4 Disequazioni di secondo grado

4.1 Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

Una disequazione di secondo grado si presenta in una delle seguenti forme:

$$ax^2 + bx + c > 0; \quad ax^2 + bx + c \geqslant 0; \quad ax^2 + bx + c < 0; \quad ax^2 + bx + c \leqslant 0.$$

Per risolverla supponiamo che il coefficiente di x^2, cioè il coefficiente a, sia *positivo*. Se così non fosse, basterebbe cambiare segno a tutti i termini e quindi il verso della disequazione; per esempio, per risolvere la disequazione $-2x^2 + 3x - 1 > 0$ si può risolvere la disequazione $2x^2 - 3x + 1 < 0$.

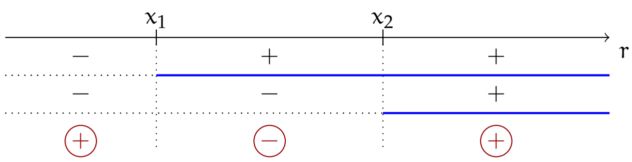
Per risolvere una disequazione di secondo grado si risolve l'equazione associata, cioè si sostituisce il segno della disequazione con l'uguale. Si passa cioè dalla disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ all'equazione $ax^2 + bx + c = 0$.

Possono presentarsi tre casi.

4.1.1 Equazione spuria

Sono equazioni senza il termine noto: $ax^2 + bx = 0$.

Questa equazione ammette sempre due radici reali e distinte, di cui una è sempre 0. Ricordiamo che l'equazione si risolve mettendo x a fattore comune $x(ax + b) = 0$ e applicando la legge di annullamento del prodotto, da cui ricaviamo $x = 0 \vee ax + b = 0 \to x = -\frac{b}{a}$. Chiamiamo le due radici x_1 e x_2. Analogamente a quanto fatto nelle disequazioni di primo grado, poniamo separatamente ogni fattore maggiore di 0 e confrontiamo i segni dei singoli fattori, come nel seguente grafico.



Dal grafico si evince che le soluzioni saranno:

- $x < x_1 \vee x > x_2$ soluzioni esterne se la disequazione è $ax^2 + bx > 0$, analogamente $x \leqslant x_1 \vee x \geqslant x_2$ se la disequazione è $ax^2 + bx \geqslant 0$.
- $x_1 < x < x_2$ soluzioni interne se la disequazione è $ax^2 + bx < 0$, analogamente $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ se la disequazione è $ax^2 + bx \leqslant 0$.

Esempio 4.1. Risolvere le seguenti disequazioni spurie.

- $3x^2 - 2x > 0$.

  Mettiamo x a fattore comune $x(3x - 2) > 0$.

  Poiché il verso della disequazione è "> 0" la disequazione è verificata per valori esterni alle soluzioni dell'equazione, cioè: $x < 0 \vee x > \frac{2}{3}$;

- $5x^2 + x \leqslant 0$.

  Mettiamo x a fattore comune $x(5x + 1) \leqslant 0$.

  Poiché il verso della disequazione è "$\leqslant 0$" la disequazione è verificata per valori interni alle soluzioni dell'equazione, cioè: $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant 0$;

- $x - 3x^2 > 0$ cambiamo di segno $3x^2 - x < 0$ da cui $x(3x - 1) < 0$. Soluzioni: $0 < x < \frac{1}{3}$.

4.1.2 Equazione pura

Sono equazioni senza il termine con la x: $ax^2 + c = 0$.
Possono esserci due situazioni:

- $c < 0$: in questo caso l'equazione ammette due radici reali opposte: $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$: si torna al caso precedente e si ha $x < x_1 \vee x > x_2$ (cioè per valori esterni) se la disequazione è $ax^2 + c > 0$ oppure $x_1 < x < x_2$ (cioè per valori interni) se la disequazione è $ax^2 + c < 0$;

- $c > 0$: l'equazione non ammette soluzioni reali; il binomio $ax^2 + c$ è la somma di un quadrato con un numero positivo, pertanto è sempre positivo. Di conseguenza, la disequazione $ax^2 + c > 0$ avrà soluzioni per ogni x reale, mentre $ax^2 + c < 0$ non avrà nessuna soluzione reale.

Esempio 4.2. Risolvere le seguenti disequazioni pure.

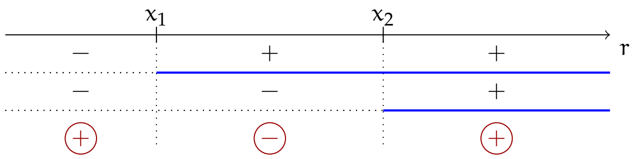
- $x^2 - 4 \geqslant 0$ soluzioni $x \leqslant -2 \vee x \geqslant 2$;
- $2x^2 - 18 \leqslant 0$ soluzioni $-3 \leqslant x \leqslant 3$;
- $x^2 + 4 > 0$ soluzioni $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2 + 9 \leqslant 0$ soluzioni nessun valore reale $\text{I. S.} = \emptyset$;
- $1 - x^2 < 0$ cambiamo di segno $x^2 - 1 > 0$ soluzioni $x < -1 \vee x > 1$.

4.1.3 Equazione completa

Sono equazioni con tutti i coefficienti diversi da zero: $ax^2 + bx + c = 0$.

Si calcola il valore del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ e a secondo del suo segno possono presentarsi tre casi:

Primo caso: $\Delta > 0$ L'equazione ammette due radici reali e distinte x_1 e x_2 e il trinomio si scompone in $a(x - x_1)(x - x_2)$. Poiché abbiamo supposto a positivo, il segno del trinomio è dato, per il teorema dui Cartesio, dal seguente schema (ponendo $x_1 < x_2$):



Pertanto la disequazione $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ è verificata per valori esterni alle soluzioni, cioè $x \leqslant x_1 \vee x \geqslant x_2$; mentre la disequazione $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ è verificata per valori interni alle soluzioni, cioè $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Esempio 4.3. Risolvere le seguenti disequazioni complete con $\Delta > 0$.

- $x^2 - 3x - 4 > 0$. Calcolo il valore del discriminante $\Delta = 9 + 16 = 25$ e le soluzioni dell'equazione associata $x_1 = -1 \vee x_2 = 4$. Le soluzioni della disequazione sono: $x < -1 \vee x > 4$;

- $x^2 - 3x - 4 < 0$. In questo caso le soluzioni della disequazione sono $-1 < x < 4$.

Secondo caso: $\Delta = 0$ In questo caso le radici dell'equazione associata sono coincidenti $x_1 = x_2$, pertanto il trinomio si scompone in $a(x - x_1)^2$. Poiché a è positivo e il quadrato è positivo o al più nullo, si possono verificare quattro casi:

- $a(x - x_1)^2 > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R} - \{x_1\}$;
- $a(x - x_1)^2 \geqslant 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $a(x - x_1)^2 < 0$ non è mai verificata;
- $a(x - x_1)^2 \leqslant 0$ è verificata solo per $x = x_1$.

Esempio 4.4. Risolvere le seguenti disequazioni complete con $\Delta = 0$.

- $x^2 - 2x + 1 > 0$. Si ha $(x - 1)^2 > 0$ che è verificata $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$;

- $4x^2 - 4x + 1 \geqslant 0$. Si ha $(2x - 1)^2 \geqslant 0$ che è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;

- $x^2 + 2x + 1 < 0$. Si ha $(x + 1)^2 < 0$ che non è mai verificata;

- $4x^2 + 4x + 1 \leqslant 0$. Si ha $(2x + 1)^2 \leqslant 0$ che è verificata solo per $x = -\frac{1}{2}$.

Terzo caso: $\Delta < 0$ Studiamo il segno che assume il trinomio in questo caso. Dobbiamo eseguire i seguenti passaggi:

- mettiamo il coefficiente a a fattore comune, aggiungendo e togliendo $\frac{b^2}{4a^2}$ ottenendo
$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right);$$
- osserviamo che i primi tre termini costituiscono lo sviluppo del quadrato di un binomio, e riduciamo gli ultimi due allo stesso denominatore ottenendo
$$a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right];$$
- studiamo ora il segno di questa espressione: a è positivo, nella parentesi quadra si ha una somma in cui $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ essendo un quadrato è sempre positivo, come $-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=-\frac{\Delta}{4a^2}$ sempre positivo perché $\Delta < 0$. Possiamo allora concludere che il trinomio è sempre positivo.

Si hanno allora le seguenti possibilità con $a > 0$:

- $ax^2+bx+c > 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $ax^2+bx+c \geqslant 0$ è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$ (anche se non può mai essere uguale a zero);
- $ax^2+bx+c < 0$ non è mai verificata;
- $ax^2+bx+c \leqslant 0$ non è mai verificata.

Esempio 4.5. Risolvere le seguenti disequazioni complete con $\Delta < 0$.

- $2x^2-3x+4 > 0$. Si ha $\Delta = 9-32 = -23 < 0$, verificata $\forall x \in \mathbb{R}$;
- $x^2-x+1 < 0$. Si ha $\Delta = 1-4 = -3 < 0$, mai verificata per alcun valore reale di x.

I seguenti esempi analizzano la risoluzione di disequazioni di secondo grado con $\Delta \geqslant 0$.

Esempio 4.6. Determinare l'insieme soluzione della disequazione $-3x^2+2x > 0$.

Cambiamo segno per avere il primo coefficiente positivo; la disequazione si trasforma in $3x^2-2x < 0$; l'equazione associata è spuria $3x^2-2x = 0$ con le radici $x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{2}{3}$. Pertanto la disequazione assegnata ha $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < \frac{2}{3}\right\}$.

Esempio 4.7. Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2-5 \leqslant 0$.

L'equazione associata $2x^2-5=0$ è pura con soluzioni reali $x = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Razionalizzando otteniamo: $x_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \vee x_2 = +\frac{\sqrt{10}}{2}$ e quindi $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{\sqrt{10}}{2} \leqslant x \leqslant +\frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$.

Esempio 4.8. Determinare l'insieme soluzione della disequazione $2x^2+3x-1 > 0$.

L'equazione associata è completa $2x^2+3x-1=0$; $\Delta = 9+8 = 17 > 0$ è positivo, dunque le soluzioni sono $x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$. Ci troviamo nel primo caso, quindi l'insieme soluzione della disequazione è $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{-3-\sqrt{17}}{4} \vee x > \frac{-3+\sqrt{17}}{4}\right\}$.

❍ **Conclusione** Una disequazione di secondo grado si presenta sempre in una delle seguenti forme: $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geqslant 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leqslant 0$; possiamo sempre supporre positivo il primo coefficiente e, anche se incompleta, per l'equazione associata possiamo sempre pensare ai tre casi generati dal segno del discriminante $\Delta=b^2-4ac$.

Pertanto l'insieme soluzione I. S. segue lo schema riportato nella seguente tabella:

Delta	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geqslant 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leqslant 0$
$\Delta>0^*$	$x<x_1 \vee x>x_2$	$x\leqslant x_1 \vee x\geqslant x_2$	$x_1<x<x_2$	$x_1\leqslant x\leqslant x_2$
$\Delta=0^{**}$	$\forall x\in\mathbb{R}-\{x_1\}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	I. S. $=\emptyset$	$x=x_1=x_2$
$\Delta<0^{***}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	$\forall x\in\mathbb{R}$	I. S. $=\emptyset$	I. S. $=\emptyset$

* l'equazione associata ha 2 soluzioni reali distinte: $x=x_1 \vee x=x_2$.
** l'equazione associata ha 2 soluzioni reali coincidenti: $x=x_1=x_2$.
*** l'equazione associata non ha soluzioni reali.

✍ *Esercizi proposti:* 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, 4.5

4.2 Risoluzione grafica di una disequazione di secondo grado

Ricordiamo che un polinomio in una sola variabile, solitamente indicata con x, è di secondo grado se 2 è il massimo esponente della variabile. Per *trinomio di secondo grado* intendiamo un polinomio di secondo grado: ax^2+bx+c con $a\in\mathbb{R}_0$ e $b, c\in\mathbb{R}$. Chiamiamo *zeri del trinomio* i numeri reali soluzione dell'equazione associata $ax^2+bx+c=0$.

Definizione 4.1. Una funzione f che associa ad ogni numero $x\in\mathbb{R}$ il valore $y=ax^2+bx+c$ con $a\in\mathbb{R}_0$ e $b, c\in\mathbb{R}$ si chiama *funzione polinomiale di secondo grado*.

Nel riferimento cartesiano ortogonale, il grafico della funzione f è costituito da tutti e soli i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione $y=ax^2+bx+c$; se x_1 e x_2 sono gli zeri reali del trinomio ax^2+bx+c significa che attribuendo tali valori alla variabile x si ha $y=0$; essi sono dunque gli *zeri della funzione*, ossia le ascisse dei punti del grafico appartenenti all'asse x.

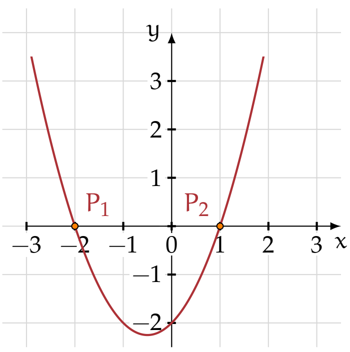


FIGURA 4.1: La funzione $y=x^2+x-2$.

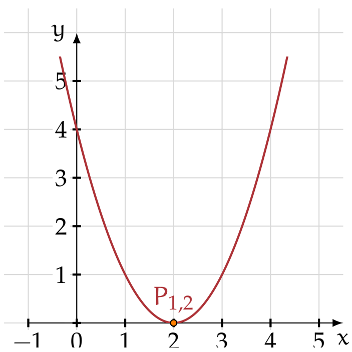


FIGURA 4.2: La funzione $y=x^2-4x+4$.

Esempio 4.9. Determinate gli zeri del trinomio $x^2 + x - 2$.

Risolviamo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1 = -2 \vee x_2 = 1$. I due numeri 1 e -2 sono gli zeri della funzione $y = x^2 + x - 2$ (figura 4.1 a pagina 117). Nel riferimento cartesiano ortogonale i punti $P_1(-2;0)$ e $P_2(1;0)$ sono i punti del grafico della funzione appartenenti all'asse x.

Esempio 4.10. Determinate gli zeri del trinomio $x^2 - 4x + 4$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = 2$, gli zeri del trinomio sono coincidenti nel numero 2 e il grafico della funzione $y = x^2 - 4x + 4$ (figura 4.2 a pagina 117) ha quindi due punti coincidenti appartenenti all'asse x: $P_1 \equiv P_2(2;0)$.

Esempio 4.11. Determinate gli zeri del trinomio $x^2 - 2x + 5$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 2x + 5 = 0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali e il grafico della funzione $y = x^2 - 2x + 5$ (figura 4.3 a pagina 118) non ha punti appartenenti all'asse x.

Questi esempi ci hanno permesso di chiarire il collegamento tra il concetto algebrico "zeri di un polinomio" e il concetto geometrico di "punti sull'asse delle ascisse" del grafico della funzione polinomiale di secondo grado. Pertanto studiare il *segno di un trinomio di secondo grado* equivale a determinare quali sono le *ascisse dei punti* della funzione $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \in \mathbb{R}_0$ e $b, c \in \mathbb{R}$) che hanno *ordinata positiva* oppure *ordinata negativa*.

Ricordiamo che nel riferimento cartesiano ortogonale i punti ad ordinata positiva si trovano nel I e nel II quadrante (cioè al di sopra dell'asse x), i punti ad ordinata negativa si trovano nel III e nel IV quadrante (cioè al di sotto dell'asse x) e i punti ad ordinata nulla si trovano sull'asse x.

Per studiare il segno del trinomio, dobbiamo quindi tracciare, nel riferimento cartesiano, il grafico della funzione $y = ax^2 + bx + c$ (con $a \in \mathbb{R}_0$ e $b, c \in \mathbb{R}$).

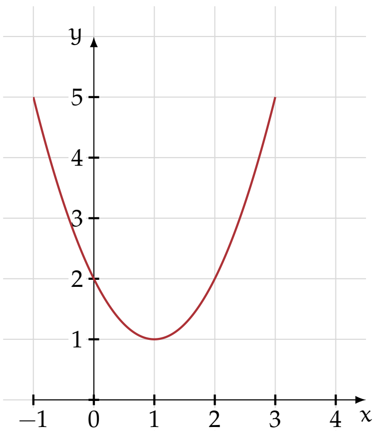


FIGURA 4.3: La funzione $y = x^2 - 2x + 5$.

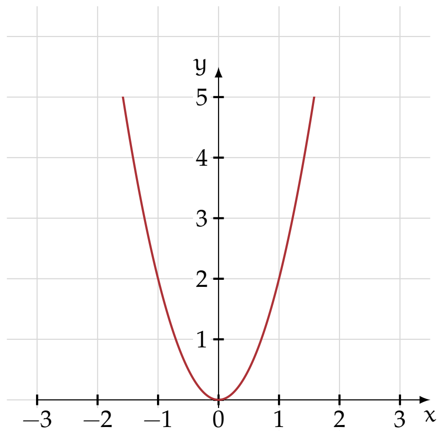


FIGURA 4.4: La funzione $y = 2x^2$.

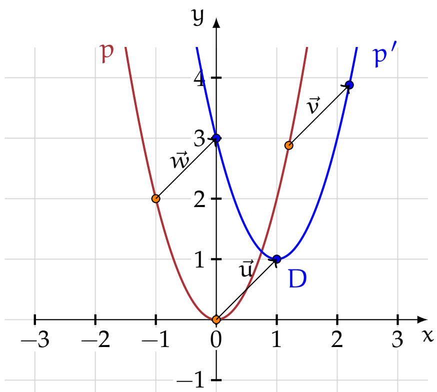
4.2.1 Rappresentazione di una funzione polinomiale di secondo grado nel piano cartesiano

Consideriamo la funzione $y = 2x^2$ (figura 4.4 a pagina 118) di proporzionalità quadratica definita in tutto $\mathbb{R}$; sappiamo che il suo grafico è una parabola che volge la concavità verso l'alto essendo il coefficiente della variabile indipendente positivo e che il punto $O(0;0)$ è il suo vertice. Per tracciarne il grafico compiliamo una tabella e riportiamo i punti nel riferimento cartesiano.

x	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$
$y = 2x^2$	$4{,}5$	2	$0{,}5$	0	$0{,}5$	2	$4{,}5$

Applichiamo a tutti i punti della tabella la traslazione di vettore $\vec{u}(1;1)$. Sappiamo che la traslazione modifica le coordinate dei punti secondo il sistema $T(1;1)\begin{cases} x' = x+1 \\ y' = y+1 \end{cases}$ quindi possiamo compilare la tabella dei punti corrispondenti di x e y secondo $T(1;1)$ e infine tracciare il grafico della parabola immagine di $y = 2x^2$.

x'	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
y'	$5{,}5$	3	$1{,}5$	1	$1{,}5$	3	$5{,}5$



Dal grafico possiamo leggere le seguenti informazioni:

- l'immagine della parabola iniziale p, è ancora una parabola p' essendo la traslazione una isometria;
- la parabola p' volge la concavità verso l'alto, come la parabola iniziale p;
- il vertice $O(0;0)$ della parabola p ha come immagine il vertice $D(1;1)$ della parabola p', coincidente con l'estremo libero del vettore $\vec{u}(1;1)$ che definisce la traslazione;
- il vettore che individua la traslazione è indicato nella figura con $\vec{u}$; i vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ rappresentano lo stesso vettore applicato a tre punti presi a caso sulla parabola iniziale.

La parabola immagine di $y = 2x^2$ è rappresentata da una funzione polinomiale di secondo grado che si ottiene ricavando dal sistema $T(1;1)$ le coordinate $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$ che, sostituite nell'equazione di p $(y' - 1) = 2 \cdot (x' - 1)^2$, permettono di ottenere l'equazione di p': $y = 2x^2 - 4x + 3$.

Generalizziamo Data la parabola di equazione $y = ax^2$ e la traslazione

$$T(v_x; v_y) \begin{cases} x' = x + v_x \\ y' = y + v_y \end{cases},$$

per ottenere l'equazione della curva immagine ricaviamo $\begin{cases} x = x' - v_x \\ y = y' - v_y \end{cases}$ da sostituire nell'equazione $y = ax^2$. Da $(y' - v_y) = a \cdot (x' - v_x)^2$ svolgendo i calcoli si ottiene

$$y' = a(x')^2 - (2av_x)x' + a(v_x)^2 + v_y.$$

Se poniamo $-2av_x = b$ e $a(v_x)^2 + v_y = c$ l'equazione della parabola p' immagine di quella data è $y = ax^2 + bx + c$, espressa attraverso un polinomio di secondo grado.

Viceversa Assegnata la funzione polinomiale di secondo grado $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$, sappiamo che il grafico di tale curva è una parabola. In particolare:

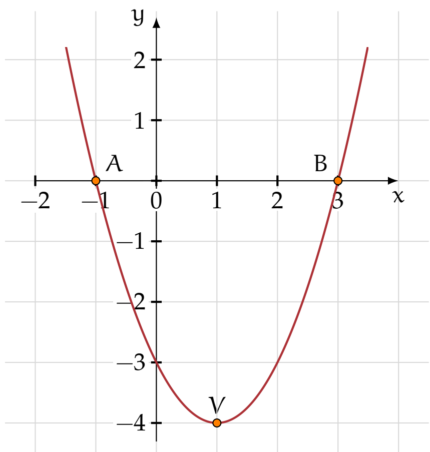
- il coefficiente a indica la concavità: verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$;
- il coefficiente c indica l'intersezione della parabola con l'asse delle y;
- dalle formule $-2av_x = b$ e $a(v_x)^2 + v_y = c$ ricaviamo le coordinate del suo vertice $v_x = -\frac{b}{2a}$ e $v_y = c - a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{4ac-b^2}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$;
- risolvendo l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ determiniamo gli eventuali punti di intersezione con l'asse x (gli zeri della funzione);
- assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari, possiamo ottenere altri punti del grafico.

Esempio 4.12. Data la funzione $f : y = x^2 - 2x - 3$ tracciare nel riferimento cartesiano ortogonale il suo grafico. Il grafico di tale curva è una parabola:

- essendo il coefficiente $a = 1$, la concavità è verso l'alto;
- il coefficiente $c = -3$ indica che la parabola incontra l'asse delle y nel punto $(0; -3)$;
- essendo $a = 1$, $b = -2$ e $c = -3$, le coordinate del vertice V sono $v_x = -\frac{-2}{2} = 1$ e $v_y = \frac{-12-4}{4} = -4$;
- le ascisse dei punti $A(-1; 0)$ e $B(3; 0)$ rappresentano gli zeri della funzione, soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$;

- altri punti della parabola si trovano assegnando alla variabile indipendente valori arbitrari: per $x = 2$, per esempio, otteniamo $y = (2)^2 - 2(2) - 3 = -3$; il punto $P(2; -3)$ è pertanto un punto della parabola.

Dal grafico possiamo affermare che f è l'immagine di $y = x^2$ nella traslazione di vettore $\vec{v}(1; -4)$.



✍ *Esercizi proposti:* 4.6, 4.7

4.2.2 Segno di un trinomio di secondo grado per via grafica

Esempio 4.13. Studiare il segno del trinomio $x^2 - 2x - 3$.

Si tratta di stabilire per quali valori di x esso assume segno positivo, per quali segno negativo e per quali eventualmente si annulla.

La richiesta è interpretabile anche come la ricerca degli insiemi soluzioni dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$ e delle disequazioni $x^2 - 2x - 3 > 0$ e $x^2 - 2x - 3 < 0$.

Strategia risolutiva: Tracciamo il grafico della funzione $y = x^2 - 2x - 3$ e leggiamo dal grafico gli insiemi richiesti (vedi la figura precedente):

- Le ascisse dei punti A e B costituiscono l'insieme soluzione dell'equazione $x^2 - 2x - 3 = 0$ cioè $x_1 = -1 \vee x_2 = 3$;

- I valori di x dell'insieme $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x_A < x < x_B\}$ rendono il trinomio negativo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x = 0$, il punto sulla parabola ha ordinata negativa (-3). Per esercizio segnate il punto sul grafico e ripetete per $x = 1$, $x = \frac{3}{2}$, $x = 2$;

- I valori di x dell'insieme $K = \{x \in \mathbb{R} \mid x < x_A \vee x > x_B\}$ rendono il trinomio positivo; infatti preso un valore dell'insieme, ad esempio $x = \frac{7}{2}$, il punto sulla parabola ha ordinata positiva. Per esercizio segnatelo sul grafico e ripetete per $x = -\frac{6}{5}$.

❑ **Osservazione** La ricerca dell'insieme soluzione di una disequazione di secondo grado è sempre interpretabile come la ricerca del segno di un trinomio di secondo grado e quindi risolubile per via grafica. In questi casi non è necessario rappresentare in modo preciso la parabola associata al trinomio, ma basta ricordare quanto detto inizialmente sugli zeri di una funzione (vedi la figura 4.5 a pagina 123).

Esempio 4.14. Risolvi le seguenti disequazioni utilizzando il segno del trinomio di secondo grado.

➡ $x^2 + x - 2 > 0$.

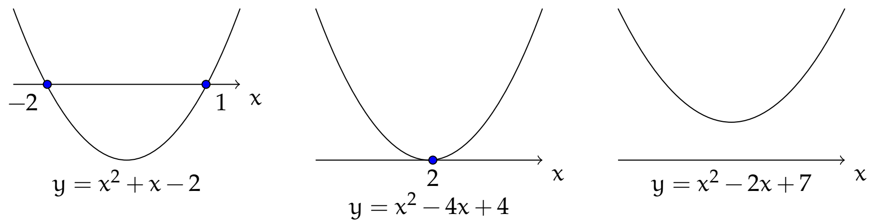
Risolviamo l'equazione $x^2 + x - 2 = 0$ che avendo il discriminante positivo ammette due soluzioni reali distinte $x_1 = -2 \vee x_2 = 1$. Tali valori sono gli zeri del trinomio e dunque gli zeri della funzione $y = x^2 + x - 2$; la parabola volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione rispetto all'asse x e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee x > 1\}$ o con notazione insiemistica $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$;

➡ $x^2 - 4x + 4 \leqslant 0$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 4x + 4 = 0$ che avendo il discriminante nullo ammette due soluzioni reali coincidenti $x_1 = x_2 = 2$: gli zeri del trinomio sono quindi coincidenti nel numero 2; la parabola $y = x^2 - 4x + 4$ ha il vertice sull'asse x e volge la concavità verso l'alto quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $\text{I. S.} = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 2\}$, ovvero $\{2\}$. Nessun valore reale rende il trinomio negativo;

➡ $x^2 - 2x + 7 > 0$.

Risolviamo l'equazione $x^2 - 2x + 7 = 0$ che avendo il discriminante negativo non ammette soluzioni reali; il trinomio non ha zeri reali, la parabola $y = x^2 - 2x + 7$ volge la concavità verso l'alto e non ha punti appartenenti all'asse x quindi possiamo grossolanamente rappresentare la sua posizione e dedurre l'insieme soluzione richiesto: $\text{I. S.} = \mathbb{R}$, ovvero $(-\infty, +\infty)$.



✍ *Esercizi proposti:* 4.8, 4.9, 4.10, 4.11, 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21, 4.22, 4.23

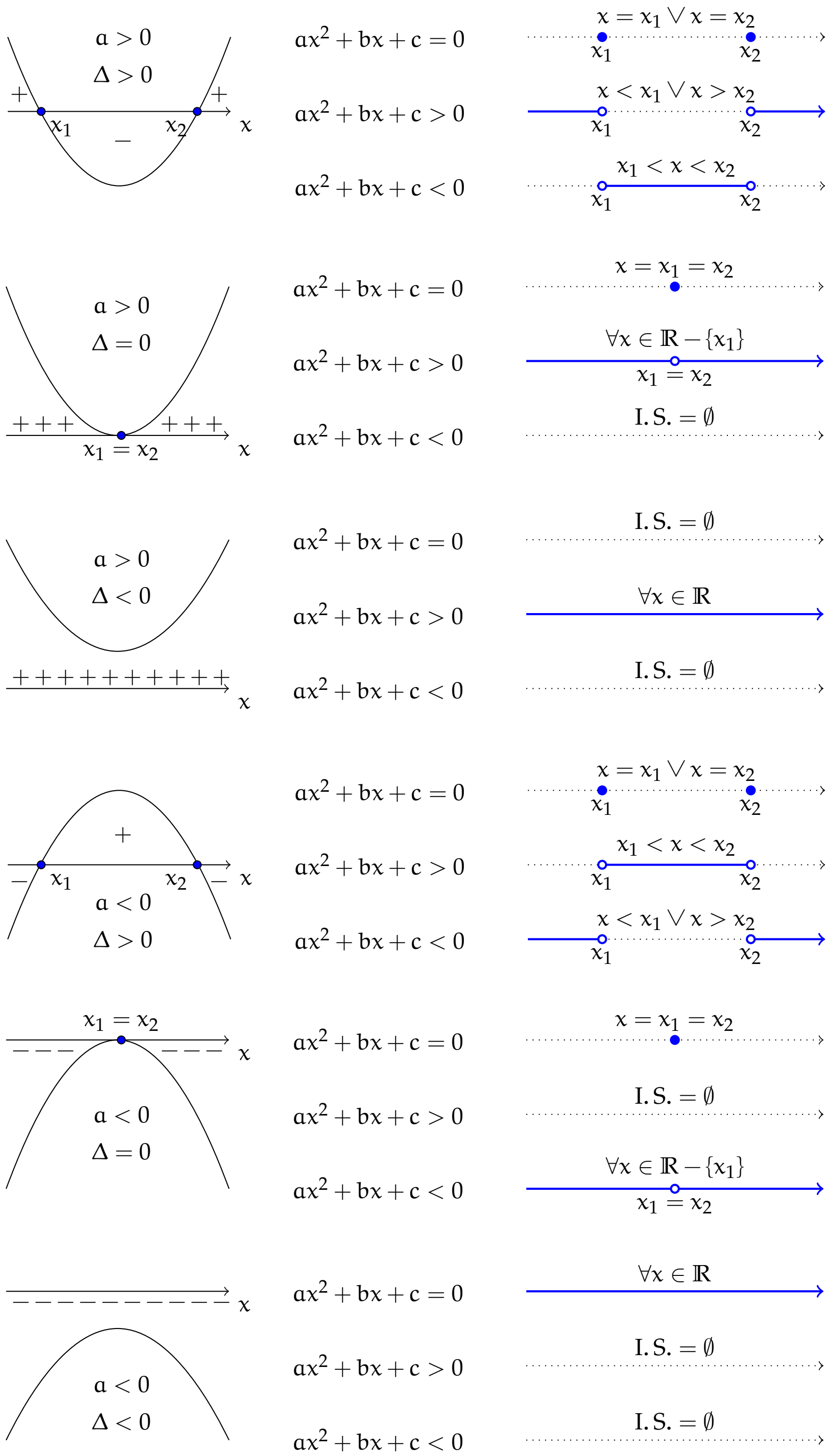


FIGURA 4.5: Risoluzione delle disequazioni di secondo grado

4.3 Segno del trinomio a coefficienti letterali

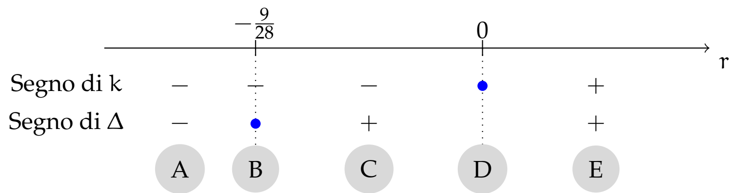
Consideriamo il trinomio $t = kx^2 + 3x - 7$ avente il coefficiente del termine di secondo grado dipendente dal parametro k.

Come possiamo stabilire il segno del trinomio $t = kx^2 + 3x - 7$, al variare di k? Sappiamo che stabilire il segno di un trinomio significa determinare i valori reali che attribuiti alla variabile indipendente x rendono il trinomio positivo, nullo o negativo. Evidentemente per i vari valori reali di k avremo una diversa disequazione da risolvere; dobbiamo dunque cercare di analizzare come varia il trinomio al variare dei valori di k e in seguito studiare il segno del trinomio ottenuto.

Questa analisi di situazioni diverse è la *discussione del trinomio a coefficienti parametrici.*

Esempio 4.15. Stabilire il segno di $t = kx^2 + 3x - 7$ al variare di k.

Prendiamo in considerazione il segno del coefficiente del termine di secondo grado e il segno del discriminante dell'equazione associata $kx^2 + 3x - 7 = 0$. Il coefficiente del termine di secondo grado è maggiore di zero per $k > 0$. Il discriminante $\Delta = 9 + 28k$ è positivo per $k > -\frac{9}{28}$. Rappresentiamo la loro reciproca situazione:



(A) $k < -\frac{9}{28}$: il coefficiente del termine di secondo grado è negativo così come il discriminante, la parabola volge la concavità verso il basso e non ha zeri reali: il trinomio è negativo per qualunque valore reale di x;

(B) $k = -\frac{9}{28}$: il coefficiente del termine di secondo grado è negativo e il discriminante è uguale a zero. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali coincidenti $x_1 = x_2 = \frac{14}{3}$. Il trinomio si annulla per $x = \frac{14}{3}$ mentre per qualunque altro valore di x è negativo;

(C) $-\frac{9}{28} < k < 0$: il coefficiente del termine di secondo grado è negativo e il discriminante è positivo. La parabola volge la concavità verso il basso e ha due zeri reali distinti: il trinomio si annulla per $x = x_1 \vee x = x_2$; è positivo per $x_1 < x < x_2$; è negativo per $x < x_1 \vee x > x_2$;

(D) $k = 0$: il trinomio diventa un binomio di primo grado: $t = 3x - 7$ e quindi $t > 0$ per $x > \frac{7}{3}$, $t < 0$ per $x < \frac{7}{3}$, $t = 0$ per $x = \frac{7}{3}$;

(E) $k > 0$: Il coefficiente del termine di secondo grado è positivo così come il discriminante. La parabola ha concavità verso l'alto e due zeri reali distinti: il trinomio si annulla per $x = x_1 \vee x = x_2$; è negativo per $x_1 < x < x_2$; è positivo per $x < x_1 \vee x > x_2$.

Esempio 4.16. Stabilite al variare del parametro k l'insieme soluzione della disequazione $x^2 + kx + 1 < 0$.

Prendiamo in considerazione il primo coefficiente (quello del termine di secondo grado) e il discriminante dell'equazione associata $x^2 + kx + 1 = 0$ e stabiliamo il loro segno: il primo coefficiente è 1 e quindi indipendente dal parametro e sempre positivo quindi la parabola volge sempre la concavità verso l'alto. Essendo il discriminante $\Delta = k^2 - 4$ si hanno soluzioni reali per $k \leqslant -2 \vee k \geqslant 2$. Rappresentiamo la loro reciproca situazione:

r		-2		2	
Segno di a	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
Segno di Δ	$+$	•	$-$	•	$+$

- $k < -2 \vee k > 2$; il discriminante è positivo. L'equazione ha due zeri reali distinti: $x = x_1 \vee x = x_2$ quindi $\text{I.S.} = \{x \in \mathbb{R} \mid x_1 < x < x_2\}$;
- $-2 < k < 2$; il discriminante è negativo. La parabola non ha zeri reali: $\text{I.S.} = \emptyset$;
- $k = -2 \vee k = 2$; il discriminante è nullo. In ognuno dei due casi la parabola ha un unico zero reale: $\text{I.S.} = \{-1, 1\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.24, 4.25, 4.26

4.4 Disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo

Esempio 4.17. Un numero è tale che sottraendo al suo cubo il suo triplo si ottiene un valore maggiore del triplo del suo quadrato aumentato di 4. Qual è il numero cercato?

La richiesta del problema implica la ricerca dell'insieme soluzione della disequazione $x^3 - 3x > 3x^2 + 4$ di terzo grado nella variabile x. Scriviamo la disequazione in forma canonica, applicando i principi di equivalenza: $x^3 - 3x^2 - 3x - 4 > 0$. Si tratta di una disequazione polinomiale di terzo grado.

Procediamo nella scomposizione in fattori del polinomio $p(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 4$. Mediante la regola di Ruffini possiamo determinare un suo zero $x = 4$ e dunque ottenere $p(x) = (x - 4)(x^2 + x + 1)$.

Determiniamo il segno dei singoli fattori: il primo fattore $f_1 = x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$; il secondo fattore $f_2 = x^2 + x + 1 > 0$ è una disequazione di secondo grado. Il primo coefficiente è positivo, quindi la parabola volge la concavità verso l'alto, e il discriminante $\Delta = 1 - 4 = -3$ è negativo, pertanto l'equazione associata non ha zeri reali, dunque f_2 è positivo per qualunque valore reale di x. Costruiamo la tabella dei segni:

x		4	
Segno di f_1	$-$	•	$+$
Segno di f_2	$+$	$+$	$+$
Segno di p	$-$	•	$+$

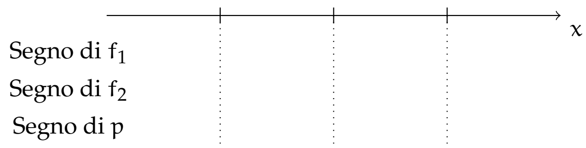
$\text{I.S.} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\} = (4, +\infty)$.

Procedura 4.1. *Risolvere le disequazioni di grado superiore al primo:*

a) scomporre il polinomio di grado n in fattori di primo e secondo grado;
b) studiare il segno dei singoli fattori;
c) costruire la tabella dei segni;
d) cercare gli intervalli in cui il polinomio dato assume il segno richiesto.

Esempio 4.18. $-2x(3-2x)-3x^2\left(2-\frac{3}{2}x\right) \geqslant 5\left(2x^2-\frac{3}{10}x\right)$.

Osserviamo che la disequazione proposta è polinomiale di terzo grado; eseguiamo i calcoli per portarla alla forma $p(x) \geqslant 0$. Si ottiene $3x^3-8x^2-3x \geqslant 0$ e con la scomposizione si ha $x\cdot(3x^2-8x-3) \geqslant 0$. Procediamo con lo studio dei segni dei singoli fattori: $f_1 = x \geqslant 0$ e $f_2 = 3x^2-8x-3 \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant -\frac{1}{3} \vee x \geqslant 3$ e compiliamo la tabella dei segni, che lasciamo fare al lettore.



Otteniamo: $\text{I. S.} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 0 \vee x \geqslant 3\right\}$.

Esempio 4.19. $64x^6-1<0$.

Il binomio al primo membro è una differenza di quadrati, quindi scomponendolo si ottiene: $64x^6-1=(8x^3-1)(8x^3+1)=(2x-1)(4x^2+2x+1)(2x+1)(4x^2-2x+1)$.

Si tratta allora di studiare il segno dei singoli fattori: $f_1 = 2x-1>0 \Rightarrow x>\frac{1}{2}$; $f_2 = 4x^2+2x+1>0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$; $f_3 = 2x+1>0 \Rightarrow x>-\frac{1}{2}$; $f_4 = 4x^2-2x+1>0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ e di determinare il segno richiesto dopo aver costruito la tabella dei segni.

Esempio 4.20. $x^4-4x^2-45>0$.

Il trinomio al primo membro è di quarto grado; sappiamo che con la sostituzione $x^2=t$ può essere ricondotto ad un trinomio di secondo grado la cui scomposizione in fattori risulta $(t-9)\cdot(t+5)$ e quindi la disequazione assegnata diventa: $(x^2-9)\cdot(x^2+5)>0$.

Si tratta allora di studiare il segno dei singoli fattori $f_1 = x^2-9>0 \Rightarrow x<-3 \vee x>3$ e $f_2 = x^2+5>0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ per poi determinare il segno richiesto dopo aver costruito la tabella dei segni.

✍ *Esercizi proposti:* 4.27, 4.28, 4.29, 4.30, 4.31, 4.32, 4.33, 4.34, 4.35, 4.36, 4.37, 4.38, 4.39,

4.40, 4.41, 4.42, 4.43, 4.44, 4.45, 4.46, 4.47, 4.48, 4.49, 4.50

4.5 Disequazioni fratte

Ricordiamo che una disequazione è *frazionaria* o *fratta* quando il suo denominatore contiene l'incognita.

Procedura 4.2. *Soluzione di una disequazione frazionaria:*

a) *applicando il primo principio di equivalenza si trasportano tutti i termini al primo membro e si calcola il risultato dell'equazione assegnata* $E(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$;
b) *si determinano le condizioni di esistenza ponendo* $D(x) \neq 0$;
c) *impostiamo la disequazione nella forma* $\frac{N(x)}{D(x)} \geqslant 0$, $\frac{N(x)}{D(x)} \leqslant 0$, $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$ *o* $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$ *a seconda del quesito posto da problema;*
d) *si studia il segno del numeratore e del denominatore, ponendo* $N(x) > 0$ *oppure* $N(x) \geqslant 0$ *(a seconda della richiesta) e* $D(x) > 0$;
e) *si costruisce la tabella dei segni, segnando con un punto pieno gli zeri della frazione, se richiesti;*
f) *si individuano gli intervalli in cui la frazione assume il segno richiesto.*

Vediamo attraverso alcuni esempi come procedere.

Esempio 4.21. Data l'espressione $E = \dfrac{4}{4x^2-1} + \dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{x}{1-2x}$ determinarne, al variare di x in $\mathbb{R}$, il segno.

Osservazioni preliminari

- L'espressione assegnata è frazionaria, quindi lo studio del segno deve essere circoscritto ai valori di x del dominio $\mathcal{D}$ dell'espressione stessa;
- studiare il segno di una espressione letterale significa stabilire in quale insieme si trovano i valori della variabile che la rendono positiva, negativa, nulla;
- ogni espressione contenente operazioni tra frazioni algebriche ha in generale come risultato una frazione algebrica.

Strategia risolutiva

a) semplifichiamo l'espressione assegnata: $E = \frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)}$;
b) determiniamo il dominio: C. E. $2x+1 \neq 0 \wedge 2x-1 \neq 0 \Rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$;
c) impostiamo la disequazione: $\frac{-2x^2+x+3}{(2x+1)\cdot(2x-1)} \geqslant 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema;
d) studiamo il segno di numeratore N e denominatore D:
   - segno di N: $-2x^2+x+3 \geqslant 0$ disequazione di secondo grado, quindi dall'equazione associata $-2x^2+x+3=0$, calcoliamo il discriminante: $\Delta = 1+24 = 25$, positivo per cui si hanno due soluzioni reali distinte; la parabola $y = -2x^2+x+3$ ha concavità verso il basso, per cui essendo $x_1 = -1$ e $x_2 = \frac{3}{2}$ si ha $N \geqslant 0$ per $-1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$;
   - segno di D: il denominatore è composto da due fattori di primo grado d_1 e d_2, quindi $d_1 > 0$ per $x > -\frac{1}{2}$ e $d_2 > 0$ per $x > \frac{1}{2}$;

e) costruiamo la tabella dei segni:

		-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{2}$		x
Segno di N	$-$	•	$+$		$+$		$+$	•	$-$	
Segno di d_1	$-$		$-$	○	$+$		$+$		$+$	
Segno di d_2	$-$		$-$		$-$	○	$+$		$+$	
Segno di E	$-$	•	$+$	○	$-$	○	$+$	•	$-$	

f) dalla tabella dei segni possiamo ottenere la risposta al problema posto:

- l'espressione E si annulla per $x = -1 \vee x = \frac{3}{2}$;
- l'espressione E è positiva per $x \in A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}\right\}$;
- l'espressione E è negativa per $x \in B = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \vee -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}\right\}$.

Esempio 4.22. Determiniamo l'insieme soluzione della disequazione: $3 - \dfrac{1}{2x+1} \geqslant \dfrac{1}{1-x}$.

a) Trasportiamo al primo membro la frazione del secondo membro $E = 3 - \frac{1}{2x+1} - \frac{1}{1-x}$ ed eseguiamo i calcoli ottenendo: $E = \frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)}$;

b) determiniamo il dominio: C. E. $2x+1 \neq 0 \ \wedge \ 1-x \neq 0 \ \Rightarrow \ \mathcal{D} = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$;

c) impostiamo la disequazione: $\frac{-6x^2+2x+1}{(2x+1)\cdot(1-x)} \geqslant 0$ che ci permetterà di rispondere al quesito posto dal problema;

d) studiamo il segno del numeratore e del denominatore:

- segno di N: $-6x^2+2x+1 \geqslant 0$ disequazione di secondo grado, quindi scritta l'equazione associata $-6x^2+2x+1 = 0$, calcoliamone il discriminante: $\frac{\Delta}{4} = 7$, positivo per cui si hanno due soluzioni $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{6}$; essendo il primo coefficiente negativo si ha $N \geqslant 0$ per $\frac{1-\sqrt{7}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{7}}{6}$;
- segno di D: $-2x^2+x+1 > 0$ disequazione di secondo grado; il denominatore ha due zeri reali $x = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 1$, il primo coefficiente è negativo, pertanto $D > 0$ per $-\frac{1}{2} < x < 1$ che rispetta le C. E.: $x_1 \neq -\frac{1}{2} \ \wedge \ x_2 \neq 1$;

e) compiliamo la tabella dei segni:

		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1-\sqrt{7}}{6}$		$\frac{1+\sqrt{7}}{6}$		1		x
Segno di N	$-$		$-$	•	$+$	•	$-$		$-$	
Segno di D	$-$	○	$+$		$+$		$+$	○	$-$	
Segno di E	$+$	○	$-$	•	$+$	•	$-$	○	$+$	

f) determiniamo I. S. $= \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2} \vee \frac{1-\sqrt{7}}{6} \leqslant x \leqslant \frac{1+\sqrt{7}}{6} \vee x > 1\right\}$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.51, 4.52, 4.53, 4.54, 4.55, 4.56, 4.57, 4.58, 4.59, 4.60, 4.61, 4.62, 4.63, 4.64, 4.65, 4.66, 4.67, 4.68, 4.69, 4.70

4.6 Sistemi di disequazioni

Ricordiamo che risolvere un sistema di disequazioni significa trovare l'insieme dei numeri reali che sono le soluzioni comuni alle disequazioni che lo compongono. Indicate con d_1, $d_2, \ldots, d_n$ le disequazioni che formano il sistema e $\mathrm{I.S.}_1, \mathrm{I.S.}_2, \ldots, \mathrm{I.S.}_n$ i rispettivi insieme soluzione, la soluzione del sistema, indicata con I. S., è data da $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2 \cap \ldots \cap \mathrm{I.S.}_n$.

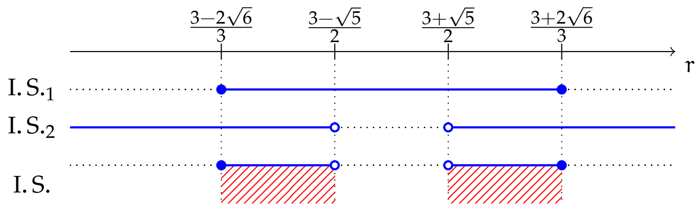
Problema 4.23. Nell'equazione $x^2 - (k-3)x + k^2 - 3k + 1 = 0$, determinare per quali valori del parametro k si ottengono soluzioni reali e concordi.

Abbiamo già affrontato un problema di questo tipo discutendo le equazioni parametriche di secondo grado e dunque sappiamo che la richiesta del problema esige che il discriminante (Δ) sia non negativo affinché le soluzioni siano reali e che il prodotto delle stesse sia positivo. Pertanto il problema è formalizzato con un sistema di disequazioni: $\begin{cases} \Delta \geqslant 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - 6k + 9 - 4k^2 + 12k - 4 \geqslant 0 \\ k^2 - 3k + 1 > 0 \end{cases}$.

Risolviamo separatamente le due disequazioni del sistema; indicati con $\mathrm{I.S.}_1$ e $\mathrm{I.S.}_2$ rispettivamente gli insiemi soluzione della prima e della seconda disequazione, l'insieme soluzione del sistema è dato da $\mathrm{I.S.} = \mathrm{I.S.}_1 \cap \mathrm{I.S.}_2$ (insieme intersezione degli insiemi soluzione delle due disequazioni).

- d_1: $-3k^2 + 6k + 5 \geqslant 0$ disequazione di secondo grado avente primo coefficiente negativo e $\frac{\Delta}{4} = 24 > 0$; la parabola $y = -3k^2 + 6k + 5 \geqslant 0$ ha concavità verso il basso e discriminante positivo, per cui essendo $x_1 = \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \vee x_2 = \frac{3+2\sqrt{6}}{3}$ si ottiene $\mathrm{I.S.}_1 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \leqslant x \leqslant \frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}$.
- d_2: $k^2 - 3k + 1 > 0$ disequazione di secondo grado avente il primo coefficiente positivo e $\Delta = 5 > 0$; la parabola $y = k^2 - 3k + 1 > 0$ ha concavità verso l'alto e discriminante positivo, quindi $x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \mathrm{I.S.}_2 = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Per determinare l'insieme soluzione del sistema rappresentiamo in un grafico gli insiemi soluzioni delle disequazioni risolte e visualizziamo l'insieme formato dai valori che appartengono contemporaneamente ai due: sull'asse reale depositiamo i valori numerici trovati e rappresentiamo su righe distinte i due insiemi soluzione: gli intervalli in cui cadono soluzioni della prima e della seconda disequazione rappresentano l'insieme soluzione del sistema.



$\mathrm{I.S.} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3-2\sqrt{6}}{3} \leqslant x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \vee \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x \leqslant \frac{3+2\sqrt{6}}{3}\right\}$.

Problema 4.24. Risolvere il seguente sistema di disequazioni: $\begin{cases} 2x^3-9x^2+10x-3 \leqslant 0 \\ \frac{x^2+x+1}{x^3-x} \geqslant 0 \\ 3-4x<0 \end{cases}$.

Il sistema è formato da tre disequazioni; risolviamo separatamente ciascuna disequazione:

- d_1: $2x^3-9x^2+10x-3 \leqslant 0$ di terzo grado, scomponiamo in fattori. $x=1$ è uno zero del polinomio quindi con la regola di Ruffini otteniamo d_1: $(x-1)(2x^2-7x+3) \leqslant 0$. L'equazione di secondo grado $2x^2-7x+3=0$ ha soluzioni reali $x_1=\frac{1}{2} \vee x=3$. Si tratta allora di studiare il segno dei singoli fattori e di determinare il segno richiesto dopo aver costruito la tabella dei segni:

Segno di		$\frac{1}{2}$		1		3		r
$x-1$	$-$		$-$	●	$+$		$+$	
$2x^2-7x+3$	$+$	●	$-$		$-$	●	$+$	
d_1	$-$	●	$+$	●	$-$	●	$+$	

  L'insieme soluzione, tenendo conto che cerchiamo i valori per i quali d_1 risulta minore o uguale a 0 è $\text{I.S.}_1=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{1}{2} \vee 1 \leqslant x \leqslant 3\right\}$.

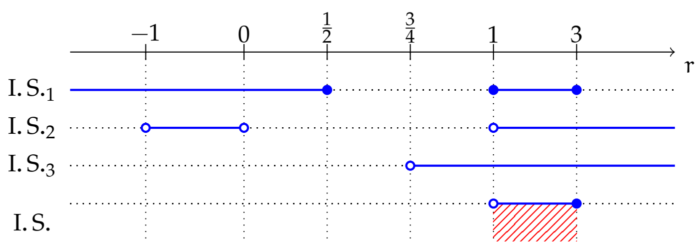
- d_2: $\frac{x^2+x+1}{x^3-x} \geqslant 0$ è una disequazione fratta, per prima cosa scomponiamo in fattori il denominatore: $\frac{x^2+x+1}{x(x^2-1)} \geqslant 0$. Studiamo poi il segno dei singoli fattori o divisori, tenendo conto che $x^2+x+1=0$ ha $\Delta<0$, per cui x^2+x+1 è sempre positivo.

Segno di		-1		0		1		r
x^2+x+1	$+$		$+$		$+$		$+$	
x	$-$		$-$	○	$+$		$+$	
x^2-1	$+$	○	$-$		$-$	○	$+$	
d_2	$-$	○	$+$	○	$-$	○	$+$	

  L'insieme soluzione, per $d_2 \geqslant 0$ è $\text{I.S.}_2=\{x \in \mathbb{R} \mid -1<x<0 \vee x>1\}$.

- d_3: $3-4x<0$ è di primo grado per cui l'insieme soluzione è $\text{I.S.}_3=\left\{x \in \mathbb{R} \mid x>\frac{3}{4}\right\}$.

Ricordiamo che la ricerca dell'insieme soluzione del sistema si effettua determinando l'insieme $\text{I.S.}_1 \cap \text{I.S.}_2 \cap \text{I.S.}_3$ individuabile attraverso il grafico:



Il sistema è quindi verificato per $1<x \leqslant 3$.

✍ *Esercizi proposti:* 4.71, 4.72, 4.73, 4.74, 4.75, 4.76, 4.77, 4.78, 4.79, 4.80, 4.81