**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück SS 2019**

# Grundkurs Mathematik II

## Arbeitsblatt 53

### Die Pausenaufgabe

Aufgabe 53.1. Berechne
$$5^{\frac{2}{3}}$$
bis auf einen Fehler von 1.

### Übungsaufgaben

Aufgabe 53.2. Es sei $b$ eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch
$$b^q := (b^n)^{1/m}$$
definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für $q$ ist.

Aufgabe 53.3.*

Berechne
$$2^{\frac{9}{10}}$$
bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.4. Berechne
$$5^{\frac{3}{7}}$$
bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.5.*

Es sei $b$ eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion
$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\, q \longmapsto b^q,$$
stetig ist.

Aufgabe 53.6.*

Es sei $q \in \mathbb{Q}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion
$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^q,$$
stetig ist.

Aufgabe 53.7.*

Entscheide, ob die reelle Folge
$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$
(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 53.8.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1}$$

(mit $n \geq 1$) in $\mathbb{R}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 53.9. Zeige, dass der einzige Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{Q}_+, \cdot, 1)$$

die konstante Abbildung auf 1 ist.

Aufgabe 53.10. Es sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die dazu in Lemma 53.3 definierte Funktion. Zeige, dass $g$ auf $\mathbb{Q}$ nicht unbedingt mit $f$ übereinstimmen muss.

Aufgabe 53.11. Es sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion und es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die dazu in Lemma 53.3 definierte Funktion. Zeige, dass $g$ ebenfalls monoton ist.

Aufgabe 53.12. Es sei $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ eine stetige monotone Funktion und es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die dazu in Lemma 53.3 definierte Funktion. Zeige, dass $g$ auf $\mathbb{Q}$ mit $f$ übereinstimmt.

Aufgabe 53.13.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

Aufgabe 53.14. Vergleiche die drei Zahlen

$$2^{\sqrt{3}},\ 4,\ 3^{\sqrt{2}}.$$

Aufgabe 53.15. Berechne

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.16. Es sei $b$ eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

(1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
(3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
(4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
(5) Für $b > 1$ ist $f$ streng wachsend.
(6) Für $b < 1$ ist $f$ streng fallend.
(7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
(8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Aufgabe 53.17.*

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass $f$ eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

Aufgabe 53.18. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

Aufgabe 53.19.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x+1, f(x+1))$ einen Schnittpunkt mit der $x$-Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x+1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

Aufgabe 53.20.*

Es sei $b$ eine positive reelle Zahl und

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

die zugehörige Exponentialfunktion. Zeige

$$(b^x)^{x'} = b^{xx'}$$

für alle $x, x' \in \mathbb{R}$ unter Bezug auf die entsprechende Gleichung für rationale Argumente.

Aufgabe 53.21. Skizziere die Graphen zu den Funktionen

$$f_k(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

für $n = 2, 3, 4, 5, 6$ auf $[-3, 3]$.

Aufgabe 53.22.*

Ordne die Zahlen

$$\exp(0{,}6)\,,\ \exp(0{,}7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

Aufgabe 53.23. Wir betrachten die Exponentialreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Zeige, dass die Ableitung von $f$ mit $f$ übereinstimmt. Verwende dabei, dass in diesem Fall die Ableitung einer unendlichen Summe von Polynomen gleich der Summe der einzelnen Ableitungen ist.

Aufgabe 53.24. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von $2^x$ verschieden ist.

Aufgabe 53.25. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 53.26. Man bastle einen *Rechenschieber*, der die Multiplikation von positiven reellen Zahlen ausführt.

Aufgabe 53.27. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis $b$ die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.
(2) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(3) Es gilt

$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 53.28.*

Es sei $u \in \mathbb{R}$ fixiert. Zeige, dass die Potenzfunktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^u,$$

stetig ist.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 53.29. (4 Punkte)

Berechne

$$3^{\frac{4}{5}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

Aufgabe 53.30. (2 Punkte)

Vergleiche

$$5^{-\frac{4}{7}} \text{ und } 5^{-\frac{5}{9}}.$$

Aufgabe 53.31. (4 Punkte)

Finde eine rationale Zahl zwischen den beiden Zahlen $2^{\sqrt{5}}$ und $3^{\sqrt[3]{2}}$ folgere daraus, welche größer ist.

Aufgabe 53.32. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass es keine stetige Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt, die auf $\mathbb{Q}$ mit $f$ übereinstimmt.

Aufgabe 53.33. (5 Punkte)

Es sei $f\colon (\mathbb{Q}, +, 0) \to (\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$ ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass $f$ eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein reelles $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt.

Aufgabe 53.34. (4 Punkte)

Berechne $e^3$ mit der Exponentialreihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{1000}$.

## Abbildungsverzeichnis

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7