萬有文庫

第一集一千種

王雲五主編

算理哲學

(二)

羅素著

傅種孫 張邦銘譯

漢譯世界名著

商務印書館發行

算理哲學

(二)

羅素著

傅種孫 張邦銘譯

漢譯世界名著

(原共學社叢書)

王雲五主編

萬有文庫

第一集一千種

算理哲學

二冊

羅素著

傅種孫張邦銘譯

發行兼印刷者　商務印書館　上海寶山路

發行所　商務印書館　上海及各埠

中華民國十九年四月初版

The Complete Library
Edited by
Y. W. WONG

MATHEMATICAL PHILOSOPHY

By
BERTRAND RUSSELL
Translated by
FU CHUNG SUN and CHANG PANG MING

THE COMMERCIAL PRESS, LTD.
Shanghai, China
1930

第十一章
從元之極限及連續

本章所研究的問題是兩個界說,一個是何謂當主元漸漸逼近於某值時『從元之極限』,一個是何謂『連續從元』. 這兩個都是很涉專門的觀念,算理哲學入門書中並無論之之必要;不過關於兩觀念有一種謬見特因尋常微分學而起,此種謬見存在哲學專家心裏很是根深蒂固,我們爲闢謬起見不能不有多大的努力. 自來本之(Leibnitz)以來世人總以爲微分學及積分學需用無限小數(Infinitesimals). 算學家曾經證明這種見解的錯誤〔魏斯特勞司(Weisrstrass)證之尤力〕;然謬見固結於人心(例如赫克爾所發關於算學的議論)更正不易,哲學家對於魏斯特勞司一流的算學家之所爲竟熟視無覩.

尋常算學書界說從元之極限及連續,常含着數的觀念. 照懷特赫(原註1)的說明,這是不必須的. 我們可先提出尋常教科書的界說,然

後研究一個推廣方法,使之能應用於一切的纚而不僅限於數量的纚或可以數量測度的纚.

試就極普通的算學從元 fx 而論,其 x 與 fx 都是實數,併且 fx 是一值從元——即當 x 之值一定時 fx 祇有一值. x 稱爲『主元』(Argument), fx 稱爲『主元爲 x 時從元之值』. 倘若從元是『連續的』(Continuous), 那末, x 之小小變動恰與 fx 之小小變動對應,若 x 之變動非常之小其對應的 fx 之變動亦必非常之小,若 x 之變動極小則 fx 之變動即可小於任設之數: 這就是我們所要想替他求出精密意義的粗淺觀念. 從元既然是連續的,決不會(我們這樣想)一步步的驟然跳躍,換言之,當 x 之值變動甚小時 fx 之變動決不致超過某有限大之數. 普通的算學從元就有這性質: 例如 x^2, x^3, ... log x, sin x, 等, 都是. 但是不連續的從元也非常之多. 試舉一個非算學的例: 『生存於時刻 t 年齡最小之人之誕生地』. 這是以 t 爲主元之從元; 當某人既生(而

未死)還沒有生別人的時間以內,這個從元的值是不變的,迨別一人誕生,從元的值忽然由前一人誕生地跳到後一人誕生地去.(倘若後生者死,則從元之值忽又由後生者誕生地跳到前生者誕生地去.) 再舉一個相仿的算學的例: x 爲實數時『x後之第一整數』,這是x的從元;當x由一整數漸漸增大至次整數時從元之值總不變動,直到末了才忽然一躍而變. 可見連續從元在我們雖然很熟悉,究竟算是例外: 不連續的從元比之連續從元簡直是無窮之多.

從元也有在主元取某值或某些值時連續而此外不連續的. $\sin {}^1/_x$ 就是一個例. 我們知道當 θ 每由 $-{}^\pi/_2$ 變至 ${}^\pi/_2$ 或由 ${}^\pi/_2$ 變至 ${}^{3\pi}/_2$ 或由 $(2n-1)\ {}^\pi/_2$ 變至 $(2n+1)\ {}^\pi/_2$ 時(n爲整數可正可負可零), 從元 $\sin\theta$ 取盡由 -1 變至 1 之一切實數以爲值. 令 $\theta = {}^1/_x$, 當x甚小時 ${}^1/_x$ 甚大,此時x若漸漸減小,則 ${}^1/_x$ 之增大甚速,其經過 ${}^\pi/_2$ 之一倍數至次倍數必愈過愈快. 所以從元 $\sin {}^1/_x$

之値由 -1 至 1 由 1 至 -1 往復上下也愈變愈速。今於 0 之近處由 $-\epsilon$ 至 $+\epsilon$ (ϵ 爲甚小之數)取一小範圍,在此小範圍之內 $\sin 1/x$ 上下振動次數無窮之多,雖範圍縮小而振動次數不少減. 所以這個從元在 0 之附近是不連續的. 製造一個從元,使他有無窮個處所不連續,或有 $\aleph_0$ 處不連續,或在在皆不連續,也不是難事. 尋常從元論 (Theory of founctions) 裏面主元爲實數時這樣的例很不少.

『若主元及値都是實數,當某主元時從元是連續的』這句話是什麽意思? 我們要求這個界說,可以先界說一數 x 之『近區』(Neighborhood). 設 ϵ 爲極小之數,凡 x 近旁由 $x-\epsilon$ 至 $x+\epsilon$ 一切之數總起來叫做 x 之近區. 所謂從元在某點是連續的,顯然就是說在該點近區(無論如何之小)是連續的;換言之,若主元在某點任何小之近區是連續的就是說從元在該點是連續的. 再說,設以 a 爲主元,我們希望當主元爲 a 時從元連續,

我們須先界說當主元爲 a 時從元値 fa 之近區 α. 所謂當主元爲 a 時從元是連續的就是: 無論 α 如何之小,我們一定可以將 a 之近區充分縮小,使當主元取該近區內一切之値時從元之値常在 α 以內. 換言之,倘若我們不願意 fx 與 fa 之差大過某微小之數,我們定然可以找着一串以 a 爲中心之實數,凡以該串中之數爲主元 x 時 fx 與 fa 之差不致大於該微小數. 不論微小之數選的如何小,這話須無時不眞. 故界說如下:——

設有一從元 f(x), 一主元 a, 一正數 σ, 無論 σ 如何小祇要不是零,若常有一正數 ϵ (不是 0) 存在當 σ 之絕對値小於 ϵ 時 (原註 2) 可使 $f(a+\sigma)-f(a)$ 之差之絕對値常小於 σ, 則稱當主元 a 時從元 f(x) **連續** (Continuous for the argument a).

在這界說裏面, σ 一數首先就把 f(a) 之近區由 $f(a)-\sigma$ 至 $f(a)+\sigma$ 限定了. 所以我們的界說祇須說『我們能够(用 ϵ)找到一個 a 之近區,卽

由 $a-\epsilon$ 至 $a+\epsilon$ 之各數,在該區內各主元之對應從元值定然在由 $f(a)-\sigma$ 至 $f(a)+\sigma$ 近區以內;無論 σ 如何之小,祇要上面的話辦得到,當主元 a 時從元定然連續』.

以上還不曾界說到當某主元時從元之極限.

倘若我們先界說了極限,那末,從元之連續性又可以換一個方法來界說: 若從元由上及由下逼近某點,其值之極限皆與從元在該點之值相同,則稱從元在該點連續. 像這樣的從元,當主元逼近某點時其值有一定極限,是很好的,可是不很經見. 通常從元多不絕的顫動,並且無論主元之近區範圍如何之小,其對應的從元往往能取一串很不相近(卽相差不小)的值. 所以我們要先從一般的情形來論.

任意指定一值 a, 主元可由小而大漸漸逼近(以後簡稱上昇逼近)於 a, 亦可由大而小漸漸逼近(以後簡稱下降逼近)於 a. 今先就主元上昇逼近於 a 論之. 設 ϵ 為一小數(要非常之小).

試看當主元在 $a-\epsilon$ 至 a 範圍以內時情形如何.

當主元在由 $a-\epsilon$ 至 a (a 在外) 範圍以內,從元之値是一串實數,所有不大於(即小於或等於)這些值的一切實數組成一節,名爲與該値等對應之下節. 通常 ϵ 變則下節隨之而變. 在節內任取指定一數,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍以內之主元對應之値必有許多不小於該數者,即當主元與 a 甚相近(若 ϵ 甚小)時從元之値必有不小於該數者. 今選取一切可能的 ϵ,而得一切可能的對應下節. 所有各下節之公共部分名之曰當主元上昇逼近 a 時之終極下節 (Ultimate lower section). 所謂一數 z 屬於終極下節者,即謂無論 ϵ 如何小,與由 $a-\epsilon$ 至 a 範圍內主元對應之値中必有不小於 z 者.

以上所論的是下節,即某點以下之節;仿此還可應用於上節,即某點以上之節. 當主元在由 $a-\epsilon$ 至 a (在外)範圍以內,從元之値是一串實數,所有不小於(即大於或等於)這些值的一切實數

組成一節,名之為上節. 通常ϵ變則上節隨之而變. 今選取一切可能的ϵ,而得一切可能的對應上節. 所有各上節之公共部分名之曰當主元上昇逼近a時之終極上節(Ultimate upper section). 所謂一數z屬於終極上節者,即謂無論ϵ如何小,與由$a-\epsilon$至a範圍內主元對應之值中必有不大於2者.

當主元上昇逼近於a時其終極上節與終極下節之公共部分稱為『當主元上昇逼近於a時之終極顫部』(Ultimate oscillation). 凡謂一數z屬於終極顫部,即謂z屬於終極下節又屬於終極上節也. 終極顫部可以從元$\sin{}^1/x$為例說明之. 當主元x之值由負數漸漸上昇而逼近於0時$\sin{}^1/x$之終極顫部存在.

先就終極下節而論. 無論ϵ如何之小,主元在$-\epsilon$至0範圍內,從元之值必有達於1者但必不大於1. 故終極下節包含1以下各實數,即負實數全體,零,由零而上至1各正實數(1在內).

同理,終極上節包含 -1 以上各實數,即正實數全體,零,由零而下至 -1 各負實數(-1 在內).

所以終極顫部盡含由 -1 至 1 各實數(-1 及 1 亦在內).

故所謂當主元上昇逼近於 a 時從元之終極顫部,就是一些數目 x 組織而成,這些 x 有一種特性,無論我們如何迫近於 a,從元常有值不比 x 大,且常有值不比 x 小.

終極顫部也許無項,也許只有一項,也許有許多項. 在前兩場合,當主元上昇逼近於某值時從元有一定極限. 終極顫部若僅僅一項,那一項就是極限. 終極顫部若空無所有,則終極上節之下界限與終極下節之上界限相同,這界限就可以叫做極限. 倘若終極顫部含有許多項,則當主元上昇逼近於 a 時從元就沒有一定的極限. 在這種場合,終極顫部之上下界限(即終極下節之上界限及終極上節之下界限)可以定名爲『當主元上昇逼近於 a 時從元終極諸值之

上下界限』. 同樣,又得『當主元下降逼近於a時從元終極諸值之上下界限』. 所以就一般情形而論,主元逼近於a時,常有四個極限. 這四極限如果是合而爲一,這個公共值就叫做『主元逼近於a時從元之極限值』;若不合而爲一則無一定極限. 四極限之公共值倘若與主元爲a時從元之值一致(通常未必一致),則稱主元爲a時從元連續. 這也可以拿來做連續性的界說,與以前的界說是一樣的. (譯者註1).

當主元逼近於a時從元之極限,還可以用別的方法界說他(祇要有他),不必經過顛部及四極限. 這個界說法正與連續性之界說相倣. 今先界說主元上昇逼近於a時從元之極限. 主元上昇逼近於a時,從元有一定極限,其必須而且充分之條件是: 任取一正數σ無論σ如何之小,取兩主元(皆小於a)使之充分接近於a則其對應兩從元值之差必小於σ;即使ϵ充分微小與由$a-\epsilon$至a範圍內兩主元對應之兩值之

差必小於σ. 假如無論σ如何小這個條件都行,則當主元上昇逼近於a時從元有一定極限. 同樣可以界說當主元下降逼近於a時從元之極限. 此兩極限縱使同時存在未必便相同(譯者註2);縱使相同也未必就與當主元爲a時從元之值一致(譯者註3). 必定三者一致,我們纔可說當主元爲a時從元連續.

連續從元(Continuous function)者當任何主元時皆連續之從元也.

此外還有一個稍爲不同的方法可以界說連續性:——

設有一類α(數之類),若有一實數a,當主元爲a或較a大時從元之値常包含於α以內,則稱該從元『終極收斂於α類內』(Ultimately converges into a class α). 同樣,設x爲一定主元,若此外有一實數y小於x,當主元在由x至y範圍(y在內,x在外)以內時從元之値常含在一類α以內,則稱『當主元上昇逼近x時從元終極收斂於α內』. 今

採用以前界說,凡小於某數之實數稱爲該數之前數,大於某數之實數稱爲該數之後數. 則當主元 a 時欲從元連續,其必須而且充分之條件爲下列四條:——

(1) 任取一小於 fa 之實數,當主元上昇逼近於 a 時從元之值終極收斂於該數之諸後數內.

(2) 任取一大於 fa 之實數,當主元上昇逼近於 a 時從元之值終極收斂於該數之諸前數內.

(3)及(4)是主元下降逼近於 a 時用的,與(1)(2)兩條正相倣.

這樣的界說法便利的地方就在將連續性的條件分析爲四項,將主元與界說有連續性處之主元比較大小,從元值與界說有連續性處之從元值比較大小,實覺眉目淸醒.

以前所討論的連續性及極限之界說是爲數的纏而說的. 但是這種界說還可推廣到一般的非數的纏,或不知能否以數量測度的纏. 運動正好拿來做例證. 韋爾斯(H. G. Wells)做過一

段故事,從運動方面看,可以引來說明當某主元時從元之極限未必與其値相同. 這故事中的主人說是不知不覺有實現他的志願的神力,想要怎麼樣便能怎麼樣. 他被一個警察追逼,口叫一聲『到——裏去』(譯者註4)警察就不見了. 設當時刻 t 時警察所在地位爲 $f(t)$,叫的時刻爲 t_0,那末當將叫而未叫的時候,卽當主元 t 上昇逼近於 t_0 時,警察所在地位之極限是與故事中的主人緊相接觸,而主元爲 t_0 時(卽叫時)警察的地位却是——(卽叫他去的那個地方). 這種情形在實在世界總覺的是罕見的,實在世界通常假定一切運動都是連續的,(但並無適當的證據)換言之,設 $f(t)$ 爲 t 時任意一物所在之地位,$f(t)$ 是 t 的連續從元. 這些話語裏面所謂連續正是我們現在所要簡單界說的東西.

以上各界說從元與主元都是實數,現在再將這個限制取消就可用於一般的關係.

設 P 與 Q 爲任意兩關係.(雖不限定是纜屬

關係,但為便利起見可懸想他們是纚屬關係.)又設R為一個一對多的關係,其關係界含於P關係場而被關係界含於Q關係場. 這個R關係可以看做是一個(廣義的)從元,其主元屬於Q關係場而值屬於P關係場. 例如我們要研究一個質點在直線上的運動: 命Q為時間的纚,P為直線上之點纚(從左而右),R為當時刻a時質點所在位置對於時刻a之關係,那末,這時刻質點之位置就可以『a之R』表示之. 我們討論的雖是一般的從元,但無妨以運動為例,將上面的說明牢牢記住.

設a為一主元(即Q纚之一項),若任意於P纚中取含『a之R』的一範圍α,Q纚中有一含a的範圍(a非兩端之項)盡此範圍內之項以為主元,其對應的從元值常在α以內,則稱『當主元為a時從元連續』. (此處所謂範圍是指介乎任意兩項之間的一切項;若x及y為P場中兩項,其間有若干項Z,x對Z有P關係Z對y亦有P關

係,則一切 Z 項合成一範圍名曰『x 至 y 之 P 範圍』—— 也有時候特別聲明 x 或 y 亦在內).

『終極下節』及『終極顛部』也很容易界說. 設 a 爲一定主元, y 爲任意一前於 a 之主元(對於 a 有 Q 關係), 則介乎 a 與 y 間之各主元對應着許多從元值都是 P 關係場中之項, 這些值在 P 關係場內定了一個下節, 爲與其中某值一致或早於其中某值之一切項所組成. 掄選所有前於 a 的項 y, 作成所有對應的下節, 而取其公共部分; 這就是『終極下節』. 同樣可以界說『終極上節』. 至於『終極顛部』界說法全然與以前一樣.

『收斂』(Convergence) 之界說及用收斂界說連續性之方法要想推廣到一般去, 也沒有什麼困難.

設 α 爲一類, 若 Q 場中有一項 y 屬於從元 R 之被關係界, 與 y 及後於 y 之各主元(y 對之有 Q 關係者)對應之從元値悉屬於 α, 則稱『從元

R終極依Q而收斂於a內』. 同樣,設有一定主元a若此外尚有一主元y屬於R之被關係界而對於a有Q關係,在由y至a之Q範圍(y在內a在外)以內各主元對應之從元値悉屬於a,則稱『當主元逼近a時從元終極依Q而收斂於a內』.

當主元爲a時從元連續其必須而且充分之四條件中第一條(命『a之R』爲b)是:

任意指定對於b有R關係之一項,當主元上昇逼近於a時從元終極依Q而收斂於b之諸後項(b對之有P關係者)內.

將第一條件之P換做P之逆關係就得第二條件. 將一二兩條之『上昇』換做『下降』就得三四兩條.

由是可見從元之極限及從元之連續觀念便沒有什麼非用數不可的地方. 他們的界說都可以擴充,關於他們的命題也有許多可以應用於任意兩纙(一爲主元纙,一爲從元纙). 這些界

說之中沒有含無窮小(Infinitesimals)的觀念。他們所含的是範圍觀念,這些範圍都是無窮類(項數無窮之多),雖然一範圍小於一範圍沒有大於0的極限,但是並不是無窮小。譬如一寸之木割去其半,再去餘木之半,又去餘木之半,雖然沒有止境的做去,也不能得着無窮小:割過n次之後還剩$\frac{1}{2^n}$,祇要n有窮$\frac{1}{2}$總歸有窮。因爲這種割法是一次復一次的(即割法自成進級繼),決不會達到無窮次。所以用這個法子割剩的木頭決不會無窮小。無窮小這個觀念弄不清楚,很足使無窮及連續性之研究發生困難。

(原註1) 參看 Principia Mathematica, vol ii * 230—234

(原註2) 某數絕對值小於ϵ者,該數位於$-\epsilon$與$+\epsilon$之間之謂也。

(譯者註1。) 此節名詞太多,僅$\sin\frac{1}{x}$一例恐不易顯明各名之變化,特另舉數例如下表

f(x)		$\sin\frac{1}{x}$	$x+\sin\frac{1}{x}$	$-x+\sin\frac{1}{x}$	$(1+x^2)\sin\frac{1}{x}$	$\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}\sin\frac{1}{x}$
當x由−ε漸變逼近於0	對應上節	不變	變	不變	變	不變
	終極上節	自−1以上	自−1以上	−1以上	自−1以上	−2以上
	對應下節	不變	不變	變	變	不變
	終極下節	自+1以上	+1以上	自+1以下	自+1以下	+2以下
	終極顚部	自−1及至+1	自−1至+1	−1及至+1	自−1及至+1	−2至+2
當x由+ε漸變逼近於0	對應上節	不變	不變	變	變	變
	終極上節	自−1以上	−1以上	自−1以上	自−1以上	自−1以上
	對應下節	不變	變	不變	變	變
	終極下節	自+1以上	自+1以下	+1以下	自+1以下	自+1以下
	終極顚部	自−1及至+1	−1及至+1	自−1至+1	自−1及至+1	自−1及至+1

上表中：　『y以上』＝『由y以上（y在外）』；

『自y以上』＝『由y以上（y在內）』；

『y至z』＝『由y至z（y, z在外）』；

『自y至z』＝『由y至z（y在內, z在外）』；

『y及至z』＝『由y至z（y在外, z在內）』；

『自y及至z』＝『由y至z（y, z在內）』；

（譯者註2。）（註1）表中所列各從元，卽主元上昇下降逼近於0時從元兩無極限之例。有而不相同者如 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}/(1+e^{\frac{1}{x}})$。當主元上昇逼近於a時從元值之極限爲0，當主元下降逼近於0時從元值之極限爲1。

（譯者註3。）設 $f(x)=x^2+\frac{x^2}{(1+x^2)}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\cdots\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2)^n}+\cdots\cdots$ x上昇或下降逼近於0時從元之極限同爲1，但當主元爲0時從元之值爲 $f(0)=0$。

（譯者註 4.）『——』是『地獄』的無音代名詞，因為是英文罵人的話，所以著者沒有寫出來，令讀者自己揣摩其意。

第十二章
掄選法及相乘公理

本章要研究一個公理,這公理可以宣示而不能以邏輯證明,他在算學裏面很有便利地方但不是必須的. 算學各門中,有許多有趣的命題,我們覺得認他們眞實很出乎自然,却不憑藉這公理不能證明,足見假定這公理很多便利;但是沒有那些命題,各門算學雖然形式上殘闕不完却是依然成立,可見這公理又不是少不得的了.

在提出相乘公理以前,我們要先闡明掄選理論,及乘法之一般的界說(因數個數可以無窮).

界說算術上的演算唯一正當的方法,就是求一個實在的類(若爲關係數則造一實在的關係)其項數爲所求之數. 求這種類固然有時很費心思,然要證明所界說的數存在實非此不可.

試拿加法做個最簡單的例. 假如有基數μ,及項數爲μ之類α. 我們如何界說$\mu+\mu$?界說$\mu+\mu$需要兩個不相搭雜而各含μ項之類. 要專從

α着手造一個含$\mu+\mu$項的類方法很多,現在舉一個頂簡單的:先造一串序列耦,每耦前項爲α中一項後項爲空類;又造一串序列耦,每耦前項爲空類後項爲α中一項. 兩串無公同項其邏輯的和爲$\mu+\mu$項. 設有兩類,α之項數爲μ,β之項數爲ν,同樣可以界說$\mu+\nu$.

求這種界說祇是方法適當的問題,沒有別的難處. 但是論到乘法,其因數可以無窮之多,界說上就要發生許多重要問題.

因數有窮,乘法不生難題. 設有α及β兩類,α含μ項,β含ν項,所有取α中一項爲前項β中一項爲後項之耦之個數可稱爲$\mu\times\nu$. α與β也不需不相搭雜,就是完全一致都未嘗不可. 例如α爲含x_1, x_2, x_3三項之類,我們用以界說$\mu\times\mu$的類即下列各耦之類:

$$(x_1,x_1),\ (x_1,x_2),\ (x_1,x_3);\ (x_2,x_1),\ (x_2,x_2),\ (x_2,x_3);$$
$$(x_3,x_1),\quad (x_3,x_2),\quad (x_3,x_3).$$

上述界說,當μ或ν無窮或μ與ν皆無窮時都

可用;且可順次推廣為三個,四個,五個,六個或任何有窮個因數. 總而言之因數個數不是無窮用這個界說決不發生難題.

假如因數箇數可以無窮,乘法之界說纔發生問題. 設有一類 κ 為許多類組織而成,每類之項數已知;我們如何界說這些數之連乘積?要想我們的界說普遍,定須無論 κ 有窮無窮皆能通用才是. 讀者應當注意我們說的是 κ 為無窮類,不問 κ 中之類員是否為無窮類. 倘若 κ 非無窮類,就是其中各類員為無窮類,上述界說法還須可用得. 倘若 κ 為無窮類,縱使其中各類員為有窮類,上述界說也發生問題,須得另找一個界說.

下述一般的界說乘法之方法是懷德赫(Whitehead)博士發明的. Principia Mathematica, Vol. 1. *80 ff 及 Vol. ii. *114 闡論很詳盡.

設有一類,類中包含許多類不相搭雜——例如一國之各選舉區然,若非複選制度,則每區為

一選民之類,一國爲選民之類之類. 今仿照選舉法每區選一人(假定必選一人,祇選一人,且被選者必爲選民)爲代議以組織議會之法,於每類中選出一項爲『代表』. 由是我們得了一類代表,他們合起來組織一個議會,每個都是一選區之一選民. 現在要問選一個議會共可有多少不同的方法?每選區內各選民個個可以當選,假如某區有 μ 個選民,就該區而論就有 μ 個選法. 各選區之選法原係各自獨立不相倚賴的,所以選區數若有窮,總共不同的掄選議會方法之數顯然就是各區選民數連乘之積. 假如我們不知道選區數究竟有窮還是無窮,我們可以掄選議會方法之總數來界說各區選民數連乘之積.

這就是界說無窮積(因數個數無窮)之方法. 現在丟開譬喻來講精確的說法.

設 κ 爲一類,其中各類員皆爲類,並暫且假定各類不相搭雜,(卽若 α 及 β 爲 κ 中不同類,則 α 與 β 無公共項). 今於 κ 中每類選出一項組

成一類μ,——即μ之各項皆屬於κ中各類,且κ中任何類α與μ有一公共項且僅有一公共項——此類μ即稱為『κ之一選班』(A selection from κ). 總合κ之一切選班稱為『κ界相乘類』(Multiplicative class of κ). κ之相乘類之項數,即κ之選班總數,謂之κ中各類之數之『積』(Product). 這個界說不論κ有窮無窮皆能合用.

要想這個界說十分美滿,須將κ中各類不相搭雜之制限設法取消. 為要取消這個制限,我們先不界說那個『選班』(類),先界說一個『掄法』(關係). 設有一關係R,κ中每類各遵此關係而選去一項充當該類之『代表』,換言之,若α為κ中一類,必恰有一項x屬於 而對α有R關係;若R之作用即止於此,則稱R為『κ之一掄法』(A selector from κ). 嚴格之界說如下:

設κ為類之類,R為一對多的關係,R之被關係界為K,且當x對α有R關係時x必為α之一項,則稱R為κ之一掄法(Selector).

設R爲κ之一掄法，α爲κ中一類，x爲對於α有R關係之項，則稱x爲『關於R關係，α之代表』(Representative).

κ之一掄法之關係場稱爲『κ之一選班(Selection)』；總合各選班而成一類稱爲κ之相乘類(Multiplicative class).

當κ中各類互相搭雜，則掄法總數可以比選班總數多；蓋若x屬於κ中α及β兩類，則x可兩次當選，一次代表α，一次代表β，此時掄法雖異(譯者註1)選班則同．所以界說乘法與其用選班不如用掄法．故界說曰：

一類(類之類)κ之掄法總數稱爲該類κ中各類之數之積．

仿此更可界說乘羃．例如μ^{ν}可以界說爲各含μ項之ν個類之掄法總數．不過其中還有可以非難的地方，因爲採用這個界說要應用相乘公理(即刻就要講到)，而相乘公理在本題中並不是必須的．茲另代以下法：——

設α為一類內含μ項,β為一類內含ν項.設y為β中一項,以y為第二項,α中任一項為第一項,作成一類之序列耦.因α中任意一項皆可選為耦之第一項,而α共有μ項,故每指定一y則此類中之耦共有μ個.今復就y而更迭之,則此種序列耦之類共有ν個;因β中每一項皆可選為y,而β中共有ν項也.此ν個類中每類各含μ個耦,此等耦之前項為α中之各項而後項為β中之一定項.我們現在就界說μ^{ν}為此等類(耦之類)之全體之掄法總數,即界說為其選班總數亦無不可,蓋因諸類中之耦各不相同,故掄法數與選班數相等.此等選班各為一串之序列耦,其中各有(亦僅有)一耦以β中一指定項為第二項,以α中一項為第一項.以此等各含μ個耦之ν個類界說μ^{ν}比從前用那各含μ項之ν個類強些,因為此等耦之類之組織不同容易標識.其與相乘公理相關之處以後自然知道.

以上用於乘羃之法也可用之於乘積. 我們可以界說『$\mu\times\nu$』爲『各含μ項之ν個類之數之總和』,但是我們寧願將他界說爲『從μ項類α中取一項爲前項,ν項類β中取一項爲後項,所得之耦之總數』. 用這個界說可以免得假定相乘公理.

用以前所述各界說我們可以證明乘積及乘羃之普通形式的定律. 但還有一層不能證明:我們不能證明『必因數有等於零時乘積始等於零』. 當因數個數有窮固然可以證明,但是因數個數無窮就沒有方法證明了. 換言之,我們不能證明『設有一羣類,都不是空類,則從該羣必有可取的掄法』,或是說『設有一羣不互相搭雜之類,則至少必有一類爲從原有各類每類恰選一項組織而成』. 這些話都是不能證明的;雖然乍見的時候他們好像不證可明,但一經思索便疑竇叢生,到後來只得權且假定着往下推論,好像假定平行公理似的,不管其眞僞是否在吾人知

識能力以內. 這種假定,以非嚴密的言辭表出來,是:選班與掄法,我們指望其存在,他們便存在.

此外尙有許多嚴格的說法(都是相等的)可以表示這公理. 今先舉一種如下:——

『設有一羣不相混搭之類,其中無一空類,則至少必有一類爲從原有諸類中各選一項組織而成』.

這個命題就叫做『相乘公理』(Multiplicative axiom). (原註1) 現在先說出他幾個相等的形式,然後再論他們的眞或假在算學上的關係.

相乘公理也等於這命題:『乘積惟當因數至少有一等於零時爲零』或『若干基數相乘,若無零在內,則乘積不能爲零』.

相乘公理又等於這命題:『設有一類 κ, 一關係 R, 若 κ 含於 R 之被關係界, 則至少必有一個一對多的關係包含 R 而以 κ 爲其被關係界』.

相乘公理又等於這命題:『設有一類 α, 除空類以外, 其中所有副類組成一類 κ, 則 κ 必有一

揄法』. 這個形式,最初由綏梅羅 Zermelo 引起學術界的注意,他在他的『Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann』(原註 2)中用過這公理. 綏梅羅以為這命題的眞確是無可疑問.綏梅羅未將這公理表彰以前,算學家用這個公理都是持深信不疑的態度;大概他們都沒有自覺罷了.

綏梅羅首將這個公理表彰出來,使世人都注意,這誠然是他的功勞,但是與該公理之眞假絕無關係.

綏梅羅在上述證法中曾經證明乘法公理等於這命題,『任何類必可順列之』即『任何類可排爲一纚,纚中每副纚皆有首項』(空類當然除外). 詳細的證法雖然很繁,其所應用之重要原理不難洞悉. 他所用的原理,我們叫做『綏梅羅公理』,即假定:設有一類 α,最少必有一個一對多的關係 R 存在,以 α 中一切存在的副類爲被關係界,且若 x 對於 ξ 有 R 關係, x 即爲 ξ 中之一項. 用這種關係 R 可以從 α 之各副類中各

選出一代表;不過兩副類也許往往同一代表.綏梅羅的目的就在用R關係及超窮歸納法將α之項一個一個順次提出來.先提出α之代表(因α也是α的副類)來,叫他做x_1.又從那個含α之其餘各項(惟x_1不在內)的副類中提出一個代表來,叫他做x_2.x_2與x_1必不同,因為x_2所代表的副類中沒有x_1.照這個法子行過去,首先就得了一個進級纜$x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots x_n, \cdots\cdots$(假定$\alpha$是無窮類).拿去了這些,假如$\alpha$還剩下有些項,還可做照以前辦法$x_\omega, x_{\omega+1}, \cdots\cdots$一個一個提出來.這樣魚貫而出的代表恰成一順列纜,包含全α之項.(以上不過是證法的一斑).這個命題就叫做『綏梅羅定理』.

相乘公理又等於這假定:『兩基數若不相等必一大一小』假如這個公理不成立,那末,或者就有兩數μ及ν,μ也不小於也不等於也不大於ν.以前說的$\aleph_1$與$2^{\aleph_0}$就可做一對好例.

相乘公理別樣的形式還很多,並不難再舉,不

過在現今所知道的各種形式之中,以上幾種算是頂重要的了. 至於這個公理或其相等形式之眞不眞,現今還不知道,祇得闕疑.

有賴於相乘公理的命題,雖不知道是否即等於這公理,但是很多而且很重要. 今先就加法與乘法之相通關係說明之. 設有ν個不相搭雜之類,每類含μ項,我們一定以爲這ν類項數總和是$\mu\times\nu$。當ν有窮固然可以證明. 但當ν無窮,則沒有相乘公理便不能證明,除非遇着特殊情境『掄法的存在』可以獨立的證出. 設有兩串類,每串各有ν個不相搭雜之類,每類各有μ項,我們想要證明兩串總共項數彼此相等. 要想證明這層,非在兩串間立出一個一對一的關係不可. 因爲兩串之類數相同,所以兩串類之間有一個一對一的關係;但是我們所求的關係不在此『類與類間之一對一的關係』而在『項與項間之一對一的關係』. 假如類與類間之一對一的關係爲S;此等類之串一爲κ,一爲γ;a爲κ

中一類，則λ中必有一類β為α（關於S）之關聯類．又α與β同為μ項之類，彼此應當相似．所以α與β之間應有一組一對一的關聯，並且此組共有許多個關聯法．正因其多，所以就發生繁難．我們要想求得κ與λ中（項與項）一個一對一的關聯R，先要尋出一個班選從各組關聯（其中一組是α與β之許多關聯）中每組選出一個關聯充當代表，總合諸代表才能成R．若κ與λ是無窮類，——其時關聯組無窮之多——這種選班是否存在，那又不能不憑藉相乘公理的眞實了．所以平常加法與乘法之相通觀念是否正確又是問題．

由這事實很發生了些新奇結果．我們知道$\aleph_0^2=\aleph_0\times\aleph_0=\aleph_0$．因此就說，若每類含$\aleph_0$項，則合$\aleph_0$個類之項數總和定是$\aleph_0$，但是這話靠不住，因為此$\aleph_0$個類之項數總和是否為$\aleph_0\times\aleph_0$還不知道，更何由知道是$\aleph_0$呢？這個問題與超窮序數之理論也很有影響．假如有一個序數，他前面還有$\aleph_0$

個前數(小於他的序數),他定然是鏗托兒所謂第二級序數之一,換言之,以此序數為纙屬數的纙其塲中項數必為 $\aleph_0$. 今試從第二級中任意取出一個進級序數纙來,這個進級纙之極限之前數(小於該極限之一切序數)最多不過組成 $\aleph_0$ 個類每類各有 $\aleph_0$ 項. 所以說——若非假定相乘公理,這說話又是詭辨——該極限之前數總計不過 $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ 個,那末,這個極限也是第二級序數之一了.換言之,這是假定第二級序數組成之任何進級纙之極限也是第二級之一序數.這個命題與由此推出之命題『ω_1(第三級序數之最小者)非第二級序數組成之任何進級纙之極限』在第二級序數之理論中佔重要位置.就他們隱含相乘公理看起來,都不能視為已經證明. 他們可眞可假,究竟是眞是假現在還不能斷定. 所以第二級序數理論大部分應當看做是未曾證明的.

此外還有一個說明,可以使這層(指 $\mu \times \nu$ 那段)

更加明瞭.我們知道 $2\times\aleph_0=\aleph_0$.我們自然想着 $\aleph_0$ 耦之總和必爲 $\aleph_0$ 項.這話有時候是眞的,但是我們不能證明常常是眞的,除非假定相乘公理纔行.我們可以舉一個例來說明.譬如有一個富豪,每逢買一雙鞋就買一雙襪,不買鞋也就不買襪,直到後來總計買了 $\aleph_0$ 雙鞋和 $\aleph_0$ 雙襪纔罷.現在的問題就是:到底他共有多少隻鞋,有多少隻襪?我們自然而然的這樣想,鞋之隻數爲雙數之兩倍,襪之隻數亦爲雙數之兩倍,因爲 $\aleph_0$ 是以二倍之而不變的,所以每樣各有 $\aleph_0$ 隻.但是這是那個『ν 個 μ 項類(不相搭雜)項數總和與 $\mu\times\nu$ 可否相通』問題的一個例.有時候可以,有時候不可以.就上例而論,鞋可而襪則否.其理由如下:鞋有左右之分,我們可以於每雙中選其左者或選其右者;襪無左右之分,沒有一般的法則可爲標準,若非假定相乘公理,我們不能知道的確從每雙襪中選出一隻來組成選班是可能的.所以是問題哪.

這個問題還可用別法顯明. 要證明一類有$\aleph_0$項,其必須而充分的方法是找出一個關係將類中之項排成一進級纚. 上例說的鞋子不難排成進級纚. 因爲他們的雙數旣然是$\aleph_0$,自然就是進級纚的場.現在保存各雙之相對順序不使淩亂,僅將每雙中左鞋置前右鞋置後;則就隻而論亦復成爲進級纚,隻數當然是$\aleph_0$. 至於襪子,每雙兩隻孰前孰後是隨便的;在這無窮個隨便之中要選出一個排法來是不可能的. 若非另有別的選擇方法,即掄法,我們連一個選班都不知道是否在理論上爲可能.不過就空間之實物,——如襪之類——我們總還可以找出一個掄法來. 譬如,就襪之質量中心而論:空間中必有一點p與各雙中兩襪之重心之距離皆不相同;我們就可將每雙中重心之較近於p者選出來. 但是這種選法沒有理論的理由可以斷定常常是可能的,或者竟不可能也未可知,讀者可從襪子的例去推想.

假如我們沒有方法可以從每雙襪中選出一襪來,那末,自然不能一雙一雙排成進級纚,也就不能證明襪子的雙數是$\aleph_0$了. 可見若μ爲無窮數,則此μ雙中總共項數也許與彼μ雙中總共項數不同;因爲$\aleph_0$雙鞋之總共隻數雖然是$\aleph_0$,而$\aleph_0$雙襪之總共隻數,若不假定相乘公理或找出一種選法(如上述之幾何法),就許不是$\aleph_0$.

此外憑藉相乘公理的一個很重要問題就是反身(Reflexiveness)與非歸納(Non-inductiveness)之關係.閱者想必還記得,我們在第八章末曾經提過,凡數是反身的必然是歸納的,但是(據現在所知道的)假如不假定相乘公理就不能證明非歸納的數一定就是反身數. 其理由如下:——

我們容易證明,一個反身類即是一個『含有$\aleph_0$項的副類』的類.(原數也許本身含有$\aleph_0$項). 所以假設我們能力做得到,我們祇消證明『從任何非歸納類中必可以選出一個進級纚來』就足敷了.

我們容易證明,一個非歸納類所含項數必較

任何歸納數大,換言之,設 α 爲一非歸納類,ν 爲一歸納數,則 α 中必有許多副類其項數各有 ν.

所以我們能彀從 α 中選出許多串的有窮副類來:第一,空類;第二,一項類(其數與 α 之項數相同);第三,二項類;等等. 這些串副類做成一個進級續,每串含盡一切有某項數之副類. 以上我們都未曾憑藉相乘公理,但所曾證明者不過各副類之組合數是反身數罷了,換言之,設 μ 爲 α 之項數,則 α 之副類數爲 2^{μ}, α 之副類之組合數爲 $2^{2^{\mu}}$, 今 μ 爲非歸納數,故 $2^{2^{\mu}}$ 爲反身數. 但是這離我們所着手要證的論點還遠着呢.

再要前進非應用相乘公理不可. 今從每副類串(僅含空類者除外)中各選出一項. 這就是說,選一個一項副類 α_1, 選一個二項副類 α_2, 選一個三項副類 α_3, 等等. (假定相乘法公理,則選法可能;否則不知是否時常可能.) 由是我們得了一個進級續 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\ldots$ 恰可代替那個副類串之進級續;這算是離要證明的論點又近

一步了. 所以我們知道,若假定相乘公理,則2^{μ}(此μ為非歸納數)必為反身數.

再進一步則需注意副類之進級纙$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$ ……中各副類雖不能說每副類都含有新項為其前諸副類所未有,但是隔過一定距離其中定然不免有含着新項的副類. 此可說明之如下. α_1首先含着一個新項,命之為x_1. α_2也許含x_1也許不含x_1;假如他含了x_1,還得另含一新項x_2;假如他不含x_1就得含另兩項x_2, x_3. 就後面這個場合而論,α_3也許不含新項祇含x_1, x_2, x_3,那末,α_4定然要含另一新項了. 推而廣之,起首ν個副類最多能含$1+2+3+\cdots\nu$項,即$\nu(\nu+1)/2$項;假如這ν個副類沒有互相搭雜的,那末,從第$\nu+1$副類至第$\nu(\nu+1)/2$副類可以盡含着重複項,沒有一個新項. 但是到了第$\nu(\nu+1)/2+1$副類以前的舊項不彀了,定然又要發現新項. 所以在副類之進級纙$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$裏面若將那些不含新項之副類(所含之項皆以前諸副

類所有者略去,剩下來的副類必仍然成一進級纚. 設此纚爲 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \cdots$ ($\beta_1=\alpha_1, \beta_2=\alpha_2$, 因爲 α_1 及 α_2 都含有新項. 至於 β_3 也許是 α_3 也許是 α_4; 總而言之,每一個 β_μ 一定是一個 α_ν, 其中 ν 不小於 μ. (譯者註3)) 這些 β 每個含有一些新項爲以前各 β 所沒有的. 命 β_μ 中一切新項組成之部分爲 γ_μ. 我們又可得一個隣接纚 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \cdots\cdots$ ($\gamma_1=\beta_1=\alpha_1$; 若 α_2 不含 α_1 中之項則 $\gamma_2=\beta_2=\alpha_2$; 若 α_2 含 α_1 中項則 γ_2 含 α_2 中他一項.) 這些 γ 各不相搭離. 所以就他們裏面各選出一項來又是一個進級纚;如 x_1 爲 γ_1 之項, x_2 爲 γ_2 中一項, x_3 爲 γ_3 中一項,等等; 則得進級纚 x_1, x_2, x_3, $\cdots\cdots$ 合起來還是 α 之一副類. 若假定相乘公理,這個選法是可能的. 故設使相乘公理眞確,我們用他兩次,就可以證明非歸納的基數是反身數. 此外還可應用綏梅羅的定理證明,因相乘公理成立,則任何類可以順列;而順列纚場中之項數不是有窮的就是反身的.

不憑藉綏梅羅的定理而用上述直接論證有一種便利就是爲證明本題無須乎相乘公理普遍的眞確,祇要當一串類數爲 $\aleph_0$ 時他能成立就行. 祇有 $\aleph_0$ 個類時相乘公理眞確,類數太多了就不眞確,也許有的事. 因爲有這個理由,所以我們可以使用相乘公理之狹義的形式. 上述論證所須要的假設是『$\aleph_0$ 個因數相乘,若其中無零,則其積必不等於零』. 還可以用別的形式表明之:『$\aleph_0$ 是一個可乘數 (Multipicable number)』, 所謂 ν 爲『可乘數』, 卽 ν 個因數相乘, 若其中無零,則其積必不等於零. 我們能彀證明凡有窮數都是可乘的,但是不能證明凡無窮數都是可乘的. 相乘公理是假設凡基數都是可乘的. 但是我們倘若祇求使非歸納數與反身數相一致,或求解決鞋襪問題,或求證第二級序數排成之任何進級纔其極限必仍爲第二級序數之一,有這個較小的假設『$\aleph_0$ 是可乘數』已足彀用.

本章所討論的這個題目,如果細心研究過去,

一定有很好的發現。 有些場合,看來似乎顯含着相乘公理,而實際研究起來却可不用相乘公理證明. 還有可注意的,相乘公理之普遍的形式或可證明其非眞. 由這一點着想,我們對於綏梅羅的定理有一個很好的希望:假如我們可以證明連續纙或更密的纙不能將其中之項順列,那末,藉綏梅羅的定理,馬上就可以推翻相乘公理. 不過現在却還沒有方法能毅產生出那種結果來,所以這個題目還是幽玄莫測.

（原註1）　參看 Principia Mathemotica, Vol. i * 88 及 Vol. iii * 257–258.

（原註2）　Mathematische Annalen, Vol. Lix. pp. 514–6. 在這種形式裏我們叫做綏梅羅的公理.

（譯者註1）　有時 κ 中各類雖互相搭雜而選班數仍與擒法數相同. 例如,若 κ 中僅 α 與 β

有惟一之公共項x，則x代表α時之選班與x代表β時之選班不同。推而廣之，凡若干類僅僅蟬聯地搭雜，如α與β共有x，β與γ共有y，則選班數與掄法數常同；然若若干類循迴地搭雜，例如α與β共有x，β與γ共有y，γ與α共有x，則選班數視掄法數常少。註此以顯明掄法與選班之區別。

（譯者註2.）將$\aleph_0$項類用任何方法排列所得順列繼之序數稱爲第二級序數，卽第九章所謂將一進級纔稀疏之所得任何序數也。（參觀第十章（譯者註1.））

（譯者註3.）原文爲『ν大於μ』，恐是錯誤。蓋若$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots \alpha_n$各副類各含有新項，明明$\alpha_\nu=\beta_\mu$之公式，卽$\nu=\mu$之公式，自1至n皆可通用。$\nu>\mu$之公式，必在$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

……這副類纔中某不含新項之副類以後始能用;假如絕無不含新項之副類,則此公式竟永無適用之機會。

第十三章

無窮公理及邏輯的範疇

無窮公理是一個假設,可以述之如下:——

『若 n 爲任一歸納基數,最少必有一含 n 個體之類存在.』

假定這個公理眞,結果含 n 項個體的類便不但有一個並且有許多,宇宙間個體總數便不是一個歸納數. 因爲設 n 爲任一歸納的基數,則 n+1 亦爲一歸納的基數,根據這個公理,最少有一含 n+1 項的類,結果含 n 項個體的類就不祇一個并且 n 不是個體的總數. 因爲 n 是任意一歸納數,所以(倘若無窮公理眞)個體總數必定大於任何歸納的基數,而是非歸納的基數. 前章我們說過,基數『可以』既不是歸納的也不是反身的,倘若我們不假定相乘公理,縱使假定無窮公理,也不能斷定宇宙間最少有 $\aleph_0$ 個個體.(換言之,個體總數縱是非歸納的,但未必便是反身的.)

但是我們却能斷定『類之類』最少也有 $\aleph_0$ 個,因為每一歸納基數是個類之類,根據無窮公理我們知道這些歸納的基數組成功一個進級纔,項數為 $\aleph_0$. 無窮公理的需要是怎樣,我們可以說明如下:—— 裴阿諾第三根本問題說無兩歸納的基數同一繼數者,換言之設 m 與 n 為歸納的基數,若不是 $m=n$,決不至 $m+1=n+1$. 第八章中我們也曾提到一個與裴阿諾這假定實在相同的假定,即『設 n 為歸納的基數,n 必與 $n+1$ 不同』. 有人或者以為這命題可以證明.『若 α 為歸納類且 n 為 α 之項數,則 n 不等於 $n+1$,』這個命題誠然可以證明. 這命題用歸納法很易證明,並且有人會以為他暗含着前一命題 (即 $n \neq n+1$). 但其實並不會含着,因為像 α 那種的類也許並不存在.這命題實在隱含的不過是:『若 n 為一歸納的基數(有條件的)並且宇宙間最少有一類其項數為 n,則 n 不等於 $n+1$.』無窮公理使我們確認(姑無論其真不真)『有許多類其項數為 n』,並且

使我們能以由此斷定n不等於n+1. 倘若沒有無窮公理,那末,n與n+1同是空團便是可能的事了.

這個可能可以舉例說明如下:——

假定宇宙間恰有九個體,也不多也不少.(究竟什麼是個體,請讀者且耐煩稍待.)0至9這十個數確是我們心目中的歸納基數,10(其界說是9+1)却是一個空團. 讀者想還記得,n+1也可這樣界說:n+1是一團的類,團中每類去一項x後項數爲n. 將此界說用在上面假定的場合上,9+1既是個沒有類的類,自然就是空團了. 同理9+2也是空團. 推而廣之,祇要n是歸納的基數不是0,9+n就是空團. 所以從9起以後各歸納的基數都是空團,彼此全等. 如其如此,歸納數便不能成一進級纚,不同的兩基數之繼數也未必不同,因爲9與10的繼數同是空團(10本身也是空團). 要想免除算術上這種不幸的現象非用無窮公理不可.

倘若我們祇從事研究有窮整數算術,不提到什麼無窮整數,無窮類,有窮整數纚,或分數纚,縱使沒有無窮公理,也可以得出一切美滿的結果來. 換句話說,我們能研究有窮整數或分數之加法乘法及乘方法,但是無從研究無窮整數或無盡數之加乘等法. 這樣一來,所有超窮數及實數之理論都等於無用了. 請說明其所以然於後:

假設宇宙之個體數為 n, 個體之類數(卽組合數)自然是 2^n. 這是應用第八章的普遍命題,一類之項數若為 n, 則副類數為 2^n. 2^n 是常大於 n 的. 所以宇宙間類之數常大於個體之數. 倘若宇宙間個體如上面所設其數為 9, 則個體之類數為 2^9 卽 512. 我們的數若只用以計算個體,那末,我們的算術就止於 9 了;若用以計算個體之類,要到 512 才完:第一個成空團的數乃是 513. 若進一步求類之類,總數為 2^{512}, 這個數有 153 位,一行寫不下,範圍更擴大了. 若更進一

步求類之類之類,總數爲 2 之 2^{512} 方,約爲 3×10^{152} 位之數,在近日缺紙的時代眞可不必把他寫出.倘若還不以爲足,依法前進,大數正不可限量.隨便指定一個歸納的基數,在這邏輯的階級(類之數,類之類之數等等)裏面經過若干階級以後,必然可以使該數不是空團. (原註1)(如設有m大於 2^{99} 而小於 2^{999}, 則m視爲類之團,或類之類之團,或類之類之類之團,都是空團,但視爲類之類之類之類之團却不是空團.)

再看分數,也有同樣的情形. 若 μ/ν 這分數我們求他有所希望的性質,那末,必須有夠我們計算的東西做我們的保障,使空團不會遽然發生來做障礙. 但這種保障不必定要假定無窮公理,只在前面說的那邏輯的階級上經過充分的階級就行. 計算個體不成功,就計算類,再不成功就計算類之類,類之類之類,等等.無論宇宙間個體數如何之少,按級而上,其數定能大於任意一歸納的基數 μ. 縱使宇宙間沒有個體,這

個說法還是對的,因為個體之類有一個(即空類),類之類有兩個(一為空類,一為類之類其中惟一的項是個體之空類),類之類之類有四個,次一級便有十六個,再次65536個,餘類推. 照這樣看起來,求任一有定歸納的基數或分數並不必需無窮公理這類的假設.

但是我們如果要研究全類或全纜歸納的基數或分數,無窮公理就非用不可. 我們需要全類歸納數為的是解決$\aleph_0$的存在,需要歸納數全纜為的是解決進級纜的存在: 要想達這些目的,必須歸納數全體能夠做成一個類或纜其中沒有成空的歸納基數. 我們需要全體分數按大小排列之纜為的是要用他的『段』界說實數: 假如他不是密接纜,這個界說就不能得圓滿的結果;如果我們所討論的分數個數有窮,他自然不是密接纜.

有人定然以為—— 著者早年也曾作如是想—— 採用像我們所論的那種構造法,無窮公理

必可證明. 怎麼說呢?假令宇宙間個體數為 n (縱或 n 為 0 於論證亦無妨礙),所有個體,類,類之類,等等,全都加合起來貫為一串,這串的項數自然是

$$n+2^n+2^{2^n}+\cdots\cdots$$ 以至無窮

這就是 $\aleph_0$ 了. 所以如果將各種的東西都薈集起來,不必拘拘於一種範疇,自然就會得着無窮類,並且無窮公理等於無用. 這種說法誠然難免.

在批評這種論證以前,我們可以注意的是其中有一些幻術的論調:教我們想到幻術家從帽子變出東西來. 觀者拿帽子給幻術家時自信帽內無兔,回頭帽內出來一個小兔,遂大為失驚. 讀者如果對於『實在』有穩健的見識知道無中不會生有,對於上面的構造法雖不明其黑幕所在,最少也覺得從有窮數個體中生出無窮集合來是不可能的事. 這種奇幻的感覺,同別的感情一樣,不宜過於注意去論他,他容易引人入於歧

途. 不過激起這種感覺的論斷,我們若要去細細考察,這種感覺的確可做考察上最初的根據. 依著者看,上面那個論斷,一經考察,必然發見謬誤,不過這謬誤不容易追尋,並且我們也不容易常常免掉.

以上論斷中所含的謬點可以叫做『範疇混亂』. 要想詳細說明『範疇,』(Types) 非另著專書不可;并且本書爲初學便利計,那些艱深的近於空辨的部分必須免去. 所要論的,只是那些與算學上既經論定的眞理相合的東西. 範疇的理論並不屬於算理哲學完美的確定的部分:其大部分纔在萌芽中,沒有十分明瞭完備. 但是範疇的理論應取如何精確的形式,雖尙無定論,至於這理論的必要,是無疑的;在無窮公理上這種理論之必要更是顯而易見.

範疇說的必要從『最大基數之矛盾』就可以看出來. 第八章曾經講過,一數中之副類數常大於其原類之項數,所以我們斷定沒有最大的基

數. 若如以上構造法所論,將凡有的個體,類,類之類,等等,不分皂白的混合起來,結果所成的類其副類都是該類的分子. 凡有想得到數得着的東西,不論那一種,如果可以混爲一類,這類的基數就可以說是最大基數了. 既然一切副類皆是分子.那末,副類之數便不能多於項數了.所以生出一種矛盾.

當 1901 年著者想到這個矛盾時,想設法去發現鏗托兒『無最大基數』說(見第八章)的闕點. 將這證法用在『凡有想得着的東西』組成之類上,却生出一個新的較單純的矛盾:——

我們剛才所說的那個博大的類既然包羅萬有,必須將他自己也做一項包括在內. 換言之,如果有『包羅萬有的類』,這個『包羅萬有的類』也是萬有之一,也就是『包羅萬有的類』之一分子.但是依正理講,一類決不會是自己的一個分子.譬如人類不是一人,獸類不是一獸.現在將凡『自己不是自己的分子』的類合爲一組. 這組又是

一類: 他究竟是不是他自己的一分子? 倘若他是自己的分子,那就是一個『自己不是自己的分子』的類了. 倘若他不是自己的分子,那他就不是一個『自己不是自己的分子』的類了. 這兩個設想——是或不是自己的分子——都各自相矛盾. 這又是一個矛盾.

這種矛盾無限的多,隨便可以製造. 這種矛盾問題的解決方法須藉範疇的理論, Principia Mathematica (原註 2) 中有詳備的論述,著者另有短論載在 American Journal of Mathematics (原註 3) 及 Revue de Metaphysique et de Morale (原註 4) 兩雜誌中. 現在摘其大綱就彀了.

其謬誤之點在其所組成者乃我們所可叫做『不純』的類,即範疇上不純的類. 後章還要另論,類乃邏輯的構象,平常一句話形式上似即關乎一類的,其實非改爲另一句話其中絕不含該類之字樣不能有絲毫的意義. 由是平常似實而虛的類之名稱其意義所在遂有一定的限制:—

句話或一組符號其中這種虛造的名稱之運用方法有不正當之處.該句話或該組符號未嘗不眞,不過嚴格說起來却毫無意義. 懸想一類是否爲其自己之一分子,其懸想是無意義的,也正是這樣. 概言之,凡懸想此個體之類是否爲他個體之類之分子,所懸想的皆是毫無意義;將不屬同一邏輯階級的原素以符號構爲一類,則所使用之符號便不復有所表徵.

設或宇宙間個體數爲 n,類數爲 2^n,我們不能夠將全體個體與全體類混合起來成爲一類包含 $n+2^n$ 項,所以要想不用無窮公理到此終歸失敗. 我並不以爲範疇的理論已經闡明,我只以爲範疇論的需要上面已述其大概. 我之目的是在藉此說明用那種幻術家的方法——構造法——不能證明無窮數或無窮類的存在. 但此外也還有別的證法不可不加以論述.

證明無窮類的存在有種種的方法, Principles of Mathematics 中(§339, p. 357)引論很多. 這些論

證法都假定『若 n 爲歸納基數,則 n 不等於 $n+1$』,這層我們上面已經論過. 有一種論證是根據柏拉圖的 Parmenides 當中一部分學說發生出來的:倘若有數 1,那末 1 就有他的『有』(Being) 了;1 與『有』原不是一事,所以 1 與『有』便是 2 了,2 與 1 又成 3 了,諸如此類. 他實在是詭辨,『有』原不是有一定意義的名詞,况且卽使我們替他定出意義來了,也許『數』無所謂『有』——數是邏輯的構像,第十七章論類之界說時再講.

還有一種論證,說從 0 至 n 共有基數 $n+1$ 個,這種論證完全憑藉『從 0 至 n 沒有一數與其繼數相同』這假設;我們以前論過,倘若無窮公理不眞,這種假設未必常眞. 讀者應當知道 $n=n+1$ 這個方程式,當 n 超過宇宙間個體總數時就是眞的,當 n 表示反身數時也是眞的,但是兩種用法卻有大大的分別. 當 n 爲反身數時,$n=n+1$ 不過表示含 n 項的類與此類中一切項及類外一項組成之 $n+1$ 項類相似. 當 n 超過宇宙間個

體數時,n 在實在世界是太大了,$n=n+1$ 不過表示實在世界沒有含 n 項的類,也沒有含 $n+1$ 項的類罷了;他並不是表示:如果我們在範疇的階級上上昇到夠高的範疇,有夠多的基數,(個體數不足 n,類數許足 n,類數不足類之類許足……)我們定然可以找着一個 n 項類與一個 $n+1$ 項類相似;因爲倘若 n 是歸納的數,無論無窮公理是眞是假,n 項類決不會與 $n+1$ 項類相似.

此外還有一種論證,巴散拿 Balzano (原註5) 和迪得鏗(原註6) (Dedekind) 都曾用以證明反身類的存在.玆述其概略如下:——

一事物和這事物的觀念(Idea)是不同的,一事物必有一觀念(至少在實在世界是如此). 事物與觀念的關係是一對一的,一切觀念不過是一切事物之一部分(因每一觀念自身是一事物). 所以『某事物之觀念』這個關係可以將全體事物反射於一部分事物(觀念). 所以事物類與觀念類都是無窮的. 這個論證很有意思,不但是本

身值得研究,他的謬誤(或者說著者認為謬誤)也是一種復有研究價值的謬誤. 其主要的錯誤就在假定有一事物必有一觀念. 實在說起來,究竟什麼是『觀念』之確定的意義,這是很難知道的. 現在姑且假定知道. 試從蘇格拉底着手,有蘇氏就有蘇氏之觀念,復有蘇氏之觀念之觀念,由此以往,無有限止. 這些觀念未見得都經驗地存在於人心之中. 到第三級第四級而後,簡直是玄渺不可思議. 倘若這種論證不錯,其中所謂觀念除非是柏拉圖的觀念,天上容或有之,人世間未見得存在. 那末,這種觀念究竟有沒有不能令人無疑. 如我們必定知道他們有,那必須有邏輯理論的根據證明一事物恰有一觀念. 但這種結果我們從經驗上實不能得着,縱然有了,也不能像迪德鏗應用之於 "Meine Gedankenwelt" —— 我的思想世界.

如果我們認眞細究事物與觀念中間的關係,將要牽動一些心理的及邏輯的問題,與本書主

要的目的無關. 但有幾層無妨略示. 『觀念』如其必按邏輯的意義講,就可以與事物一致,或是事物的摹述(摹述的意義如後章). 由前之說,觀念與事物既然一致,那藉觀念與事物不同而證明反身數存在的論證便失敗了. 由後之說,觀念既是事物的摹述,同一事物有各種不同的摹述,——例如蘇格拉底摹述爲『柏拉圖之師』,或『長壽的哲學家』,或『Xantippe 之夫』,均無不可——事物與觀念的關係不是一對一的,那個論證也失敗了. 再說,假定觀念是心理的,心理的觀念更無一定,沒有一個固定的實體可以說是某事物的唯一觀念: 心理的觀念多因時因人而不同,(信仰及心理態度尤多如此)我的蘇格拉底的觀念與你的不同,我現在的蘇格拉底的觀念與過去的不同,並且沒有什麼中心的實體,(除非蘇格拉底自己)可以薈萃這些『蘇格拉底的觀念』. 那麼,觀念比之事物竟太多了,其間沒有一對一的關係如何能叫他們相似呢?況且宇宙間

事物我們對於他有觀念的(無論『觀念』這字的意義怎樣推廣)照心理講只占一小部分.(不是有一事物便有一觀念)　因爲這些理由,上面那種論證,辯護反身類之邏輯的存在的,終當在排斥之列.

或者有人這樣想:姑無論邏輯的論證如何,由時間,空間,色差 (Diversity of Colours) ,等等得來的經驗的論證足以證明無窮個體之實際的存在.著者却不敢相信.　因爲除了武斷而外沒有理由可以使我們相信空間時間等之無限伸張不是算學的玄想而是物理的事實.　我們認空間時間是連續的,最少也認他們是密接的;但是仍不失爲武斷.　近今物理學有所謂 Quanta 學說姑無論是眞是假,的確表明了物理學雖不能斷定連續性的不可證明,却實在不能供給連續性的證明.　人類感官精密的程度實不足以分別『連續的運動』(Continuous motion) 或『頻仍繼進的運動』(Rapid discrete seccession),看電影的自會明白

這句話. 設使有一世界一切的運動都是連續的,另一世界一切運動都是一纔極小的有窮的衝撞,二者定難從經驗去區別. 要圓滿闡明這些大題目,須占很多的篇幅;現在不過提到使讀者注意罷了. 假如這種學說是對的,那末,固然沒有經驗的理由可以相信個體數無窮,也決不能有這種理由;並且現在也沒有經驗的理由可以相信數之有窮,雖然就理論說將來或有一日發見證據縱不確定數之有窮却很有對着數之有窮的傾向.

『無窮』不是自相矛盾的,也不能邏輯地證明的,所以我們的結論說,宇宙間個體之數是有窮抑或是無窮我們不能用先天的(自因推果的)方法知道. 這個結論,如果採用來本之的說法,可以說,有些可能的世界是有窮的,有些是無窮的,至於我們這個實在的世界究竟屬於前者抑屬於後者却沒有方法來判斷. 無窮公理在一些可能的世界是眞,在別一些可能的世界是僞;他在

我們這個世界究竟是眞是僞我們却說不了.

『個體』(Particular 或 Individual)的字樣充滿了本章,從沒有解釋過. 在本書範圍以內要想不細講範疇的理論而將這字解釋得十分圓滿誠然是不可能,但是爲減少糊塗朦混起見也可以約略提一提.

在平常的話語裏面表示品德或關係的云謂字(Verbs)與表示品德或關係之主體的實字(Substantives)很容易分辨. 『凱撒生存』是寫凱撒的品德;『布熱達斯殺凱撒』是表示布熱達斯與凱撒的關係. 『主詞』(Subject)一語若用爲廣義,布熱達斯與凱撒都可稱爲該命題中之主詞:文法上視布熱達斯爲主詞,凱撒爲賓詞,邏輯上是不關緊要的,因爲原句若改做『凱撒見殺於布熱達斯』所表的關係相同,凱撒却移到主詞的地位了. 所以最簡單的命題不過是寫一或多主詞的品德或表示二或多主詞間之關係. (關係不限於二項,如『A 將 B 給 C』就是一個三項關係.) 有時候

表面上的主詞,實際上不是主詞還可分析;但這分析的結果也不過將新主詞替代舊主詞罷了.有時候按文法講起來云謂字也可以取主詞的位置:如『殺是布熱達斯與凱撒間的關係』但是這種地方文法往往引起誤會,所以按照哲學的文法直率了當句語中,布熱達斯及凱撒還是看做主詞,殺還是看做動詞.

那末,在命題中祗居主詞地位而永不居云謂地位的詞(Term)大略的觀念我們有了.這種觀念屬於經典學派所謂實質(Substance)的一部分;不過實質觀念中有所謂永存性(Persistence through time)却與我們的觀念無關.我們以後界說『專用名詞』爲凡在命題中祗居主詞(廣義的)地位的詞.凡可以專用名詞名之的東西我們叫做『個體』(Particular或Individual).「直接界說個體是比先界說個體的記號(即名字)好些;但是要直接界說非深考形而上學不可,此處實有所不必.」此處所謂個體也許還可以經無底的分析:表面上

是個體也許一經考察其實是個體之類,類之類,或其他複雜的東西.誠然如此,無窮公理就眞了.縱或不然,理論上一定可以分而又分終究達到最後的主體,所謂『個體』的意義就在這些最後的主體上.無窮公理所關之個體正是這些個體.無窮公理對於這些個體倘若眞,那末對於他們的類,類之類諸階級亦無不眞;反之,若對於他們假,那末對於這些階級之亦無不假.所以在個體上論無窮公理,比之在別的範疇的階級上論無窮公理,要自然些.但是這公理究竟是眞是假,現在好像還沒有已知的方法去發現他.

(原註 1)關於歸納基數的參考 Principia Mathematica, vol. ii * 120 以後.關於比率的參考同書 Vol. iii * 303 以後.

(原註 2)第一册緒論第二章 * 12 及 20;第二册小引.

(原註 3)以範疇論爲據之算理哲學, Vol. XXX, 1908, pp. 222–262.

(原註 4)"Les paradoxes de la logique," 1906, pp. 627–650.

(原註 5) Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, 13.

(原註 6) Dedkind, Was sind und was sollen die Zahlen? No. 66. (英文譯本有 W. W. Beman 所譯 Dedekind's Essays on the Theory of Numbers, 查 p. 64; 中文譯本有傅種孫所譯數之性質及其意義,查北京高師數理雜誌第四期 (1920), p. 30.——譯者註)

第十四章

不兩立性及演繹法理論

算學之哲學所有無須精細考察類之觀念之部分,我們都已匆匆的加以探討了. 直到前章屢次遇着與類之觀念有關的問題,纔見得關於類之考察工夫萬不可少. 在着手於這種工夫以前,須先研究算學之哲學之另外幾部分(以前不曾研究的)以爲預備. 若在綜合的論述裏,這幾部分較之我們以前所已研究的尤爲根本,本應首先討論. 在研究類之理論以前有三個題目應當研究:

(1)演繹法理論,(2)命題從元,(3)摹述法. 摹述法,在類之理論中並非邏輯的必要的預備,不過從事於類之研究必須有一種理論,摹述的確是這種理論的一個較單純的好例. 本章所研究的是第一題目演繹法理論.

算學是一門演繹的科學: 根據一些前提,應

用嚴密的演繹方法,而得許多定理以造成算學.

以前算學未臻完善,算學的演繹往往大欠嚴密;但十分的嚴密大概也是不可到達的一種理想. 然雖如此,算學的證法假如有欠嚴正之處,這證法究竟不算完善;若說『常識認其結果正確,』這句話也不足以辨護,因為我們如果倚賴常識,那末,就將論證完全廢除好了,何必去拿詭辯做常識的後盾呢?所以在算學裏面,前提規定之後,除了精確的演繹法之外,不應當需用常識,直覺,或任何的補助.

以前康德看見他同時的幾何學者不能無所憑依而證明他們的定理,必須借助於圖,因而發為一種關於算學推理的學說,按照這種學說,算學的推理絕不得嚴密的合乎邏輯,常須倚賴所謂『直覺』的幫助. 近世算學之全體的傾向,以及其日趨於嚴密,正與這種康德說相反. 在康德那時候,所謂算學不能證明的東西,就是不可知的——如平行公理. 凡算學上藉算學方法可

知的東西,都是能够由純粹邏輯推論的東西.至於其他屬於人類知識的須用別的方法去考察——用經驗,由感覺,或由別種的經驗法,決不得用由因及果的方法(A priori.) 欲知這種議論積極的根據可參考 Principia Mathematica 各章,關於辨駁的材料可參考 Principles of Mathematics. 本書求簡約求速成,不能像該二書詳細陳述.現在姑先假定全部算學都是演繹的,然後進考演繹法之內容.

凡演繹法,都是先有一個或多個命題,叫做前提 (Premisses), 從此推出一個命題來, 叫做斷案 (Conclusion). 為立論便利起見,遇着所根據的前提不止一個,也無妨想法拼成一個命題,以後說前提,斷案,都是各指一個而言. 所以我們可以看演繹是由某一命題(前提)的知識推到另一某命題(斷案)的知識之方法. 倘若這方法正確,即若前提與斷案之間有一種關係,藉此我們可以確信只要前提眞則斷案必眞,我們就可叫他做

邏輯的演繹法;否則不可濫用這種名稱. 邏輯的演繹論上最重要的東西就是這種前提與斷案間的關係.

凡想正確的推論一命題的眞實必須知道另一命題的眞實,並且二命題間有一種關係叫做『包含』,即前提包含斷案.(包含關係,即刻就要界說.) 或者兩命題中間有一種關係,叫做『選立』(Disjunction),由這個的假可以推斷那個眞. 又或有時我們的目的不在推論某命題的眞而在求其假;那末,假使他與另一命題之間有『不兩立』(Incompatibility)之關係,就可由彼命題之眞去推斷此命題之假,也有時候此命題之假須從彼命題之假推知,正如從彼命題之眞推此命題之眞似的;當 q (原註 1) 包含 p 可由 p 之假推知 q 之假. 凡此四者都是推測. 當我們着意在推測的時候,四者之中似乎要算『包含』是最基本的關係,因爲如果我們可以由 p 之眞(Truth)推測 q 之眞則 p 與 q 之間必有的關係就是這種. 但因

種種學術上的理由,這還不能選做最根本的觀念. 要知道那是根本的觀念,那是根本的界說,請先看上述各關係所暗表的各種『命題之從元』(Functions of propositions).

這種命題之從元中最簡單的是『否定式』(Negation) 或『不 p』. 這是 p 的從元,當 p 眞他就假, p 假他就眞. 爲便利起見命題之眞或假都叫做該命題之『眞僞價』(Truth-value), (原註 2) 眞命題之『眞僞價』爲眞,假命題之『眞僞價』爲假. 『不 p』與 p 其眞僞價正相反對.

次爲選立式(Disjunction)『p 或 q』. 這是 p 及 q 之從元,當 p 或 q 有一眞時其眞僞價爲眞,當 p 與 q 皆假時其眞僞價始爲假.

又次爲聯立式(Conjunction)『p 且 q』 這也是 p 及 q 之從元,當 p 與 q 皆眞時其眞僞價爲眞,當 p 或 q 有一假時其眞僞價即假.

又次爲不兩立式(Incompatibility)『p 及 q 不皆眞』. 這個從元是聯立式之否定式即『不「p 且 q」』; 又

是否定式之選立式,卽『不 p 或不 q』. 當 p 或 q 有一假時其眞僞價爲眞,當 p 及 q 皆眞時其眞僞價爲假.

又次爲包含式(Implication),『p 包含 q』,卽『若 p,則 q』. 這裏所謂包含是廣義的,若 p 爲眞卽可藉以推測 q 之眞. 所以更解釋一下,可以說:『p 若不假,則 q 眞』,或『p 假, q 眞二者必居其一』. (此外固然還有別的解釋,但爲我們研究便利起見,有此已足.) 故『p 包含 q』其意就是『不 p,或 q』: 若 p 假,則其眞僞價爲眞;若 q 眞,則其眞僞價亦眞;若 p 眞而 q 假,則其眞僞價爲假.

以上命題之從元共計五種(譯者註1): 否定式,選立式,聯立式,不兩立式,包含式,此外不難另加別種,例如『不 p 且不 q』(此稱爲聯否定式,與聯立式之否定式不同,)但有以上五種已儘夠用. 否定式與其餘從元不同地方,就是否定式是一命題的從元,而其餘四者是二命題的從元. 至於藉其主元(命題)之眞僞價以定眞假,五者却都是

一樣的. p, 或 p 及 q 之眞僞價知道了(需一個用一個,需兩個用兩個),我們就可以推測否定,選立,聯立,不兩立,包含,各從元之眞僞.凡命題之從元有以上這種性質的謂之『眞僞從元』(Truth-founcetion).

『眞僞從元』爲眞爲假之條件一經述出,則其意義已盡,無可再言. 例如『不 p』純是 p 的從元, p 眞則假, p 假則眞: 此外別無可加之意義. 『p 或 q』及其餘各從元亦然. 所以設有兩眞僞從元,無論主元所取之值爲何,其眞僞價常常相同,則這兩從元便是一致沒有分別. 例如『不 p 或不 q』之否定式與『p 且 q』是一致的,『p 且 q』之否定式與『不 p 或不 q』是一致的;所以彼此可以否定式互相界說. 眞僞從元,除了在某條件下眞某條件下假以外,沒有別的意思.

上述五眞僞從元不是獨立不相依賴的. 任舉一個都可用餘者去界說. 就是將五個減爲兩個也不大難; Principia Mathematica 中用的是否

定式及選立式兩種.準此,則『包含式』可以『不p,或q』界說之;『不兩立式』可以『不p或不q』界說之,『聯立式』可以『不兩立式之否定』界說之. 歇浮 Sheffer (原註3) 更進一步,證明可以僅用一根本觀念以誘導五者;尼谷 Nicod (原註4) 幷且說出是吾人可將演繹法理論所需之一切的根本命題都變做兩個『非形式的』(Non-formal)及一個『形式的』(Formal)原理. 爲達這個目的起見,可以『不兩立式』或『聯否定式』(譯者註2) (Joint falsehood) 爲不可界說的觀念;現在我們用前者.

現在我們的根本觀念就是一個眞僞從元叫做『不兩立式』,以 p/q 表示之. 一命題之否定式可以界說爲自己與自己之不兩立式,換句話說『不 p』即『p/p』. 選立式爲不p與不q之不兩立式,即 (p/p)/(q/q). 包含式是 p 與『非 q』之不兩立式,即 p/(q/q). 聯立式爲不兩立式之否定式,可以 (p/q)/(p/q) 表示之. 照這樣其餘四命題都用不兩立式界說了.

眞僞從元之製造原無限制,多引入些主元,或將主元頻頻重複,眞僞從元之數就可增多. 我們所要研究的是本題與推測法之關聯,於此不必深究.

若我們知道 p 是眞且 p 包含 q,我們就可以從而斷言 q. 但推測上常不可免有心理的事實存在: 推測是一種方法我們用此可以得着新知識,推測時所憑藉而分眞假之關係不是心理的;但是從斷言 p 遂到斷言 q 其間實際的經過却是心理的,不能用純粹地邏輯的名詞去表示.

在算學上,我們每逢推測,必定先有了某命題式其中涵有許多變命題,如 p 及 q,憑藉他的形式我們知道當 p 及 q 取任何值時這式是眞的,此外還另有一式是前式的一部分我們也知道當 p 及 q 取任何值,這式是眞的;由是應用推測原理,我們能丟去原式的這部分去斷言所餘的部分. 這種抽象的話舉幾個例就可清楚.

演繹法之五形式的原理，Principia Mathematica所舉的，我們現在假定爲已知.（尼谷 M. Nicod 曾將五個變做一個，但因這一個是個很複雜的命題所以我們起首還是用五個.）五命題如下：——

(1)『p 或 p』包含 p —— 即，若 p 眞或 p 眞，則 p 眞.

(2) q 包含『p 或 q』—— 即，當 p 及 q 有一眞時則選立式『p 或 q』眞.

(3)『p 或 q』包含『q 或 p』. 倘若有很完善的記法，這層直可不要，因爲我們對於選立式的概念本沒有次序的觀念夾雜其間. 但是現今用的記號總免不掉次序的形式，所以需用一個相當的假設來表明次序可以顚倒.

(4) 若 p 與『q 或 r』有一眞，則 q 與『p 或 r』必有一眞.（這個顚倒置換的方法很能增加演繹的力量.）

(5) 若 q 包含 r，則『p 或 q』包含『p 或 r』.

以上是 Principia Mathematica 中用的五個形式演繹的原理. 每個都有雙料的用處，我們引這

五命題的意思就在顯明這種用處. 一種用處是用做推測的前提,一種是用來決定前提包含斷案的事實. 當我們從事推測,是先知道了一命題 p,又知道一命題『p 包含 q』,從而推測 q. 現在我們研究的是演繹原理,我們的五根本命題是一工具,這工具既需能生出 p 還需能生出『p 包含 q』. 換言之,演繹法之原理不僅當他們做法則,用來決定『p 包含 q』,並且還當他們做實質的前提,做推測式之 p. 譬如我們要證明『設 p 包含 q,則若 q 包含 r 則 p 包含 r.』 這是一個三命題的關係,三命題都是包含式. 命

$$p_1=p \text{ 包含 } q,\ p_2=q \text{ 包含 } r,\ p_3=p \text{ 包含 } r.$$

我們所要證明的是 p_1 包含『p_2 包含 p_3.』今取第五原理,而以不 p 代其 p,更據界說知『不 p 或 q』與『p 包含 q』同. 故第五原理變爲:

『若 q 包含 r,則「p 包含 q」包含「p 包含 r」.』,即『p_2 包含「p_1 包含 p_3」』. 命此爲命題 A.

又若以不 p 及不 q 代第四原理之 p 及 q,依

包含之界說,第四原理變爲:

『若 p 包含「q 包含 r」,則 q 包含「p 包含 r」』. 以 p_2 代 p, p_1 代 q, p_3 代 r, 此命題變爲

『若 p_2 包含「p_1 包含 p_3」,則 p_1 包含『p_2 包含 p_3」』. 命此爲命題 B.

我們已經用第五原理證明了『p_2 包含「p_1 包含 p_3」』, 這命題我們叫做 A. 所以我們得了一個推測式其中 A 就是推測式之 p, B 就是『p 包含 q』. 由此推測到 q, 即

『p_1 包含「p_2 包含 p_3」』,

爲我們所求證的命題. 在這個證法裏面,我們將第五原理略加變通而得 A,做爲實質的前提; 將第四原理略加變通而得 B,用來供給推測式之形式. 前提之實質的及形式的兩種應用在演繹法理論裏原是互相纏結的,我們知道他們理論上有分別,實際上不把他們分開,也並不要緊.

昔時由前提得新結果的方法,很像上面所述

的演繹法,但是以前那方法並不配稱爲演繹法.

凡根本命題(不管是什麼)本是用來斷言其中變命題p,q,r任取何值該命題無不眞的.所以其中的變命題,例如p,我們可任代以一個其值常爲命題的式,例如『不p』,『s包含t』,等.這種代替法所獲得的結果不過是原命題的一些特例,但從實用的觀點看來却算是新的命題 這種代替法之合理需用一種非形式的推測原理來保障.(原註5)

尼谷將五根本原理變成的一個形式的原理,現在可以講了.未講此原理,先須說明一些眞僞從元怎樣用不兩立式去定界說.我們已經知道

p/(q/q)的意思就是『p包含q』.

現在由p/q表示p與q不兩立可見

p/(q/r)的意思就是『p包含q及r』.

因爲這式的意思就是『p與「q與r不兩立」不兩立』,即『p包含「q與r之非不兩立」』,即『p包含「q且

r』,——因為q與r之聯立式是他們的不兩立式之否定式. 又由$p/(q/q)$表示『p包含q』可見

$t/(t/t)$的意思就是『t包含他自己』.

設以$\overline{p}$表示p之否定式;則$\overline{p/s}$表示p/s之否定式,即表示p與s之聯立式. 由是

$$(s/q)\ /\ \overline{p/s}$$

表示s/q與『p及s之聯立式』不兩立;換言之,若p及s皆眞,則s/q假,即s及q皆眞;簡言之,p與s之聯立式包含q與s之聯立式.

今命 $P=p/(q/r)$,

$$\pi=t/(t/t),$$

$$Q=(s/q)/\overline{p/s}.$$

尼谷之唯一的形式的原理可以表示之如下

$$P/(\pi/Q)$$

即謂P包含π及Q.

尼谷除用這個形式的原理之外,還用了一個屬於範疇理論範圍之非形式的原理(與本章無關),和一個與『已知p,又知p包含q,我們可以推

知q』對應之原理. 以記號表示之如下:

『若p/(p/q)眞,且p眞,則q眞.』

有了這個工具,一切的演繹法之理論,除掉那些與『命題從元』之存在或其普遍的眞確有關的都可推出. 命題從元俟下章再論.

對於命題間之關係——推測式藉以確立的——有些著作家鬧不清楚(假定我的話是不錯). 實在講起來,從p推測q要想不謬,祇要命題p眞且命題『不p,或q』眞就够了. 無論什麼時候,有這兩層情形,顯然q一定是眞的. 但是推測之眞正發生必須『不p或q』是用別的方法知道,不是藉知道不p或知道q而知道. 倘若p假,『不p或q』當然眞,但於我們的推測絕然無用,因爲我們的推測需要p眞. 倘若我們預先知道q眞,『不p或q』之眞固然也知道,但於我們的推測也無用,因爲q之眞既然預先知道,就用不着推測了. 所以惟有當『不p或q』可以知道,但不是藉對於組成此選立式之兩命題(不p及q)之

知識而知道,推測的事纔眞正發生;否則推測就等於無用. 故推測之發生有一定的條件,p與q間形式之關係就存在這條件中. 譬如我們知道若q包含s之否定式,則s包含r之否定式. 介乎『r包含「不s」』及『s包含「不r」』之間有一形式的關係足使我們知道前者包含後者,雖然我們並未預先知道前者假或後者眞. 包含之關係在推測上能有實際的用處,所需的條件就是這種.

但是我們需要這個形式的關係不過是用以知道前提假斷案眞二者必居其一. 推測之正確所需要的是『不p或q』之眞;此外所須要的僅僅是求推測之『實際的有效』. 陸易C. I. Lewis (原註6) 教授曾特別研究狹義的形式的關係,我們可以叫他那關係做『形式的可演繹性』(Formal deducibility). 他以爲那個廣義的關係,用『不p或q』表示的,不宜叫做『包含式』. 這還是字的問題,用的字若前後一致,我們怎樣界說他們並無大關

係．我所持的理論與陸易所持的理論實際不同之點是：他主張，當一命題q『形式地可由p演繹出來』的時候，我們所發見p與q間之關係可以叫做『嚴切的包含式』(Strict implication)，這與『不p，或q』所表示的關係不同，其意義較狹，祇當p與q間有某些形式的關聯時這關係才會發生．我主張，姑無論有沒有如他所說的那種關係，縱使有，算學可以不要他，所以爲省事起見，不應當收納這種關係到基本的觀念裏去；且無論何時兩命題有所謂『形式的可以演繹』之關係存在，那種場合我們必定可以見到第一命題假或第二命題眞，此外並沒有別的什麼東西必須收納到前提裏去；還有一層陸易教授所持以反對我所辨護的理論之詳細理由都不難詳細答覆，並且那些理由都不知不覺暗暗假定着一種論點，那論點是我所不取的．所以我最後結論，說無論何種不能做眞僞從元表示的包含式無採用做根本觀念之必要．

(原註 1)以後用p,q,r,s,t,等字母表『變命題』(Variable proposition).

(原註 2)這名詞是弗雷格首先用的。

(原註 3)Trans. Am. Math. Soc., Vol. xiv. pp. 481–488.

(原註 4)Proc. Camb. Phil. Soc., Vol. xix., i., January 1917,

(原註 5)這原理Principia Mathematica及尼谷論文中皆未載。似係闕漏。

(原註 6)參看Mind, Vol. xxi., 1912, pp. 522–531, 及Vol xxiii., 1914, pp. 240–247.

(譯者註 1.) 五眞僞從元各有記號以表之。今將羅素先生在北京大學講演所用記號錄之於下。

(Principia Mathematica所用記號亦與此相同。)

p之否定式: $\bar{p}=p/p$.

p與q之不兩立式: $p/q=p/q$.

p與q之選立式: $p\cup q=(p/p)/(q/q)$.

p與q之聯立式: $p.q=(p/q)/p/q)$.

p包含q: $p\supset q=p/(q/q)$.

「p ∪ q」稱爲p與q之邏輯的和,「p.q」稱爲p與q之邏輯的積。包含之符號⊃,是意大利數學家Peano創立的,用他非常之便利。

(譯者註 2.) p與q之聯否定式,卽「不p且不q」,試以「p Ū p」表之,則五眞僞從元可以界說之如下:

$\bar{p}=p\bar{\cup}p$;

$p.q=(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}(q\bar{\cup}q)$;

$p\cup q=(p\bar{\cup}q)\bar{\cup}(p\bar{\cup}q)$;

$p/q=[(p\bar{\cup}q)\bar{\cup}(q\bar{\cup}q)]\bar{\cup}[(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}(q\bar{\cup}q)]$;

$p\supset q=[(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}q]\bar{\cup}[(p\bar{\cup}p)\bar{\cup}q]$.

第十五章
命題從元

前章討論命題時我們不曾替『命題』(Proposition)這字求一界說。這字固然不能夠嚴密地界說,但關於他的意義也要稍爲說說,以免一種很普通的混淆弊病,將『命題』與『命題從元』(Propositional Founction)相混,而本章的論題就是『命題從元』。

我們用『命題』這字原意是指表示事物之眞假的一組文字而言。我說『原意』因爲我不願意『命題』除不光是些語言的符號或光是有符號的性質的思想以外,還有別的限制。我以爲『命題』這字第一層限制應當在一種狹義的符號,第二層限制應當在足以表示眞僞的符號。譬如『二加二爲四』及『二加二爲五』都是命題,『蘇格拉底是人』及『蘇格拉底不是人』也都是命題。『不論a及b是什麼數,$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$』這句話是命題;但是光光一個公式『$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$』却不是命

題，因爲我們若不說明或設想 a 及 b 可以是任何數值或是某某等數值，那公式並不會陳述什麼，確定的話也就無所謂眞假。前者(例如 a，b 是任何數值)在算學的公式裏通常是默認的，所以算學公式便是命題；但若沒有這種假設，那就是命題從元了。命題從元其實就是一個語句，其中含有一個或多個未決定的成分，倘若給這些成分以一定的值，這語句就變成命題。換言之，命題從元是一種從元其值爲命題。後一界說用時須要謹愼。摹述從元，如『某氏算學書中最難之命題』，其值雖然也是一命題，但這從元不是命題從元。這種從元的值是摹述一個命題：而命題從元之值是實在陳述一個命題。

要找命題從元之例很容易，譬如『x 是人』就是一命題從元；當 x 沒有決定的時候這話也不眞也不假，一指定了 x 的值，這話就成爲眞的命題或假的命題了。算學方程式都是命題從元。當其中變數還沒有定值時，方程式祇是一句待

決的話,未決的決了以後纔有眞假可言. 僅含一變數之方程,當變數取該方程式之根以爲値時,爲眞命題,否則爲假命題;恆等式無論其變數所取之値是甚麼總是眞命題. 表示平面曲綫或空間曲面之方程式爲命題從元,當變數取該綫或面上之點之坐標以爲値時,爲眞命題,否則爲假命題. 普通邏輯書中如『凡A是B』的語式也是命題從元: 要知此語眞假,A及B還得先決定是什麽類.

『場合』或『實例』這種觀念,皆須用命題從元來解釋. 譬如所謂『推廣』其所示的一種方法試拿『閃電之後雷聲繼之』這種粗淺的例來說. 這話有許多實例,就是許多像『這是一個閃電,其後雷聲繼之』這樣的命題. 這些事實是什麽的實例呢? 就是命題從元『若x是閃電,x之後雷聲繼之』的實例. 這種推廣方法(其適當與否我們姑而可以不管)就是由命題從元『若x爲閃電,x之後雷聲繼之』之若干實例之眞確因而推及其普遍的

眞確。同樣我們可以知道凡說『實例』或『場合』,其中卽牽含著命題從元。

我們不須問,也不須求答,下一問題『命題從元是什麼?』.命題從元自己原沒有什麼預定的意義,不過是『意義』的一種格式,好像儲藏處,收容所,要拿東西塡入才發生意義.我們必須研究命題從元的方面,大畧有二:第一,牽涉於『在一切場合眞』及『在某些場合眞』兩觀念者;第二,牽涉於類及關係之理論者。第二方面待下章論之,現在就第一方面討論。

我們如果說某事某物『常眞』或『在一切場合皆眞』,那末所謂『某事某物』明明不是命題了.一命題眞就是眞假就是假,此外沒有活動的餘地。譬如『蘇格拉底是人』及『拿破崙死在聖黑冷哪』並無所謂場合或實例.這都是命題,如果說他們『在一切場合皆眞』那種話簡直沒有意義.所以『在一切場合皆眞』這仂語祇有在命題從元用得着.譬如當我們討論因果的時候,往往說

『在一切場合,A之後B繼之』.（我們現在所研究的不是話之眞僞乃是話之邏輯的分析)倘若A是有實例的,那末A一定是若干不相同的個體x_1, x_2, x_3, 等等之一般的概念,我們對於他們可以說『x_1是A』,『x_2是A』,『x_3是A』,等.前面所舉的例正與此相合.我們說『閃電(A)之後雷聲(B)繼之』.這裏各個的閃光是個體,不相同的,但是有一公同的性質,他們都是『閃電』.所以一般地表示共同性質之惟一方法是說:若干事物之公共性質是一個命題從元,當主元以該事物爲值時該命題從元之值是眞命題.所有這些事物都是該命題從元之眞的實例——因爲一個命題從元,本身雖不能是眞也不能是假,却必在某些實例是眞或在某些實例是假,倘若他不是常眞或不是常假.我們說『在任何實例,A之後B繼之』的時候,我們的意思是『不拘x是什麼,祇要x是A,x之後B繼之』;換言之,我們是斷言某命題從元『常眞』.

語句裏面含有『凡』,『一切』,『任何』,『一』,『這一個』,『某些』,『一些』等字樣的皆須用命題從元來解釋.

命題從元以何因緣而與尋常這種句語有關,試以上面那些字裏的『一切』(或『凡』)及『一些』來說明.

分析到最後的時候,我們對於命題從元祇有兩種語式須待研究: 一種是說,該命題從元在一切場合眞;一種是說,該命題從元在一些場合眞(這裏用的一些,不限定是多數). 命題從元一切旁的用法都可以化爲以上兩種形式. 我們如果說某命題『在一切場合』眞,或『常常』眞(常常與一切場合,以後互用不分常常不必指時候言),意思就是說該命題之一切値都眞. 設『ϕx』爲從元,a 爲可做 ϕx 的主元之事物,那末,不論我們怎麼挑選 a,『ϕa』是眞的. 譬如『若 a 是人,a 是有死的』這個命題不論 a 是人不是人常常是眞的;實在講起來凡取這種形式的命題無一不眞. 所以命題從元『若 x 是人,x 是有死的』是

『在一切場合』眞或『常常』眞. 又如『沒有獨角獸』這句話與『命題從元「x不是獨角獸」在一切場合眞』一樣. 前章關於命題的語句,如『「p或q」包含「q或p」』,也就是陳述某某命題從元常常眞的話. 因爲這原理所說的,不是指這個特殊的p或q,也不是指那個特殊的p或q,是指任何『關於這原理「有意義」(Significant)』的p或q. 所謂『一從元對於某主元必有意義』這種條件與『這從元以該主元爲主元時必有一値,或眞或假』完全一樣. 研究『有意義』(Significance)之條件屬於範疇理論之範圍,範疇理論前章畧畧講了一點,不深究了.

不但演繹法之原理,卽邏輯之一切基本命題無不是『某某命題從元常常眞確』這類的陳述. 設或不然,那末,所謂基本的命題僅僅是對於特殊事物或概念——蘇格拉底,紅,東,西,等——說法,不是爲一般的事物或概念說法,這豈是邏輯的職務?邏輯學之界說之一部分(不是界說之全

體,明明說他的命題都是十分普遍的,就是說其中的命題都是陳述『某某不含定項(定項即不變項)之命題從元常常眞確』. 不含定項之命題從元待最後一章再論. 現在進論關於命題從元之又一方面,即『某命題從元有時候眞或至少有一實例眞』這種陳述.

我們說『有人』,意思就是說命題從元『x是人』有時候眞. 又如說『有些人是希臘人』,意思就是說命題從元『x是人且是希臘人』有時候眞. 又如說『食人之人還存在於非洲』,意思就是命題從元『x是食人之人,現在非洲』有時候眞. 又如說『宇宙間最少有n個個體』就猶如說命題從元『α是個體之類且是基數n之一原素』有時候眞,或也可說,這命題從元當α取某某値時是眞.

這種語法很是便利,因爲我們有時必須知道是什麼變的成分我們取爲本命題從元之主元. 例如上舉之命題從元若簡寫爲『α爲n個體之類』則α與n兩個變的成分,不知何者爲主元,

無窮公理,用命題從元之語法表之就是:『命題從元「若n為一歸納的基數,則所謂α為n個個體之類云云對於α之某些值為眞」對n一切可能之值為眞』. 這裏面含有一個小從元『α為n個個體之類』,這小從元對於α,有時候眞;大從元,『若n為歸納數則該小從元必有時為眞』對於n,常常為眞.

『命題從元 φx 常常眞』是『「不 φx 」有時候眞』之否定式,『 φx 有時候眞』又是『「不 φx 」常常眞』之否定式. 譬如『凡人是有死的』這句話就是『命題從元「 x 是不死的人」有時候眞』之否定式. 又如『有獨角獸』這句話是『命題從元「x不是獨角獸」常常眞』之否定式. (原註1). 倘若『不 φx 』常常眞,我們就可以說 φx『常常假』或『無時眞』. 所以我們可以就『常常』及『有時』二者之中選定一個做根本的觀念,而用其否定式做其餘一個的界說. 譬如我們倘若用『有時』做根本的觀念,那末,『 φx 常

常眞』就可以『「不 ϕx 有時眞」是假的』界說之(原註2). 但是就範疇理論上的理由看來,似乎應當將『常常』及『有時』兩者都用做根本觀念而用以界說含着他們的命題之否定式. 換言之,x所屬的範疇之命題之否定式,我們假定預先界說了(或是採用爲根本觀念了),我們就界說: 『常常 ϕx)是『有時「不 $\phi(x)$ 」』之否定,『有時 ϕx 』是『常常「不 ϕx 」』之否定. 應用關於『不含「似變項」(Apparent Variable)的命題之界說及根本觀念,所有關於『含似變項的命題之選立式及其他眞僞從元也可以同樣界說. 不含似變項的命題叫做『初等命題』(Elementary Proposition). 用這種方法,拾級而上,所有應用於含一,二,三,…n(有窮個)變項的命題之眞僞從元之理論一樣可以探究.

尋常形式的邏輯所採用最單純的命題形式其實並非最單純,都是關於某複合的命題從元之一切値或一些値之陳述. 試先就『凡S是P』

來說. 今以命題從元 ϕx 定S,命題從元 ψx 定P,其定之之法可以例明之. 設S是人,ϕx 就是『x是人』;設P是有死,ψx 就是『有一個時候x死』. 『凡S是P』意思就是說: 『「ϕx 包含 ψx」是常常眞』. 一定要注意的是: 『凡S是P』不是僅僅爲那些眞是S的說法,就是對於那些非S的也可一樣的說. 譬如我們有了一個x,不知道他是S還是非S,『凡S是P』這句話還仍然對我們陳述一點關於x的事實: 若x是S則x是P. 這種事實x是S時固然眞卽在x非S的時候也一樣是眞. 倘若不然,那反證法(Reductio ada bsurdum)就等於無用了;因爲反證論法的要旨只在將包含式用在假的前提上(隨後纔轉過去). 我們還可以用別的方法來說明. 要理解『凡S是P』這個語式,並無須能以枚舉一切是S的項;祇要知道『是S』及『是P』的意義,縱使對於是S及是P的實例知道很少,我們仍然能完全理解『凡S是P』的意義. 由這樣

看來,可見不但實在是S的項纔與『凡S是P』這句話有關,一切『說他是S,卽發生意義』的項都與這句話有關,換言之,一切是S及一切不是S的項或一切同此特殊邏輯範疇的項都與該句話有關。以上是論關於『一切』的話,同論也可用在關於『一些』的話上。如『有人』的意思就是『x是人』這話對於x之某些値爲眞.這話裏面,x之一切值(卽能使『x是人』一語發生意義的——不論是眞是假——一切值)都有關係,不但是那些實在是人的項.(這種話的僞怎樣證法?我們就此着想,則需x一切值的緣故自然明白.)所以任何含有『一切』或『一些』字樣的語式(卽命題從元)不但牽涉着一切『能使從元眞』之主元,并且牽涉着一切『能使從元發生意義』之主元(卽兼含使從元眞與使從元假兩者)。

現在可進一步,將尋常形式邏輯之通用的幾個語式加以解釋。設S爲能使ϕx眞之一切項,P爲能使ψx眞之一切項。(所謂類其實就是

這樣從命題從元誘導出來的概念,看後章就明白.) 各語式之解釋如下:——

『一切S是P』意爲『「ϕx 包含 ψx」常常眞』.

『一些S是P』意爲『「ϕx 且 ψx」有時眞』.

『沒有S是P』意爲『「ϕx 包含不 ψx」常常眞』.

『一些S是非P』意爲『「ϕx 且不 ψx」有時眞』.

這裏所謂有時眞或常常眞的命題從元顯然不是 ϕx 及 ψx 本身,而是 ϕx 及 ψx 之眞僞從元,其主元 x 是同一的. 要明白這種事,須不從一般的形式 ϕx 及 ψx 着手,而從特殊的形式 ϕa 及 ψa —— a 是常項 —— 着手. 譬如我們要考究一切『人是有死的』,先從

『蘇格拉底是人,則蘇格拉底是有死的』

着手,然後有蘇格拉底的地方都做爲拿 x 代了,結果就是『若 x 是人,則 x 是有死的』. 我們的目的是在表明 x 雖是變項,沒有固定的值,但是 ϕx 與 ψx 之值當我們說『ϕx 包含 ψx』時,必須相同. 所以我們與其從 ϕx 及 ψx 兩個分立的命

題從元着手,倒不如從以『ϕa 包含 ψa』爲值之從元着手格外穩妥;因爲倘若從 ϕx 及 ψx 兩個分立的從元着手,x 既然是不定的,就難保他的值準是相同了.

爲簡便起見,以後用『ϕx 常常包含 ψx』代替『「ϕx 包含 ψx」常常眞』. 像『ϕx 常常包含 ψx』這樣的命題稱爲『形式的包含式』(Formal implication);含有許多變項的命題,像這種形式的,也一樣的稱呼他.

由以上的界說,可見尋常邏輯所用爲起點的命題,如『凡 S 是 P』離最單純的形式還遠着呢.

尋常邏輯把『凡 S 是 P』與『x 是 P』看做同形式的命題去研究,卽此可見其分析工夫的缺乏——例如,『凡人是有死的』與『蘇格拉底是有死的』尋常的邏輯都看做同樣的命題. 在我們看來,前者屬於『ϕx 常常包含 ψx』一種,後者屬於『ψx』一種,相差太遠了. 以上二種形式的分別,由裴阿諾和弗雷格兩人辨明,乃是符號的

邏輯上一個要緊的進步.

『一切S是P』與『沒有S是P』,除以『不 ψx 』代替 ψx 之外,形式上直沒有什麼分別. 『一些S是P』與『一些S是非P』也是這樣. 以前說過,『一切S是P』這個命題的原義並不包括S的存在,換言之,『一切S是P』並不必定要有眞是S的東西,從這方面着眼(這是學術上唯一可取的見解),尋常所用的逆證法則,如『一切S是P,故一些P是S』,就難免有謬點了. 由上面界說結果,倘若 ϕx 常常是假的(卽若沒有S),則『一切S是P』與『沒有S是P』兩者皆眞,不拘P是什麼. 因爲根據前章的界說,『 ϕx 包含 ψx 』的意思就是『非 ϕx, 或 ψx 』,當『非 ϕx 』眞時上命題常常眞. 讀者初看到這裏一定想說法另外定一個界說,但實際稍爲經驗就知道任何別的界說都不便於應用,倒反將主要的觀念淹沒了.

『 ϕx 常常包含 ψx, 且 ϕx 有時眞』這個命題旣很複雜,且用他做『一切S是P』的界說非常棘手,

因爲那麼一來『ϕx 常常包含 ψx』就沒有話去表示，我們用『ϕx 常常包含 ψx』的時候又比用『一切S是P』的時候多的多。從我們的界說，『一切S是P』並不包含『一些S是P』，因爲在前者S可不存在，在後者S非存在不可，所以像『一切S是P，做一些P是S』這樣的逆證法不合理，並且有些推測式，例如『一切M是S，一切M是P，所以一些S是P』（這種推測式，當M不存在時就發生錯誤），也靠不住了。

『存在』(Existence)這個觀念有好幾種的形式，其中一形式待下章再講；但是最基本的形式是由『有時眞』這觀念直接誘導出來的，現在可以講講。設有一命題從元 ϕx，一主元 a，倘若 ϕa 眞我們就說『a 合該從元 ϕx』；這『合』(Satisfy)字的意義與平常說的一方程式之根『能合』該方程式是一樣的。今設 ϕx 有時眞，我們就可以說『能使 ϕx 眞確』的 x 是有的，或是說『合 ϕx 之主元存在』。這就是存在的基本意義。至於別種意

義不是由這個誘導出來的,便是牽強附會的思想。『人存在』這話本來是很對的,其原意是『x是人』有時眞。倘若由此演一個冒牌的推測式:『人存在,蘇格拉底是人,所以蘇格拉底存在』,那就是信口亂說了,因爲『蘇格拉底』是一個定主元,不像『人』僅僅是一個命題從元的未定主元。這種推測式的誤謬同下面的誤謬是一樣的:『人繁多,蘇格拉底是人,所以蘇格拉底繁多』。後者的誤謬很容易看出,前者關於『存在』的却不甚明顯,其原因後章還要詳論。現在要注意的是,『人存在』這話雖然很確實,若用以推論能合此從元之特殊的主元之存在却是不確實,或者簡直說是絕無意義。總而言之,『能合 ϕx 的項存在』意思就是『ϕx 有時眞』,而『a存在』(a是能合 ϕx 的一項)這句話說起來儘管有聲,寫出來儘管有形,却是缺乏意義。這種頂簡單的誤謬倘若記得眞,古代哲學關於『存在』的意義之許多難題也就不難迎刃而解了。

此外,哲學不曾將命題和命題從元分別清楚因而陷於淆亂不可收拾之地位的就是**必然** (necessary) **可能** (Possible 或 Contingent 或 Assertoric) **不可能** (Impossible) 這些關於『語氣』(Modality) 的觀念。在尋常的眼光看來,眞命題之中有的是必然的,其餘都僅僅是容或有之或姑斷言之的;假命題之中有些是不可能的(卽其矛盾點是必然的),其餘不過是偶爾不眞的。其實『必然』這觀念對於『眞確』並沒有什麼明顯的補益。就命題從元而論,共分三層,很爲明顯。設『ϕx』爲一命題從元之未定值,若此命題從元常常眞,ϕx 是**必然的**;若從元有時眞,ϕx 是**可能的**;若從元無時眞,ϕx 是**不可能的**。這種情形當研究『或然率』(Probability) 時是常常遇着的。譬如,袋內有若干球,從中取出一球 x 來:若袋裏的球全是白的,『x 是白的』是必然的;若球中有些是白的,『x 是白的』是可能的;若球無一白的,『x 是白的』是不可能的。當這時候,我們對於 x 的知

識,不過就是x能合命題從元『x是袋中的球』罷了。這種情形在或然率問題裏最普通,在實際生活上也不罕見——譬如有人來訪,除了他帶來我們某友人之介紹書以外我們對於他絕不知道什麽;那末,我們要想對於這位知道一點什麽,就得就某友人之友僚之全體着想了。凡在這種場合,就一般語氣而論,命題從元是最合用不過的。從各方面講,要想我們的思想清晰,最要是養成習慣,能嚴格地區別命題與命題從元;早前哲學界於此未嘗致力,實已貽了哲學之羞。

(原註1) 推演的方法見 Principia Mathematica vol. i. *9。

(原註2) 文字上求免單數與多數兩種語意,往往與其說『ϕx有時』或『ϕx是有時眞』不如說『ϕx不常假』較爲便利

第十六章
摹述

前章我們詳細討論了『一切』(all)及『一些』(some)兩仂語;本章研究『這』(the)字的單數,下章再研究『這』字的多數. 為一『這』字費兩章去討論似乎太過了,但是這字對於哲學的數學家非常之重要:著者好像勃郎甯(Browning)詩裏面的文法家研究接尾字δε一樣,很想此字之義得以闡明,就是『腰股以下都如槁木』也所不顧,何況僅做獄中囚呢.

前章我們曾提到『摹述從元』(Descriptive function),就是『這一個「x之父」』『這一個「x之正弦」』,這類的詞語. 要界說摹述從元先得界說『摹述』(Decription).

『摹述』就是『如此如此』,『如彼如彼』,『某某』(以後用最後一種代表)這類的仂語. 如『文王之父』,『文王之子』,『當今英王』,『史記之作者』,『45°之正弦』都是摹述一個(定的或不定的)個體. 摹述可分

『專指』與『泛指』兩種. 像『這一個某某』(the so-and-so)這樣的仂語叫做『**專指的摹述**』或『**確定的摹述**』(Definite description),像『一個某某』(a so-and-so)這樣的仂語叫做『**泛指的摹述**』或『**不確定的摹述**』(Ambiguous or indefinite description). (就中國文法表面上看,『文王之父』與『文王之子』似乎沒有分別;其實,『文王之父』衹有一個,沒有第二個,是專指的;『文王之子』不止一個,是泛指的. 為分別專指與泛指起見,不得不用『這一個』或『一個』加在『某某』前;——例如:『這一個「文王之父」』,『一個「文王之子」』,『這一個「當今英王」』,『這一個「史記作者」』,『這一個「45° 之正弦」』,——將這種冠詞加上去,雖嫌不雅潔,為保持邏輯的分析精神實不得不如此.) 現在先就泛指的摹述講.

『你遇着誰?』『我遇着一個人.』這是很不確定的摹述. 我說『我遇着一人』,究竟說的是什麼?現在暫且假定我的話是眞的,并且我實在遇着杜威. 但是我說的並不是『我遇着杜威』,這是很明

白的. 我可以說『我遇着一人,却不是杜威』;單憑這話,我雖然是撒謊,我的話語並沒有矛盾的地方,除非我口裏說『我遇着一人』心裏的眞意是『我遇着杜威』,那才矛盾呢. 聽我這話的人,即使不聞杜威的名,一定可以明白我的話怎講.

我們還可以進一步說:『我遇着一人』,不但這人不是杜威,簡直話裏並沒有什麼實在的人. 這層道理,倘若我的話是假的,便顯而易見,因爲我所說的話不眞,那麼,不但杜威不能做話中之人,無論誰也不能做話中之人. 縱使世界上絕無人類,『我遇着一人』這話眞雖不能够眞,表意(Significant)却還是表意的. 祇要知道什麼是『獨角獸』,什麼是『海蛇』,或是知道這些東西的界說,『我遇着一獨角獸』及『我遇着一海蛇』也確切是表意的話. 所以像這類命題所含的只有所謂概念. 就『獨角獸』而論,世界上只有他的概念:此外並沒有什麼冥渺難測的,『不實在的』(Unreal)東西可以叫做『一獨角獸』. 『我遇着一獨角獸』這

話(雖然是假的)實在是表意的話,所以正當分析起來,他雖然含有『獨角獸』這個概念,却不曾含『一獨角獸』當做成分.

這裏所引起的『不實在』(Unreality)的問題,很爲重要. 大多數的邏輯家,研究這問題的,都爲文法所誤走入歧途了. 他們以爲拿文法的形式做標準很靠得住,其實不然,他們也不知道文法形式上甚麼區別是重要. 『我遇着杜威』與『我遇着一人』文法看做是一樣的形式,邏輯家也就因襲着看做是一樣的形式,其實二者形式正不相同:前者指定了一個實在的人,杜威;後者是含了一個命題從元,明白表示出來,就是說『命題從元「我遇着 x 且 x 是人」有時眞』. (我們用『有時』照慣例一次就可,不必多次,請閱者留心)這個命題顯然與『我遇着 x』形式不同,由此可以明白雖沒有東西可以叫做『一獨角獸』,而命題『我遇着一獨角獸』能够存在,是甚麼緣故了.

許多邏輯家,因爲缺乏命題從元這個利器,逼

不得已而認定『有不實在的東西』. 譬如依梅囊(Meinong)(原註1)的主張,我們說話可以說到『金山』,『圓方』,等;以這些名詞爲主詞可以造出許多眞的命題;所以他們一定另有一種邏輯的『實在』,不然,以他們爲主詞的命題那就無意義了. 這種學說,在我看起來,是由缺乏『實在』的知覺而起,這種知覺雖在極抽象的研究,也應當保持着的. 我主張,邏輯也同動物學一樣不能承認有什麼『獨角獸』;因爲邏輯所研究的雖然較之動物學抽象些,普遍些,而其爲實在世界之學正與動物學一樣. 說獨角獸在紋章學上,或文學上,或想像上,有他的存在,實在是很可憐可笑的遁辭. 存在於紋章學上的獨角獸並不是肉與血做成的,並不是能自身動作呼吸的. 所存在的只是一個畫圖或一段文字的摹述. 又如,主張罕雷特Hamlet存在於他自己的世界——即莎氏想像之世界——猶如拿破崙存在於實在世界一樣眞確,這種主張不是有意惑人之言,便是不可思

議的糊塗話. 其實世界原祇有一個,就是『實在』世界: 莎氏的想像是實在世界之一部分,他描寫罕雷特時所有的思想是實在的. 就是讀這戲劇的人的思想也是實在的. 惟有作者及讀者之思想及感情等是實在的,此外沒有什麼客觀的罕雷特可以加進去: 這正是小說的要旨,否則便不成其為小說了. 就拿破崙而論,倘若你腦筋裏面縈繞着作史者及讀史者因拿破崙而生之一切思想,感情,等等,你還沒觸覺着眞拿破崙;就罕雷特而論,你却祇能與那些思想接觸,此外沒有可以接觸的了. 倘若沒人想到罕雷特,就無所謂罕雷特;但是若沒有人想到拿破崙,拿破崙却自己曾想到拿破崙. 對於『實在』的見解於研究邏輯非常重要,固執罕雷特有別種實在的人可謂對於思想加以危害. 我們對於含有『獨角獸』,『金山』,『圓方』等妄想的東西之命題,要想精密分析,必須對於『實在』有穩健的見解.

人類本有『實在』的知覺,為順從此種知覺,我們

主張命題之分析不許有『不實在的』(Unreal)東西加入. 但是,假如沒有『不實在的』東西,那末,我們就可以問,從何而有『不實在的』東西加入呢?我們的答案是: 我們從事於命題之研究,原是從記號着手,命題中有非表意的記號羣,倘若我們貿然認爲表意,那就是認他們代表所摹述的東西,便陷於加入不實在的東西之誤謬了. 譬如『我遇着一獨角獸』其中七字成一個表意的命題,『獨角獸』三字自己也是表意的,猶如『人』字似的. 但是『一獨角獸』四字卻不是自能表意的字羣. 倘若我們拿意義加到這四字上去,那我們便要爲『一獨角獸』四字所窘,難以解決『無獨角獸的世界上怎麼會有獨角獸?』這問題了. 『一獨角獸』是一個泛指摹述,不曾摹述着東西;不是摹述『不實在的』東西之泛指摹述. 所謂『實在』『不實在』是形容摹述的字樣,所摹述的東西無所謂『不實在』,果然摹述着東西了,那被摹述的東西就是實在的,摹述本身也就是實在的了. 換言之,『x是不實在

的』這樣的命題祇是當x代表專指或泛指摹述時是表意的;且祇當x代表『不曾摹述着東西的摹述』時他才是眞. 不論『x』這摹述摹述着東西也好,不曾摹述着東西也好,總而言之他不是含有x的命題之成分;譬如『一獨角獸』不算是『我遇着一獨角獸』這命題中自能表意的字羣. 因爲若『x』是一摹述,則『x是不實在的』或『x不存在』這種命題常常表意,不但常常表意并且還有時候爲眞.

現在我們可以定含有泛指摹述之命題之意義了. 設如我們要說『一某某』如何如何,『某某』代表有性質ϕ的個體,即當命題從元ϕx眞時之x. (例如以『一人』爲『一某某』之實例,則『x是人』就是ϕx之實例.) 設如我們想陳述『一某某』有性質ψ,換言之,要陳述『一某某』有一種性質那性質是當ψx眞時x所有的. (譬如想陳述『我遇着一人』,相當的ψx就是『我遇着x』.) 『一某某有性質ψ』這命題與ψx(=『x有性質ψ』)這命題形式不同. 假如

是相同的,那末,『一個某某』就定要與一個適當的 x 一致了,這雖然有時如此(在某種意義之下),但是像『一獨角獸』這種場合却一定不行. 因爲『一某某有性質 ψ』與 ψx 形式不同,所以『一某某』在一種清晰可界說的意義上,可以『不實在』界說如下:——

『一個「有性質 ϕ 的東西」有性質 ψ,』這話的意思是:『ϕx 及 ψx 之聯立式不常假.

就邏輯的眼光看,上述界說與『一些 ϕ 是 ψ』這命題是一樣的;但依修辭的眼光看,却有不同處,因爲一個是單數,一個是多數. 然而這並不是重要之點. 重要之點是: 命題在文字上是說『一某某』的,眞正分析起來,並不含該仂語所表示之物爲成分. 這種命題當沒有『一某某』這樣東西的時候仍然能有意義,其理由也就在此.

『存在』(Existence) 之界說,應用於泛指摹述的,由前章之末所論可以推出. 若命題從元『x 是人』有時眞,我們就可以說『人存在』,或說『一人存在』;

同理,若命題從元『x是一某某』有時眞,我們就可以說『一某某存在』. 命題『蘇格拉底是人』等價(Equivalent)於『蘇格拉底是一人』自然無疑;但不是很相同的命題. 『蘇格拉底是人』的『是』是表示主詞與賓詞之關係的;『蘇格拉底是一人』的『是』是表示『一致』的. 用一個『是』字表示兩種全然不同的觀念,實在是人類的遺憾——這種遺憾記號的邏輯當然可免. 『蘇格拉底是一人』是表示所名的東西(此處認定『蘇格拉底』是名字,這種認定是有限制的,以後再講)與所摹述的東西之一致. 若這種的命題,即『x是一某某』(此『x』是專名)這樣的命題,最少有一個眞,那泛指摹述的東西就存在. 泛指摹述的特性(與專指摹述相反的)就在這類的眞命題可以有許多,——蘇格拉底是一人,柏拉圖是一人,等等. 『一人存在』之眞可以由蘇格拉底,柏拉圖,或任何他人推得. 至於專指摹述,對應的命題『x是這一個某某』(這裏的『x』是專名)最多祇有一次眞,即能使此命題眞之x之

値不多於一個. 由此我們可以進論到專指摹述,其界說方法多與泛指摹述相似,不過更加繁雜罷了.

現在論到本章的主題,『這』(單數)字的界說了.以上論『一個某某』時有一重要之點也可以應用於『這一個某某』.我們須得尋求的是含有仂語『這一個某某』的命題之界說,不是光光這仂語自身的界說.就『一個某某』而論,這是顯而易見的:無論何人不能認定『一個某某』是確定的東西,可以就其本身去定界說.蘇格拉底是一人,亞里士多德是一人,柏拉圖是一人,但是我們不能說『一人』之意義與蘇格拉底相同又與亞里士多德相同又與柏拉圖相同,因為這三個專名的意義彼此原不相同.雖然如此,倘若將世界上的人一個一個都數盡了,那末,我們就沒的說了,我們就不能再說『呀,這是一人,不但如此,并且就是這「一人」,是一個純粹的實體,是一個不確定的人,不與任何個人一致』.其實世界上的東西,

祇要有的,明明是確定的: 倘若是一人,就是一個特定的人,不會是別人. 所以世界上找不到與特定的人不同的『一人』這麼一個實體. 由是可見我們不能界說『一人』本身,祇能界說含有『一人』的命題.

就『這一個某某』而論,上面的道理也是對的,不過乍看起來不大明顯. 我們要證明這道理,可先考究專名(Name)與專指摹述(Definite description)之區別. 拿『司馬遷是這一個作史記者』命題做例. 這裏有一個專名,『司馬遷』,一個專指摹述,『這一個作史記者』,代表同一個人. 專名與其他各種記號之區別可以闡明之如下:——

一專名是一單純的記號,祇能當主詞用,換言之,就是第十三章所界說的『個體』一類的東西.『單純』記號不含獨立能成記號的部分.(縱然外表看來似乎有獨立能成記號的部分,但原記號之意義與這些部分的意義無關). 譬如『司馬遷』就不能分爲幾部分使各部分仍成爲記號(司,馬,

遷,三字外表看來似乎是有意義的記號,但『司馬遷』這記號的意義不是由他們的意義合成功的)

反之,『這一個作史記者』就不是單純的記號,是由許多記號(即,『這一個』,『史記』,『作者』)拼合成功的記號,那些分記號原有一定的意義,『這一個作史記者』的意義就是由這些意義湊合而成的.

有時候外表看來好像是『個體』,而實在可再加以分析,我們不得不暫視之爲個體,這種個體叫做『相對的個體』(Relative individual),這種名詞可以通篇用之不加分析,且只做主詞用不做別用. 在這種地方我們又不得不有代表『相對的個體』的記號叫做『相對的專名』(Relative name). 我們現在的問題是求摹述之界說,至於所用的專名究竟是絕對的還是相對的,這個問題牽動範疇階級之異同,不是三言兩語可以說清的,我們無妨從略;我們祇想比較一專名及與之相當的(用於同一個體的)專指摹述(如『司馬遷』與『這一個史記作者』),並不致牽到範疇的問題. 所以我們可以

暫且假定我們所用的名都是絕對的專名;雖然我們以下所說並不依賴這假定,然有這假定文字便簡單些了.

我們要比較的兩種東西是:(1)專名,他是單純的記號,直接表示一個體,其當有惟一的意義就是這個體,不憑藉其他記號之意義;(2)專指摹述,含有幾個記號,各記號各有其原有的一定意義,摹述之一切意義都從這許多意義而生.

含有摹述的命題與將專名替代摹述而產生的命題不同,縱使專名所名的與摹述所摹述的同是一個東西,兩命題也不是完全一致的. 譬如『司馬遷是這一個作史記者』與『司馬遷是司馬遷』顯然並不一致: 前者是文人學士纔知道的,後者是婦孺皆知的. 并且,倘若不用『司馬遷』而用別的專名去替代『這一個作史記者』,得出來的命題就是假的了. 或者有人要說,我們的命題不是與『司馬遷是太史公』(此兩專名所名的是同一個人)一樣的麼?我們可以答覆之如下. 倘若

『司馬遷是太史公』實意是說『名爲「司馬遷」的人就是名爲「太史公」的人』,那末,這兩專名是當摹述用了: 換句話說,該個體不用其名名之,而用『這一個名爲某某之人』摹述之了. 專名實際的用法往往如此,並且就文字上看也往往看不出究竟是當專名用還是當摹述用. 一專名倘若祇是直接地表示我們所說的東西,那末,我們說的話是事實也與他無干,說的話是假的也與他無干: 他祇是我們用以表示思想之若干記號的一部分. 我們想表明出來的事件必須要不受所用的文字(卽記號)之束縛,(譬如說罷,要可以譯作外國文;)文字(卽記號)不過是媒介物,與我們表明的事件無關. 反而言之,倘若我們對於『這一個名爲「司馬遷」的人』有所陳述,做成命題,那『司馬遷』這專名不但是見於話語之中,並且深入於我們所說的意思之中. 所以我們如果拿『這一個名爲太史公的人』去替代『司馬遷是太史公』裏面的『太史公』,所得的新命題便不同了. 但是

祇要專名直當專名用,不拘叫『司馬遷』也好,叫『太史公』也好,與我們所說的話不生影響,猶如用英文說與用法文說同是表一樣的意思. 所以祇要專名直當專名用,『司馬遷是太史公』與『司馬遷是司馬遷』同是一個很無意味的命題. 由是『司馬遷是這一個作史記者』這命題與用任一專名替代其中之『這一個作史記者』而得之命題兩不相同,算是完全證明了.

當我們用一變項述一命題從元如 ϕx 時,(假定 ϕ 是以個體作主元的從元)想由普遍的場合而應用於特殊場合,所用的方法是以一專名替代變項 x,遂使命題從元變爲命題. 譬如設 ϕx『常眞』,命 ϕx 爲『恆同律』$x=x$. 我們任意選一專名去替代這 x,就一定得着一個眞命題. 今假定『蘇格拉底』,『柏拉圖』,『亞里士多德』都是專名(很輕率的假定),那末,本『恆同律』我們可以說蘇格拉底是蘇格拉底,柏拉圖是柏拉圖,亞里士多得是亞里士多得. 但若我們,不憑藉別的前提,孟

浪地說『這一個作史記者是這一個作史記者』,那就難免陷於誤謬了. 這是因爲上段所證,用一專名去替代一命題裏面的『這一個作史記者』所得的另是一個不同的命題. 既然如此,可見:若『x』是一專名,則不論『x』是那一專名『x=x』與『這一個作史記者是這一個作史記者』定然是不一樣的命題. 所以從『x=x』這命題的常眞,我們不能毫無疑慮的推『這一個作史記者是這一個作史記者』,實在說起來,『這一個某某是這一個某某』這種形式的命題不是常常眞的: 要想眞,必須這一個某某存在(此二字下面再說明). 像『這一個當今法蘭西國王是這一個當今法蘭西國王』及『這一個圓方形是這一個圓方形』這類的命題就不眞了. 所以常常眞的命題從元,我們將一個摹述去替代專名,若這摹述不曾摹述着什麼東西,我們所得的命題倒是假的了. 這並沒有什麼可怪異的,因爲用摹述去代專名所得的結果,依上節所論證的道理,並不是原命題從元之

值.

我們現在可以進而界說含有『這一個某某』的命題了.『這一個某某』惟一與『一個某某』不同的地方就在具有獨一性. 我們不能說『這一個「倫敦居民」』(卽謂不能說是專指的),因爲倫敦居民不是獨一無二的. 我們也不能說『這一個當今法蘭西王』,因爲當今法蘭西王是沒有的;『這一個當今英王』却可以說. 所以敍述『這一個某某』的命題,常含着敍述『一個某某』的命題,並且附帶一個條件,便是『某某只有一個.』『司馬遷是這一個作史記者這個命題,倘若史記不曾著作或作史記者不祇一人,這命題就不眞;沒有這兩條件,任何命題從元以『這一個作史記者』代替其中的x,必不能眞. 我們可以說『這一個作史記者』就是『這一個當「x作史記」眞時x之値』. 由是『這一個作史記者是漢人』這命題包括三層:

(1)『x作史記』不常常假;

(2)『若x及y作史記,則x與y一致』常常眞;

(3)『若 x 作史記,則 x 是漢人』常常眞.

這三命題可用尋常通用的語言譯之如下:

(1) 最少有一人作史記;

(2) 最多祇有一人作史記;

(3) 任何作史記的人是漢人.

這三層全爲『這一個作史記者是漢人』一命題所包含. 反之,三層合起來(祇兩層無論如何不夠)也包含了『這一個作史記者是漢人』. 所以將三層合起來可用爲命題『這一個作史記者是漢人』之界說.

以上三命題還可以稍化簡單一點. 一二兩命題拼合起來等價於:『有一項 c, 當 x 是 c 則「x 作史記」眞,當 x 不是 c 則「x 作史記」假』. 換言之:『有一項 c,「x 作史記」常常等價於「x 是 c」』. (兩命題同眞同假者稱爲等價.) 這裏第一步,是有兩個 x 的命題從元,『x 作史記』及『x 是 c』;第二步,就兩命題從元之等價(無論 x 爲何值,兩從元等價)做成一個 c 之命題從元;最後說此 c 之命題從元

『有時』眞,卽最少c有一値能使此從元眞.(至於c之値能使此命題從元眞的不能多於一,那是顯而易見的.)這兩條件倂合所得的結果恰好供給『這一個作史記者存在』之界說.

這祇是特殊的例,現在我們進而論一般的形式,定『這一個能合從元ϕx之項存在』之意義.『這一個作史記者』就是『這一個能合從元「x作史記」之項』.推而廣之,凡『這一個某某』這類仂語常暗涉着一個命題從元,某事物得爲一個某某,必有一定之性質,此性質卽由該命題從元定之.所求得界說如下:——

『這一個能合從元ϕx之項存在』

意思就是:

『有一項c,ϕx常常等價於「x是c」』.

要界說『這一個作史記者是漢人』,祇消將前述第三命題『作史記的人是漢人』加進去就行.換言之,認定我們所說的c是漢人就足夠了.故『這一個作史記者是漢人』意思就是:

『有一項 c, (1)「x 作史記」常常等價於「x 是 c」,

(2) c 是漢人』.

就一般言之:

『這一個能合 ϕx 的項能合 ψx』

意思就是:

『有一項 c, (1) ϕx 常常等價於「x 是 c」, (2) ψc 眞』.

這就是含有專指摹述的命題之界說.

關於所摹述的事項可以得許多知識,不必定要先知道所摹述的是什麽;換言之,『x 是這一個某某』(x 代表專名)這樣的命題我們雖一個也不知道,但是關於『這一個某某』之別樣的命題我們却可以知道許多. 偵探小說中,起初薈萃許多關於『這一個幹這勾當的人』之許多材料(命題),希望最後能斷定『這一個幹這勾當的人是某甲.』我們簡直可進一步講,凡能以文字——如這個(this),那個 (that),以及幾個別的字,其意義因場合而變者不在內——表示之知識中,嚴格講來,並沒有眞正的專名在裏面,所有貌似專名的項都

實在是些摹述. 譬如問『究竟老子存在不存在?』這問題祇要老子是專指摹述,問的就有意思.若老子是專名,問的就沒有意思了. 『這一個某某存在』這樣的命題,不論是眞是假,常常是有意思的,但若a是這一個某某(此a爲一專名),說『a存在』那就沒有意思了. 存在云云用於摹述——專指或泛指——纔表意,用於專名就不表意;因爲a旣是專名,必然有所名的事物:若無所名之事物自然不是專名,若把他當專名用他便是沒有意義的記號,至於摹述就不然,縱然不曾摹述着東西,也未嘗不可表意,如『這一個當今法蘭西王』僅僅表意,却沒有這麼一個人. 所以然的道理就因摹述是**複合記號**(Complex symbol),其意義是由其中各個分記號湊成的. 當我們問『老子是否存在?』時,若『老子』當簡寫的摹述用,是表意的:將『這一個作道德經者』去替代『老子』就明白了.其他形似專名而實非專名的別種用法都可照這樣論.

一摹述見於一命題之中,必須分別『初見』(Primary occurence)與『次見』(Secondary occurence),抽象的異點如下. 一摹述所居之命題若是由用該摹述替代一命題從元ϕx之x得來的,那摹述的地位算是『初見』,若用該摹述替代ϕx之x所得的命題僅是原命題之一部分,那摹述的地位就算是『次見』. 舉一個例就明白了. 就『這一個當今法蘭西王是賢者』而論,『這一個當今法蘭西王』的地位是『初見』,並且這命題是假的. 凡一命題中之摹述不曾摹述着東西且在該命題之地位是『初見』者,則該命題爲假. 但是就『這一個當今法蘭西王不是賢者』而論,解釋就活動了. 若先取命題從元『x是賢者』,用『這一個當今法蘭西王』替代x,然後將這結果加以否定,結果所得的命題是眞的,而『這一個當今法蘭西王』所處的地位是『再見』;但若先取命題從元『x不是賢者』,以『這一個當今法蘭西王』去替代『x』,則『這一個當今法蘭西王』所處的地位是『初見』,所得的命題是假的.

與摹述有關之推理,將『初見』與『次見』相混也是誤謬容易發生的一個根源,不可不注意.

摹述之見於算學者僅摹述的從元(Descriptive function)一種形式,即『這一個對於 y 有 R 關係的項』或『這一個「y 之 R」』,凡與『這一個「y 之父」』相似的仂語都是. 說『這一個「y 之父」是富人』就是說. c 之命題從元『c 是富人,且「x 生 y」常常等價於「x 是 c」』有時眞,即最少對 c 之一値是眞. 至於這命題不能對 c 之許多値是眞,那是顯而易見的. (此『生』字與『太王生王季』『王季生昌』之『生』同一意義,不許作『母生子』之『生』字解.)

摹述之理論對於邏輯及知識論兩者都有絕大的重要,本章僅僅提綱舉要地講了些大概. 本書以闡明算學爲目的,故大部分哲學的理論與此無關的概行略而不論;僅摘論與算學相關切之理論如上.

(原註 1) Undersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie, 1904.

第十七章
類

本章論『這』字的多數;『這些個「倫敦的居民」』,『這些個「富人的兒子」』,等等的話. 換句話說,我們將研究類. 我們在第二章看出基數須界說做類的類,又在第三章看出『1』須界說做一切獨項類的類即一切只有一項的類所組之類;後一說法有循環的語病,我們不用他. 『1』旣界說做一切獨項類的類,獨項類的界說裏當然不得假定我們已知『一』字之意義;他(獨項類)的界說法實和摹述上所用的界說法差不多:一類 α 謂之獨項類,若命題從元『「x 是一個 α」常等價於「x 是 c」』(這命題從元當做 c 的從元看待)不常假,換句平常的話說,就是,若有一項 c, x 是 c 則 x 是 α 之一項, x 不是 c 則 x 不是 α 之一項,有此情形, α 謂之獨項類. 假如我們已經知道類的一般意義,這就可以算是獨項類的界說了.

前此論算術時我們將『類』看做一個基本的觀

念. 但是不講旁的理由,只看第十三章所舉,我們便不能承認『類』爲基本觀念. 我們須照摹述的界說同一方針求一個類之界說,所得之界說須將一切命題其文字或記號中夾有似係代表類之文字或記號者賦與以一種意義,使該種命題經過一番正當之分析,便完全消滅一切『類』之字樣. 於是我們便可以說類之記號不過是些便利品,並不代表什麼東西名叫做『類』,並且類,其實和摹述差不多,都是邏輯的構象,或(照我們講)『不完全的記號』.

類之理論沒有摹述之理論那麼完全,並且本章所提出的類之界說我們因爲有種種的理由(其大概見後)須認爲沒到最後的滿足. 該界說欠精細之處似乎不免;然而他是近於正確並且他的方針也不會錯誤,其中的理由却甚爲充足,我們又不能不相信他.

我們第一須知道類何以不能看做是世界上『終極的物件』(Ultimate furniture)之一部. 這句話

很難精密的解釋,但是看這句話所含的一個結論,意義也可因而明白. 假使我們有一組完備的文字記號,可界說的東西都有界說,不可界說的東西都有無界說的記號做代表,那麼,這無界說的記號所代表的便是我所謂『世界上終極的物件』. 我以為無論代表一般的類之記號或代表特殊的類之記號皆不得在這無界說的記號之中. 就又一方面論,世界上一切特殊的東西(個體)皆須各有各的專名,這些專名必屬於這無界說的記號以內. 這種斷案,我們可使用着摹述去試試看能免不能免. 試以『凱撒(Cæsar)未死時最後所見之物』為例. 這是一個個體的摹述,我們可以用他做(照一種十分合理的意義)那個個體的界說. 但是該個體的名字如其是『a』,那末,(照前章所見)含『a』的命題與那以『凱撒未死時最後所見之物』代 a 所得之又一命題不是完全一致的. 若我們的文字記號裏沒有『a』這專名或是別的用為該個體之名的專名,那麼,

我們便沒有方法表示我們用『a』表示的命題以與那個用摹述表示的命題相對了. 所以摹述不足使一組完備的文字記號能以廢除個體的專名. 就這一層論,我們以爲類是與個體不同,不需拿無界說的記號做他的代表. 我們第一樁事是說出這種見解的理由.

我們已經知道類不能看做是一種個體,一層因爲拿類當個體就會生出『自己不是自己之分子』的類却又是『自己是自己之分子』的類那種矛盾來(解釋見十三章);二層因爲我們能够證明類之數大於個體之數,部分多於全體是沒有的道理.

我們不能用那純粹的外範的方法看待類,只拿他當做堆積或聚集起來的東西. 假如我們想這麼辦,我們便不能明白怎麼會有空類那種的類,空類沒有項,不能看做是堆積起來的東西;並且我們還很難明白只有一項的類怎麼會與那一項不是一件東西. 我並無意於斷定或是

否定『堆積』這種東西的存在. 我是算理的邏輯家,對於這點並沒有發表意見的必要. 我所主張的只是:假定有『堆積』這種的東西,由『堆積』的成分組成之類我們不能說他與『堆積』是一件東西.

我們若將類與命題從元視爲一致,我們的理論雖尚未臻滿足却也就很近於滿足的地步了.

第二章曾經解釋過,每一類皆是一個命題從元所定,該命題從元對該類之各項爲眞,對別的事物爲假. 但是一類可由一個命題從元來定,也一樣的可由任何別的命題從元來定,只要這別的命題從元與那一個命題從元是眞則同眞假則同假. 因爲這層理由,我們不能說這類與這命題從元一致而不與任何別的等價的從元一致——並且每設一個命題從元必常有許多別的從元與他同眞同假. 有這種情形的時候,我們說兩命題從元是形式地等價(Formally equivalent). 兩個命題同眞或同假時謂之『等價』;兩

命題從元 ϕx 與 ψx 常常等價時謂之『形式地等價』. 任設一命題從元,此外常有別的命題從元與他形式地等價,(譯者註1) 類之不能與一命題從元視爲同物,就由於這層事實;因爲我們總想兩個不同的類其分子必不全然相同,類旣是這樣的東西,那麽,兩個形式地等價的命題從元所定的類便不得不同是一個了.

我們旣然決定類旣不是與他們的分子爲同一種的東西,又不僅僅是些『堆積』或『聚集』,也不能够與命題從元完全一致,那麽,他們如不僅僅乎是些記號的搆象,他們能是什麽,便難知道了.

並且我們如果有方法將他們做記號的搆象看待,我們的地位便增加了邏輯的保障,因爲那麽一來,我們便免得『假定類之存在同時不可逼着去假定類之不存在』的必要. 我們不過避開同時做兩種假定. 這是俄考姆的快刀(Occam's razor)的一個例,俄考姆的快刀說,『實體非遇必要時不得增加之』. 然而我們不肯斷言類之存

在,却決不是武斷類之不存在,這也是必需聲明的. 我們對於『類』自安於不知罷了:同拉普拉司 Laplace 一樣,我們可以說,『我沒有要這假設的必要』"Je n'ai pas besoin de cette hypothèse".

一個記號要想拿他當做類,非合幾種條件不可,現在來舉這幾種條件. 我以爲以下所舉的條件算是必需的而且充分的了:——

(1) 每一命題從元必須定一個類,該類之分子就是這命題從元對之爲眞之一切主元. 設有一命題(或眞或假),例如說蘇格拉底的命題,我們可以懸想蘇格拉底用柏拉圖,或用亞里士多德,或用猩猩,或用月球中的人,或用宇宙間任何別的個體,去代替. 就一般言之,這些代替有的生出眞命題有的生出假命題. 所定之類就是由所有那些生出眞命題的代替者組織而成. 所謂『所有那些…………』是什麼意義,當然我們還要另外決定. 現在所講的不過是:一類可以用一命題從元定之,並且每一命題從元祇定一

相當之類.

(2)兩個形式地等價的命題從元所定的類必是同一個,(譯者註2.)兩個非形式地等價的命題從元所定的類必非同一個. 這就是說,一類定於他的分子,兩個不同的類的分子,不能完全相同. (設一類爲一從元 ϕx 所定,若 ϕa 爲眞,我們說 a 爲該類之分子).

(3)我們不但要有方法界說類,還得有方法界說類的類. 我們在第二章看出基數須界說做類的類. 尋常初等算學上的例語如『n個物體每次取m個的一切組合』就代表一個類的類,就是,從一個含n項的類所能取出的m項類之全體所組之類. 假如沒有記號的方法去處置類的類,算理邏輯便要解體了.

(4)無論在如何情形之下說一類是他自己的分子或不是他自己的分子都是無意義的(『無意義』與『假』不同)話. 這是由第十三章我們所論的一個矛盾點推出的結果.

(5)最後一條——這是頂難合的條件——關於一切由個體組成的類,或關於一切由同一任何邏輯範疇的東西所組成的類必須也能做出命題. 若這種命題爲不可能,類的用處便有許多要成迷夢了——算學歸納法便是一例. 替一定項的後裔定界說的時候我們必須能說該後裔中之項屬於原項所屬之一切遺傳類,這就非有上面所講的那種歸總的說法不可了. 這條件所以難合的理由是因爲能有某範疇的主元的命題從元我們不能說關於他們全體的話,(卽不能說:一切「主元屬於某範疇」的命題從元如何如何)並且這種不可能是我們所能證朗.

這最後一條以及他所引起的問題我們先置諸不論之列. 第一第二兩條可以合併. 兩條合起來說每有一組形式地等價的命題從元必有一個相當的類,也不多也不少;例如人類必與無羽毛的二足動物類,或理性動物類或 Yahoos 的類,或是有別種人性的類,完全相同. 我們說

『兩個形式地等價的命題從元雖然同定一類却不必完全一致』,這句話的眞實是可以證明的,只看同一敍述在這從元爲眞的在他從元可以爲假便可知道;例如『我相信一切人是有死的』這句敍述可以眞,『我相信一切理性動物是有死的』這句話却可以假,因爲我也許誤信着鳳凰是個不死的理性動物. 所以我們由此要論**關於從元之敍述**(Statements about functions) 或(更確當一點地說)**從元之從元**(Functions of functions)

關於一從元的敍述有些可以看做是敍述着該從元所定之類,有些不能.『凡人有死』這句敍述包含『x是人』及『x有死』兩從元;如我們有意,也可說這句敍述包含『人』及『有死者』兩類. 這句敍述隨便用前一種解釋也可用後一種解釋也可,因爲『x是人』或『x有死』任以一形式地等價的從元來代替,這句敍述的眞僞價是不變的. 但是如剛纔所說,我『相信凡人有死』這句敍述却不能看做是關於『x是人』或『x有死』兩命題

從元所定之類的敍述,因為這句敍述所含的『x是人』或『x有死』若拿別的形式地等價的從元來代替,這句敍述的眞僞價也許改變.(代替以後,類還是不變.) 含有命題從元 ϕx 的敍述若果是同『凡人有死』一樣的,我們叫他做從元 ϕx 的『外範從元』.換句話說,敍述裏的從元 ϕx 用形式地等價的從元代替而敍述之眞僞價不變時,該敍述謂之 ϕx 的『外範從元』(Extensional function);如果一個從元的從元不是外範的,我們便叫他做『屬性從元』(Intensional function),所以『我相信凡人有死』是『x是人』或『x有死』的屬性從元. 所以一從元 ϕx 的諸外範從元實際可以看做是 ϕx 所定之類的從元,ϕx 的屬性從元却不能這樣看待.

這裏有一層必得注意,便是在算理邏輯上我們所有機會引入的一切比較的(Specific)從元之從元都是外範的. 舉例來說,算理邏輯裏兩個根本的從元之從元乃是:『ϕx 常眞』及『ϕx 有時

眞』. 兩從元裏的 ϕx 若任用一形式地等價的從元代替,兩從元之眞僞價並不改變. 在類的說法裏,若 α 是 ϕx 所定之類,『ϕx 常眞』就等價於『凡物是 α 之分子』,『ϕx 有時眞』就等價於『α 有分子』或(說得更好一點)『α 至少有一個分子』. 再拿前章所論『這一個合於 ϕx 之項』之存在的條件來論. 該條件是有一項 c 而 ϕx 常等價於『x 是 c』. 這明明也是外範的. 這條件就等於說: ϕx 所定之類是一個獨項類,即含有一項的類;換言之,該類是 1 之一項. (1 是獨項類的類所以獨項類是 1 之一項.)

設有一從元之從元,他也許是外範的也許不是外範的,但是我們總能由他推出一個與他相關聯並且眞是同一從元的外範從元來,其法如下:命原有『從元之從元』陳述 ϕx 具有性質 f;試看『有一從元具有性質 f 且與 ϕx 爲形式地等價』這句話. 這是 ϕx 的一個外範從元;原來的敍述眞則這外範的從元也眞,并且倘若原來的從元之

從元是外範的,這新得的從元之從元定然與 ϕx 原來的從元形式地等價;即或原來的從元是屬性的,這新得的從元之從元比之舊有的眞的時候還要多些. 譬如再看『我相信凡人有死』這句話,做爲他是『x是人』的一個從元. 推出的外範從元是:『有一個與「x是人」爲形式地等價的從元並且我相信凡合於這從元的都有死.』 這從元若用『x是理性動物』代『x是人』其眞不變,縱然我誤信着鳳凰是有理性且長生也不妨.

像上面這樣構成的從元我們給他個名字叫做**推出外範從元** (Derived extensional function),其一般的形式是:『有一從元具含性質 f 且與 ϕx 爲形式地等價』,其對應的原『從元的從元』是『從元 ϕx 有性質 f』.

這『ϕx 之推出外範從元』我們可作爲是以 ϕx 所定之類爲主元,並可以看做是陳述該類有性質 f. 這可以作爲『關於一類之命題』的界說. 換言之,我們可以界說如下:

所謂『ϕx所定之類有性質f』云者ϕx合於由f推出之外範從元之謂也.

凡關於一類的陳述,能對於一從元爲有意義的,得此界說遂有了意義;並且由此而生的結果也就是『學術上所需以使理論能彀有符號的滿足』的結果.（原註1）

以上關於類之界說的理論已能充分地滿足我們的前四條件了.至於他(界說)能合第三第四兩條的所以然,換句話說,類的類之所以可能,並且類看做是自己的分子之所以不可能,說起來很涉於專門;Principia Mathematica裏有解釋,這裏可以不論.由是除第五條件以外我們的努力可算已經完全了.但第五條件——既是最要又是最難——絕不是拿我們已論的話可以滿足的.其困難所在與範疇的理論有關,必須略加討論.（原註2）

我們在第十三章論到邏輯的範疇有一個階級,若將屬於這一疇的事物拿屬於別一疇的事

物來代替,結果便是誤謬. 且以一定事物a為主元的各種從元不全屬於同一範疇,這也是不難證明的. 這些從元我們叫做『a主從元』(a—functions). 先將其中不關涉任何『從元之團體』(Collection of functions)的取出,我們叫他做『賓辭的a主從元』(Predicative a-functions).如果我們現在進一步到關涉於『若干賓辭的a主從元之全體』(the totality of predicative a-functions)的從元,把這種從元與賓辭的a主從元看做同一範疇,結果便是誤謬. 試拿一句平常的話如『A是一個模範的法國人』來論.『一個模範的法國人』我們怎樣界說?我們可以界說他做『具有大多數法國人所具的一切性質』的人.但是我們如果不把『一切性質』限於那些不關涉於『若干性質之全體』(Totality of qualities)的性質,結果我們便非得要說大多數法國人按照上面的意義不是模範的法國人,那麼,由界說『不是模範的法國人』就是模範的法國人的不可少的性質了. 這種

矛盾並不是邏輯的矛盾,因爲法國人何以應當有所謂模範的,並無理由可言;但就此可以曉得關涉於『若干性質之全體』的性質與不關涉於『若干性質之全體』的性質有分別之必要.

無論何時,某變項所能取的值即(能使含該項之從元有意義之一切值)我們就其『一切』或就其『一些』值立論,我們便造了一個新的東西,這個新的東西必定不得屬於該變項所能取之值,因爲如果屬於那些值,那麼,該變項所能取之值之團體(含一切值或一些值)只能拿自己界說自己,我們便陷於循環的誤謬了. 舉例來講,我說『拿破崙具有一切所以成其爲大將的性質,』我的『性質』的界說裏決不可將我現在說的也包括在內做性質之一,換句話說,『具有一切所以成其爲大將的性質』我們不得以同一意義作爲他也是一個性質. 這是顯而易見的道理,有了這原理,纔生出範疇的理論來,以免掉似是而非的循環語病. 就 a 主從元而論,我們可以說『性

質』就是『賓辭的從元』. 那麼,我說『拿破崙有一切某某性質』的時候,我的意思是『拿破崙合於一切某某賓辭從元』. 這句敍述給了拿破崙一個性質却不是給他一個賓辭的性質;這樣一來,循環的弊病便能免掉. 無論何時見了『一切某某從元』這種的話,要想免掉循環的語病,總非將話裏的從元限於某一範疇不可;並且拿破崙和模範的法國人這兩例已經表明了,這個範疇並不是靠主元的範疇去定的. 這一點要想詳細闡明非更加詳論不可,但所已論的已足表明能有某主元之從元不僅屬於一個範疇而屬於無窮級的範疇. 我們可用種種專門的計畫構成一個變項叫他通過這些範疇的前 n 級,其 n 為有窮數,但我們總不能構成一個變項通過這些範疇的全部;假如說能,就立時生出一個新範疇來了,這新範疇的從元之主元仍舊不變,那麼一來,我們又非從頭去構造變項不可了.

賓辭的 a 主從元我們叫做『第一疇的 a 主從

元』(the first type of a-functions);關涉於若干『第一疇的a主從元』之全部的a主從元我們叫做『第二疇的a主從元』(the second type of a-functions);依此類推. 凡可變的a主從元沒有能通過這些疇的全體的:到了某一定點就必停止.

以上這些議論與我們的推出外範從元之界說有關. 我們界說推出外範從元時說『一個從元與ϕx是形式地等價』. 這從元的範疇必須決定. 不管怎樣的決定都行,總之非有所決定不可. 所懸想形式地等價的從元,我們命他做ψ. 那麼ψ顯然是個變項,一定屬於一個有定的範疇. 關於ϕ之範疇我們所必然知道的不過是ϕ之主元屬於某一範疇——譬如說,他是個a主從元. 但這一層照我們剛纔所論並不能定ϕ所屬之範疇. 如果(照第五條件)我們對於一切『與a同範疇之項組成之類』必須能彀論述(能彀做出命題),那麼,我們非得能彀用屬於某一範疇的從元去定這種的類的全體不可;換

句話說，a 主從元必須有一疇，譬如說第 n 疇，任何 a 主從元對於第 n 疇的 a 主從元皆爲形式地等價. （譯者註 3.） 如其如此，任何外範從元，能合第 n 疇之一切 a 主從元的，一定合於任何 a 主從元. 類之所以有用就因他可做一種專門的憑藉，立出一種假定，由這假定就得上述的結果. 這假定叫做**可變公理** "Axiom of reducibility," 可述之如下:

a 主從元，有這麼樣的一疇（譬如說 τ），任取一 a 主從元必與該疇中某一 a 主從元爲形式地等價.

假定了這公理我們便可用着這一疇的從元來定關聯的外範從元的界說——按照以前的說法，設 ϕx 爲一 a 主從元，則『ϕx 所定之類有性質 f』云者即謂『有一 a 主從元 ψ 形式地等價於 ϕx 且有性質 f』，現在我們可以說: … 云者即謂『有一屬於 τ 疇的 a 主從元 ψ 形式地等價於 ϕ 且有性質 f.』由是關於一切『a-類』(a-class)

(卽 a 主從元所定之一切類)之敍述總可變爲關於一切『r 疇的 a 主從元』之敍述．只要所關涉者是從元之外範的從元，由此便可得實際的結果，此種結果如用別的方法去求，是非用那不可能的觀念『一切 a 主從元』不可的．這種方法的重要有一個特殊的所在，便是算學歸納．

可變公理包含了類之理論眞正之要義．所以我們須得考察這公理有沒有可以視之爲眞的理由．

這公理同相乘公理一樣，在幾種結果爲必要，却但論演繹的推理之存在，這公理並不必要．演繹理論，如第十四章所解釋的，以及含『一切』同『一些』字樣的命題之法則，皆屬於算學推理本身的構造：沒有他們，或沒有他們一類的東西，我們便不但不能得同一的結果；簡直什麼結果都不能得．我們不能拿他們做是假設而用他們去求假言的斷案，因爲他們不但是前提並且還是演繹的法則．他們必須是絕對地眞，否則我

們依着他們而演繹的,便不能由前提而自然地推得了. 至於可變公理却同以前的兩個算學公理(相乘公理及無窮公理)一樣用着他的時候很可拿他當做假設,不必假定他是實在地眞.由他推出來的結論也可看做是假言斷定. 照假言斷定的方法,我們能假定他眞以推出結論,也能假定他假以求反對方面的結論. 所以這公理不過是便利的,並不是必要的. 我們看着範疇理論很是複雜而且除他的幾個最普遍的原理以外一概沒有定論,所以現在還不能說有沒有方法可以盡廢這可變公理. 但是假定上面的概論爲正確,我們便要問,關於這公理的眞僞有何可言呢?

我們可以說,這公理是來本之(Leibniz)『不可辨別性之一致』的Identity of indiscernibles一個的普遍形式. 本來之假定兩個不同的主詞其賓詞必然不同,拿這假定做一個邏輯的原理.但是賓辭不過是我們叫做『賓辭的從元』的一

部分,賓辭從元裏另外含着對於某某定項的關係以及種種不能做爲賓辭的性質. 由此看來,來本之的假定較之我們的假定要嚴格狹隘多了. (按照他的邏輯,當然並不嚴格狹隘,他的邏輯以爲一切命題都可變爲主賓辭的形式(Subject predicate form.) 但就我所見而論,他的形式我們沒有好的理由可以相信,若照我們所用『賓辭』這字的狹義來講. 兩個不同事物其賓辭照我們所用的狹義全然相同,很是抽象的邏輯上一樁大爲可能的事,我們如果出了這狹義的賓辭範圍以外,可變公理便怎樣呢?在實在的世界裏可變公理對於個體的眞實是沒有法子可懷疑的,因爲不同的個體之時間空間是有分別相的:沒有兩個體對於其他一切個體的時間空間的關係是完全相同的. 但這好像不過是偶然的事實,這不過是關於我們所偶然生於其中的世界的事實. 純正邏輯和純正數學(兩者是二而一的),照來本之的說法,以在一切可能世界中

能以眞實爲目的,不但要在這機會困人雜亂不常的世界爲眞. 有一種尊嚴的態度邏輯家應當保持:邏輯家不可自失身分去由他四圍所見的事物推求論證.

從這種嚴格的邏輯論點着想,我看不出有什麼理由可以相信可變公理是邏輯地必要,所謂『是邏輯的必要』就猶如說『在一切可能的世界爲眞』是一樣的意思. 所以一個邏輯的系統裏收進這公理實是一層遺憾,雖然這公理是經驗地眞實. 因爲這層理由所以類之理論不能視爲與摹述之理論同一完善. 範疇的理論上還須再加研究方可希望達到一種,不需要這種曖昧的假定的,類之學說. 但本章的概論我們說他大體不錯也不爲過,所謂大體的,就是名義上關於類的命題變爲關於類之所由以定之命題從元之命題. 用這種方法免得拿類當做一種實在的東西,好像原理上並無不穩的地方,雖然詳細處還得加以修整. 因爲這層似乎無可疑

慮,所以我們的本願雖然是將足以引起嚴重的懷疑的東西竭力排斥不容加入,而本書仍收納類之理論.

類之理論,如上面所論的大概,總起來不過一個公理和一個界說. 為確定起見重述如下.

公理是:

有這麼樣的一個範疇τ,若ϕ是個能以α為主元的從元,則必有一從元ψ屬於疇範τ而與ϕ為形式地等價.

界說是:

若ϕ是個能以α為主元的從元,τ是上條公理所說的範疇,那麼,說『ϕ所定之類有性質f』就等於說『有一個從元屬於範疇τ,形式地等價於ϕ,且有性質f』.

(譯者註1.) 設ϕx為任一命題從元,則『ϕx且ϕx』及『ϕx或ϕx』一類的從元都與ϕx常常等價.

(譯者註2.) 第二三章往往說:『o是空類之類此類之

惟一分子就是空類。』這明明說世上的空類祇有一個，似乎與我們平常的觀念不合。我們平常用『空無所有的』地方很多，似乎空類有很多。其實這是夾了有堆積集合的觀念。倘若認爲類是由一組常常等價的命題從元定的，那末，一切『常常假』的命題從元當然全體常常等價，他們共同定下的類，就是空類，其『非常常假』的命題從元所定的類是有分子的，當然不是空類。由是可見世界上的空類是獨一無二的了。（以上係就同一邏輯的範疇而論。）

（譯者註3。）既然要說一切與a同疇之項組成之類如何如何必需說一切定此等類的a主從元如何如何，但這些a主從元不是同範疇的，那末，後話就無意義了。所以必須挑選些同疇的a主從元哪。

（原註1。）參考 Principia Mathematica, vol. 1. pp. 75—84 及 * 20。

（原註2。）閱者於此如欲求完全的討論可參考 Principia Mathematica, Introduction, Chap. ii.; 及 * 12。

第十八章
算學與邏輯

算學與邏輯,就歷史說,向來是兩門全不相同的學問. 算學與科學有關,邏輯與希臘文有關. 但兩門學問到近世都發達了:邏輯變得近於算學,算學變得近於邏輯. 結果要想在兩者之間畫出界綫遂全然不可能;實在講,兩門學問只是一門. 他們不同的地方猶如小孩之與成人:邏輯是算學的幼年,算學是邏輯的成年. 這種見解是有些邏輯家所深惡痛絕的,他們花費光陰鑽研古籍不能從事一片符號的推理;並且也是有些算學家所深惡痛絕的,他們學了一門專門學從來不曾費心去追究這專門學的意義或合理與否. 這兩種人所幸現在都日見其少了.

近世算學的研究多明明是在邏輯的邊界上,近世的邏輯也多是記號的且形式的,所以邏輯與算學的密切關係凡受過教育的學者都看得顯而易見. 證明兩者之一致當然要一番細密

工夫:從人人所承認屬於邏輯的前提入手,用演繹的方法,推得明明屬於算學範圍的結果,我們纔知道沒有這麼一點通過他能彀畫一根清楚的綫,將邏輯與算學分開,一個在左,一個在右.倘若還有人不承認邏輯與算學的一致,請他在 Principia Mathematica 裏順着那些界說和演繹去看,試問那一點是邏輯的終點且是算學的起點.然後他自然見得任何答案都是十分武斷毫無理由.

在本書前幾章,從自然數入手,我們先界說『基數』,並且論數之觀念怎樣推廣,然後分析該界說中所含的觀念,直到後來我們纔論邏輯的基本事項.若在綜合的演繹的論述裏,這些基本事項還得首先研究,經過長途的研究纔得到自然數.那種論述法雖然比之我們所採用的形式上更為正當,却使讀者更難了解,因為終極的邏輯概念及命題比起自然數來我們和他要疎遠些不熟悉些.並且他們所代表的乃是現在

知識的邊境,過此便是未知的境界;人類知識對於他們的統治權現今也還不會穩固.

尋常總說算學是一門數量(Quantity)的科學。數量是個意思含混的字,為論證便利起見我們可以拿『數』來代替.『算學是數的科學』,這句話有兩層不對. 一層因為算學中有幾門(人所共認是屬於算學範圍的)與數毫不相干——例如一切不用坐標及測量的幾何學便是:投影幾何及圖法幾何,在加入坐標以前,與數毫不相干,就是與有『大』『小』的意義的數量也不相干. 二層因為從基數的界說,從歸納法與先宗關係的理論,從續之一般的理論,並且從算術演算的界說,向來證明只與數有關的東西多半可加以推廣.結果於是從前做算術上單獨研究的,現在分為多個各別的研究,沒有一個特別與數有關. 最初步的數之性質是研究一對一的關係及類之相似. 加法所論是構成不互相搭雜之類,此不相搭雜之類各與一組不知其是否不相搭雜之

類相似. 乘法歸入『選班』之理論,『選班』乃是一對多的關係之一種. 『有窮』歸入先宗關係之一般的研究,全部算術歸納法之理論就由這種研究而生. 各種數織的順序性,以及從元之連續與從元之極限的理論的要旨,都可加以推廣,使之不必對於數有不可少之關涉. 極力地推廣是一切形式推理一個原則,因為我們由此纔能斷定某一演繹的過程必有較廣地應用的結果;所以我們這樣將算術的推理加以推廣不過是按照規例行事,這規例在算學上是無人不承認的.

並且這樣推廣着我們實在創造了一組新的演繹系統,在這些系統裏尋常算術都融解了放大了;至於這些系統任舉一個——好比選班之理論——必定說他屬於邏輯還是屬於算術,那是十分隨便不能有合理的決斷的.

由是我們生出一個問題:這是一門什麼學問他叫做算學或叫做邏輯都不關緊要? 有沒有方法定他的界說?

這門學問有幾種特性不難看出。第一,我們在這學問裏,不研究特殊的事物或特殊的性質:我們從形式上研究關於任何事物或任何性質的東西。我們可說一加一是二,却不說蘇格拉底加柏拉圖是二,因爲在邏輯家或純粹算學家的地位上我們從來不聞蘇格拉底和柏拉圖之名。沒有這麼兩個個體的世界仍不失爲其中一加一爲二之世界。做純粹算學家或邏輯家的人什麼個體都不可提,因爲如果提了,我們便加入了無關緊要而且非形式的東西。我們要闡明這層道理,可把他應用到三段論法去說。尋常邏輯說:『凡人有死,蘇格拉底是人,故蘇格拉底有死』。這裏我們所要斷定的只是前提包含斷案,並非前提與斷案都實在是眞實;就是最陳舊的邏輯都聲明前提實在的眞實在邏輯上不關緊要。所以上面所舉的舊三段論法中第一要更改的是把他述爲以下的形式:『若凡人有死且蘇格拉底是人則蘇格拉底有死』。改了

以後我們便可說這句話所要表的意思是說這推理之有效全靠他的形式不靠他裏面的特定名詞. 若我們前提中略去了『蘇格拉底是人』我們便得了一個非形式的推理,只有蘇格拉底實在是個人的時候纔能承認他不錯;像這樣推理的形式便不能推廣了. 但是形式的推理如上面所舉的却絕不倚賴其中的名詞. 我們可拿 α 代『人』, β 代『有死的』, x 代蘇格拉底, α 同 β 是任何類, x 是任何個體. 於是我們得了這句敍述:『無論 α, β, 與 x 能有甚麼值,只要凡 α 是 β 且 x 是 α 則 x 是 β』; 換句話說,『命題從元「若凡 α 是 β 且 x 是 α 則 x 是 β」常眞』. 這纔是一個眞正邏輯的命題——舊式三段論法關於『蘇格拉底』,『人』, 及『有死者』的不過暗中點示這種形式的推理罷了.

如果我們的目的在形式的推理,那麼,顯然我們最後總會得着上面這種的敍述,其中絕不提到任何實在的事物或性質;只要我們想不白費

工夫在一個特例上去證可以一般地證明的東西,總可有此結果. 若在蘇格拉底身上作了很長的推理,然後又在柏拉圖身上去作同一樣的推理,那眞是可笑了. 若果我們的推理是合於凡人的,我們就可在x上證明這推理,先設『x是一個人』. 有了這假設我們的推理總可保持他的假言的效力,縱然x非人也不妨. 到了這地步我們又要見得我們的推理就是不先設x是個人而先設他是個猴子,是個鵝,或是個內閣總理,仍不失其效力. 所以我們不必耗費工夫拿『x是個人』做我們的前提,簡直以『x是個α』做前提,其中的α是個任何個體的類,或以ϕx爲前提,其中的ϕ是個任何命題從元屬於某一指定的範疇. 所以邏輯或純粹算學上絕不提特定的事物或特定的性質,是因這種學問,照我們說,是形式的,必然有此結果.

說到這裏,我們生出一個問題,此問題容易提出却難以解決. 問題是:『邏輯的命題有些甚麼

成分?』我不知道答案,但這問題如何而起我却要解釋解釋.

試拿『蘇格拉底是早於亞里士多德』這句話來論. 這裏明明是一個兩項間的關係,這命題的成分(相當的事實之成分亦復如此)就是兩個項和一個關係——『蘇格拉底』,『亞里士多德』以及『早於』. (蘇格拉底及亞里士多德不是單純的,這一層我並不管;外表他們是名字實在却是斷片的摹述,這一層我也不管. 這兩層與本論無關.) 我們可以把這種命題用『x R y』表示他的普遍的形式,『x R y』可讀做『x 對 y 有 R 關係』. 這種普遍的形式可以入邏輯的命題,他的任何實例却不能. 我們可以由此說這普遍的形式本身也是那種邏輯的命題成分之一麽?

設有一命題,譬如『蘇格拉底是早於亞里士多德』,我們便有若干一定的成分並且也有一個一定的形式. 但這形式的本身並不是個新成分;假如是的,我們便須另有一種新的形式包括

這形式以及別的成分. 實在講起來,一個命題的一切成分我們可以都改爲變項,同時命題的形式仍保存不變. 我們使用『xRy』的時候,就是做這樣的事情,『xRy』代表某一類的命題之任一個,這類的命題皆是斷定兩項間的關係.

我們由此可以進到普遍的斷定上去,譬如『xRy』有時眞——這就是說,有些場合發生兩項關係. 這斷定照我們用這字的意義是屬於邏輯(或算學)的. 這斷定裏我們絕不提及特定的事物或特定的關係;沒有特定的事物或關係能彀加入純粹邏輯的命題. 只剩了純粹的形式做邏輯命題唯一可能的成分.

我並無意於肯定地斷言純粹的形式——例如『xRy』——眞正入於我們現在所論的這種命題. 這些命題的分析是個疑難的問題,正反兩面都含着相衝突的理論. 現在我們不能着手這問題,却可以容納一種見解作爲一種最初近眞的議論,說形式的確也是加入命題做成分

的東西．甚麼叫做命題之形式,現在解釋(雖然並不正式地界說)如下:——

命題之『形式』者命題中各成分以其他成分代替之後而仍不變者也．

例如『蘇格拉底是早於亞里士多德』與『拿破崙是大於惠靈吞』形式相同,雖然兩命題的成分各不相同．

邏輯或算學的命題有一種必要的(雖然不是充分的)特性:他們是一種命題可以由不含變項(即不含『一切』『一些』『一個』『這』這些字樣)的命題用下法得之:將其中成分盡改為變項,而斷定其常眞或有時眞;或先斷言其一部分對於某些變項常眞或有時眞,而後斷言上語對於其餘變項常眞或有時眞;或加以任何相類之斷語．換句話說,邏輯(或算學)祇研究形式,且其研究形式只就形式之常眞或有時眞着想——『常』與『有時』兩字能怎樣錯列就怎樣錯列．

各種語言皆有若干之字他們的惟一功用只

在表示形式. 這些字,大概講起來,都是語言中最普通而且形變最少的. 試拿『蘇格拉底是人』來論. 這句話裏的『是』字不是命題的成分,不過表示主賓辭的形式. 同樣,『蘇格拉底是早於亞里士多德』裏的『是』字和『於』字只表示形式;這命題與『蘇格拉底在亞里士多德之前』相同,在『蘇格拉底在亞里士多德之前』裏沒有『是』『於』兩字,命題的形式是用別的方法表示的; 形式,除用比較字(Specific words)表示之外大概總可有別法表示:字之順序可以表示一大半. 但這條原則不可固執. 例如命題的原式(Molecular forms of propositions 就是我們所謂『眞僞從元』)怎樣表示纔便利,要是一個字不用,我們便難以知道. 我們在第十四章看出有一個字(或符號)便可以達這目的,有一個表示『不兩立性』的字(或符號)便行.但若一個字沒有我們便要發生困難了. 然這一層在本論還不關緊要. 這裏重要的事是注意縱然一個普遍命題裏沒有表示形式的字

或符號,形式仍是該命題的唯一要件. 若我們想說關於形式本身的話,我們一定要有個字來表示他;但如像在算學上我們想說的話是關於一切具有該形式的命題,那麼,表示形式的字通常看起來不爲必要;大概就理論上說絕不必要.

假定——我想我們可以假定——命題的形式可由『命題所由以表示之形式』爲其代表不必用表示形式的特殊字,我們就會得出一種語言其中凡是形式的東西都屬於句法不屬於字.拿這種語言我們能彀表示一切算學的命題,縱然我們對於這語言一個字不識也不妨. 算理邏輯的語言若達於完善大約就是這種的語言.

我們有表示變項的符號,譬如『x』,『R』,和『y』,照各樣的方法排列;其排列法就表示所說之話對於變項的一切値或一些値爲眞. 我們無需識字,因爲字之需要不過在定變項的値,那是應用算學家的事不是純粹算學家或邏輯家的事.

邏輯的命題特點之一就在:有一適當的語言,

這種命題就可拿他陳述,我們只要知道他的句法就行無庸識他的字.

然而究竟總還有表示形式的字,如像『是』『於』等等. 古來已經發明的算理邏輯的符號其中總含着一些符號他們的形式的意義是常久不變的. 我們可以拿那構成眞僞從元時所用以表示不兩立式的符號爲例. 那種的字或符號是可以入邏輯的. 我們需得怎樣界說他們呢?

這種的字或符號所表示的東西叫做『邏輯常項』(Logical constants). 邏輯常項可以照界說『形式』的方法一樣地去界說;實在講起來,兩者是二而一的. 一個根本的邏輯常項就是若干命題所公共的東西,於這些命題中任取其一以他一命題之項代此命題之項卽得他一命題. 例如『拿破崙是大於惠靈吞』就由『蘇格拉底是早於亞里士多德』用『拿破崙』代『蘇格拉底』,『惠靈吞』代『亞里士多德』,『大』代『早』而得. 有些命題能照這樣以『蘇格拉底是早於亞里士多德』爲範本

而得,也有些不能;那些能的都屬於『xRy』這形式,都是表的兩項關係. 我們不能用一項對一項的代替法由上面這範本得出『蘇格拉底是人』或『雅典人給毒草與蘇格拉底』一類的命題,因爲前者屬於主賓辭的形式,後者表示一個三項間的關係. 倘若我們純粹邏輯的語言裏必定要有些字,他們必是表示『邏輯常項』的字,『邏輯常項』不外是一組命題——一組可用一項代替一項互相推求的命題——的公共的東西,或是由這樣一組命題的公共的東西,推出來的東西. 這公共的東西就是我們所謂『形式』.

照這意義講凡純粹數學裏的『常項』都是『邏輯常項』. 好比數 1 就是一些命題的推出物 (Derivative),那些命題的形式是:『有這麼樣的一項 c,當 x 是 c 時且只當 x 是 c 時 ϕx 纔眞.』 這是 ϕ 的一個從元,與 ϕ 以種種不同之值則得種種不同之命題. 我們可以(略去與此處之目的無關的幾個中間的程序)就拿上面這個 ϕ 的從元做爲

是表示『ϕ所定之類是一個獨項類』或『ϕ所定之類是1的一項』的意義(1是個類的類)。像這樣,命題中有1的其意義就是由某一不變的邏輯形式推出來的. 凡算學常項都可見得是如此的:凡算學常項都是邏輯常項,或用符號表示的簡文這簡文在一個正當的上下文裏的用處全用邏輯的常項去界說。

雖然一切邏輯的(或算學的)命題可全以邏輯常項帶着變項去表示,然倒過來說『一切能用這方法表示的命題都是邏輯的命題』便不對了. 到此我們總算求得算學命題的一個必要的準則(Criterion)但是這準則還不充分。 我們已經充分地界說了一些根本觀念的性質,一切算學觀念都可用這些根本觀念來界說;但一切算學命題所可由之而推出的根本命題我們却不曾充分地界說。 這是一件較難的事,關於這事的完備答案是甚麼,現在還不知道。

有些命題可用邏輯的名詞表述却不能由邏

輯斷定他是眞,無窮公理就可以做個例。一切邏輯的命題都有一種特性,要想表示這種特性人總說邏輯的命題是分析的(Analytic)或說他們的相反提案(Contradictory)是自相矛盾。但這樣的話不滿足. 矛盾律(Law of contradiction)不過是邏輯的命題之一;他並沒有特別的超越性;證明某一命題的相反提案是自相矛盾也許除矛盾律之外還需用別的演繹原則。然而我們所求邏輯命題的這種特性在那些以爲他就是『可從矛盾律推論性』(Deducibility from the law of contradiction)的人也曾感到並有意於界說。這種特性我們姑且叫做『套脫邏輯』(Tautology),他顯然是這句敍述『不管n是甚麼數字宙間個體的數是n』所沒有. 若非範疇差異的緣故我們本可邏輯地證明世界上有n項的類,n是任何有窮整數;就是$\aleph_0$項類的存在也可證明。但就因爲範疇的緣故這種證法照第十三章所論是謬誤. 我們只得乞靈於經驗的觀察以決定

世界上個體之數爲n。在『可能的』世界中,依來本之的意義講,有些世界有一個個體,有些有兩個,有些有三個,……。就是一個個體的存在,好像也沒有邏輯的必要(原註1)——更進一步說,世界的存在也沒有邏輯的必要。實體學(Ontology)證明神之存在,倘若所證的有效,那麼,一個個體存在的邏輯必要算是成立了。但那證法通常人總認爲無效,並且他根據着一個關於存在的謬誤見解——這證法不曾知道存在只能在摹述的東西上講不能在名稱的東西上講,所以由『這是這一個某某』(this is the so-and-so)及『這一個某某存在』(the so-and-so exists)去推論『這存在』(this exists)是毫無意義的。若我們不承認實體學的推論,我們便好像要被逼着斷定世界的存在是一個偶然的事了——世界的存在不是邏輯的必要了。如其如此,邏輯的原則必不能斷言『存在』,除非先有假設;換句話說,邏輯的原則絕不能有『命題從元如此如此有時眞』

這種形式的命題,這樣的命題見於邏輯中的時候,或做假設或做假言的斷案,必不做全然斷定的命題。邏輯上全然斷定的命題必是那些肯定『某命題從元常眞』一類的命題。例如『「若 p 包含 q 且 q 包含 r 則 p 包含 r」常眞』,或『「凡 α 是 β 且 x 是 α 則 x 是 β」常眞』,都是。這種命題可入邏輯,他們的眞實並不倚賴宇宙的存在。我們可以說:若沒有宇宙則普遍的命題無一不是常眞;因爲一個普遍命題的相反提案(照第十五章所論)必是一個斷定宇宙存在的命題,若宇宙不存在,這命題當然就不眞了。

邏輯的命題乃是可以先天地(A priori)認識無須研究實在世界的命題。我們研究經驗的事實不過知道蘇格拉底實際是人,但不必乞靈於經驗我們便知那三段論法在他的抽象的形式(就是用變項表示的形式)裏是正確。這種特性不在於邏輯命題的本身而在我們所由而認識邏輯命題的方法。但這特性與這問題『邏輯

命題的本性是甚麼?』有點關係,因爲也有種種的命題很難說是我們能以不藉經驗而知道。

要求『邏輯』或『算學』的界說顯然先要替『分析的命題』這舊觀念求一個新界說不可.『邏輯的命題就是可由矛盾律導出的命題』,這種界說我們雖然不滿意,我們却能以承認並且必須承認有一類的命題與那些由經驗而知道的命題全不相同. 這類命題總有那我們剛纔所叫做套脫邏輯的那種特性. 這一件,再加上他們可以全用變項及邏輯常項表示那一層事實(邏輯常項是命題中雖然一切成分都變而他仍不變的東西)——就可做邏輯或算學的界說. 暫時我不知道套脫邏輯怎樣界說.(原註2)求一個暫時好像滿足的界說並不難;但我總沒見着一個我可覺得滿足的界說,雖然我對於這還缺着一個界說的特性很爲熟悉. 到了這一點我們求算學的邏輯基礎所走的回程總算暫時達於知識的邊界無可再走了.

算理哲學提綱挈領的引論現在已到終點了.

算理哲學上的觀念不用符號是不能正確表示的。我們要表示的東西尋常語言上並沒有可以自然表示的字,所以我們不拋棄尋常的語言就非將所用的牽強到些不尋常的意義上去不可;讀者最初雖不至於,然經過一些時候必不免於以尋常意義加於我們所用之字,於是,對於我們所要說的意思,便不免有錯誤的觀念了。況且尋常文法句法又非常的惑人。例如就數而論,就是如此;『十人』就文法講與『白人』同一形式所以『10』可以做一形容『人』的形容詞。無論何時牽涉着命題從元普通語言也必惑人,尤甚的是關於存在及摹述。因爲語言惑人,也因爲語言用於邏輯支蔓不事精確,(語言絕不是爲邏輯設的)所以算理哲學要想論得精密透澈,邏輯的符號(Logical symbolism)有絕對的必要。讀者願意精研算學的原理的想必不怕(我希望)努力求通這種符號——人以爲這種符號難通其

實並不甚難。由以上匆匆的討論可知算理哲學中未解決的問題尚有無數,該做的事還有不少: 學者倘若由這小書進而爲算理邏輯重大的研究,這麼,本書著作的主要目的就算達了。

（原註1.）Principia Mathematica 中根本命題認定『最少有一個體存在』。我現在看來殊失了邏輯的純粹。

（原註2.）『套脫邏輯』對於算學之界說之重要,余門人維氏 (Ludwig Whittgenstein) 頗研究之,余蓋因維氏而思及也。其後維氏是否將此問題解決不得而知,且生死亦未卜。

中 英 名 詞 對 照 表

Alephs, 亞力夫.
Aliorelatives, 示異關係.
All, 一切, 凡.
Analysis, 分析.
Ancestors, 先宗, 祖宗.
Argument of a function, 從元之主元.
Arithmetising of mathematics, 算學之算術表示.
Associative law, 結合定律.
Axioms, 公理.

Between, 介乎.
Bolzano, 巴散孥.
Boundary, 界限.

Cantor, Georg, 鏗托兒.
Classes, 類, 團.
Clifford, W.K., 克里佛.
Collections, infinite, 無窮類, 無窮集合.
Commutative law, 交換定律.
Conjunction, 聯立式.
Consecutiveness, 相鄰.
Constants, 不變項, 常項.
Construction, method of, 構成法.
Continuity, 連續.
Continuity, Cantorian, 鏗托兒連續.
Continuity, Dedekindian, 廸德鏗連續.
Continuity of functions, 從元之連續.
Contradictions, 矛盾.
Convergence, 收斂.
Converse, 逆(關係).
Correlators, 關聯關係.
Counterparts, objective, 客觀之對應本體.
Counting, 數.

Dedekind, 廸德鏗.
Deduction, 演繹.
Definition, 界說.
Definition, extensional and intensional, 外範界說及屬性界說.
Derivatives, 推出從元.
Descriptions, 摹述.

Dimensions, 進向.
Disjunction, 選立式.
Distributive law, 分配定律.
Domain, 關係界.

Equivalence, 等價.
Euclid, 歐几里得.
Existence, 存在.
Exponentiation, 乘冪法.
Extension of a relation, 關係之外範.

Fictions, logical, 邏輯之構象.
Field of a relation, 關係場.
Finite, 有窮.
Form, 形式.
Fractions, 分數.
Frege, 弗雷格.
Functions, 從元.
Functions, descriptive, 摹述從元.
Functions, intensional and extensional, 屬性從元及外範從元.
Functions, predicative, 賓辭從元.
Functions, propositional, 命題從元.

Gap, Dedekindian, 廸德鏗裂縫.
Generalization, 推廣.
Greater and less, 大於及小於.

Hegel, 赫克爾.
Hereditary properties, 遺傳性.

Implication, 包含式.
Implication, formal, 形式的包含式.
Incommensurables, 不可通約數.
Incompatibility, 不兩立式.
Incomplete symbols, 不完全的記號.
Indiscernibles, 不可辨別性.
Individuals, 個體.
Induction, mathematical, 算學歸納法.
Inductive properties, 歸納性.
Inference, 推測.
Infinite series and ordinals, 無窮纚及無窮序數.
Infinity, axiom of, 無窮公理.
Infinity, Cantorian, 鏗托兒無窮.

Infinity of cardinals, 基數之無窮.
Infinity of rationals, 有盡數之無窮.
Instances, 例, 實例.
Integers, positive and negative, 正負整數.
Intervals, 範圍.
Intuition, 直覺.
Irrationals, 無盡數.

Kant, 康德.

Leibniz, 來本之.
Lewis, C. I., 陸易.
Likeness, 相仿.
Limit, 極限.
Limit of functions, 從元之極限.
Limiting points, 極限點.
Logic, 邏輯.
Logic, mathematical, 算理邏輯.
Logicising of mathematics, 算學之邏輯表示.

Maps, 圖.
Mathematics, 算學.
Maximum, 上臨界, 上界.
Median class, 彌綻類.
Meinong, 梅囊.
Minimum, 下臨界, 下界.
Modality, 語氣.
Multiplication, 乘法.
Multiplicative axiom, 相乘公理.

Names, 專名.
Necessity, 必然.
Neighbourhood, 近區.
Nicod, 尼谷.
Null-class, 空類, 空團.
Number, cardinal, 基數.
Number, complex, 複素數, 虛素數.
Number, finite, 有窮數.
Number, inductive, 歸納數.
Number, infinite, 無窮數.
Number, irrational, 無盡數.
Number, maximum, 最大基數.
Number, multiplicable, 可乘數.
Number, natural, 自然數.
Number, non-inductive, 非歸納數.

Number, real, 實數.
Number, reflexive, 反身數.
Number, relation, 關係數.
Number, serial, 纚數.

Occam, 俄考姆.
Occurrences, primary and secondary, 初見及次見
Ontological proof, 實體學之證.
Order, 順序.
Order, cyclic, 循環順序.
Oscillation, ultimate, 終極顫部.

Particulars, 個體.
Peano, 裴阿諾.
Permutations, 錯列.
Philosophy, mathematical, 算理哲學.
Plato, 柏拉圖.
Plurality, 團, 團體.
Poincaré, 濮因卡雷.
Points, 點.
Posterity, 後裔.
Posterity, proper, 眞後裔.
Postulates, 公法.

Precedent, 前鄰.
Premisses of arithmetic, 算術之前提.
Primitive ideas and propositions, 根本觀念及根本命題.
Progressions, 進級纚, 前進鄰接纚.
Propositions, 命題.
Propositions, analytic, 分析的命題.
Propositions, elementary, 初等命題.
Pythagoras, 派達哥拉斯.

Quantity, 數量.

Ratios, 比率, 分數.
Reducibility, axiom of, 可變公理.
Referent, 關係者.
Regression, 退級纚, 後退鄰接纚.
Relation numbers, 關係數.
Relations, asymmetrical, 偏稱關係.
Relations, connected, 結合關係.

Time, 時間.
Truth-function, 眞僞從元.
Truth-value, 眞僞價.
Types, logical, 邏輯的範疇.

Unreality, 不實在.

Value of a function, 從元之值.

Variables, 變項.
Veblen, 韋卜倫.
Verbs, 云謂字.

Weierstrass, 魏斯特勞司.
Wells, H. G. 韋爾斯
Whitehead, 懷特赫.
Zermelo, 綏梅羅.
Zero, 零.