Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

Vorlesung 28

Nicht allein in
Rechnungssachen Soll der
Mensch sich Mühe machen;
Sondern auch der Weisheit
Lehren Muß man mit
Vergnügen hören.

Wilhelm Busch, Max und Moritz

Folgen

DEFINITION 28.1. Es sei M eine Menge. Eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M,\ n \longmapsto x_n,$$

nennt man auch eine *Folge* in M. Eine Folge wird häufig in der Form

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

geschrieben.

Die Elemente x_n heißen dabei die *Glieder der Folge*.

Der Divisionsalgorithmus

Wir besprechen nun das Verfahren des „schriftlichen Dividierens", den Divisionsalgorithmus.

VERFAHREN 28.2. Es seien a, b natürliche Zahlen mit b positiv. Beim *Divisionsalgorithmus* $a : b$ führt man sukzessive die (unendlich vielen) Divisionen mit Rest

$$\begin{aligned} a &= z_0 \cdot b + r_0, \\ 10 \cdot r_0 &= z_{-1} \cdot b + r_{-1}, \\ 10 \cdot r_{-1} &= z_{-2} \cdot b + r_{-2}, \\ 10 \cdot r_{-2} &= z_{-3} \cdot b + r_{-3}, \ldots \end{aligned}$$

aus, d.h. man berechnet rekursiv aus r_{-i} mittels

$$10 \cdot r_{-i} = z_{-i-1} \cdot b + r_{-i-1}$$

die z_{-i-1} und die r_{-i-1}. Die Folge z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, heißt die *Ziffernfolge* und die Folge z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, heißt die *Restefolge* des Divisionsalgorithmus.

Dieses Verfahren ist aus der Schule bekannt. Als Ergebnis wird die „unendliche Kommazahl“

$$z, z_{-1}z_{-2}z_{-3}\ldots$$

notiert, wobei die ganze Zahl z selbst in ihrer Dezimalentwicklung genommen wird. Unklar ist dabei, welchen genauen Sinn ein solcher Ausdruck besitzt. Dies lässt sich im Rahmen der Konvergenz von Folgen befriedigend präzisieren. Die Indizierung ist hier so gewählt, dass sich die Ziffer z_{-i} (für $i \geq 1$) auf 10^{-i} bezieht.

LEMMA 28.3. *Es seien a, b natürliche Zahlen mit b positiv und es seien z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, und r_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, die im Divisionsalgorithmus berechneten Folgen. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Die r_{-i} liegen zwischen 0 und $b-1$.*
(2) *Die z_{-i}, $i \in \mathbb{N}_+$, liegen zwischen 0 und 9.*
(3) *Wenn für ein k der Rest $r_{-k} = 0$ ist, so sind für alle $i > k$ auch $z_{-i} = 0$. und $r_{-i} = 0$.*
(4) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ und ein $\ell \in \mathbb{N}_+$ mit $\ell < b$ derart, dass für die Ziffern mit $i > k$ die Beziehung*

$$z_{-i-\ell} = z_{-i}$$

gilt.
(5) *Wenn man statt $a : b$ den Divisionsalgorithmus $ma : mb$ mit $m \in \mathbb{N}_+$ ausführt, so ändert sich die Ziffernfolge nicht (wohl aber die Restefolge). Die Ziffernfolge ist also für die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ wohldefiniert.*
(6) *Bei einem Dezimalbruch*

$$\frac{a}{b} = \frac{\sum_{j=0}^{t} c_j 10^j}{10^s}$$

ist

$$z_0 = \sum_{j \geq s}^{t-s} c_j 10^{j-s}$$

(was bei $t < s$ als 0 zu lesen ist) und

$$z_{-i} = c_{-i+s}$$

(was für $-i < -s$ als $z_{-i} = 0$ zu lesen ist).
(7) *Der Bruch $\frac{a}{b}$ ist genau dann ein Dezimalbruch, wenn ein Rest r_{-i} gleich 0 ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn die Ziffernfolge z_{-i} ab einem k konstant gleich 0 ist.*

Beweis. (1) Ist eine Eigenschaft der Division mit Rest.
(2) Wegen

$$r_{-i} \leq b-1$$

ist

$$10 \cdot r_{-i} \leq 10 \cdot (b-1).$$

Bei der Division von $10 \cdot r_{-i}$ durch b ist somit der ganzzahlige Anteil echt kleiner als 10.

(3) Dies folgt unmittelbar aus dem rekursiven Aufbau des Divisionsalgorithmus.

(4) Im Fall, dass für ein k der Rest $r_{-k} = 0$ ist, ergibt sich dies unmittelbar aus (3), wobei man $\ell = 1$ wählen kann. Nehmen wir also an, dass alle r_{-i} von 0 verschieden sind. Da die Reste

$$r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}$$

allesamt zwischen 1 und $b-1$ liegen, muss es in ihnen irgendwann eine Wiederholung geben, sagen wir, dass

$$r_{-k-\ell} = r_{-k}$$

gilt. Da z_{-i-1} und r_{-i-1} allein von r_{-i} abhängt, wiederholt sich dann die Restfolge und die Ziffernfolge

$$r_{-k}, r_{k-1}, \ldots, r_{-k-\ell+1} \text{ bzw. } z_{-k}, z_{k-1}, \ldots, z_{-k-\ell+1}$$

unendlich oft periodisch.

(5) Aus der Division mit Rest

$$10 \cdot r_{-i} = z_{-i-1} \cdot b + r_{-i-1}$$

ergibt sich direkt die entsprechende Division mit Rest

$$10 \cdot (m \cdot r_{-i}) = z_{-i-1} \cdot (m \cdot b) + (m \cdot r_{-i-1}),$$

woraus die Behauptung folgt.

(6) Der Divisionsalgorithmus ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{t} c_j 10^j &= \left(\sum_{j=s}^{t} c_j 10^{j-s} \right) 10^s + \sum_{j=0}^{s-1} c_j 10^j, \\ 10 \cdot \left(\sum_{j=0}^{s-1} c_j 10^j \right) &= c_{s-1} 10^s + 10 \cdot \left(\sum_{j=0}^{s-2} c_j 10^j \right), \\ 10^2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{s-2} c_j 10^j \right) &= c_{s-2} 10^s + 10^2 \cdot \left(\sum_{j=0}^{s-3} c_j 10^j \right), \end{aligned}$$

u.s.w., woraus die Aussagen ablesbar sind.

(7) Wenn ein Dezimalbruch vorliegt, so können wir wegen (5) annehmen, dass

$$b = 10^s$$

eine Zehnerpotenz ist. Dann folgt die Aussage mit der abbrechenden Ziffernfolge aus (6).

Wenn ein $r_{-k} = 0$, so sind nach (3) alle folgenden Ziffern gleich 0. Wenn umgekehrt $z_{-i} = 0$ für alle $i \geq k$ gilt, so wird die Rekursionsbedingung für $i \geq k$ zu

$$10 \cdot r_{-i} = r_{-i-1},$$

und dies führt bei $r_k \neq 0$ zu einem Widerspruch, da nach Lemma 25.5 die Zehnerpotenzen schließlich die Zahl b überschreiten. Wenn ein $r_{-k} = 0$ ist, so folgt rekursiv, dass die vorhergehenden Reste

$$r_{-k+1}, r_{-k+2}, \ldots, r_{-1}, r_0$$

Dezimalbrüche sind. Somit ist auch $\frac{a}{b}$ ein Dezimalbruch.

□

Wir haben insbesondere bewiesen, dass beim Divisionsalgorithmus irgendwann eine Periodizität auftritt und gezeigt, wie diese zu finden ist. Das kleinste positve ℓ, das die Eigenschaft aus (4) erfüllt, heißt die *Periodenlänge* der Division. Die Eigenschaft (6) bedeutet, dass die Ziffernfolge, die sich aus dem allgemeinen Divisionsalgorithmus im Falle der Division durch eine Zehnerpotenz ergibt, mit der endlichen Kommazahl aus Definition 26.4 übereinstimmt. Das Ergebnis des Divisionsalgorithmus wird als

$$z_0, z_{-1}z_{-2} \ldots z_{-k}\overline{z_{-k-1} \cdots z_{-k-\ell}}$$

notiert, wobei die überstrichenen Zahlen die Periode darstellen.

Bemerkung 28.4. Über die Periodenlänge kann man einige präzise Aussagen manchen, die wir im Moment noch nicht beweisen können. Es seien a und b teilerfremd und b sei auch teilerfremd zu 10. Dann hängt die Periodenlänge ℓ der Division $a : b$ allein davon ab, welche minimale Zehnerpotenz 10^k mit $k \geq 1$ bei Division durch b den Rest 1 besitzt. Für den Fall $a = 1$ siehe Aufgabe 28.9. Der minimale Exponent ist die Periodenlänge. Wenn $b = p$ eine Primzahl ist, so ist diese Periodenlänge ein Teiler von $p - 1$. Wenn die Periodenlänge genau $p-1$ ist, so gilt dies bei sämtlichen Divisionen $a : p$ mit a teilerfremd zu p, und die Reihenfolge der Ziffern ist eine zyklische Vertauschung der Reihenfolge der Ziffern zu $1 : p$. Siehe als Beispiel hierzu Aufgabe 28.3.

Dezimalbruchfolgen

Die Ziffern z_{-i}, die sich beim Divisionsalgorithmus $a : b$ ergeben, sind in ihrer genauen Bedeutung nicht einfach zu verstehen. Im Spezialfall, dass ein Dezimalbruch vorliegt, erhalten wir eine abbrechende Entwicklung $z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \ldots z_{-n}$, wobei wir diese Ziffern direkt aus der Dezimalentwicklung des Zählers ablesen können. Wenn kein Dezimalbruch vorliegt, so erhalten wir eine unendliche Ziffernfolge z_{-i}. Zunächst muss man sich klar machen, dass jeder an einer bestimmten Ziffer abbrechende Ausschnitt daraus, also

$$z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \cdots z_{-n}$$

nicht die Zahl $\frac{a}{b}$ ist, obwohl es sich in einem zu präzisierenden Sinn um eine Approximation davon handelt. Eine Formulierung wie

$$z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3} \cdots z_{-n} \cdots$$

hingegen ist ziemlich aussagelos. Eine Formulierung wie

$$z_0, z_{-1}z_{-2}z_{-3}\ldots z_{-k}\overline{z_{-k-1}\ldots z_{-k-\ell}}$$

kodiert zwar die volle Information aus dem Divisionsalgorithmus, das Problem ist aber, ob und inwiefern dies eine Zahl ist.

Definition 28.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge der Form

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

mit $a_n \in \mathbb{Z}$ und

$$\frac{a_n}{10^n} \leq \frac{a_{n+1}}{10^{n+1}} < \frac{a_n + 1}{10^n}$$

heißt *Dezimalbruchfolge*.

Achtung! Eine Dezimalbruchfolge ist nicht das gleiche wie eine Folge von Dezimalbrüchen. Die Folge, die abwechselnd die Werte 0 und 1 besitzt, besteht auch nur aus Dezimalbrüchen. Hier ist wichtig, das bei einer Dezimalbruchfolge bei jedem Folgenglied sich die „Genauigkeit“ um ein $\frac{1}{10}$ erhöht, das folgende Glied x_{n+1} liegt in einem Intervall der Länge $\frac{1}{10^n}$, das vom Vorgänger x_n festgelegt ist.

Wir werden zeigen, dass es für jedes Element x in einem archimedisch angeordneten Körper eine zugehörige Dezimalbruchfolge gibt, und dass diese im Fall einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ aus dem Divisionsalgorithmus ablesbar ist.

Verfahren 28.6. Es sei $x \in K$ ein Element in einem archimedisch angeordneten Körper K. Dann nennt man die über $n \in \mathbb{N}$ durch

$$x = u_n \cdot 10^{-n} + v_n$$

mit $u_n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq v_n < 10^{-n}$ gegebene Folge

$$x_n = u_n \cdot 10^{-n}$$

die *Dezimalbruchfolge* zu x.

Die definierende Gleichung in diesem Verfahren kann man auch als von der Gleichung

$$10^n x = u_n + v_n \cdot 10^n$$

herstammend interpretieren. Es ist also einfach

$$u_n = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor$$

und

$$x_n = u_n 10^{-n} = \lfloor x \cdot 10^n \rfloor \cdot 10^{-n},$$

was zugleich zeigt, dass diese Folge existiert und eine Dezimalbruchfolge im Sinne der obigen Definition ist. Die Glieder x_n dieser Folge approximieren die gegebene Zahl x optimal unter allen Dezimalbrüchen mit dem vorgegebenen Nenner 10^n, wie die folgende Aussage zeigt.

Satz 28.7. *Es sei $x \in K$ ein Element in einem archimedisch angeordneten Körper K und es sei (x_n), $n \in \mathbb{N}$, die zugehörige Dezimalbruchfolge. Dann ist*

$$x_n \leq x < x_n + \frac{1}{10^n},$$

d.h. der n-te Dezimalbruch der Folge approximiert die Zahl x bis auf einen Fehler von maximal $\frac{1}{10^n}$. Es liegt eine Dezimalbruchfolge im Sinne von Definition 28.5 vor.

Beweis. In der Definition der Dezimalbruchfolge wird

$$x = u_n \cdot 10^{-n} + v_n$$

mit $u_n \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq v_n < 10^{-n}$ berechnet. Daher ist einerseits

$$x_n = u_n \cdot 10^{-n} \leq x$$

und andererseits

$$x = u_n \cdot 10^{-n} + v_n = x_n + v_n < x_n + \frac{1}{10^n}.$$

Die Eigenschaft

$$x_n \leq x_{n+1}$$

ergibt sich auch unmittelbar. □

Lemma 28.8. *Es seien a, b natürliche Zahlen mit b positiv und es seien z_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, und r_{-i}, $i \in \mathbb{N}$, die im Divisionsalgorithmus berechneten Folgen. Dann ist*

$$x_n = \sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i}$$

die Dezimalbruchfolge zu $\frac{a}{b}$. Insbesondere ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i} \leq \frac{a}{b} < \sum_{i=0}^{n} z_{-i} 10^{-i} + 10^{-n}.$$

Beweis. Aus den definierenden Gleichungen des Divisionsalgorithmus ergibt sich sukzessive

$$\begin{aligned}
a &= z_0 b + r_0 \\
&= z_0 b + \frac{10 \cdot r_0}{10} \\
&= z_0 b + \frac{z_{-1} \cdot b + r_{-1}}{10} \\
&= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + r_{-1} 10^{-1} \\
&= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + 10 \cdot r_{-1} 10^{-2} \\
&= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + (z_{-2} b + r_{-2})\, 10^{-2} \\
&= z_0 b + z_{-1} \cdot 10^{-1} \cdot b + z_{-2} b 10^{-2} + r_{-2} 10^{-2}
\end{aligned}$$

und insgesamt

$$a = b\left(\sum_{i=0}^{n} z_{-i}10^{-i}\right) + r_{-n}10^{-n}.$$

Division durch b ergibt

$$\frac{a}{b} = \sum_{i=0}^{n} z_{-i}10^{-i} + \frac{r_{-n}}{b}10^{-n} = \left(\sum_{i=0}^{n} z_{-i}10^{n-i}\right)10^{-n} + \frac{r_{-n}}{b}10^{-n}.$$

Dies stimmt mit den Festlegungen aus dem Verfahren überein, in dem die Dezimalbruchfolge zu $\frac{a}{b}$ definiert wurde. $\square$

Konvergente Folgen

Die oben beschriebene Eigenschaft, dass eine rationale Zahl durch die zugehörige (im Divisonsalgorithmus berechneten) Dezimalbruchfolge beliebig genau approximiert wird, wird durch folgenden Begriff präzisiert, der im zweiten Semester eine tragende Rolle spielen wird.

Definition 28.9. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei $x \in K$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert.), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Korollar 28.10. *Es sei $x \in K$ ein Element in einem archimedisch angeordneten Körper K. Dann konvergiert die zugehörige Dezimalbruchfolge (x_n), $n \in \mathbb{N}$, gegen x.*

Beweis. Nach Satz 28.7 ist

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{10^n}.$$

Wenn ein $\epsilon > 0$ vorgegeben ist, so gibt es nach Korollar 25.6 ein m mit

$$\frac{1}{10^m} \leq \epsilon.$$

Für alle $n \geq m$ ist dann

$$|x_n - x| \leq \frac{1}{10^n} \leq \frac{1}{10^m} \leq \epsilon.$$

$\square$

Korollar 28.11. *Zu einer rationalen Zahl* $x = \frac{a}{b}$ *konvergiert die Dezimalbruchfolge, die man aus dem Divisionsalgorithmus erhält, gegen* x.

Beweis. Dies folgt direkt aus Korollar 28.10 in Verbindung mit Lemma 28.8. $\square$