Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

Analysis I

Vorlesung 44

Partielle Ableitungen

Es sei $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ eine durch

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto f(x_1, \ldots, x_n)$$

gegebene Abbildung. Betrachtet man für einen fixierten Index i die übrigen Variablen x_j, $j \neq i$, als Konstanten, so erhält man eine Abbildung $\mathbb{K} \to \mathbb{K}$, die nur von x_i abhängt (entsprechend betrachtet man die übrigen Variablen als Parameter). Falls diese Funktion, als Funktion in der einen Variablen x_i, differenzierbar ist, so sagen wir, dass f *partiell differenzierbar* bezüglich x_i ist und bezeichnen diese Ableitung mit $\frac{\partial f}{\partial x_i}$. Der Vorteil der partiellen Ableitungen liegt darin, dass man diese einfach berechnen kann. Jedoch hängen sie von der Wahl einer Basis ab. Die partiellen Ableitungen sind selbst Abbildungen von $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

Definition 44.1. Es sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und sei eine Abbildung $f\colon G \to \mathbb{K}^m$ durch

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

gegeben. Es sei $P = (a_1, \ldots, a_n) \in G$ ein Punkt. Für fixierte Indizes i und j betrachten wir die Abbildung

$$I \longrightarrow \mathbb{K},\, x_i \longmapsto f_j(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),$$

(wobei I ein reelles Intervall (bzw. eine offene Kreisscheibe) mit $a_i \in I$ derart sei, dass $\{(a_1, \ldots, a_{i-1})\} \times I \times \{(a_{i+1}, \ldots, a_n)\} \subseteq G$ gilt) als Funktion in einer Variablen, wobei die übrigen Variablen a_k, $k \neq i$, fixiert seien. Ist diese Funktion in a_i differenzierbar, so heißt f_j *partiell differenzierbar* in P bezüglich der Koordinate x_i. Man bezeichnet diese Ableitung (welche ein Element in $\mathbb{K}$ ist) mit

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

und nennt sie die i-te *partielle Ableitung* von f_j in P.

Die Abbildung f heißt *partiell differenzierbar* im Punkt P, falls für alle i und j die partiellen Ableitungen in P existieren. Die i-te partielle Ableitung von f in P wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(P) := \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P)\right)$$

bezeichnet.

Diese Definition führt insbesondere die i-te partielle Ableitung einer Funktion $f\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ auf den Ableitungsbegriff in einer Variablen zurück, indem die anderen Variablen „festgehalten“ und als Parameter betrachtet werden. Daher bedeutet die Existenz der i-ten partiellen Ableitung von f im Punkt $(a_1, \ldots, a_n)$ einfach die Existenz des Limes

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+s,a_{i+1},\ldots,a_n) - f(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{s}.$$

Beispiel 44.2. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto \frac{xy^3}{x^2+y^2}.$$

Um die partielle Ableitung nach x (in jedem Punkt) zu berechnen, betrachtet man y als eine Konstante, so dass eine nur von x abhängige Funktion dasteht. Diese wird gemäß den Ableitungsregeln für Funktionen in einer Variablen abgeleitet, so dass sich

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3(x^2+y^2) - xy^3(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2y^3+y^5}{x^4+2x^2y^2+y^4}$$

ergibt. Für die partielle Ableitung nach y betrachtet man x als eine Konstante und erhält

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - xy^3(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2+xy^4}{x^4+2x^2y^2+y^4}.$$

Die partiellen Ableitungen sind im Wesentlichen die Richtungsableitungen in Richtung der Standardvektoren. Insbesondere ergeben partielle Ableitungen nur dann Sinn, wenn eine Basis im Vektorraum, der den Definitionsbereich einer Abbildung darstellt, gewählt worden ist, bzw. wenn eben von vornherein ein $\mathbb{K}^n$ betrachtet wird.

Lemma 44.3. *Es sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen, $P \in G$ ein Punkt und sei*

$$f : G \longrightarrow \mathbb{K}^m,$$
$$(x_1,\ldots,x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)),$$

eine Abbildung. Dann ist f in P genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen von sämtlichen Komponentenfunktionen f_j in P in Richtung eines jeden Standardvektors existieren. In diesem Fall stimmt die i-te partielle Ableitung $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$ von f in P mit der Richtungsableitung $(D_{e_i} f_j)(P)$ von f_j in P in Richtung des i-ten Standardvektors e_i überein, und f ist in P genau dann partiell differenzierbar, wenn die Richtungsableitungen in P in Richtung eines jeden Standardvektors existieren.

Beweis. Es sei $P = (a_1,\ldots,a_n)$. Wir können uns wegen Lemma 43.8 auf eine einzige Komponentenfunktion f_j beschränken. Da partielle Ableitungen die Ableitungen von Funktionen in einer Variablen sind, ergibt sich

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(P)$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{f_j(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i+s,a_{i+1},\ldots,a_n)-f_j(a_1,\ldots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\ldots,a_n)}{s}\\
&= \lim_{s\to 0, s\neq 0} \frac{f_j(P+se_i)-f_j(P)}{s}\\
&= (D_{e_i}f_j)(P).
\end{aligned}
$$

□

Definition 44.4. Es sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und sei eine Abbildung

$$
\begin{aligned}
&f : G \longrightarrow \mathbb{K}^m,\\
&\quad (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)),
\end{aligned}
$$

gegeben. Dann heißt f *partiell differenzierbar*, wenn f in jedem Punkt $P \in G$ partiell differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\colon\ G \longrightarrow \mathbb{K}^m,\ P \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(P) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(P),\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(P)\right),$$

die i-te *partielle Ableitung* von f.

Definition 44.5. Es sei $G \subseteq \mathbb{K}^n$ offen und sei eine Abbildung

$$
\begin{aligned}
&f : G \longmapsto \mathbb{K}^m,\\
&\quad (x_1,\ldots,x_n) \longmapsto f(x_1,\ldots,x_n) = (f_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,f_m(x_1,\ldots,x_n)),
\end{aligned}
$$

gegeben, die in $P \in G$ partiell differenzierbar sei. Dann heißt die Matrix

$$\operatorname{Jak}(f)_P := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(P) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(P) \end{pmatrix}$$

die *Jacobi-Matrix* zu f im Punkt P.

Beispiel 44.6. Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^2$, die durch

$$(x,y,z) \longmapsto \left(xy^2 - z^3, \sin(xy) + x^2 \cdot \exp z\right) = (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$$

gegeben sei. Die partiellen Ableitungen von f_1 sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^2,\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2xy,\ \frac{\partial f_1}{\partial z} = -3z^2\,,$$

und die partiellen Ableitungen von f_2 sind

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = y\cos(xy) + 2x\cdot \exp z,\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = x\cdot\cos(xy),\ \frac{\partial f_2}{\partial z} = x^2\cdot\exp(z)\,.$$

Damit erhalten wir für einen beliebigen Punkt $P = (x,y,z)$ die Jacobi-Matrix

$$\begin{pmatrix} y^2 & 2xy & -3z^2 \\ y\cos(xy) + 2x\exp(z) & x\cos(xy) & x^2\exp(z) \end{pmatrix}.$$

Für einen speziellen Punkt, z.B. $P = (2,1,3)$, setzt man einfach ein:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -27 \\ \cos(2) + 4\exp(3) & 2\cos(2) & 4\exp(3) \end{pmatrix}.$$

Höhere Richtungsableitungen

Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und $G \subseteq V$ eine offene Teilmenge. Für eine Abbildung $\varphi\colon G \to W$ und einen fixierten Vektor $v \in V$ ist die Richtungsableitung in Richtung v (falls diese existiert) selbst eine Abbildung

$$D_v\varphi\colon\ G \longrightarrow W,\ P \longmapsto (D_v\varphi)(P).$$

Als solche ergibt es Sinn zu fragen, ob $D_v\varphi$ in Richtung $v \in V$ differenzierbar ist. Wir sprechen dann von *höheren Ableitungen*. Dies wird präzisiert durch die folgende induktive Definition.

Definition 44.7. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume,

$$f\colon\ G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge $G \subseteq V$ und $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Man sagt, dass die *höhere Richtungsableitung* von f in Richtung $v_1, \ldots, v_n$ existiert, wenn die höhere Richtungsableitung in Richtung $v_1, \ldots, v_{n-1}$ existiert und davon die Richtungsableitung in Richtung v_n existiert. Sie wird mit

$$D_{v_n}(...(D_{v_2}(D_{v_1}f))\ldots)$$

bezeichnet.

Mit partiellen Ableitungen schreibt man höhere Ableitungen als

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_k},\ \text{etc.}$$

Definition 44.8. Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume und

$$f\colon\ G \longrightarrow W$$

eine Abbildung auf einer offenen Menge $G \subseteq V$. Man sagt, dass f n-mal *stetig differenzierbar* ist, wenn für jede Auswahl $v_1, \ldots, v_n$ von n Vektoren aus V die höhere Richtungsableitung

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}f)\ldots)$$

in Richtung $v_1, \ldots, v_n$ existiert und stetig ist.

Einmal stetig differenzierbar bedeutet also, dass die Richtungsableitung $D_v\varphi$ in jede Richtung $v \in V$ existiert und stetig ist.

Der Satz von Schwarz

Beispiel 44.9. Für die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^4y^7,$$

sind die partiellen Ableitungen gleich $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3y^7$ und $\frac{\partial f}{\partial y} = 7x^4y^6$. Die zweiten partiellen Ableitungen sind gleich

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} &= 12x^2y^7,\\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} &= 28x^3y^6,\\ \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} &= 42x^4y^5\end{aligned}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = 28x^3y^6.$$

Der folgende Satz heißt *Satz von Schwarz* (oder auch *Satz von Clairaut*).

SATZ 44.10. *Es sei $G \subseteq V$ offen und $\varphi\colon G \to W$ eine Abbildung, so dass für $u, v \in V$ die zweiten Richtungsableitungen $D_vD_u\varphi$ und $D_uD_v\varphi$ existieren und stetig sind. Dann gilt*

$$D_vD_u\varphi = D_uD_v\varphi.$$

Beweis. Durch Betrachten der einzelnen Komponenten von φ bezüglich einer Basis von W können wir annehmen, dass $W = \mathbb{K}$ und $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist. Wir wollen den eindimensionalen Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwenden. Sei $P \in G$ ein fixierter Punkt. Wir betrachten die Abbildung $(s,t) \mapsto \varphi(P + su + tv)$ und studieren diese für hinreichend kleine s und t. Wir fixieren diese (für den Moment) und betrachten die differenzierbare Abbildung

$$\sigma \longmapsto \varphi(P + \sigma u + tv) - \varphi(P + \sigma u)\,.$$

Nach dem Mittelwertsatz gibt es ein (von s und t abhängiges) $s_1 \in \,]0,s[$ mit

$$\begin{aligned}&\varphi(P + su + tv) - \varphi(P + su) - \varphi(P + tv) + \varphi(P)\\ =\ & s \cdot ((D_u\varphi)(P + s_1u + tv) - (D_u\varphi)(P + s_1u)).\end{aligned}$$

Nun wenden wir erneut den Mittelwertsatz auf die differenzierbare Abbildung

$$\tau \longmapsto (D_u\varphi)(P + s_1u + \tau v)$$

an, und erhalten die Existenz eines $t_1 \in \,]0,t[$ mit

$$(D_u\varphi)(P + s_1u + tv) - (D_u\varphi)(P + s_1u) = t \cdot (D_vD_u\varphi)(P + s_1u + t_1v).$$

Zusammen erhalten wir

$$\varphi(P+su+tv)-\varphi(P+su)-\varphi(P+tv)+\varphi(P) = st\cdot(D_vD_u\varphi)(P + s_1u + t_1v).$$

Wenden wir denselben Trick in umgekehrter Reihenfolge an, so erhalten wir s_2 und t_2, so dass dieser Ausdruck auch gleich

$$st \cdot (D_uD_v\varphi)(P + s_2u + t_2v)$$

ist. Somit schließen wir für (hinreichend kleine) gegebene $s, t > 0$, dass positive $s_1, s_2 \leq s$ und $t_1, t_2 \leq t$ existieren mit

$$(D_v D_u \varphi)(P + s_1 u + t_1 v) \,=\, (D_u D_v \varphi)(P + s_2 u + t_2 v).$$

Für $s \to 0$ und $t \to 0$ konvergieren auch s_1, s_2, t_1 und t_2 gegen 0. Die Stetigkeit der beiden zweiten Richtungsableitungen impliziert für $s, t \to 0$ die Gleichheit

$$(D_v D_u \varphi)(P) \,=\, (D_u D_v \varphi)(P).$$

□

Ein Spezialfall des Satzes von Schwarz ist, dass für eine zweifach stetig differenzierbare Funktion

$$f\colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

die Gleichheit

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \,=\, \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

gilt.

Korollar 44.11. *Es seien V und W endlichdimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, $G \subseteq V$ offen und*

$$\varphi\colon\, G \longrightarrow W$$

eine n-mal stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Auswahl von n Vektoren aus V. Dann gilt für jede Permutation $\sigma \in S_n$ die Gleichheit

$$D_{v_n}(...D_{v_2}(D_{v_1}\varphi)) \,=\, D_{v_{\sigma(n)}}(...D_{v_{\sigma(2)}}(D_{v_{\sigma(1)}}\varphi)).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 44.19. □

Abbildungsverzeichnis