(10) $\frac{y}{m}+\frac{x}{n}=2,\quad \frac{y}{m}-\frac{x}{n}=1$ 答 $x=18,\quad y=12$

(11) $\frac{m}{x}-\frac{n}{y}=a,\quad \frac{x}{y}=\frac{q}{p}$ 答 $x=\frac{n}{2},\quad y=\frac{3m}{2}$

答 $x=\frac{mp-nq}{ap},\quad y=\frac{mp-nq}{aq}$

(12) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{8}{15},\quad \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{2}{15}$ 答 $x=3,\quad y=5$

(13) $\frac{x+\frac{y}{2}-3}{x-5}+7=0,\quad \frac{3y-10(x-1)}{6}+\frac{x-y}{4}+1=0$ 答 $x=4,\quad y=12$

(14) $(a+b)x-(a-b)y=4ab,\quad (a-b)x+(a+b)y=2a^2-2b^2$ 答 $x=a+b,\quad y=a-b$

(15) $\frac{3x+5y}{20}+\frac{5x-3y}{8}=3,\quad \frac{x+1}{y+2}=\frac{2}{3}$ 答 $x=5,\quad y=7.$

(16) $ay+bx=2xy,\quad cy+dx=3xy$

(解) 本題ハ次ノ如ク原兩方程式ヲxyニテ除スベシ、然ルトキハ

$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=2$, 及 $\frac{c}{x}+\frac{d}{y}=3$ 然ル後通法ヲ用ヒテx yヲ求ムベシ。

答 $x=\frac{ad-bc}{2d-3b},\quad y=\frac{ad-bc}{3a-2c}$

(17) $x-y=3,\quad \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}=\frac{11}{3}$ 答 $x=7,\quad y=4.$

第百九章　多元一次方程式。

一未知數ヲ有スル方程式ハ一ツノ方程式ニテ其未知數ヲ求メ得ベク二未知數ヲ有スル方程式ハ二ツノ方程式ニテ其未知數ヲ求ムルコトヲ得ベキコトハ已ニ解明セリ、之ヲ推ストキハ三未知數ヲ有スル方程式ハ三ツアレバ其未知數ヲ求ムルコトヲ得ベキコトヲ知ル、即チ方程式ノ數ハ其未知數ノ數丈ケアレバ其各未知數ヲ求ムルコトニ於テ充分ナリトス。

二ツヨリ以上ノ未知數ヲ有スル方程式ニ於テ各未知數ガ一次項ナルトキ之ヲ多元一次方程式トイフ。

二元一次方程式ニ於テハ兩方程式ニ於テ其一未知數(例ヘバy)ヲ消シテ他ノ一未知數(x)ノ方程式ヲ一ツ得、以テ一元一次方程式ノ解法ニヨリ其根ヲ求メタリ。故ニ三元一次方程式ニ於テハ三ツノ方程式ノ各二ツヅツニテx y zノ三未知數ノ內其一ツ例ヘバzヲ消シテx yノ二元一次方程式二ツトナシ以テ二元一次方

程式ノ解法ヲ用ヒ其根ヲ求ムルコトヲ要ス、乃左ノ如シ。

三元一次方程式。

$5x-y+5z=31$……(1)　$7x+3y-2z=16$……(2)　$2x+5y+3z=39$……(3)

右ノ方程式ヲ解スルニハ先ツ(1)ニ2ヲ乘シ(2)ニ5ヲ乘ズレバ

$$\left.\begin{array}{l}10x-2y+10z=62\\35x+15y-10z=80\end{array}\right\}\text{加法ニヨリ}\quad 45x+13y=142\text{……(4)}$$

(2)ニ3ヲ乘ジ(3)ニ2ヲ乘スレバ

$$\left.\begin{array}{l}21x+9y-6z=48\\4x+10y+6z=78\end{array}\right\}\text{加法ニヨリテ}\quad 25x+19y=126\text{……(5)}$$

即チ(1)(2)(3)ノ三方程式ニ於テzヲ消シ(4)(5)ノ二元一次方程式ヲ得タリ、此ニ於テ

(4)ニ19ヲ乘シ(5)ニ13ヲ乘ズレバ

$$\left.\begin{array}{l}855x+247y=2698\\325x+247y=1638\end{array}\right\}\text{減法ニヨリ}\quad 530x=1060\qquad\therefore x=2$$

$x=2$ヲ(4)ニ代用スレバ　$45\times2+13y=142$　$\therefore y=4$

$x=2,\ y=4$ヲ(1)ニ代用スレバ　$5\times2-4+5z=31$　$\therefore z=5$

上ノ方程式ハ一般ノ公則ニヨリタルナリ、若シ之ヲ隨意ニ解カンニハ次ノ如クセザルベカラズ。

$5x-y+5z=31$……(1)　$7x+3y-2z=16$……(2)

$2x+5y+3z=39$……(3)

(1)(2)(3)ノ三方程式ニ於テ最モ容易ニ消シ易キハxニアラズzニアラズyニアリ、何トナレバyハ(1)ニ於テ係數-1ナレバナリ、乃チ(1)ニ(3)ヲ乘ジ之ニ(2)ヲ加フレバ

$$3(5x-y+5z)+7x+3y-2z=31\times3+16$$

即　$22x+13z=109$……(4)　又(1)ニ5ヲ乘ジ之ニ(3)ヲ加フレバ

$$5(5x-y+5z)+2x+5y+3z=31\times5+39$$

即　$27x+28z=194$……(5)　(5)ヨリ(4)ヲ減ズレバ

$$27x+28z-(22x+13z)=194-109$$

即　$5x+15z=85$　即　$x+3z=17$

之ニ22ヲ乘ジ(4)ヨリ減ズレバ

$$22x+13z-22(x+3z)=109-17\times22$$

即　$-53z=-265$　$\therefore$　$z=5$　以下前ニ同ジ。

第百十章　前說ニヨリテ若干個ノ未知數ヲ有スル通同方程式ハ其內ノ一未知數ヲ消去スレバ方程式モ亦一ツ減ズベシ乃チ四元一次方程式ハ四ツノ方程式アリテ其內ノ一未知數ヲ消去スレバ三元一次方程式三ツトナリ又其內ノ一未知數ヲ消去スレバ二元一次方程式二ツトナリ又其內ノ一未知數ヲ消去スレバ一元一次方程式一ツトナリ終ニ最後ニ存在セル一未知數ヲ發見スルニ至ルベシ。之ヲ要スルニ多元方程式ハ到底一元方程式ニ導クモノナリ。

第百十一章　多元方程式ノ解法ノ要用ナルモノヲ左ニ示ス實ニ多元方程式ハ解法ニ巧拙ノ相違アルコト著シキモノナリ。

(第一例)　$\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1$……(1)　$\frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=24$……(2)

$\frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=14$……(3)　ヲ解セヨ。

(1)ニ2ヲ乘ジ之ニ(3)ヲ加フレバ　$\frac{2}{x}+\frac{4}{y}-\frac{6}{z}+\frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=2+24$　即　$\frac{7}{x}+\frac{8}{y}=26$……(4)

(1)ニ3ヲ乘ジ之ニ(3)ヲ加フレバ

$\frac{3}{x}+\frac{6}{y}-\frac{9}{z}+\frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=3+14$　即　$\frac{10}{x}-\frac{2}{y}=17$……(5)

(5)ニ4ヲ乘ジ(4)ニ加フレバ

即　$\frac{7}{x}+\frac{8}{y}+\frac{40}{x}-\frac{8}{y}=26+68$　$\frac{47}{x}=94$　$\therefore$　$x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ヲ(5)ニ代用スレバ　$\frac{10}{\frac{1}{2}}-\frac{2}{y}=17$　$\therefore$　$y=\frac{2}{3}$

$x=\frac{1}{2}$及$y=\frac{2}{3}$ヲ(1)ニ代用スレバ　$2+3-\frac{3}{z}=1$　$\therefore$　$z=\frac{3}{4}$

(第二例)　$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=3$……(1)　$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=5$……(2)　$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=4$……(3)　ヲ解セヨ。

(1)(3)ノ和ヨリ(2)ヲ減スレバ

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=3+4-5$　即　$\frac{2x}{a}=2$　$\therefore$　$x=a$

$x=a$ヲ(1)ニ代用スレバ　$1+\frac{y}{b}=3$　$\therefore$　$y=2b$

又$x=a$ヲ(3)ニ代用スレバ　$1+\frac{z}{c}=4$　$\therefore$　$z=3c$

(第三例)　$\frac{x+2y}{7}=\frac{3y+4z}{8}=\frac{5x+6z}{9}$　及　$x+y-z=126$ヲ解セヨ。

$\frac{x+2y}{7}=\frac{3y+4z}{8}$ノ分母ヲ拂ヒ且ツ簡約ニスレバ

$8x-5y-28z=0$……(A)　$\frac{3y+4z}{8}=\frac{5x+6z}{9}$ニ於テ同法ヲ施セバ

$40x-27y+12z=0$……(B)　(A)ニ5ヲ乘ジ(B)ヨリ減ズレバ

$40x-27y+12z-5(8x-5y-28z)=0$

即 $-2y+152z=0$ ∴ $y=76z$

$y=76z$ ヲ (A) ニ代用スレバ $8x-5\times76z-28z=0$ ∴ $x=51z$

$y=76z$ 及 $x=51z$ ヲ $x+y-z=126$ ニ代用スレバ

$51z+76z-z=126$ ∴ $z=1$ ∴ $x=51$ ∴ $y=76$

(第四例) 左ノ方程式ヲ解セヨ。

$x+ay+a^2z+a^3w+a^4=0$ ……(1)

$x+by+b^2z+b^3w+b^4=0$ ……(2)

$x+cy+c^2z+c^3w+c^4=0$ ……(3)

$x+dy+d^2z+d^3w+d^4=0$ ……(4)

(1)ヨリ(2)ヲ減スレバ $(a-b)y+(a^2-b^2)z+(a^3-b^3)w+a^4-b^4=0$

即 $y+(a+b)z+(a^2+ab+b^2)w+a^3+a^2b+ab^2+b^3=0$ ……(5)

(2)ヨリ(3)ヲ減スレバ $(b-c)y+(b^2-c^2)z+(b^3-c^3)w+b^4-c^4=0$

$y+(b+c)z+(b^2+bc+c^2)w+b^3+b^2c+bc^2+c^3=0$ ……(6)

(3)ヨリ(4)ヲ減スレバ $(c-d)y+(c^2-d^2)z+(c^3-d^3)w+c^4-d^4=0$

即 $y+(c+d)z+(c^2+cd+d^2)w+c^3+c^2d+cd^2+d^3=0$ ……(7)

(5)ヨリ(6)ヲ減スレバ

$(a-c)z+\{a^2-c^2+b(a-c)\}w+a^3-c^3+b^2(a-c)+b(a^2-c^2)=0$

$z+(a+c+b)w+a^2+ac+c^2+b^2+ab+bc=0$ ……(8)

(6)ヨリ(7)ヲ減シ同法ヲ施セバ

$z+(b+d+c)w+b^2+bd+d^2+c^2+bc+cd=0$ ……(9)

(8)ヨリ(9)ヲ減スレバ $(a-d)w+a^2-d^2+c(a-d)+b(a-d)=0$

∴ $w=-(a+b+c+d)$

w ノ値ヲ(8)ニ代用スレバ

$z-(a+b+c)(a+b+c+d)+a^2+ac+c^2+b^2+ab+bc=0$

∴ $z=ab+bc+ca+ad+bd+cd$

z 及 w ノ値ヲ(6)ニ代用スレバ

$y+(b+c)(ab+bc+ca+ad+bd+cd)-(b^2+bc+c^2)(a+b+c+d)+b^3+b^2c+bc^2+c^3=0$

$\therefore \quad y=-(abc+bcd+cda+dab)$

y z w ノ値ヲ(1)ニ代用スレバ

$$x-a(abc+bcd+cda+dab)+a^2(ab+bc+ca+ad+bd+cd)-a^3(a+b+c+d)+a^4=0$$

$\therefore \quad x=abcd.$

例題廿七

次ノ各通同方程式ヲ解セヨ。

(1) $x+2y-z=2,\quad 2x-y+3z=23,\quad x-5y+6z=1$　　答 $x=1,\quad y=2,\quad z=3$

(2) $3x-2y-2z=2,\quad 5x-y+3z=23,\quad x-5y+6z=1$　　答 $x=4,\quad y=3,\quad z=2$

(3) $x+y=1,\quad x+z=8,\quad y+z=-3$　　答 $x=6,\quad y=-5,\quad z=2$

(4) $x+5y+6z=53,\quad x+3y+3z=30\quad x+y+z=12$　　答 $x=3,\quad y=4,\quad z=5$

(5) $x-2y=2,\quad 3x+z=28,\quad 2y-3z=4$　　答 $x=10,\quad y=4,\quad z=-2$

(6) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}z=62,\quad \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y+\frac{1}{5}z=47\quad \frac{1}{4}x+\frac{1}{5}y+\frac{1}{6}z=38$
　　答 $x=24,\quad y=60,\quad z=120$

(7) $x+y+z=56,\quad x+y-z=4,\quad x-y+z=28$　　答 $x=16\quad y=14,\quad z=26$

(8) $\frac{6y-4x}{3z-7}=\frac{5z-x}{2y-3z}=\frac{y-2z}{3y-2x}=1$　　答 $x=10,\quad y=7,\quad z=3$

(9) $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{6},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3\frac{5}{6},\quad \frac{4}{x}+\frac{3}{y}=\frac{4}{z}$　　答 $x=\frac{2}{3},\quad y=\frac{3}{4},\quad z=\frac{2}{5}$

(10) $y+z=a,\quad z+x=b,\quad x+y=c$　　答 $x=\frac{1}{2}(b+c-a)$ 等,

(11) $x+y+z=a+b+c,\quad x+a=y+b=z+c$　　答 $x=\frac{2}{3}(a+b+c)-a$ 等,

(12) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\quad \frac{x}{a}+\frac{y}{c}+\frac{z}{b}=1,\quad \frac{x}{b}+\frac{y}{a}+\frac{z}{c}=1$　　答 $x=y=z=\frac{abc}{ab+bc+ca}$

(13) $x+11a=y+z,\quad h=2(x+z)-11a,\quad z=3(x+y)-11a$　　答 $x=a,\quad y=5a,\quad x=7a$

(14) $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}-\frac{3}{z}=1,\quad \frac{5}{x}+\frac{4}{y}+\frac{6}{z}=24,\quad \frac{7}{x}-\frac{8}{y}+\frac{9}{z}=14$　　答 $x=\frac{1}{2},\quad y=\frac{2}{3},\quad z=\frac{3}{4}$

(15) $v+x+y+z=14,\quad 2v+x=2y+z-2,\quad 3v-x+2y+2z=19,\quad \frac{v}{3}+\frac{x}{4}+\frac{y}{5}+\frac{z}{2}=4,$
　　答 $v=3,\quad x=4,\quad y=5,\quad z=2$

(16) $x+y+z=0,\quad (a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0,\quad abx+acy+bcz=1.$

(解) 第一方程式ヨリ　$(b+c)x+(b+c)y+(b+c)z=0$
　　第二方程式ヨリ　$(a+b)x+(a+c)y+(b+c)z=0$　減法ニヨリ

$(a-c)x+(a-b)y=o$ ……(A)　　$b(a-c)x+c(a-b)y=1$ ……(B)

第一方程式ヨリ　$\left.\begin{array}{l} bcx+bcy+bcz=o \\ abx+acy+bcz=1 \end{array}\right\}$ 減法ニヨリテ
第三方程式ヨリ

(A)
(B) ニヨリテ　$x=\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}$，　$y=\dfrac{-1}{(a-b)(b-c)}$

$z=-x-y=\dfrac{1}{(a-b)(b-c)}-\dfrac{1}{(a-c)(b-c)}=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$.

(17)　$4x-5y+mz=7x-11y+nz=x+y+pz=3$

(解)　$\left.\begin{array}{l} x+y+pz=3 \;\therefore\; 4x+4y+4pz=12 \\ 4x-5y+mz=3 \end{array}\right\}$ 減法ニヨリ　$9y+(4p-m)z=9$ ……(A)

又　$\left.\begin{array}{l} 7x+7y+7qz=21 \\ 7x-11y+nz=3 \end{array}\right\}$ 減法ニヨリテ　$18y+(7p-n)z=18$ ……(B)

(A)
(B) ニヨリ y ヲ消去スレバ　$(p-2m+n)z=0$　$\therefore z=0$

(A) ヨリ　$9y=9$　$\therefore y=1$　　又　$x+1=3$　　$\therefore x=2$

第百十二章　通同方程式ノ問題。

二未知數或ハ二ヨリ以上ノ未知數ヲ有スル通同方程式ノ解法ヲ用ヒテ解スベキ問題ヲ次ニ示スベシ。

(第一例)　鶴龜合セテ百廿頭足數合セテ三百廿本アリ、各幾頭ナリヤ。

(解)鶴ノ頭數ヲ x トシ龜ノ頭數ヲ y トスレハ

$x+y=120$,　$2x+4y=320$ ヲ得、之ニ由リテ $x=80$ 及 $y=40$

答　鶴八十頭、　龜四十頭。

(第二例)　分數アリ、分子ニ1ヲ加フレハ $\frac{1}{3}$ トナリ分母ニ1ヲ加フレハ $\frac{1}{4}$ トナル、原分數如何。

(解)　分子ヲ x トシ分母ヲ y トスレハ

$\dfrac{x+1}{y}=\dfrac{1}{3}$　及　$\dfrac{x}{y+1}=\dfrac{1}{4}$　此兩方程式ヲ解スレハ　$x=4$　及　$y=51$

即原分數ハ $\frac{x}{y}$ ニシテ $\frac{4}{15}$ ナリ。

(第三例)　茶五斤珈琲三斤ノ價合セテ三圓五十錢、茶八斤珈琲六斤ノ價合セテ六圓ナリ、各一斤ノ價如何。

(解) 茶一斤ノ價ヲx錢トシ珈琲一斤ノ價ヲy錢トスレバ

$5x+3y=350,\quad 8x+6y=600$ 此兩方程式ヲ解スレバ

$x=50,\quad y=33\frac{1}{3}$ 答一斤ノ價茶ハ五十錢、珈琲ハ卅三錢三厘。

第四例) 清水ト海水ト合セテ九「ガロン」アリ、其重サ九十一「ポンド」四分ノ一ナリ、但シ清水一「ガロン」ノ重サ十「ポンド」ニシテ、海水ノ比重ハ一個奇零〇二五ナリ、清水海水各何「ガロン」ナリヤ。

解) 比重(*specific gravity*)トハ水ニ何倍ストイヘル數ヲイフ。

故ニ清水チx「ガロン」海水ヲy「ガロン」トスレバ

$10x+10y\times1.025=91\frac{1}{4}$ 又 $x-y=9$

(此兩方程式ヲ解スレバ $x=4,\quad y=5$ 答 清水四「ガロン」 海水五「ガロン」。

第五例) 大中小ノ三數アリ、其比五、三、二ノ如シ、而シテ大中ノ差ハ中小ノ差ノ三倍ヨリ十二個多シ、各幾許ナリヤ。

(解) 大ヲxトシ中ヲyトシ小ヲzトスレバ

$\frac{x}{5}+\frac{y}{3}=\frac{z}{2},\quad x-y=3(y-z)-12$

第一ノ方程式ニ於テ $z=\frac{2}{5}x,\quad y=\frac{3}{5}x$ ヲ得ベシ。

之ヲ第二ノ方程式ニ代用スレバ

$x-\frac{3}{5}x=3\left(\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}x\right)12$ 故ニ $x=60$

又 $y=\frac{3}{5}\times60=36,\quad z=\frac{2}{5}\times60=24$

答 大六十個、中三十六個、小廿四個。

第六例) 甲乙丙ノ三人共力シテ一事ヲナセバa日ニシテ了ルベシ、然ルニ三人共力シテ此事ヲナスノ間ニ於テ甲ハm日休業シ乙ハn日休業セシヲ以テb日ヲ經過シテ成了セシトイフ、但シ甲ノ作業ノ力ハ丙ノp倍ナリ、然ルトキハ各一人ニテ此事ヲナセバ各幾日ヲ要スベキカ。

甲一人ニテ成了スル日數ヲx日トシ乙ヲy日トシ丙ヲz日トス。

又此一事ノ作業ノ量ヲwトスレバ甲乙丙各一日ノ作業ノ量ハ、順次ニ$\frac{w}{x}$ $\frac{w}{y}$ $\frac{w}{z}$トナル、又甲乙丙共力シテ一日ニ作ス業ノ量ハ$\frac{w}{a}$ナルヲ以テ

$\frac{w}{x}+\frac{w}{y}+\frac{w}{z}=\frac{w}{a}\quad\therefore\quad\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$ ……………(1)

三人共力ノ間甲ハm日乙ハn日休業セシガ故ニ甲ハ$b-m$日、乙ハ$b-n$日、丙ハb日

間作業セリ、故ニ

$$\frac{w}{x}(b-m)+\frac{w}{y}(b-n)+\frac{w}{z}b=w \quad \therefore \quad \frac{b-m}{x}+\frac{b-n}{y}+\frac{b}{z}=1 \cdots\cdots (2)$$

次ニ甲ノ力ハ丙ノp倍ナルヲ以テ

$$\frac{w}{x}=\frac{w}{z}\times p \quad \therefore \quad \frac{1}{x}=\frac{p}{z} \cdots\cdots (3)$$

(3)ニ於テ$z=px$ヲ得、之ヲ(1)ニ代用スレバ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{px}=\frac{1}{a} \cdots\cdots (4)$$

又$z=px$ヲ(2)ニ代用スレバ

$$\frac{b-m}{x}+\frac{b-n}{y}+\frac{b}{px}=1 \cdots\cdots (5)$$

(4)ニ$b-n$ヲ乘ズレバ

$$\frac{b-n}{x}+\frac{b-n}{y}+\frac{b-n}{px}=\frac{b-n}{a}$$

之ヨリ(5)ヲ減ズレバ次ノ如シ。

$$\frac{m-n}{x}-\frac{n}{px}=\frac{p-n}{a}-1 \quad \therefore \quad x=\frac{a(pm-pn-n)}{p(b-n-a)},$$

又

$$z=px=\frac{a(pm-pn-n)}{b-n-a},$$

x及zヲ(1)ニ代用スレバ

$$\frac{p(b-n-a)}{a(pm-pn-n)}+\frac{1}{y}+\frac{b-n-a}{a(pm-pn-n)}=\frac{1}{a}$$

$$\therefore \quad y=1\div\frac{1}{a}\left\{1-\frac{(b-n-a)(p+1)}{pm-p-n}\right\}.$$

例題廿七

(1) 甲乙兩數アリ、甲ノ五倍ト乙ノ三倍ノ和七十七個ニシテ、甲ノ三倍ト乙ノ五倍ノ和七十五個ナリ、各如何。

(2) 茶五斤砂糖三斤ノ價合セテ十五圓九十錢ナリ、若シ一斤ニ付砂糖ヲ十錢安クシ茶ヲ十錢高クスレバ茶三斤砂糖十斤ノ價合セテ十一圓三十錢トナルベシ、各一斤ノ價幾許ナリヤ。

(3) 一個ニ付五錢ノ梨ト三錢ノ柿ト二錢ノ桃ヲ合セテ百五十個買ヒテ其價五圓十錢ナリ、而シテ此内桃ヲ四分ノ三、柿ヲ五分ノ四、梨ヲ十分ノ九丈ケ原價ニ賣リテ四圓二十九錢ヲ領收シ、又其殘ヲ凡ベテ一割高ク賣リテ代金八拾九錢一厘領收セリ、各總數幾個ナリヤ。

(4) 三位ノ數アリ、此數ヨリ九十九ヲ減ズレバ一位ノ數字ト百位ノ數字ト其位置ヲ變換ス、又原數ニ三十一ヲ加フレバ百十一ニテ整除スルコトヲ得ベシトイフ、原數幾何ナリヤ。

(5) 分數アリ、其分子ニ1ヲ加フレバ三分ノ一トナリ、又其分母ニ1ヲ加フレバ四分ノ一トナルトイフ、此分數ヲ求ム。

(6) 上下二種ノ茶アリ、上ヲ十五斤下ヲ二十八斤買ヒ代金并セテ二百六十圓ヲ拂ヘリ、然ルニ之ヲ賣リ下茶ニ於テハ三割ヲ利シ上茶ニ於テハ一割ヲ損セシガ故ニ差引三十圓ヲ利セリ、各一斤ノ價如何。

(7) 金千圓ヲ三人ニ分ツニ第一ト第二ノ所得ヲ合スレバ第三ノ所得ノ三倍ヨリ小ナルコト第二ノ所得ノ二倍丈ケナリ、又第二ト第三ノ所得ヲ合スレバ第一ヨリ小ナルコト第二ノ所得ノ二倍丈ケナリトイフ、然ル𪜈ハ各幾許ヲ得ヘシヤ。

(8) 四數アリ、順次ニ等差ヲ以テ增加ス、而シテ第一數ニ二ヲ乘ジ第二數ニ四ヲ乘ズレバ其和ハ等差ノ五十二倍ニ等シ、又第三ト第四ノ和ハ第一ト第二ノ和ヨリ大ナルコト八個ナリ、各幾許ナリヤ。

(9) 兩分數アリ、甲ノ分母ハ乙ノ分母ニ五倍シ甲ノ分子ハ乙ノ分子ヨリモ七個大ナリ、而シテ甲ハ乙ヨリモ小ナルコト一個二十五分ノ十二ナリトイフ、各分數ヲ求ム、但シ甲ノ分母ト乙ノ分子ノ和ハ三十七個ナリ。

(10) 若干數アリ、之ヲ甲數ニテ除スレバ最大ノ殘數ヲ得テ其整商ハ十四個ナリ、又原數ヲ乙數ニテ除スレバ整商十七個ヲ得テ殘ハ前ヨリモ二個小ナリトイフ、原數如何。但シ甲乙ノ差ハ二個ナリ。

(11) 一室アリ、長ヲ四尺增シ、幅ヲ五尺增セバ積モ亦百十六平方尺ヲ增スベク、長ヲ五尺增シ幅ヲ四尺增セバ積モ亦百十三平方尺ヲ增スベシトイフ、然ル𪜈ハ此室ノ長及ビ幅各幾尺ナリヤ。

(12) 二ツノ直方形ナル地面アリ、第一地ノ長ハ第二地ノ長ヨリ十間長クシテ第一地ノ幅ハ第二地ノ幅ヨリ五間短シ、而シテ第一地ハ第二地ヨリモ面積ノ大ナルコト千三百五十坪ナリ、又第一地ノ周邊ハ三百二十間ナリトイフ、然ル𪜈ハ第一地ノ長及幅幾何ナリヤ。

(13) 甲乙ノ原金アリ、甲ヲ年利一割、乙ヲ年利八分ニテ貸ス𪜈ハ一年ノ利金合セテ百四十八圓ヲ得ベシ、而シテ此兩原金チ等シキ利割ニテ貸シ前ト等額ノ利金ヲ得ンニハ其利割ヲ幾許ニ定メテ宜シキヤ、但シ甲ノ原金ハ乙ノ原金ヨリモ多キコト四百圓ナリ。

(14) 滊車アリ、定距離ヲ或速力ニテ通行セリ、然ルニ每時ノ速ヲ增スコト六哩ナレバ前時限ヨリモ四時早ク此距離ヲ通行シ得ベク、又每時ノ速ヲ減スルコト六哩ナ

レバ時限モ六時ヲ増サヾルヘカラズ、此距離ヲ求ム。

(15) 人アリ甲地ヨリ乙地迄ノ距離ノ三分ノ一ヲ毎時a里ノ速力ナル車ニ乘リ殘ノ距離ヲ毎時$2b$里ノ速ニテ歩行セリ、若シ此人ガ毎時$3c$里ノ速力ニテ行クトキハ前ノ時間ニテ此距離ヲ往復シ得ベシトイフ、然ルトキ$\frac{2}{c}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ナルコトヲ証セヨ。

(16) ABCノ三地ガ三角形ノ角點ノ位置ヲ成セリ、今或人ガ其一地ヨリ次ノ地迄歩行シ又其次ノ地迄ハ乘車シ終ニ原出發地ニ着スル迄ハ乘馬ニテ行クベキ方法ナリ、然ルニ此人一里ノ道ヲ歩行スル時間ハa分時、乘車スル時間ハb分時、乘馬スル時間ハc分時ナリ、若シ此人ガBヨリ出發スレバ$a+c-b$時間ニシテ原處ニ着スベク、又Cヨリ出發スレバ$b+a-c$時間ニシテ原處ニ着スベク、又Aヨリ出發スレバ$c+b-a$時間ニシテ原處ニ着スベシトイフ、然ルトキハ此總里數幾里ナリヤ。

(17) 或一地ヨリ或一都府ニ到ルニ最初ノ道路ニ甲乙丙ノ三道アリ、今或馬車ガ毎時二里十八町ノ速ニテ午前六時ニ出發シテ甲道ヲ行ケバ午後一時ニ其都府ニ着スベク、又午前七時三十分ニ出發シテ乙道ヲ行ケバ午後三時ニ其都府ニ着スベク、又午前六時三十分ニ出發シテ丙道ヲ行ケバ翌日ノ午前一時前ニ於テ其都府ニ着スベシトイフ、但シ三道ハ途中ニ於テ相合シテ一道トナルモノトス、而シテ三道ガ一處ニ會合スル迄ノ距離ヲ比較スレバ甲道ハ乙丙二道ノ和ニ等シトイフ、三道ノ距離及ビ三道ガ合シテ一道トナリシ處ヨリ先都府迄ノ距離各幾何ナリヤ。

以上ノ問題ハ隨分新奇ナルモノナレバ宜シク研究スベシ。

答ノ部

(1) 甲十、乙九。
(2) 茶三圓、砂糖三十錢。
(3) 梨五十個、柿六十個、桃四十個。
(4) 七百四十六。
(5) 十五分ノ四。
(6) 上八圓、下五圓。
(7) 第一、六百圓、第二、百圓、第三、三百圓。
(8) 第一、十六個、第二、十八個、第三、二十個、第四、二十二個。
(9) 甲廿五分ノ十八、乙五分ノ十一。
(10) 百七十九個。
(11) 長十二尺、巾九尺。
(12) 長百間、幅六十間。
(13) 年九分ト四分ノ一。
(14) 七百二十哩。

(16) ハ答丈ケ記スモ餘リ不深切ノ様ナレバ左ノ如ク解明ス。

(例題ノ解義)　AB$=x$里，BC$=y$里，CA$=z$里，トス。

又歩行一時ノ速ハ$60/a$里，乘車一時ノ速ハ$60/b$里，乘馬一時ノ速ハ$60/c$里ナルガ故ニ次ノ通同方程式ヲ得タリ。

$ay+bz+cx=60(a+c-b)$，　$az+bx+cy=60(b+a-c)$

$ax+by+cz=60(c+b-a)$

此三方程式ヲ加フレバ　$(a+b+c)(x+y+z)=60(a+b+c)$

$\therefore\ x+y+z=60$　　　答　六十里

(17) 一道五里、甲十二里十八町、乙十三里廿七町、丙廿六里九町。

第九編　一元二次方程式。

第百十三章　一未知數ヲ有スル二次方程式ヲ示サン。

$x^2-16=0$　ノ如キハ最モ簡單ナル二次方程式ナリ。

$6x^2-7x-3=0$ ノ如キハ通例ノ二次方程式ナリ。

已ニ第六十六章ニ於テ普通二次式ノ因子分割法ヲ示シタリ、今此方法ニ由リテ前ノ兩方程式ヲ分解セントス。

$x^2-16=0$，即 $(x+4)(x-4)=0$ トナルベシ、而シテ此方程式ニ於テハ $x+4$ ト $x-4$ ノ両因子ノ積ガ0ニ等シトイフ意ナルガ故ニ此兩因子ソ内何レカハ必ズ0ナラザルヲ得ズ、何トナレハ双方トモ0トナラザレハ其積ガ0ニ等シキ能ハザルガ故ナリ、之ニ由リテ

$x+4=0$　或ハ $x-4=0$ トセザルベカラズ、故ニ $x=-4$ 或ハ　$x=4$ トセザルベカラズ、故ニ $x^2-16=0$ ナル x ノ根ハ $+4$ ト -4 ナリ。

之ヲ簡約ニ記セバ　$x=\pm 4$　即チ x ノ根ハ $+4$ 或ハ -4 ナリ。

又別解法ハ次ノ如シ。

$x^2-16=0$ 故ニ $x^2=16$ 故 $x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

第二ニ $6x^2-7x-3=0$ ヲ解セントス。

$6x^2-7x-3=0$ 之ヲ6除スレバ $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{2}=0$　六十六章ニヨリテ

$x^2-\frac{7}{6}x+\left(\frac{7}{12}\right)^2-\left(\frac{7}{12}\right)^2-\frac{1}{2}=0$ 即 $\left(x-\frac{7}{12}\right)^2-\frac{121}{144}=0$

即　$\left(x-\frac{7}{12}+\frac{11}{12}\right)\left(x-\frac{7}{12}-\frac{11}{12}\right)=0$ 即 $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)=0$

故ニ　$x+\frac{1}{3}=0$ 或 $x-\frac{3}{2}=0$ 故ニ $x=-\frac{1}{3}$ 或 $x=\frac{3}{2}$

別法ハ次ノ如シ。

$6x^2-7x-3=0$ 即 $(3x+1)(2x-3)=0$

$3x+1=0$ 即 $2x-3=0$ $\therefore$ $x=-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{3}{2}$

此別法ハ原方程式ヲ通例ノ因子分割法ニテ一次因子ニ分チシモノニシテ最モ簡便ナリ。

第百十四章　普通ノ解法。

二次方程式ノ普通ノ形ハ $ax^2+bx+c=0$ ナリ、之ヲ解スレバ

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \qquad x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}=0$$

即 $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$ 之ヲ因子ニ括レバ

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}\right)=0$$

$$\therefore x+\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0 \text{ 或 } x+\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=0$$

$$\therefore x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ 或 } -\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

x ノ兩根ヲ簡約ニスレバ $x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

第百十五章　少シク理論ヲ申スベシ。

前章ノ如ク $ax^2+bx+c=0$ ナル方程式ノ兩根ハ

$$-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ 及 } -\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \text{ ナリ。}$$

第一　$b^2-4ac=0$ ナル片ハ x ノ二根ハ $-\frac{b}{2a}$ トナリテ相等シ。

第二　b^2-4ac ガ正ナル片ハ x ノ二根ハ不等ノ兩値ヲ有ス。

第三　b^2-4ac ガ負ナル片ハ x ノ二根ヲ虚數トイフ。

虚數(imaginary)トハ平方根號ノ内ニ負數ガアルモノナリ。

例ヘバ b^2-4ac ガ $-m$ ノ如キ片(但 m ハ正數トス故ニ $-m$ ハ負數ナリ)

$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{-m}{4a^2}}=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{-m}$ トナリ實數ニアラズト唱フ、故ニ $\sqrt{-5}$ $\sqrt{-1}$ ノ如キハ凡ヘテ虚數ナリ。

何故ニ此等ヲ虚數ト稱スルカ、答テ曰ク次ノ如シ。

凡ベテ正數ニテモ負數ニテモ平方ニスレバ正トナルベシ。

即チ　$(+5)^2=+25$ 又 $(-5)^2=+25$ トナルガ如シ。

然ルニ今若シ $x^2+16=0$ ナリトイフコトアラバ x^2 ハ必ス正ナルコト明カナリ、而シテ $+16$ ハ固ヨリ正ナリ、故ニ x^2 ガ如何ニ小トナルモ 0 ヨリ外ニ仕方ナシ、x^2 ヲ 0 トスルモ x^2+16 ハ 16 ナリ、即 x^2+16 ハ如何ニ小トスルモ 16 ヨリ外ニ小トナル能ハズ、然ルヲ $x^2+16=0$

右ノ如ク此方程式ハ大不都合ナリ、虚數ナリ僞數ナリトイフモ不當ノ言ニアラズ、此虚數ナル方程式ヲ無理ニ解スレバ左ノ如シ.

$x^2+16=0$　即　$x^2-(-16)=0$

即　$(x+\sqrt{-16})(x-\sqrt{-16})=0$

$\therefore$　$x+\sqrt{-16}=0$　或　$x-\sqrt{-16}=0$

$\therefore$　$x=\pm\sqrt{-16}$

$x^2+16=0$ ナル虚僞ノ方程式ノ根ガ $\sqrt{-16}$ トナル故ニ $\sqrt{-16}$ ハ虚數ナリ、先ヅ大略ノ答辞ハ是レニテ足レリ。

第百十六章　二次方程式ノ解法ノ例ヲ種々ニ説示セン。

(第一例)　$x^2+14x=32$ ヲ解セヨ.

第一法　$x^2+14x+7^2=32+7^2$

即　$(x+7)^2=81$

$\therefore x+7=\pm 9$　$\therefore$　$x=-7\pm 9=2$　或　-16

第二法　$x^2-14x-32=0$

即　$(x-2)(x+16)=0$

$x-2=0$　或　$x+16=0$　$\therefore$　$x=2$　或　-16

(第二例)　$2x^2-ax+2bx=ab$ ヲ解セヨ.

$2x^2-ax+2bx-ab=0$

即　$x(2x-a)+b(2x-a)=0$

即　$(2x-a)(x+b)=0$

$\therefore$　$2x-a=0$　或　$x+b=0$

$\therefore$　$x=\frac{a}{2}$　或　$x=-b.$

次ニ拙著近世代數ニアル例題ヲ第六例迄解明セン。

(第三例)　$(x-a)(x-b)(x+2a+2b)=(x+2a)(x+2b)(x-a-b)$ ヲ解セヨ.

原方程式ヲ次ノ如ク變ズ。

$$\{x(x-a-b)+ab\}(x+2a+2b)=\{x(x+2a+2b)+4ab\}(x-a-b)$$

括弧ヲ解クキハ次ノ如シ。

$$x(x+2a+2b)(x-a-b)+ab(x+2a+2b)=x(x+2a+2b)(x-a-b)+4ab(x-a-b)$$

之ヲ簡約ニスレバ　$ab(x+2a+2b)=4ab(x-a-b)$

$$\therefore\ x+2a+2b=4(x-a-b)\ \therefore\ x=2(a+b).$$

此方程式ノ外形ハ二次式ノ如クナレドモ一次トナレリ、然レトモ緊要ノ解ナレバ此ニ示ス。

（第四例）　$(b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0$ ヲ解セヨ。

此方程式ハ二次式ノ解法ニテハ困難ナレバ次ノ如クス。

$$\begin{array}{l} (b-c)x^2+(c-a)x+a-b=0 \text{ ヨリ次ノ明カナル式ヲ減ズレバ} \\ (b-c)\quad+(c-a)\quad+(a-b)=0 \text{（ナルコハ明カナリ）} \\ \hline (b-c)(x^2-1)+(c-a)(x-1)=0 \end{array}$$

即 $(x-1)\{(b-c)(x+1)+(c-a)\}=0$

$$\therefore\ x-1=0\ \text{或}\ (b-c)(x+1)+c-a=0$$

$$\therefore\ x=1\ \text{或}\ \frac{a-b}{b-c}.$$

（第五例）　$(x-a+2b)^3-(x-2a+b)^3=(a+b)^3$ ヲ解セヨ。

$(x-a+2b)-(x-2a+b)=a+b$　トナルコトハ請合ナリ。

故ニ之ヲ以テ原方程式ヲ除スレバ

$$(x-a+2b)^2+(x-a+2b)(x-2a+b)+(x-2a+b)^2=(a+b)^2$$

之ヲ簡約ニセントシ左ノ如ク括ルキハ

$$(x-a+2b)(x-a+2b+x-2a+b)+(x-2a+b+a+b)(x-2a+b-a-b)=0$$

即 $(x-a+2b)(2x-3a+3b)+(x-a+2b)(x-3a)=0$

即 $(x-a+2b)(3x-6a+3b)=0$

$$\therefore\ x-a+2b=0\ \text{或}\ 3x-6a+3b=0$$

$$\therefore\ x=a-2b\ \text{或}\ 2a-b.$$

（第六例）　$\sqrt{a(a+b+x)}-\sqrt{a(a+b-x)}=x$ ヲ解セヨ。

原方程式ヲ平方ニスレバ

$$a(a+b+x)+a(a+b-x)-2a\sqrt{a+b+x}\sqrt{a+b-x}=x^2$$

即　$2a(a+b)-x^2=2a\sqrt{a+b+x}\sqrt{a+b-x}$　平方ニスレバ

$$4a^2(a+b)^2-4ax^2(a+b)+x^4=4a^2(a+b+x)(a+b-x)$$

即　$-4ax^2(a+b)+x^4=-4a^2x^2$

$$x^2(x^2-4ab)=0 \quad \therefore \quad x^2=0 \text{ 或 } x^2-4ab=0$$

$$\therefore x=0 \text{ 或 } \pm 2\sqrt{ab}$$

(別解)　$a(a+b+x)-a(a+b-x)=2ax$ ナルコトハ明白ナリ。

之ヲ原方程式ニテ除スレバ　$\sqrt{a(a+b+x)}+\sqrt{a(a+b-x)}=2a$

之ト原方程式トヲ加フレバ　$2\sqrt{a(a+b+x)}=2a+x$

之ヲ平方ニスレバ

$$4a(a+b+x)=4a^2+4ax+x^2 \quad \therefore \quad x=\pm 2\sqrt{ab}$$

又原方程式ニ於テ $x=0$ トスレバ　$\sqrt{a(a+b)}-\sqrt{a(a+b)}=0$　トナリテ適當スベシ、

故ニ $x=0$ モ原方程式ノ根ナリ。

例題廿八

左ノ方程式ヲ解セヨ。

(1) $5x^2+14x=55$　(2) $3x^2+121=44x$

(3) $2(x-3)=3(x+2)(x-3)$　(4) $(x+1)(2x+3)=4x^2-22$

(5) $12x^2-11ax=36a^2$　(6) $12x^2+36a^2=43ax$

(7) $35b^2=9x^2+6bx$　(8) $36x^2-35b^2=12bx$

(9) $x^2-2ax+4ab=2bx$　(10) $x^2-2ax+8x=16a$

(11) $3x^2-2ax-bx=0$　(12) $ax^2+2x=bx$

(13) $2ax^2+b-4=cx^2-5+d-ax^2$

(14) $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)=\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{5}\right)$

(15) $\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}=\sqrt{2x}$　(16) $\sqrt[3]{(a+x)}+\sqrt[3]{(a-x)}=\sqrt[3]{c}$

答ノ部

(1) $x=\frac{11}{5}$ 或 -5　(2) $x=11$ 或 $\frac{11}{3}$　(3) $x=3$ 或 $-\frac{4}{3}$

(4) $x=5$ 或 $-\frac{5}{2}$　(5) $x=\frac{9}{4}a$ 或 $-\frac{4}{3}a$　(6) $x=\frac{9}{4}a$ 或 $\frac{4}{3}a$

(7) $x=\frac{5}{3}b$ 或 $-\frac{7}{3}b$　(8) $x=\frac{7}{6}b$ 或 $-\frac{5}{6}b$　(9) $x=2a$ 或 $2b$

(10) $x=2a$ 或 -8　(11) $x=0$ 或 $\frac{2a+b}{3}$　(12) $x=0$ 或 $\frac{b-2}{a}$

(13) $x=\pm\sqrt{\frac{b-d+1}{c-3a}}$　(14) $x=\frac{2}{3}$ 或 $\frac{3}{10}$　(15) $x=-\frac{a+b}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

(16) 此題ハ解式ヲ示スコト次ノ如シ。

原方程式ヲ立方ニスレバ

$$(a+x)+(a-x)+3\sqrt[3]{(a^2-x^2)}\{\sqrt[3]{(a+x)}+\sqrt[3]{(a-x)}\}=c$$

即 $2a+3\sqrt[3]{(a^2-x^2)}\sqrt[3]{c}=c$

$$\therefore\ x=\pm\sqrt{\left\{a^2-\frac{(c-2a)^3}{2c}\right\}}$$

第百十七章　不整方程式。

方程式ガ分數ヲ含ム項アルトキハ其分母ノ最小公倍數ヲ各項ニ乘ジテ分母ヲ拂フコトハ已ニ説示セシ所ナリ、然レトモ方程式ガ未知數xヲ含ム所ノ分母ヲ有スル分數ノ項アルトキハ其分母ノ最小公倍數ハ未知數xヲ含ムベシ、此ノ如キ塲合ニ於テ分母ヲ拂ハントスレハ未知數xヲ含ムモノヲ方程式ノ各項ニ乘ゼザルベカラズ、是レ實ニ注意シテ謹戒スベキノ運算ナリトス。

何トナレバ方程式ノ各項ニ已知數ヲ乘ズルモ其根ハ變セズ、例ヘバ$2x=6$ナル方程式ノ根ハ$x=3$ナルコト明カナリ、而シテ此各項ニ已知數7ヲ乘ズレバ$14x=42$トナリテ矢張リxノ根ハ$x=\frac{42}{14}=3$トナルベシ。

然ルヲ若シモxヲ含ム所ノ項$x-1$ノ如キモノヲ各項ニ乘スレバ

$2x(x-1)=6(x-1)$　即　$2x^2-2x=6x-6$

即 $2x^2-8x=-6$　即　$x^2-4x+3=0$

即 $(x-1)(x-3)=0$トナル、故ニ$x-1=0$ 或 $x-3=0$

サレバxノ根ハ$x=1$或ハ3トナリ元ノ方程式ノ根ヨリ1ナル一根ヲ增加セリ、即$x-1$ヲ乘ゼシガタメニ$x-1=0$トスル所ノ方程式ノ一根ガ增加シタルナリ。

之ニ由リテ方程式ノ各項ニハ未知數ノ項ヲ乘ズル能ハズ、故ニ方程式ガ分母ニxヲ含ム所ノ分數ヲ有スルトキハ其分母ヲ拂フニ當リ充分ニ調査シテ原方程式ニ適合スル丈ノ根ヲ採用スベシ。

例ヘバ$\frac{x^2+4}{x^2-4}+2=\frac{4x}{x^2-4}+\frac{3}{x+2}$ヲ解セヨ。

分母ノ最小公倍數x^2-4ヲ各項ニ乘ズレバ

$$x^2+4+2(x^2-4)=4x+3(x-2)$$ 之ヲ簡單ニスレバ

$$3x^2-7x+2=0 \quad \text{即} \quad (3x-1)(x-2)=0$$

即 $3x-1=0$ 或 $x-2=0$ 故ニ $x=\frac{1}{3}$ 或 2

之ニ由リテxノ根ハ$1|3$或ハ2ナリ。

然ルニ本題ハ原方程式ニ未知數ノ項x^2-4ヲ乘ゼシモノナルガ故ニxノ右ノ二根ハ正當ナリトシテ安心スル能ハズ。

故ニ之ヲ調査センガ爲メ$x=\frac{1}{3}$ヲ原方程式ニ代用スレバ

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2+4}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-4}+2=\frac{4\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{1}{3}\right)^2-4}+\frac{3}{\frac{1}{3}+2} \quad \text{即} \quad \frac{37}{-35}+2=\frac{12}{-35}+\frac{9}{7}$$

即 $\frac{-33}{35}=\frac{-33}{35}$ 即兩節相等シ、故ニ$x=\frac{1}{3}$ハ正答ナリ。

次ニ$x=2$ヲ代用スレバ

$$\frac{2^2+4}{2^2-4}+2=\frac{4\times 2}{2^2-4}+\frac{3}{2+2} \quad \text{即} \quad \frac{8}{0}+2=\frac{8}{0}+\frac{3}{4}$$

此ノ如キ不都合ノ形トナレリ、故ニ$x=2$ノ根ハ不合理ナリ、之ニ由リテ原方程式ノ根ハ$1|3$丈ナリ。

此ノ如ク不合理ナル根ヲ得タルモノハ全クx^2-4ヲ原方程式ノ各項ニ乘ゼシガ故ナリ、次ノ如ク解スレバ正答ノミヲ得ベシ。

原方程式ノ項ヲ變ズレバ $\frac{x^2+4}{x^2-4}-\frac{4x}{x^2-4}+2=\frac{3}{x+2}$

即 $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}+2=\frac{3}{x+2}$ 即 $\frac{(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}+2=\frac{3}{x+2}$

故 $\frac{x-2}{x+2}+2=\frac{3}{x+2}$ 此ニ於テ分母ヲ拂ヘバ

$$x-2+2(x+2)=3 \qquad \text{故ニ} \quad x=\frac{1}{3}$$

第百十八章　前述ノ如キ事實ナルヲ以テ不整方程式ノ根ヲ求メタル後ハ成ルベク其求メタル根ヲ原方程式ニ代用シ其合否ヲ調査スベシ、予ハ已ニ一端ヲ示シタレバ此後ハ一々調査セズ、然レトモ成ルベク正答ノミヲ得ンニハ分母ヲ急ニ拂ハザルヲ要ス、此一言ハ金言ナレバ初學者決シテ忘却スル勿レ。

第百十九章　左ニ不整方程式ノ解法ノ要用ナルモノヲ示サン。

(第一例)　$\dfrac{6x-3}{2x+7}=\dfrac{3x-2}{x+5}$ ヲ解セヨ。

$\dfrac{6x-3}{2x+7}-3=\dfrac{3x-2}{x+5}-3$ 故 $\dfrac{-24}{2x+7}=\dfrac{-17}{x+5}$ 分母ヲ拂ヘバ

$24(x+5)=17(2x+7)$ 故 $x=\dfrac{1}{10}$

(第二例)　$\dfrac{x+1}{3(x-3)}+\dfrac{x-5}{6+x-x^2}=\dfrac{9+x}{2(x+2)}$ ヲ解セヨ。

$\dfrac{x+1}{3(x-3)}-\dfrac{x+9}{2(x+2)}+\dfrac{x-5}{-(x-3)(x+2)}=0$

即 $\dfrac{2(x^2+3x+2)-3(x^2+6x-27)}{6(x+2)(x-3)}-\dfrac{x-5}{(x-3)(x+2)}=0$

分母ヲ拂ヘバ　$-(x^2+12x-85)-6(x-5)=0$

即 $(x-5)(x+17)-(x-5)=0$ 即 $(x-5)(x+17+6)=0$

故ニ　$x=5$ 或 -23

(第三例)　$\dfrac{x-8}{x-10}-\dfrac{x-5}{x-7}=\dfrac{x-7}{x-9}-\dfrac{x-4}{x-6}$ ヲ解セヨ。

$1+\dfrac{2}{x-10}-\left(1+\dfrac{2}{x-7}\right)=1+\dfrac{2}{x-9}-\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)$　2ニテ除スレバ

$\dfrac{1}{x-10}-\dfrac{1}{x-7}=\dfrac{1}{x-9}-\dfrac{1}{x-6}$　　$\dfrac{3}{(x-10)(x-7)}=\dfrac{3}{(x-9)(x-6)}$

分母ヲ拂ヘバ $x^2-15x+54=x^2-17x+70$ 即 $2x=16$

故 $x=8$

(第四例)　$\dfrac{1}{x-a+b}+\dfrac{1}{x+a-b}=\dfrac{2}{x-a-b}$ ヲ解セヨ。

$\left(\dfrac{1}{x-a+b}-\dfrac{1}{x-a-b}\right)+\left(\dfrac{1}{x+a-b}-\dfrac{1}{x-a-b}\right)=0$

即 $\dfrac{-2b}{(x-a+b)(x-a-b)}+\dfrac{-2a}{(x+a-b)(x-a-b)}=0$ 分母ヲ拂ヘバ

$b(x+a-b)+a(x-a+b)=0$ 故 $x=\dfrac{(a-b)^2}{a+b}$

(第五例)　$\dfrac{a}{x+a}+\dfrac{b}{x+b}=\dfrac{a+c}{x+a-c}+\dfrac{b+c}{x+b+c}$ ヲ解セヨ。

$\dfrac{(x+a)-x}{x+a}+\dfrac{(x+b)-x}{x+b}=\dfrac{(x+a-c)-x}{x+a-c}+\dfrac{(x+b+c)-x}{x+b+c}$

即 $1-\dfrac{x}{x+a}+1-\dfrac{x}{x+b}=1-\dfrac{x}{x+a-c}+1-\dfrac{x}{x+b+c}$

即 $x\left\{\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x+b}\right\}=x\left\{\dfrac{1}{x+a-c}+\dfrac{1}{x+b+c}\right\}$

即 $x\left\{\dfrac{2x+a+b}{(x+a)(x+b)}\right\}=x\left\{\dfrac{2x+a+b}{(x+a-c)(x+b+c)}\right\}$

故 $x(2x+a+b)\{(x+a-c)(x+b+c)-(x+a)(x+b)\}=0$

即 $x(2x+a+b)(-bc+ac-c^2)=0$

故 $x(2x+a+b)=0$ 故 $x=0$ 或 $2x+a+b=0$

故 $x=0$ 或 $-\frac{1}{2}(a+b)$

（第六例） $\frac{2x+5}{x-2}-\frac{4x+1}{2(x+1)}=3\frac{1}{4}$ ヲ解セヨ。

$2+\frac{9}{x-2}-\left\{2-\frac{3}{2(x+1)}\right\}=3\frac{1}{4}$ $\qquad \frac{9}{x-2}+\frac{3}{2(x+1)}=3\frac{1}{4}$

即 $\frac{9}{x-2}-3+\frac{3}{2(x+1)}-\frac{1}{4}=0$

即 $\frac{-3(x-5)}{x-2}+\frac{-(x-5)}{4(x+1)}=0$ 即 $(x-5)\left\{\frac{3}{x-2}+\frac{1}{4(x+1)}\right\}=0$

故 $(x-5)(13x+10)=0$ 故 $x=5$ 或 $-\frac{10}{13}$

例題廿九

左ノ方程式ヲ解セヨ。

(1) $\frac{3}{2x+2}+\frac{3}{4}=\frac{33}{4(x+2)}$

(2) $\frac{5}{x}=\frac{1}{x-4}$

(3) $\frac{5}{x^2-4}=\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x-2}$

(4) $\frac{12}{4x^2-9}-\frac{2}{2x+3}=\frac{1}{2x-3}$

(5) $\frac{3x+10}{x+2}-\frac{4x-20}{2x-5}=1$

(6) $\frac{x-1}{x-2}-\frac{x-2}{x-3}=\frac{x-7}{x-8}-\frac{x-8}{x-9}$

(7) $\frac{x}{x-1}-\frac{x-1}{x-2}=\frac{x-10}{x-11}-\frac{x-11}{x-12}$

(8) $\frac{x+5}{x+4}+\frac{x+7}{x+6}=\frac{x+4}{x+3}+\frac{x+8}{x+7}$

(9) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x-\frac{3}{2}}+\frac{x-\frac{13}{2}}{x-\frac{15}{2}}=\frac{x-\frac{3}{2}}{x-\frac{5}{2}}+\frac{x-\frac{11}{2}}{x-\frac{13}{2}}$

(10) $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$

(11) $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

(12) $\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$

(13) $\frac{a^2}{x-b}+\frac{b^2}{x-a}=a+b$

(14) $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c+a}+\frac{1}{c+b}$

(15) $\frac{6x+5}{3x+4}+\frac{2x+5}{2x+3}=2$

(16) $\frac{mx}{mx+a}+\frac{nx}{nx+a}=\frac{2px}{px+a}$

(17) $\left(\frac{x-a+b}{x+a-b}\right)^2=\left(1-\frac{2x}{a}\right)^2+\left(1+\frac{2x}{b}\right)^2-9$

答ノ部

(1) -2 (2) 5 (3) 1

(4) $2\frac{1}{2}$ (5) 0 (6) $5\frac{1}{2}$

(7) $6\frac{1}{2}$ (8) -5 (9) $4\frac{1}{2}$

(10) α 或 $\frac{1}{\alpha}$　(11) $a+b$ 或 $\frac{2ab}{a+b}$　(12) $a+b$ 或 $\frac{ab(a+b)}{a^2+b^2}$

(13) $a+b$ 或 $\frac{a^2+b^2}{a+b}$　(14) c 或 $-\frac{a^2+ac+b^2+bc}{a+b+2c}$　(15) -1 或 $-1\frac{5}{6}$

(16) 0 或 $a(m+n-2p)\div(mp+np-2mn)$　(17) $-a$ 或 b

第百廿章　二次方程式ノ性質。

$ax^2+bx+c=0$ ナル方程式ノ二根ヲ α β トスレバ

$x=\alpha$ 或ハ β 即 $x-\alpha=0$ 或 $x-\beta=0$

之ニ由リテ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$

即 $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$……………(1)

又原方程式ヨリ

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$……………(2)

(1)ハ α β ヲ x ニ代用スレバ適當ス、(2)ハ初ヨリ α β ヲ二根トセシナリ、故ニ(1)ト(2)ノ係數ハ全ク相等シ、故ニ

$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$……………(A)

$\alpha\beta=\frac{c}{a}$……………(B)

(A)(B)ノ二式ニヨリテ次ノ定則ヲ生ズ、

(定則)二次方程式ノ x^2 ノ係數ガ $+1$ ナルトキ

第一ニ二根ノ和ハ x ノ係數ノ符號ヲ變ジタルモノニ等シ。

第二ニ二根ノ積ハ已知項ニ等シ。

此定則ニヨレバ x ノ根ヲ容易ニ視察シ得ベキ場合アリ。

例ヘバ $x^2-7x+12=0$ ナル方程式ニ於テ

$4+3=-(-7)$ 及 $4\times3=12$ 故ニ $x=4$ 或 3

第百廿一章　前ノ定則ニヨリテ最要ノ例ヲ示スベシ。

(第一例) $ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲ α 及 β トスレバ

$\alpha^2+\beta^2$ 及 $\alpha^3+\beta^3$ ノ値如何。

定則ニヨリ $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ 及 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$ 故ニ

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}$

（第二例）xノ二根ヲ$2\pm\sqrt{6}$トスル所ノ方程式ヲ作レ。

$\alpha=2+\sqrt{6},\quad \beta=2-\sqrt{6}$　故ニ

$\alpha+\beta=(2+\sqrt{6})+(2-\sqrt{6})=4$ 及ビ

$\alpha\beta=(2+\sqrt{6})(2-\sqrt{6})=4-6=-2$

而シテ所求ノ方程式ハ $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ 之ニ前ニ求メタル値ヲ代用スレバ

$x^2-4x-2=0$

（第三例）$ax^2+bx+c=0$ ノ二根ヲα及βトスレハα^2 β^2ヲ二根トスル方程式ハ如何ナリヤ。

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 及 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\dfrac{b^2-2ac}{a^2}$ 及ビ

$\alpha^2\beta^2=\dfrac{c^2}{a^2}$

又xヲα^2及β^2トスル方程式ハ $x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta^2=0$

即 $x^2-\dfrac{b^2-2ac}{a^2}x+\dfrac{c^2}{a^2}=0$

故ニ $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$

（別法）$ax^2+c=-bx$ トシテ双方ヲ平方ニスレバ

$a^2x^4+2acx^2+c^2=b^2x^2$

即 $a^2(x^2)^2-(b^2-2ac)(x^2)+c^2=0$

即 $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$ トナリテ前ノ結果ト等シ。

（第四例）$5x^2-12x+2=0$ナル方程式ノ両根ノ立方ノ和ヲ求メヨ。

二根ヲα βトスレバ $x^2-\dfrac{12}{5}x+\dfrac{2}{5}=0$

$\alpha+\beta=-\dfrac{12}{5}\quad \alpha\beta=\dfrac{2}{5}$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=-\dfrac{1728}{125}-3\times\dfrac{2}{5}\left(-\dfrac{12}{5}\right)=-\dfrac{1368}{125}$

（第五例）$ax^2+bx+c=0$ノ二根ヲα及βトスレハ α/β 及ビ β/α ヲ二根トスル方程式ハ如何ナリヤ。

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$ 及 $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ 之ニ由リテ

$\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta}-2=\dfrac{b}{ac}-2$ 及 $\dfrac{\alpha}{\beta}\times\dfrac{\beta}{\alpha}=1$

又 $x^2-\left(\dfrac{\alpha}{\beta}+\dfrac{\beta}{\alpha}\right)x+\dfrac{\alpha}{\beta}\times\dfrac{\beta}{\alpha}=0$

即 $x^2-\left(\frac{b}{ac}-2\right)x+1=0$ 即所求ノ方程式ナリ。

第十編　通同二次方程式。

第百廿二章　通同二次方程式ニ於テ先ヅ二元二次方程式ヲ説明スベシ即チ其場合ハ次ノ二條ナリトス。

(第一) x y ノ通同兩方程式ニ於テ其一ツガ x y ノ一次式他ノ一ツガ x y ノ二次式ナルトキハ二次方程式ノ解法ヲ用フルコトヲ得ベシ。

例ヘバ $2x+y=13$ 及 $x^2+xy+5x-6y=3$ ノ如シ。

今之ヲ解スルニ $y=13-2x$ ヲ第二ニ代用スレバ

$$x^2+x(13-2x)+5x-6(13-2x)=3$$

即 $x^2-30x+81=0$　　$x=3$ 或 27

之ニ由リテ　$y=7$ 或 -41

(第二) 通同兩方程式ノ双方ガ x y ノ等次項ノ二次式ナル時ハ二次方程式ノ解法ヲ用フルコトヲ得。

例ヘバ $x^2-3xy=4$ 及 $xy+y^2=5$ ノ如シ。

今之ヲ解スレバ　$(x^2-3xy)+(xy+y^2)=4+5$

即 $x^2-2xy+y^2=9$　故ニ　$x-y=\pm3$　之ニ由リテ

$x-y=3$……(1) 或 $x-y=-3$……(2)

(1) ニ於テ $y=x-3$ 之ヲ第一ニ代用スレバ

$$x^2-3x(x-3)=4$$

故　$x=4$ 或 $\frac{1}{2}$　故 $y=1$ 或 $-\frac{5}{2}$

(2) ニ於テ $y=x+3$ 之ヲ第一ニ代用スレバ

$$x^2-3x(x+3)=4$$

$x=-\frac{1}{2}$ 或 -4　$y=\frac{5}{2}$ 或 -1

右ニ求メタル x y ノ答ヲ順次ニ列スレバ

$$\left.\begin{array}{ll} x=4 \text{ ナルトキ} & y=1 \\ x=\frac{1}{2} \text{ ナルトキ} & y=-\frac{5}{2} \\ x=-\frac{1}{2} \text{ ナルトキ} & y=\frac{5}{2} \\ x=-4 \text{ ナルトキ} & y=-1 \end{array}\right\}$$

上ノ一列ノ答ヲ約記スレバ下ノ如シ。

$x=\pm4$ ナルトキ $y=\pm1$

$x=\pm\frac{1}{2}$ ナルトキ $y=\mp\frac{5}{2}$

第百廿三章　右ノ両塲合ノ時ニハ常ニ二次方程式ノ解法ヲ行フコトヲ得ベシト雖モ他ノ塲合ニ於テハ解法ヲ施シ得ベキコトハ甚ダ僅小ナリ。例ヘバ x y ノ等次デ無ク不等次ノ二次式ナルトキ即次ノ如ク

$2x^2+y=10,\ x^2+y^2=4$

ノ如クナルトキハ解法ヲ施シ得ベシ。

即 $(2x^2+y)-2(x^2+y^2)=10-2\times4$

即 $2y^2-y=-2$　$y=\dfrac{1\pm\sqrt{-15}}{4}$

右ノ如ク二次式ニテ解明シ得ルハ特別ノ塲合ナリ、次ノ如クナルコトガ一般ニ多キ塲合ナリトス。

$x^2+y=a$ 及 $x+y^2=b$

ノ如キハ次ノ如ク四次式ヲ得。

即 $y=a-x^2$ ヲ代用スレバ

$x+(a-x^2)^2=b$

即 $x^4-2a^2x+x+a_2-b=0$

第百廿四章　次ニ解法ノ例ヲ示ス、同ジ事ヲ幾度モ繰リ返ス樣ナレドモ一例ノミヲ拘泥シテ研究スルハ初學者ノ倦退スル所ナレバ前ニ示セシ解明ヲ半分モ解了セバ次ノ解例ヲ見ル方ガヨロシ。

（第一例）$x+2y=5$ 及 $x^2+2y^2=9$ ヲ解セヨ。

$x=5-2y$ ヲ第二ニ代用スレバ

$(5-2y)^2+2y^2=9$ 即 $3y^2-10y+8=0$

即 $(3y-4)(y-2)=0$ 故 $y=\dfrac{4}{3}$ 或 2

之ニ由リテ $x=\dfrac{7}{3}$ 或 1

（第二例）$x^2+3xy=28$ 及 $xy+4y^2=8$ ヲ解セヨ。

$(x^2+3xy)+(xy+4y^2)=28+8$ 即 $x^2+4xy+4y^2=36$

故ニ $x+2y=\pm6$ 之ニ由リテ

$x=6-2y$……(1) 或　$x=-6-2y$……(2)

(1) ヲ第二ニ代用スレバ　$(6-2y)y+4y^2=8$ 故ニ $y=1$ 或 -4

故ニ $x=4$ 或 14

(2)ヲ第二ニ代用スレハ同法ニヨリ $y=-1$ 或 4

故ニ $x=-4$ 或 -14

之ニ由リテ $\left.\begin{matrix}x=4\\y=1\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}x=-4\\y=-1\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}x=14\\y=-4\end{matrix}\right\}$ $\left.\begin{matrix}x=-14\\y=4\end{matrix}\right\}$

答ヲ約記スレバ $x=\pm4,\ y=\pm1$ 或 $x=\pm14,\ y=\mp4$

(第三例) $x+y=a$ 及 $x^3+y^3=b$ ヲ解セヨ。

$(x+y)^3-3xy(x+y)=b$ 即 $a^3-3xya=b$……(1)

$y=a-x$ ヲ(1)ニ代用スレバ $a^3-3ax(a-x)=b$

故ニ $x=\dfrac{a}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^3-b}{3a}\right)}$ y ノ答ハ畧ス。

別法ヲ用フレハ次ノ如シ。

$\dfrac{x^3+y^3}{x+y}=\dfrac{b}{a}$ 即 $x^2-xy+y^2=\dfrac{b}{a}$ 此方程式ニ $y=a-x$ ヲ代用スレバ答ヲ得ベシ。

(第四例) $x^2+xy+y^2=a,\ x^2-xy+y^2=b$ ヲ解セヨ。

両方程式ノ第一ヨリ第二ヲ減ズレバ $2xy=a-b$ 故ニ

$xy=\dfrac{a-b}{2}$ ヲ第一ニ加フレバ $x^2+2xy+y^2=\dfrac{3a-b}{2}$

又第二ヨリ減ズレバ $x^2-2xy+y^2=\dfrac{3b-a}{a}$

之ニ由リテ $x+y=\pm\sqrt{\dfrac{3a-b}{2}}$ 及 $x-y=\pm\sqrt{\dfrac{3b-a}{2}}$

之ニ由リテ x y ヲ求ムルコト容易ナリ。

(第五例) $x^2+xy+x=14$ 及 $y^2+xy+y=28$ ヲ解セヨ。

両方程式ヲ相加フレバ $x^2+2xy+y^2+x+y=42$

即 $(x+y)^2+(x+y)-42=0$

之ニ由リテ $(x+y-6)(x+y+7)=0$

故ニ $x+y=6$……(1) 及 $x+y=-7$……(2)

(1)ヲ第一ニ用フレバ $x=2$ 及 $y=4$

(2)ヲ第一ニ用フレバ $x=-\dfrac{7}{3}$ 及 $y=-\dfrac{14}{3}$

(第六例) $x+y=6$ 及 $(x^2+y^2)(x^3+y^3)=1440$ ヲ解セヨ。

第二ヲ次ノ如クス。

$\{(x+y)^2-2xy\}\{(x+y)^3-3xy(x+y)\}=1440$ 之ニ第一ヲ代用スレバ

$\{36-2xy\}\{216-18xy\}=1440$

$xy=8$……(1) 或 $xy=22$……(2)

(1) 及 (2) ヲ第一ニ代用スレバ

$x=4,\ y=2$ 或 $x=2,\ y=4$ 或 $x=3\pm\sqrt{-13},\ y=3\pm\sqrt{-13}$

例題三十

次ノ各通同方程式ヲ解セヨ。

(1) $x^2-y^2=80,\ x-y=8$

(2) $4x^2-9y^2=7,\ 2x+3y=7$

(3) $x^2+xy=6,\ x+y=3$

(4) $x^2-xy=25,\ x-y=5$

(5) $x^2+y^2=61,\ xy=30$

(6) $x+y=17,\ xy=72$

(7) $5x-2y=26,\ xy=12$

(8) $x^2+y^2=25,\ x+y=7$

(9) $x^2+y^2=50,\ x-y=6$

(10) $x-2y=2,\ x^2+4y^2=100$

(11) $3x-y=5,\ x^2-2xy+3y^2=3$

(12) $\frac{1}{4}(x+y)=\frac{1}{3}(x-y),\ \frac{x^2}{7}+2(x-y)^2=79$

(13) $x^3+y^3=9,\ x+y=3$

(14) $x+y=6,\ x^3+y^3=126$

(15) $x^3-y^3=208,\ x-y=4$

(16) $x^3+y^3=7(x+y)=35$

(17) $x^5+y^5=33,\ x+y=3$

(18) $x^5-y^5=242,\ x-y=2$

(19) $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{2},\ x+y=6$

(20) $\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}=12,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$

(21) $\left.\begin{array}{l} x^2+xy=4x-2 \\ y^2+xy=4y-1 \end{array}\right\}$

(22) $\left.\begin{array}{l} x(x-y)=2ax-2by-4b(a-b) \\ y(x-y)=2ay-2bx+4b(a-b) \end{array}\right\}$

(23) $x^2-xy+y^2=7,\ x^4+x^2y^2+y^4=133$

答ノ部

(1) $x=9,\ y=1$

(2) $x=2,\ y=1$

(3) $x=2,\ y=1$

(4) $x=5,\ y=0$

(5) $x=\pm 6,\ y=\pm 5$, 或 $x=\pm 5,\ y=\pm 6$

(6) $x=9,\ y=8$ 或 $x=8,\ y=9$

(7) $x=6,\ y=2$ 或 $x=-\frac{4}{5},\ y=-15$

(8) $x=4,\ y=3$ 或 $x=3,\ y=4$

(9) $x=7,\ y=1$ 或 $x=-1,\ y=-7$

(10) $x=8,\ y=3$ 或 $x=-6,\ y=-4$

(11) $x=2,\ y=1$ 或 $x=1\frac{7}{11},\ y=-\frac{1}{11}$

(12) $x=\pm 7,\ y=\pm 1$

(13) $x=2,\ y=1$ 或 $x=1,\ y=2$

(14) $x=5,\ y=1$ 或 $x=1,\ y=5$

(15) $x=6,\ y=2$ 或 $x=-2,\ y=-6$

(16) $x=3,\ y=2$ 或 $x=2,\ y=3$

(17) $x=1,\ y=2$ 或 $x=2,\ y=1$

(18) $x=3,\ y=1$ 或 $x=-1,\ y=-3$

(19) $x=4,\ y=2$ 或 $x=2,\ y=4$　(20) $x=6,\ y=6$ 或 $x=\frac{3}{2}(\sqrt{5}-1),\ y=-\frac{3}{2}(\sqrt{5}+1)$

(21) $x=2,\ y=1$ 或 $x=\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{3}$

(22) $x=2a,\ y=2b$ 或 $x=2b,\ y=-2b$ 或 $x=a-b,\ y=b-a$

(23) $x=\pm3,\ y=\pm2$ 或 $x=\pm2,\ y=\pm3$

第百廿五章　次ニ通同二次方程式ノ三元ナルモノヲ示ス、三元以上ハ以テ類推スベシ。

(第一例) 左ノ方程式ヲ解セヨ。

$$(x+y)(x+z)=a^2 \cdots\cdots(1),\quad (y+z)(y+x)=b^2 \cdots\cdots(2)$$

$$(z+x)(z+y)=c^2 \cdots\cdots(3)$$

(解) (1)(2)ヲ相乘シ(3)ニテ除シ平方ニ開ケバ $x+y=\pm\frac{ab}{c}$

(2)(3)ヲ相乘シ(1)ニテ除シ平方ニ開ケバ $y+z=\pm\frac{bc}{a}$

(3)(1)ヲ相乘シ(2)ニテ除シ平方ニ開ケバ $z+x=\pm\frac{ca}{b}$

之ニ由リテ $x=\pm\frac{c^2a^2+a^2b^2-b^2c^2}{2abc},\quad y=\pm\frac{a^2b^2+b^2c^2-c^2a^2}{2abc}$

$$z=\pm\frac{b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2}{2abc}$$

(第二例) 左ノ方程式ヲ解セヨ。

$$x^2+xy+y^2=37 \cdots\cdots(1)$$

$$y^2+yz+z^2=13 \cdots\cdots(2)$$

$$z^2+zx+x^2=21 \cdots\cdots(3)$$

(解) (1)ヨリ(2)ヲ減ジ之ヲ括ルトキハ $(x-z)(x+y+z)=24 \cdots\cdots(4)$

(2)ヨリ(3)ヲ減ジ之ヲ括ルトキハ $(y-x)(x+y+z)=-8 \cdots\cdots(5)$

(4)ヲ(5)ニテ除スレバ $\frac{x-z}{y-x}=-3$ 即チ $z=3y-2x$

之ヲ(5)ニ代用スレバ $(y-x)(4y-x)=-8 \cdots\cdots(6)$

(1)ト(6)ニ於テ $-8(x^2+xy+y^2)=37(y-x)(4y-x)$

即 $15x^2-59xy+52y^2=0$ 即 $(5x-13y)(3x-4y)=0$

之ニ由リテ $3x-4y=0 \cdots\cdots(A)$ 或 $5x-13y=0 \cdots\cdots(B)$

(A)ヲ用フレバ $y=\frac{3}{4}x$ 之ヲ(1)ニ代用スレバ

$x^2+\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{16}x^2=37$ 故ニ $x=\pm4$ 故ニ $y=\pm3$ 故ニ $z=\pm1$

又(B)ヲ用ヒ $y=\frac{5}{13}x$ ヲ(1)ニ代用スレバ

$x=\pm\frac{13}{\sqrt{7}},\quad y=\pm\frac{5}{\sqrt{7}},\quad z=\mp\frac{11}{\sqrt{7}}$

之ニ由リテ所求ノ根ハ $\left\{\begin{array}{ll} x=\pm 4, & \pm\frac{13}{\sqrt{7}} \\ y=\pm 3, & \pm\frac{5}{\sqrt{7}} \\ z=\pm 1, & \mp\frac{11}{\sqrt{7}} \end{array}\right.$

例題三十一

左ノ方程式ヲ解セヨ。

(1) $x^2+2yz=y^2+2zx=a,\quad z^2+2xy=c$

(2) $yz+a^2=x(y+z+x),\quad zx+b^2=y(z+x+7)$

$xy+c^2=z(x+y+z)$

(3) $x(y+z-x)=a^2,\quad y(z+x-y)=b^2,\quad z(x+y-z)=c^2$

答ノ部

(1) $x=\frac{1}{3}(\sqrt{a-4c}+\sqrt{2a+c}),\quad \frac{1}{3}(\sqrt{2a+c}\pm\sqrt{(c-a)})$

$y=\frac{1}{3}(\sqrt{a-4c}-\sqrt{2a+c}),\quad \frac{1}{3}(\sqrt{2a+c}\pm\sqrt{c-a}),$

$z=\frac{1}{3}\sqrt{2a+c},\quad \frac{1}{3}(\sqrt{2a+c\mp 2\sqrt{c-a}})$

(2) $x=\frac{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ 以下畧ス。

(3) $x=a^2\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)}}$ 以下畧ス。

第百廿六章　二次方程式ノ問題。

二次方程式ノ一未知數ノ根ハ二ツアレトモ問題ニ於テハ二ツトモ適合シ難キ場合アリ、或ハ其一ツノミガ適合セザルコトアリ、又二ツトモ適合スルコトアリ、而シテ二ツトモ適合スルトキハ求ムル所ノ數ハ両意ヲ生ズルモノトス、今先ツ之ヲ例示スベシ。

(第一例) 直方形ノ地アリ、積二百二十四坪ニシテ長邊ハ短邊ヨリ二間長シ、各邊ノ長サ如何、

(解) 短邊ノ間數ヲxトスレバ長邊ノ間數ハ$x+2$ナリ、故ニ

$x(x+2)=224$ 故ニ $x=14$ 或 -16 ヲ得

而シテxノ二根ノ内-16ハ負數ナルガ故ニ題意ニ適合セズ、故ニ14ヲ答トス、即チ短邊ハ十四間ニシテ長邊ハ之ニ二間ヲ加ヘ十六間ナリ。

（第二例）二百四十圓ヲ若干人ニ平等ニ分ツトキ一人ノ所得ハ百四十圓ヲ前ヨリ三人減ジテ平等ニ分ツトキノ一人分ヨリモ二圓多シトイフ、最初ノ人數如何。

（解）最初ノ人數ヲxトスレバ一人分ハ$\frac{240}{x}$圓ナリ、故ニ次ノ一人分ハ$\frac{140}{x-3}$圓ナリ、之ニ由リテ $\frac{240}{x}=\frac{140}{x-3}+2$ 分母ヲ拂フテ括ルトキハ

$(x-8)(x-45)=0$ 故ニ $x=8$ 或 45

xノ兩根共ニ適合スベシ、故ニ本題ノ答數ハ八人ト四十五人ノ兩意ヲ有ス、即何レニテモ題意ニ適合ス。

例題三十二

(1) 二位ノ數アリ、其兩數字ノ積十二ニシテ原數ニ三十六ヲ加フレバ數位轉倒ストイフ、原數如何。　答　二十六

(2) 二圓四十錢ノ拂金ヲ若干人ニテ平等ニ出スベキヲ其内一人減ゼシガ故ニ一人前ノ出金前ヨリ二十錢多クナレリ、最初ノ人員幾許ナリシヤ。　答　四人。

(3) 舟夫アリ一河ヲ十哩半上行スル時間ハ之ヲ下行スル時間ヨリモ二時間多ク費セリ、今此河ヲ一時四十分間ニ往復セリ、問フ其距離如何、但シ河水毎時ノ速二哩ナリトス。　答　三哩半。

講述者曰ク以上講説セシ所都合十編ハ初等代數學ノ極槩ニシテ固ヨリ之ヲ以テ代數學ノ難題ヲ解スルノ用ニ供セシモノニアラズ、然レトモ讀者諸君ハ成ルベク其要領ヲ採擇セラレ予ガ未ダ説及セザル部分ニマデ推演セラレンコト是レ予ガ讀者諸君ニ冀望スル所ナリ、予ハ此冀望アルガ爲メニ不完全ナガラモ此處ニテ筆ヲ止ム。

代數學終。

終