**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2021/2022**

# Analysis I

## Arbeitsblatt 7

### Übungsaufgaben

Aufgabe 7.1. Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Intervallschachtelung für $x$ und $J_n = [c_n, d_n]$ eine Intervallschachtelung für $y$. Beschreibe eine Intervallschachtelung für $x + y$.

Aufgabe 7.2.*

Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0, 1]$ aus. Das Intervall wird in zehn gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das achte Teilintervall. Das entstehende Intervall teilen wir ebenfalls in zehn gleichlange Teilintervalle und nehmen davon wieder das achte Teilintervall. Dieser Teilungsprozess wird unendlich oft durchgeführt, wobei eine Folge von Intervallen $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, entsteht ($I_0$ ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

(1) Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im zweiten Schritt konstruiert wird.
(2) Erstelle eine Formel, die die untere und die obere Intervallgrenze des Intervalls $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
(3) Es gibt genau eine rationale Zahl $c$, die in jedem Intervall $I_n$ enthalten ist. Bestimme $c$ als Bruch.

Aufgabe 7.3.*

Es sei $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

Aufgabe 7.4. Es sei $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

Aufgabe 7.5. Es sei $K$ ein archimedisch angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass jede Intervallschachtelung in $K$ einen Punkt enthält. Zeige, dass $K$ vollständig ist.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen $x$ und $y$ heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen $x$ und $y$ heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

Aufgabe 7.6.*

Es seien $x$ und $y$ zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

Aufgabe 7.7. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.

Aufgabe 7.8. Zeige, dass das *Quadrieren*

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, x \longmapsto x^2,$$

eine wachsende Funktion ist. Man folgere daraus, dass auch die Quadratwurzel

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},\, u \longmapsto \sqrt{u},$$

eine wachsende Funktion ist.

Aufgabe 7.9. Zeige, dass für nichtnegative reelle Zahlen $s$ und $t$ die Beziehung

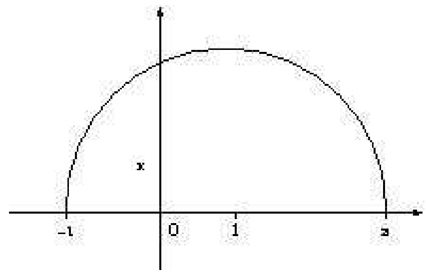
$$\sqrt{st} = \sqrt{s}\sqrt{t}$$

besteht.

Aufgabe 7.10.*

Begründe geometrisch, dass die Wurzeln $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$, als Länge von „natürlichen" Strecken vorkommen.

Tipp: Satz des Pythagoras.




Aufgabe 7.11. Zeige, dass man zu jeder gegebenen Streckenlänge $a$ (also jedem $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) die Quadratwurzel $\sqrt{a}$ mit Zirkel und Lineal konstruieren kann.

Tipp: Satz des Pythagoras und Bild rechts.

Aufgabe 7.12.*

Formuliere und beweise die *Lösungsformel für eine quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Aufgabe 7.13.*

Es sei $x$ eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der kanonischen Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0{,}3333333333\ldots$$

(die weiteren Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

Aufgabe 7.14. Die beiden reellen Zahlen $x$ und $y$ seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \ldots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \ldots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Ziffernentwicklungen eine Folge mit rationalen Gliedern an, die gegen $xy$ konvergiert.

Aufgabe 7.15. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 7.16. Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 7.17. Es sei $x_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine konvergente Folge mit dem Grenzwert $x$. Zeige, dass die Folge $\sqrt{x_n}$ gegen $\sqrt{x}$ konvergiert.

Aufgabe 7.18. Sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass zu einem beliebigen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}_+$ durch

$$x_{n+1} := \frac{(k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}}{k}$$

eine Folge definiert wird, die gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.

Aufgabe 7.19. Es sei $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $k \in \mathbb{N}$, $M = \left\{ x \in \mathbb{R}_{\geq 0} \mid x^k \leq a \right\}$ und $s = \sup(M)$. Zeige $s^k = a$.

Aufgabe 7.20.*

Es seien $a, b$ positive reelle Zahlen und $m, n \in \mathbb{N}$. Zeige mit geeigneten Potenzgesetzen die folgenden Aussagen.

(1) Es ist

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{b}.$$

(2) Es ist

$$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b}.$$

(3) Es ist

$$\sqrt[m]{b^{-1}} = \left(\sqrt[m]{b}\right)^{-1}.$$

Aufgabe 7.21.*

Es sei $b \geq 1$ eine reelle Zahl. Wir betrachten die reelle Folge

$$x_n := b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

(mit $n \in \mathbb{N}_+$).

(1) Zeige, dass die Folge monoton fallend ist.
(2) Zeige, dass sämtliche Folgenglieder $\geq 1$ sind.
(3) Zeige, dass die Folge gegen 1 konvergiert ist.

Aufgabe 7.22. Es sei $k \in \mathbb{N}_+$. Untersuche die Folge

$$x_n = \frac{1}{\sqrt[k]{n}}$$

auf Konvergenz.

Aufgabe 7.23. Es seien $A$ und $B$ beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ferner sei $A + B := \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$ und $A - B := \{a - b \mid a \in A,\, b \in B\}$.

(1) Zeige, dass $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
(2) Wie lautet die entsprechende Formel für $\sup(A - B)$?
(3) Zeige, dass $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
(4) Was lässt sich über $\sup(A \cap B)$ sagen?
(5) Wie lautet die Entsprechung zu 3. für unendlich viele Mengen?

Aufgabe 7.24.*

Es sei

$$f(x) = x^2 + x - \frac{7}{4}\,.$$

Zu jedem Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die reelle Folge

$$x_n = f^n(x_0)\,,$$

es gilt also die rekursive Beziehung $x_{n+1} = f(x_n)$. Zeige, dass die Folge für $x_0 \in [-2, 1]$ einen Häufungspunkt besitzt.

Aufgabe 7.25. Es sei $K$ ein angeordneter Körper, der nicht archimedisch angeordnet sei. Zeige, dass für $K$ die Aussage das Satzes von Bolzano-Weierstraß nicht gilt.

AUFGABE 7.26. Zeige die folgenden Abschätzungen.

a)

$$\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} \leq \frac{1}{k!},$$

b)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

AUFGABE 7.27. Berechne mit einem Computer die ersten hundert Nachkommastellen im Zehnersystem von

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Für welches $n$ wird diese Genauigkeit erreicht?

## Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 7.28. (7 (1+3+3) Punkte)

Wir beschreiben eine Konstruktion von ineinander enthaltenen Intervallen, und gehen vom Einheitsintervall $[0,1]$ aus. Das Intervall wird in sieben gleichlange Teilintervalle zerlegt und davon nehmen wir das sechste Teilintervall. Das entstehende Intervall teilen wir ebenfalls in sieben gleichlange Teilintervalle und nehmen davon wieder das sechste Teilintervall. Dieser Teilungsprozess wird unendlich oft durchgeführt, wobei eine Folge von Intervallen $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, entsteht ($I_0$ ist das Einheitsintervall, das als Startintervall dient).

(1) Bestimme die Intervallgrenzen des Intervalls, das im ersten Schritt konstruiert wird.
(2) Erstelle eine Formel, die die untere und die obere Intervallgrenze des Intervalls $I_n$, $n \in \mathbb{N}$, ausdrückt.
(3) Es gibt genau eine rationale Zahl $c$, die in jedem Intervall $I_n$ enthalten ist. Bestimme $c$ als Bruch.

Der dritte Teil erfordert Grundtatsachen über den Divisionsalgorithmus.

AUFGABE 7.29. (3 Punkte)

Entscheide, ob die Folge

$$a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$$

konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 7.30. (5 Punkte)

Untersuche die durch

$$x_n = \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 7.31. (4 Punkte)

Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert $x$ die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus $x$.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Aufgabe 7.32. (5 Punkte)

Es sei $K$ ein angeordneter Körper mit der Eigenschaft, dass in ihm jede nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt. Zeige, dass $K$ vollständig ist.

Aufgabe 7.33. (6 Punkte)

Zeige, dass jede Folge in $\mathbb{R}$ eine monotone Teilfolge besitzt.

## Abbildungsverzeichnis