



Als Alternative wurde über ein Vorlesungslama ...

Rechenregeln für Folgen

Lemma 8.1. *Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

- (2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

- (3) *Für $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} cx_n = c \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

- (4) *Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

- (5) *Es sei $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{x}.$$

Beweis. (1). Es seien x bzw. y die Grenzwerte der beiden Folgen. Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Konvergenz der ersten Folge gibt es zu

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$$

ein n_0 derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon'$$

gilt. Ebenso gibt es wegen der Konvergenz der zweiten Folge zu $\epsilon' = \frac{\epsilon}{2}$ ein n'_0 derart, dass für alle $n \geq n'_0$ die Abschätzung

$$|y_n - y| \leq \epsilon'$$

gilt. Sei

$$N = \max(n_0, n'_0).$$

Dann gilt für alle $n \geq N$ (unter Verwendung der Dreiecksungleichung) die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (x + y)| &= |x_n + y_n - x - y| \\ &= |x_n - x + y_n - y| \\ &\leq |x_n - x| + |y_n - y| \\ &\leq \epsilon' + \epsilon' \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

(2). Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Die konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist nach Lemma 7.10 insbesondere beschränkt und daher existiert ein $D > 0$ mit $|x_n| \leq D$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ und $y := \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$. Wir setzen $C := \max\{D, |y|\}$. Aufgrund der Konvergenz gibt es natürliche Zahlen N_1 und N_2 mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für alle $n \geq N := \max\{N_1, N_2\}$. Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \\ &\leq C \frac{\epsilon}{2C} + C \frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Für die anderen Teile siehe Aufgabe 8.1, Aufgabe 8.2 und Aufgabe 8.3. \square

Wir beschreiben eine typische Anwendung des vorstehenden Satzes.

Beispiel 8.2. Wir betrachten die durch

$$x_n = \frac{-5n^3 + 6n^2 - n + 8}{11n^3 + 7n^2 + 3n - 1}$$

definierte Folge und wollen wissen, ob und gegebenenfalls wogegen sie konvergiert. Man kann Lemma 8.1 nicht unmittelbar anwenden, da weder der

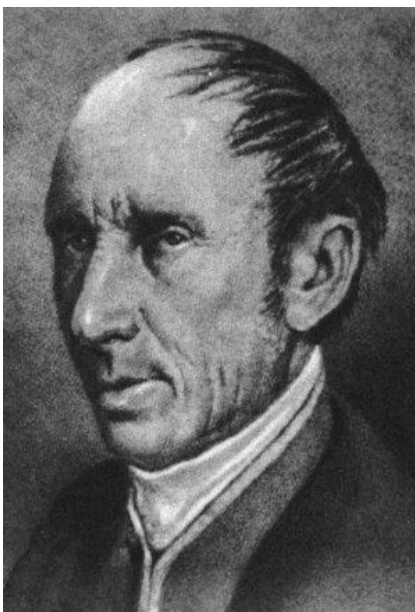
Zähler noch der Nenner konvergiert. Allerdings kann man den folgenden Trick anwenden, man schreibt

$$x_n = \frac{-5n^3 + 6n^2 - n + 8}{11n^3 + 7n^2 + 3n - 1} = \frac{(-5n^3 + 6n^2 - n + 8)\frac{1}{n^3}}{(11n^3 + 7n^2 + 3n - 1)\frac{1}{n^3}} = \frac{-5 + \frac{6}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3}}{11 + \frac{7}{n} + \frac{3}{n^2} - \frac{1}{n^3}}.$$

In dieser Form sind die Zähler- und die Nennerfolge konvergent, und zwar gegen -5 bzw. 11 , und daher konvergiert die Folge gegen $-\frac{5}{11}$.

Cauchy-Folgen

Ein Problem des Konvergenzbegriffes ist, dass zur Formulierung der Grenzwert verwendet wird, den man unter Umständen noch gar nicht kennt. Wenn man beispielsweise die durch das babylonische Wurzelziehen konstruierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (sagen wir zur Berechnung von $\sqrt{5}$) mit einem rationalen Startwert betrachtet, so ist dies eine Folge aus rationalen Zahlen. Wenn wir diese Folge in \mathbb{R} betrachten, wo $\sqrt{5}$ existiert, so ist die Folge konvergent. Innerhalb der rationalen Zahlen ist sie aber definitiv nicht konvergent. Es ist wünschenswert, allein innerhalb der rationalen Zahlen den Sachverhalt formulieren zu können, dass die Folgenglieder beliebig nahe zusammenrücken, auch wenn man nicht sagen kann, dass die Folgenglieder einem Grenzwert beliebig nahe zustreben. Dazu dient der Begriff der Cauchy-Folge.



Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Definition 8.3. Eine reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist

Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.

Satz 8.4. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert x . Sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir wenden die Konvergenzeigenschaft auf $\epsilon/2$ an. Daher gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon/2 \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Für beliebige $n, m \geq n_0$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|x_n - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Also liegt eine Cauchy-Folge vor. \square

Definition 8.5. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zu jeder streng wachsenden Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $i \mapsto n_i$, heißt die Folge

$$i \mapsto x_{n_i}$$

eine *Teilfolge* der Folge.

Definition 8.6. Die reelle Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *wachsend*, wenn $x_{n+1} \geq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und *streng wachsend*, wenn $x_{n+1} > x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *fallend*, wenn $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und *streng fallend*, wenn $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

Als gemeinsamen Begriff für (streng) wachsende oder (streng) fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung (streng) *monotone Folgen*.

Lemma 8.7. *Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge. Dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es sei $b \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke, also $x_n \leq b$ für alle Folgenglieder x_n . Wir nehmen an, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Cauchy-Folge ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für jedes n_0 Indizes $n > m \geq n_0$ mit $x_n - x_m \geq \epsilon$ gibt (wir können die Betragstriche weglassen). Wegen der Monotonie gibt es dann auch zu jedem n_0 ein $n > n_0$ mit $x_n - x_{n_0} \geq \epsilon$. Wir können daher induktiv eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen definieren durch

$$n_1 > n_0 \text{ so, dass } x_{n_1} - x_{n_0} \geq \epsilon,$$

$$n_2 > n_1 \text{ so, dass } x_{n_2} - x_{n_1} \geq \epsilon,$$

etc. Andererseits gibt es aufgrund des Archimedesaxioms ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$k\epsilon > b - x_{n_0}.$$

Die Summe der ersten k Differenzen der Teilfolge x_{n_j} , $j \in \mathbb{N}$, ergibt

$$\begin{aligned} x_{n_k} - x_{n_0} &= (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + (x_{n_{k-1}} - x_{n_{k-2}}) + \cdots + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_0}) \\ &\geq k\epsilon \\ &> b - x_{n_0}. \end{aligned}$$

Dies impliziert $x_{n_k} > b$ im Widerspruch zur Voraussetzung, dass b eine obere Schranke der Folge ist. \square

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen

Innerhalb der rationalen Zahlen gibt es Cauchy-Folgen, die nicht konvergieren, beispielsweise die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{5}$. Man kann sagen, dass eine nichtkonvergente Cauchy-Folge eine Lücke entdeckt und adressiert. Innerhalb der reellen Zahlen werden diese Lücken aufgefüllt.

Definition 8.8. Ein angeordneter Körper K heißt *vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert (also in K einen Grenzwert besitzt).

Die rationalen Zahlen sind nicht vollständig. Die Vollständigkeit fordern wir für die reellen Zahlen als das letzte Axiom.

Axiom 8.9. Die reellen Zahlen \mathbb{R} sind ein vollständiger archimedisch angeordneter Körper.

Damit haben wir alle Axiome der reellen Zahlen zusammengetragen: die Körperaxiome, die Anordnungsaxiome und das Vollständigkeitsaxiom. Diese Eigenschaften legen die reellen Zahlen eindeutig fest, d.h. wenn es zwei Modelle \mathbb{R}_1 und \mathbb{R}_2 gibt, die beide für sich genommen diese Axiome erfüllen, so kann man eine bijektive Abbildung von \mathbb{R}_1 nach \mathbb{R}_2 angeben, der alle mathematischen Strukturen erhält (so etwas nennt man einen „Isomorphismus“).

Die Existenz der reellen Zahlen ist nicht trivial. Vom naiven Standpunkt her kann man, und das haben wir bisher getan und werden wir auch weiterhin tun, die Vorstellung einer „kontinuierlichen Zahlengerade“ zugrunde legen, und dies als Existenznachweis akzeptieren. In einer strengeren mengentheoretischen Begründung der Existenz geht man von \mathbb{Q} aus und konstruiert die reellen Zahlen als die Menge der Cauchy-Folgen in \mathbb{Q} mit einer geeigneten Identifizierung.

Folgerungen aus der Vollständigkeit

Korollar 8.10. *Eine beschränkte und monotone Folge in \mathbb{R} konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Lemma 8.7 liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in \mathbb{R} . \square

Diese Aussage ist auch die Grundlage dafür, dass die Dezimalentwicklung stets eine (eindeutige) reelle Zahl definiert. Eine (unendliche) Dezimalentwicklung

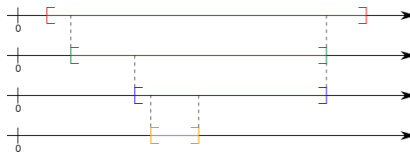
$$a, a_{-1}a_{-2}a_{-3}\dots$$

mit $a \in \mathbb{N}$ (wir beschränken uns auf nichtnegative Zahlen) und $a_{-n} \in \{0, \dots, 9\}$ ist nämlich die Folge der rationalen Zahlen

$$x_0 := a, x_1 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10}, x_2 := a + a_{-1} \cdot \frac{1}{10} + a_{-2} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2, \text{ etc.}$$

Diese ist offenbar monoton wachsend. Sie ist ferner nach oben beschränkt, beispielsweise durch $a + 1$, so dass dadurch in der Tat eine Cauchy-Folge und somit eine reelle Zahl definiert wird.

Intervallschachtelungen



Definition 8.11. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n], n \in \mathbb{N},$$

in \mathbb{R} heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}},$$

gegen 0 konvergiert.

Die Intervalllängen müssen also insbesondere eine fallende Nullfolge bilden. Es wird nicht eine bestimmte Geschwindigkeit dieser Konvergenz verlangt. Die *Intervallhalbierung* ist eine spezielle Intervallschachtelung, bei der man zusätzlich verlangt, dass das folgende Intervall jeweils die untere oder die obere Hälfte des Vorgängerintervalls ist.

Satz 8.12. *Es sei I_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in \mathbb{R} . Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe 8.20. □

Satz 8.13. Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und jedem $k \in \mathbb{N}_+$ gibt es eine eindeutige nichtnegative reelle Zahl x mit

$$x^k = c.$$

Beweis. Wir definieren rekursiv eine Intervallschachtelung $[a_n, b_n]$, und zwar setzen wir

$$a_0 = 0$$

und b_0 eine beliebige reelle Zahl mit $b_0^k \geq c$. Es seien die Intervallgrenzen bis zum Index n bereits definiert, die Intervalle seien ineinander enthalten und es gelte dabei

$$a_n^k \leq c \leq b_n^k.$$

Wir setzen

$$a_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k \leq c, \\ a_n & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$b_{n+1} := \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2}, & \text{falls } \left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^k > c, \\ b_n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dadurch wird eine Grenze beibehalten und die andere Grenze wird durch das arithmetische Mittel der beiden Vorgängergrenzen ersetzt. Insbesondere gelten die angegebenen Eigenschaften für alle Intervalle und es liegt eine Intervallschachtelung vor. Es sei x die durch diese Intervallschachtelung gemäß Satz 8.12 festgelegte reelle Zahl. Nach Aufgabe 8.21 gilt

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Damit ist nach Lemma 8.1 (2)

$$x^k = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^k.$$

Wegen der Konstruktion der Intervallgrenzen ist dies nach Lemma 7.12 sowohl $\leq c$ als auch $\geq c$, also ist $x^k = c$. \square

Diese eindeutig bestimmte Zahl wird mit $\sqrt[k]{c}$ oder mit $c^{1/k}$ bezeichnet.

Bestimmte Divergenz

Definition 8.14. Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} heißt *bestimmt divergent* gegen $+\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \geq s \text{ für alle } n \geq N$$

gibt.

Sie heißt *bestimmt divergent* gegen $-\infty$, wenn es zu jedem $s \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \leq s \text{ für alle } n \geq N$$

gibt.