長 3 m., 直徑 7.5 cm., 兩端支於軸承. 自一端 0.7 m. 處有一偏心之輪如第 529 圖所示. 輪心離軸心爲 20 cm., 軸重 73 kg., 輪重 300 kg., 輪之質量中心與輪心相一致. 今加一扭勢 (Torque)  $T_z$  於軸上, 輪於軸同以角加速度  $2 \text{ rad./sec}^2$ . 迴轉角速度達  $6 \text{ rad./sec}^2$ . 之瞬間, 輪之中心與軸之中心線同在一水平面而向上動, 如圖所示. 問該瞬間內軸承對於軸之反作用力



第 529 圖

解 取  $x, y, z$  軸如圖所示, 但  $z$  軸爲迴轉軸,  $x$  軸通過輪之質量中心  $G$ , 今將輪與軸各分別考察其有效力系. 軸之中心線爲對稱線而迴轉於其周圍, 其有效力系由本節 [1] 僅爲偶

力  $\Sigma M_z$ , 輪亦迴轉於其對稱線之平行線周圍, 由本節 [I] 則輪之有效力系可導成  $F_t, F_n$  及  $\Sigma M''_z$ , 此等之值均由本節 (1), (2), (3) 式可求得之因  $\alpha = 2 \text{ rad./sec}^2$ ,  $\omega = 6 \text{ rad./sec}$ ,  $\bar{x} = 20 \text{ cm}$ , 故

$$F_t = \frac{300}{980} \times 2 \times 20 = 12.2 \text{ kg.}$$

$$F_n = -\frac{300}{980} \times 6^2 \times 20 = -220.4 \text{ kg.}$$

今將上之有效力系反其方向而各加於輪與軸上如圖上所示  $-\Sigma M'_z, -\Sigma M''_z, -F_t$ , 及  $-F_n$  等, 兩端軸承之反作用力各分為水平及垂直二分力如  $A_x, A_y, B_x, B_y$ , 則圖示逆有效力系及外力系成平衡之空間非合交非平行力系, 故得平衡方程式如下:

$$\Sigma M'_y = 220.4 \times 0.7 - A_x \times 3 = 0,$$

$$\therefore A_x = 51.4 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_x = 220.4 - A_x - B_x = 0,$$

$$\therefore B_x = 169.0 \text{ kg.}$$

$$\Sigma M'_z = 300 \times 0.7 + 12.2 \times 0.7 + 73 \times 1.5 - A_y \times 3 = 0,$$

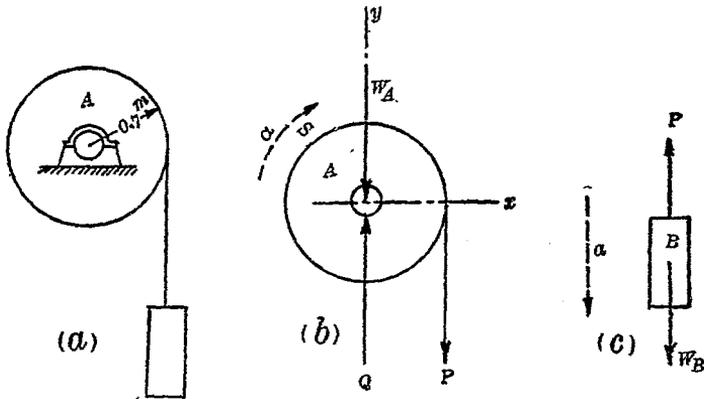
$$\therefore A_y = 109.3 \text{ kg.}$$

$$\Sigma F_y = A_y + B_y - 73 - 12.2 - 300 = 0$$

$$\therefore B_y = 275.9 \text{ kg.}$$

**例 2** 第 530 圖之捲筒 (Drum)  $A$ , 嵌合 (Key) 於水平軸上。一物體  $B$  以自由彎撓之繩懸之而繞於該捲筒, 捲筒與軸重

483 kg, 其對於迴轉軸之旋動半徑為 0.5 m, 物體 B 重 322 kg, 試求捲筒之角加速度, 物體 B 之線加速度, 及繩之拉內力. 但略去摩阻力與繩之重量.



第 530 圖

解 捲筒 A 起迴轉運動, 物體 B 起直線進行運動, 今將 A, B 分別考察之. 第 530 圖 (b) 示 A 之分離體圖,  $W_A$  示 A 之重量,  $Q$  示軸承上之反作用力, 因略去摩阻力故為垂直,  $P$  力不等於物體 B 之重量. 第 530 圖 (c) 示物體 B 之分離體圖,  $W_B$  為其重量,  $P$  為繩之拉力.

對於捲筒因有運動平面為對稱面, 故由本節 [I] 僅得下之運動方程式.

$$\Sigma M_s = a I_s$$

$$\text{或} \quad -0.7 P = \left[ \frac{483}{9.8} (0.5)^2 \right] (-a) \quad \therefore P = 17.6 a$$

對於物體  $B$  有下之運動方程式.

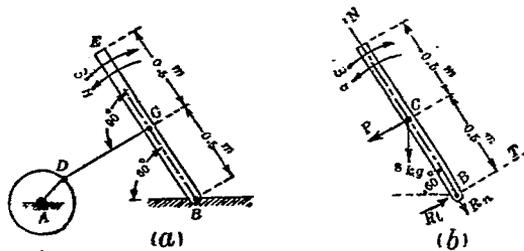
$$\Sigma F_x = \frac{W}{g} a,$$

或  $P - 322 = \frac{322}{9.8} (-a) \quad \therefore P = 322 - 32.9 a$

但  $a = 0.7 \alpha$ , 故得

$$P = 140 \text{ kg.}, \quad \alpha = 8 \text{ rad./sec}^2, \quad a = 5.6 \text{ m./sec}^2.$$

**例3** 第 531 圖 (a) 之  $BCE$  桿由曲柄  $AD$  及連桿  $DC$  而搖動.  $B, C, D$  點均以銷釘結合之.  $BCE$  桿有均勻斷面積, 其重量為  $8 \text{ kg.}$ , 在圖示位置之瞬間, 角速度  $\omega$  為  $60 \text{ r. p. m.}$ , 角加速度  $\alpha$  為  $40 \text{ rad./sec}^2$ , 求連桿  $DC$  上  $C$  端之壓力及銷釘  $B$  上之反作用力.



第 531 圖

解 桿  $BCE$  迴轉於  $B$  點, 其運動方程式由本節 [I] 之 (1), (2), (3) 三式得

$$\Sigma F_t = \alpha \bar{x} M \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_n = -\omega^2 \bar{x} M \dots\dots\dots(2)$$

$$\Sigma M_B = \alpha I_B \dots\dots\dots(3)$$

設  $B$  點上反作用力為  $R$ , 分解之為  $R_t$  與  $R_n$  二直交分力。  
 又設  $C$  點上壓力為  $P$ ,  $P$  力方向與  $\alpha$  為同方向, 由第 531 圖 (b) 得

$$P - R_t + 8 \sin 30^\circ = \frac{8}{9.8} \times 0.5 \times 40 \dots\dots\dots(4)$$

$$-R_n - 8 \cos 30^\circ = \frac{-8}{9.8} \times 0.5 \times \left(\frac{60 \times 2\pi}{60}\right)^2 \dots\dots\dots(5)$$

$$(8 \sin 30^\circ + P) \times 0.5 = \frac{1}{3} \times \frac{8}{9.8} \times 1^2 \times 40 \dots\dots\dots(6)$$

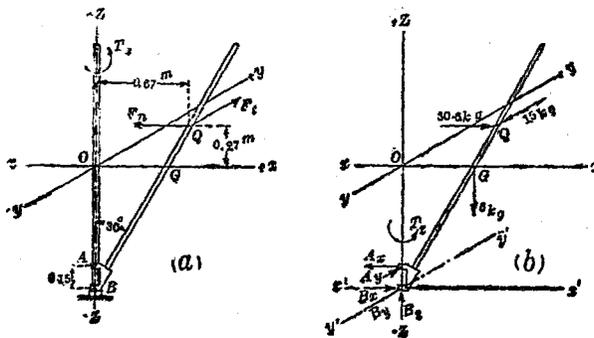
解之得

$$P = 17.8 \text{ kg}, \quad R_t = 5.5 \text{ kg}, \quad R_n = 9.1 \text{ kg}.$$

因之得

$$R = \sqrt{(5.5)^2 + (9.1)^2} = 10.6 \text{ kg}.$$

例 4 一細直線桿長 2 m., 重 6 kg., 下端套於垂直軸如第 532 圖 (a) 所示。今加以扭勢  $L$ , 桿之角加速度為  $5 \text{ rad./sec}^2$ , 問



第 532 圖

角速度達  $10 \text{ rad./sec.}$  時，垂直軸對於桿之反作用力幾何？但桿之下端與垂直軸套合部份之質量可略去之。

解 取  $x, y, z$  三軸，但  $z$  為迴轉軸，而  $x$  軸通過桿之重心  $G$ ，而  $xz$  面為對稱面，故本例與本節 [II] 之情形相同 有效力系之合力  $R$  可分成  $F_x$  與  $F_z$  二分力，此合力與對稱面交於  $Q$  點 此  $Q$  點距  $x$  軸為  $\frac{P_x}{\bar{x}M}$  距  $z$  軸為  $\frac{I_z}{\bar{x}M}$ ，今將  $I_z$  及  $P_x$  先計算之如下：

$$I_z = \frac{1}{12} Ml^2 \sin^2 30^\circ + M \times (l \sin 30^\circ)^2 = 0.2 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}$$

設  $dm$  為桿之極小部份長  $dL$  之質量 因桿之單位長重量為  $3 \text{ kg./m.}$  故

$$dm = \frac{3}{9.8} dL = 0.3 dL = 0.3 \frac{dz}{\cos 30^\circ} = 0.34 dz.$$

因之

$$\begin{aligned} P_{xz} &= \int xz dm = 0.34 \int_{-0.866}^{+0.866} xz dz = 0.34 \int_{-0.866}^{+0.866} (0.5 + 0.58z) z dz \\ &= 0.082 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.} \end{aligned}$$

故  $Q$  點離  $z$  軸為

$$0.2 \div \left( 0.5 \times \frac{6}{9.8} \right) = 0.67 \text{ m}$$

$Q$  點離  $x$  軸為

$$0.082 \div \left( 0.5 \times \frac{6}{9.8} \right) = 0.27 \text{ m.}$$

由本節 [II] (7), (8), (9) 三式,  $F_t$  與  $F_n$  對於  $z$  軸之力勢須爲正, 對於  $x$  與  $y$  軸之力勢須爲負. 故  $Q$  點必在  $x$  軸之上方及  $z$  軸之右方如 (a) 圖所示.

因  $\alpha = 5 \text{ rad./sec}^2$ ,  $\omega = 10 \text{ rad./sec}$ ,

故 
$$F_t = 5 \times 0.5 \times \frac{6}{9.8} = 1.5 \text{ kg},$$

$$F_n = -(10)^2 \times 0.5 \times \frac{6}{9.8} = 30.6 \text{ kg}.$$

今於第 532 圖 (b) 上, 加以逆有效力與外力 (即桿重 6 kg, 扭勢  $T_z$ ,  $A$  點上反作用力  $A_x, A_y$ ,  $B$  點上反作用力  $B_x, B_y, B_z$ ) 相平衡, 成異平面非合交非平行力系得平衡方程式如下:

$$\Sigma M_x' = (1.5 \times 1.4) - (A_y \times 0.15) = 0,$$

$$A_y = 11.4 \text{ kg}.$$

$$\Sigma F_y = 11.4 - 1.5 - B_y = 0,$$

$$B_y = 9.9 \text{ kg}.$$

$$\Sigma M_x' = (30.6 \times 1.14) + (6 \times 0.5) - (A_x \times 0.15) = 0,$$

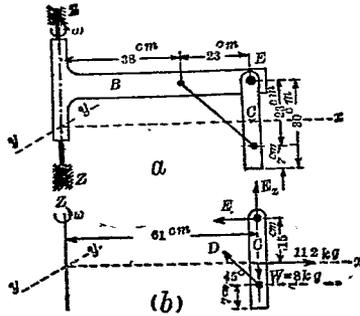
$$A_x = 252.7 \text{ kg}.$$

$$\Sigma F_x = 30.6 - 252.7 + B_x = 0,$$

$$B_x = 222.1 \text{ kg}.$$

**例 5** 第 533 圖 (a) 之水平桿  $B$  以等角速度 45 r. p. m. 迴轉於垂直軸  $zz$  之周圍. 另有一細桿  $C$ , 其斷面積爲常數, 長 30 cm., 重 8 kg., 以平滑之銷釘連結於水平桿, 并以無重量之繩  $D$  繫

之,使  $C$  桿保持其垂直位置. 求  $D$  繩之拉力及  $C$  桿上  $E$  銷釘處之反作用力.



第 533 圖

解 作  $C$  之分離體圖, 如第 533 圖 (b), 此  $C$  桿迴轉於  $y$  軸之周圍, 其外力為  $W$ ,  $D$  及  $E$  點上之反作用力  $E_x, E_z$ , 今將逆有效力加於  $C$  桿上, 可得平衡. 因  $\alpha = 0$ , 故由本節 [II] 得

$$F_z = 0$$

$$F_x = -\omega^2 \bar{x} M = -\left(\frac{45 \times 2\pi}{60}\right)^2 \times 0.61 \times \frac{8}{9.8} = -11.2 \text{ kg.}$$

細桿  $C$  之斷面積設為  $A$ , 密度設為  $\delta$ , 則

$$P_x = \int_{-15}^{15} \delta A x z dz = 61 \delta A \int_{-15}^{15} z dz = 0$$

因之得

$$\Sigma M_x = 0$$

$$\Sigma M_y = 0$$

$$\Sigma M_z = 0$$

故有効力系之合力僅爲  $F_n$  其作用線與  $x$  軸一致。今加逆有効力  $-F_n$  於質量中心，則  $-F_n$  與  $W, D, E_x, E_y$  五力相平衡由平衡條件得

$$\Sigma F_x = 11.2 - E_x - D \cos 45^\circ = 0$$

$$\Sigma F_y = E_y + D \sin 45^\circ - 8 = 0$$

$$\Sigma M_E = 11.2 \times 15 - D \times 23 \cos 45^\circ = 0$$

解之得

$$D = 10.2 \text{ kg.}, \quad E_x = 0.7 \text{ kg.}, \quad E_y = 3.9 \text{ kg.}$$

160. 向心力與離心力 物體以等角速度迴轉於一固定軸之周圍時，則第158節之(18)式即

$$F_n = -\omega^2 r M$$

表示作用於物體上之向心力 (Centripetal force) 之大小。其指向向於迴轉軸，其作用線通過撞心而直交於迴轉軸。離心力 (Centrifugal force) 者物體作用於迴轉軸上之反作用力，與向心力相等反向而作用線相一致。

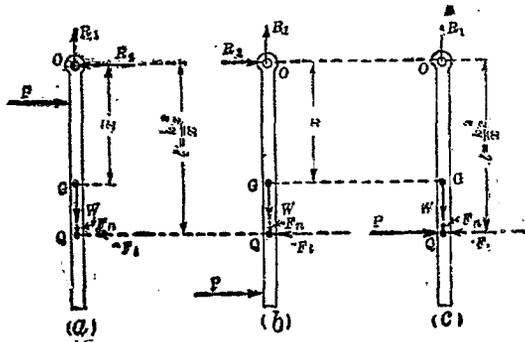
但工程上對於固定軸周圍迴轉運動之物體，向心力雖爲實際作用於物體上之力，但常重視其離心力之影響。例如迴轉中之圓環因離心力所生之拉內力，在曲線軌道上進行之車所受之離心力，迴轉中之物體上各部之離心力作用等是也。

161. 關於撞心之性質 第159節中所述之  $Q$  點即迴轉運動之剛體上有効力系合力所通過之點稱曰該剛體對於其

迴轉軸之撞心，該點對於迴轉軸之直交距離  $l$  等於  $\frac{I_2}{\bar{x}M}$  或  $\frac{\bar{k}_2^2}{\bar{x}}$ ，但  $\bar{k}_2$  為剛體對於該迴轉軸之旋動半徑， $\bar{x}$  為剛體之質量中心對於該迴轉軸之直交距離。設剛體對於通過質量中心而與迴轉軸相平行之軸，其旋動半徑為  $\bar{k}_c$ ，則

$$l = \frac{\bar{x}^2 + \bar{k}_c^2}{\bar{x}} = \frac{\bar{k}_2^2}{\bar{x}} + \bar{x}$$

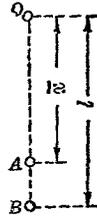
第534圖上重  $W$  之桿可自由迴轉於水平軸之周圍，以  $P$  力擊之，若  $P$  力加於撞心上方如 (a) 圖，則由第159節 [I] 有効力系之合力通過圖示之  $Q$  點，今假定以逆有効力  $-F_1$  與  $-F_2$  作用之如圖所示，則該桿可得平衡。因之迴轉軸上  $O$  點有反作用力  $R_2$ ，且  $P$  力愈近於  $O$  時  $R_2$  亦愈增加。若  $P$  力加於撞心之下方如 (b) 圖，則同樣迴轉軸上  $O$  點亦有反作用力  $R_2$ ，但方向與 (a) 圖相反。且  $P$  力愈遠於  $O$  點時  $R_2$  亦愈增加。若  $P$  力適加於撞心，則迴轉軸上  $O$  點之反作用力  $R_2$  不能存在。



第534圖

例如以棒擊球若球適擊於棒之撞心上，則手不感反擊若球擊於手之近傍或擊於棒之他端，則手上感反擊力甚強。

定理 第 535 圖設紙面為剛體之迴轉平面， $O$  點為迴轉軸在迴轉平面上之射影， $A$  點為質量中心之射影， $B$  點為撞心之射影若該剛體以通過  $B$  點之平行軸為迴轉軸時，則  $O$  點為撞心之射影。



第 535 圖

證 設  $OA = \bar{x}$   $OB = l$ 。若迴轉軸通過  $O$  點時，則

$$l = \frac{k_z^2}{\bar{x}} = \frac{\bar{k}_z^2}{\bar{x}} + \bar{x} \dots\dots\dots(1)$$

若物體以通過  $B$  點而與  $O$  點上之軸相平行之軸為迴轉軸時，則其撞心距  $B$  點之距離  $V$  為

$$V = \frac{k_z'^2}{\bar{x}'} \dots\dots\dots(2)$$

但  $\bar{x}' = AB$ ， $k_z'$  為剛體對於  $B$  點上平行軸之旋動半徑因

$$\bar{x}' = l - \bar{x}, \text{ 且 } k_z'^2 = \bar{k}_z^2 + \bar{x}'^2 = \bar{k}_z^2 + (l - \bar{x})^2.$$

$$\therefore V = \frac{\bar{k}_z^2 + (l - \bar{x})^2}{l - \bar{x}} = \frac{\bar{k}_z^2}{l - \bar{x}} + l - \bar{x} \dots\dots\dots(3)$$

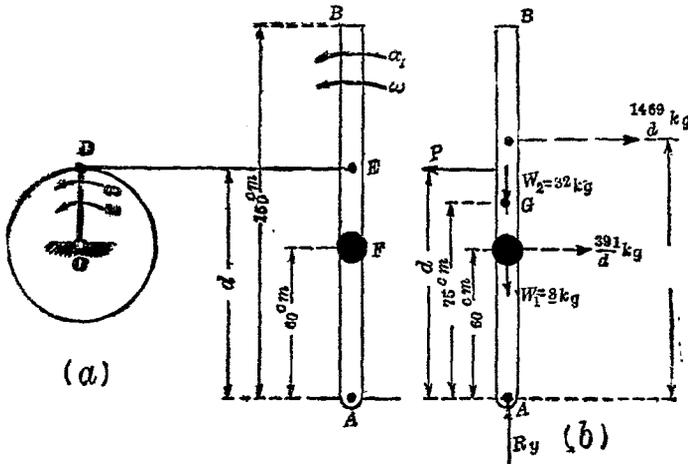
但由 (1) 式得  $l - \bar{x} = \frac{\bar{k}_z^2}{\bar{x}}$

$$\therefore V = \bar{x} + \frac{\bar{k}_z^2}{\bar{x}} = l \dots\dots\dots(4)$$

故本定理已得證明。

由本定理可知撞心與迴轉中心可互易。

例 第536圖 (a) 上  $AB$  桿可迴轉於  $A$  點之周圍。曲柄  $CD$  長  $30\text{ cm.}$ ,  $DE$  爲連桿 (Link) 曲柄之角速度  $\omega$  在某瞬間內爲甚小, 其角加速度  $\alpha$  在該瞬間內爲  $20\text{ rad./sec}^2$ ,  $AB$  桿重  $32\text{ kg.}$  其長爲  $150\text{ cm.}$ , 今以重  $8\text{ kg.}$  之小物體  $F$  附着於  $AB$  桿上, 其離  $A$  端爲  $60\text{ cm.}$ , 此  $F$  可視爲一質點。若  $A$  點上無水平反作用力時, 求  $B$  點離  $A$  點之距離  $d$ 。



第 536 圖

解 因  $\omega_1$  爲極小, 故  $F_n$  可略去之。又  $B$  點在  $AB$  桿上之切線加速度爲  $da_1$ ,  $D$  點在  $OD$  曲柄上之切線加速度爲

$$\overline{OD} \cdot \alpha = 30 \alpha$$

但  $E$  與  $D$  沿  $DE$  線上之加速度相等,故

$$da_1 = 30a$$

因之

$$a_1 = \frac{30a}{d} = \frac{600}{d}$$

$AB$  桿之有效力合力為

$$F_1 = a_1 M = \frac{32}{980} \times 75 \times \frac{600}{d} = \frac{1469}{d} \text{ kg.}$$

其作用線距  $A$  點為

$$l = \frac{k_A^2}{\bar{x}} = \frac{\frac{1}{3}l^2}{\frac{1}{2}l} = \frac{2}{3}l = \frac{2}{3} \times 150 = 100 \text{ cm.}$$

$F$  質點之有效力為

$$60 a_1 m = 60 \times \frac{600}{d} \times \frac{8}{980} = \frac{391}{d} \text{ kg.}$$

今將此有效力加於桿及質點上如圖所示,則成平衡力系,因之得

$$\Sigma F_x = \frac{1469}{d} + \frac{391}{d} - P = 0$$

$$\Sigma M_A = Pd - \frac{1469}{d} \times 100 - \frac{391}{d} \times 60 = 0$$

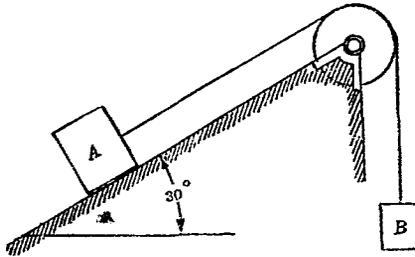
解之得

$$d = 91.6 \text{ cm}$$

## 習 題 27.

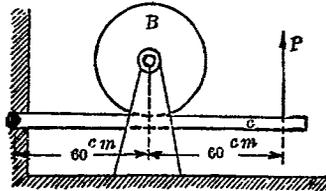
1. 第 537 圖上物體  $A$  重 130 kg, 靜止於  $30^\circ$  之斜面上, 以自

由撓曲之繩將  $A$  連結於重  $320 \text{ kg}$ . 之物體  $B$ , 中間通過  $C$  輪  
 重  $160 \text{ kg}$ , 其直徑為  $50 \text{ cm}$ , 其心軸直徑  $10 \text{ cm}$ , 軸摩阻力為  
 $5 \text{ kg}$ ,  $A$  與斜面間之摩阻力係數為  $0.1$ , 求 (a)  $B$  之加速度, (b)  $C$   
 輪之角加速度, (c) 繩作用於  $B$  上之拉力, 但略去輪上心軸通  
 過部份所除去之質量.



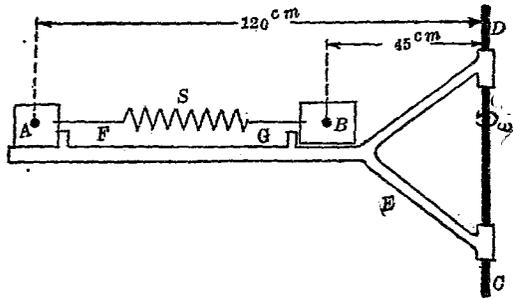
第 537 圖

2. 第 538 圖中  $B$  輪上加以制動器  $C$  時, 以角速度  $\omega = 120$   
 r. p. m. 而迴轉. 此輪為實心 (Solid) 之圓柱體, 半徑  $25 \text{ cm}$ , 重  
 $1000 \text{ kg}$ , 若制動器與輪面之摩阻力係數為  $0.2$ , 問三秒內輪  
 之角速度減為  $30 \text{ r. p. m.}$  時, 所需之  $P$  力? 但略去輪摩阻力.



第 538 圖

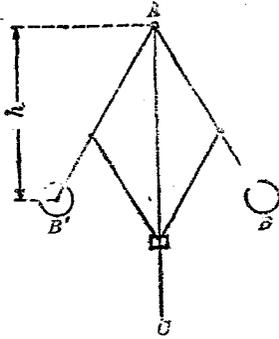
3. 第539圖之物體  $A, B$  靜止於  $E$  架上, 而  $E$  可迴轉於  $CD$  軸之周圍. 物體  $A$  重  $4\text{ kg}$ , 物體  $B$  重  $12\text{ kg}$ , 若  $E$  迴轉時, 彈簧  $S$  之拉力為  $15\text{ kg}$ , 今略去  $A$  與  $B$  下之摩阻力及彈簧之質量, 問  $E$  以角速度  $30\text{ r. p. m.}$  迴轉時, 作用於  $F$  及  $G$  上之壓力各若何?



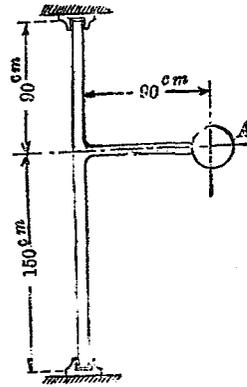
第 539 圖

4. 第540圖示一簡單之整速器 (Governor), 今略去球  $B, B$  以外部份之重量, 求證  $h = \frac{g}{\omega^2}$ , 但  $\omega$  為整速器之角速度. 若  $AB$  為  $38\text{ cm.}$ , 各球重  $7\text{ kg.}$  等角速度為  $60\text{ r. p. m.}$ , 求臂  $AB$  內之拉內力.

5. 第541圖上一均質之球  $A$ , 其直徑為  $30\text{ cm.}$ , 重  $130\text{ kg.}$ , 此球以水平桿附着於垂直之  $BC$  軸, 以等角速度  $60\text{ r. p. m.}$  而迴轉於  $BC$  軸之周圍. 在圖示之位置時求  $B, C$  兩點支座對於  $BC$  軸之反作用力. 但假定  $B$  點之反作用力為水平, 并略去摩阻力與  $BC$  軸及水平桿之重量.

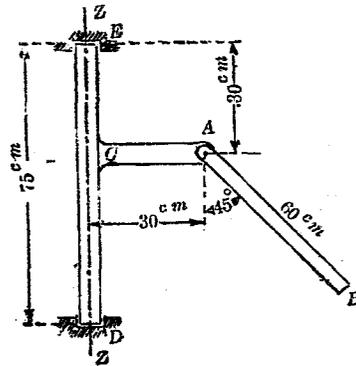


第 540 圖



第 541 圖

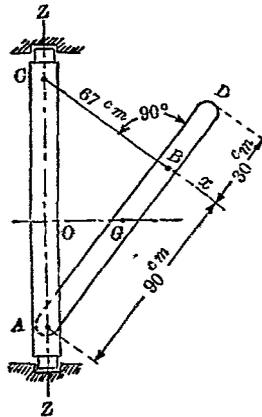
6. 第 542 圖垂直軸  $DE$  上有一水平桿  $CA$ , 其  $A$  端以平滑銷釘連結一細長之  $AB$  桿此  $AB$  桿重  $4 \text{ kg}$ ,  $CA$  與  $AB$  二桿以等角速度迴轉於垂直軸之周圍. 求圖示位置時之角速度, 并求銷釘作用於  $AB$  桿上反作用力之垂直與水平分力. 試計算



第 542 圖

$D$  與  $E$  處支座對於垂直軸上之反作用力, 但略去垂直軸與水平桿  $CA$  之重量.

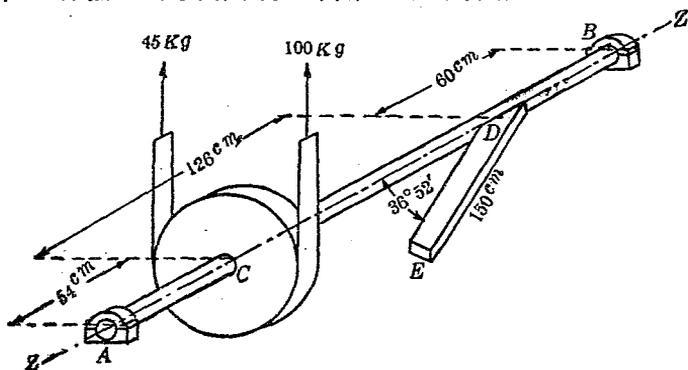
7. 第 543 圖上  $AD$  為細長之桿, 斷面均勻, 重  $16 \text{ kg}$ , 以平滑銷釘  $A$  連結於垂直軸  $AC$ , 并以  $BC$  繩拉之. 垂直軸以等角速度  $120 \text{ r. p. m.}$  迴轉時求繩之拉內力及銷釘  $A$  對於  $AD$  桿上反作用力之水平與垂直分力, 但略去繩之重量.



第 543 圖

8. 第 544 圖一水平軸  $AB$  上固着一  $DE$  棒. 軸之直徑為  $7.5 \text{ cm}$ , 其重量為  $96 \text{ kg}$ , 棒之重量為  $32 \text{ kg}$ , 可視為一均勻斷面之細長棒. 今略去滑輪  $C$  之重量, 在圖示位置時  $DE$  棒為水平, 全體之角速度為  $90 \text{ r. p. m.}$ , 滑輪直徑為  $60 \text{ cm}$ , 受二垂直輪帶 (Belt) 之拉力如圖所示. 求  $A, B$  處軸承對於軸之反作用力之水平與垂直分力, 但略去摩擦阻力.

9. 一均勻斷面之勻質細長棒長 180 cm. 重 10 kg. 其一端懸於水平軸, 其中點受水平力 10 kg 之作用. 求 (a) 角加速度, (b) 質量中心之線加速度 (c) 水平軸對於棒之水平反作用力, (d) 若無水平反作用力時則水平力當作用於何處?



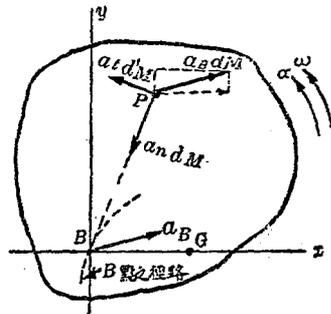
第 544 圖

### III. 平面運動

162. 平面運動時剛體之動力學 由第 146 節剛體之平面運動在任何瞬間可視為對於運動平面上任意一點  $B$  處直交於運動平面之軸之廻轉運動及各質點進行運動二者所合成. 此進行運動之速度與加速度全與  $B$  點上所有者相同. 換言之, 剛體內各質點之運動可分解之為  $B$  點周圍之廻轉運動及與  $B$  點相同之進行運動. 故任意一點之加速度有三個分加速度, 即由  $B$  點周圍廻轉運動所起之切線加速度  $a_t = r\alpha$ , 法線加速度  $a_n = r\omega^2$ , 及由進行運動所生之加速度  $a_3$ , 此即等於  $B$  點之加速度. 但  $\omega, \alpha$  為任意瞬間內剛體各點對於

直交於運動平面之任意軸之角速度與角加速度，在同一瞬間，各質點之 $\omega$ 與 $\alpha$ 皆同，且與迴轉軸之位置無關係。 $r$ 為某質點至 $B$ 點上迴轉軸之直交距離。迴轉運動之加速度 $a_t$ 與 $a_n$ 為某質點對於 $B$ 點之相對加速度，進行運動之加速度 $a_B$ 為 $B$ 點之絕對加速度。

第545圖上任意一剛體，紙面為其通過質量中心之運動平面。今取某瞬間內 $B$ 點之位置為原點，取 $x$ 軸通過質量中心 $G$ ，該瞬間內 $B$ 之加速度為 $a_B$ ，則任意質點 $P$ 上之有效力可以 $a_t dM$ 、 $a_n dM$ ，及 $a_B dM$ 表示之，但 $dM$ 為該質點之質量。今將切線力系與法線力系由第158節所述方法各分別求其合力，則可以沿 $x, y, z$ 三軸方向上之分力與分偶力表示之。即



第545圖

$$F_t = a_t \bar{x} M = F_y$$

$$F_n = -\omega^2 \bar{x} M = F_x$$

$$F_z = 0$$

$$\Sigma M_x = -a_t P_{yz} + \omega^2 P_{yz}$$

$$\Sigma M_y = -a_n P_{yz} - \omega^2 P_{yz}$$

$$\Sigma M_z = a_t I_x$$

又有効力  $a_n dM$  可分成  $x$  與  $y$  軸方向上之分力即  $a_{Bx} dM$  及  $a_{By} dM$ , 全部質點上  $x$  與  $y$  軸方向上二種分力系之各合力一般爲一力及一偶力. 其單獨之力沿  $x$  軸與  $y$  軸方向上作用, 其大小爲  $a_{Bx} M$  及  $a_{By} M$ , 其偶力可求之如下.

$a_{Bx} dM$  力系對於  $y$  軸之力勢總和爲

$$\int a_{Bx} z dM = a_{Bx} \int z dM = a_{Bx} M \bar{z} = 0$$

但質量中心  $G$  之座標爲  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ , 因  $x$  軸通過  $G$  點, 故

$$\bar{z} = 0, \quad \bar{y} = 0$$

$a_{By} dM$  力系對於  $z$  軸之力勢總和爲

$$-\int a_{By} y dM = -a_{By} \int y dM = -a_{By} M \bar{y} = 0$$

$a_{By} dM$  力系對於  $x$  軸之力勢總和爲

$$-\int a_{By} z dM = -a_{By} \int z dM = 0$$

$a_{Bx} dM$  力系對於  $z$  軸之力勢總和爲

$$\int a_{Bx} x dM = a_{Bx} \int x dM = a_{Bx} M \bar{x}$$

故全部有効力系之合力可以以下之六式表示之.

$$F_x = a_{Bx} M - \omega^2 \bar{x} M \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$F_y = a_{By} M + \omega^2 \bar{x} M \quad \dots\dots\dots(2)$$

$$F_z = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\Sigma M_x = -\alpha P_{zx} + \omega^2 P_{yz} \quad \dots\dots\dots 4)$$

$$\Sigma M_x = -aP_{yz} - \omega^2 P_{xz} \dots\dots\dots(5)$$

$$\Sigma M_z = aI_x + a_{By}M\bar{x} \dots\dots\dots(6)$$

若  $F_x, F_y, F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y, \Sigma M_z$  表示外力之合力沿  $x, y, z$  三軸上之分力與分偶力時,上之六式即為運動方程式.

若運動平面為物體之對稱面時,則  $P_{xz}=0, P_{yz}=0$ , 故運動方程式如下:

$$F_x = a_{Bx}M - \omega^2\bar{x}M \dots\dots\dots(7)$$

$$F_y = a_{By}M + a\bar{x}M \dots\dots\dots(8)$$

$$\Sigma M_z = aI_x + a_{By}\bar{x}M \dots\dots\dots(9)$$

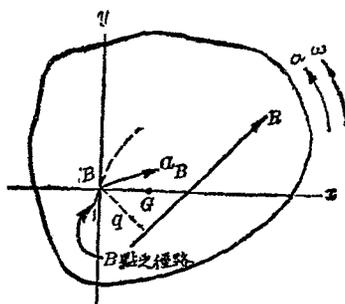
此時若原點取於質量中心  $G$  上,則  $\bar{x}=0$ , 而運動方程式如下:

$$F_x = \bar{a}_x M \dots\dots\dots(10)$$

$$F_y = \bar{a}_y M \dots\dots\dots(11)$$

$$\Sigma M_z = a\bar{I}_z \dots\dots\dots(12)$$

上述有效力系合力之作用線可求之如下.若運動平面為物體之對稱面時,則有效力系之合力為(7), (8), (9)三式所示沿  $x, y$  軸方向上之  $F_x$  與  $F_y$  及對於  $z$  軸之偶力  $\Sigma M_z$ . 因之合力必在於  $xy$  平面內. 設第546圖上  $R$  為  $F_x$  與  $F_y$  二者



第 546 圖

合力之大小,則

$$R = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2}$$

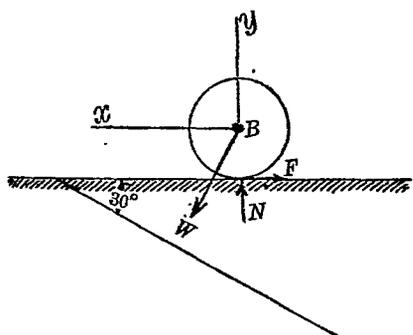
其作用線與  $B$  點之直交距離設為  $q$ , 則  $R$  對於  $z$  軸之力勢當等於  $\Sigma M_z$ , 因之

$$q = \frac{\Sigma M_z}{R} \dots\dots\dots(13)$$

若  $xy$  面為對稱面而  $B$  為原點時, 則合力如 (10) (11) (12) 三式所示而合力之作用線距  $B$  點之距離為

$$\bar{q} = \frac{\alpha \bar{I}_z}{aM} = \frac{\alpha}{a} \bar{k}_z^2 \dots\dots\dots(14)$$

例 1 一均質圓柱體, 直徑為 1 m., 重 400 kg., 沿  $30^\circ$  斜面迴轉下降. 其質量中心有初速度 16 m./sec., 斜面非光滑, 可阻止圓柱體之滑下. 求質量中心之加速度, 摩阻力之大小及 10 秒末質量中心之速度.



第 547 圖

解 圓柱體受  $W, N, F$  三力之作用而為平面運動, 如第 547 圖所示. 今取圖示之  $x$  與  $y$  軸則運動方程式如 (10), (11), (12) 三式所示. 由 (10) 式得

$$400 \sin 30^\circ - F = \frac{400}{9.8} \bar{a}_x$$

由(11)式得

$$-400 \cos 30^\circ + N = 0$$

由(12)式得

$$0.5F - \frac{1}{2} \times \frac{400}{9.8} (0.5)^2 a$$

但  $\bar{a}_x = \bar{a}$   $r\alpha = 0.5a$  解上三式得:

$$\bar{a} = 3.3 \text{ m/sec.}^2,$$

$$F = 68 \text{ kg.}$$

$$v_{10} = 16 + 3.3 \times 10 = 49 \text{ m./sec.}$$

**例2** 蒸汽機之連接桿長  $l=2\text{m.}$ , 重  $110\text{kg}$ , 曲柄長  $r=0.3\text{m.}$  蒸汽機之速度  $\omega_1=300 \text{ r. p. m.}$ , 叉頭上之壓力  $P$  當  $\theta=30^\circ$  時為  $9000 \text{ kg.}$ , 假定連接桿有均一之斷面, 求曲柄銷釘上切線方向之壓力  $Q$ , 沿曲柄方向上之壓力  $S$ , 及叉頭處向上壓力  $N$ , 但當去摩阻力, 假定  $N$  為垂直作用

解 連接桿為平面運動, 取  $x y$  軸如圖所示, 因

$$l \sin \phi = r \sin 30^\circ$$

$$\therefore \sin \phi = 0.5 \times \frac{0.3}{2} = \frac{0.15}{2} = 0.075.$$

$$\phi = 4^\circ 18'$$

茲由(7), (8), (9)三式求之.

$$I_x = \frac{1}{3} Ml^2 = \frac{1}{3} \times \frac{110}{9.8} \times 2^2 = 15 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}$$

$$\bar{x} = 1\text{m.} \quad \bar{y} = 0$$

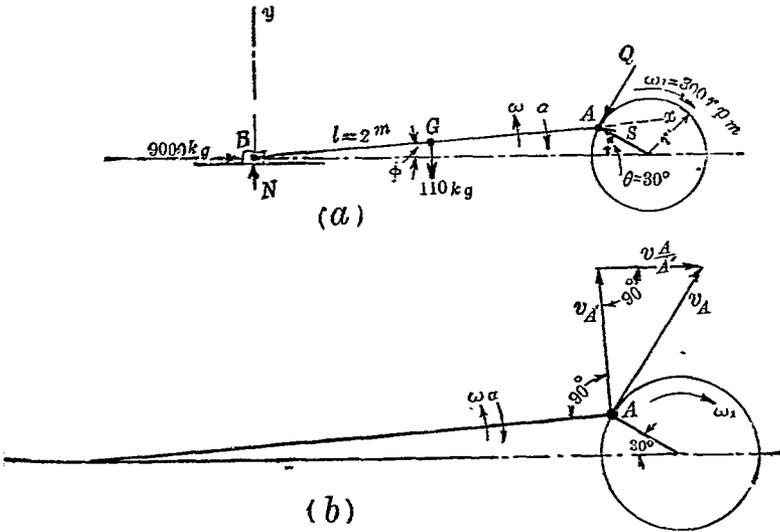
又頭B之加速度由第134節(6)式求之如下.但此加速度為水平方向.

$$a_B = 0.3 \times \left( \frac{300 \times 2\pi}{60} \right)^2 \left( \cos 30^\circ + \frac{0.3}{2} \cos 60^\circ \right) = 278 \text{ m./sec}^2.$$

因之得

$$a_{B_x} = 278 \cos 4^\circ 18' = 277.2 \text{ m./sec}^2.$$

$$a_{B_y} = -278 \sin 4^\circ 18' = -20.9 \text{ m./sec}^2.$$



第 548 圖

由第 548 圖 (b) 設 A 為圓上之點, A' 為連接桿上之點, 則

$$v_{A'} = 0.3 \times \frac{300 \times 2\pi}{60} \times \cos 34^\circ 18' = 7.82 \text{ m./sec.}$$

但  $v_A' = \omega l$

$$\therefore \omega = \frac{7.82}{2} = 3.91 \text{ rad./sec.}$$

依題意 A 點以等角速度運動,故

$$a_t = r\omega_1^2 = 0.3 \times \left(\frac{300 \times 2\pi}{60}\right)^2 = 295.79 \text{ m./sec}^2.$$

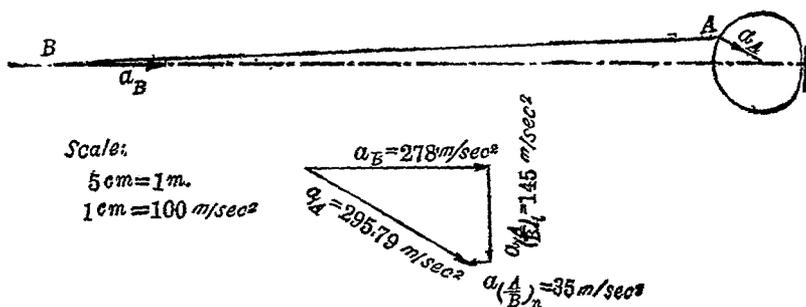
但  $a_A = a_B \rightarrow a_B = \left(\frac{a_A}{B}\right)_t \rightarrow \left(\frac{a_A}{B}\right)_n \rightarrow a_B$

$\left(\frac{a_A}{B}\right)_t$  與  $\left(\frac{a_A}{B}\right)_n$  各為直交於連接桿及沿連接桿上之加速度。

由第 549 圖之作圖得

$$\left(\frac{a_A}{B}\right)_t = a_t = -145 \text{ m./sec}^2,$$

故  $a = -72.5 \text{ rad./sec}^2.$



第 549 圖

由 (7) 式得

$$-110 \sin 4^\circ 18' + N \sin 4^\circ 18' + 9000 \cos 4^\circ 18'$$

$$= S \cos 34^\circ 18' - Q \cos 55^\circ 42'$$

$$= \frac{110}{9.8} \times 277.2 - (3.91)^2 \times 1 \times \frac{110}{9.8}$$

$$\text{或} \quad 0.075 N - 0.826 S - 0.564 Q = -6914.0$$

由(8)式得

$$\begin{aligned} & -110 \cos 4^\circ 18' + N \cos 4^\circ 18' - 9000 \sin 4^\circ 18' \\ & + S \sin 34^\circ 18' - Q \sin 55^\circ 42' \\ & = -20.9 \times \frac{110}{9.8} - 72.5 \times 1 \times \frac{110}{9.8} \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad 0.997 N + 0.564 S - 0.826 Q = -263.7$$

由(9)式得

$$\begin{aligned} & -110 \times 1 \times \cos 4^\circ 18' + S \times 2 \times \sin 34^\circ 18' - Q \times 2 \times \sin 55^\circ 42' \\ & = -72.5 \times 15 - 20.9 \times 1 \times \frac{110}{9.8} \end{aligned}$$

$$\text{或} \quad 0.564 S - 0.826 Q = -606.2$$

解之得

$$N = 266 \text{ kg.}, \quad Q = 4348 \text{ kg.}, \quad S = 5430 \text{ kg.}$$

**例3** 第550圖上 $EF$ 爲一繩拉緊於垂直位置, $CD$ 爲一同樣之繩拉緊於水平位置.二繩相距計2 m; $AB$ 爲均一斷面之細棒,長3 m.,重48 kg.,其一端自由滑動於 $EF$ 繩上,他端自由滑動於 $CD$ 繩上略去摩阻力.棒上之外力爲自重及兩端之反作用力.在圖示位置時,角速度爲1 rad./sec.,其方向爲反時針方向.求棒之角加速度及其兩端反作用力之水平與垂直分力.

**解** 取原點於棒之質量中心上,取 $x, y, z$ 三直交軸如圖所

示，則  $\ddot{x} = 0$ ，故本節中(1)至(6)之運動方程式可書之如下：

$$F_x = \ddot{a}_x M \dots\dots\dots(15)$$

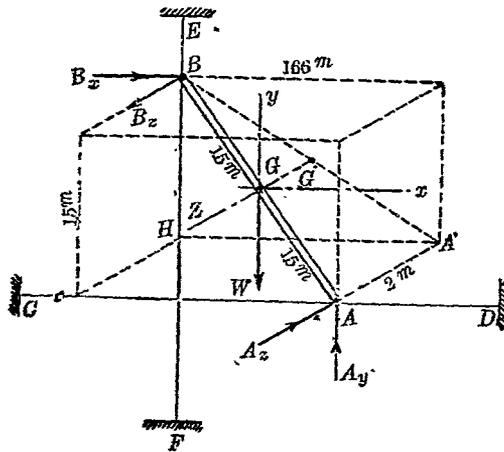
$$F_y = \ddot{a}_y M \dots\dots\dots(16)$$

$$F_z = 0 \dots\dots\dots 17)$$

$$\Sigma M_x = -\alpha \bar{P}_{xz} + \omega^2 \bar{P}_{yz} \dots\dots\dots(18)$$

$$\Sigma M_y = -\alpha \bar{P}_{yz} - \omega^2 \bar{P}_{xz} \dots\dots\dots(19)$$

$$\Sigma M_z = \alpha \bar{I}_z \dots\dots\dots(20)$$



第 550 圖

棒兩端反作用力之分力假定如圖，因摩阻力已略去，故

$$A_x = 0, \quad B_y = 0$$

AB 棒與三座標軸所成之角各計算如下：

$$\theta_x = \cos^{-1}\left(-\frac{1.66}{3}\right) = 123^\circ 34'$$

$$\theta_y = \cos^{-1}\left(+\frac{1.5}{3}\right) = 60^\circ 00'$$

$$\theta_z = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{3}\right) = 131^\circ 46'$$

$$\begin{aligned}\bar{I}_z &= \frac{1}{12} Ml^2 (\sin \theta_z)^2 = \frac{1}{12} \times \frac{48}{9.8} \times 3^2 \times (\sin 131^\circ 46')^2 \\ &= 2.03 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{P}_{xz} &= \frac{1}{12} Ml^2 \cos \theta_x \cos \theta_z \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{48}{9.8} \times 3^2 \times \cos 123^\circ 34' \times \cos 131^\circ 46' \\ &= 1.36 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}\end{aligned}$$

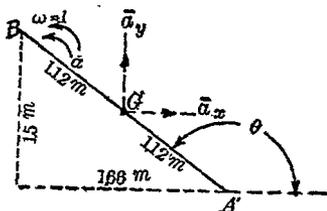
$$\begin{aligned}\bar{P}_{yz} &= \frac{1}{12} Ml^2 \cos \theta_y \cos \theta_z \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{48}{9.8} \times 3^2 \times \cos 60^\circ \times \cos 131^\circ 46' \\ &= -1.21 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}\end{aligned}$$

今將  $AB$  棒投射於運動平面之平行面上,  $A'$  為  $A$  點之射影,  $G'$  為  $G$  點之射影如是則各點射影與該點有同一之運動茲將  $A'B$  另示於第 551 圖, 假定  $\alpha$ ,  $\bar{a}_x$ ,  $a_y$  如圖所示, 且

$$A'B = \sqrt{3^2 + 2^2} = 2.24 \text{ m}$$

由  $B$  與  $G'$  兩點水平分加速度之關係得

$$\bar{a}_{B_x} + 1.12 \alpha \cos(\theta - 90^\circ) - 1.12 \omega^2 \cos(180^\circ - \theta) = \bar{a}_x$$



第 551 圖

但  $a_{B_x} = 0, \quad \therefore \bar{a}_x = 0.75\alpha - 0.83$

又由  $A'$  與  $G$  兩點垂直分加速度之關係得

$$a_{A'_y} - 1.12\alpha \cos(180^\circ - \theta) - 1.12\omega^2 \cos(\theta - 90^\circ) = \bar{a}_y$$

但  $a_{A'_y} = 0, \quad \therefore \bar{a}_y = -0.83\alpha - 0.75$

代入於 (15) 至 (19) 五式得

$$B_x = \frac{48}{9.8}(0.75\alpha - 0.83)$$

$$A_y - 48 = \frac{48}{9.8}(-0.83\alpha - 0.75)$$

$$B_x - A_x = 0$$

$$0.75A_x + 0.75B_x - A_y = -1.21 - 1.31\alpha$$

$$0.83A_x + 0.83B_x - B_x = -1.36 + 1.21\alpha$$

解之得

$$\alpha = 4.8 \text{ rad./sec}^2$$

$$A_y = 24.6 \text{ kg}, \quad A_x = 11.2 \text{ kg},$$

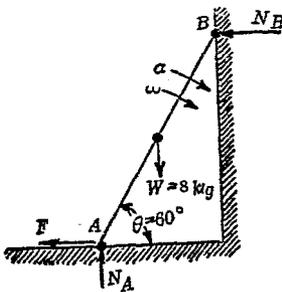
$$B_x = 13.7 \text{ kg}, \quad B_y = 11.2 \text{ kg}.$$

習 題 28

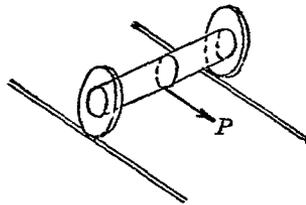
1. 一均質之球沿傾斜  $\theta$  角之不平滑斜面輾下而無滑動. 求證球心之加速度為  $\frac{5}{7} g \sin \theta$ , 且摩阻力對於直交壓力之比須不小於  $\frac{2}{7} \tan \theta$ , 方可防止球之滑動.

2. 一均勻斷面之棒, 其兩端  $B, A$  與平滑之垂直面及水平面相接觸. 以可變化之水平力  $F$  作用於  $A$  端如第 552 圖所示. 棒重  $8 \text{ kg}$ , 其長為  $2.5 \text{ m}$ , 在圖示  $\theta = 60^\circ$  之位置時, 若棒之角加速度  $\alpha$  為  $3 \text{ rad./sec}^2$ , 角速度  $\omega$  為  $2 \text{ rad./sec}$ , 求  $F, N_A$  及  $N_B$  各若何?

3. 第 553 圖示二圓盤, 中間有軸. 今於軸之中央捲以繩, 以  $P$  力拉之. 此  $P$  力與圓盤輾動之平面相平行, 而與軸之下面相切. 各圓盤重  $10 \text{ kg}$ , 直徑  $0.8 \text{ m}$ , 軸之直徑  $0.2 \text{ m}$ , 重  $20 \text{ kg}$ ,  $P$  力為  $4 \text{ kg}$ , 問圓盤與軸將向前輾動乎仰向後輾動乎? 并求



第 552 圖

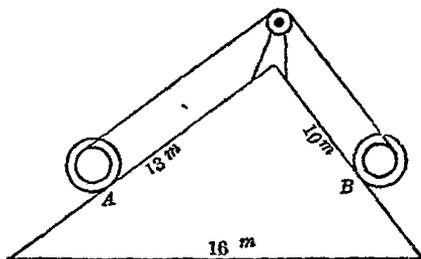


第 553 圖

圓盤與軸中心線之加速度。

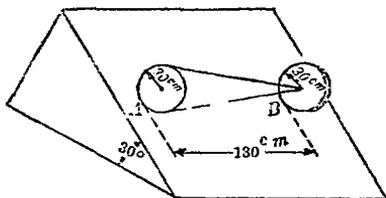
4. 前題中若繩以反方向捲於軸上,  $P$  力切於軸之上面, 則圓盤與軸中心線之加速度若何?

5. 第 554 圖上圓柱體  $A$ , 直徑  $0.8\text{m}$ , 其兩端附以直徑  $1\text{m}$  之兩輪, 固着於柱體上, 全部重量為  $161\text{kg}$ , 旋動半徑為  $0.3\text{m}$ ,  $B$  為另一圓柱體, 與  $A$  之重量相均衡. 以輕質而自由撓曲之繩, 捲於該兩圓柱體上, 中間經過平滑之滑輪  $C$ , 此  $C$  輪無重量而無摩阻力. 假定圓柱體無滑動而輾動於斜面上, 求各圓柱體中心之加速度及斜面作用於輪上之摩阻力, 并求繩之拉力.



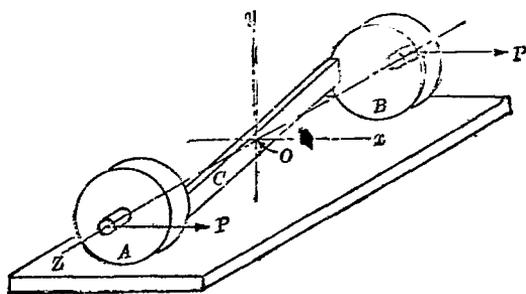
第 554 圖

6. 第 555 圖上示均質圓錐體  $A$  及均質圓盤  $B$ , 圓錐體重  $80\text{kg}$ , 圓盤重  $15\text{kg}$ , 圓盤固着於圓錐之頂點, 成輪之作用. 全部輾動於  $30^\circ$  之斜面而下降. 求全部裝置上重心之線加速度, 并求各接觸點上摩阻力與直交壓力.



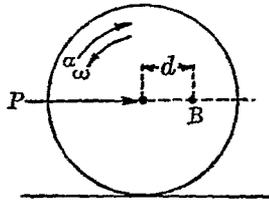
第 555 圖

7. 第 556 圖上示  $A, B$  二個勻質圓柱體直徑各為  $60 \text{ cm}$ ，重量各為  $32 \text{ kg}$ ，其上固着一均勻斷面之  $C$  棒，使二圓柱體有共同之中心軸  $Oz$ ， $C$  棒重  $64 \text{ kg}$ ，長  $2 \text{ m}$ 。可視為細長之棒。棒之縱軸與  $Oz$  成  $19^\circ 25'$  之角度。二圓柱體中心相離  $180 \text{ cm}$ ，此全部裝置平行於  $Ox$  而輾動於水平面，不起滑動。此時二力  $P$  各作用於兩端相等之突出柄上。今略去柄之重量，於圖示位置時，各圓柱體中心之線速度為向右  $120 \text{ cm./sec}$ ，線加速度為向右  $90 \text{ cm./sec}^2$ ，此時  $C$  棒縱軸在於  $xz$  平面內。試計算  $P$  力及平面作用於圓柱體上之摩阻力及直交壓力



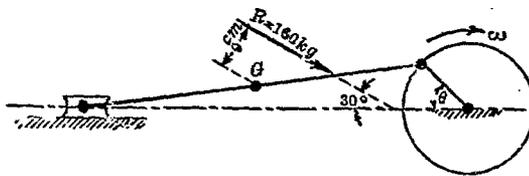
第 556 圖

8. 一均質圓盤直徑1m., 輾動於水平之直線軌道上如第557圖所示離中心 $d=0.25$ m. 處附以小物體 $B$ , 在圖示位置時, 圓盤之角速度為 $6 \text{ rad./sec}^2$ .  $P$ 力使圓盤減少其角速度, 其減少率為 $4 \text{ rad./sec}^2$ , 圓盤重 $30 \text{ kg}$ ,  $B$ 重 $4 \text{ kg}$ , 求圓盤與物體 $B$ 之慣性力 (Inertia force) 并求 $P$ 力及摩阻力.



第 557 圖

9. 第558圖所示連接桿上所用之外力合力 $R$ 為 $160 \text{ kg}$ , 作用線如圖示之位置. 若連接桿長 $75 \text{ cm}$ , 重 $40 \text{ kg}$ , 假定其有均勻之斷面, 求該桿質量中心之線加速度及該桿之角加速度.



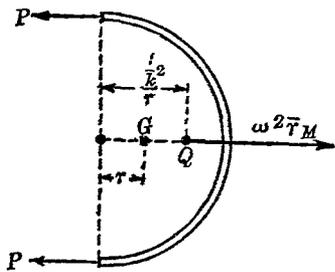
第 558 圖

#### IV. 特種應用之例

163. 飛輪之箍拉力 飛輪或滑輪以高速度迴轉時, 其邊緣 (Rim) 內力有時達甚大之值. 此內力稱曰箍拉力 (Hoop

tension). 同樣拖帶 (Belt) 以高速度通過飛輪或滑輪時, 其內力亦有時甚大. 今設略去飛輪上輻 (Spoke) 之拉力, 則對於角速度  $\omega$  時邊緣之拉內力可求之如下.

第 559 圖示飛輪之半部, 當飛輪迴轉時, 其半部與他半部有分離之傾向. 賴邊緣內力  $P$ ,  $P$  得防止其分離. 今將該半輪視為分離體, 設  $M$  為半輪邊緣之質量,  $W$  為半輪邊緣之重量,  $\omega$  為該瞬間之角速度,  $\bar{r}$  為中心至半輪邊緣重心  $G$  之距離,  $\bar{k}$  為半輪邊緣對於中心軸之



第 559 圖

旋動半徑, 則半輪邊緣之逆有效力當通過撞心  $Q$  點, 其水平分力為  $\omega^2 \bar{r} M$ , 其作用線如圖所示. 此水平逆有效力與  $P, P$  相平衡, 故

$$2P = \omega^2 \bar{r} M = \frac{W}{g} \bar{r} \omega^2$$

若邊緣厚度較輪之平均半徑  $r$  為甚小, 則邊緣之重心可視為與半圓弧之重心相一致. 即  $\bar{r} = \frac{2r}{\pi}$ , 因之得

$$P = \frac{W r \omega^2}{g \pi}$$

若邊緣之斷面積為  $a$  斷面積上單位面積之撞內力為  $s$ , 則

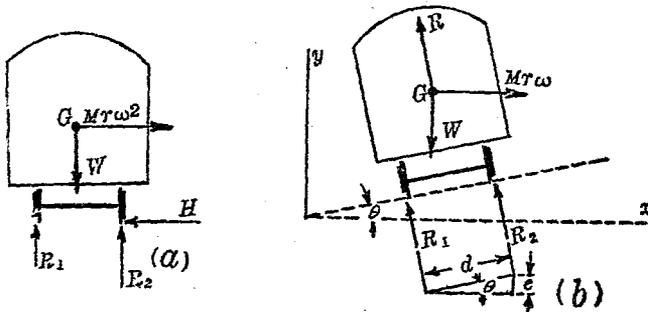
$$s = \frac{P}{a} = \frac{W r \omega^2}{g \pi a} = \frac{\pi r a \delta}{g} \times \frac{r}{\pi} \times \frac{\omega^2}{a} = \frac{\delta r^2 \omega^2}{g}$$

但  $\delta$  爲物質之單位容積所有重量·因邊緣上各點所有速度  $v$  等於  $\omega r$ ，故得

$$\delta = \frac{\delta v^2}{g}$$

故若飛輪邊緣甚薄，輻之影響完全略去時，則箍內力與邊緣速度自乘成比例。

1.4 軌道彎曲處外側軌面之舉高度 當列車通過水平軌道之彎曲部，則如第560圖 a) 所示，外側軌條 (Rail) 上受水平壓力  $H$ ，此時若加水平逆有効力  $Mrv\omega^2$  即  $M\frac{v^2}{r}$  於車之重心，則  $Mrv\omega^2$  與  $W$ 、 $R_1$ 、 $R_2$  及  $H$  可成平衡力系，但  $r$  爲軌道之曲度半徑， $v$  爲列車之速度，因之偶力  $Mrv\omega^2$  及  $H$  之力勢與列車速度及列車重心高度成正比例。此水平壓力  $H$  稱曰輪緣側壓力 (Flange pressure)。列車速度愈大時，此傾覆力勢愈大，而  $R_2$  愈增大， $R_1$  愈減小，若  $R_1$  爲零，列車重量全賴  $R_2$  支持時，列車速度不能再增加。今欲減少此輪緣壓力及傾覆力勢，即增加列



第 560 圖

車速度之限制時，則外側軌面須較內側軌面增高  $e$ ，此  $e$  稱曰舉高度 (Super elevation)。通常對於已知曲線軌道及一定平均速度取適當之  $e$  以使兩軌條上壓力相等。對於一定列車速度及軌道曲度半徑，使輪緣側壓力減為零時之舉高度  $e$  可求之如下。第 560 圖 (b) 上軌條上壓力  $R_1$  及  $R_2$  之合力設為  $R$ ，車重為  $W$ ，因車之質量中心沿水平曲線上進行，故逆有効力  $Mr\omega^2$  亦為水平方向，其作用線當通過重心  $G$ ，如圖所示。此時  $R$  與  $R_2$  相等，其合力  $R$  必通過  $G$  點，且逆有効力  $Mr\omega^2$  與  $R$  及  $W$  必相平衡，故三力同交於重心  $G$  處。因之得

$$\Sigma F_x = 0, \quad \text{或} \quad R \sin \theta = \frac{W}{g} \frac{v^2}{r},$$

$$\Sigma F_y = 0, \quad \text{或} \quad R \cos \theta = W$$

第一式以第二式除之，得

$$\tan \theta = \frac{v^2}{gr}.$$

$\theta$  甚小時， $\tan \theta$  與  $\sin \theta$  相等，而  $\sin \theta = \frac{e}{d}$ ，但  $d$  為軌距 (Gage) 故得

$$\tan \theta = \frac{e}{d} = \frac{v^2}{gr}.$$

因之

$$e = \frac{v^2 d}{gr}.$$

由上式決定  $e$ ，則對於既定之列車速度可使傾覆力勢及輪緣側壓力為零。車之重心離軌面高度對於傾覆力勢亦無

關係。但對於既定之  $e$  若列車速度較上式中之既定速度大時，則復生向內之輪緣側壓力，而外側軌面壓力  $R_2$  亦漸增大，內側軌面壓力  $R_1$  亦漸減小。若列車速度較既定速度小時，則內側軌面壓力  $R_1$  大於外側軌面壓力  $R_2$ ，此時輪緣側壓力向外作用。

列車中車端之牽引力與軌道曲線成切線方向，故在車之重心處有小分力與曲度半徑成平行。若列車速度大於上式中規定速度時，此分力可助車之安定。若列車速度小於規定速度時，則此分力與車之重量有使車向內側傾覆之傾向，且增加向外之輪緣側壓力。

上述  $\tan \theta = \frac{v^2}{gr}$  之式同時又可決定汽車路面曲線處外側對於內側之坡度，以使車之內外側兩輪上有相等之壓力。但此時對於較規定速度有高速或低速時，車之滑動亦須考慮之。以逆有効力作用於車上，若路面反作用力之合力與路面直交線所夾之角等於摩擦角  $\phi$  時，則車開始滑動。因路面直交線與垂直線所成之角為  $\theta$ ，故路面反作用力之合力若與垂直線成  $\theta + \phi$  角時，車開始滑動。因之得

$$\tan(\theta + \phi) = \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \div W$$

或 
$$\tan(\theta + \phi) = \frac{v^2}{gr}$$

例1 軌距 150 cm. 之鐵道，在  $r = 955$  m. 之曲線處，列車速

度爲 54 km./hr. 求外側軌面之舉高度若 50 公噸之車, 其重心離軌面 150 cm., 在該曲線軌道上速度爲 108 km./hr., 求外側軌條上之壓力.

$$\text{解} \quad v = \frac{54,000}{60 \times 60} = 15 \text{ m./sec.}$$

$$\text{故} \quad e = \frac{15^2 \times 1.5}{9.8 \times 955} = 3.6 \text{ cm.}$$

若該軌道上 50 公噸之車以速度 108 km./hr. 通過時, 則

$$v = 30 \text{ m./sec.},$$

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = \frac{50,000 \times 30 \times 30}{9.8 \times 955} = 4,762 \text{ kg.}$$

由第 560 圖 (b) 對於  $R_1$  之作用點取力勢得

$$1.5 R_2 = 50,000 \times .714 + 4,762 \times 1.52$$

$$\therefore R_2 = 21,959 \text{ kg.}$$

例 2 以混凝土築成之一汽車路, 其曲度半徑爲 150 m., 其外側舉高度使汽車以每小時 50 km. 駛行時可不生輪緣側壓力. 今若摩阻力係數爲 0.2, 求汽車開始滑動時之最大速度.

$$\text{解} \quad \theta = \tan^{-1} \frac{11.1 \times 11.1}{9.8 \times 150} = 4^\circ 48'$$

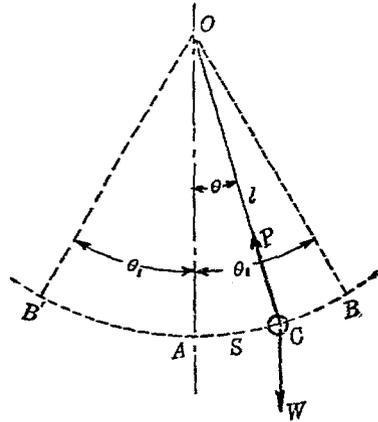
$$\phi = \tan^{-1} 0.2 = 11^\circ 19'$$

$$\text{由} \quad \tan(4^\circ 48' + 11^\circ 19') = \frac{v^2}{9.8 \times 150}$$

$$\text{得} \quad v = 20.6 \text{ m./sec.}$$

165. 單擺 一質點以無重量之線懸之,受重力及線之拉力之作用,沿垂直面內之圓弧上擺動者,稱曰單擺(Simple circular pendulum). 此理想上之情形不能作成之,僅能用小形物體以輕細之線懸之,略可與之近似

今求單擺之週期如下第 561 圖上設  $C$  為小物體以細線懸於  $O$  點,擺動於半徑  $OC$  即  $l$  之  $BB'$  弧上,今將諸力分解於弧之切線方向,得



第 561 圖

$$\Sigma F_t = ma_t$$

或 
$$-W \sin \theta = \frac{W}{g} a_t$$

$$\therefore a_t = -g \sin \theta$$

由第 135 節得

$$v dv = a_t ds$$

故

$$v dv = -g \sin \theta ds$$

但

$$ds = l d\theta,$$

故

$$v dv = -lg \sin \theta d\theta$$

若  $\theta$  甚小時,  $\sin \theta = \theta$ , 故上式為

$$v dv = -lg \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 \text{積分之得} & \quad v^2 = -lg\theta^2 + C_1 \\
 \text{若 } \theta = \theta_1 \text{ 時} & \quad v = 0 \\
 \text{故} & \quad C_1 = lg\theta_1^2, \\
 \text{因之} & \quad v^2 = lg(\theta_1^2 - \theta^2) \\
 \text{或} & \quad v = \sqrt{lg} \sqrt{(\theta_1^2 - \theta^2)} \\
 \text{但} & \quad v = \frac{ds}{dt},
 \end{aligned}$$

$$\text{因之} \quad v = \frac{ds}{dt} = \frac{ld\theta}{dt} = \sqrt{lg} \sqrt{\theta_1^2 - \theta^2}$$

$$\text{或} \quad \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_1^2 - \theta^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}} dt$$

兩端積分之得

$$\sin^{-1} \frac{\theta}{\theta_1} = \sqrt{\frac{g}{l}} t + C_2$$

若時間自質點在  $A$  處開始, 則  $t=0$  時  $\theta=0$ , 代入上式得

$$C_2 = \sin^{-1} 0$$

即  $C_2=0$ , 故得

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \sin^{-1} \frac{\theta}{\theta_1}$$

$\theta = \theta_1$  即質點自  $A$  至  $B$  時, 其時間  $t$  為  $\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}}$ , 因質點在  $\overrightarrow{AB}$  變位時所失速度與質點在  $\overrightarrow{BA}$  變位時所得速度有相同之速度變化對於時間之比率, 故二處變位之平均速度相等. 因之質點自  $A$  至  $B$  又自  $B$  至  $A$  所需時間為  $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , 而質點自  $A$  至  $B$ ,

自  $B$  至  $B'$  又歸至  $A$  點之時間即週期  $T$  為

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

上式與  $\theta_1$  無關係，但僅能應用於  $\theta_1$  甚小之時。若  $\theta_1$  不甚小時，則週期由下式求之。

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \dots \right]$$

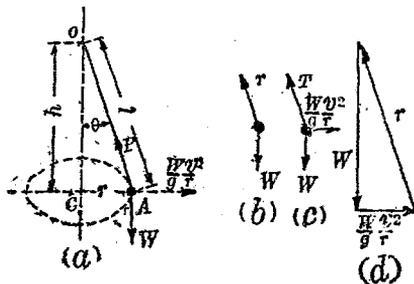
但  $k = \sin \frac{\theta_1}{2}$

線內拉力  $P$  可求之如下。因

$$\Sigma F_n = P - W \cos \theta - \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{l}$$

$$\therefore P = W \cos \theta + \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{l}$$

166. 圓錐擺 第562圖 (a) 示一圓錐擺 (Conical pendulum)。一小物體  $A$  以細線懸於  $O$  點，而使  $A$  於水平面內迴轉於垂直軸  $OC$  之周圍。若  $\theta$  為一定時，則速度為一定，而  $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ ，切



第 562 圖

線方向之力  $F_t = Ma_t = 0$  但對於空氣抵抗,則須於切線方向有小力作用以維持其一定速度. 垂直平面內有線內拉力  $P$  及重量  $W$  二力之作用. 因此二力物體  $A$  生加速度  $a_n = \frac{v^2}{r}$  向於中心  $O$ , 今若以逆有効力  $\frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$  加於物體  $A$  上, 則得平衡. 對於  $O$  點取力勢得

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r} h - Wr = 0$$

$$\therefore v = r \sqrt{\frac{g}{h}}$$

上式之  $v$  爲對於一定角度  $\theta$  所必需者. 線內拉力  $P$  可由下式求之.

$$P = \sqrt{W^2 + \left( \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r} \right)^2}$$

每秒之迴轉數  $n$  爲

$$n = \frac{v}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{h}}$$

$n$  愈減小時,  $h$  愈增大, 最後  $\theta = 0$  時,  $h = l$ , 此時

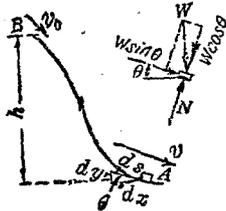
$$n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}$$

故  $n$  自零增加達上式極限值時, 物體  $A$  方可上昇而迴轉於圓形軌道上, 又因  $h = \frac{gr^2}{v^2} = \frac{g}{4\pi^2 n^2}$ , 故  $h$  與  $l$  無關係, 僅因迴轉速度而異. 若各種相異線長之圓錐擺以同一速度迴轉時, 則高  $h$  相等.

167. 物體沿垂直面內曲線軌道上之運動 重 $W$ 之物體

$A$  沿垂直面內平滑曲線軌道上運動時，受重力及直交壓力之作用。若略去空氣抵抗則作用於運動方向之力為  $W \sin \theta$ ，今取向向下之方向為正，則

$$a_t = \frac{F}{M} = g \sin \theta$$



第 563 圖

由  $v dv = a ds$ ，得

$$v dv = g \sin \theta ds$$

因  $ds \sin \theta = dy$ ，故

$$v dv = g dy$$

若物體在  $B$  點之速度為  $v_0$ ，任意一點離  $B$  點之高為  $h$  則

$$\int_{v_0}^v v dv = g \int_0^h dy,$$

$$\therefore v^2 - v_0^2 = 2gh$$

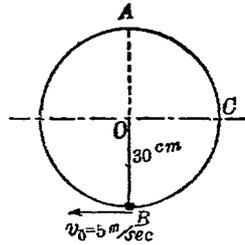
故物體沿平滑之曲線軌道受重力作用下降時，其速度之變化與該物體自由垂直降落於該兩點間之速度變化相同。若  $h$  為負即向上時，則物體之速度減少。

軌道對於物體之直交壓力  $N$  可求之如下：

$$N = \pm W \cos \theta + \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r}.$$

但  $r$  為曲線軌道之曲度半徑。上式中物體在曲度中心處水平線之上方者取負號。下方者取正號。

例 一物體  $B$  重  $1 \text{ kg}$ . 以長  $30 \text{ cm}$ . 之細繩懸於  $O$  點, 迴轉於垂直圓周上. 在下端最低部之速度為  $5 \text{ m/sec}$ ., 求其在頂點  $A$  處之速度, 并求在  $A$  點時繩內拉力  $P$ , 又使該物體能維持其圓周上之運動時  $A$  點之最小速度若何?



第 564 圖

$$\text{解 } v_A^2 = v_0^2 - 2gh = 25 - 2 \times 9.8 + 0.6 = 13.24$$

$$\therefore v_A = 3.64 \text{ m/sec.}$$

物體在  $A$  點時, 作用於其上之外力為其重量及繩內拉力, 二者均向下. 因此二力生法線加速度如下:

$$a = \frac{v^2}{r} = 44.1 \text{ m./sec}^2.$$

由  $F = Ma$  得

$$P + 1 = \frac{1}{9.8} \times 44.1, \quad P = 3.5 \text{ kg.}$$

因繩不能受壓力, 故  $P$  之最小值為零. 此時

$$W = \frac{W}{g} \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$1 = \frac{1}{9.8} \times \frac{v^2}{0.3}$$

$$\therefore v = 1.72 \text{ m./sec.}$$

163 複擺 一物理學上之物體 (Physical body) 懸於不通過其重心之水平軸, 受重力與軸上反作用力之作用而自由擺動者稱曰複擺 (Compound pendulum).

第565圖示一複擺，懸於 $O$ 點，重心為 $G$ ，重量為 $W$ ， $OG$ 為 $\bar{r}$ ，對於 $O$ 點之旋動半徑為 $k_0$ ，其慣性勢為 $I_0$ ，今求擺之周期如下。

對於 $O$ 點取力勢則由第158節(22)式 $\Sigma M_0 = I_0 \alpha$ ，得

$$-W\bar{r} \sin \theta = I_0 \alpha = \frac{W}{g} k_0^2 \alpha$$

$$\therefore \alpha = -\frac{g\bar{r} \sin \theta}{k_0^2}$$

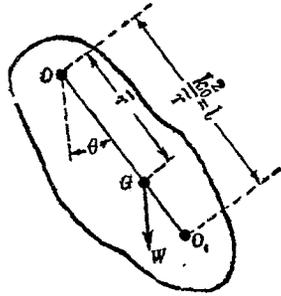
沿 $OG$ 直線上離 $O$ 點 $l$ 處之 $O_1$ 點，其切線加速度為

$$a_t = l\alpha = -\frac{gl\bar{r} \sin \theta}{k_0^2}$$

故若取  $l = \frac{k_0^2}{\bar{r}}$ ，則  $a_t = -g \sin \theta$ ，即與單擺之加速度全相等，因之取此 $l$ 之單擺，則其週期當全與複擺相同，有此 $\frac{k_0^2}{\bar{r}}$ 長度之單擺稱曰複擺之等期單擺 (Equivalent simple pendulum)。由第165節則複擺之週期 $T$ 為

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{k_0^2}{g\bar{r}}}$$

$O_1$ 點稱曰擺心 (Center of oscillation) 由第159節則 $O_1$ 點亦即為撞心，故擺心與撞心相一致。若物體質量全部集中於擺心上，則其週期無變，懸點 $O$ 與擺心 $O_1$ 可互相調換而不變其週期，因 $GO_1 = \frac{k_0^2}{\bar{r}} \bar{r}$ ，但 $k_0^2 = \bar{k}^2 + \bar{r}^2$ ，故



第565圖

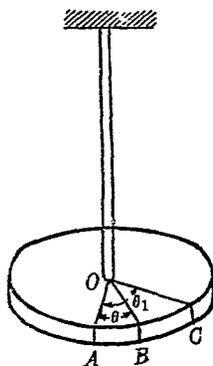
$$GO_1 = \frac{\bar{k}^2}{r}$$

今若取  $O_1$  為懸點，則此時之擺心  $O_2$  離  $G$  點之距離為

$$GO_2 = \frac{k^2}{GO_1} = \frac{\bar{k}^2}{\frac{\bar{k}^2}{r}} = \bar{r}$$

故  $O_2$  與  $O_1$  相一致，即原有懸點成為擺心。

69. 扭擺 第566圖示一扭擺 (Torsion pendulum) 以細絲或細棒懸之，而使對於該絲之軸因扭轉而擺動。一圓盤或他形狀之物體固着於該絲之一端，使其重心在於絲之軸上。該絲固着於上方之支持點。設將圓盤扭轉  $\theta_1$  角，則絲亦隨之扭轉。次除去扭力，則絲有扭勢作用於圓盤上，開始擺動。



第566圖

設絲作用於圓盤之扭勢為  $M$ ，若  $M$  不超過絲之彈性限界 (Elastic limit) 則  $M$  與角變位成正比例。即  $M = -k\theta$ 。但  $k$  為常數。負號表示  $\theta$  為正時  $M$  為負。因圓盤為迴轉運動，故

$$\Sigma M_0 = I_0 \alpha$$

因之

$$-k\theta = I_0 \alpha$$

但

$$\alpha = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\therefore \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I_0} \theta$$

由此式可求扭擺之週期。上式兩端同乘以  $\frac{d\theta}{dt}$ ，得

$$\frac{d\theta}{dt} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{k}{I_0} \theta \frac{d\theta}{dt}$$

積分之得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{I_0} \theta^2 + C_1$$

但  $\theta = \theta_1$  時  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ ，故  $C_1 = \frac{k}{I_0} \theta_1^2$ ，因之得

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{k}{I_0} (\theta_1^2 - \theta^2)$$

與第165節同樣可得週期  $T$  如下：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 \theta}{M}}$$

但  $I_0$  為圓盤對於絲軸之慣性勢， $\theta$  為與扭勢  $M$  相對應之角位。由上式可知週期與初時角變位即振幅無關係。但  $M$  須不超過絲之彈性限界。

**170. 質量慣性勢之實驗的求法** 多數物體之慣性勢難於計算，僅能由實驗定之。其方法或用物體為複擺測定其週期，或用之為扭擺，又或附於他已知扭擺之上。茲分述如下。

I. 由複擺之求法 由第168節複擺之週期公式即

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{k_0^2}{gr}}$$

或

$$k_0^2 = \frac{T^2}{4\pi^2} gr$$

$$\text{但} \quad I_0 = M k_0^2 = \frac{W}{g} k_0^2$$

$$\therefore I_0 = \frac{W T^2 r}{4 \pi^2}$$

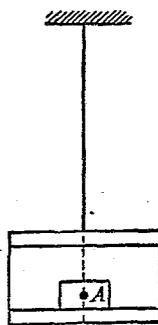
式中  $I_0$  爲物體對於懸軸之質量慣性勢。  $W$  可秤物體之重量而求得，  $r$  可將物體支於刃端 (Knife edge) 以定之，週期  $T$  亦易於測定。如是既求得  $I_0$  後，則對於通過重心之平行軸，其  $\bar{I}$  可由下式計算之。

$$\bar{I} = I_0 - M r^2$$

II. 由扭擺之求法 第 567 圖示相固着之二個圓盤用以代替第 566 圖之一個圓盤以絲懸之。設二個圓盤對於絲軸之慣性勢爲  $I_0$ ，則此扭擺之週期  $T_0$  如下式：

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 \theta}{M}} = 2\pi \sqrt{\frac{\theta}{M}} \sqrt{I_0} = C \sqrt{I_0}$$

但  $C$  爲該擺之常數。  $\frac{\theta}{M}$  爲絲之常數，因絲之材料及直徑而異。若此值已知，則測定週期後可由上式求  $I_0$ 。



第 567 圖

今設有物體  $A$  須求其慣性勢，其法如下。先將扭擺振動，求其週期，次將物體  $A$  置於下方之圓盤上，且使  $A$  之重心適在於絲之垂直下方。設物體  $A$  對於絲軸之慣性勢爲  $I_A$ ，置入物體  $A$  後扭擺之週期爲  $T$ ，則

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(I_0 + I_A)\theta}{M}} = C\sqrt{I_0 + I_A}$$

故 
$$\frac{T_0}{T} = \frac{\sqrt{I_0}}{\sqrt{I_0 + I_A}}$$

即 
$$I_0 + I_A = \frac{T^2}{T_0^2} I_0$$

故 
$$I_A = I_0 \left( \frac{T^2}{T_0^2} - 1 \right)$$

若圓盤之形狀易於計算其慣性勢時，則常數  $\frac{\theta}{M}$ ，可不必求之。

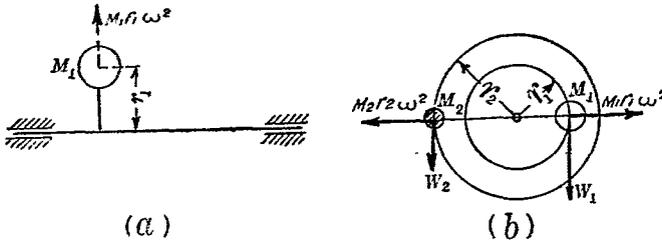
171. 迴轉物體之定衡法 機械之運動部分，例如蒸汽機之叉頭等有往復運動(Reciprocating motion)，發電機之迴轉部(Rotor)等有迴轉運動，若此等運動部份未能平衡，則當其生加速度時，必受機械上靜止部份之作用力，其結果起種種故障，如汽車、蒸汽機、汽輪機(Steam turbine)等之振動(Vibration)，發電機上整流(Commutation)之缺陷，軸座(Bearing)上之摩損等。故各種機械上對於此加速度力，須消去之即機械上運動部份之定衡(Balancing)實為一重要之問題也。

定衡分靜定衡(Static balance)與動定衡(Dynamic balance)二種。靜定衡者當各部份不運動時，不論各部份位置之如何，作用於其上之力系常在於定衡狀態。動定衡者乃分配運動質量或添加質量，以使運動質量之慣性力自相定衡，而機械上之靜止部份可無加速度力之作用。但機械之完全定衡常屬不可能者。

茲先將迴轉物體之定衡方法論之如下。

不定衡之迴轉質量上所生惰性力一般可視為 (1) 離心力系或 (2) 離心偶力系又或 (3) 二者之兼有者。

(1) 單一之迴轉質量，離心力——今設迴轉體質量可視為在於迴轉平面即與迴轉軸成直角之平面內。第 568 圖 (a) 上一軸以角速度  $\omega$  迴轉，其上有一單獨之質量  $M_1$ ，其質量中心離軸之中心線為  $r_1$ ，此時軸上受離心力  $M_1 r_1 \omega^2$  之作用。此離心力作用於軸座而傳達於機械之架體 (Frame) 或及於基座 (Foundation)。此軸座之反作用力可由定衡法以消去之。



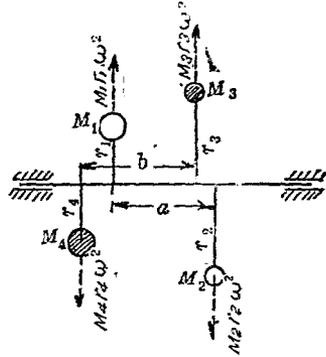
第 568 圖

第 568 圖 (b) 上於質量  $M_1$  之直徑對側添加他質量  $M_2$ 。設質量  $M_2$  之質量中心離迴轉軸之中心為  $r_2$ ，且使

$$M_1 r_1 \omega^2 = M_2 r_2 \omega^2, \text{ 即 } M_1 r_1 = M_2 r_2, \text{ 或 } W_1 r_1 = W_2 r_2$$

則該軸之迴轉可得定衡。上式亦即為靜定衡之條件。故機械上迴轉部份，若其質量可視為在於迴轉平面內，即如滑輪、飛輪等時，則定衡方法，可或於較重之側，鑿去物質之一小部份，或於較輕之側添加一小部份之物質，至得靜定衡而為後止。

(II) 二個之迴轉質量，離心偶力——若迴轉軸上有二個之迴轉質量  $M_1$  及  $M_2$ ，在於相異之迴轉平面內而存在於同一之含有迴轉軸平面中，如第 569 圖所示且假定離心力  $M_1 r_1 \omega^2$  與  $M_2 r_2 \omega^2$  相等，如是則迴轉軸受不平衡之離心偶力所作用，而軸座上亦生此反作用之相等偶力，今若於同一之含有迴轉軸平面內，添加二質量  $M_3$  與  $M_4$  使  $M_3 r_3 \omega^2$  等於  $M_1 r_1 \omega^2$ ，



第 569 圖

且使其離心偶力等於  $M_1$  與  $M_2$  之離心偶力，則可定衡即

$$M_1 r_1 \omega^2 a = M_3 r_3 \omega^2 b$$

或

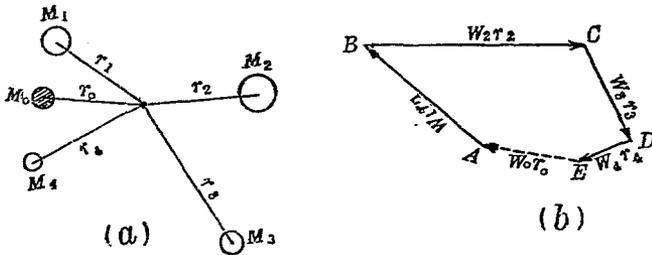
$$M_2 r_2 \omega^2 a = M_4 r_4 \omega^2 b$$

換言之  $W_1 r_1 a = W_3 r_3 b = W_2 r_2 a = W_4 r_4 b$

由上所述迴轉軸若僅有  $M_1$  與  $M_2$  二質量時，雖可得靜定衡，但不能得動定衡。

172. 同一迴轉平面內數個物質之定衡法 第 570 圖 a) 中於同一迴轉平面內設有數個質量  $M_1, M_2, M_3, M_4$  等，則迴轉軸受數個離心力之作用即  $M_1 r_1 \omega^2, M_2 r_2 \omega^2, M_3 r_3 \omega^2, M_4 r_4 \omega^2$  等此諸力成同平面合交力系，此諸力之平衡條件即為示力多邊形須閉合。換言之若諸質量為動定衡時，則依一定順序作  $M_1 r_1 \omega^2, M_2 r_2 \omega^2, M_3 r_3 \omega^2, M_4 r_4 \omega^2$  等向線須成閉合之多邊形。但

$Mr\omega^2$  可寫成  $\frac{W}{g}r\omega^2$  之形, 因  $\frac{\omega^2}{g}$  為諸向線所共通之因子, 故可用  $W_1r_1, W_2r_2, W_3r_3, W_4r_4$  等量作成向線. 今設第 570 圖 (a) 上有  $M, M_2, M_3, M_4$  四個質量, 迴轉於同一之迴轉平面內, 若如第 570 圖 (b) 所示  $W_1r_1, W_2r_2, W_3r_3, W_4r_4$  四向線不相閉合時, 則四質量不為動定衡, 其定衡之法須另加一質量  $M_0$  離迴轉軸心為  $r_0$ , 其  $W_0r_0$  之向線如第 570 圖 (b) 虛線所示. 若任意假定  $r_1$ , 則  $M_0$  之值可求之. 但  $E, A$  間可以二個以上之向線閉合之, 此時則 (a) 圖中  $M_1, M_2, M_3, M_4$  四個質量可用二個以上之質量定衡之.

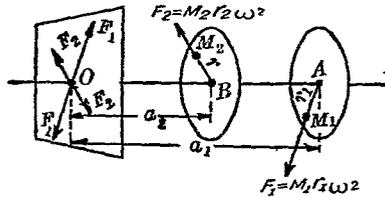


第 570 圖

173. 相異迴轉平面內數個質量之定衡法 第 571 圖中設質量  $M_1$  與  $M_2$  各迴轉於相異之迴轉平面內. 質量  $M_1$  之離心力  $F_1 = M_1r_1\omega^2$  通過  $A$  點, 質量  $M_2$  之離心力  $F_2 = M_2r_2\omega^2$  通過  $B$  點. 今於迴轉軸上取任意一點  $O$ , 作一直交平面, 視為參考面 (Reference plane). 於該平面內, 經過  $O$  點, 作相等反向之二力, 各等於  $F_1$  且與之相行, 則  $A$  點上之  $F_1$  與  $O$  點上之  $F_1$  成一偶

力  $C_1$ , 其力勢爲

$$C_1 = M_1 r_1 \omega^2 a_1$$



第 571 圖

故  $A$  點上之  $F_1$  力以偶力  $C_1$  及  $O$  點上之平行相等力  $F_1$  代替之同樣  $B$  點上之  $F_2$  力亦以偶力  $C_2$  及  $O$  點上之平行相等力  $F_2$  代替之而

$$C_2 = M_2 r_2 \omega^2 a_2$$

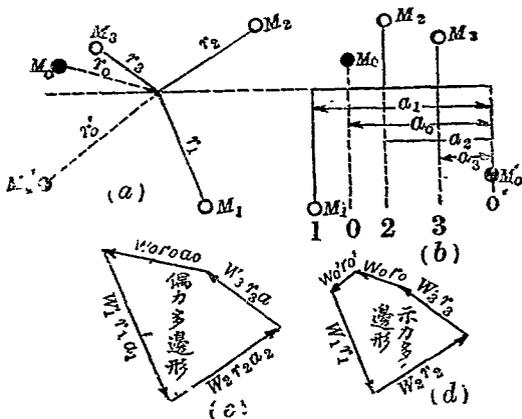
故迴轉質量之惰性力, 可以任意參考平面上合交力系及各相異之含迴轉軸平面上之偶力系代替之. 其合交力系之合力若非平衡必爲該平面上單獨之力, 偶力系之合力若非平衡必爲某含有迴轉軸平面上之一偶力. 故原有惰性力系若非平衡可導成一單獨之力及一偶力. 此偶力之大小因所取參考面之位置而異. 因之得平衡之條件如下:

(1) 合交力系之合力必爲零, 即任意之  $O$  點上直交平面內諸惰性力之示力多邊形必閉合.

(2) 偶力之合力必爲零, 即示偶力之向線多邊形必閉合.

以上平衡條件可於相異之直交平面內加以二個迴轉質量以滿足之. 第 572 圖 (a), (b) 中設軸上有不平衡之迴轉質

量  $M_1, M_2, M_3$  與之相平衡之質量為  $M_0$  與  $M_0'$ 。今取質量  $M_0'$  之迴轉平面為參考面設  $M_0, M_1, M_2, M_3$  各質量離參考面之距離各為  $a_0, a_1, a_2, a_3$ ，則若略去  $\frac{\omega^2}{g}$  之因子時， $W_1 r_1 a_1, W_2 r_2 a_2, W_3 r_3 a_3$  等偶力可求得之因偶力  $W_0' r_0' a_0'$  為零，故未知偶力僅為  $W_0 r_0 a_0$ ，今將表示已知偶力之向線作成偶力多邊形如第 572 圖 (c) 所示。此圖上最後閉合之邊即示  $W_0 r_0 a_0$  之大小，并可決定該偶力之平面，任意選定  $a_0$  之值後可得  $W_0 r_0$  之積，再任意選定  $r_0$  後可求得  $W_0$  之值，由上決定偶力  $W_0 r_0 a_0$  後，則上述條件 (2) 可得滿足。次再作參考面上各向線  $W_1 r_1, W_2 r_2, W_3 r_3, W_0 r_0$  之示力多邊形如第 572 圖 (d) 所示，則其閉合邊即示  $W_0' r_0'$  之大小，任



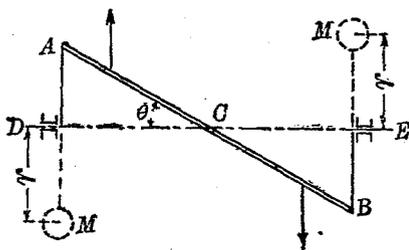
第 572 圖

意選定  $r_0'$ ，則參考面內應加之質量  $M_0'$  可知。且示力多邊形之閉合邊方向即示  $M_0'$  離迴轉軸之方向。如是選定質量  $M_0'$  後，

則上述條件(1)可滿足。

注意 第572圖(c)中偶力多邊形之作法本當依照第13節所示偶力向線表示法作成之。但該圖上依下之方法作之，其結果全同。偶力向線各與 $r_1, r_2$ 等方向平行。質量在參考面之一側者向線自迴轉依向外，在參考面之他側者向線向內。如此表示偶力之向線乃將第13節所述方法之向線各迴轉 $90^\circ$ 而得。

例 第573圖上 $AB$ 為一細長棒，與迴轉軸 $DE$ 成 $\theta$ 角，由 $DA$ 及 $EB$ 二臂支持之。 $AB$ 棒之重心 $G$ 在於迴轉軸上。求 $D, E$ 兩端各定衡質量 $M$ 。



第 573 圖

解 將 $AG$ 與 $GB$ 兩半部之棒分別考慮之，則各逆有效力成一偶力。今設 $l$ 為 $AB$ 之長， $W_1$ 為該棒之重， $\bar{r}$ 為各半部之棒上重心離迴轉軸之距離，則逆有效力之力勢為

$$\frac{W_1}{2g} \bar{r} w^2 \times \frac{2}{3} l \cos \theta$$

因  $\bar{r} = \frac{l}{4} \sin \theta$ , 故上之力勢為

$$\frac{W_1}{12g} l^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

今以  $D, E$  兩處之質量  $M$  與此偶力相平衡, 則

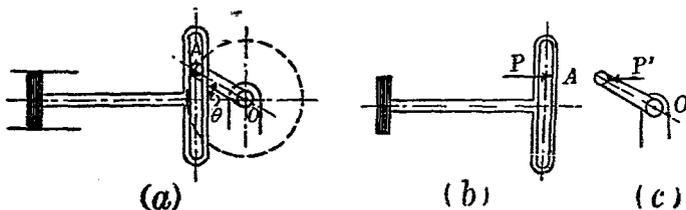
$$Mr\omega^2 l \cos \theta = \frac{W_1}{12g} l^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta$$

設定衡物體之重量為  $W$ , 則  $M = \frac{W}{g}$ , 故

$$Wr = \frac{W_1 l \sin \theta}{12}$$

若假定  $r$  之值可求  $W$ , 但對於  $DA$  與  $EB$  兩柄之定衡本例中略去之。

174. 往復運動物體之定衡法 往復運動之最簡單者為單弦運動。第574圖(a)示一單弦運動之滑溝, 其曲柄以等速度迴轉。今略去摩阻力, 設滑溝之重量為  $W$ , 則其質量  $M = \frac{W}{g}$ , 若曲柄  $AO$  之角速度為  $\omega_1$ , 則曲柄銷釘之加速度為  $r\omega_1^2$  而向於中心。滑溝之加速度為  $a = -r\omega_1^2 \cos \theta$ , 發生此加速度之力為銷釘  $A$  上之壓力  $P = Ma = Mr\omega_1^2 \cos \theta$ , 如第574圖(b)所示。若  $\theta$



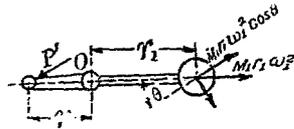
第 574 圖

在  $90^\circ$  至  $270^\circ$  時，加速度向於左方，故作用於滑溝上之  $P$  力亦向左。滑溝對於曲柄銷釘上之反作用力  $P'$  如第 574 圖 'c' 所示，此  $P'$  力傳達於  $O$  處軸承上。

今欲平衡此  $P'$  力時，可於曲柄之對側離軸心  $r_1$  處加以質量  $M_1$  如第 575 圖所示。若

$$M_1 r_1 = M r$$

時則  $P'$  力可完全平衡之。因質量  $M$  之離心力  $M_1 r_1 \omega_1^2$  有水平分力



第 575 圖

$M_1 r_1 \omega_1^2 \cos \theta = M r \omega_1^2 \cos \theta$   $P'$  故也。但  $M$  之離心力之垂直分力  $M_1 r_1 \omega_1^2 \sin \theta$  不能平衡之。此力當  $M_1$  在最高與最低處，其值最大，等於  $M_1 r_1 \omega_1^2$ ，若

$$M_1 r_1 = \frac{1}{2} M r$$

時， $P'$  力之半定衡之。而垂直分力在最低與最高位置亦減為  $\frac{1}{2} M_1 r_1 \omega_1^2$ ，但水平方向之不定衡力對於機械上之為害較垂直方向者更大，故通常將水平力之  $\frac{2}{3}$  定衡之。如是則尚有不定衡之水平力  $\frac{1}{3} M r \omega_1^2$  及垂直力  $\frac{2}{3} M_1 r_1 \omega_1^2$  存在焉。

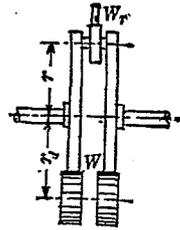
通常具有連接桿之往復機 (Reciprocating engine) 其活塞之加速度由第 184 節第 (6) 式當活塞在汽筒頂端 (Head end of the cylinder) 時，因  $\theta = 0$ ，故較  $r \omega_1^2$  大  $\frac{r^2 \omega_1^2}{l}$ ；當活塞在曲柄端時因  $\theta = 180^\circ$ ，故較  $r \omega_1^2$  小  $\frac{r^2 \omega_1^2}{l}$ ，其平均值為  $r \omega_1^2$ ，故其往復運動部份之定衡方法仍可與上滑溝之定衡法相同。

175. 兼有迴轉運動與往復運動物體之定衡法 蒸汽機之連接桿,兼有迴轉運動及往復運動,該桿之定衡上,其較小之叉頭端及接近於叉頭之半部之長視為有往復運動,與叉頭,叉頭銷釘 (Cross-head pin) 及活塞與活塞桿同由往復運動物體之定衡法定衡之. 其較大之曲柄端及接近於曲柄之半部之長視為有迴轉運動,與曲柄銷釘及曲柄,同由迴轉運動物體之定衡法定衡之.

今若於曲柄平面內將蒸汽機上運動部份定衡之時,則可用下之方法設  $W_1$  為往復運動部份之重量,即包括活塞,活塞桿,叉頭,及連接桿之三分之一等重量. 設  $W_2$  為迴轉運動部份之重量,即包括曲柄,曲柄銷釘,及連接桿之三分之二等重量. 設  $r$  為曲柄之長,  $W$  為定衡物體之重量,其距軸之距離為  $r_1$ ,則由第171節及第174節得

$$W r_1 = W_1 r + \frac{2}{3} W_2 r$$

若如第 576 圖有兩個曲柄時,則柄  $W$  平分之,各配置於兩側曲柄之平面內.



第 576 圖

176. 整速器之作用 蒸汽機,內燃機 (Internal combustion engine), 水輪機 (Hydraulic turbine) 等之整速器 (Governor) 者乃所以調整蒸汽,水量,油量或煤氣量之供給,使速度變化不超過一定之限制. 整速器之運動由負荷部份傳達之. 例如負荷

(Load) 減小, 則原動機速度增加, 而調速器之運動亦增速, 由適當機構之作用即減低蒸汽之壓力或減少流體之供給, 以減低原動機之速度。

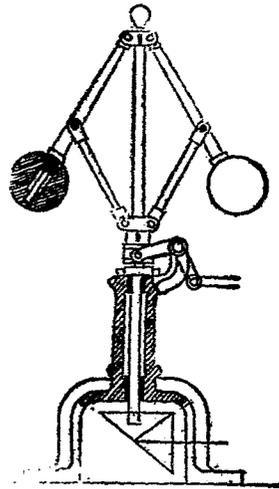
調整流體進入卷(Valve)之力由整速器運動變化而起生, 此力主為(1)整速器上運動部份速度之變化量, 或(2)運動部份速度之變化率二者所支配。由於前者之整速器稱曰離心整速器(Centrifugal governors), 有擺整速器(Pendulum governors)與軸整速器(Shaft governors)之別。由於後者之整速器稱曰惰性整速器(Inertia governors), 皆屬於軸整速器。

177. 加重圓錐擺整速器 由第 166 節所述圓錐擺之公式即

$$h = \frac{g}{4n^2\pi^2}$$

$$\text{得 } \frac{dh}{dn} = -\frac{g}{2\pi^2} \cdot \frac{1}{n^3} = -\frac{2h}{n}$$

即對於 $n$ 之極小變化, 其相應之 $h$ 變化當 $n$ 小時甚大,  $n$ 大時甚小。第 577 圖之華脫氏整速器(Watt governor)即與圓錐擺同理。使該整速器對於速度小變化時有靈敏作用之法, 可增大 $h$ , 或減低整速器之週轉速度。但若減低整速器之速度, 則對於卷之抵抗, 可利用之能(Energy)亦減少。加

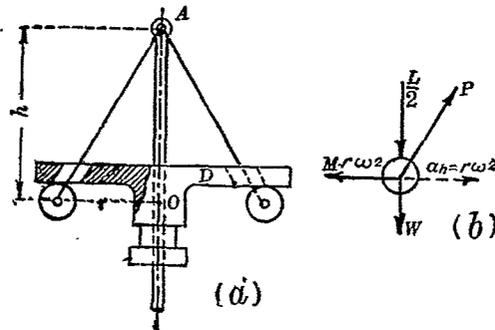


第 577 圖

重整速器 (Loaded governor) 可不甚低減,此可利用之能而有靈敏之作用. 即如第 578 圖 (a) 上加重於球,其結果可增加圓錐擺之  $h$ , 圓盤  $D$  載於球(或圓柱體)上,因其重量,添加垂直力於球,而不增其慣性力. 今設圓盤之重量為  $L$ , 則各球上之添加重量為  $\frac{L}{2}$ , 各球上諸外力  $\frac{L}{2}$ ,  $W$ ,  $P$ , 與逆有效力(即慣性力)  $Mr\omega^2$  相平衡, 如第 578 圖 (b) 所示. 對於  $A$  點之力勢總和當為零. 即

$$\left(W + \frac{L}{2}\right) r = Mr\omega^2 h = \frac{W}{g} r (4\pi^2 n^2) h$$

$$\therefore h = \frac{W + \frac{L}{2}}{W} \times \frac{g}{4\pi^2 n^2}$$



第 578 圖

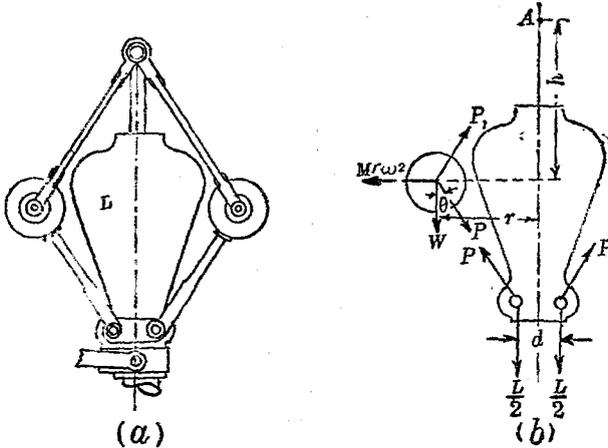
但  $n$  為每秒之迴轉數. 故添加重量於球上可增加  $h$  之值, 其比例為  $1 + \frac{L}{2W}$  與 1 之比例如  $W = 2 \text{ kg}$ ,  $L = 15 \text{ kg}$ , 則

$$1 + \frac{L}{2W} = 1 + \frac{15}{4} = 4.75$$

即可增加  $h$  至五倍左右。

對於高速度迴轉之整速器必加重量，以維持整速器之適當靈敏度。

第579圖(a)示包德氏加重整速器 (Porter loaded governor)。其圓錐擺上所加之重量，另以鏈桿懸於球上。如是則所加之重較上述者有二倍之効。



第 579 圖

設  $L$  為添加之重量，則由第579圖(b)得

$$P \cos \theta = \frac{L}{2}$$

$$(P \cos \theta + W)r + P \sin \theta \cdot h = \frac{W}{g} r \omega^2 h$$

由上二式得

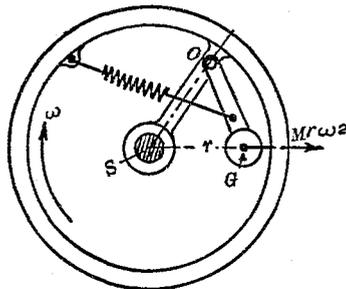
$$\left(W + \frac{L}{2}\right)r + \frac{L}{2}h \tan \theta = \frac{W}{g}r\omega^2 h$$

但

$$h \tan \theta = r$$

$$\therefore h = \frac{W + L}{W} \times \frac{g}{4n^2}$$

178. 離心軸整速器 前節所述之擺整速器,其整速作用待迴轉物體之離心力.軸整速器 (Shaft governor) 中亦有特離心力而作用者. 第 580 圖中設有質量  $M$  之物體以銷釘附着

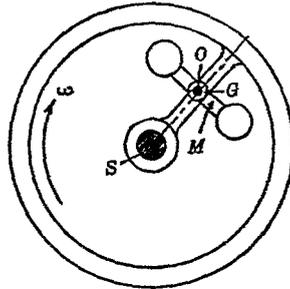


第 580 圖

於飛輪之一臂上設物體之質量中心  $G$  離軸心  $S$  之距離為  $r$ , 輪之角速度  $\omega$ , 質量  $M$  之離心力即惰性力為  $Mr\omega^2$ , 若  $\omega$  為常數時, 此離心力亦為定值輪上附以彈簧與此離心力相平衡. 此彈簧內拉力對於  $O$  點之勢當與離心力  $Mr\omega^2$  對於  $O$  點之力勢相等但物體之重量因較離心力  $Mr\omega^2$  為甚小故略去之. 若輪之角速度因原動機上負荷減小而增為  $\omega'$  時, 設  $r$  不變,

則離心力增為  $Mr\omega'^2$ , 此增加之力  $Mr(\omega'^2 - \omega^2)$  使物體向外運動。其結果變更原動機內流體入口卷之關閉 (Cut-off) 時間, 而調整流體供給之量。

179. 惰性軸整速器 前述之擺整速器與軸整速器, 其調整作用恃於離心力之變化, 故亦稱離心整速器。此種整速器須俟速度已起變化後, 方有整速作用。但惰性整速器之整速作用全異。第 581 圖中設質量  $M$  以銷釘附着於飛輪之臂, 使銷釘  $O$  通過其質量中心。該質量之離心力為  $O$  點上銷釘反作用力所平衡。故整速作用不賴於離心力。



第 581 圖

今設第 581 圖之飛輪在靜止狀態, 而質量以角加速度  $\alpha$  迴轉於銷釘  $O$  之周圍。此時須加以力勢  $T = I_0 \alpha$ , 方得起此迴轉運動。但  $I_0$  為該質量對於  $O$  之惰性勢。若原動機上負荷變化而飛輪之速度有變化時, 則質量  $M$  上各質點因其惰性, 均有維持其原有線速度之傾向, 而該質量對於飛輪起  $O$  點周

圍之迴轉運動，因之原動機上流體入口卷之機構對於該質量，有反作用力之作用，其對於 $O$ 點之力勢等於 $I_0\alpha$ ，故此種整速器之整速作用非賴於飛輪速度之變化，乃賴於角速度之變化率，即賴於輪或軸之角加速度也。此種軸整速器稱曰惰性整速器。

180. 離心整速器與惰性整速器之比較 二種整速器之異點有二。離心整速器之作用賴速度之變化，故俟速度增加或減少至一定程度後，方可有充分整速作用之力，以克勝摩擦阻力而牽動卷之機構。惰性整速器之作用與角加速度成正比例，且整速器之角加速度當速度變化之初最大，故當速度未充分變化時，雖離心力之變化不大而整速器即開始作用。即惰性整速器之作用更爲靈敏，可調整速度於極小之範圍內。

但離心整速器有一特性爲惰性整速器所不具者。離心力 $Mra\omega^2$ 因球之位置而異，對於一定位置，則離心力亦有一定之值，此值因球之重量及球上所添加之重量或軸上彈簧之拉力而定。故整速器有一定位置時，軸之角速度 $\omega$ 爲一定，即原動機之速度亦一定。例如原動機速度限定爲200 r. p. m. 而將整速器適當調整後，則速度不能有多大變化。負荷增加時速度或可減至195 r. p. m.，負荷減少時速度可增至205 r. p. m. 但離心力仍使平均速度保持於200 r. p. m.，苟不增加其所添重量或彈簧拉力，則原動機不能有他種之平均速度。



$M = \frac{W}{g}$  = 銷釘附着於  $O$  點上之物體質量。

$\omega$  = 飛輪迴轉於輪心  $S$  周圍之角速度。

$\Omega$  = 質量  $M$  迴轉於  $O$  點周圍之角速度。

$u = \sigma\Omega$  = 質點  $P$  對於  $O$  點之線速度。

$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$  = 飛輪之角加速度。

$\alpha' = \frac{d\Omega}{dt}$  = 質量  $M$  迴轉於  $O$  點周圍之角加速度。

$I_0$  = 質量  $M$  對於銷釘  $O$  之慣性勢。

$\bar{I}$  = 質量  $M$  對於其重心  $G$  之慣性勢。

任意一點  $P$  之加速度——依高里遼氏定律(第139節)質點  $P$  之加速度有三個分加速度。即

(1) 假定飛輪靜止, 質量迴轉於  $O$  點周圍, 此加速度有徑向分加速度  $\sigma\Omega^2$  沿  $PO$  方向, 及切線分加速度  $\sigma\frac{d\Omega}{dt} = \sigma\alpha$  與  $PO$  直交。

(2) 飛輪上與  $P$  點相一致之點之加速度, 亦有徑向分加速度  $\rho\omega^2$  沿  $PS$  方向, 及切線分加速度  $\rho\frac{d\omega}{dt} = \rho\alpha$  與  $PS$  成直交。

(3) 沿  $OP$  方向上之加速度  $2u\omega$ 。

此  $P$  之三個分加速度各示於第 582 圖 (b) 上。但該圖所示之向線未表示其大小。

分加速度  $\rho\omega^2$  與  $\rho\alpha$  便利上可以對於  $SG$  及  $PG$  之直交與平行方向之四個分加速度代替之。此分加速度可直接分解

得之或將飛輪運動分爲迴轉及進行二種運動而得之即飛輪對於 $S$ 軸以角速度 $\omega$ 與角加速度 $\alpha$ 之迴轉運動可視爲對於通過 $G$ 點之平行軸以同一角速度與角加速度之迴轉運動及垂直於 $SG$ 方向上輪之進行運動二者所合成因之關於輪之迴轉運動所生分加速度 $\rho\omega^2$ 與 $\rho\alpha$ 可以(1)對於 $G$ 點輪之迴轉運動所生 $P$ 點之加速度及(2)輪上各點所共有之進行運動加速度二者代替之故輪上 $P$ 點之加速度(即輪上與質量 $M$ 中 $P$ 點相一致之點)爲

$$\left. \begin{array}{l} \text{沿 } PG \text{ 上之 } x\omega^2 \\ \text{直交於 } PG \text{ 之 } x \frac{d\omega}{dt} = x\alpha \end{array} \right\} \text{此二者因輪對於 } G \text{ 點} \\ \text{之迴轉運動而生.}$$

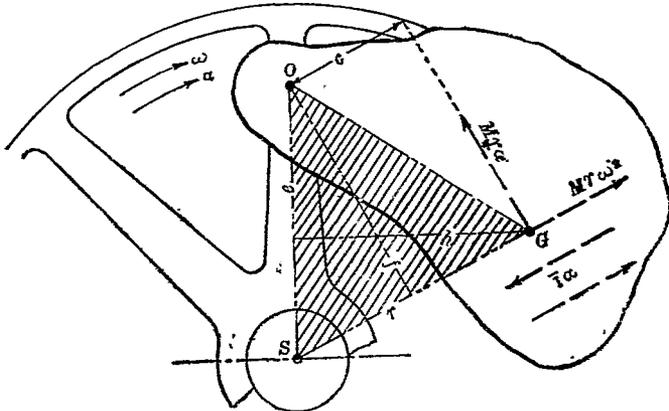
$$\left. \begin{array}{l} \text{平行於 } SG \text{ 之 } r\omega^2 \\ \text{直交於 } SG \text{ 之 } ra \end{array} \right\} \text{此二者因輪之曲線進行運} \\ \text{動而生.}$$

有効力對於銷釘 $O$ 之力勢——飛輪臂上所附着之質量對於銷釘 $O$ 周圍之迴轉運動,爲流體入口卷機構(Valve mechanism)發生運動之原因.今求該質量各點上有効力對於銷釘 $O$ 上之力勢.

質量 $m$ 之質點 $P$ 上有効力必有諸分加速度方向上之分力.由上所述質點 $P$ 之分加速度共有七個,故有効力之分力亦有七個,示於第582圖(a),茲求全部質點上此七個分力系對於銷釘 $O$ 之力勢總和如下:

- (1) 分力 $m\sigma\Omega^2$ 與 $m2u\omega$ 之作用線同在一直線上而通過 $O$

點故全部質點上此二分力系之合力系必通過  $O$  點。因之此二分力系對於  $O$  點力勢之總和為零，即對於鬆機構之運動不生影響。僅生銷釘  $O$  點上之壓力。



第 583 圖

(2) 次就分力系  $mra^2$  之力勢論之。此分力系因物體之進行運動而生，皆與  $SG$  平行而有同一指向。故其合力成爲一單獨之力，其大小爲  $\Sigma mra^2 = Mra^2$ ，其作用線通過  $G$  點（第 157 節）如第 583 圖所示。故力系  $mra^2$  對於銷釘  $O$  之力勢爲  $Mra^2 f$ 。

(3) 次就分力系  $mra$  之力勢論之。此力系亦由輪及質量之進行運動而起。生全部質點上此力系皆與  $SG$  直交，且有同樣之指向。故其合力亦爲一單獨之力，其大小爲  $\Sigma mra = Mra$ ，其作用線通過  $G$  點，如第 583 圖所示。此力系對於銷釘  $O$  之力勢總和爲  $Mra$ 。

(4) 次就分力系  $m\bar{x}\omega^2$  之力勢論之。此力系乃因輪與質量  $M$  迴轉於  $G$  軸周圍所生之法線力系。諸力皆通過迴轉軸，故其合力為一單獨之力，其大小為  $M\bar{x}\omega^2$ ，其作用線通過  $G$  點。但  $\bar{x}$  為零，故此合力亦為零。因之此力系對於  $O$  點之力勢，總和亦為零。

(5) 力系  $m\bar{x}a$  乃因輪與質量  $M$  對於  $G$  點之迴轉運動所生之切線力系。此力系之合力為一偶力，其力勢等於  $\bar{I}a$ ，但  $\bar{I}$  為質量  $M$  對於通過質量中心之軸之惰性勢。故此力系對於銷釘  $O$  (即其運動平面內任意一點) 之力勢總和等於  $\bar{I}a$ 。

(6) 最後就力系  $m\sigma\alpha'$  論之。此力系乃因質量  $M$  對於  $O$  點之迴轉運動所生之切線力系。對於  $O$  點之力勢總和等於  $I_0\alpha'$ ，但  $I_0$  為質量  $M$  對於銷釘  $O$  之惰性勢。因  $\alpha'$  甚小，故此力勢較其他力勢極小，可略去之。

外力之力勢與整速作用——外力之力勢必等於有效力勢之總和。若加以逆有效力，則外力系與逆有效力系可成平衡。故作用於質量  $M$  上諸外力之力勢必與離心力之力勢

$$T_e = Mr\omega^2 f = Mch\omega^2 \dots\dots\dots(1)$$

及力勢  $T_i = Mrac + \bar{I}a = a(Mrc + \bar{I}) \dots\dots\dots(2)$

相平衡。(2) 式之力勢乃於有角加速度  $a$  時方起作用。

故若飛輪以等角速度  $\omega$  迴轉時，即角加速度  $a$  為零時，則離心力之力勢  $Mch\omega^2$  有一定之值而為彈簧拉力之力勢所平衡。且  $\omega$  為一定時，作用於質量  $M$  上之外力力勢僅為彈簧拉

力之力勢即力勢  $T_i$  僅當飛輪速度變化時方可存在。

今說明萊德整速器之整速作用如下。設原動機以一定之平均速度  $\omega_0$  迴轉，則離心力之力勢  $T_c (=Meh\omega^2)$  為彈簧拉力之力勢  $T_s$  所平衡。今設原動機上負荷減小，則其運動部份如飛輪與軸等之角速度增為  $\omega_1$ ，而力勢  $T_c$  亦自  $Meh\omega_0^2$  增為  $Meh\omega_1^2$ ，因之離心力所生力勢之增量  $Meh(\omega_1^2 - \omega_0^2)$  為彈簧拉力之所不能平衡，遂起整速器上各部份之運動。若僅恃此力勢增量以運動鬆機構，則在整速器與鬆機構未運動前角速度  $\omega$  須充分超過於平均速度  $\omega_0$ ，但當此速度開始變化之瞬間內，質量  $M$  上生角速度  $\alpha$  因之生力勢  $T_i$  可使鬆機構起運動。故在理想之整速器上，須有力勢  $T_c$  以限定平均速度  $\omega_0$ ，及有充分大小之力勢  $T_i$ ，當飛輪有角加速度時即起作用，以輔助調整速度之用。

質量  $M$  之分佈及其位置——由第(2)式若  $r$  一定時，則力勢  $T_i$  因  $M$  與  $\bar{I}$  而定。對於重大之飛輪則  $\alpha$  常不大，故欲增大  $T_i$  時其法可或使  $M$  增大，或對於一定之  $M$ ，增大  $\bar{I}$  之值，即將  $M$  質量分為二部份，使遠離其重心  $G$ ，中間以棒連結之。如第585圖所示。

又質量  $M$  之整速作用恃  $O, S, G$  各點之相對位置而定。第584圖上以  $OS$  即  $e$  為直徑作一圓，假定軸之迴轉方向為時針方向。由上所述，則對於整速器調整作用上有効者共有三個力勢，即  $Mrac, \bar{I}\alpha$  及  $Meh(\omega_1^2 - \omega_0^2)$  是也。此三個力勢之方向因

$G$  點位置之如何或相同或相異，今若假定反時針方向為正，時針方向為負，則對於圖示  $G$  之 I, II, III, IV 四個區域，各力勢對於  $O$  點之方向如下表。

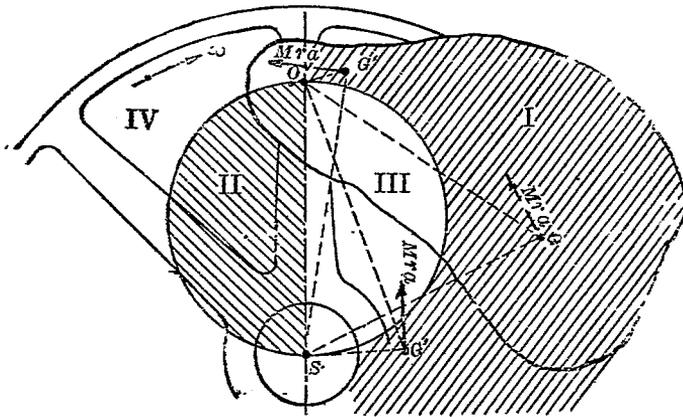
	I	II	III	IV
$Mrc$	+	-	-	+
$\bar{I}a$	+	+	+	+
$Mch(\omega_1^2 - \omega_0^2)$	+	-	+	-

故整速器有最大調整作用時，質量  $M$  之質量中心  $G$  須在於 I 之區域。若  $G$  在 III 之區域，則力勢  $T_i$  等於  $(\bar{I} - Mrc)a$ ，當  $\bar{I}$  大於  $Mrc$  時  $T_i$  為正， $\bar{I}$  小於  $Mrc$  時  $T_i$  為負。若  $G$  在 II 與 IV 之區域時，即在垂直直徑之左側時，則離心力之力勢與力勢  $\bar{I}a$  有相反方向。若全部質量集中於重心  $G$  之附近時，則  $\bar{I}$  甚小，故  $G$  可在於 IV 之區域。

通常之萊德氏整速器上， $\bar{I}$  之值甚大，故力勢  $\bar{I}a$  較力勢  $Mrc$  甚大。對於此種整速器，質量  $M$  之質量中心可在圓周上。或欲減少離心力勢  $Mrc$  以減小彈簧時，質量中心之位置亦可在於 III 之區域內。

由第 584 圖則離心力  $Mrc^2$  之力勢為三角形  $OSG$  面積之  $2M\omega^2$  倍。故此力勢與三角形  $OSG$  面積成正比例。由此則所需彈簧之大小，亦與三角形  $OSG$  成正比例。故欲減小彈簧而有佳良之調整作用時，在可能範圍內須減小三角形  $OSG$  之面

積若使  $G$  在  $l$  之區域內，則使  $G$  近於  $S$  如  $G'$  或近於  $O$  如  $G''$  等位置第 585 圖之整速器上  $G$  點近於  $S$  之位置。

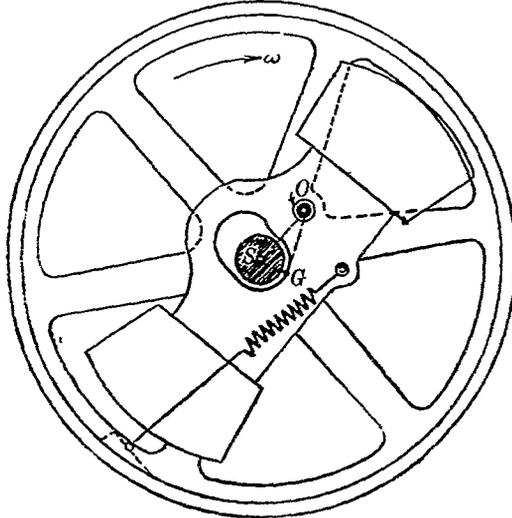


第 584 圖

例 第 585 圖示一 6 馬力蒸汽機上之萊德氏整速器依實驗結果每馬力需 0.07 至 1.2 kg.m 之能 (Energy) 貯蓄於整速器之質量內以勝過彈簧之內力今假定為每馬力 0.7 kg.m. 依下之數字試求整速器上宜附之重量及彈簧之指數 (Modulus:  $OS = e = 8.5 \text{ cm.}$ ,  $h = 4 \text{ cm.}$ , 平均速度 = 250 r. p. m.,  $l_0$  = 彈簧未拉長時之長度 = 23.5 cm.,  $l_1$  = 彈簧之最小長度 = 28 cm.,  $l_2$  = 彈簧之最大長度 = 30 cm.,  $p$  = 彈簧拉力之勢臂 = 9.5 cm.

解 因離心力力勢  $T_c$  等於彈簧拉力力勢  $T_s$  故

$$T_c = T_s$$



第 585 圖

即 
$$\frac{W}{g} r \omega^2 f = P_m \times 0.095$$

或 
$$\frac{W}{g} \omega^2 h \theta = P_m \times 0.095$$

但  $P_m$  爲彈簧之平均拉力，因貯蓄於整速器內之功等於彈簧拉伸時所需之功，由此可求  $P_m$  之值，故得

$$0.7 \times 6 = P_m \times 0.80 - 0.28)$$

$$\therefore P_m = 210 \text{ kg.}$$

代入前式得

$$\frac{W}{9.8} \times \left( \frac{250 \times 2\pi}{60} \right)^2 \times 0.04 \times 0.085 = 210 \times 0.095$$

$$\therefore W = 83.5 \text{ kg.}$$

整速器在平均位置時，彈簧之長度爲

$$\frac{30+23}{2} = 29 \text{ cm.},$$

故彈簧指數爲

$$\frac{210}{29-23.5} = \frac{210}{5.5} = 38.1 \text{ kg./cm.}$$

### 習 題 29.

1. 生鐵製造之飛輪其周緣速度通常限制於每分 2km., 設略去輻 (Spoke) 之影響, 求對於該速度之邊緣內每單位面積之抗拉內力.

2. 一生鐵環之最大單位面積抗拉力爲 14 kg./mm<sup>2</sup>, 生鐵之比重爲 7.0, 其半徑爲 60 cm., 求該環之最大每分迴轉次數.

3. 一飛輪重 1500 kg., 分兩半部, 以八個螺銷釘 (Bolt) 合緊之各半部之  $\bar{r}$  爲 180 cm., 螺銷釘直徑爲 2 cm., 螺絲底部直徑爲 1.5 cm., 螺銷釘之准受內力爲 8 kg./mm<sup>2</sup>, 求該飛輪之最大速度.

4. 鐵道彎曲之半徑爲 600 m., 車之速度爲每小時 70 km., 問軌道外側之舉高度.

5. 一混凝土之汽車路, 彎曲部之半徑爲 80 m., 其外側舉高度當汽車速度爲 30 km./hr. 時, 適無輪緣側壓力. 若對於該路汽車速度增爲 80 km./hr. 時, 適開始滑動, 求摩阻力係數.

6. 一單擺長 120 cm., 振幅角度  $\theta_1$  為  $30^\circ$ , 求週期. 用近似式及精密式二者比較之.

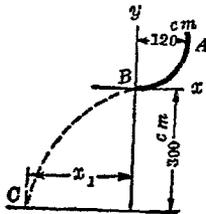
7. 一單擺之週期為半秒, 一秒及二秒時其長度  $l$  各為若干?

8. 一鐵桁重 8000 kg., 懸於 25 m. 之索, 今須拉高 2 m., 求其水平拉力. 求該桁自由擺動, 而經過垂直位置時, 該索內之拉力.

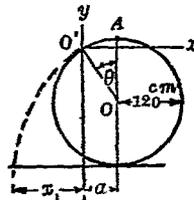
9. 重 5 kg. 之物體以 120 cm. 之繩繫之, 使迴轉於垂直面內之圓周上, 問使該物體維持其圓運動時, 在圓底部之最小速度. 問該物體在圓底部時之繩內拉力. 又離圓頂  $60^\circ$  及  $45^\circ$  時之各繩內拉力?

10. 第 586 圖上一小物體自由滑下於  $AB$  之四分之一圓弧上, 求距離  $x_1$ , 並求  $BC$  徑路之方程式.  $C$  處之速度若何?

11. 第 587 圖上一小物體自直徑 240 cm. 之平滑圓柱體面頂上滑下, 至  $O'$  點離開圓柱體面, 求角度  $\theta$ , 并計算距離  $a$  及  $x_1$  各值.

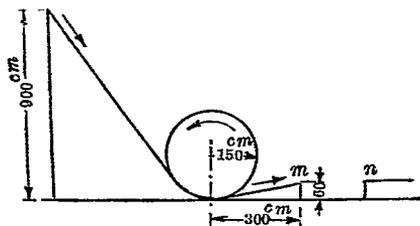


第 586 圖



第 587 圖

12. 第588圖上一小車自高900 cm. 滑下, 經垂直面內之圓軌, 問該車在圓軌頂點之速度? 若人與車重 150 kg. 時, 在圓軌頂點時之壓力, 并問該車能跳躍之距離  $m$   $n$

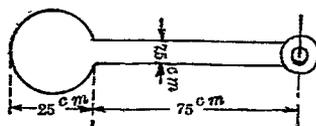


第 588 圖

13. 一均勻斷面之細棒長 1 m. 擺動於其一端之水平軸周圍, 該軸與棒直交, 求擺動週期, 并問有同一週期之他懸點
14. 一均勻斷面之細棒擺動於其一端之水平軸周圍, 週期為一秒, 求該棒之長.

15. 第589圖上直徑 25 cm. 之圓盤厚 2.5 cm., 上附一矩形斷面之棒, 長 75 cm., 寬 7.5 cm., 厚 2.5 cm., 均以鋼製. 懸於水平軸  $O$ , 成一複擺, 求週期.

16. 扭擺之圓盤受 0.5 kg. m. 之扭勢而迴轉  $10^\circ$ , 將扭勢取去後, 該擺每秒擺動五次, 求該圓盤之慣性勢.

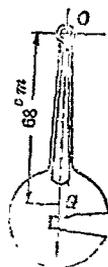


第 589 圖

17. 扭擺上圓盤直徑 30 cm., 厚 5 cm., 加以 0.5 kg. m. 之扭勢, 扭轉  $8^\circ$ , 設圓盤為生鐵鑄成, 比重 7.0, 求其週期.
18. 第590圖示一却畢氏衝擊試驗機(Charpy impact testing

machine) 之擺,重 25 kg, 其重心離迴轉軸為 68 cm., 於 61 秒間擺動 35 次, 求該擺對於迴轉軸之惰性勢。

19. 一蒸汽機之連接桿重 150 kg, 重心離曲柄銷釘為 125 cm., 今懸於曲柄銷釘端使擺動之, 則 75 秒間擺動 30 次, 求該連接桿對於曲柄銷釘端之軸之惰性勢, 及對於通過重心上平行軸之惰性勢。



第 590 圖

20. 一內燃機之曲柄軸 (Crank-shaft) 上有  $A, B$  二飛輪, 其迴轉面之相距為 110 cm., 曲柄之迴轉面在該二輪間, 離  $A$  之平面為 50 cm., 曲柄臂 (Crank arm) 與曲柄銷釘相當於重 54 kg. 之物體, 離曲柄軸 25 cm., 而在於曲柄之迴轉平面內, 問各飛輪上離軸 60 cm. 處置以若干重量方可定衡之。

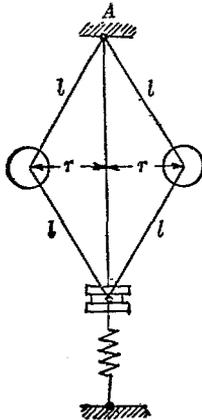
21. 一軸上附以四物體在相異之迴轉面內, 其位置與重量各示於下表, 取 3 kg. 物體之質量中心迴轉面為參考面, 今以二個質量定衡之, 一置於 2.5 kg. 物體之迴轉面內, 離軸心 45 cm., 一置於參考面內, 離軸心 60 cm., 求各質量及其  $\theta$  值。

$W$	$\theta$	$r$	$a$
2.5 kg.	$30^\circ$	60 cm.	-30 cm.
2.0	45	45	60
3.0	150	30	0
2.0	240	60	15

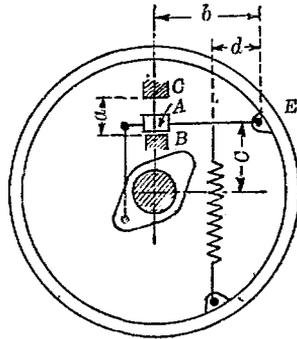
22. 一單汽筒 (Single cylinder) 水平蒸汽機, 重 10,000 kg, 其往復部份重 500 kg, 曲柄長 30 cm., 迴轉數每分 300 次. 假定往復部份為單弦運動, 以普通方法定衡之, 求其最大之垂直不定衡力.

23. 一活塞重 150 kg., 活塞桿重 50 kg., 叉頭重 25 kg., 連接桿重 150 kg., 曲柄銷釘重 15 kg., 設  $r_1 = r = 30$  cm. (參考第 576 圖) 假定定衡物體 (Counter weight) 之臂與曲柄相平衡. 求兩側曲柄軸上之定衡物體重量. 若汽筒 (Cylinder) 為水平, 蒸汽機之迴轉速度為 180 r. p. m., 求不定衡之垂直力.

24. 第 591 圖示一彈簧加重之擺整速器.  $W$  為各球之重,  $r$  為各球徑路之半徑,  $l$  為各臂之長,  $\omega$  為角速度. 若  $t$  為零時



第 591 圖



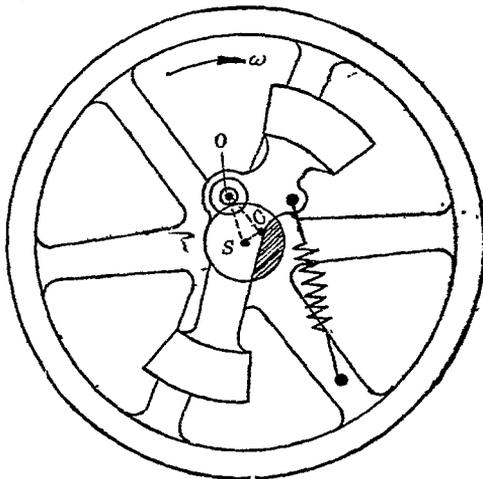
第 592 圖

彈簧拉力為  $P$ ，彈簧伸長單位長之拉力為  $Q$ ，略去球重時，求證下式：

$$\omega^2 = \frac{g[P + 2Q(l - \sqrt{l^2 - r^2})]}{W\sqrt{l^2 - r^2}}$$

25. 第592圖之離心軸整速器上當速度在 210 r.p.m. 以下時，重量  $A$  不致離開下方之  $B$  而觸於上方之  $C$ 。求彈簧之最初拉力及彈簧之指數 (Modulus)。但  $A$  重 8 kg.,  $a = 7.5$  cm.,  $b = 60$  cm.,  $c = 20$  cm.,  $d = 40$  cm.

26. 第593圖示萊德氏整速器，整速用之重量為 50 kg., 彈簧在平均位置時拉力為 250 kg.,  $e = 18$  cm.,  $h = 6.5$  cm.,  $r = 4.5$  cm.,  $p = 20$  cm., 求整速器在平均位置時原動機之速度。



第 593 圖

### 第十三章 功 功率 能

182. 功之定義與計算 物體受外力作用而運動,若力之作用點之變位有外力方向之分變位時,則該力做功 (Work) 於該物體 此功之量可以力與該力作用點沿力向分變位之乘積表示之,又或可以外力沿其作用點之變位方向上之分力及該變位之乘積表示之.此外力沿作用點變位方向上之分力稱曰做功分力 (Working component), 變位沿外力方向上之分變位稱曰有效變位 (Effective displacement).

茲先將一力所做之功分別述其計算式. 設  $w$  爲功,  $F$  爲力,  $s$  爲力之作用點之變位.

(i) 若力之大小與方向爲一定,且力之方向與變位方向相一致時,例如垂直向上以等加速度舉高物體,則所做之功爲

$$w = F \cdot s$$

(ii) 若力之大小與方向爲一定,而其方向不與變位方向一致時,如第 594 圖,則所做之功爲

$$w = F \cos \theta \cdot s = F_t \cdot s$$

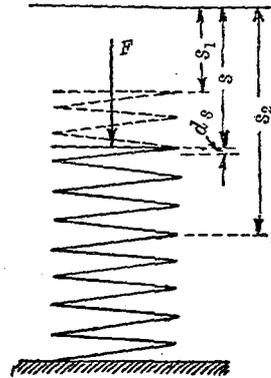
因  $F \cos \theta$  與力之作用點之徑路成切線,故以  $F_t$  示之.

(iii) 力之大小有變化而方向一定,且其方向與變位相一致。例如壓縮一螺線彈簧(Helical spring)之力,或作用於蒸汽機內活塞上當入汽閥關閉(Cut-off)後之蒸汽壓力等生變位  $s$  時之力  $F$  在極微變位  $ds$  內可視為一定不變故對於變位  $ds$  所做之功  $dw = Fds$ , 因之當變位自  $s_1$  變為  $s_2$  時(第595圖)全部之功為

$$w = \int_{s_1}^{s_2} F ds$$



第594圖



第595圖

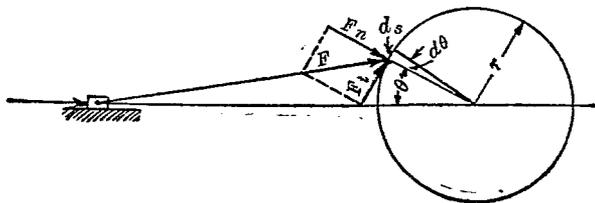
若  $F$  能以  $s$  之函數表示時,上之積分易於求得。

(iv) 力之大小與方向同時變化,例如連接桿作用於曲柄銷釘上之力,設切線方向之分力為  $F_t$ , 則

$$w = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$$

若力之作用點沿圓周變位時(第596圖),則  $ds = r d\theta$ , 故

$$w = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} F_t r d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta$$



第 596 圖

但  $T$  爲外力對於圓心之扭勢 (Torque)。若當角變位  $\theta = \theta_2 - \theta_1$  時, 扭勢爲一定, 則

$$w = T \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta = T(\theta_2 - \theta_1) = T\theta$$

故一週轉時  $F$  所做之功爲  $w = 2\pi T$ , 單位時間內  $n$  週轉時, 則單位時間內所做之功爲

$$w = 2\pi n T$$

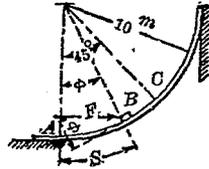
次就偶力所做之功之計算式述之如下。設有力勢  $T$  之偶力使物體生角變位  $d\theta$ , 則其所做之功爲

$$w = \int_{\theta_1}^{\theta_2} T d\theta$$

上式中  $T$  爲變數, 若  $T$  爲常數時。

$$w = T\theta$$

例 第597圖示一平滑之彎曲鐵軌，其曲線成一圓弧，半徑10 m，今有一小物體重5 kg，以水平力 $F$ 推之使沿該軌上昇。此 $F$ 力之大小適足使物體運動。求物體自 $A$ 至 $C$ 時 $F$ 力所做之功。



第 597 圖

解  $F$ 力所做之功爲 $\int F \cos \phi ds$ ，但 $F$ 與 $\phi$ 均爲變數。因 $B$ 以等速度運動，故 $a_t = 0$ ，

$$\Sigma F_t = F \cos \phi - 5 \sin \phi = 0$$

又

$$\therefore F = 5 \tan \phi$$

由圖知 $\phi = \frac{s}{10}$ ，故 $F$ 力所做之功如下：

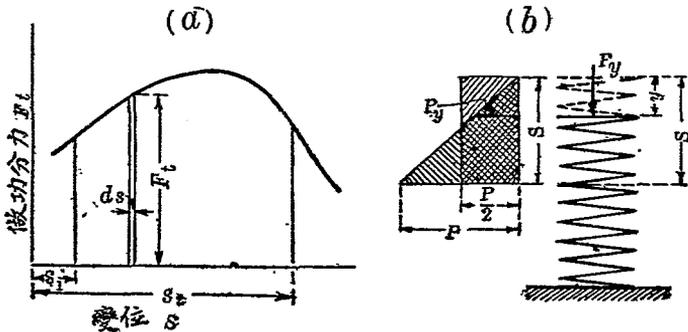
$$\int_0^{10\frac{\pi}{4}} \left(5 \tan \frac{s}{10}\right) \left(\cos \frac{s}{10}\right) ds = 5 \int_0^{10\frac{\pi}{4}} \sin \frac{s}{10} ds = 14.6 \text{ kg. m.}$$

183. 功之符號與單位 功爲度量(Scalar quantity)，故不問力之方向如何及其作用點變位之方向如何，一力所做之功可與他力所做之功求其代數和。功雖非向量，但有符號。即做功分力與作用點之變位有同一指向者其功爲正，有相反指向者其功爲負。故減緩物體運動之力，其所做於物體上之功爲負。

單位之力使物體生單位變位時，其所做之功爲功之單

位。故功之單位因所取力之單位及變位之單位而異。例如 kg.m., kg.-cm., ft.-lb., in.-lb. 等。功之絕對單位為 erg, 而  $10^7$ erg. 稱曰 joule, 功之較大單位用 h. p.-hr. 與 k. w.-hr. 其定義見第 186 節。

184. 功之圖示法 對於變化之力,用積分法求其所做之功時,須將力之做功分力  $F_t$  以變位  $s$  之函數表示之。若  $F_t$  不能以  $s$  之函數表示之,或只能以複雜形狀之函數表示之而不易積分者,則  $F_t$  與  $s$  間之關係可用曲線圖表之。由圖表即可計算其所做之功。對於  $F$  力作用點之一切位置,將其  $F_t$  與  $s$  記於直角軸之圖上,連結各點得  $(F_t-s)$  曲線如第 598 圖 (a)。因  $w = \int_{s_1}^{s_2} F_t ds$ , 但  $F_t ds$  表示極小面積,故  $s_1$  與  $s_2$  間  $F_t-s$  曲線之全面積  $\int_{s_1}^{s_2} F_t ds$  即表示全部之功。此功之圖表稱曰功圖 (Work-diagram)。例如垂直軸上縮尺每 1 cm. = 50 kg., 水平軸上



第 598 圖

縮尺每 1 cm. = 5 m., 則圖上面積每 1 cm<sup>2</sup>. = 250 kg.m., 功圖面積可用面積測量器 (Planimeter) 或其他方法求之。

例 1 第 598 圖 (b) 示一螺線彈簧, 其指數為每 cm. 100 kg., 今以軸方向之壓力壓縮之至  $s = 10$  cm., 求此壓力所做之功。

解 設彈簧壓縮  $y$  時之力為  $P_y$ , 則

$$w = \int_0^s P_y dy,$$

但

$$P_y = 100 y,$$

故

$$w = \int_0^s 100 y dy = \left[ \frac{100}{2} y^2 \right]_0^{10} = 5,000 \text{ kg.-cm.}$$

因

$$w = \frac{100 s^2}{2} = \frac{100 s}{2} \times s = \frac{P}{2} s$$

即為功圖上三角形之面積, 或即為平均力  $\frac{P}{2}$  與總變位  $s$  之乘積。

185. 力系對於物體所做之功 物體常受力系之作用而生變位. 力系對於物體上所做之功等於各力所做之功之代數和. 但有時可求力系合力對於該物體所做之功以得之茲先述下列各項注意.

(a) 凡相等反向而同作用線之二力苟各作用點間距離不變時, 則雖二作用點任何變位, 其所做之功為零. 二力之合力雖為零, 但其所做之功一般未必為零. 例如螺線彈簧之一端附着於固定面, 他端漸加以力, 則所加之力與固定面之反

作用力相等反向而同作用線，但對於彈簧上所做之功不爲零。依同理，物體若不爲剛體，雖其內力之合力常爲零，而內力所做之功不爲零。物體若爲剛體，則各質點無相對的變位，故內力所做之功爲零。

(b) 合交力系對於物體所做之功等於其合力所做之功。便利上通常假定合力之作用點，即爲力系之合交點。

(c) 作用於剛體上同平面偶力系使剛體發生角變位  $\theta$  時，其所做之功等於合成偶合  $\Sigma T$  所做之功，即

$$w = \int_1^2 \Sigma T \cdot d\theta$$

若合成偶力爲一定時，

$$w = \Sigma T \cdot \theta$$

(d) 作用於物體(不問剛體與否)上之重力對於任何變位所做之功等於物體重量與其質量中心垂直變位之乘積，與其橫向變位無關係。若質量中心下降時重力所做之功爲正，若上昇時則爲負。此時作用於物體上各質點之地球引力成一平行力系，而物體之重量即爲該平行力系之合力。

物體受力系之作用而生進行運動，迴轉運動及平行運動時對於數種特別情形可用其合力以求該力系所做之功。任何同平面力系可分解成爲作用於任意一點之同平面合交力系及該平面內之偶力系，其合交力系之合力爲一單獨之力，偶力系之合力仍爲一偶力。故力系合力對於一剛體所

做之功等於此單獨之力及偶力各所做之功之總和。

由第 156 節合力之方向常與質量中心之加速度方向相一致。故便利上取質量中心為合交力系之合交點。且各力沿質量中心之加速度方向上分力之代數和即等於合力，故此合力可以  $\Sigma F_{\bar{a}}$  表示之。其做功分力與質量中心之徑路相切，故可以  $\Sigma F_{\bar{a}_t}$  表示之。又合成偶力等於各力對於質量中心上力勢之代數和，故可以  $\Sigma \bar{T}$  表示之。因之剛體受同平面力系作用時該力系所做之功為

$$w = \int_{s_1}^{s_2} \Sigma F_{\bar{a}_t} d\bar{s} + \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Sigma \bar{T} \cdot d\theta \dots \dots \dots (1)$$

但  $\bar{s}$  表示質量中心於其徑路上所經過之距離。 $\theta$  為物體所迴轉之角度。(1) 式對於下列各種特別情形可以更簡單之形式示之。

(i) 等加速度之直線進行運動——此時  $\Sigma \bar{T}$  為零， $\Sigma F_{\bar{a}}$  為定值，而作用於  $\bar{s}$  之方向。但  $\bar{a}$  與  $\bar{s}$  等於剛體內各質點之  $a$  與  $s$ ，故 (1) 式成為

$$w = \Sigma F_{\bar{a}} \cdot \bar{s} = \Sigma F_a \cdot s \dots \dots \dots (2)$$

(ii) 對於通過質量中心之軸有等加速度迴轉運動——此時  $\Sigma F_{\bar{a}}$  為零而  $\Sigma \bar{T}$  為  $\theta$  定值，故

$$w = \Sigma \bar{T} \cdot \theta \dots \dots \dots (3)$$

iii) 質量中心有等加速度直線運動而同時有等角加速

度迴轉運動之平面運動。——此時 $\Sigma a$ 為一定,作用於 $\bar{s}$ 之方向,而 $\Sigma \bar{T}$ 亦為一定,故

$$w = \Sigma F_a \cdot s + \Sigma \bar{T} \cdot \theta \dots\dots\dots(4)$$

例 半徑  $r$  公尺之圓柱體重  $W$  公斤沿斜面輾下而不滑動,設斜面長  $s$  公尺與水平成  $\phi$  角,求對於圓柱體所做之功。

解 作用於圓柱體上之三力示於第 599 圖 (a), 即重量  $W$ , 直交壓力  $N$ , 與摩阻力  $F$  是也。今加反向相等之力  $F$ ,  $F$  於其質量中心上, 如第 599 圖 (b), 次將  $W$  分解為  $x$  與  $y$  軸向上分力, 則原有三力變成第 599 圖 (c) 所示之力  $W \sin \phi - F$ , 及偶力  $Fr$ , 由本節 (4) 式

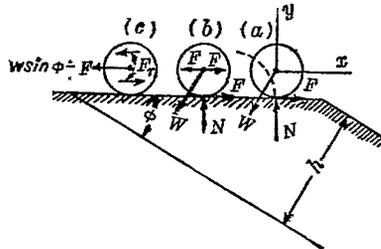
$$w = (W \sin \phi - F)\bar{s} + Fr \cdot \theta$$

但

$$s = r\theta,$$

故

$$w = W \sin \phi \cdot s - Fs, \quad Fs = W \sin \phi \cdot s = Wh \text{ kg.m.}$$



第 599 圖

由上式則  $F$  與  $N$  二力均不做功 圓柱體與斜面相接觸點之運動方向乃直交於  $F$  力,故  $F$  力亦不做功。

186 功率 做功對於時間之比率稱曰功率(Power) 原動機功效之大小在於其做功之遲速,故功率為品別蒸汽機電動機等效能大小之量.

若做功之遲速為一定時,則功率  $P$  由下式求之.

$$P = \frac{w}{t}$$

但  $w$  為時間  $t$  內所做之功.若做工遲速有變化時,則某瞬間內之功率由下式求之.

$$P = \frac{dw}{dt}$$

功率為度量.單位時間內所做單位之功即為功率之單位.若用重力單位時,用  $\text{kg.m./sec.}$ ,  $\text{ft.-lb./sec.}$  等單位.若用絕對單位時,則用  $\text{erg./sec.}$  或  $\text{joule./sec.}$  等單位.

工程上常用較大之功率單位.其重力單位中有歐洲大陸制馬力 (Force de cheval) 及英美制馬力 (Horse power) 二種.

$$1 \text{ 歐洲大陸制馬力} = 75 \text{ kg.m./sec.} = 4,500 \text{ kg.m./min.}$$

$$1 \text{ 英美制馬力} = 550 \text{ ft.-lb./sec.} = 33,000 \text{ ft.-lb./min.}$$

於絕對單位中有瓦 (watt) 及千瓦 (kilowatt, kw.) 二種為較大之功率單位.

$$1 \text{ 瓦} = 10^7 \text{ erg./sec.}$$

$$1 \text{ 千瓦} = 1000 \text{ 瓦.}$$

瓦與千瓦廣用於電氣工程上其與英美制馬力之關係如下：

$$1 \text{ 英 美 制 馬 力 } = 746 \text{ 瓦.}$$

$$1 \text{ 千 瓦 } = 1.34 \text{ 英 美 制 馬 力.}$$

近似計算上可用  $1 \text{ 英 美 制 馬 力 } = \frac{3}{4} \text{ 千 瓦}$  或  $1 \text{ 千 瓦 } = \frac{4}{3} \text{ 英 美 制 馬 力.}$

功之較大單位有馬力小時 (Horse-power-hour, hp.-hr.) 及千瓦小時 (kilowatt-hour, kw.-hr.). 一馬力小時者乃一馬力繼續做一小時之功即

$$1 \text{ 馬 力 小 時 } = 33,000 \times 60 = 1,980,000 \text{ ft.-lb.}$$

$$\text{同 樣 得 } 1 \text{ 千 瓦 小 時 } = 1.34 \times 1,980,000 = 2,650,000 \text{ ft.-lb.}$$

今設有  $F$  力, 當其作用點起一定之變位時, 該力為一定, 且其方向與變位方向相一致, 例如機關車之牽引力等, 則其單位時間內所做之功為  $Fv$  但  $v$  為該力作用點之速度, 即單位時間所經過之距離故若  $F$  以 kg. 表示之,  $v$  以 m./sec. 表示時, 則

$$1 \text{ 歐 洲 大 陸 制 馬 力 } = \frac{Fv}{75}$$

若  $F$  以 lb. 表示之,  $v$  以 ft./sec 表示時, 則

$$1 \text{ 英 美 制 馬 力 } = \frac{Fv}{550}$$

若  $v$  為變數, 則上式表示速度  $v$  之瞬間內所有之馬力數若力之方向不與其作用點之變位方向相一致時, 則上式中之  $F$  以其做功分力代入之. 若力之方向與變位方向一致, 但其大

小有變化，例如活塞上之蒸汽壓力，或曲柄銷釘上之切線作用力 (Tangential effort) 等，則用該瞬間之  $F$  或  $F_t$  值以得該瞬間之功率。但一輪迴 (Cycle) 或數多輪迴內之平均功率常較各瞬間之功率更為有用。例如蒸汽機之平均馬力為實際所需要者，由下式得之。

$$1 \text{ 歐洲大陸制馬力} = \frac{2Plan}{450,000}$$

$$1 \text{ 英美制馬力} = \frac{2Plan}{33,000}$$

但  $P$  為平均有效壓力 (Mean-effective force) 以  $\text{km./cm}^2$  或  $\text{lb./in}^2$  示之。 $\alpha$  為活塞面積，以  $\text{cm}^2$  或  $\text{in}^2$  示之。 $l$  為衝程之長，以  $\text{m.}$  或  $\text{ft.}$  示之。 $n$  為每分迴轉數 (r. p. m.)。

今設以一定偶力之力勢  $T$ ，使物體迴轉已知角變位  $\theta$  時，則所做之功為  $T \cdot \theta$ ，設該偶力於單位時間內迴轉  $\omega$  角即角速度為  $\omega$  時，則單位時間內偶力所做之功為  $T\omega$ ，故偶力之力勢計算由下式求之。

$$\text{馬力數} = \frac{T\omega}{75} \text{ (歐洲大陸制)}$$

$$\text{馬力數} = \frac{T\omega}{550} \text{ (英美制)}$$

若角速度不為一定時，則上式表示角速度  $\omega$  時之瞬間內所有馬力數。但實際上某輪迴中之平均馬力較各瞬間之馬力更為有用。

**187. 能之定義** 能(Energy)者物體可做功之能力(Capacity)。物體在適當狀態能發生可做功之力者，該物體稱曰有能。此狀態種類不一，故物體有各種樣式之能。如機械能(Mechanical energy)，熱能(Heat energy)，化學能(Chemical energy) 電能(Electrical energy)，磁能(Magnetic energy)等等。根據吾人經驗，則任何式樣之能均可變形為其他任何式樣之能。機械能尤與動力學有重要關係，可分之為位能(Potential energy)及動能(Kinetic energy)兩種。前者因某種位置之差異而生，後者因運動而生。

能亦為度量。故一質量系(Mass-system)之能等於該系內各質點所具能之代數和，與質點運動方向無關。能之單位與功之單位全同。

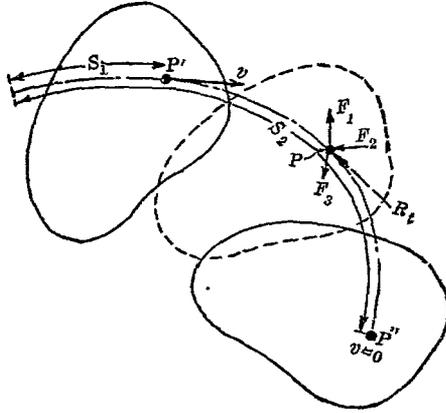
**188. 動能** 物體因運動而可做功之能力稱曰動能。物體具有動能時，得對抗外力而做功，同時物體因此外力之作用而減小其速度。例如噴射之水流可衝動水車(Water wheel)，鍛工用蒸汽鎚當落下時可擊物體而使變形。

自量的方面言之，則物體能對抗外力所做之功量即表示物體所有動能之量。若物體所有動能全部做功後，其速度即減為零而歸靜止。

**189. 質點之動能** 第600圖中 $P$ 為剛體內一質點，其質量為 $m$ 。 $P$ 點當物體運動時，沿其徑路自 $P'$ 移至 $P''$ ，其速度因對抗外力而做功，故自 $P'$ 處之 $v$ 減至 $P''$ 處為零。交於該質點

之合交力系所做於該質點上之功等於其合力  $R$  所做之功  
即

$$w = \int_{s_1}^{s_2} R_t ds$$



第 600 圖

但由前節所述則該質點之動能  $E_k$  即為該質點對抗外力所做之功因之

$$E_k = -w = - \int_{s_1}^{s_2} R_t ds$$

因  $R_t = ma_t$ ,  $a_t = \frac{dv}{dt}$ ,  $v = \frac{ds}{dt}$

$$\begin{aligned} \therefore E_k &= - \int_{s_1}^{s_2} R_t ds = - \int_{s_1}^{s_2} ma_t ds = - \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt} ds \\ &= - \int_{s_1}^{s_2} m \frac{ds}{dt} dv = - \int_v^0 m v dv = \frac{1}{2} m v^2 \end{aligned}$$

即質點  $P$  在  $P'$  處有速度  $v$  時, 其動能爲  $\frac{1}{2}mv^2$ , 今設質點由  $P'$  移至  $P''$  時, 其速度由  $v$  減爲  $v_0$ , 則二點間動能之差爲

$$\frac{m}{2}(v^2 - v_0^2).$$

**190. 剛體之動能** 因能爲度量, 故物體 (不問剛體與否) 之動能等於各質點動能之代數和. 即對於任何質量系, 下式常可成立.

$$E_k = \sum \frac{1}{2} mv^2$$

今就各種剛體之運動求其動能如下:

(i) 剛體之進行運動——此時各質點有共同之速度  $v$ , 故

$$E_k = \sum \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum m$$

即 
$$E_k = \frac{1}{2} M v^2 \dots\dots\dots(1)$$

但  $M$  爲物體全部之質量.

(ii) 剛體之迴轉運動——此時各質點有共同之角速度  $\omega$ , 設質量  $m$  之任意一點  $P$  離迴轉軸  $O$  之距離爲  $r$ , 則其線速度  $v$  等於  $r\omega$ , 故

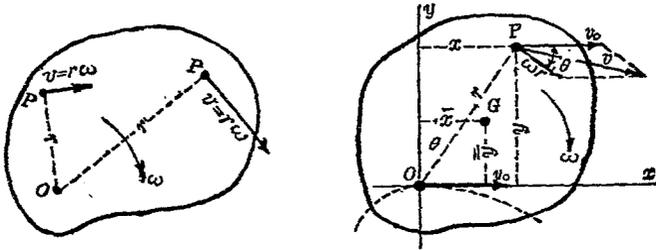
$$E_k = \sum \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \sum m(\omega r)^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum mr^2$$

但  $I_0 = \sum mr^2$ , 故

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 \dots\dots\dots(2)$$

(iii) 剛體之平面運動——物體內各質點有共同之角速度  $\omega$ ，且平面運動可分成任意一點  $O$  周圍之迴轉運動及相同於  $O$  點之進行運動。故質量  $m$  之任意一質點  $P$  其速度  $v$  為  $O$  點周圍之迴轉運動速度  $\omega r$  及各質點共有之進行運動速度  $v_0$  二者所合成。且  $\omega r$  之方向與  $r$  成直交。因之由第 601 圖上，根據平行四邊形定律得

$$v^2 = (\omega r)^2 + v_0^2 + 2v_0\omega r \cos \theta$$



第 601 圖

故物體之動能得求之如下。

$$\begin{aligned} E_k &= \sum \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \sum m \{ (\omega r)^2 + v^2 + 2v_0\omega r \cos \theta \} \\ &= \frac{1}{2} \sum m \omega^2 r^2 + \frac{1}{2} \sum m v_0^2 + \sum m v_0 \omega r \cos \theta \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \sum m r^2 + \frac{1}{2} v_0^2 \sum m + \omega v_0 \sum m r \cos \theta \end{aligned}$$

但  $I_0 = \sum m r^2$ ,  $r \cos \theta = y$ ,  $\sum m r \cos \theta = \sum m y = M \bar{y}$ ,

故得

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 + \frac{1}{2} M v_0^2 + M \bar{y} \omega v_0 \dots \dots \dots (B)$$

但  $O$  點爲運動平面上之任意一點，故可取於物體之質量中心。此時  $\bar{y}=0, I_0=\bar{I}, v_0=\bar{v}$ ，故動能之式如下：

$$E_k = \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 + \frac{1}{2} M \bar{v}^2 \dots\dots\dots(4)$$

由 (3) 式則平面運動雖可分解成爲任意一點周圍之迴轉運動及與該點同樣之進行運動，但物體之動能並不等於迴轉運動之動能與進行運動之動能二者之總和。若該點取於質量中心時，則物體動能始可等於迴轉運動與進行運動二者動能之和。

(4) 式又可求之如下。物體之平面運動可視爲瞬間中心周圍之迴轉運動。設物體對於瞬間中心之慣性勢爲  $I_i$ ，則由 (2) 式

$$E_k = \frac{1}{2} I_i \omega^2$$

但  $I_i = \bar{I} + M\bar{r}^2$ ， $\bar{r}$  爲質量中心至瞬間中心之距離故

$$E_k = \frac{1}{2} (\bar{I} + M\bar{r}^2) \omega^2 = \frac{1}{2} \bar{I} \omega^2 + \frac{1}{2} M \bar{v}^2$$

對於蒸汽機連接桿如第 602 圖所示者， $i$  爲瞬間中心，重心  $G$  之進行運動速度爲  $\bar{v}$ ，而  $\bar{v} = r\omega$  如圖所示。

(iv) 剛體之球面運動——由第 150 節設  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  爲運動物體在任意瞬間內座標軸方向上分角速度； $x, y, z$  爲任意一質點  $P$  之座標，其質量爲  $m$ ； $v_x, v_y, v_z$  爲  $P$  點沿座標軸方向之



$$v_x = \bar{v}_x + z' \omega_y - y \omega_z$$

$$v_y = \bar{v}_y + x' \omega_z - z' \omega_x$$

$$v_z = \bar{v}_z + y' \omega_x + x' \omega_y$$

因之質點  $P$  之動能等於

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

物體全部之動能爲

$$\begin{aligned} E_k = \Sigma \frac{1}{2} m v^2 &= \frac{1}{2} M (\bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2) \\ &+ \frac{1}{2} I_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_z \omega_z^2 \\ &- P_{yz} \omega_y \omega_z - P_{xz} \omega_x \omega_z - P_{xy} \omega_x \omega_y \end{aligned}$$

上式中第一項等於  $\frac{1}{2} M \bar{v}^2$  即爲物體質量集中於質量中心時當有之動能。而其餘各項爲質量中心固定時所有球面運動時之動能。

191. 位能 位能者物體因有地位 (Position or configuration) 而具有可做功之能力 (capacity) 是也。例如高處之水流下時可推動水車，壓縮之彈簧及壓縮空氣伸長或膨脹時可推動他重物，此皆因其有相對的地位，即具有位能故可做功

力可分爲保存力 (Conservative force) 與不保存力 (Nonconservative force) 兩種。一質點當變位時作用於其上之力所做功量，若僅與該質點之最初與最後位置有關係，而對於其途中徑路及運動速度等無關係者，此種之力稱曰保存力。作用

於質點上方系若僅由保存力而成者該力系稱曰保存力系 (Conservative force system)。若質量系間僅有保存力系作用時該質量係稱曰保存質量系 (Conservative mass-system) 或保存系 (Conservative system)。當質點變位時作用於質點上之力系所做功量若與其途中徑路或運動速度等有關係者，該力系稱曰不保存力系。地球及高於地面之物體當物體落下時不問其徑路之如何，地球引力所做之功僅與物體高度有關，故地球及地面上諸物體成保存質量系。彈性物體受一定變形時，不問其內質點徑路之如何，該物體恢復原形時所做之功亦為一定，故亦為保存系。不保存力中最普通之例為摩阻力，物體自一處抗摩阻力而運動至他處時，其所做之功因徑路之長短而異。且又因速度之不同，摩阻力亦起變化，故所做之功亦因速度而異。工程問題中若摩阻力可略去或不存時，苟剛體除位置變化外，無運動狀態之變化者，此剛體概屬於保存系。

自量的方面言之，物體之位能者當其自所取位置到達一基準位置時，途中不變其他任何狀態（如運動速度等）而可抗保存力系所做之功量是也。即保存系在一定地位時有一定之位能。保存力所做之功可以變位初點及終點間地位之函數示之，不保存力所做之功則不可。故不保存力無位能，即位能僅限於保存力系，而動能則無力之種類之限制。

位能之量因所取基準位置而異，故無絕對之值。此基準

位置雖可任意選定,但便利上宜常使位能為正值.例如地球與地面物體所成保存系中,取地面為基準位置.

由上所述,質點在保存力力場(Field of force)內,一點  $A$  處之位能當等於保存力將該質點自  $A$  移至基準點  $O$  時之功量  $w_{A0}$ , 但若對抗此保存力將質點由基準點  $O$  移至  $A$  處所需之功量  $w_{0A}$  亦當等於  $w_{A0}$  (因保存力所做之功及對抗保存力所做之功僅由質點之初點與終點兩位置而定).故位能可有以下二種之量的定義.

(a) 質點由現在位置移至基準點時,保存力所做之功.

(b) 質點由基準點移至現在位置時對抗保存力所做之功.

茲示位能計算之一二例如下——:

(i) 重力力場中之位能——質點或物體在力場內一點  $A$  時,對於基準點  $O$  之位能  $E_p$  由上述 (a) 之定義得

$$E_p = Wh$$

但  $W$  為質點或物體之重量,  $h$  為  $A$  點離地面之高度.

(ii) 彈簧之位能——設  $O$  為平衡之位置,彈簧上一質點自  $O$  移至相距  $x$  處之  $A$  點時,對抗彈簧彈力所做之功為  $\frac{1}{2}kx^2$  (但彈簧彈力與  $x$  成比例設為  $kx$ , 故由前述定義 (b) 得

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

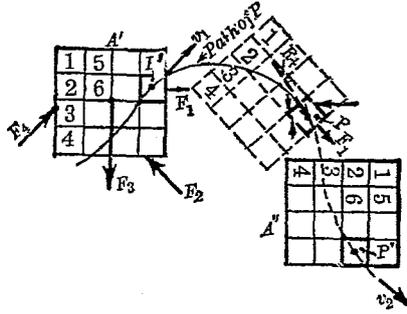
192. 非機械能 自機械能以外尚有熱能,化學能,電能等,

等,此總稱為非機械能 (Non-mechanical energy). 物體受熱後在適當狀態時可做功,例如蒸汽可用於蒸汽機內而做功. 物體受熱而能做功者稱曰具有熱能. 又某種物體因在適當化學狀態而可做功. 例如煤中之碳與氧氣化合時發生熱而可做功,此種物體稱曰具有化學能. 又某種物體因其電氣狀態亦可做功. 例如銅線在發電機內運動於磁場時發生電流亦可做功. 又如蓄電池因其電氣狀態之變化亦可做功. 凡因電氣狀態而發生之能,稱曰電能. 此種之能在適當情形下,均可變為機械能. 故一切之能可導成為機械能. 例如物體受熱時各質點運動,若各質點之速度可決定時,則熱能可以動能定量之. 又如物體具有化學能或電能時,若其分子力可決定者,則此化學能與電能可以位能定量之. 故凡所謂非機械能之特種之能並非異於機械能者,僅不能直接以機械能定量之耳. 若變形為機械能後即可定量之. 例如

$$1 \text{ Calorie} = 427 \text{ kgm.}$$

$$1 \text{ B. T. U.} = 778 \text{ ft.-lb.}$$

193. 關於功與動能之原理 (i) 關於質點——第603圖上設  $A'$  與  $A''$  為物體之二個位置,因不平衡力  $F_1, F_2, F_3, F_4$  之作用而起運動. 今設該物體分成多數小立方體,以膠水膠合之如圖所示,而每一立方體視為一個質點. 設  $P$  為其內之一質點,如圖示之徑路由  $P'$  移至  $P''$ ,而其速度因不平衡力系之作用由  $v_1$  變為  $v_2$ . 今設作用於  $P$  點上諸力之合力為  $R$ ,其與徑



第 603 圖

路成切線方向之分力為  $R_t$ ，物體內一部份之質點僅受內部他質點上之作用力(即內力)，而另一部份之質點受內力與外力二者之作用。當質點沿其徑路運動，自  $P'$  移至  $P''$  時，作用力對於質點所做之功為

$$w = \int_{s_1}^{s_2} R_t ds,$$

但  $R_t = ma_t, \quad a_t = \frac{dv}{dt}, \quad v = \frac{ds}{dt},$

故  $w = \int_{s_1}^{s_2} R_t ds = \int_{s_1}^{s_2} ma_t ds = \int_{s_1}^{s_2} m \frac{dv}{dt} ds$

$$= \int_{v_1}^{v_2} m \frac{ds}{dt} dv = \int_{v_1}^{v_2} m v dv$$

$$= \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

= 質點所有動能之變化 .....(1)

故作用於質點上諸力當質點變位時對於該質點所做之功等於該質點當此變位中所生動能之變化換言之

$$w = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

(ii) 對於質點系——因功與能均為度量，故做於物體之功，等於做於各質點之功之代數和。又物體之動能變化等於各質點上動能變化之代數和。但作用於全部質點上諸力所做之功等於作用於物體上外力所做之功與物體內力所做之功之和。故對於各質點應用(1)式而加其兩端得

$$w_o + w_i = \frac{1}{2} \Sigma m v_2^2 - \frac{1}{2} \Sigma m v_1^2 = \Delta E_k \dots\dots\dots(2)$$

故當質點系起變位時，一切外力與內力對於該質點系所做之功等於質點系上該變位中所起動能之變化。

(iii) 對於剛體——不問物體之為剛體與否，其內質點系上之一切內力均相成對，各為相等反向而同直線。但僅對於剛體時則各對內力之作用點保持其一定距離。故剛體中一切內力所做之功為零，即  $w_i = 0$ ，因之得

$$w_o = \Delta E_k \dots\dots\dots(3)$$

即剛體有變位時，作用於其上諸外力所做之功等於該變位中剛體上所起動能之變化。

茲由第185節及第190節所示各式，將上述原理應用於剛體之特種運動如下。

(a) 等加速度直線進行運動。——

$$\Sigma F_a \cdot s = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2)$$

(b) 對於通過質量中心軸之等角加速度迴轉運動。——

$$\Sigma T \cdot \theta = \frac{1}{2} \bar{I} (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

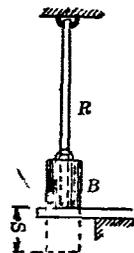
(c) 質量中心有等加速度直線運動而同時有等角加速度迴轉運動之平面運動。——

$$\Sigma F_a \cdot s + \Sigma \bar{T} \cdot \theta = \frac{1}{2} M (\bar{v}_2^2 - \bar{v}_1^2) + \frac{1}{2} \bar{I} (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

例1 第604圖上一橡皮帶  $R$ ，其一端固定他端懸一重  $W$  之物  $B$ ，若  $B$  懸空而不支持於他物面且靜止時，橡皮帶之伸長為  $e$ ，今設  $B$  下之支持面突然取去，使  $B$  落下，逮橡皮帶內拉力使  $B$  復歸靜止時，求該拉力若干？

解 設任意一瞬間內  $B$  落下之距離為  $s$ ，則  $s$  即為橡皮帶之伸長，橡皮帶內之拉力為

$$T = \frac{W}{e} s$$



第604圖

當  $B$  落下時做功於  $B$  上之力為  $T$  及其重量  $W$ ， $B$  自靜止落下而復歸於靜止時，做於  $B$  上之總功量為零（因動能之變化為零），設橡皮帶之總伸長為  $x$  則

$$+ Wx - \int_0^x \frac{W}{e} s ds = 0,$$

或

$$Wx = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{e} x^2$$

$$\therefore x = 2e$$

因之完全伸長後之拉力 $=2W$ ，即 $B$ 徐徐放下時橡皮帶之伸長及內力僅當急速放下時之半。

**例2** 一均勻斷面之細棒長 $l$ ，其一端以銷釘附着於水平地板上，將該棒舉至垂直位置而放下使落於地板面。問該棒上端擊於地板面時之速度？

**解** 今略去空氣抵抗及銷釘上摩阻力，則棒落下時僅有重力做功於其上，其值等於 $\frac{1}{2}Wl$ ，因棒為迴轉運動，故當擊於地板上時其動能為

$$E_k = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{W}{g} l^2 \omega^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{W}{g} l^2 \omega^2$$

但 $\omega = \frac{v}{l}$ ， $v$ 為棒端之速度，故

$$\frac{1}{2} Wl = \frac{1}{6} \frac{W}{g} v^2, \quad \therefore v = \sqrt{3gl}$$

**例3** 一機關車之最大牽引力為 $25,000 \text{ kg}$ ，用於小坡度之軌道上以拖貨車。貨車列車之最大重量為 $2,000$ 公噸，每車與其裝貨合計平均重 $45$ 公噸，每噸重之列車抵抗力與車重及速度有關係。今假定此抵抗力每噸平均值為 $4 \text{ kg}$ ，該機關

車拖 2,000 公噸之載貨列車登於  $\frac{1}{2}\%$  坡度之軌道時，問該列車速度自 27 km./hr. 增至 54 km./hr. 時，所經之距離及其時間？

解 作用於列車上之諸力示於分離體圖如第 605 圖。對於  $\frac{1}{2}\%$  之坡度時  $\theta$  角甚小，故略可視為  $\theta = \sin\theta$  因之  $\sin\theta = \frac{1}{200}$

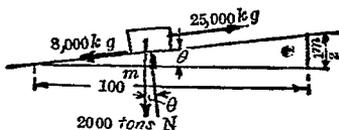
$$\text{由} \quad w_e = \Delta E_k$$

$$\text{或} \quad \Sigma F_a \cdot s = \frac{1}{2} M (v_2^2 - v_1^2)$$

$$\text{得} \quad \left( 25000 - 8000 - 2000 \times 1000 \times \frac{1}{200} \right) s$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2000 \times 1000}{9.8} (54^2 - 27^2) \times \frac{1000^2}{(60 \times 60)^2}$$

$$\therefore s = 2,454 \text{ m.}$$



第 605 圖

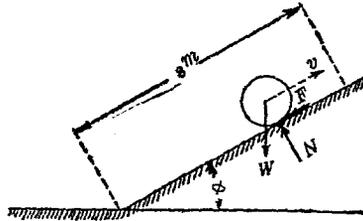
$$\text{又由} \quad s = \frac{v_1 + v}{2} \times t$$

$$\text{得} \quad 2454 = \frac{54 + 27}{2} \times \frac{1000}{3600} t$$

$$\therefore t = 218 \text{ sec.} = 6 \text{ min. } 38 \text{ sec.}$$

例 4 一均質圓柱體輾上於斜面而無滑動(第 606 圖)。其重量為 60 kg., 直徑 1 m., 斜面之傾角  $\phi$  為  $15^\circ$ , 若圓柱值中心

之速度當初與斜面相接觸時為  $6\text{ m./sec}$ ，問該圓柱體能輾上若干距離？



第 606 圖

解 圓柱體輾上斜面時，作用於其上諸外力示於圖中，其所做之功由第 185 節例，為  $W \sin \phi \cdot ds$ ，故由

$$w_e = \Delta E_k$$

$$\text{得} \quad -W \sin \phi \cdot s = \frac{1}{2} (M\bar{v}_2^2 + \bar{I}\omega_2^2) - \frac{1}{2} (Mv_1^2 - \bar{I}\omega_1^2)$$

但  $v_2$  與  $\omega_2$  為零故得

$$W \sin \phi \cdot s = \frac{1}{2} (M\bar{v}_1^2 + \bar{I}\omega_1^2)$$

又  $\bar{v} = \bar{r}\omega = 0.5\omega$ ，故得

$$60 \times 0.2588 \times s = \frac{1}{2} \times \frac{60}{9.8} \times 6^2 + \frac{1}{2} \times \left( \frac{1}{2} \times \frac{60}{9.8} \times 0.5^2 \right) \times \frac{6}{0.5}$$

$$\therefore \quad s = 7.4\text{ m.}$$

194. 能之不滅 十九世紀時科學上確認能之不滅原理 (Principle of conservation of energy). 此原理即謂獨立之質量系 (Isolated mass-system), 其狀態雖任何變化, 但該系所有能之

總量爲一定。所謂獨立之質量系者即該質量系不受外界物體之影響，而無能之出入。故獨立質量系中能之分配雖可變化，而某種樣式之能雖可變形爲他種樣式之能，但能之總量常爲一定不變者。換言之能雖可變形或傳受，但不可創造或毀滅者也。獨立質量系實際上雖不存在，但有種質量系可近似之。例如地球與落下物體可近似之。因地球與物體間之引力甚大，而空氣抵抗及他物體間引力較小故也。

195. 保存質量系內位能與動能間之關係 對於非爲剛體之質量系則由第194節

$$w_e + w_i = \Delta E. \dots\dots\dots (1)$$

例如地球與地面上一物體爲非剛體保存系，該物體自高處落下時在任何瞬間內

$$w_i = -\Delta E_p$$

即某變位時該系內力所做之功  $w_i$  等於該變位間質量系所有位能之變化，而符號與之相反。

因之由(1)式

$$w_e = \Delta E_k + \Delta E_p$$

今設作用於質量系上外力所做之功爲零時，

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0$$

即

$$\Delta E_k = -\Delta E_p$$

故保存質量系內起變位時，即作用該系內上外力(系內之力)所做之功爲零時，則該系內所得(失)之動能等於其所失(得)

之位能。

若質量系不為保存系，則系內能之變形即位能與動能之相互變形時，必同時起生他種形式之能，如熱能等等之增加。且能之總量雖為一定而機械能(位能與動能)不為一定。本章僅就保存系內位能與動能間之關係考察之。

例1 第607圖示重 25 kg. 之物體自高  $h(=75\text{ cm.})$  處落下於一螺線彈簧上，該彈簧指數為 150 kg./cm. 求此時彈簧之最大縮短。

解 假定彈簧與物體均為完全彈性體，略去空氣抵抗及彈簧之慣性。此時地球、物體、及彈簧可合併視為一保存系，而假定地球為固定。該系內機械能全量為一定，故

$$\Delta E_p = -\Delta E_k$$

因變位之初點與終點上動能皆為零，故  $\Delta E_k = 0$ ，而位能之變化為

$$\Delta E_p = -W(h, s) + \frac{150 \times s}{2} \times s = 0$$

或 
$$W(h+s) = \frac{150 s^2}{2}$$

即物體所失位能等於彈簧所得位能。

$$25(75+s) = \frac{150 s^2}{2}$$

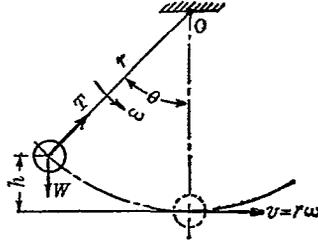
$$3s^2 - s - 75 = 0$$

$$\therefore s = 5.2 \text{ cm.}$$



第 607 圖

例2 第608圖上一單擺,其繩長 $r=120\text{cm}$ ,其球重 $W=3\text{kg}$ ,其變位角 $\theta=60^\circ$ ,若略去空氣抵抗,求該球在最低處之速度 $v$ .



第608圖

解 繩內拉力 $T$ 不做功,故地球與球可視為保存系,因之

$$\Delta E_p = -\Delta E_k$$

$$Wh = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{g} v^2$$

$$3(1.2 - 1.2 \cos 60^\circ) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{9.8} v^2$$

$$\therefore v = 3.4 \text{ m./sec.}$$

196. 效率 蒸汽機,電動機,等各種機械之效率(Efficiency)者,乃一定時間內機械上之發出能(Out put energy)對於供入能(Imput energy)之比率是也.但此時假定無剩餘之能儲蓄於機械內部,可供以後之利用者.供入能為機械自外部受進之能,發出能即該機械對於外部所做之功或傳出之能.今設效率為 $e$ ,則

$$e = \frac{\text{發出能}}{\text{供入能}}$$

或

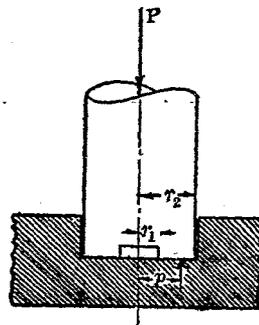
$$e = \frac{\text{發出功率}}{\text{供入功率}}$$

當能之傳達或變形途中,其一部份常成爲熱能等非機械能之形態而不供給該機械特定目的之用,此部份之能稱爲損失能(Dissipated energy),因損失能爲物理學的方法上所不能免除,故發出能常小於供入能,即效率常小於1,如上定義之效率爲機械之總效率(Over-all efficiency),但機械各部份有個別效率,其相互乘積卽爲總効力。

機械上之損失能中最普通者爲摩擦損失,對抗摩阻力而損失之功常變形爲熱能,電氣機械中電阻等爲其主要之電能損失,此種損失能亦變形爲熱能,對於摩擦所消費之能,在原動機(Prime mover),軸座,齒輪等上爲我人所不欲有之者須減至最小限度,但在摩擦制動器(Friction brake)等時則其目的乃賴摩擦以消費機械上所有之能,故爲我人所需要者。

197. 軸座內因摩擦所損失之能 各種機械上軸座內因摩擦所損失之能爲機械設計及運轉上一重要問題。

第609圖示一平端支軸,今求其因摩擦所損失之功及功率,假定摩擦面上摩阻力係數對於全面積爲一定且任意一點上直交於摩擦面之摩減與摩阻力所做之功爲正比例,根據此假定由第79節,摩減之摩擦面上,其壓



第 609 圖

力非為均勻，軸之中心上因無摩擦，壓力最大，而邊緣則壓力最小，故中心部因避免過大壓力之壓壞，常鑿去其一部分材料，成中空平端支軸。由第81節設摩擦阻力之抵抗力勢為 $T_f$ ，則

$$T_f = \frac{1}{2} \mu' P (\tau_2 + \tau_1)$$

但 $\mu'$ 為動摩擦阻力係數， $P$ 為支軸上之全壓力， $\tau_2$ 為外徑， $\tau_1$ 為內徑，設軸之角速度為 $\omega$ ，每秒間摩擦阻力所消費之功為 $w_f$ ，則

$$w_f = T_f \omega = \frac{\mu' P \omega}{2} (\tau_2 + \tau_1)$$

此式中若 $P$ 以kg.,  $\tau_2$ 及 $\tau_1$ 以m.表示之，則因摩擦所損失之歐洲大陸制馬力數為

$$\frac{\mu' P \omega}{75} \times \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} \text{ h. p.}$$

若 $P$ 以lb.  $\tau_2$ 及 $\tau_1$ 以ft.表示時，則因摩擦所損失之英美制馬力數為

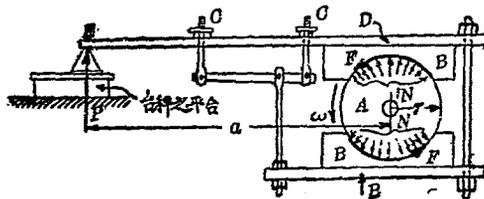
$$\frac{\mu' P \omega}{550} \times \frac{\tau_2 + \tau_1}{2} \text{ h. p.}$$

若增加摩擦面而減少單位面積上壓力時，可用頸座支軸(第81節)。此時因摩擦所損失之功率亦由上列各式計算之。欲減少此損失時須減少 $\mu'$ ，故宜擇適當之軸座金屬 (Bearing metal) 及滑潤劑。

對於他種軸座之摩擦損失能可同樣計算之。

198. 簡單之動力測定器 簡單之動力測定器 (Dynamo-

meter) 如第 610 圖所示, 通常稱為柏隆尼制動器 (Prony brake). 圖中  $A$  為固定於迴轉軸上之滑輪,  $B, B$  為接觸於滑輪而發生摩阻力之物體. 此摩阻力可由  $C, C$  處螺銷釘以調整之.  $D$  桿之  $E$  端支於台秤 (Platform balance) 之平台 (Platform) 上. 當滑輪迴轉時, 因  $B$  與  $A$  間之摩阻力,  $D$  桿加壓力於台秤上. 軸上發出之馬力即軸馬力 (Brake horse power) 可求之如下.



第 610 圖

設滑輪不迴轉時,  $D$  桿支於台秤上其讀度調整之使為零. 如是則滑輪迴轉時, 因摩阻力所發生之  $B$  端  $P$  力即可由台秤上讀之. 因  $D$  桿受  $N, P, F$  (但  $F$  表示  $B, B$  上總摩阻力) 諸力之作用而維持平衡, 故  $P$  與  $F$  對於軸心之力勢總和為零. 即

$$Fr = Pa$$

每秒間摩阻力力勢  $Fr$  所做之功為

$$w = Fr\omega = Pa\omega$$

若  $n$  為滑輪之每分間迴轉數則  $\omega = \frac{2\pi n}{60}$ ,

$$w_f = \frac{2\pi Pan}{60} = \frac{\pi Pan}{30}$$

若  $P$  以 kg.,  $a$  以 m. 表示時, 則摩阻力勢所生之馬力數即軸上發出之馬力數為

$$\frac{\pi P a n}{30 \times 75} = \frac{\pi P a n}{2250} \text{ h. p.}$$

若  $P$  以 lb.,  $a$  以 ft. 表示時, 則上之馬力數為

$$\frac{\pi P a n}{30 \times 550} = \frac{\pi P a n}{16500}$$

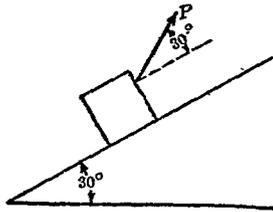
蒸汽機汽筒內由示力器 (Indicator) 所測定之馬力為指示馬力 (Indicated horse power), 此馬力數中一部份消費於運動部份之摩擦損失等, 故軸馬力常小於指示馬力即

$$\text{効率} = \frac{\text{軸馬力 (B. H. P.)}}{\text{指示馬力 (I. H. P.)}}$$

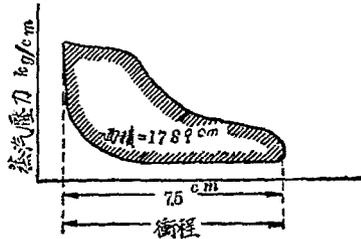
### 習 題 30.

1. 第 611 圖示一重 40 kg. 之木箱, 沿  $30^\circ$  之斜面以 30 kg. 之  $P$  力拉之向上, 摩阻力係數為  $\frac{1}{4}$ , 若木箱移動 10 m. 時, 求各力做於木箱上之功, 并求做於木箱上之總功量.

2. 第 612 圖之示力器圖 (Indicator diagram), 有下之縮尺. 即垂直軸上每 cm. 示  $3 \text{ kg./cm}^2$ , 水平軸上每 cm. 示衝程 (Stroke) 之 5 cm., 示力器圖面積為  $17 \text{ sq. cm.}$ , 圖長為 7.5 cm., 即衝程為 37.5 cm., 活塞直徑為 35 cm., 求每衝程間蒸汽做於活塞上之功. 又有同一功量時活塞上之平均蒸汽壓力 (即平均有效壓力 Mean effective force) 幾何?



第 611 圖



第 612 圖

3. 列車速度由每小時 50 公里增至 75 公里時機關車之牽引力為一定，等於 18 公噸，求該期間之初及期間之末，機關車所發生之馬力各幾何？并求其平均馬力數。

4. 一軸上有二滑輪，一輪以拖帶由原動機拖動之，他輪則以另一拖帶拖動他機械，若前者之輪自拖帶上受入 3 馬力，求傳於軸上之扭勢若干？但假定該軸有等速度 150 r. p. m.

5. 求第 2 題之蒸汽機所發生之指示馬力數，但該機有等速度 500 r. p. m. 且為雙作用(Double acting)式，即活塞前後面均受汽壓，假定活塞桿直徑為 5 cm.

6. 一發電機發生 500 kw. 而傳送 450 kw. 於一紡織廠，每 kw.-hr. 之電價為 8 分，問該廠每日 8 小時工作時所費電價若干？并問此價所購者究為功抑為功率？

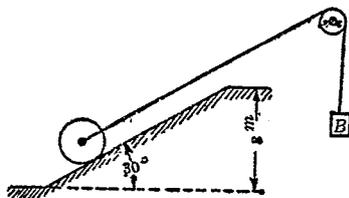
7. 一機械需 5 h. p. 之電動機，若該機每日工作 6 小時，問所費電價若干？但電價每 kw.-hr. 為 6 分。

8. 二球體各重 10kg. 以細棒連結之於水平面內迴轉於

該棒中點上垂直軸之周圍。二球中心離該軸各為 25 cm，各球直徑 10 cm，棒重 3 kg，求該質量系全體之動能。

9. 一汽車重  $W$  kg，速度為每小時 60 公里，達斜坡下方，停止其發動機，使該車駛上於斜坡，坡度為  $\frac{1}{50}$ ，若路面阻力為  $0.08 W$ ，求該車能駛於坡上之距離。

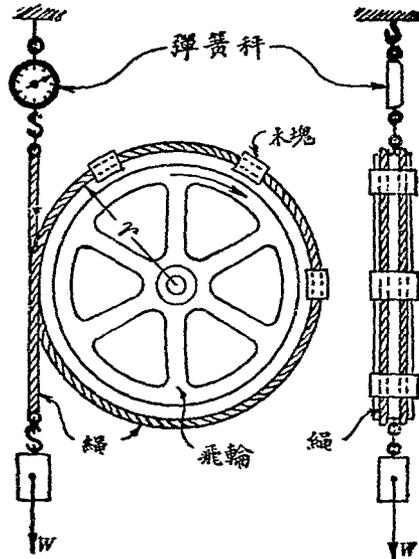
10. 第 613 圖示一圓柱體重 250 kg，直徑 1 m，以重 150 kg 之物  $B$  拉之，使帳上於  $30^\circ$  之斜面。假定滑輪與繩無重量及摩阻力。設圓柱體在斜面下方時為靜止，求其中心達斜面頂上時之速度。



第 613 圖

11. 第 260 圖之螺旋扛重器 (Jackscrew) 上，螺線頂直徑為 3.5 cm，步距為 0.8 cm，今不用滑潤油時設於長 40 cm 之柄端加以 36 kg 之力可舉重 1200 kg，若用滑潤油時設加以 30 kg 之力可舉之，求各效率幾何？

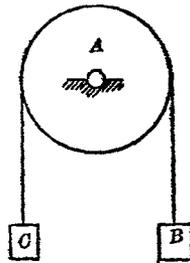
12. 第 614 圖之動力測定器上設  $W = 200$  kg， $r = 1.3$  m，原動機速度為 150 r. p. m.，彈簧秤上讀度為 42 kg，求原動機之軸馬力幾何？



第 614 圖

13. 試求一公式以計算第295圖之球端支軸上摩阻力所做之功但根據第197節之假定。

14. 第615圖示一滑輪A,支於無摩擦之水平軸上,其直徑為1 m.,對於迴轉軸之旋動半徑為22 cm.,其重量為50 kg.,其上懸一自由撓曲之無重量之繩,其兩端各懸以B, C二物. B重100 kg., C重150 kg. 今使該質量系因重力之作用由靜止而運動,求經過3 m. 後, B與C各速度.



第 615 圖

15. 一貨車重60公噸,沿2%之斜坡以每小時20公里之速度下降.若抵抗力每噸6 kg.,問使該車於經300 m.後停止時,前後八輪上宜加制動器之壓力各若干?但制動器與輪間動摩阻力係數為0.25.

16. 一河流在瀑布頂上斷面積為40 sq. m.,其流速為2 m./sec.瀑布之落差(Head)為15 m.,求該河流於理論上可發生馬力數若干?若該水流流入於效率85%之水輪機(Hydraulic)內以發電,發電機之效率為95%,求該河流可發生之kw.數.

## 第十四章 力積及運動量

199. 力積 某瞬間內若力之大小與方向不變時,該力之大小與該時間之乘積稱曰該力於該瞬間之力積 (Impulse), 亦稱線力積 (Linear impulse). 設  $Q$  爲  $F$  力之力積, 則

$$Q = F \cdot \Delta t$$

若力之大小有變化而方向不變時, 則於極微瞬間  $dt$  內該力大小可視爲不變, 故該瞬間之力積爲  $Fdt$ , 在  $\Delta t = t_2 - t_1$  之時間內, 則

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} F dt$$

若  $F$  可以  $t$  之函數表示時, 上之積分易於求得, 但  $F$  力若作用於極短時間即成撞力 (Impulsive force) 時, 則  $F$  對於時間之變化法則不能知之, 故  $F$  不能以  $t$  之函數表示之, 此時其力積不能直接求得, 僅可由後述之運動量變化求之.

若力之方向同時有變化時, 則於各小部份時間內之力積視爲向量, 其方向與力之方向一致, 將各小部份力積  $Fdt$  求其向量和即得.

力積單位由力之單位及時間之單位合成之. 其單位無

特別名稱,用 dyne.-sec., kg.-sec., lb.-sec. 等表示之.

力積爲向量,其指向及作用線均與力之指向及作用線相同.故可分解之爲某方向上之分力積 (Component of impulse) 并可對於一點或一線取力積之勢 (Moment of impulse). 某瞬間  $\Delta t$  內大小與方向皆爲一定之力,其力積對於某方向上之分力積等於該力在該方向上之分力與瞬間  $\Delta t$  之乘積即

$$Q_x = F_x \cdot \Delta t; \quad Q_y = F_y \cdot \Delta t; \quad Q_z = F_z \cdot \Delta t$$

若瞬間  $\Delta t = t_2 - t_1$  內力之大小有變化,而方向不變時,則分力積爲

$$Q_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x dt; \quad Q_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y dt; \quad Q_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z dt.$$

力系對於某方向上之線力積 (Linear impulse) 者乃各力力積對於該方向上分力積之代數和是也.若瞬間  $\Delta t$  內力之大小爲一定時,則該力系在  $x$  方向上之線力積  $Q_x$  爲

$$Q_x = \Sigma F_x \cdot \Delta t$$

若各力在  $\Delta t = t_2 - t_1$  瞬間內變化其大小時,則

$$Q_x = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x dt$$

200. 力積勢 (角力積) 有一定大小及方向之力對於一點或一軸之力積勢 (Moment of impulse) 者,乃該力對於該點或該軸之力勢  $T$  與該力作用瞬間  $\Delta t$  之乘積是也.設一定之

力對於 $O$ 軸之力積勢爲 $L_0$ ，對於 $O$ 軸之力勢爲 $T_0$ ，則

$$L_0 = T_0 \cdot \Delta t$$

若瞬間 $\Delta t = t_2 - t_1$ 內該力大小有變化時，則

$$L_0 = \int_{t_1}^{t_2} T_0 \cdot dt$$

力之力積勢亦稱爲力之角力積 (Angular impulse).

力系對於某軸之角力積者，乃各力對於該軸力積勢之代數和是也。若力系中各力爲一定時，則該力系對於 $O$ 軸之角力積 $L_0$ 如下：

$$L_0 = \Sigma T_0 \cdot \Delta t$$

若各力有變化時，則

$$L_0 = \Sigma \int_{t_1}^{t_2} T_0 \cdot dt$$

**201. 質點之運動量** 一運動質點在某瞬間內之運動量 (Momentum) 者，乃該瞬間內質點之速度與其質量之乘積。運動量爲向量，其方向與速度相同，且有一定之位置線，通過該質點。設質量 $m$ 之質點其速度爲 $v$ ，其運動量爲 $U$ ，則運動量之大小以下式表示之。

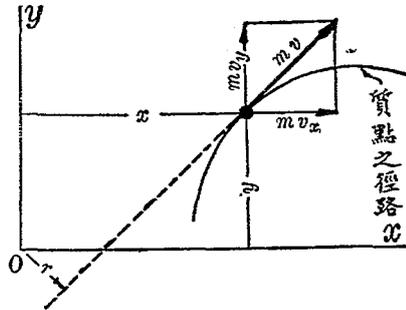
$$U = mv$$

質點之運動量通常稱曰線運動量 (Linear momentum)。質點上運動量對於某軸或某點之勢稱曰角運動量 (Angular momentum)。

運動量之單位由速度之單位及質量之單位合成，無一定名稱因質量之次元為  $\frac{F \times T^2}{L}$ ，速度之次元為  $\frac{L}{T}$ ，故運動量之次元為  $FT$ ，其單位以  $\text{dyne. - sec.}$ ,  $\text{kg. - sec.}$ ,  $\text{lb - sec.}$  等表示之。故運動量之次元及單位皆與力積之次元及單位相同。

運動量既為向量，故可分解之為某方向上之分運動量 (Component of momentum).

且又可對於某點或某軸取勢。運動量之大小與其位置線至勢心間直交距離之乘積為運動量對於該勢心之運動量勢 (Moment of momentum)。設質量  $m$  之質點有速度  $v$ ，在



第 616 圖

$x$  與  $y$  軸方向上分運動量設各為  $U_x$  與  $U_y$  (第 616 圖)，該質點對於  $O$  點之運動量勢設為  $H_0$ ，

則

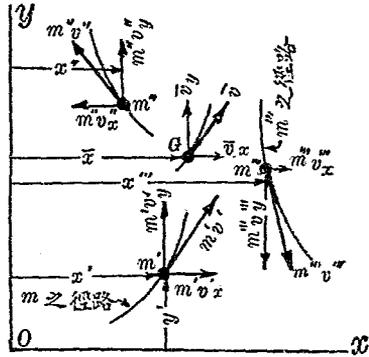
$$\left. \begin{aligned} U_x &= (mv)_x = mv_x \\ U_y &= (mv)_y = mv_y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$H_0 = m \cdot v \cdot r$$

$$H_0 = mv_y \cdot x - mv_x \cdot y \dots\dots\dots (2)$$

由最後之式可知一質點之運動量勢等於該質點分運動量對於同一點之運動量勢之代數和。

202. 物體之線運動量 任意一物體或質量系沿某方向上之線運動量者乃各質點上運動量沿該方向上分運動量之代數和是也。物體內各質點之運動量，其方向與大小一般不相同。但物體全部之線運動量可由物體之總質量及質量中心之速度求之。今證之如下。第617圖中設物體內任意三質點，其質量各為 $m'$ ， $m''$ ， $m'''$ 運動於平面上。某時間內該質點之位置及物體之質量中心設如圖所示。各質點上運動量之方向當與



第 617 圖

其徑路相切。質量中心之速度 $\bar{v}$ 亦與該質量中心之徑路相切。該質量系沿 $x$ 軸方向上之線運動量設為 $U_x$ ，則

$$U_x = m'v_x' + m''v_x'' + m'''v_x''' + \dots = \Sigma(mv_x)$$

設各質點之 $x$ 座標為 $x'$ ， $x''$ ， $x'''$ 等，質量中心之 $x$ 座標為 $\bar{x}$ ，則

$$m'\bar{x} + m''x' + m'''x'' + \dots = \bar{x}\Sigma m = M\bar{x}$$

將上式對於時間 $t$ 微分之得

$$m \frac{d\bar{x}}{dt} + m'' \frac{dx''}{dt} + m''' \frac{dx'''}{dt} + \dots = M \frac{d\bar{x}}{dt}$$

因之  $m'v_x' = m''v_x'' + m'''v_x''' + \dots = M\bar{v}_x$

故 
$$U_x = M\bar{v}_x$$

同樣得 
$$U_y = M\bar{v}_y$$

將此二式求其兩端之向量和得

$$U = M\bar{v}$$

即任意質量系之線運動量者，乃該系之總質量與該系質量中心之速度二者之相乘積，其方向與質量中心之速度相一致。

203. 迴轉物體之角運動量 第618圖示一剛體迴轉於 $O$ 點之周圍，其角速度為 $\omega$ ，物體內任意一質點之線速度為 $r\omega$ ，但 $r$ 為該點至 $O$ 之距離。設該質點之質量為 $m$ ，則其線運動量為 $mv$ ，即 $mr\omega$ ，故該質點對於迴轉軸之運動量勢為

$$mvr = mr\omega \cdot r = mr^2\omega$$

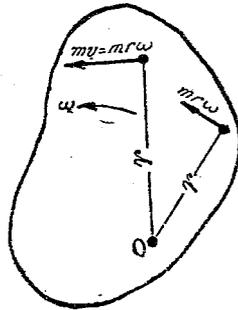
物體內全部質點對於該軸運動量勢之代數和為

$$H_0 = \Sigma mr^2\omega = \omega \Sigma mr^2$$

$$\therefore H_0 = I_0\omega$$

但 $I_0$ 為物體對於該迴轉軸之惰性勢。

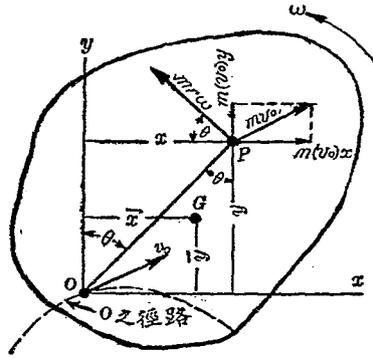
故迴轉物體對於其迴轉軸之角運動量等於其迴轉軸周圍之惰性勢與角速度之乘積。



第 618 圖

204. 平面運動物體之角運動量 第 619 圖上剛體內任意一點  $P$  之速度可視為  $P$  對

於  $O$  之迴轉運動所生速度  $r\omega$  及  $O$  點上進行運動之速度  $v_0$  二者所合成。故  $P$  點上二分運動量為  $mr\omega$  及  $mv_0$  如圖所示。設運動量  $mv_0$  沿  $x$  與  $y$  軸方向上分運動量各為  $m(v_0)_x$  及  $m(v_0)_y$ ，則該質點對於  $O$  軸之角運動量為



第 619 圖

$$mr\omega \cdot r + m(v_0)_y \cdot x - m(v_0)_x \cdot y$$

故物體內全部質點對於  $O$  軸之角運動量  $H_0$  為

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum mr^2\omega + \sum m(v_0)_y \cdot x - \sum m(v_0)_x \cdot y \\ &= \omega \sum mr^2 + (v_0)_y \sum mx - (v_0)_x \sum my \\ &= I_0\omega + (v_0)_y M\bar{x} - (v_0)_x M\bar{y} \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

若  $O$  點取於物體之質量中心時，則  $H_0$  成爲  $\bar{H}$ ， $I_0$  成爲  $\bar{I}$ ，且此時  $\bar{x}$  與  $\bar{y}$  爲零。因之

$$\bar{H} = \bar{I}\omega \dots\dots\dots (2)$$

若  $O$  點爲瞬間中心時，則  $(v_0)_x$  與  $(v_0)_y$  爲零，此時  $H_0 = I_0\omega$ 。

205. 關於線力積與線運動量之原理 由第 156 節質量中心之運動方程式，則於  $x$  軸方向上

$$\Sigma F_x = M\bar{a}_x \dots\dots\dots (1)$$

若作用於物體上之外力為一定不變，則  $\bar{a}_x$  亦一定不變，而物體之質量中心有等加速度。故

$$\bar{a}_x = \frac{\bar{v}_x'' - v_x'}{\Delta t}$$

但  $\bar{v}_x''$  與  $\bar{v}_x'$  為瞬間  $\Delta t$  開始與終了時，質量中心之各速度在  $x$  方向上之各分速度。因之得

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = M\bar{v}_x'' - M\bar{v}_x' \dots\dots\dots(2)$$

上式左端為作用於物體上諸外力之線力積在  $x$  方向上之分力積，右端為物體沿  $x$  方向上運動量之變化。故上式表示物體受一定不變之力作用時，線力積與線運動量間之原理。但此原理可應用於任何物體受任何力系作用時之運動上。一般  $\bar{a}_x = \frac{d\bar{v}_x}{dt}$ ，故 (1) 式可書為

$$\Sigma F_x = M \frac{d\bar{v}_x}{dt} = \frac{d}{dt} (M\bar{v}_x) \dots\dots\dots(3)$$

積分之得 
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x dt = \int_{\bar{v}_x'}^{\bar{v}_x''} d(M\bar{v}_x)$$

或 
$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x dt = M\bar{v}_x'' - M\bar{v}_x' \dots\dots\dots(4)$$

或 
$$Q_x = \Delta U_x \dots\dots\dots(5)$$

故一般關於線力積及線運動量之原理可述之如下：

作用於物體上之力系，在某瞬間內之力積沿某方向上之分力積代數和等於該瞬間內該方向上物體之線運動量之變化。

上之(3)式表示關於力與線運動量之原理。即作用於任意物體上諸外力沿某方向上之分力代數和等於該方向上物體線運動量對於時間之變化率。此原理亦甚重要。

206 關於角力積與角運動量之原理 由第158節(22)式一剛體迴轉於一固定軸周圍時，外力對於該軸之力勢代數和 $\Sigma T_0$ 如下：

$$\Sigma T_0 = I_0 \alpha$$

若外力為一定不變，則 $\alpha$ 亦為一定，故

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\Delta t}$$

$$\text{因之} \quad \Sigma T_0 \cdot \Delta t = I_0 \omega_2 - I_0 \omega_1 \dots\dots\dots(1)$$

上式左端為對於該固定軸周圍力積之勢即角力積，右端為對於該軸運動量勢之變化，即角運動量之變化。

若外力非為一定時， $\alpha$ 不為一定，但某瞬間之 $\alpha$ 為 $\frac{d\omega}{dt}$ ，故一般

$$\Sigma T_0 = I_0 \frac{d\omega}{dt}$$

但 $I_0$ 為常數，故

$$\Sigma T_0 = \frac{d}{dt} I_0 \omega \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{積分之得} \quad \int_{t_1}^{t_2} \Sigma T_0 dt = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d(I_0 \omega)$$

$$\text{故} \quad \Sigma \int_{t_1}^{t_2} T_0 dt = I_0 \omega_2 - I_0 \omega_1 \dots\dots\dots(3)$$

上之關係對於任何質量系及任何運動皆可成立，故一般此原理可述之如下：

作用於任何物體(質量系)上諸外力對於任意一軸在某瞬間內之角力積之代數和等於該瞬間內對於該軸上物體角運動量之變化，一般以式表之如下。設  $O$  為任意之軸，則

$$L_0 = \Delta H_0$$

上之(2)式亦為一重要原理，可述之如下。即迴轉於一固定軸周圍之剛體上所有諸外力對於該軸之力勢代數和等於物體對於該軸之角運動量對於時間之變化率。此原理不僅限於剛體在固定軸周圍之迴轉運動，對於任何物體之任何運動皆可應用，但此時角運動量一般不等於  $I\omega$ 。

207 關於力積與運動量原理對於剛體特種運動之應用。綜上所述物體受不平衡力系作用時，其力積與運動量之關係一般可以下之三式表示之。設平面運動之物體於其運動平面上取直交二軸  $x, y$ ，取  $O$  軸直交於該運動平面，則

$$Q_x = \Delta U_x \dots\dots\dots(1)$$

$$Q_y = \Delta U_y \dots\dots\dots(2)$$

$$L_0 = \Delta H_0 \dots\dots\dots(3)$$

茲就剛體之進行運動，迴轉運動及平面運動各情形，受一定不變之外力作用時，分論如下：

(i) 剛體受一定不變之外力作用時之進行運動。——此時物體內各質點有相同之速度，故物體之線運動量等於  $Mv$ 。

其位置線通過其質量中心，因之對於通過質量中心之軸其角運動量等於零用上之記號，由 (1), (2), (3) 三式得

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = \Delta(Mv)_x = M(v_x'' - v_x')$$

$$\Sigma F_y \cdot \Delta t = \Delta(Mv)_y = M(v_y'' - v_y')$$

$$\Sigma \bar{T} \cdot \Delta t = 0$$

(ii) 剛體受一定不變之外力作用時之迴轉運動。——此時線運動量為  $M\bar{v}$ ，對於迴轉軸之角運動量為  $I_0\omega$ ，由 (1), (2), (3) 三式得

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = \Delta(M\bar{v})_x = M(\bar{v}_x'' - \bar{v}_x')$$

$$\Sigma F_y \cdot \Delta t = \Delta(M\bar{v})_y = M(\bar{v}_y'' - \bar{v}_y')$$

$$\Sigma T_0 \cdot \Delta t = \Delta(I_0\omega) = I_0(\omega_2 - \omega_1)$$

(iii) 剛體受一定不變之外力作用時之平面運動。——物體之線運動量為  $M\bar{v}$  對於通過質點中心之軸之角運動量為  $\bar{I}\omega$ ，由 (1), (2), (3) 三式得

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = \Delta(M\bar{v})_x = M(\bar{v}_x'' - \bar{v}_x')$$

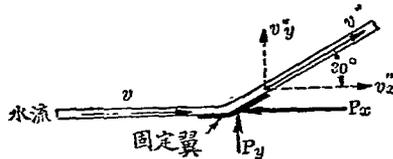
$$\Sigma F_y \cdot \Delta t = \Delta(M\bar{v})_y = M(\bar{v}_y'' - \bar{v}_y')$$

$$\Sigma T \cdot \Delta t = \Delta(\bar{I}\omega) = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1)$$

上列諸式應用於動力學問題之解法時，有時較之於第十一章諸式更為簡便。

例 第 620 圖示一圓柱形之噴水流 (Jet of water)，斷面直徑 3.8 cm.，衝於一固定翼面此翼與噴流方向成  $30^\circ$  之夾角噴流速度為 8 m./sec.，求水作用於翼上壓力之水平及垂直分

力。但假定噴流受翼之作用後不變其速度之大小，且假定噴流與翼接觸時，作用於水上之外力僅為翼之壓力



第 620 圖

解 設  $P_x, P_y$  為翼對於水之水平與垂直壓力。此壓力即為水之運動量變化之原因。由第 206 節力積與運動量之原理，則

$$\Sigma F_x \cdot \Delta t = M(v_x'' - v_x') \dots\dots\dots(1)$$

$$\Sigma F_y \Delta t = M(v_y'' - v_y') \dots\dots\dots(2)$$

設  $\Delta t$  為 1 秒， $M$  為 1 秒內受翼所作用之水質量。假定水之單位容積重量為 1 gr./c. c.，由 (1) 式得

$$P_x \cdot 1 = \frac{\pi(3.8)^2 \times 800 \times 0.001}{4 \times 9.8} (8 - 8 \cos 30^\circ)$$

$$\therefore P_x = 0.995 \text{ kg.}$$

由 (2) 式得

$$P_y \cdot 1 = \frac{\pi(3.8)^2 \times 800 \times 0.001}{4 \times 9.8} (8 \sin 30^\circ - 0)$$

$$\therefore P_y = 3.700 \text{ kg.}$$

例 2 一飛輪重 644 kg.，嵌合於直徑 10 cm. 之軸上。今該軸傳達 1000 kg.-cm. 之扭勢於飛輪，使其角速度由 10 rad./sec. 在

10 秒間增至 50 rad./sec., 求飛輪之旋動半徑.

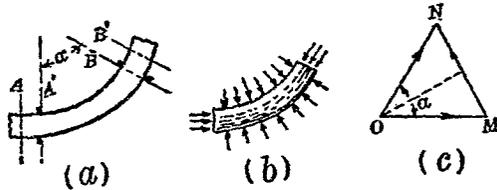
解 飛輪為迴轉剛體. 由本節(ii)第三式即

$$\Sigma T_0 \cdot \Delta t = I_0(\omega_2 - \omega_1) = Mk_0^2(\omega_2 - \omega_1)$$

得 
$$1000 \times 10 = \frac{644}{930} k_0^2 (50 - 10)$$

$\therefore k_0 = 19.5 \text{ cm.}$

例 3 第 621 圖 (a) 示一彎水管, 每單位時間內通過任意一斷面上水之質量設為  $M$ , 管之入口與進口處斷面上任意一點水之速度設皆等於  $v$ , 管之彎角設為  $\alpha$ , 求流水對於彎管之合成壓力.



第 621 圖

解 設  $AB$  之水移動至  $A'B'$  時所需時間為  $\Delta t$ , 該時間開始時此部分水之運動量等於  $AA'$  之運動量與  $A'B$  之運動量二者之總和, 該時間終了時該部份之運動量等於  $A'B$  之運動量與  $BB'$  之運動量二者之和. 故  $\Delta t$  時間內該部份水之運動量變化等於  $BB'$  之運動量減  $AA'$  之運動量. 此二者運動量之方向各沿  $BB'$  與  $AA'$  之方向, 其大小各等於  $(M\Delta t)v$ , 故上之運動量變化可以第 621 圖 (c) 之向綫  $\overrightarrow{MN}$  表示之. 但  $\overrightarrow{OM}$  與  $\overrightarrow{ON}$

各為上述之二個運動量。但

$$MN = 2 OM \sin \frac{1}{2} \alpha$$

故運動量之變化為

$$2(M\Delta t) v \sin \frac{1}{2} \alpha$$

由第 206 節 (3) 式則某方向上分力代數和等於該方向上線運動量對於時間之變化率。今運動量對於時間之變化率為

$$2Mv \sin \frac{1}{2} \alpha$$

其方向為  $MN$ ，即平分管之變角  $\alpha$ ，此運動量變化率因作用於  $AB$  部份之水上之外力得維持之。此力由重力  $W$ ，前面與後面上水之壓力  $P_1, P_2$ ，管對於水之壓力  $P$  三者而成。此諸力之合力設為  $R$ ，則

$$R = 2Mv \sin \frac{1}{2} \alpha$$

其方向亦平分  $\alpha$  角。若  $R, W, P_1$  與  $P_2$  已知時，則  $P$  力可求得。

208. 運動量之不減 (i) 線運動量。——任何質量系受不平衡力系之作用而生運動時，其線力積與線運動量之原理，以下式表之。

$$Q_x = \Delta U_x = \Delta(M\bar{v}_x)$$

但  $x$  為任意之方向。若作用於物體上外力無  $x$  方向上之分力時，則該力系在  $x$  方向上之力積  $Q_x$  為零，故  $\Delta(M\bar{v}_x) = 0$ ，即

$$M\bar{v}_x = \text{常數}$$

故作用於物體上外力之合力在某方向上無分力時，則該方向上物體之線運動量為一定不變。此即為線運動量不滅 (Conservation of linear momentum) 之原理。

(ii) 角運動量。——任何物體受不平衡力系之作用而生運動時，其角力積與角運動量之原理，以下式表之。

$$L_0 = \Delta H_0$$

若作用於物體上諸外力對於某軸  $O$  無合成力勢時，則外力對於該軸之角力積  $L_0$  為零，故  $\Delta H_0 = 0$ ，即

$$H_0 = \text{常數}$$

故作用於物體上諸外力對於某軸無合成力勢時，則物體對於該軸之角運動量為一定不變，即為角運動量不滅 (Conservation of angular momentum) 之原理。

由第 204 節與第 205 節則一物體對於一軸  $O$  之角運動量，僅限於下述各情形內方可以  $I_0\omega$  表示之。即 (i) 物體為剛體而迴轉於一固定軸  $O$  之周圍及 (ii) 物體為剛體，有平面運動，且  $O$  軸通過其質量中心。對於非為剛體之物體或質量系，若質量系內各部份有同一各速度時，則  $I_0\omega$  亦表示該非剛體質量系 (Non-rigid mass-system) 對於固定迴轉軸之角運動量。例如物體沿一棒上滑動，而該棒迴轉於一固定軸  $O$  之周圍，則此質量系非為剛體質量系，但對於  $O$  軸之角速度各部相同，故其對於  $O$  軸之角運動量仍可以  $I_0\omega$  表示之。

因之對於上述數種情形可滿足時，則角運動量不滅之

原理可以下式表示之即

$$I_0 \omega = \text{常數}$$

故  $I_0$  減少時,  $\omega$  增加,  $I_0$  增加時,  $\omega$  減少.

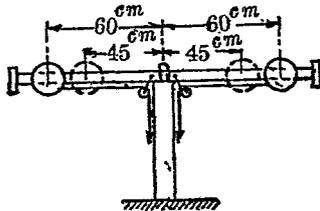
**例 1** 重 28 gr. 之彈丸以 660 m./sec. 之速度擊於一木塊之中央該木塊原以 6 m./sec. 之速度與彈丸同一方向運動於水平面上若木塊重 8 kg., 問木塊與彈丸最後之速度幾何?

**解** 木塊與彈丸視為一質量系, 該系無外力之作用故線運動量為一定, 即

$$0.028 \times 660 + 8 \times 6 = 6.028 \times v$$

$$\therefore v = 11 \text{ m./sec.}$$

**例 2** 第 622 圖示二球滑動於輕質棒上無摩阻力, 棒與球可迴轉於棒中央垂直軸之周圍, 各球上附以繩, 經過滑輪, 使各繩拉力方向與棒平行, 各球重 4 kg., 直徑 6 cm., 若各球中心離迴轉軸為 60 cm. 時, 棒之角速度為 60 r. p. m., 問各球拉近迴轉軸 15 cm. 時, 棒之角速度幾何?



第 622 圖

**解** 因作用於球上之外力對於迴轉軸不生力勢, 故對於

迴轉軸之角運動量爲一定不變，即兩球角運動量未拉近軸前與既拉近軸後二者相等，略去在棒之質量并視球爲一質點，則

$$2M \times (0.6)^2 \times \frac{60 \times 2\pi}{60} = 2M \times (0.45)^2 \times \omega_2$$

$$\therefore \omega_2 = 11.2 \text{ rad./sec.} = 108.6 \text{ r. p. m.}$$

### 習 題 31.

1. 重 20 kg. 之物體四秒間滑下於  $60^\circ$  之斜面，若摩阻力係數爲 0.2，求作用於物體上力系所有平行於斜面之分線力積。

2. 一列車重 2000 公噸，駛上於 0.5% 之坡路，機關車之牽引力爲 25 公噸，列車抵抗力每重 1 噸爲 4 kg，今駛上於坡路凡二分間，問該瞬間內力系作用於列車上之線力積？

3. 一細棒於水平面內迴轉於其一端上垂直軸之周圍，該棒長 1 m.，重 6 kg.，迴轉速度 120 r. p. m.，求其對於迴轉軸之角運動量。

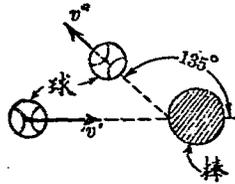
4. 一直徑 45 cm 之圓柱體重 64 kg.，沿斜面上無滑動而輾下。其質量中心之線速度在某瞬間內爲 10 m./sec.，求 (i) 對於通過質量中心而垂直於運動平面之軸上該圓柱體之角運動量，及 (ii) 對於瞬間軸之角運動量。

5. 第 602 圖之連接桿長 75 cm.，有均一之斷面，重 26 kg.，曲

柄  $OB$  長  $13\text{ cm.}$ ,  $\omega$  爲  $300\text{ r. p. m.}$ , 自  $i$  至  $B$  之距離爲  $86.7\text{ cm.}$ ,  $r$  爲  $64.4\text{ cm.}$ , 求該連接桿 (a) 對於通過質量中心之軸及 (b) 對於瞬間軸各角運動量。

6. 一噴射於水平方向之水流直徑  $5\text{ cm.}$ , 速度  $10\text{ m./sec.}$ , 若垂直衝射於固定之水平面時求水作用於平面上之壓力。若平面以  $3\text{ m./sec.}$  運動於水流方向時, 其壓力若何?

7. 一  $70\text{ gr.}$  之球以速度  $50\text{ m./sec.}$  運動於水平方向, 以棒擊之, 使與原有方向成  $135^\circ$  之角而反跳如第 623 圖所示。若球離棒時之速度爲  $40\text{ m./sec}$  時, 求棒作用於球上水平與垂直各分力積。假定接觸時間爲  $\frac{1}{50}$  秒, 求衝擊時之平均力。

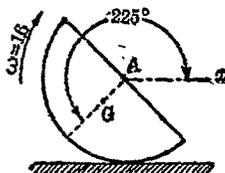


第 623 圖

8. 一迴轉於水平軸周圍之飛輪重  $800\text{ kg.}$ , 旋動半徑  $0.6\text{ m.}$ , 今僅受軸摩阻力之作用自速度  $55\text{ r. p. m.}$  時迴轉 10 分鐘歸於靜止。軸之直徑爲  $30\text{ cm.}$ , 求平均摩阻力係數。

9. 一機關鎗每分射出 350 彈。各彈重  $20\text{ g.}$ , 出鎗口時速度爲  $750\text{ m./sec.}$ , 求該鎗作用於支架上之平均反作用力。但略去氣體之反作用力。

10. 第 624 圖示一均質半圓柱體, 直徑為 1.4 m., 重 161 kg., 在圖示位置時, 有時針方向之角速度 1.6 rad./sec., 今無滑動而迴轉於水平面上, 求該瞬間之線運動量.



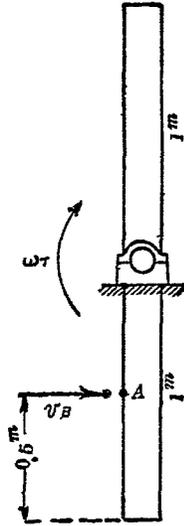
第 624 圖

11. 一均質之直棒長 1 m., 重 5 kg., 迴轉於一端上與棒成  $21^\circ$  之軸之周圍. 當角速度為 1000 r. p. m., 時求該棒之線運動量.

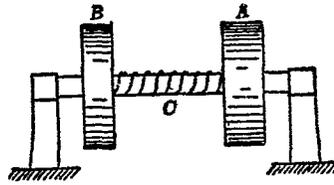
12. 一滑輪對於其迴轉軸之角運動量為 220 kg.-m.-sec., 速度為 240 r. p. m., 求該輪對於迴轉軸之惰性勢.

13. 第 625 圖示一均質而有均一斷面之木材, 長 2 m., 重 63 kg., 於垂直面內以時針方向 1.2 rad./sec. 之角速度. 迴轉於通過其質量中心之輕水平軸周圍. 當木材在垂直位置之瞬間, 重 5 g. 之彈丸, 於水平方向向右擊中該木材之 A 點, 其速度為 680 m./sec., A 距迴轉軸為 0.5 m., 彈丸擊中後即存留於木材中. 求木材於被擊中後之角速度. 但略去摩阻力與空氣抵抗.

14. 第 626 圖示二圓盤 (Disc) 在一水平軸上. 圓盤迴轉於軸之周圍, 而軸不動. A 之惰性勢為 B 之惰性勢之四倍. 彈簧



第 625 圖



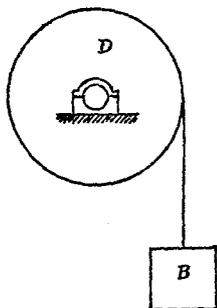
第 626 圖

$C$  附着於二圓盤 今將  $B$  靜止之, 而使  $A$  依時針方向 (由軸之右端視之) 迴轉, 俟  $1.5 \text{ kg. m.}$  之能貯入於彈簧後, 方將二圓盤同時暫保存於靜止狀態. 假定略去摩阻力及彈簧重量, 問二圓盤再開始迴轉時, 若彈簧放出其全部之能而二圓盤全部吸收之, 則各圓盤之角速度當若何?

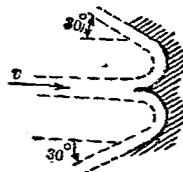
15. 第 627 圖示一圓筒 (Drum)  $D$ , 直徑  $1.2 \text{ m.}$ , 重  $600 \text{ kg.}$  對於迴轉軸之旋動半徑為  $55 \text{ cm.}$ , 其上捲以一繩吊一重  $2$  公噸之昇降器  $B$ , 今於反時針方向以  $60 \text{ r. p. m.}$  之角速度付與於圓筒, 而使該圓筒及昇降器自然運動. 不久必歸靜止而更運動於時針方向. 求該圓筒以  $90 \text{ r. p. m.}$  依時針方向迴轉以前,

所需時間幾何?并求繩內拉力.但略去摩阻力與空氣抵抗及繩之重量.

16. 第 628 圖示一水平水流, 斷面積為  $6.5 \text{ cm}^2$ , 以  $6 \text{ m./sec.}$  之速度衝於固定之翼 (Vane), 若略去摩阻力, 求水流加於翼上之水平力.



第 627 圖



第 628 圖

17. 一勻質球無滑動而輾下於  $30^\circ$  之斜面. 自靜止出發 3 秒後, 求球心之速度.

209. 衝擊 二物體相撞稱曰衝擊 (Impact), 衝擊時作用於物體上之力稱曰撞力 (Impulsive force). 二物體當衝擊之瞬間, 其接觸面在極短時間內繼續壓縮, 該時間稱曰壓縮期 (Period of compression). 當壓縮期之內二物體以同一速度運動, 在此期之末, 壓縮達極大. 達最大壓縮時, 多數物體即開始恢復其原形, 此原形恢復可繼續至二物體相分離之瞬間. 或

可以繼續至分離以後。此恢復原形之期間稱曰復原期 (Period of restitution).

今設於衝擊時二物體接觸面上壓力之合力所通過之點作一相切平面，通過該點而與該平面成直交之線稱曰衝擊線 (Line of impact)，若接觸開始為一點時，則該線即通過此接觸點。

衝擊線若通過二相撞物體之重心時，此衝擊稱曰正心衝擊 (Central impact)，否則稱曰偏心衝擊 (Eccentric impact)。

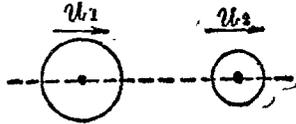
衝擊線若與運動方向即速度方向一致時，此衝擊稱曰直衝擊 (Direct impact)，否則稱曰斜衝擊 (Oblique impact)。

二物體相撞後能完全恢復原形者，此衝擊稱曰彈性衝擊 (Elastic impact)，若不能完全恢復原形者，稱曰不完全彈性衝擊 (Imperfectly elastic impact)，若完全不恢復者，稱曰非彈性衝擊 (Inelastic impact)。二物體若完全彈性，則壓縮期與復原期相等，且衝擊開始瞬間二物體相接觸之速度與衝擊終了瞬間二物體相分離之速度亦相等。但普通物體皆為不完全彈性分離時之速度常小於接觸時之速度。

相撞二物體之運動，或皆為進行運動，或皆為迴轉運動，或皆為平面運動，又或一物體有三種運動中之任意一種，而他物體有其餘二種運動中之任意一種。

210. 進行運動二物體之正心直衝擊 設  $M_1$  與  $M_2$  為二相撞物體之質量，該二物體為正心直衝擊 (Direct central

impact). 第 629 圖上二勻質之球, 沿其中心連結線上為進行運動時, 即為其例. 設接觸開始瞬間各物體速度為  $v_1$  與  $v_2$ , 接觸終了瞬間各物體速度為  $v_1'$  與  $v_2'$ , 今設  $v_1, v_2, v_1', v_2'$  皆有同一方向而為正, 若其中



第 629 圖

任意一者有相反方向時可附以負號. 設衝擊時任意瞬間內作用於二物體間之撞力為  $F$ , 則此力當接觸開始時為零, 達最大值後再減少, 至接觸終了時又為零. 因作用等於反作用, 故  $F$  力對於各物體所生之運動量變化  $\int F dt$  必相等而反向. 但實際上此積分為不可能. 然此時二物體在衝擊前後皆為進行運動, 故由線運動量不滅之原理, 設壓縮期之末二物體所共有之速度為  $v$ , 則

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = (M_1 + M_2) v \dots\dots\dots(1)$$

同樣對於復原期

$$(M_1 + M_2) v = M_1 v_1' + M_2 v_2' \dots\dots\dots(2)$$

或歸併 (1), (2) 兩式得

$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v_1' + M_2 v_2' \dots\dots\dots(3)$$

設壓縮期之時間為  $t_c$ , 其力積為  $\int_0^{t_c} F_c dt$ , 復原期之時間為  $t_r$ , 其力積為  $\int_{t_c}^t F_r dt$ , 則

$$\int_0^{t_c} F_c dt = M_1 (v - v_1) = M_2 (v - v_2) \dots\dots\dots(4)$$

$$\int_{t_2}^{t_1} F_t dt = M_1(v_1' - v) = M_2(v_2' - v) \dots\dots\dots(5)$$

211. 復原係數 由前節所述,質量 $M_1$ 在壓縮期內速度之變化為 $v - v_1$ ,在復原期內速度之變化為 $v_1' - v$ ,後者對於前者之比稱曰復原係數(Coefficient of restitution),以 $e$ 表示之即

$$e = \frac{v_1' - v}{v - v_1} \dots\dots\dots(1)$$

同樣對於質量 $M_2$ ,則

$$e = \frac{v_2' - v}{v - v_2} \dots\dots\dots(2)$$

由(1)式得  $v + ev = v_1' + ev_1$

由(2)式得  $v + ev = v_2' + ev_2$

$$\therefore v_1' + ev_1 = v_2' + ev_2 \dots\dots\dots(3)$$

若 $e$ 為已知時則由(3)式及第210節之(3)式可求二物體衝擊後之各速度.二物體若有完全彈性時, $e=1$ ,若完全無彈性時, $e=0$ ,若為不完全彈性時, $0 < e < 1$ .更由(3)式得

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \dots\dots\dots(4)$$

即 $e$ 之定義又可述之如下:

對於正心直衝擊之二物體,相分離時之相對速度對於接觸時之相對速度之比稱曰復原係數.

復原係數可由實驗上求之如下.取一所試驗物質之小球,使垂直落下於所試驗物質之他大形物體之水平面上,如

是則成正心直衝擊使大形物體固定不動，則衝擊前後，其速度為零，故壓縮期末二物體之速度必皆等於零。

設  $v_1$  為小球衝擊開始時之速度， $v_1'$  為衝擊終了時之速度，(1) 式中以  $v=0$  代入時得

$$e = -\frac{v_1'}{v_1} \dots\dots\dots (5)$$

今測定小球落下時之高度  $H$  及衝擊後反跳時之高度  $h$ ，則因

$$v_1 = \sqrt{2gH}$$

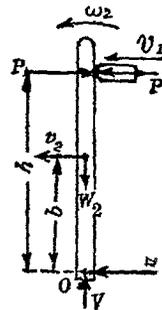
$$v_1' = -\sqrt{2gh}$$

$$\therefore e = \sqrt{\frac{h}{H}} \dots\dots\dots (6)$$

由此可由實驗決定各物質間之  $e$  值。

212. 進行運動物體與迴轉運動物體間之衝擊 第 630

圖上質量  $M_1$  之物體迴轉於一固定軸之周圍，其角速度為  $\omega_2$ ，另一物體其質量為  $M_1$  有進行運動，其線速度為  $v_1$ ，此物體與前者相撞之點離迴轉軸  $O$  為  $h$ ，此種衝擊為偏心直衝擊。今設  $b$  為  $M_2$  對於迴轉軸之慣性勢，由角運動量不滅之原理，則對於壓縮期  $t_c$ ，



第 630 圖

$$M_1 v_1 h + I_2 \omega_2 = M_1 v h + I_2 \omega \dots\dots\dots (1)$$

對於復原期  $t_r$ ,

$$M_1 v \bar{h} + I_2 \omega = M_1 v_1' \bar{h} + I_2 \omega_2' \dots\dots\dots(2)$$

但  $v_1$  與  $v_1'$  爲  $M_1$  當衝擊前與衝擊後之速度,  $\omega_2$  與  $\omega_2'$  爲  $M_2$  當衝擊前與衝擊後之角速度,  $v$  與  $\omega$  爲壓縮期末之速度與角速度.由第 211 節,則

$$v_1' - v_2' = e(v_1 - v_2) \dots\dots\dots(3)$$

且  $v = \omega \bar{h} \dots\dots\dots(4)$

故由 (1), (2), (3), (4) 四式可解得  $v$ ,  $\omega$ ,  $v_1'$  及  $v_2'$  四未知數今將關於線力積與線運動量之原理應用於質量  $M_1$ , 則對於壓縮期  $t_c$ ,

$$\int_0^{t_c} P_o dt = M_1(v - v_1) \dots\dots\dots(5)$$

對於復原期  $t_r$ ,

$$\int_{t_c}^{t_r} P_r dt = M_1(v_1' - v) \dots\dots\dots(6)$$

同樣將線力積與線運動量之原理應用之於質量  $M_2$ , 則由下式可求反作用力  $S$  在  $t_c$  與  $t_r$  時間之力積即對於  $t_c$ ,

$$\int_0^{t_c} P_o dt + \int_0^{t_c} S_o dt = M_2(\bar{v} - \bar{v}_2) \dots\dots\dots(7)$$

對於  $t_r$ ,

$$\int_{t_c}^{t_r} P_r dt + \int_{t_c}^{t_r} S_r dt = M_2(\bar{v}_2' - \bar{v}) \dots\dots\dots(8)$$

對於二迴轉運動物體, 或一個進行運動物體與一個平面運

動物體,又或其他各種運動相組成之二物體,其衝擊問題均與上同樣可求其解法。

213. 正心直衝擊時動能之損失 二物體衝擊前之線運動量與衝擊後之線運動量相等,但衝擊後二物體之動能則較小於衝擊前之動能,因對於不完全彈性之物體其一部份之能消費於接觸面之壓縮故也。若復原係數等於1時,則衝擊時無能之損失,蓋壓縮期中所做之能與復原期中收回之能相等故也。

衝擊時失去之能等於衝擊前二物體所有之能減去衝擊後二物體所有之能後之差設失去之動能為  $E_L$ , 則

$$E_L = \left( \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2 \right) - \left( \frac{1}{2} M_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2'^2 \right) \dots\dots(1)$$

但 
$$M_1 v_1 + M_2 v_2 = M_1 v_1' + M_2 v_2' \dots\dots\dots(2)$$

且 
$$v_1' - v_2' = -e(v_1 - v_2) \dots\dots\dots(3)$$

由(2),(3)兩式得

$$v_1' = v_1 - (1+e) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)$$

$$v_2' = v_2 - (1+e) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (v_2 - v_1)$$

代入於(1)式得

$$E_L = \frac{1}{2} (1-e^2) \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2$$

二物體若為完全彈性體，則  $e=1$ ,  $E_L=0$ ，若完全無彈性時，則

$$e=0, \quad E_L = \frac{1}{2} \cdot \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2)^2$$

於偏心直衝擊及其他各種衝擊可同樣求其所損失之動能。

### 習 題 32.

1. 一貨車重 40 公噸，以 40 km./hr. 之速度沿直線軌道上進行，撞於他一貨車，此車重 30 公噸沿同一軌道上以 30 km./sec. 之速度進行於同一方向。若  $e=0.2$ ，求衝擊後各車之速度。并求壓縮期與復原期中二車相互作用之力積。

2. 一物體重 25 kg. 向右進行，與另一向左進行中之重 15 kg. 之他物體相撞。各物體之速度為 5 m./sec.，其衝突為正心直衝擊。若  $e=0.6$ ，求 (a) 各物體衝擊後之速度，(b) 壓縮期末之速度，(c) 壓縮期之力積，及 (d) 復原期之力積。

3. 一球靜止，被他同大同質量之球所撞擊。其衝擊為正心衝擊後者之球其速度為 6 m./sec.，若  $e=0.5$ ，求各球衝擊後之速度。

4. 第 630 圖上設進行運動物體之重量  $W_1$  為 3 kg,  $v_1=14$  m./sec., 迴轉運動物體為一細棒，長 2 m., 其迴轉速度當衝擊時為 4 rad./sec., 其重量為 8 kg.,  $h=1.6$  m.,  $e=0.8$ , 其  $v, v_1', v_2'$ ,

$\int_0^{t_c} P_c dt$  及  $\int_0^t S_c dt$ , 若假定壓縮期為  $\frac{1}{8}$  秒, 求壓縮間內  $S$  之平均值.

5. 一球重 2 kg, 自 2 m. 高處落下於同質之大形固定板上, 求該球反跳高度, 并求衝擊時所失去之動能. 但  $e=0.75$

6. 一 5 kg. 之靜止鋼球, 以重 2 kg. 之鎚擊之, 其速度為 4 m./sec, 求衝擊後各速度, 并求所損失之動能. 但  $e=0.8$ .

7. 若  $e=0.9$  之橡皮球自 4 m. 高處落下時, 其反跳高度若干?

## 第十五章 運動於三次空間內剛體之動力學

214 概說 以前各章所述之動力學均主就進行運動,迴轉運動及平面運動三種運動之剛體討論之.本章則就運動於三次空間(Thres dimension)內之剛體論之.

一般對於任何運動,其質點中心有下之運動方程式(第156節).

$$\Sigma F_x = Ma_x \quad \Sigma F_y = Ma_y, \quad \Sigma F_z = Ma_z \dots\dots\dots(1)$$

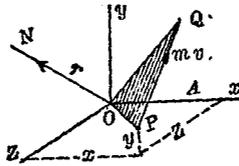
又由第206節(2)式,設剛體對於通過O點之 $x, y, z$ 三直交軸之角運動量各為 $H_x, H_y, H_z$ , 則

$$\Sigma T_x = \frac{dH_x}{dt}, \quad \Sigma T_y = \frac{dH_y}{dt}, \quad \Sigma T_z = \frac{dH_z}{dt} \dots\dots\dots(2)$$

以上二式為對於運動於三次空間內剛體之一般運動方程式.但求 $\frac{dH_z}{dt}$ 等值時,須由對於一點之角運動量(Angular momentum about a point)以得之.

一質點對於一點之角運動量者,乃其運動量對於該點之勢(moment)是也.設第631圖一質點P其質量為 $m$ ,速度為 $v$ ,PQ為該瞬間內P點上運動量 $mv$ 之向線, $p$ 為一點O至該向線之直交距離.該瞬間內P點對於O點之角運動量當為

$mv\rho$ , 今通過  $O$  點作向線  $r$  使與含有  $O$  點及向量  $mv$  之平面相直交, 其長度等於  $mv\rho$ . 其指向與迴轉於運動量方向之右旋螺釘 (Right-hand screw) 之進行方向相一致.



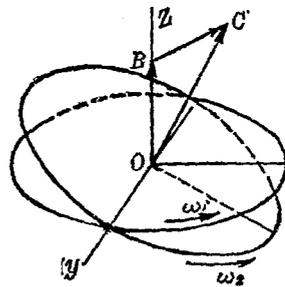
第 631 圖

將物體內各質點對於一點之角運動量全部合成後所得之合成角運動量為該物體對於該點之角運動量。故物體對於一定點之角運動量可以上之合成角運動量之向線  $R$  表示之。此向量  $R$  更可分解之為沿  $x, y, z$  軸方向上之分角運動量。

例如第 632 圖上一圓盤以角速度  $\omega_1$  迴轉於  $Oz$  軸之周圍, 則各質點對於  $O$  點之角運動量之向線皆通過  $O$  點而直交於圓盤面, 故其合成角運動量之向線當可以  $\vec{OB}$  向線表示之, 其值等於

$$\Sigma mvp = \Sigma mp^2\omega_1 = I\omega_1$$

若圓盤同時迴轉於  $Oy$  軸周圍, 而角速度  $\omega_1$  變為  $\omega_2$  時, 則圓盤對於  $O$  點角運動量之變化可以  $\vec{BC}$  向線表示之



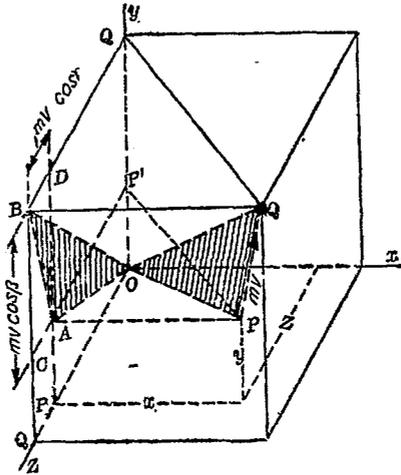
第 632 圖

定理 凡一物體對於一定點之角運動量沿通過該點之某直線上分角運動量等於該物體對於該直線之角運動量。

茲先就一質點證明後，再就物體證明之。今取該定點為原點，取該直線為  $x$  軸。第 633 圖上設  $P$  為一質點， $\vec{PQ}$  為其運動量， $\alpha, \beta, \gamma$  各為  $\vec{PQ}$  與  $x, y, z$  三軸所成之角， $p$  為  $O$  點至  $\vec{PQ}$  之直交距離， $r$  為  $P$  點對於  $O$  點之角運動量， $\phi$  為角運動量與  $x$  軸間所成之角。因

$$r = \overline{PQ} \times p = 2 \times (\text{三角形 } POQ \text{ 之面積})$$

$$r_x = 2 \times (\text{三角形 } POQ \text{ 之面積}) \times \cos \phi$$



第 633 圖

但  $\phi$  為平面  $POQ$  與平面  $yOz$  各法線間所夾之角故亦等於該二平面間所成之角，因之 (面積  $POQ$ )  $\times \cos \phi =$  面積  $POQ$  在  $yz$  面

上之射影,此射影即為圖示之 $AOB$ 面積故

$$r_x = 2 \times (\text{面積 } AOB) = 2 \times (BOQ'' - ABC - AOP'' - AP'Q'C)$$

因 $P'$ 與 $Q'$ 為 $P$ 與 $Q$ 在 $y$ 軸上之射影, $P''$ 與 $Q''$ 為 $P$ 與 $Q$ 在 $z$ 軸上之射影,故 $P'Q'$ 與 $P''Q''$ 為 $\overrightarrow{PQ}$ 向線在 $y$ 軸與 $z$ 軸上之射影.因

$$\text{之} \quad P'Q' = mv \cos \beta, \quad P''Q'' = mv \cos \gamma$$

$$\text{故} \quad BOQ'' = \frac{1}{2} (mv \cos \gamma + z)(mv \cos \beta + y)$$

$$ABC = \frac{1}{2} (mv \cos \gamma)(mv \cos \beta)$$

$$AOP'' = \frac{1}{2} yz$$

$$AP'Q'C = (mv \cos \gamma)y$$

將此代入於上之 $r_x$ 式中,簡單之得

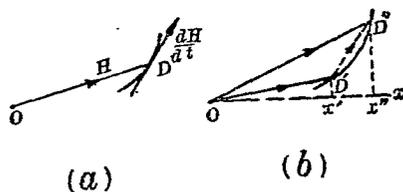
$$r_x = mv \cos \gamma \cdot y - mv \cos \beta \cdot z$$

$$\therefore r_x = mv_z y - mv_y z$$

上式右端即為質點 $P$ 對於 $x$ 軸之角運動量.故本定理對於一質點已得證明.但物體各質點所有沿 $x$ 軸上分角運動量之總和即為物體對於 $O$ 點之 $x$ 軸方向上分角運動量,故本定理對於物體全部亦得成立.

215. 角運動量對於時間之變化率 當物體運動時,其對於一定點之角運動量 $H$ ,繼續變化其大小與方向,第634圖(a)上設 $OD$ 表示 $H$ 之向線, $O$ 為定點,任意瞬間內向線端 $D$ 之

速度即表示  $H$  在該瞬間時對於時間之變化率。故對於一定點之角運動量在某瞬間內對於時間之變化率亦為一向量。其大小等於  $\frac{dH}{dt}$ ，其方向與  $D$  點上  $D$  點徑路之切線相一致此向量亦可分解。



第 634 圖

第 634 圖 (b) 中設  $OD'$  與  $OD''$  為角運動量  $H$  在  $\Delta t$  時間開始時與終了時之向線，則向線  $D'D''$  即為  $\Delta H$ ，將此沿  $x$  軸方向上分解之，則由前節定理  $Ox'$  與  $Ox''$  表示時間  $\Delta t$  之開始與終了時之  $H_x$ ，而  $x'x''$  表示  $\Delta H_x$ ，但  $H_x$  表示對於  $x$  軸之角運動量。故

$$\Delta H \text{ 沿 } x \text{ 軸方向上之分向量} = \Delta H_x$$

$$\frac{\Delta H}{\Delta t} \text{ 沿 } x \text{ 軸方向上之分向量} = \frac{\Delta H_x}{\Delta t}$$

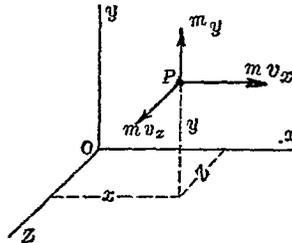
$$\frac{dH}{dt} \text{ 沿 } x \text{ 軸方向上之分向量} = \frac{dH_x}{dt}$$

故角運動量對於時間之變化率  $\frac{dH}{dt}$  沿某直線上之分向量 (Component) 等於對於該直線之角運動量  $H_x$  對於時間之變化率。

## 球 面 運 動

216. 球面運動之剛體對於通過固定點之一直線周圍之角運動量 取定點  $O$  為原點,  $x, y, z$  為通過原點之三直交軸. 由第 201 節 (2) 式則第 635 圖上一質點對於三座標軸  $x, y, z$  之角運動量各為

$$m(v_z y - v_y z), \quad m(v_x z - v_z x), \quad m(v_y x - v_x y)$$



第 635 圖

但物體對於一直線之角運動量等於其各質點對於該直線角運動量之總和故

$$H_x = \Sigma m(v_z y - v_y z), \quad H_y = \Sigma m(v_x z - v_z x), \quad H_z = \Sigma m(v_y x - v_x y) \dots (1)$$

球面運動時  $O$  點為固定點, 剛體對於  $x, y, z$  三軸之分角速度設為  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  則由第 150 節 (1) 式, 上之 (1) 式易導成下形:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= I_x \omega_x - F_{yz} \omega_y - P_{zx} \omega_z \\ H_y &= I_y \omega_y - P_{xy} \omega_x - P_{zy} \omega_z \\ H_z &= I_z \omega_z - P_{xz} \omega_x - P_{yz} \omega_y \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

但  $I_x, I_y, I_z$  為物體對於  $x, y, z$  三軸之惰性勢, 即

$$I_x = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad I_y = \Sigma m(x^2 + z^2), \quad I_z = \Sigma m(x^2 + y^2)$$

$P_{yz}, P_{zx}, P_{xy}$  各為物體對於三座標面中二者之惰性積, 即

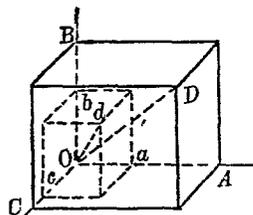
$$P_{yz} = \Sigma m yz, \quad P_{zx} = \Sigma m zx, \quad P_{xy} = \Sigma m xy$$

若  $x, y, z$  為固定點上物體之主軸, 則  $P_{yz}, P_{zx}, P_{xy}$  皆等於零.

因之  $H_x = I_x \omega_x, H_y = I_y \omega_y, H_z = I_z \omega_z, \dots \dots \dots (3)$

217. 球面運動對於固定點之角運動量 由第 214 節之定理, 則球面運動對於固定點之角運動量等於對於通過該點三座標軸周圍各角運動量之向量和.

此處所當注意者即通過固定點之物體瞬間迴轉軸一般不與該點周圍角運動量之向線相一致. 第 636 圖上設  $O$  為物體之固定點,  $OA, OB, OC$  為物體之主軸,  $oa, ob, oc$  為角速度  $\omega$  沿座標軸上之分角速度  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  (第 149 節). 如是則  $Od$  表示  $\omega$  之向線亦即表示瞬間迴轉軸. 若  $OA, OB, OC$  表示角運動量  $H_1, H_2, H_3$  (即  $I_1 \omega_1, I_2 \omega_2, I_3 \omega_3$ ), 則  $OD$  表示角運動量  $H$ , 即



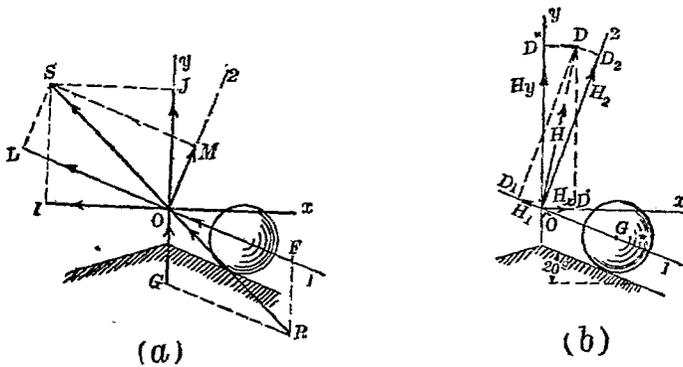
第 636 圖

$$H_1 : H_2 : H_3 = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$$

即  $I_1 = I_2 = I_3$  時,  $OD$  可與  $Od$  相一致.

例 第 637 圖示一球懸於垂直軸上之  $O$  點而支於圓錐面重 100 kg., 該球上固着一  $OG$  棒, 而  $OG$  棒又自由迴轉於垂直

軸上一孔內。圓錐頂角為  $140^\circ$ ，球之直徑為  $4\text{ m}$ ，球在圓錐面上所有圓形軌道之半徑為  $4\text{ m}$ ，垂直軸迴轉時，自上方視之球心依反時針方向，於圓錐周圍每分迴轉  $30$  次。求該球之角運動量。



第 637 圖

解 圖中  $O$  為固定點， $O1$  為球之主軸，通過  $O$  點而與  $O1$  成直交而同時亦互相直交之二軸  $O2$  與  $O3$  (圖中未示之) 亦為主軸。該球沿  $O1, O2, O3$  三軸上之分角速度  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  先求之如下：

設球半徑為  $r$ ，圓錐面上球之軌道半徑為  $R$ ，則球循其軌道一周時，迴轉次數為  $2\pi R \div 2\pi r = R \div r$ ，故該球對於  $O123$  軸組之迴轉速度為  $30 \times \frac{R}{r} = 60 \text{ r. p. m.}$ ，但同時該軸組對於垂直軸之迴轉速度為  $30 \text{ r. p. m.}$ ，第 637 圖 (a) 上設  $OF$  與  $OG$  各表角速度  $60 \text{ r. p. m.}$  與  $30 \text{ r. p. m.}$  之向線，則其平行四邊形對角線

$OR$  即表示該球絕對角速度  $\omega$  之向線。由作圖得  $\omega = 75.7 \text{ r.p.m.}$ ，且  $OR$  通過球與圓錐面之接觸點，蓋球在  $OR$  上之點無速度，而接觸點適在各瞬間無速度故也。次於  $OR$  延長線上取  $OS$  等於  $OR$ ，將此分解為  $OM$  與  $OL$ ，則

$$\omega_1 = OL = -70.1 \text{ r.p.m.} = -7.35 \text{ rad./sec.}$$

$$\omega_2 = OM = 28.2 \text{ r.p.m.} = 2.95 \text{ rad./sec.}$$

$$\omega_3 = 0$$

球之質量為  $\frac{100}{9.8} = 10.2 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}}$ ，又

$$I_1 = \frac{2}{5} Mr^2 = \frac{2}{5} \times 10.2 \times 2^2 = 16.3 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}$$

$$I_2 = I_3 = 16.3 + 10.2 \times 5.01^2 = 272.3 \text{ kg} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}$$

故對於主軸之角運動量求之如下。

$$H_1 = -16.3 \times 7.35 = -120 \text{ kg} \cdot \text{sec} \cdot \text{m.}$$

$$H_2 = 272.3 \times 2.95 = 803 \text{ kg} \cdot \text{sec} \cdot \text{m.}$$

$$H_3 = 0$$

第 637 圖 (b) 中  $OD_1$  表示  $H_1$ ， $OD_2$  表示  $H_2$ ，平行四邊形之對角線  $OD$  表示該球對於  $\hat{O}$  點之角運動量  $H$ ，即

$$H = \sqrt{120^2 + 803^2} = 811 \text{ kg} \cdot \text{sec} \cdot \text{m.}$$

$$D_2 \hat{O} D = \tan^{-1} \left( \frac{120}{811} \right) = 8^\circ 25'$$

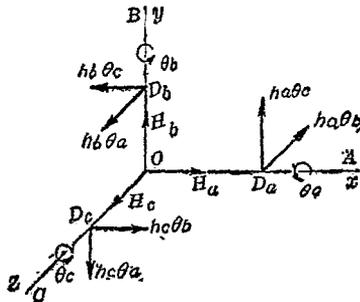
218. 對於通過固定點上一直線之角運動量變化率 設  $x, y, z$  為固定軸，則  $H_x, H_y, H_z$  對於時間之變化率可由第 216

節之(2)式右邊取微分得之。但慣性勢  $I$ , 慣性積  $P$  與角速度  $\omega$  均因時間而變化, 故此方法不能得簡單之結果。下述方法, 其結果更較簡單。

(i) 原則上最簡單之方法乃如第 215 節所述, 先就對於固定點之角運動量求其對於時間之變化率, 然後再分解此變化率於各固定軸上即得。

(ii) 第 638 圖上設  $O$  為球面運動物體之固定點,  $OA, OB, OC$  為與物體同運動之軸,  $\theta$  為  $OABC$  三軸組之角速度,  $\theta_a, \theta_b, \theta_c$  為  $\theta$  沿  $OA, OB, OC$  三軸上之分角速度。設  $O, O_y, O_z$  為固定軸在圖示瞬間時, 三動軸  $OA, OB, OC$  適與之相一致, 故此時

$$H_a = H_x, \quad H_b = H_y, \quad H_c = H_z$$



第 638 圖

若  $OA, OB, OC$  三動軸固定於物體時則

$$\theta = \omega, \quad \theta_a = \omega_x, \quad \theta_b = \omega_y, \quad \theta_c = \omega_z$$

一般各角運動量  $H$  均有變化, 而  $H_a$  與  $H_x, H_b$  與  $H_y, H_c$  與  $H_z$  其

變化率各不相同。雖在圖示固定軸與動軸相一致之時亦不相等。在此一致之時，則由第 638 圖

$$\left. \begin{aligned} \frac{dH_x}{dt} &= \frac{dH_a}{dt} - H_b\theta_c + H_c\theta_b \\ \frac{dH_y}{dt} &= \frac{dH_b}{dt} - H_c\theta_a + H_a\theta_c \\ \frac{dH_z}{dt} &= \frac{dH_c}{dt} - H_a\theta_b + H_b\theta_a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

但式中各  $H$  與  $\theta$  均示該瞬間之值

上列三式中第一式之證明可述之如下。其他二式可類推之。當運動中各瞬間即不問  $OABC$  三軸組與  $Oxyz$  三軸組之相疊合與否， $H_x$  常等於  $H_a, H_b, H_c$  沿  $Ox$  軸上分角運動量之代數和，而  $H_x$  之增量即等於  $H_a, H_b, H_c$  各增量沿  $x$  軸方向上分向量之代數和。故  $H_x$  之變化率即  $\frac{dH_x}{dt}$  等於  $H_a, H_b, H_c$  各變化率沿  $x$  軸方向上分向量之代數和。但一般  $H_a, H_b, H_c$  其大小與方向均同時變化。今於二軸組  $OABC$  及  $Oxyz$  相疊合之瞬間，就 (a)  $H_a, H_b, H_c$  變化其大小時，及 (b)  $H_a, H_b, H_c$  變化其方向時，各求  $H_x$  之變化率如下：

(a) 若軸組  $OABC$  與軸組  $Oxyz$  常相疊合時，則無論何時， $H_x = H_a, H_y = H_b, H_z = H_c$ ，若  $H_b$  與  $H_c$  變化其大小則  $H_x$  不受影響，僅於  $H_a$  變化其大小時， $H_x$  亦變化其大小。且  $H_x$  之變化量即等於  $H_a$  之變化量。故  $H_x$  在此時之變化率即等於  $\frac{dH_a}{dt}$ 。

(b) 若軸組  $OABC$  迴轉於  $O$  點周圍，而  $H_a, H_b, H_c$  之大小不

變時則二軸組相疊合之瞬間，因  $OA, OB, OC$  軸周圍有  $\theta_a, \theta_b, \theta_c$  等分角速度之關係  $H_a, H_b, H_c$  等向量變化率當如圖所示。即因  $OA$  軸周圍有角速度  $\theta_a$  之迴轉運動， $H_a, H_b, H_c$  之變化率各為  $0, H_b\theta_a, H_c\theta_a$ ，其方向如圖所示。因  $OB$  軸周圍有角速度  $\theta_b$  之迴轉運動，其變化率各為  $H_a\theta_b, 0, H_c\theta_b$ ，其方向如圖所示。因  $OC$  軸周圍有角速度  $\theta_c$  之迴轉運動，其變化率各為  $H_a\theta_c, H_b\theta_c, 0$ ，其方向如圖所示。此六個變化率中僅二個有  $x$  軸方向上之分向量，即為  $-H_c\theta_a$  及  $H_c\theta_b$ 。

由上 (a), (b) 二種變化率，故  $H_x$  對於時間之變化率等於  $\frac{dH_x}{dt}$  及  $-H_b\theta_c$  與  $H_c\theta_b$  三向量之代數和。故 (1) 式中第一式已得證明，同樣可證其他二式。

例 第 217 節之例中所示之球，試求其對於  $O$  點角運動量之變化率，并求其對於 (a)  $Ox, Oy, Oz$  三軸及對於 (b)  $O1, O2, O3$  三軸各角運動量變化率。

解 角運動量  $H$  之變化率，即等於  $D$  點之速度。但  $D$  點運動於一水平圓周上，其半徑為

$$811 \sin(20^\circ - 8^\circ 25') = 162 \text{ kg.-sec.-m.}$$

因  $D$  點在  $Oy$  軸周圍每分迴轉三十次，故  $D$  點之速度為

$$2\pi \times 162 \times \frac{30}{60} = 509 \text{ kg.-m.}$$

此速度對於圖示球之位置，由紙面前方向後方，即在  $x$  軸之負方向。其沿  $Ox, Oy, Oz$  軸方向之變化率分向量各為

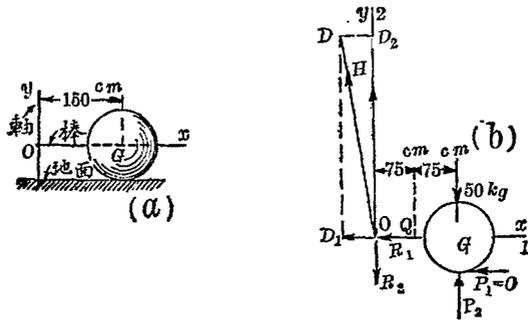
$$\frac{dH_x}{dt} = 0, \quad \frac{dH_y}{dt} = 0, \quad \frac{dH_z}{dt} = -509$$

此變化率沿主軸方向上之分向量亦各為

$$\frac{dH_1}{dt} = 0, \quad \frac{dH_2}{dt} = 0, \quad \frac{dH_3}{dt} = -509$$

219. 扭勢及角運動量變化率之指向與符號 由第214節  $\Sigma T_x = \frac{dH_x}{dt}$ , 此方程式中左右兩端之符號皆須同一. 扭勢(Torque)之符號決定法已述於第12節及第13節, 但角運動量變化率之向線指向與符號決定法須與扭勢時所述規則相一致.

例1 第639圖上  $OG$  為固定於  $G$  球上之一棒,  $Oy$  為垂直軸.  $OG$  棒可自由迴轉於  $Oy$  軸之孔內, 而  $Oy$  軸可自由迴轉於地面之支座(Socket)內. 球重  $50 \text{ kg}$ . 直徑為  $1.2 \text{ m}$ . 一水平力加於  $O, G$  中點而與  $OG$  棒成直交, 因之該球在垂直球周圍每分鐘迴轉  $30$  次求地面對於球之反作用力, 軸對於棒之反作用力, 及所加之外力.



第 639 圖

解 第 639 圖 (b) 視球與棒爲一分離體，將諸外力中能表示於紙面者均示於圖上。\$R\_1, R\_2, R\_3\$ 爲軸作用於棒之反作用力沿各主軸之分力。\$P\_1, P\_2, P\_3\$ 爲地面作用於球之反作用力沿各主軸之分力。\$Q\$ 爲所加之外力。\$R\_3, P\_3\$ 及 \$Q\$ 均與紙面成直交故圖中未示出之 \$P\_1\$ 易知其爲零。今先求第 214 節 (1), (2) 兩式之右端球之質量中心以等速度  $2\pi \times 1.5 \times \frac{30}{60} = 4.71 \text{ m./sec.}$  循水平圓而迴轉故其質量中心之加速度爲

$$(4.71)^2 \div 1.5 = 14.8 \text{ m /sec}^2.$$

其方向自 \$G\$ 向 \$O\$

垂直軸之角速度 \$\omega\_2\$ 爲 30 r. p. m., 球對於垂直軸之相對角速度即球對於 \$O1\$ 軸之角速度 \$\omega\_1\$ 爲

$$(2\pi \times 1.5 \div 2\pi \times 0.6) \times 30 = 75 \text{ r. p. m.},$$

故 
$$\omega_1 = 75 \times \frac{2\pi}{60} = 7.85 \text{ rad./sec.}$$

$$\omega_2 = 30 \times \frac{2\pi}{60} = 3.14 \text{ rad./sec.}$$

又球之質量爲  $\frac{50}{9.8} = 5.1 \frac{\text{kg} \cdot \text{sec}^2}{\text{m.}}$ , 因之

$$I_1 = \frac{2}{5} \times 5.1 \times (0.6)^2 = 0.73 \text{ kg.} \cdot \text{sec}^2 \cdot \text{m.}$$

$$H_1 = 0.73 \times 7.85 = 5.72 \text{ kg.} \cdot \text{sec.} \cdot \text{m.}$$

假定球迴轉於垂直軸周圍之方向自上方視之爲反時針方向，則圖示 \$OD\_1\$ 與 \$OD\_2\$ 各可表示 \$H\_1\$ 與 \$H\_2\$，而 \$OD\$ 表示 \$H, H\$

之變化率為  $D$  點之速度,即等於

$$5.72 \times 3.14 = 17.9 \text{ kg.-m.}$$

其方向自紙面後方向前方.故

$$\frac{dH_x}{dt} = 0, \quad \frac{dH_y}{dt} = 0, \quad \frac{dH_z}{dt} = +17.9$$

以上代入於第 214 節 (1), (2) 兩式,得

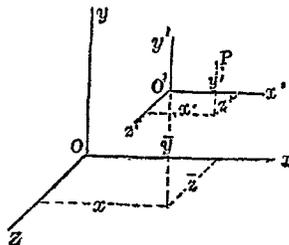
$$\left. \begin{aligned} -R_1 &= -5.1 \times 14.8 \\ P_2 - R_2 - 50 &= 0 \\ R_3 + P_3 - Q &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} P_3 \times 0.6 &= 0 \\ Q \times 0.75 - P_3 \times 1.5 &= 0 \\ P_2 \times 1.5 - 50 \times 1.5 &= 17.9 \end{aligned} \right\}$$

解之得  $Q = 0$ .

$$\begin{aligned} R_1 &= 75.5 \text{ kg.}, & R_2 &= 12, & R_3 &= 0 \\ P_1 &= 0, & P_2 &= 62 \text{ kg.}, & P_3 &= 0 \end{aligned}$$

### 一般三次空間內剛體之運動

22J. 對於通過質量中心而有一定方向之直線之角運動量 第 640 圖上設  $O'$  為任意空間運動之物體內之質量中心,  $Oxyz$  為固定軸組,  $Ox'y'z'$  為另一軸組與前者各相平行.  $P$  為物體內一質點  $(x, y, z)$  及  $(x', y', z')$  各為  $P$  對於二組軸之座標.  $v$  與  $v'$  為  $P$  對於二軸組之速度.  $m$  為  $P$  之質量. 又設  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  為質量中心對於固定軸組



第 640 圖

之座標,  $\bar{v}$  爲質量中心對於固定軸組之速度. 如是則  $P$  對於  $Ox$  之角運動量爲

$$mv_z y - mv_y z$$

物體全部對於  $Ox$  軸之角運動量爲

$$H_x = \Sigma(mv_z y - mv_y z) \dots\dots\dots(1)$$

但由第 151 節

$$v_y = \bar{v}_y + v_y', \quad v_z = \bar{v}_z + v_z', \quad \text{又} \quad y = \bar{y} + y', \quad z = \bar{z} + z',$$

故 
$$H_x = \Sigma m(v_z + v_z')(y + y') - m(\bar{v}_y + v_y')(\bar{z} + z') \dots\dots\dots(2)$$

今將  $O$  取爲適當之點即質量中心在某瞬間內所佔之位置, 則上式中  $\bar{y} = \bar{z} = 0, \Sigma m y' = \Sigma m z' = 0$ , 因之

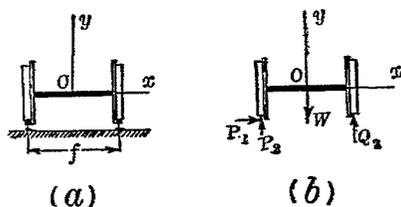
$$H_x = \Sigma(mv_z' y' - mv_y' z') \dots\dots\dots(3)$$

由上式觀之則  $H_x$  與質量中心之運動無關係, 即與  $\bar{v}_z, \bar{v}_y$  無關係. 故可視質量中心爲固定點而對於通過該點直線求物體之角運動量. 例如質量中心雖運動, 仍可用第 216 節之 (3) 式以求對於通過質量中心一主軸之角運動量.

221. 對於通過質量中心而有一定方向之直線之角運動量變化率. 因此角運動量與質量中心之運動無關係, 故其變化率亦與質量中心之角運動量無關係. 故可用第 218 節之方法, 視質量中心爲固定點而求此變化率.

例 1 第 641 圖 (a) 示一對之車輪, 沿軌道彎曲處運動. 其曲度中心在右側, 而車自紙之後方向前方進行, 即向  $z$  軸之正方向運動. 輪與軸之質量爲  $M$ , 其重量爲  $W$ , 對於輪軸中心

線之旋動半徑為  $k$ , 輪之半徑為  $r$ , 軌道曲度半徑為  $R$ ,  $O$  點之速度為  $V$ , 水平牽引力加於  $O$  點而與輪軸成直交, 求軌道作用於輪之反作用力, 及外側輪緣上所受之壓力。



第 641 圖

解 便利上假定外側軌面未舉高, 輪與軌道間無滑動且略去輾阻力, 作用於輪及軸上之外力為水平牽引力, 反作用力  $P$  與  $Q$  及重量  $W$ , 如第 641 圖 (b) 所示,  $P$  與  $Q$  均分解之為  $y, z$  軸上三分力, 但  $Q$  之  $x$  軸方向上分力易知其為零。

質量中心  $O$  之加速度沿  $x, y$  軸方向上分加速度為

$$\bar{a}_x = \frac{V^2}{R}, \quad \bar{a}_y = 0$$

角速度沿  $x, y, z$  軸方向上之分角速度為

$$\omega_1 = \frac{V}{r}, \quad \omega_2 = \frac{V}{R}, \quad \omega_3 = 0$$

對於  $Ox, Oy, Oz$  三軸之角運動量為

$$H_1 = \frac{Mk^2V}{r}, \quad H_2 = \frac{I_2V}{R}, \quad H_3 = 0$$

但  $I_2$  為輪與軸對於  $y$  軸周圍之惰性勢, 今視  $O$  為固定, 角運

動量之變化僅有  $H_1$  之方向變化,故由第 218 節 (1) 式

$$\frac{dH_x}{dt} = 0, \quad \frac{dH_y}{dt} = 0, \quad \frac{dH_z}{dt} = -Mk^2 \frac{V}{r} \cdot \frac{V}{R}$$

由第 214 節 (1) 式中第一二兩式及 (2) 式中第三式得

$$P_1 = M \frac{V^2}{R}, \quad P_2 + Q_2 - W = 0,$$

$$P_1 r - P_2 \times \frac{1}{2} f + Q_2 \times \frac{1}{2} f = -Mk^2 \frac{V^2}{Rr}$$

解之得 
$$P_1 = M \frac{V^2}{R}, \quad P_2 = \frac{W}{2} + \frac{MV^2 r}{Rf} + \frac{Mk^2 V^2}{Rrf},$$

$$Q_2 = \frac{W}{2} - \frac{MV^2 r}{Rf} - \frac{Mk^2 V^2}{Rrf}$$

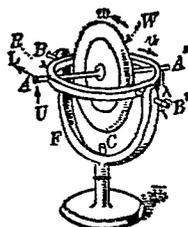
上列  $P_2$  與  $Q_2$  之式中,其第二項因離心力之作用即質量中心變化其運動方向而生,其值與輪滑動於軌道時相同,即與輪之自轉 (Spin) 無關係,其第三項因輪之自轉軸變化其方向即旋動作用 (Gyrostatic action) 而生,第二項與第三項各成偶力作用於二輪與軌面之接觸點上,其偶力之力勢各如下:

$$\frac{MV^2 r}{R}, \quad \frac{Mk^2 V^2}{Rr}$$

前者對於後者之比為  $r^3:k^3$ ,在機關車之每對牽動輪 (Driving wheels) 上此比約為 5:1 左右。

222. 旋動儀 旋動儀 (Gyroscope, Gyrostat) 者一惰性勢較大之圓輪支持於通過其中心之軸,而迴轉於此軸之周圍,同

時該軸方向可自由變換，第 642 圖爲其普通之形。圓輪  $W$  支於  $AA'$  心軸之中點，而  $AA'$  心軸又支於  $R$  環上。此環與圓輪直交而可迴轉於  $BB'$  軸之周圍。 $BB'$  軸支於  $F$  架，而  $F$  架又可迴轉於  $C$  軸之周圍。如是則  $W$  輪可於中心周圍迴轉於任何位置。



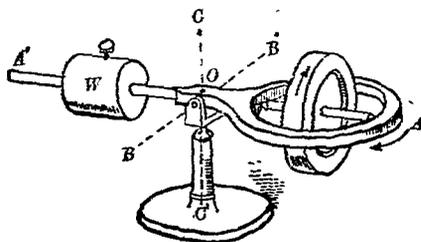
第 642 圖

旋動儀之發明乃所以說明第 149 節所述角速度之合成。但 1852 年法國物理學家富高 (Foucault) 氏應用之以說明地球之運動。最近又用之以製成航海用之羅盤 (Gyroscopic compass)，可免除磁針受船體鋼鐵之影響及地球磁極不與南北一致等弊。又用之以穩定單軌鐵道之駛行及激浪中船之動搖，更用之以駕駛魚雷。至於車輛上之車輪，飛機之推進器 (Propellor)，鎗砲膛身內壁之螺旋紋及地球之運動等等，皆有旋動儀之原理存焉。

第 642 圖所示之旋動儀若製造精良，各支座與軸承上全無摩擦阻力時，苟使圓輪迴轉於角速度  $\omega$  之方向，以手執其底而使起任意之運動時，則圓輪  $W$  之軸  $AA'$  常保持其空間之一定方向，雖欲變更之亦不可能。今於通過圓輪中心之任意一軸周圍加以合成偶力而欲變化其對於該軸之角運動量時，旋動儀必生抵抗而保持  $AA'$  軸於一定方向。今設加一垂直力於  $A$  端，若圓輪無自轉 (Spinning) 時，則此力可使圓輪迴轉於  $BB$  軸之周圍，但圓輪有自轉時，所加之力卒使  $AA'$  自轉

輪 (Spin-axis) 迴轉於  $C$  軸周圍, 此迴轉方向因自轉方向而異。圖示之圓輪起  $\omega$  方向之自轉, 今加以向上垂直力  $U$  時, 則自轉軸於  $C$  軸周圍起  $\mu$  方向之迴轉。又設加水平力於  $A$  端, 若圓輪無自轉時, 則此力可使圓輪迴轉於  $C$  輪周圍, 但圓輪有自轉時, 所加之力卒使  $AA'$  自轉軸迴轉於  $BB'$  軸之周圍, 圖示之  $L$  力使自轉軸起  $\lambda$  方向之迴轉。

第 643 圖可例示上述之現象。圓輪可自轉於  $AA'$  軸之周圍,  $AA'$  軸又可迴轉於  $BB'$  軸之周圍, 此兩軸組又可迴轉於  $CC'$  軸之周圍。重量  $W$  可移動於  $OA'$  臂上而使  $AA'$  軸對於  $BB'$  軸生不平衡



第 643 圖

之力。今移動  $W$  於適當位置, 使生不平衡力, 同時圓輪自轉時, 則  $AA'$  軸不迴轉於  $BB'$  軸之周圍而迴轉於  $CC'$  軸之周圍。此迴轉方向因自轉方向及對於  $BB'$  周圍重力之偶力方向而異。例如  $W$  若移近於  $BB'$  軸, 則重力之偶力自  $B$  視之為時針方向, 而自轉方向如圖所示, 如是則  $A$  端向  $B$  端迴轉, 即  $AA'$  軸自  $C$  端視之依時針方向迴轉於  $CC'$  軸周圍。

凡與旋動儀自轉軸相交之他軸周圍加以偶力時, 則自轉軸迴轉於另一軸之周圍。此自轉軸之迴轉稱曰公轉運動 (Precessional motion)。公轉運動之軸稱曰公轉軸。Axis of preces-

sion) 公轉軸與自轉軸成直交者曰正公轉 (Normal precession), 成斜交者曰斜公轉 (Oblique precession). 自轉方向, 偶力方向及公轉方向三者間之關係由下之規則可決定之. 其理由由次節可明.

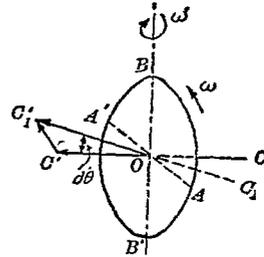
凡加於自轉物體上之外力若有使該物體迴轉於自轉軸以外他軸周圍之傾向時, 則該物體起公轉運動, 使自轉向線 (Spin-vector) 轉向於偶力向線 (Torque-vector).

自轉向線者為自轉軸上之一向線, 自其箭端視之自轉有反時針方向. 即自轉為右旋螺釘 (Right-hand screw) 之迴轉方向時, 釘之進行方向為向線之指向. 自轉向線之長度即表示自轉之角速度. 偶力向線平行於偶力軸其指向亦依右旋螺釘法則定之.

由上之規則, 第 643 圖所示之自轉與公轉運動中之旋動儀, 若增速其公轉, 則其重心升高, 若減慢其公轉, 其重心降低. 此關係可說明之如下: 設加水平力於  $A'$ , 增速  $AA'$  軸之公轉, 則偶力向線為  $OC'$ , 此時自轉向線為  $OA'$ , 故依上之規則  $OA'$  當接近於  $OC'$ , 因之重心升高. 若  $A'$  上水平力減慢  $AA'$  軸之公轉, 則偶力向線為  $OC$ , 依上之規則,  $OA'$  當接近於  $OC$ , 因之重心降低. 故增速公轉時, 旋動儀上昇而反抗於起公轉之偶力, 減慢公轉時, 旋動儀下降而助益於起公轉之偶力.

223. 旋動儀之理論 (其一) 第 644 圖上  $ABA'B'$  為旋動儀之圓輪  $O$  為其中心,  $CC'$  為其心軸. 今圓輪以圖示之角速度

$\omega$  自轉於心軸之周圍，同時圓輪與心軸以圖示之角速度  $\omega'$  公轉於一直徑  $BB'$  之周圍，但  $\omega$  與  $\omega'$  均為等角速度。今求保持此運動所必要之力。



第644圖

設圓輪對於  $CC'$  心軸之慣性勢為  $I$ ，則圓輪在  $CC'$  軸周圍之角運動量為  $I\omega$ ，以向線  $\vec{OC}'$  表示之。因  $OB$  軸周圍有角速度  $\omega'$ ，故  $\vec{OC}'$  常變化其方向而其大小當  $\omega$  為一定時無變化。極小時間  $dt$  後  $\vec{OC}'$  設變為  $\vec{OC}'_1$ ，而角  $C'OC'_1$  設為  $d\theta$ ，則  $d\theta = \omega' dt$ ，該時間內角運動量之變化可完全以  $\vec{C}'C'_1$  表示之。因角運動量僅變其方向，不變其大小，故  $\vec{C}'C'_1$  之大小如下：

$$\vec{C}'C'_1 = \vec{OC}' d\theta = I\omega \cdot \omega' dt$$

單位時間角運動量之變化率為

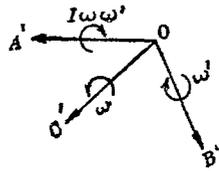
$$\frac{\vec{C}'C'_1}{dt} = I\omega\omega'$$

其方向為  $\vec{C}'C'_1$  即與直交於  $C'OB$  面之半徑  $OA'$  方向相一致。第 214 節 (2) 式，則單位時間角運動量之變化率等於此變化上所需要之偶力。故保持此公轉與自轉上所需要之力為  $OA'$  軸周圍之一偶力，其方向自  $A$  端視之為時針方向。設此偶力之大小為  $C$ ，則

$$C = I\omega\omega'$$

此偶力稱曰旋動偶力 (Gyroscopic couple). 第 644 圖所示之自轉, 公轉與偶力之方向各與第 642 圖之  $\omega$ ,  $\mu$ , 及  $U$  各方向相一致.

第 644 圖所示之自轉, 公轉與偶力之方向各依右旋螺釘規則示之如第 645 圖. 由圖可知公轉方向乃使自轉向線  $\vec{OO'}$  接近於偶力向線  $\vec{OA'}$ , 前節所述規則由此可得證明之.



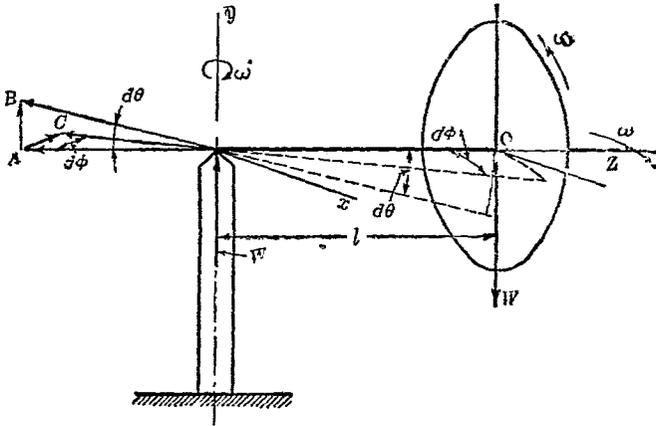
第 645 圖

$I\omega\omega'$  為保持旋動儀運動所必要之偶力, 而  $-I\omega\omega'$  為對於旋動儀運動所生之惰性抵抗. 外部所加之偶力  $C$  若與  $-I\omega\omega'$  相平衡時, 則公轉角速度  $\omega'$  為一定. 若  $C$  之值小於  $I\omega\omega'$  時, 則  $\omega'$  減小, 大於  $I\omega\omega'$  時, 則  $\omega'$  增加.

次於第 646 圖所示之圓輪以  $z$  軸為自轉軸, 今加以  $x$  軸周圍之力勢  $Wl$ , 則  $z$  軸有迴轉於  $x$  軸周圍之傾向. 今設  $z$  軸於紙面內迴轉  $d\theta$  角, 則生角運動量變化  $\vec{AB}$ , 此變化需要一水平面內之偶力, 其作用方向自下端視之為時針方向, 但外部無此偶力之作用, 故  $z$  軸因圓輪惰性而迴轉於  $y$  軸周圍, 依  $\omega'$  之方向起公轉運動. 公轉運動既起生後,  $z$  軸迴轉  $d\phi$  角, 而生  $\vec{AC}$  之角運動量變化. 此變化需要一偶力, 其作用方向自紙面前方視之為時針方向, 即為  $Wl$ , 以防止自轉軸在紙面內起反時針方向之迴轉運動. 故旋動儀以角速度  $\omega'$  起公轉運動時外部偶力  $Wl$  與旋動儀抵抗偶力  $-I\omega\omega'$  相平衡而  $z$  軸保持於

水平位置即

$$Wl = I\omega\omega'$$



第 646 圖

224. 旋動儀之理論(其二) 第 647 圖上圓輪之自轉方向

自右端視之為反時針方向,  $O1$

為自轉軸, 自轉角速度為  $\omega_1$ , 公

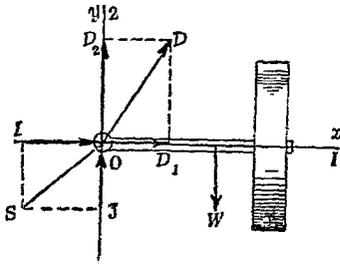
轉方向自上端視之亦為反時

針方向,  $O2$  為公轉軸, 公轉角速

度為  $\omega_2$ , 今取  $x, y, z$  為固定三直

交軸,  $y$  軸與  $O2$  軸相一致,  $x$  軸

與圖示瞬間之  $O1$  軸亦相一致,



第 647 圖

$O2$  與  $O3$  軸直交於紙面, 向線  $\vec{IO}$  表示  $\omega_1$ , 向線  $\vec{JO}$  表示  $\omega_2$ , 而向

線  $\vec{SO}$  表示旋動儀之合成角速度  $\omega$ , 但此時  $\omega_3 = 0$ . 旋動儀對

於主軸各角運動量爲

$$H_1 = I_1 \omega_1, \quad H_2 = I_2 \omega_2, \quad H_3 = 0$$

今設  $\vec{OD}_1$  表示  $H_1$ ,  $\vec{OD}_2$  表示  $H_2$ , 則  $\vec{OD}$  表示  $H$ , 但  $H$  爲旋動儀對於  $O$  點之角運動量, 單位時間  $H$  之變化率即爲  $D$  點之速度,

即

$$\frac{dH}{dt} = -H_1 \omega_2 = -I_1 \omega_1 \omega_2$$

上之負號表示  $D$  點速度向紙面後方即爲  $z$  軸之負方向。此變化率沿  $x, y, z$  三固定軸之分向量各爲

$$\frac{dH_x}{dt} = 0, \quad \frac{dH_y}{dt} = 0, \quad \frac{dH_z}{dt} = -I_1 \omega_1 \omega_2$$

維持旋動儀運動時所必需之外力即爲發生  $x, y, z$  軸周圍各角運動量變化所需之偶力。因之

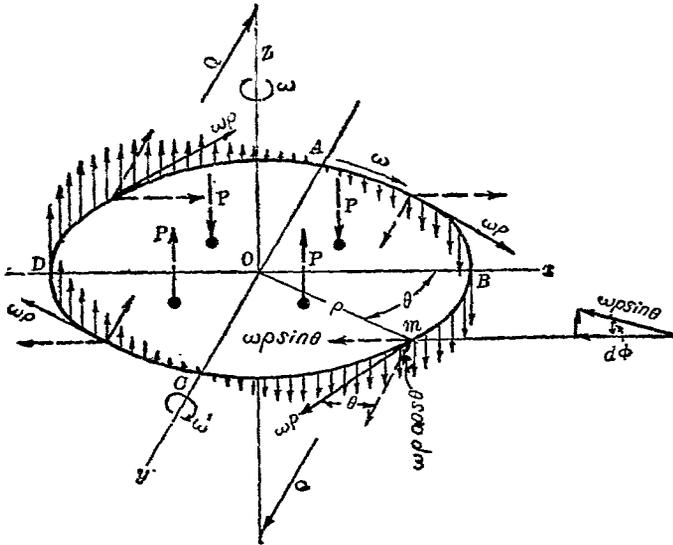
$$T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad T_z = -I_1 \omega_1 \omega_2$$

$T_z$  即爲旋動偶力, 其向線方向自紙面前方向後方。設  $W$  爲旋動儀之重量, 重心距  $O$  點之距離設爲  $l$ , 則

$$Wl = I_1 \omega_1 \omega_2$$

225. 旋動儀之理論(其三) 第648圖上之圓輪以  $z$  軸爲自轉軸, 以  $y$  軸爲公轉軸, 今求此運動所必需要之偶力。便利上取圓輪周緣任意一質點  $m$ , 其與心軸  $O$  之距離爲  $\rho$ , 則  $m$  點之速度有二。因自轉所生之速度爲  $\omega \rho$ , 因公轉所生之速度爲  $\omega' \rho \cos \theta$ , 該質點上有效力必因此二種速度所有之加速度而生。各質點上有效力既知後, 則對於旋動儀運動所必需之

外力即可求得。茲求二種速度因自轉與公轉所生之加速度如下：



第 648 圖

(i) 速度  $\omega\rho$  因自轉所生之加速度。——因  $\omega$  為一定，故  $\omega\rho$  僅變化其方向，其加速度為  $\omega^2\rho$  而向於中心  $O$ ，故  $m$  點上之有效力亦向於中心  $O$ ，因圓輪對於自轉軸為對稱，故全部質點各有效力之合力為零。

(ii) 速度  $\omega\rho\cos\theta$  因自轉所生之加速度。——自轉軸  $z$  迴轉一次時， $m$  點上此速度之變化如下： $m$  點在  $A$  處時，此速度為零，自  $A$  至  $B$  此速度漸增加，至  $B$  處為最大，自  $B$  至  $C$  又復減少，達  $C$  點而又為零。但此速度在  $ABC$  半圓周處均向下。 $m$  點

由  $C$  至  $D$  又復增加而向上,由  $D$  至  $A$  復減少,達  $A$  點時爲零,在  $CDA$  半圓周處此速度均向上.在任意瞬間之加速度  $a_1$  如下:

$$a_1 = \frac{d(\omega' \rho \cos \theta)}{dt} = -\omega' \rho \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -\omega \omega \rho \sin \theta = -\omega \omega' y$$

式中  $y$  爲該質點距  $x$  軸之距離.如圖所示取向向下之速度爲正時,則加速度爲負號者,其方向向上.質點在  $BCD$  半圓內  $y$  爲正,故加速度向上,而有效力之合力亦向上,質點在  $DAB$  半圓內,  $y$  爲負,故加速度向下,而有效力之合力亦向下.四象限內各有效力之合力  $P$  如圖所示.此四個  $P$  力卽爲保持旋動儀運動所必需之偶力中一部分,例如加於  $z$  軸上之  $Q$  力是也.

(iii) 速度  $\omega \rho$  因公轉所生之加速度.——將速度  $\omega \rho$  分解之爲二分速度,一與  $y$  軸平行,一與  $y$  軸直交.與  $y$  軸平行之分速度當公轉時不起變化.與  $y$  軸直交之分速度爲  $\omega \rho \sin \theta$ , 僅變化其方向,因此所生之加速度  $a_2$  如下:

$$a_2 = -\omega \rho \sin \theta \cdot \omega' = -\omega \omega' y$$

其方向直交於圓輪而向上方,全與  $a_1$  相同.故因此加速度所生有效力之合力全與 (ii) 中所述者相同.

(iv) 速度  $\omega' \rho \cos \theta$  因公轉所生之加速度.——此速度僅變化其方向,其加速度爲  $\omega^2 \rho \cos \theta$  或  $\omega'^2 x$ , 其方向與  $y$  軸成直交而向於  $y$  軸.因圓輪對於公轉軸爲對稱,故全部有效力之合力爲零.

綜上所述,若圓輪廻轉於自轉軸周圍,同時又廻轉於公

轉軸之周圍時，則生圖示 $x$ 軸周圍之有效偶力，其方向自 $B$ 端視之爲時針方向。若無外部偶力作用於此方向時，則旋動儀將廻轉於 $x$ 軸之周圍，自 $B$ 端視之依反時針方向廻轉。此外部偶力所以防止圓輪於 $x$ 軸周圍之廻轉運動，稱曰旋動偶力。其值由下求之。

因質點 $m$ 發生不平衡有效力之加速度爲 $a_1+a_2$ 即 $2\omega\omega'y$ ，故該點上不平衡有效力爲 $2m\omega\omega'y$ 。對於 $x$ 軸之有效力勢爲 $2m\omega\omega'y^2$ ，因之全部質點對於 $x$ 軸之有效力勢之合力爲 $\Sigma 2m\omega\omega'y^2$ 。但 $\omega, \omega'$ 爲一定，故此力勢爲 $2\omega\omega'\Sigma my^2$ ，又 $\Sigma my^2 = I_x$ ， $2I_x = I$ ，但 $I$ 爲圓輪對於自轉軸之慣性勢，故旋動偶力 $C$ 之值如下：

$$C = I\omega\omega'$$

226. 向心力與旋動偶力之相似點 圓運動時之向心力與旋動偶力有相似點甚多茲比較之如下。

#### 圓 運 動

(1) 質量 $m$ 之質點有半徑 $r$ ，速度 $v$ 之圓運動時，需要一向心力如下：

$$m \frac{v^2}{r} = mv \cdot \omega$$

但 $mv$ 爲質點之線運動量， $\omega$

#### 旋動儀運動

(1) 慣性勢 $I$ 之圓輪於自轉軸周圍有 $\omega$ 之角速度，同時於公轉軸周圍有 $\omega'$ 之角速度時，需要一偶力如下：

$$C = I\omega \cdot \omega'$$

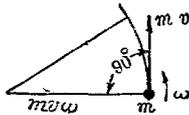
但 $I\omega$ 爲圓輪之角運動量， $\omega$

為單位時間內運動量之方向變化故

$$\text{向心力} = \text{線運動量} \times$$

線運動量之方向變化率

將  $mv$  向線於  $\omega$  之方向迴轉  $90^\circ$  時得向心力之方向, 如第 649 圖所示.



第 649 圖

(2) 向心力為圓運動時所必需之力, 若不自外部供給此向心力時, 質點不能起圓運動.

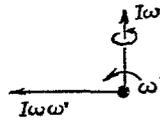
(3) 外力之值若超過所必需之向心力時,  $\omega$  增加, 即減小圓半徑. 若不達所必需之向心力值時,  $\omega$  減小, 即增大圓半徑. 外力與向心力之值相等時, 始得平衡.

為單位時間內角運動量之方向變化故

$$\text{旋動偶力} = \text{角運動量} \times$$

角運動量之方向變化率

將  $I\omega$  向線於  $\omega'$  方向迴轉  $90^\circ$  時得旋動偶力之方向, 如第 650 圖所示.



第 650 圖

(2) 旋動偶力為旋動儀運動所必需之偶力, 若不自外部供給此偶力時, 物體不起旋動儀運動.

(3) 外部偶力之值若超過所必需之旋動偶力時,  $\omega$  增大, 若不足時,  $\omega'$  減小. 外部偶力與旋動偶力相等時始得平衡.

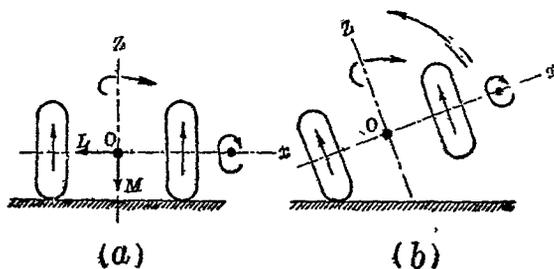
(4) 外力與所必需之向心力相等時若  $mv$  減小, 則  $\omega$  增加,  $mv$  增大, 則  $\omega$  減小.

(5) 使質點起圓運動時, 因其慣性抵抗生離心力, 與向心力相等反向.

(4) 外部偶力與所必需之旋動偶力相等時, 若  $I\omega$  減小, 則  $\omega$  增加, 若  $I\omega$  增大則  $\omega$  減小.

(5) 使物體起旋動儀運動時, 因其慣性抵抗, 生抵抗偶力, 與旋動偶力相等反向.

227. 車輪之例 第 651 圖示一汽車之後輪. 汽車車輪實為一種之旋動儀. 今設汽車駛行於曲線路上, 自後方視之向右轉彎. 車輪之自轉方向自  $x$  端視之為時針方向, 公轉公向自  $z$  端視之亦為時針方向. 由第 222 節所述規則公轉方向須使自轉向線  $\vec{OZ}$  接近於偶力向線故保持此車輪之自轉與公轉運動須有一旋動偶力. 此偶力平面與紙面平行, 其方向自紙面上方視之為時針方向. 但外部無此偶力之作用, 故輪軸  $x$  起第 651 圖(b)所示之廻轉傾向, 欲使汽車向軌道外側傾覆



第 651 圖

其結果內側輪下之壓力減少,外側輪下之壓力增大。

**例1** 船內一飛輪重 3000 kg, 其旋動半徑為 1.2 m, 其心軸為水平, 與船之縱軸相平行。兩端軸承中心之距離為 2 m, 其廻轉方向自船尾視之為時針方向。廻轉速度為 400 r. p. m., 今若該船自後方視之向左轉彎, 其角速度為 0.1 rad./sec., 求兩端軸承上之反作用力。

解 飛輪對於自轉軸之慣性勢為

$$\frac{3000}{9.8} \times (1.2)^2 = 441 \text{ kg.-sec}^2\text{-m.}$$

對於自轉軸之角速度  $\omega$  為

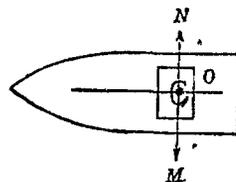
$$\frac{400 \times 2\pi}{60} = 41.9 \text{ rad./sec.}$$

故旋動偶力為

$$I\omega\omega' = 441 \times 41.9 \times 0.1 = 1847.8 \text{ kg.-m.}$$

由第 223 節所述規則, 此偶力如第 652 圖所示之  $\vec{OM}$  向線, 但外部無此偶力之作用, 故結果飛輪生惰性抵抗之偶力如虛線  $\vec{ON}$  所示。船首軸承生向下之反作用力, 船尾軸承生向上之反作用力。此二反作用力各為

$$\frac{1847.8}{2} = 924 \text{ kg.}$$



第 652 圖

今無此偶力作用時二軸承上之反作用力各為 1.500 kg, 當船

在彎曲航線進行時，船首軸承之反作用力為

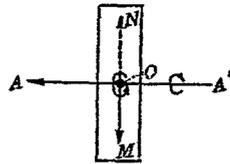
$$1500 - 924 = 576 \text{ kg},$$

船尾軸承之反作用力為

$$1500 + 924 = 2424 \text{ kg}.$$

附註 腳踏車當進行中不致傾倒亦由於旋動儀運動。今設腳踏車之輪欲向左傾倒時，則拉近左側把手，推出右側把手，如第 653 圖所示。此時起惰性偶力  $\vec{ON}$ ，使 A 端向上，而輪不致傾倒。

魚雷發射時，亦應用旋動儀而維持其進行方向。此時將旋動儀心軸向於魚雷之前進方向。



第 653 圖

鎗砲膛身內壁有螺旋紋，彈丸發射時，起迴轉運動，當進行中維持其自轉軸方向，不易被他力所變更之也。若彈丸無迴轉運動時，則其進路稍受抵抗即起變化。

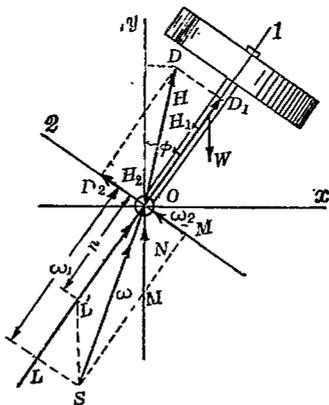
228. 斜公轉之旋動儀運動 以上所述旋動儀運動，乃正公轉運動，即公轉軸與自轉軸成直交之特別情形。茲就一般公轉軸與自轉軸成一定之  $\phi$  角，即斜公轉之情形討論之。

第 654 圖上  $O_1$  為自轉軸， $O_y$  為公轉軸， $O_x$  為直交於  $O_y$  之固定軸，而在於圖示瞬間之  $yO_1$  平面內， $O_z$  軸與  $O_3$  軸皆與紙面成直交。自轉方向自 1 端視之為反時針方向，公轉方向自上方視之亦為反時針方向。自轉角速度為  $n$ ，公轉角速度為  $N$ 。二者常為等角速度。設向線  $\vec{L'O}$  表示  $n$ ，向線  $\vec{M'O}$  表示  $N$ ，則

向線  $\vec{SO}$  表示旋動儀之合成角速度  $\omega$ , 此  $\omega$  沿主軸  $O1, O2, O3$  上各分向量爲

$$\omega_1 = n + N \cos \phi, \quad \omega_2 = N \sin \phi, \quad \omega_3 = 0$$

故得  $H_1 = I_1(n + N \cos \phi), \quad H_2 = I_2 N \sin \phi, \quad H_3 = 0$



第 654 圖

設  $\vec{OD}_1$  表示  $H_1$ ,  $\vec{OD}_2$  表示  $H_2$ , 則  $\vec{OD}$  表示旋動儀對於  $O$  點之合成角運動量  $H$ , 單位時間角運動量  $H$  之變化率爲  $D$  點之速度.  $D$  點徑路之圓半徑爲

$$H_1 \sin \phi - H_2 \cos \phi = I_1 \omega_1 \sin \phi - I_2 N \sin \phi \cos \phi$$

故 
$$\frac{dH}{dt} = -(I_1 \omega_1 \sin \phi - I_2 N \sin \phi \cos \phi) N$$

上式中之負號表示向於紙面後方, 即  $z$  軸之負方向, 由此得

$$\frac{dH_x}{dt} = 0, \quad \frac{dH_y}{dt} = 0, \quad \frac{dH_z}{dt} = \frac{dH}{dt}$$

故  $T_x = 0$ ,  $T_y = 0$ ,  $T_z = I_2 N^2 \sin \phi \cos \phi - I_1 N \omega_1 \sin \phi$

由上所述,則維持斜公轉運動時,須有  $T_z$  之外部偶力之作用,其方向自紙面前方視之為時針方向.設旋動儀之重量為  $W$ ,重心與  $O$  點間沿心軸上之長為  $l$ ,略去  $O$  點上之摩阻力,則  $Wl \sin \phi = I_1 N \omega_1 \sin \phi - I_2 N^2 \sin \phi \cos \phi$

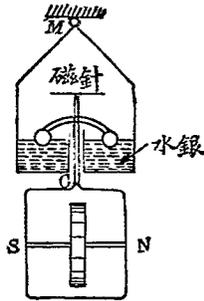
由上式解得  $N$  如下:

$$N = \frac{I_1 \omega_1 \pm \sqrt{I_1^2 \omega_1^2 - 4I_2 Wl \cos \phi}}{2I_2 \cos \phi}$$

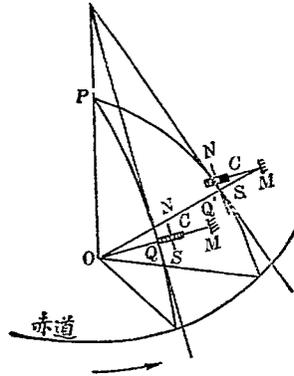
故對於已知之旋動儀及已知之角速度  $\omega$  與  $\phi$  角時,則公轉角速度  $N$  一般有兩個之值但  $I_1^2 \omega_1^2 = 4I_2 Wl \cos \phi$  時僅有一個之  $N$  值又若  $I_1^2 \omega_1^2 < 4I_2 Wl \cos \phi$  時,  $N$  之值為虛數,即旋動儀無公轉.

**229 旋動儀羅盤之原理** 第655圖示旋動儀羅盤 (Gyro-compass) 之構造.其主要部份為一圓輪,以電動機運轉之,懸於一水銀槽中,可使自由迴轉於任何方向.旋動儀之重心  $C$  在於自轉軸  $NS$  之上方,支點  $M$  之下方.

今於第656圖設將旋動儀於地面上  $Q$  位置處調整其自轉軸使平行於子午線,則自轉軸指於正北,圖上  $P$  為北極,  $O$  為地球中心,  $M$  為懸點,  $C$  為重心.今因地球自轉,某時間後  $Q$  點移至  $Q'$  點,但旋動儀自轉軸長保持其一定位置,故  $Q'$  處旋動儀自轉軸  $N$  端指於子午線東方而與  $Q$  處地面切線成傾斜角,但此時作用於重心  $C$  上之重力與懸點上反作用力成

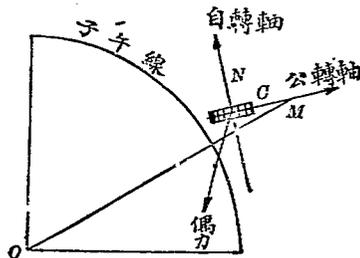


第 655 圖



第 653 圖

一偶力，其偶力向線如第 657 圖所示，結果使圓輪起公轉運動，使自轉軸  $N$  端向西運動復歸於  $Q'$  點處之子午線位置。但自轉軸  $N$  端向西運動時，其與地面切線之傾斜角亦增加而偶力增大。結果使自轉軸達子午線方向後仍繼續其向西之公轉。但此時另作用以氣流所生之偶力，使自轉軸之  $N$  端向下，即使  $MC$  與該處垂直方向相一致，如是則  $O$  點上重力之偶



第 657 圖

力可消滅而自轉軸即靜止於子午線方向。此氣流所生偶力之向線向於垂直下方如第658圖所示，使圓輪自轉軸起垂直面內之公轉運動結果該自轉軸達於切線之平行位置。氣流由閥 (Valve) 自動調整之，此閥又受懸於垂直位置之擺 (Pendulum) 所調整。該擺對於旋動儀之相對的位置即決定氣流之大小。故旋動儀偶力與氣流偶力二者使自轉軸常指於北極。

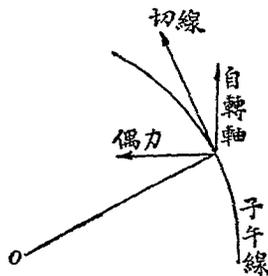


圖 658

關於旋動儀理論讀者尚可參考下列二書。

H. Crabtree: *Spinning Tops and Gyroscopic Motion*

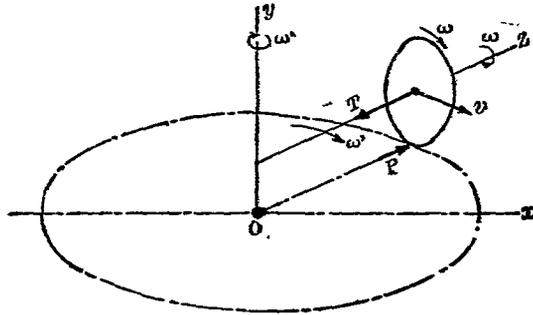
(Longmans)

R. F. Deimel: *Mechanics of the Gyroscope*. (Macmillan)

### 習 題 33.

1. 一圓輪直徑 15 m., 迴轉於圓形軌道上。該軌道半徑為 3 m., 圓輪中心速度為 6 m./sec., 如第 659 圖所示。圓輪以水

平棒附着於  $Oy$  軸, 此棒即為其自轉軸. 若圓輪重  $225 \text{ kg}$ , 求棒內拉力  $T$  及軌面對於輪緣之壓力  $P$  各若干? 但輪緣形狀與列車之輪同形.



第 659 圖

2. 一飛機之推進機自後方視之迴轉於時針方向. 若該機於水平面內轉向右側, 問旋動偶力之影響若何?

3. 一汽車發動機上之飛輪, 支於水平軸, 該軸平行於汽車之縱軸方向. 自後方視之飛輪迴轉於反時針方向. 問汽車向左右轉彎時, 旋動偶力對於 (a) 飛輪軸承上反作用力及 (b) 車輪作用於路面之壓力其影響各若何?

4. 一圓輪對於心軸之旋動半徑為  $8 \text{ cm}$ , 心軸支點距圓輪重心為  $10 \text{ cm}$ , 今圓輪迴轉於心軸周圍之速度為  $300 \text{ r.p.m.}$ , 其心軸為水平方向. 求心軸維持其水平位置時所必需之公轉角速度.

工程力学下



中華民國二十六年六月初版

周

一四五上

\*\*\*\*\*  
\* 版 權 所 有 \*  
\* 翻 印 必 究 \*  
\*\*\*\*\*

⊕ (1243.14)

大學叢書  
(教本) 工程力學二冊

裝每部實價國幣叁元伍角 **四元五角**  
外埠酌加運費匯費

編纂者 陸 志 鴻

發行人 王 雲 五  
上海河南路

印刷所 商務印書館  
上海河南路

發行所 商務印書館  
上海及各埠

(本書校對者王煊蕓)

3012

