

## Lineare Algebra

### Vorlesung 8



Als Alternative wurde über ein Vorlesungslama ...

### Dimensionstheorie

Ein endlich erzeugter Vektorraum hat im Allgemeinen ganz unterschiedliche Basen. Wenn beispielsweise ein homogenes lineares Gleichungssystem in  $n$  Variablen vorliegt, so ist der Lösungsraum ein Untervektorraum von  $K^n$ , und eine Basis des Lösungsraumes kann man aus dem äquivalenten Gleichungssystem in Stufenform errechnen. Da man aber im Eliminationsverfahren mehrere Wahlmöglichkeiten hat, kann man zu unterschiedlichen Basen des Lösungsraumes gelangen. Dabei ist es keineswegs selbstverständlich, dass die Anzahl der Basislösungen unabhängig vom eingeschlagenen Verfahren ist. In dieser Vorlesung werden wir allgemein zeigen, dass die Anzahl der Elemente in einer Basis eines Vektorraumes stets konstant ist und nur vom Vektorraum abhängt. Diese wichtige Eigenschaft werden wir nach einigen Vorbereitungen beweisen und als Ausgangspunkt für die Definition der Dimension eines Vektorraumes nehmen.

LEMMA 8.1. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit einer Basis  $v_1, \dots, v_n$ . Es sei  $w \in V$  ein Vektor mit einer Darstellung*

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i,$$

wobei  $s_k \neq 0$  sei für ein bestimmtes  $k$ . Dann ist auch die Familie

$$v_1, \dots, v_{k-1}, w, v_{k+1}, \dots, v_n$$

eine Basis von  $V$ .

*Beweis.* Wir zeigen zuerst, dass die neue Familie ein Erzeugendensystem ist. Zunächst kann man wegen

$$w = \sum_{i=1}^n s_i v_i$$

und  $s_k \neq 0$  den Vektor  $v_k$  als

$$v_k = \frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^n \frac{s_i}{s_k} v_i$$

schreiben. Es sei nun  $u \in V$  beliebig vorgegeben. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^n t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k v_k + \sum_{i=k+1}^n t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} t_i v_i + t_k \left( \frac{1}{s_k} w - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{s_i}{s_k} v_i - \sum_{i=k+1}^n \frac{s_i}{s_k} v_i \right) + \sum_{i=k+1}^n t_i v_i \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \left( t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i + \frac{t_k}{s_k} w + \sum_{i=k+1}^n \left( t_i - t_k \frac{s_i}{s_k} \right) v_i. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit nehmen wir zwecks Notationsvereinfachung  $k = 1$  an. Es sei

$$t_1 w + \sum_{i=2}^n t_i v_i = 0$$

eine Darstellung der Null. Dann ist

$$0 = t_1 w + \sum_{i=2}^n t_i v_i = t_1 \left( \sum_{i=1}^n s_i v_i \right) + \sum_{i=2}^n t_i v_i = t_1 s_1 v_1 + \sum_{i=2}^n (t_1 s_i + t_i) v_i.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Ausgangsfamilie folgt insbesondere  $t_1 s_1 = 0$ , und wegen  $s_1 \neq 0$  ergibt sich  $t_1 = 0$ . Deshalb ist  $\sum_{i=2}^n t_i v_i = 0$  und daher gilt  $t_i = 0$  für alle  $i$ .

□

Die vorstehende Aussage heißt *Austauschlemma*, die nachfolgende *Austauschsatz*.

SATZ 8.2. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit einer Basis*

$$b_1, \dots, b_n.$$

*Ferner sei*

$$u_1, \dots, u_k$$

*eine Familie von linear unabhängigen Vektoren in  $V$ . Dann gibt es eine Teilmenge*

$$J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\} = I$$

*derart, dass die Familie*

$$u_1, \dots, u_k, b_i, i \in I \setminus J,$$

*eine Basis von  $V$  ist. Insbesondere ist  $k \leq n$ .*

*Beweis.* Wir führen Induktion über  $k$ , also über die Anzahl der Vektoren in der Familie. Bei  $k = 0$  ist nichts zu zeigen. Es sei die Aussage für  $k$  schon bewiesen und seien  $k + 1$  linear unabhängige Vektoren

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}$$

gegeben. Nach Induktionsvoraussetzung, angewandt auf die (ebenfalls linear unabhängigen) Vektoren

$$u_1, \dots, u_k$$

gibt es eine Teilmenge  $J = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  derart, dass die Familie

$$u_1, \dots, u_k, b_i, i \in I \setminus J,$$

eine Basis von  $V$  ist. Wir wollen auf diese Basis das Austauschlemma anwenden. Da eine Basis vorliegt, kann man

$$u_{k+1} = \sum_{j=1}^k c_j u_j + \sum_{i \in I \setminus J} d_i b_i$$

schreiben. Wären hierbei alle Koeffizienten  $d_i = 0$ , so ergäbe sich sofort ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der  $u_j$ ,  $j = 1, \dots, k + 1$ . Es gibt also ein  $i \in I \setminus J$  mit  $d_i \neq 0$ . Wir setzen  $i_{k+1} := i$ . Damit ist  $J' = \{i_1, i_2, \dots, i_k, i_{k+1}\}$  eine  $(k + 1)$ -elementige Teilmenge von  $\{1, \dots, n\}$ . Nach dem Austauschlemma kann man den Basisvektor  $b_{i_{k+1}}$  durch  $u_{k+1}$  ersetzen und erhält die neue Basis

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, b_i, i \in I \setminus J'.$$

Der Zusatz folgt sofort, da eine  $k$ -elementige Teilmenge einer  $n$ -elementigen Menge vorliegt.

□

BEISPIEL 8.3. Wir betrachten die Standardbasis  $e_1, e_2, e_3$  des  $K^3$  und die beiden linear unabhängigen Vektoren  $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ , die wir mit Hilfe der Standardbasis gemäß dem im Beweis zum Basisaustauschsatz beschriebenen Verfahren zu einer Basis ergänzen wollen. Betrachten wir zunächst

$$u_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Da sämtliche Koeffizienten nicht 0 sind, kann man  $u_1$  mit je zwei der Standardvektoren zu einer Basis ergänzen. Wir nehmen die neue Basis

$$u_1, e_1, e_2.$$

Als zweiten Schritt wollen wir  $u_2$  in die Basis mitaufnehmen. Es ist

$$u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - e_1 = 2u_1 - e_1 + 0e_2.$$

Nach dem Beweis müssen wir  $e_1$  rauswerfen, da es mit einem Koeffizienten  $\neq 0$  in dieser Gleichung vorkommt ( $e_2$  dürften wir nicht rauswerfen). Die neue Basis ist somit

$$u_1, u_2, e_2.$$

SATZ 8.4. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann besitzen je zwei Basen von  $V$  die gleiche Anzahl von Basisvektoren.*

*Beweis.* Es seien  $\mathbf{b} = b_1, \dots, b_n$  und  $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_k$  zwei Basen von  $V$ . Aufgrund des Basisaustauschsatzes, angewandt auf die Basis  $\mathbf{b}$  und die linear unabhängige Familie  $\mathbf{u}$  ergibt sich  $k \leq n$ . Wendet man den Austauschatz umgekehrt an, so folgt  $n \leq k$ , also insgesamt  $n = k$ . □

Dieser Satz erlaubt die folgende Definition.

DEFINITION 8.5. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem. Dann nennt man die Anzahl der Vektoren in einer Basis von  $V$  die *Dimension* von  $V$ , geschrieben

$$\dim(V).$$

Wenn ein Vektorraum nicht endlich erzeugt ist, so setzt man  $\dim(V) = \infty$ . Der Nullraum  $0$  hat die Dimension 0. Einen eindimensionalen Vektorraum nennt man auch eine *Gerade*, einen zweidimensionalen Vektorraum eine *Ebene*, einen dreidimensionalen Vektorraum einen *Raum* (im engeren Sinn), wobei man andererseits auch jeden Vektorraum einen Raum nennt.

KOROLLAR 8.6. *Es sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann besitzt der Standardraum  $K^n$  die Dimension  $n$ .*

*Beweis.* Die Standardbasis  $e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , besteht aus  $n$  Vektoren, also ist die Dimension  $n$ . □

BEISPIEL 8.7. Die komplexen Zahlen bilden einen zweidimensionalen reellen Vektorraum, eine Basis ist z.B. 1 und  $i$ .

BEISPIEL 8.8. Der Polynomring  $R = K[X]$  über einem Körper  $K$  ist kein endlichdimensionaler Vektorraum. Es ist zu zeigen, dass es kein endliches Erzeugendensystem des Polynomringes gibt. Betrachten wir  $n$  Polynome  $P_1, \dots, P_n$ . Es sei  $d$  das Maximum der Grade dieser Polynome. Dann hat auch jede  $K$ -Linearkombination  $\sum_{i=1}^n a_i P_i$  maximal den Grad  $d$ . Insbesondere können Polynome von einem größeren Grad nicht durch  $P_1, \dots, P_n$  dargestellt werden, und diese endlich vielen Polynome sind kein Erzeugendensystem für alle Polynome.

Die vorstehende Aussage folgt auch daraus, dass wir aufgrund von Beispiel 7.10 schon eine unendliche Basis, nämlich die Potenzen  $X^n$ , des Polynomrings kennen. Dies schließt generell die Existenz einer endlichen Basis aus, siehe Aufgabe 8.18 (der Beweis zu Satz 8.4 zeigt strenggenommen nur, dass zwei endliche Basen die gleiche Anzahl haben müssen).

KOROLLAR 8.9. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum. Es sei  $U \subseteq V$  ein Untervektorraum. Dann ist  $U$  ebenfalls endlichdimensional und es gilt*

$$\dim(U) \leq \dim(V).$$

*Beweis.* Es sei  $n = \dim_K(V)$ . Jede linear unabhängige Familie in  $U$  ist auch linear unabhängig in  $V$ . Daher kann es aufgrund des Basisaustauschsatzes in  $U$  nur linear unabhängige Familien der Länge  $\leq n$  geben. Es sei  $k \leq n$  derart, dass es in  $U$  eine linear unabhängige Familie mit  $k$  Vektoren gibt, aber nicht mit  $k + 1$  Vektoren. Sei  $\mathbf{u} = u_1, \dots, u_k$  eine solche Familie. Diese ist dann insbesondere eine maximal linear unabhängige Familie in  $U$  und daher wegen Satz 7.11 eine Basis von  $U$ . □

Die Differenz

$$\dim(V) - \dim(U)$$

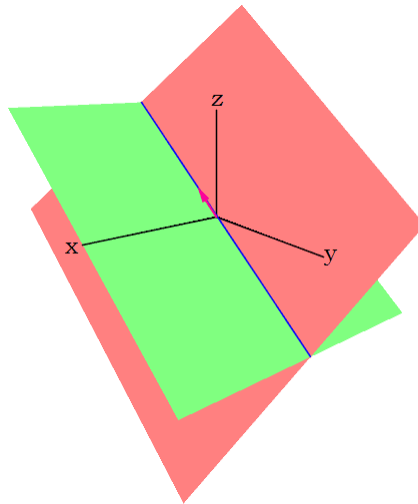
nennt man auch die *Kodimension* von  $U$  in  $V$ .

KOROLLAR 8.10. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit endlicher Dimension  $n = \dim(V)$ . Es seien  $n$  Vektoren  $v_1, \dots, v_n$  in  $V$  gegeben. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.*

- (1)  $v_1, \dots, v_n$  bilden eine Basis von  $V$ .
- (2)  $v_1, \dots, v_n$  bilden ein Erzeugendensystem von  $V$ .

(3)  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig.

*Beweis.* Siehe Aufgabe 8.7. □



BEISPIEL 8.11. Es sei  $K$  ein Körper. Man kann sich einfach einen Überblick über die Untervektorräume des  $K^n$  verschaffen, als Dimension von Untervektorräumen kommt nach Korollar 8.9 nur  $k$  mit  $0 \leq k \leq n$  in Frage. Bei  $n = 0$  gibt es nur den Nullraum selbst, bei  $n = 1$  gibt es den Nullraum und  $K$  selbst. Bei  $n = 2$  gibt es den Nullraum, die gesamte Ebene  $K^2$ , und die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt. Jede solche Gerade  $G$  hat die Gestalt

$$G = Kv = \{sv \mid s \in K\}$$

mit einem von 0 verschiedenen Vektor  $v$ . Zwei von 0 verschiedene Vektoren definieren genau dann die gleiche Gerade, wenn sie linear abhängig sind. Bei  $n = 3$  gibt es den Nullraum, den Gesamttraum  $K^3$ , die eindimensionalen Geraden durch den Nullpunkt und die zweidimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt.

Der folgende Satz heißt *Basisergänzungssatz*.

SATZ 8.12. *Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum der Dimension  $n = \dim_K(V)$ . Es seien*

$$u_1, \dots, u_k$$

*linear unabhängige Vektoren in  $V$ . Dann gibt es Vektoren*

$$u_{k+1}, \dots, u_n$$

*derart, dass*

$$u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$$

eine Basis von  $V$  bilden.

*Beweis.* Es sei  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$ . Aufgrund des Austauschsatzes findet man  $n - k$  Vektoren aus der Basis  $\mathfrak{b}$ , die zusammen mit den vorgegebenen  $u_1, \dots, u_k$  eine Basis von  $V$  bilden.

□

Insbesondere kann man eine Basis eines Untervektorraumes  $U \subseteq V$  stets zu einer Basis des Gesamttraumes ergänzen.





## Abbildungsverzeichnis

- Quelle = Flickr\_*archer10(Dennis)\_Bolivia - 91.jpg*, Autor =  
*DennisJarvis(hochgeladenvonBenutzerMatanyaaufCommons)*, Lizenz =  
*CC - by - sa2.0* 1
- Quelle = *IntersecciónEspacioVectorial.gif* , Autor = Benutzer Marianov  
auf Commons, Lizenz = gemeinfrei 6
- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus  
Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine  
Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren  
Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor  
bzw. Hochlader und der Lizenz. 9
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias  
Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und  
unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9