中華文庫

初中第一集

代數方程式

張鵬飛編

中華書局印行

先說的話

周易的繫辭上傳說：「乾以易知，坤以簡能．易則易知，簡則易從，……易簡而天下之理得矣．」人事紛紜，物情錯綜，千變萬化，繁難沒有止境，但是果能靜觀默察，尋着線索，識得途徑，沒有不是歸於易而簡的．物理學的定律，化學的週期律，沒有就繁難，有了就簡易；其它學問，也是這樣．我們學習數學，更要把這易簡二字，念念不忘，才能使數學有進步．

用算術方法解應用問題，幾乎各題各樣，要想一個解法，大抵非常繁難；用代數方程式去解，祇要寫成方程式，都是應用一樣理性去化，簡而且易．用算術方法說演算理性，往往做篇文章，都想說得清楚，也是非常繁難；用代數方程式去說，一看完全明白，簡而且易．用算術方法解，演算和說明，大抵要分開，用代數方程式解，演算內卽含說明，不要費兩次事，這不是簡而又簡易而又易嗎！有代數，可以化算術的繁難成簡易；有代數方程式，可以有簡易的方法解許多應用問題．

一元一次方程式和二元一次聯立方程式，應用最廣，所以舉例很多，題目也多，說得很詳．一元二次方程式和二元二次聯立方程次，應用較狹，所以說得稍簡略些．分式方程式和無理方程式，應用更少，所以說得更加簡略．其它恆等方程式、不等方程式等，不但應用少，並且理論深，不在初中範圍之內，一概都不說了．

代數方程式目次

代數方程式

第一章　方程式的意義和種類

第一節　代數方程式的意義

一．代數是什麼

算術用數碼表示數目，代數用字母代替數目．已知數目，無論是整數，是分數或小數，是有理數，是無理數，是實數，是虛數，是任何正數或負數，無論是怎樣的大或是怎樣的小，都可拿一個在前的英文字母或希臘字母等去代替它．

希臘字母

字母		讀音	讀音	字母	
Α	α	Alpha	Theta	Θ	θ
Β	β	Beta	Iota	Ι	ι
Γ	γ	Gamma	Kappa	Κ	κ
Δ	δ	Delta	Lambda	V	λ
Ε	ϵ	Epsilon	mu	Μ	μ
Ζ	ζ	Zeta	Nu	Ν	ν
Η	η	Eta	Xi	Ξ	ξ

O	o	Omicron	Upsilon	Υ	υ
Π	π	Pi	Phi	Φ	φ
P	ρ	Rho	Chi	X	χ
Σ	σ,s	Sigma	Psi	Ψ	ψ
T	τ	Tau	Omega	Ω	ω

常用英文字母，希臘字母要用在有特别情形的地方.

未知數目，在算術裏，如一人借錢給人應得本利和的圓數，一船開往某地共計所走路的里數，說起來很累贅，重說一遍，就要重贅一遍，非常麻煩，並不清楚，我們在代數裏，拿一個在後的英文字母或希臘字母等去代替，一切都簡便了.

數學裏有兩種數；一種是不變動，可此而不可彼的，叫**常數**；一種是在一定範圍之內，可任意變動的，叫**變數**. 常數如：

π 代 3.1416……圓周率
ϵ 代 2.718 ……自然對數的底
μ 代 0.4343……常用對數對於自然對數的模
}…………絕對常數

a 代 1 石米價的圓數 6000
r 代 1 車速率的里數 60
}………………普通常數

變數如：

$2n$ 代偶數，可表0、2、4等的任一個數
$2n+1$ 代奇數，可表1、3、5等的任一個數
}……變數

常數變數在代數裏，都能拿一字母去代；若用英文字母，拿在

前者代常數，在後者代變數，代數能有一切簡便式子，就是從這地方來的.

二. 代數式是什麼

照字面看起來，**代數式**可以有兩個意思，一個是代表一個數目的式子，一個是代數裏一切的式子，但是現在代數書採取的，是第一個意思，我們不要誤認它是第二個意思.

代數式代表一個上面所舉的任何數目，極簡的可以是一個字母，或者是一個表正數的阿拉伯數字，繁的可以包含許多字母、許多阿拉伯數字、許多計算的記號.

$$\left.\begin{array}{l} a \\ 2 \\ -5 \\ a+b \\ (a+b+c)x \\ a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca \end{array}\right\}\text{都是代數式}$$

一個代數式代表一個數目，所以這個代數式，也能拿別的代數式去代它，如：

$$PR^n \text{ 代 } P(1+r)^n \cdots\cdots \text{拿 } R \text{ 代 } 1+r,$$

$$\frac{QA+R}{A} \text{ 代 } \frac{B}{A} \cdots\cdots \text{拿 } QA+R \text{ 代 } B.$$

這樣可以便於計算，便於說理，便於記憶，便於運用. 代數的效用，深而且廣，就在這個地方.

三. 方程是什麽

方程是我國古算學裏一個名詞，眞正知道它的意思的，在現在的初中學生裏，恐怕不多，我來把它詳細說說.

魏朝劉徽註九章算術，在方程二字下說:「程，理程也. 羣物總雜，各列有數，總言其實. 令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數. 程之並列爲行，故謂之方程.」如這書方程章第一題:「今有上禾三秉、中禾二秉、下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉、中禾三秉、下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉、中禾二秉、下禾三秉，實二十六斗. 問上、中、下禾實一秉各幾何.」上、中、下三種禾，各有秉數，有總實數，每種寫成一行，並列就成三行:

上禾一秉	上禾二秉	上禾三秉
中禾二秉	中禾三秉	中禾二秉
下禾三秉	下禾一秉	下禾一秉
實二十六斗	實三十四斗	實三十九斗

一行叫一程，這是三物三程，所以成爲方程．方程是指全部而言，並不是單指一行說的，所以我們把這個方程的全部，都改做代數的式子，全部或可叫做方程，分開大不對了．

四．方程式是什麼

兩個相等的代數式，用等號聯起來，就成一個代數等式：

$$a+b\equiv b+a,$$

$$x+a=b.$$

前者叫**恒等式**，無論 a、b 代什麼數，左右總是相等，假如用加的交換律，可把左式變成右式，也可把右式變成左式；後者叫**條件等式**，就是代數的相等方程式，x 代某定數，左右才能相等，不能用計算的定律，把左式變成右式，或把右式變成左式．

兩個不相等的代數式，用不等號聯接起來，就成一個代數不等式：

$$a^2+b^2>2ab,$$

$$x+a>b.$$

前者在 a、b 不都表零的時候，叫**恒不等式**，或**絕對不等式**，無論 a、b 代什麼實數，總是左大於右；後者叫**條件不等式**，或**不等式**，就是代數的不等方程式，x 代某定數，才能左大於右．

現在拿**方程式**或**方程**指條件等式和條件不等式，或連恆等式和恆不等式都包在內，並稱前者爲方程式和不等方程式，後者爲恆等方程式和恆不等方程式，但是我都不贊成的．

第二節 代數方程式的種類

一. 方程式的名稱

依左右式的關係說，是：

代數方程式

相等式　　不等式

恆等式　　相等方程式……方程式　　恆不等式　　不等方程式

恆等方程式　　恆不等方程式

絕對等式　　絕對不等式

但是它含表未知數或變數的字母，叫**元**，合左右式共含幾元，分別叫幾元方程式：

$ax=b$ ……………………………一元方程式

$ax+by=c$ ……………………………二元方程式

$(x+y)^2\equiv x^2+2xy+y^2$ ………………二元恆等式

$(ax+by)^2\equiv a^2x^2+2abxy+b^2y^2$ ……二元恆等式

左右式都是整式的，叫**整式方程式**；不都是的，叫**分式方程式**. 整式方程式裏，看某項含元字若干個，這項就是幾次，合左右式去看，最高次項是幾次，分別叫幾次方程式；分式方程式不說次數.

$ax=b$ ……………………整式方程式

$\dfrac{x}{a}=b$ ……………………整式方程式

$\dfrac{a}{x}+by=c$ ………………分式方程式

$\dfrac{a}{x}=c-\dfrac{b}{y}$ ………………分式方程式

左右式都是有理式的，叫**有理方程式**；不都是的，叫**無理方程式**．無理方程式，也是不能說次數的．

$ax=b$ ……………………有理方程式

$\sqrt{ax}=b$ …………………有理方程式

$a\sqrt{x}=b$ …………………無理方程式

$a\sqrt{x}=c-b\sqrt{y}$ ………無理方程式

二．方程式的種類

依左右式的關係分類，就是上面的表，但也可依計算分類，如：

代數方程式

有理方程式　　無理方程式

整式方程式　　分式方程式　　一元、二元、多元方程式

一次方程式　　二次方程式　　高次方程式

第三節　研究和測驗

一．研究

關於計算定律的式子，都是恆等式，如：

$a+b\equiv b+a$……………………………………加的交換律

$(a+b)+c\equiv a+(b+c)$……………………………加的結合律

$ab\equiv ba$……………………………………………乘的交換律

$(ab)c\equiv a(bc)$…………………………………乘的結合律

$a(b+c+d)\equiv ab+ac+ad$………………………乘的分配律

$(b+c+d)\div a\equiv b\div a+c\div a+d\div a$………除的分配律

…………………………………………………………………

關於乘除的公式，自然仍是恆等式，如：

$$(a+b)(a-b)\equiv a^2-b^2,$$

$$(x+a)(x+b)\equiv x^2+(a+b)x+ab,$$

$$(ax+b)(cx+d)\equiv acx^2+(bc+ad)x+bd,$$

$$(x+y)^2\equiv x^2+2xy+y^2,$$

$$(x+y)^3\equiv x^3+3x^2y+3xy^2+y^3,$$

$$(x+y)(x^2-xy+y^2)\equiv x^3+y^3,$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)\equiv x^3-y^3,$$

$$(x+y+z)^2\equiv x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz,$$

…………………………………………………………………

算術裏一切計算公式，在代數裏，就成功一個方程式，如：

單利公式　　　　　　　　方程式

利＝本×率×期…………　$\begin{cases} x=prt \\ i=x\times rt \\ i=px\times t \\ i=prx \end{cases}$

幾何學裏一切求積公式，在代數裏，也成功一個方程式，如：

三角形面積公式　　　　　　方程式

面積＝$\frac{1}{2}$×底×高…………　$\begin{cases} x=\frac{1}{2}bh \\ a=\frac{1}{2}x\times h \\ a=\frac{1}{2}bx \end{cases}$

又算術裏一切應用問題，自然都可以寫成方程式，因爲這些應用問題，可用算術方法來解，沒有不能用代數方法來解的.

二. 測驗

1. 比例式是恆等式，還是方程式?
2. 正變式是方程式嗎? 是什麼方程式?
3. 反變式是方程式嗎? 是什麼方程式?
4. 合變式是什麼方程式?
5. 試說正反變式和比例式、方程式的關係!
6. 試說合變式和比例式、方程式的關係!
7. 試述減的交換律、加減交換律!
8. 試述除的交換律、乘除交換律!

9. 試述減的結合律、加減結合律！

10. 試述除的結合律、乘除結合律！

11. $(d+e-f)\div a\times b\div c=?$

12. $(x+y+z+w)^2=?$

13. $(x+y)^4=?$ $(x+y)^5=?$

14. $(x-y)^2=?$ $(x-y)^3=?$

15. $(x+a)(x+b)(x+c)=?$

16. $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=?$

17. $(a_0x+a_1)(b_0x+b_1)(c_0x+c_1)=?$

18. $(x+a)^n=?$ $(ax+b)^n=?$ n表正整數

19. $(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+a^2x^{n-3}\cdots+a^{n-1})=?$ n表奇數

20. $(x+a)(x^{n-1}-ax^{n-2}+\cdots\cdots\cdots-a^{n-1})=?$ n表偶數

21. $(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a^{n-1})=?$ n表正整數

22. $(a_0x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4)(b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3)=?$

23. 試寫幾個算術裏的計算公式！

24. 試寫幾個幾何學裏的求積公式！

25. 試在算術書裏，找幾個應用問題，寫成代數方程式！

26. 試在代數書裏，找幾個應用問題，寫成代數方程式！

注意 研究和測驗，各人不必一樣，上面祇是一個樣子，可以自己向各方面研究，就各方面測驗．以後各章，都要照這樣看，若是限在所寫的範圍裏，那就不聰明了．

第二章　一次方程式

第一節　一元一次方程式

一. 關於一個等式的定理

就一個等式說,有下各定理:

(一)任取一式,加左右式,或左右式都加這式,仍成等式:

假設 $a=b$,

那麼 $c+a=c+b$,　$a+c=b+c$.

(二)任取一式,減左右式,或左右式都減這式,仍成等式:

假設 $a=b$,

那麼 $c-a=c-b$,　$a-c=b-c$.

(三)任取一式,乘左右式,或左右式都乘這式,仍成等式:

假設 $a=b$,

那麼 $ac=bc$,　$ca=cb$.

(四)任取一式,除左右式,或左右式都除這式,仍成等式:

假設 $a=b$,

那麼 $a\div c=b\div c$,　$c\div a=c\div b$.

但除數不能爲零.

(五)左右式各開同次方,仍成等式:

假設 $a=b$,

那麼 $\sqrt{a}=\pm\sqrt{b}$, $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b}$, ……………….

應用這些定理，可以隨意變化一個等式，使它合用，變化一個方程式，得到要求的未知數，就是求方程式的根．但這裏定理(五)，是求一次方程式根用不着的．

二．關於一個等式的變化

一個等式的變化，可以分做五種：

(一)整理左式或右式，或左右式各自整理：

假設 $ax+bx-c=d$，

那麼 $(a+b)x-c=d$．

假設 $ax+bx-c=dx+e-fx$，

那麼 $(a+b)x-c=(d-f)x+e$．

(二)在左式取一項，變號移到右式，或在右式取一項，變號移到左式：

假設 $(a+b)x-c=d$，

那麼 $(a+b)x=d+c$．

假設 $(a+b)x-c=(d-f)x+e$，

那麼 $(a+b)x-(d-f)x=e+c$．

(三)在左式取一因式除右式，或從右式取一因式除左式：

假設 $(a+b)x=c+d$，

那麼 $x=\dfrac{c+d}{a+b}$．

但 $a+b\neq 0$．

(四)取左式的分母乘右式，或取右式的分母乘左式：

假設 $\frac{x}{a+b}=c+d$,

那麼 $x=(c+d)(a+b)$.

(五)左式或右式為0,可取右式或左式的因式,使它等於0:

假設 $(x+a)(x+b)=0$,

那麼 $x+a=0$ 或 $x+b=0$.

假設 $2(x+a)=0$,

那麼 $x+a=0$,但 $2\neq 0$.

從(二)到(五),是根據前面(一)到(四)的定理來的,並且前面的定理(五),可以包含在上面的第五變化之內.這裏的第五變化,也是求一次方程式根用不着的.

三.解一元一次方程式

解一元一次方程式,就是求它的根,普通要分四個步驟:

(一)整理左右式.

(二)移含元字項到一邊,並移不含元字項到另一邊.

(三)再整理左右式.

(四)拿含元字項裏元字的係數除它一邊.

例一 解方程式 $8x+7=4x+27$!

解 $8x+7=4x+27$.

移項, $8x-4x=27-7$.

整理, $4x=20$.

4除, $x=5$.

例二 解 $5x-7=7x-15$!

解 $5x-7=7x-15.$

移項, $5x-7x=-15+7.$

整理, $-2x=-8.$

-2除, $x=4.$

問 題 一

解下各方程式!

1. $3x=24.$
2. $-3x=15.$
3. $-4x=-28.$
4. $3x-5=1.$
5. $4x+5=17.$
6. $x+2x=18.$
7. $x+5x-3x=48.$
8. $x-4x-3x=-24.$
9. $8x-5x=12-6.$
10. $x-12=6-2x.$
11. $-3x-7=-x+3.$
12. $-5x+24+4x=0.$

例三 解 $4(3x-2)-2(4x-3)=3(4-x)$!

解 $4(3x-2)-2(4x-3)=3(4-x).$

去括號, $12x-8-8x+6=12-3x.$

整理, $4x-2=12-3x.$

移項, $4x+3x=12+2.$

整理, $7x=14.$

7 除, $x=2.$

例四 解 $(x-2)(7-x)+(x-5)(x+3)=2(x-1)-12$!

解 $(x-2)(7-x)+(x-5)(x+3)=2(x-1)-12.$

去括號, $-x^2+9x-14+x^2-2x-15=2x-2-12.$

整理, $7x-29=2x-14.$

移項, $7x-2x=-14+29.$

整理, $5x=15.$

5 除, $x=3.$

問　題　二

解下各方程式！

1. $3(x-2)=2(x-3)$.　　2. $5(x+2)=3(x+3)+1$.

3. $x-(4-2x)=7(x-1)$.　　4. $5(4-3x)=7(3-4x)$.

5. $-4(5-2x)-2=-2(x-50)+8$.

6. $2(x-2)+3(x-3)+4(x-4)-25=0$.

7. $(x-1)(x-2)=(x-3)(x-4)$.　　8. $2x^2=(x+1)^2+(x+3)^2$.

9. $(x-1)^3+(x-2)^3+(x-3)^3=3(x-1)(x-2)(x-3)$.

例五　解 $\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2x}{5}=46$！

解一　$\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2x}{5}=46$.

整理，　$\left(\dfrac{3}{4}+\dfrac{2}{5}\right)x=46$,

即　$\dfrac{23}{20}x=46$.

$\dfrac{23}{20}$除，　$x=46\div\dfrac{23}{20}=40$.

解二　$\dfrac{3x}{4}+\dfrac{2x}{5}=46$.

去分母，卽拿 4 和 5 的最小公倍數 20 乘兩邊，

$$\left(\frac{3x}{4}+\frac{2x}{5}\right)\times 20=46\times 20,$$

卽　$15x+8x=920$.

整理，　$23x=920$.

23除，　$x=40$.

例六　解 $\dfrac{x}{2}+2=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$！

解　$\dfrac{x}{2}+2=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$.

去分母，

$$2x+8=x+10.$$

移項，　$2x-x=10-8.$

整理，　$x=2.$

例七　解 $\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x-1}{3}=1!$

解　$$\frac{x+1}{4}-\frac{x-1}{3}=1.$$

去分母，

$$3(x+1)-4(x-1)=12.$$

去括號，

$$3x+3-4x+4=12.$$

整理，　$-x+7=12.$

移項，　$-x=12-7.$

整理，　$-x=5.$

-1除，　$x=-5.$

注意一　拿 -1 除一個等式的左右式，就是變號，把所有的 $+$ 號盡變做 $-$，所有 $-$ 號盡變做 $+$.

注意二　$\dfrac{x+1}{4}-\dfrac{x-1}{3}=1$ 的分母和括號，也能同時去掉，變做 $3x+3-4x+4=12$，但要留心 $\dfrac{x-1}{3}$ 的前面有 $-$ 號，不要寫成 $3x+3-4x-4=12$.

問　題　三

解下各方程式！

1. $\dfrac{x}{4}-\dfrac{x}{6}-\dfrac{1}{2}=0.$　　2. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}x=3.$

3. $\dfrac{1}{2}x-\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{5}x=3.$　　4. $\dfrac{2}{7}x+\dfrac{x-1}{6}+4=x.$

5. $\dfrac{12x+7}{21}+\dfrac{10}{3}=\dfrac{6x}{5}.$　　6. $\dfrac{7x-13}{12}-\dfrac{x+3}{2}=\dfrac{1}{4}.$

7. $\frac{1}{5}(6x-3)-\frac{1}{3}(x+8)-\frac{x+11}{6}=4.$

8. $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\frac{x+4}{4}-13=0.$

9. $\frac{x-5}{2}-\frac{x-4}{3}=\frac{x-3}{2}-(x-2).$

10. $\frac{3x+5}{8}-\frac{21+x}{2}=5x-15.$

11. $x-\frac{6}{7}(x-8)+\frac{5}{3}(x-7)+14\frac{1}{3}=3x.$

12. $-\frac{6(x+10)}{17}+\frac{3}{4}x-\frac{-7+x}{51}-(-3+x)+4\frac{3}{4}=0.$

13. $\frac{(2x+1)(2x-4)}{3}-\frac{1}{3}(2x+1)^2+6x+3=0.$

14. $\frac{(x+1)^2}{4}-\frac{3x}{4}(x+1)+\frac{1}{4}(1+2x^2)=x-1.$

15. $2\left\{x+\frac{5}{3}(x+7)\right\}-2(3x-\frac{43}{3})-\frac{12}{7}(x-8)=0.$

例八　解 $0.25x+4-0.375x=0.2x-9$!

解一　$0.25x+4-0.375x=0.2x-9.$

整理，$4-0.125x=0.2x-9.$

移項，$-0.125x-0.2x=-9-4.$

整理，$-0.325x=-13.$

-0.325除，$x=\frac{13}{0.325}=40.$

解二　$0.25x+4-0.375x=0.2x-9.$

1000乘，$250x+4000-375x=200x-9000.$

整理，$4000-125x=200x-9000.$

移項，$-125x-200x=-9000-4000.$

整理，$-325x=-13000.$

-325除，$x=40.$

解三　$0.25x+4-0.375x=0.2x-9.$

化各係數是小數的做分數，

$$\frac{1}{4}x+4-\frac{3}{8}x=\frac{1}{5}x-9.$$

去分母，

$$10x+160-15x=8x-360.$$

整理， $160-5x=8x-360.$

移項， $-5x-8x=-360-160.$

整理， $-13x=-520.$

-13除， $x=40.$

例九 解 $0.25x+4-\dfrac{3}{8}x=\dfrac{1}{5}x-9$！

解一 $0.25x+4-\dfrac{3}{8}x=\dfrac{1}{5}x-9.$

去小數點，

$$\frac{1}{4}x+4-\frac{3}{8}x=\frac{1}{5}x-9.$$

$\therefore$ $x=40.$

解二 $0.25x+4-\dfrac{3}{8}x=\dfrac{1}{5}x-9.$

去分母，

$$10x+160-15x=8x-360.$$

$\therefore$ $x=40.$

例十 解 $\dfrac{0.1x+0.05}{0.2}-\dfrac{0.2x-0.05}{0.5}+1.25=0$！

解一 $\dfrac{0.1x+0.05}{0.2}-\dfrac{0.2x-0.05}{0.5}+1.25=0.$

去分母，

$$0.5x+0.25-(0.4x-0.1)+1.25=0.$$

整理， $0.1x+1.6=0.$

移項， $0.1x=-1.6.$

0.1 除， $x=-16.$

解二
$$\frac{0.1x+0.05}{0.2}-\frac{0.2x-0.05}{0.5}+1.25=0.$$

去分母，
$$0.05x+0.025-0.04x+0.01+0.125=0.$$

整理，
$$0.01x+0.16=0.$$

移項，
$$0.01x=-0.16.$$

0.01除，
$$x=-16.$$

解三
$$\frac{0.1x+0.05}{0.2}-\frac{0.2x-0.05}{0.5}+1.25=0.$$

去分母的小數點，
$$\frac{0.5x+0.25}{1}-\frac{0.4x-0.1}{1}+1.25=0.$$

$$\therefore\qquad x=-16.$$

問　題　四

解下各方程式！

1. $0.25x+6x+15=6.875x.$

2. $\frac{1}{4}x+6x+15=6.875x.$

3. $-0.5x-0.75x-5.1=-3.25x-x+3.9.$

4. $-0.5x-\frac{3}{4}x-5.1=-3\frac{1}{4}x-x+3.9.$

5. $2.4x-0.8x=-\frac{0.05-0.36x}{0.5}+8.9.$

6. $\frac{0.48x}{6}-1993=-\frac{4x-3}{0.2}.$

四．特殊一元一次方程式

例一　解 $2(x-5)+3(5x-1)=4(4x-5)+x+7$！

解
$$2(x-5)+3(5x-1)=4(4x-5)+x+7.$$

去括號，

$$2x-10+15x-3=16x-20+x+7.$$

整理， $17x-13=17x-13.$

移項， $17x-17x=-13+13.$

整理， $0x=0.$

0 除， $x=\frac{0}{0}=$無定.

這是一個恆等方程式，拿任何代數數做根，都可以的.

例二 解 $3(6x-5)=9(2x-1)+3$!

解 $3(6x-5)=9(2x-1)+3.$

去括號，

$$18x-15=18x-9+3.$$

整理， $18x-15=18x-6.$

移項， $18x-18x=-6+15.$

整理， $0x=9.$

這是一個無解方程式，拿任何代數數做根，都不可以.

問 題 五

解下各方程式!

1. $2(3x+5)-(x-8)=(3x-1)-(5-x).$
2. $5(2x-4)+(2x-1)=3(4x-7).$
3. $\frac{x-1}{2}+\frac{x-2}{3}-\frac{x-1}{6}=x-1.$
4. $\frac{x}{2}+5=\frac{5x}{6}-\frac{x+1}{3}.$

五. 一元一次文字方程式

例一 解 $ax+b=0$! 但 a, b 表已知數.

解 $ax+b=0.$

移項，　$ax=-b$.

a 除，　$x=-\frac{b}{a}$.

就$\frac{b}{a}$來討論，若(一) $a\neq 0$, a、b 表任何代數數，這方程式必有一根.

(二) $a=0$, $b\neq 0$, 這方程式沒有一根.

(三) $a=0$, $b=0$, 這方程式沒有一定的根.

例二　設 a、b 表已知數，解 $a(x-a)=b(x-b)$！

解　　$a(x-a)=b(x-b)$.

去括號，　$ax-a^2=bx-b^2$.

移項，　$ax-bx=a^2-b^2$.

整理，　$(a-b)x=a^2-b^2$.

由是若(一)　$a-b\neq 0$, 即 $a\neq b$, 那麼 $x=\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$.

(二)　$a-b=0$, 即 $a=b$, 那麼 $x=\frac{0}{0}=$無定.

例三　解 $a(x-a)+b(x-b)=2ab$！

解　　$a(x-a)+b(x-b)=2ab$.

去括號，

$$ax-a^2+bx-b^2=2ab.$$

整理，　$(a+b)x-a^2-b^2=2ab$.

移項，　$(a+b)x=a^2+2ab+b^2$.

由是若(一) $a+b\neq 0$, 那麼 $x=a+b$.

(二) $a+b=0$, 那麼 $x=$無定.

問　題　六

設 a、b、c 表已知數，解下各方程式！

1. $ax=bx+c$.
2. $cx-2a=5bx-3c$.
3. $5(x-a)=b(x-c)$.
4. $2(x-a)+3(x-2a)=2c$.

5. $\frac{1}{2}(x+a+b)+\frac{1}{3}(x+a-b)=b.$

6. $(a+b)x=(a-b)x+b^2.$ 7. $\frac{ax}{b}+\frac{bx}{a}=a^2+b^2.$

8. $a(x+a)+b(b-x)=2ab.$

9. $(x-a)(x-b)+(a+b)^2=(x+a)(x+b).$

六. 一元一次方程式應用問題

解一元一次方程式的應用問題,就是求它的解答,普通要分五個步驟:

(一)看淸題目的意思.

(二)拿 x 代所求數或它未知數.

(三)依題目所含的條件,寫成 x 的一次方程式.

(四)解這個方程式,求根,求這題目的解答.

(五)把解答代入原題,驗明有無錯誤或是否合理.

例一 某數加 2 就成 5. 某數怎樣?

解 設 $x=$某數.

依題得

$$x+2=5.$$

解得 $x=3.$

驗 3 加 2 成 5.

答:某數是 3.

例二 甲有錢是乙的 4 倍. 若各人得 1500 圓,甲就成乙的 3 倍. 甲、乙原有錢怎樣?

解一 設 $x=$乙原有圓數,

那麼 $4x=$甲原有圓數.

依題得

$$4x+1500=3(x+1500).$$

解得 $x=3000.$

那麼 $4x=12000.$

驗 12000是3000的4倍.

(12000+1500)是(3000+1500)的3倍.

答：甲原有12000圓,乙原有3000圓.

解二 設 x=甲原有圓數.

那麼 $\frac{x}{4}$=乙原有圓數.

依題得

$$x+1500=3\left(\frac{x}{4}+1500\right).$$

解得 $x=12000.$

那麼 $\frac{x}{4}=3000.$

例三 甲今年40歲,乙今年8歲.幾年後,甲的歲數是乙的3倍?

解 設 x 年後,甲的歲數是乙的3倍,

那麼 x 年後,甲 $(40+x)$ 歲,乙 $(8+x)$ 歲.

依題得

$$40+x=3(8+x).$$

解得 $x=8.$

驗 8年後,甲48歲,乙16歲.

48是16的3倍.

答：8年後.

例四 往返遠路共費10時.往乘人力車,每時走10里;返乘馬車,每時15里.這路是多少遠?

解 設這路長 x 里,

那麼往費 $\frac{x}{10}$ 時，返費 $\frac{x}{15}$ 時.

依題得

$$\frac{x}{10}+\frac{x}{15}=10.$$

解得 $x=60.$

驗 往費(60÷10)時卽6時，返費(60÷15)時卽4時.

6時加4時得10時.

答：這路是60里.

例五 甲每日走90里，乙每日72里. 乙在4日前從某地出發，甲今日從這地出發追乙，幾日後卽追到?

解一 設甲走 x 日追到乙，

那麼乙已走 $(4+x)$ 日.

依題得

$$90x=72(4+x).$$

解得 $x=16.$

驗 甲走16日，共走1440里；乙走20日，也走1440里.

答：16日後追到.

解二 設甲走 x 日追到乙.

乙走4日，已走288里.

依題得

$$(90-72)x=288.$$

解得 $x=16.$

例六 甲今年40歲，乙今年8歲. 甲的歲數到乙的3倍時甲是幾歲?

解一 設 x 年後，甲的歲數是乙的3倍，

那麼，這時甲 $(40+x)$ 歲，乙 $(8+x)$ 歲.

依題得

$$40+x=3(8+x).$$

解得　　$x=8$.

那麼　$40+x=48$.

驗　8年後，乙16歲.

48是16的3倍.

答：**甲是43歲.**

解二　設這時甲是x歲，

那麼$(x-40)$年後，甲的歲數是乙的3倍.

依題得

$$x=3(8+x-40).$$

解得　$x=48$.

驗　這時是$(48-40)$年即8年後.

48是$(8+8)$的3倍.

問　題　七

1. 二數的和是S，差是D. 各數怎樣?

略解　設　　$x=$小數，

那麼　　$x+D=$大數.

依題得

$$x+(x+D)=S.$$

2. 二數的和是100，差是20. 各數怎樣?
3. 兄弟共儲蓄85圓. 兄比弟多儲15圓. 各人儲蓄多少?
4. 二數的差是5，它們平方的差是85. 求這兩數!
5. 二數的和是20，它們平方的差是80. 求這兩數!
6. 分一個數N做兩份，使一份的m倍等於它一份的n倍. 求這兩份!

略解　設　$x=$前一份，

那麼$N-x=$後一份.

依題得

$$mx=n(N-x).$$

7. 分52做兩份，使一份等於它份的3倍. 求這兩份!

8. 甲、乙二人分錢 10000 圓. 甲所得的 2 倍等於乙所得的 3 倍. 各人得若干圓?

9. 把 3 丈絹分做兩段,使一段的 2 分之 1 等於它段的 3 分之 1. 各段的長怎樣?

10. 一數的 5 分之 1 和它 4 分之 1 的差,8 倍起來,積比原數的 1 半還少 2. 這數怎樣?

11. 一數的 6 分之 1 和它 8 分之 1 的差,4 倍起來,積比它 3 分之 1 和 4 分之 1 的差還多 2. 求這數!

12. 甲、乙、丙三人分錢 N 圓. 甲比乙多 a 圓,乙比丙少 b 圓. 各人分得若干圓?

略解　設甲分得 x 圓,

那麼乙分得 $(x-a)$ 圓,丙分得 $(x-a+b)$ 圓.

依題得

$$x+(x-a)+(x-a+b)=N.$$

13. 甲、乙、丙三人分錢 16000 圓. 甲比乙多 1000 圓, 乙比丙多 3000 圓. 各人分得若干圓?

14. 甲、乙、丙三人分錢 19000 圓. 乙比甲的一半多2000圓, 丙比乙的 3 分之 1 多 3000 圓. 各人分得若干圓?

15. 某數加 21 或乘 21, 結果相等. 這數怎樣?

16. 什麼數加 40, 和能等於原數的 3 倍?

17. 什麼數減 14, 差能等於原數的 3 分之 1?

18. 一數是它數的 4 倍,它們的差是 15. 求這兩數!

19. 一數是它數的 4 分之 1, 它們的差是 30. 求這兩數!

20. 一數是它數的 2 倍,它們的和是 38. 求這兩數!

21. 一數比它數的一半少 2, 它們的和是 31. 求這數!

22. 一數的 4 分之 3, 比它 5 分之 2 多 21. 求這數!

23. 一數的 3 分之 2, 比它 4 分之 3 少 3. 求這數!

24. 一數的 4 倍超過 35 的數, 等於它小於 35 的數. 這數怎樣?

25. 3 分 100, 使各二部份的差順次是 3 和 5!

26. 甲有錢 10000 圓, 乙有錢 2000 圓. 若使乙所有錢等於甲所有的一半,

甲應給乙若干圓?

27. 甲有錢 10000 圓，乙有錢 2000 圓．各給等數的錢，乙就成甲的一半．各得錢若干圓?

28. 若甲給乙 5 圓，甲、乙所有就能相等，又乙給甲 5 圓，甲就成乙的 3 倍．各人有多少圓?

29. 東西兩倉，各儲相等的米．若從西倉搬米 120 石到東倉，東倉就成西倉的 3 倍．東西倉各有米多少石?

30. 東倉儲米 600 石，西倉儲 280 石．從一日起，東倉每日搬出 25 石，西倉每日搬進15石，到某日終，兩倉儲米一樣．共計要多少日?

31. 甲、乙二器共有水 4 升．從甲放出水一部份，等於乙所有的 2 倍，這時甲的水量就等於乙的水量的 3 倍．求最初各器的水量!

32. 10 個男人，20 個女子，40 個童子，分錢 300000 圓．每個男子的所得，比每個童子的所得多 7500 圓；每個女子的所得，和兩個童子所得的相等．男人、女子、童子，每人各得多少?

33. 父今年 41 歲，子今年 8 歲．幾年後，父的歲數是子的 4 倍?

34. 甲今年 70 歲，乙今年 50 歲．幾年前，甲的歲數是乙的 3 倍?

35. 父的歲數是子的 3 倍．但 10 年後，父的歲數就成子的 2 倍．他們現在年歲怎樣?

36. 設人可活 100 年．某人的現在歲數，是從現在到百歲的歲數 3 分之 1．這人現年怎樣?

37. 5 年後，父的歲數是女的 4 倍；10 年後，是女的 3 倍．現在各人年齡怎樣?

38. 拿一條繩量某樹的周圍：3 折這繩，可繞一圈餘 1 尺；4 折這繩，繞樹一圈還少 1 尺．這樹的周圍有多少長?

39. 一個裁縫，做長衫 1 件和短衫 1 件要 120000 圓；做短衫 1 件和短袴 1 件，要70000圓；做短袴 1 件和長衫 1 件，要 110000 圓．各種祇做 1 件，各要幾圓?

40. 鶴龜的頭共是 100，足是 240．鶴和龜各多少?

41. 鶴龜的頭共是 100．若龜數增到 2 倍，它的足數就能和鶴相等．鶴龜各是幾頭?

42. 伍千圓紙幣和壹萬圓紙幣，共 50 張，總價是 400000 圓．各種紙幣，各

是幾張?

43. 伍千圓紙幣、壹萬圓紙幣和壹千圓紙幣,共50張,總價是 212000 圓. 伍千圓紙幣的張數是壹千圓的 3 倍. 各種紙幣,各是幾張?

44. 把 500000 圓分做兩份,一份年利率 6 釐,貸出 5 個月,一份年利率 7 釐半,貸出 6 個月,它們的利息相等. 各份是多少圓?

45. 一個書商,照定價 6 折半買進書若干部;後賣出比買進的半數多30部,照定價計算,已收回全部份的成本. 他買進多少部?

46. 某飲食店,有若干人包飯;每人都給小帳,可得 48000 圓;若有 4 人不給,祇能得 40000 圓. 包飯有多少人?

47. 甲乙二人從某地出發,並依同方向進行. 甲先行 5 時,已走 70 里,乙從後追去,3 時走45里,乙走多少里可追到甲?

48. 犬走 4 步時,兔可走5步;犬 2 步的距離可和兔 3 步的距離相等. 現在犬在兔後 100 兔步,走多少步可追到兔?

49. 一船下行 3 里的時間,和上行 2 里的時間相等. 現在往復 10 里,共要 10 時. 每時水流的速率和下行 10 里的時間怎樣?

略解 上行 2 里的時間和下行 3 里的時間相等,

那麼上行 10 里的時間和下行 15 里的時間相等,

往復 10 里的時間,就和下行 25 里的時間一樣.

50. 某人在甲地,拿 18000000 圓分給若干貧民;後到乙地,又以同數的錢分給貧民,但人數多40,每人祇得 112500 圓. 兩地貧民的人數怎樣?

51. 把 2 丈 8 寸的布剪成兩段,使長者 4 折短者 3 折的和,比兩者差的 4 倍短 4 寸. 求各段的長!

52. 一人被僱 1 年,可得錢 13500 圓和衣服 1 套. 現在 7 個月後解僱,實得錢 7500 圓和衣服 1 套. 這套衣服值多少圓?

53. 有三個連續整數,和是 30. 各數怎樣?

54. 有三個連續偶數,和是 90. 各數怎樣?

55. 一根釣竿分上下兩部份,上部長比下部如 5 比 7. 上部長的 9 倍加下部的 15 倍,比釣竿全長的12倍還多 36 寸. 各部的長怎樣?

56. 甲、乙二罎,有酒精和水的混合液. 酒精和水的比,在甲罎是 4:3, 在乙罎是 2:3, 而甲有酒精 2 斗 1 升. 若兩罎全部混合,就得酒精和水相等的混合

液．乙罎原有酒精若干?

57．甲合金含金 36 兩、銀 54 兩，乙合金含金 27 兩、銀 9 兩．現在想從這兩種造成含有金銀各 21 兩的新合金，甲、乙兩種合金，各用多少?

解　新合金是 21 兩×2 即 42 兩．

設甲種合金用 x 兩，

那麼乙種合金 $(42-x)$ 兩．

甲含金 $\dfrac{36x}{36+54}$ 兩，乙含金 $\dfrac{27(42-x)}{27+9}$ 兩．

依題得

$$\frac{36x}{36+54}+\frac{27(42-x)}{27+9}=21.$$

化簡，$$\frac{2x}{5}+\frac{3(42-x)}{4}=21.$$

去分母，

$$8x+15(42-x)=420.$$

去括號，

$$8x+630-15x=420.$$

移項整理，$$7x=210.$$

$$\therefore\quad x=30.$$

那麼 $$42-x=12.$$

答：甲合金用 30 兩，乙合金用 12 兩．

58．寶石嵌入 18 開金戒指，重 15.10 公分；在水裏秤，祇重 13.39 公分．求這寶石和金各重多少！但這金的比重是 16.75，寶石的比重是 3.3．

59．拿 96000 圓買米，照舊價算，可便宜 2 折，多買 1 斗 2 升的米．這時 1 升米的新價怎樣?

解一　設 96000 圓買米 x 升，

那麼照舊價算 96000 圓可買 $(x+12)$ 升，

即 (96000×0.8) 圓可買 x 升．

從此得

$$\frac{x+12}{96000}=\frac{x}{96000\times 0.8}.$$

去分母，

$$4x+48=5x.$$

解得 $\qquad x=48.$

$$96000\div 48=2000.$$

答：1升米的新價是2000圓.

解二 設1升米的新價是 x 圓,

那麼1升米的舊價是 $0.8x$ 圓.

依題得

$$\frac{96000}{x}=\frac{96000}{0.8x}-12.$$

去分母,

$$76800=96000-9.6x.$$

移項, $\quad 9.6x=96000-76800=19200.$

$\therefore \qquad x=2000.$

60. 買進雞蛋,照舊價算,可便宜1折,多買10個. 這時1個雞蛋的新價怎樣?

61. 甲、乙二人做880碼競走,他們速率的比是22:21. 但乙先走5秒,結果仍負5碼. 甲、乙每分鐘走多少碼?

62. 在1英里(5280英尺)競走,甲勝乙30秒. 若甲在出發點後200英尺處出發,甲要負35英尺. 甲、乙各走1英里要多少時間?

63. 兩旅客的行李,共重400斤,各人都超過免費攜帶的限制,一出費8000圓,一出費14000圓. 若歸一人計算,要出36000圓. 求每人免費攜帶的斤數!

64. 甲、乙兩人乘火車,共帶行李360斤,甲出2000圓,乙出2800圓. 若歸一人計算,要出6000圓. 求每人免費攜帶的斤數!

65. 甲、乙二船,在相隔210浬的東西兩港間往來. 甲從東港,乙從西港,各依一定的速率,同時出發,往返一次,往時相會的地方較返時近西港20浬. 二船的速率,每時多少浬? 但甲的速率,比乙每時多2浬. 又二船往時,什麼時刻到目的地?

66. 第3時後第4時前,鐘面時分兩針相重的時刻怎樣?

解 在第3時,時針指3,分針指12.

設分針從這時走到兩針相重時要 x 分鐘,即走過鐘面上 x 個小隔,

那麼時針要走$\frac{5}{60}x$即$\frac{x}{12}$個小隔.

從此得

$$x=15+\frac{x}{12}.$$

去分母，

$$12x=180+x.$$

移項，$12x-x=180$.

整理，　$11x=180$.

$$\therefore \quad x=16\frac{4}{11}.$$

答：**第3時16分又11分之4.**

67. 第3時後第4時前，鐘面的分針在標記3和時針中央的時刻怎樣？

解　設從第3時到這時要x分鐘，即分針要走過鐘面上x個小隔，

那麼時針要走$\frac{x}{12}$個小隔.

若分針不超過時針，得

$$2x=30+\frac{x}{12}.$$

解得　$x=15\frac{15}{23}$.

若分針超過時針，得

$$2\left(15+\frac{x}{12}\right)=15+x.$$

解得　$x=18$.

答：**第3時$15\frac{15}{23}$分和第3時18分.**

68. 第3時後看錶；第5時後又看，時分兩針的位置已互換．第一次看錶時的時刻怎樣？

解　設從第3時到這時要x分鐘，即分針要走過鐘面上x個小隔，

那麼時針要走 $\frac{x}{12}$ 個小隔，即在標記 12 後 $\left(15+\frac{x}{12}\right)$ 個小隔，從第 5 時到第二次看錶時，時針要走 $x-25$ 個小隔.

依題得

$$12(x-25)=15+\frac{x}{12}.$$

解得 $$x=26\frac{62}{143}.$$

答：第 3 時 $26\frac{62}{143}$ 分.

69. 鐘面的時分兩針，從第一次相重到第二次相重，要多少時間?

70. 第 4 時後第 5 時前，鐘面時分兩針成直角的時刻怎樣?

71. 第 3 時後，鐘面時分兩針成一直綫的時刻怎樣?

72. 第 3 時後，鐘面時分兩針和標記 3 等距離的時刻怎樣?　又和標記 4 等距離的時刻怎樣?

73. 在第 10 時和第 11 時之間，6 分鐘後分針的位置和 3 分鐘前時針的位置一樣．求這時刻!

74. 第 3 時後看錶；第 5 時後又看，時分兩針的位置已互換．第二次看錶時的時刻怎樣?

75. 一件事，甲做 30 日或乙做 20 日，都能成功．現在甲做若干日後，乙再代甲去做，25 日做成．求甲做的日數!

76. 一件事，甲做 20 日或乙做 30 日，都能成功．現在甲做若干日後，乙再代甲去做，較完全由甲做，多做 8 日才成功．求甲做的日數!

77. 有首位數字是 1 的 6 位數，若把首位的 1 移到末位，就成原數的 3 倍．求這數!

解　設這數去首位的 1，剩下的五位數是 x，

那麼原數是 $100000+x$.

依題得

$$10x+1=3(100000+x).$$

解得 $$x=42857.$$

答：這數是 142857.

78. 有兵士若干人，排成 3 層或 5 層的中空方陣，都是沒有剩餘．第二方陣恰能放在第一方陣之內．求兵數！

解　設 $x=$ 第一方陣最外層每邊的人數，

那麼 $x-6=$ 第二方陣最外層每邊的人數，

$$x^2-(x-6)^2=\text{第一方陣的人數},$$

$$(x-6)^2-(x-16)^2=\text{第二方陣的人數}.$$

依題得

$$x^2-(x-6)^2=(x-6)^2-(x-16)^2.$$

解得　$x=23.$

那麼　$x^2-(x-6)^2=240.$

答：240 人．

79. 有兄弟二人，兄在弟的現年時，他的歲數是弟的 3 倍．兩人現年的和是 80 歲．他們現年各是多少？

80. 甲數加 3，乙數減 3，3 乘丙數，3 除丁數，它們的結果都相等．四數的總和是 64．各數怎樣？

81. 甲現年 40 歲，乙現年 16 歲．幾年後，甲的歲數是乙的 3 倍？

解　設 x 年後，甲的歲數是乙的 3 倍，

那麼這時甲 $(40+x)$ 歲，乙 $(16+x)$ 歲．

依題得

$$40+x=3(16+x).$$

去括號，

$$40+x=48+3x.$$

移項，$x-3x=48-40.$

整理，$-2x=8.$

$\therefore \quad x=-4.$

答：4 年前．

注意　這題裏的幾年後改做幾年前，上面方程式就變成

$$40-x=3(16-x).$$

解得　$x=4.$

所以要限定是正數，-4 就不能用，不限定時，-4 也有解釋，因為 -4 年後和 4

年前，意思是一樣的.

82. 有兩連續的自然數，和是20. 各數怎樣?

解 設小數是x,

那麼大數是$x+1$.

依題得

$$x+(x+1)=20.$$

解得 $x=9\frac{1}{2}$.

$9\frac{1}{2}$非自然數，即本題不能成立，可說這題沒有解.

83. 一個商人，拿資本若干圓做生意. 每年初除去 90000000 圓的生活費，年終都得 3 分之 1 的利，照此繼續 3 年，第 3 年終所有等於最初資本的 a 倍. 最初的資本是多少?

解 設最初的資本是x圓，

那麼第一年末可以有$\frac{4}{3}(x-90000000)$圓，

第二年末可以有$\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(x-90000000)-90000000\right]$圓，

第三年末可以有$\frac{4}{3}\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(x-90000000)-90000000\right]-90000000\right\}$圓.

依題得

$$ax=\frac{4}{3}\left\{\frac{4}{3}\left[\frac{4}{3}(x-90000000-90000000\right]-90000000\right\}.$$

整理， $ax=\frac{64}{27}x-\frac{1480000000}{3}$.

移項， $ax-\frac{64}{27}x=-\frac{1480000000}{3}$.

整理， $\left(a-\frac{64}{27}\right)x=-\frac{1480000000}{3}$.

$\therefore$ $x=-\frac{1480000000}{3}\div\left(a-\frac{64}{27}\right)$

$$= \frac{1480000000}{3} \div \left(\frac{64}{27} - a\right)$$

$$= \frac{1480000000}{3} \times \frac{27}{64-27a}$$

$$= \frac{13320000000}{64-27a}.$$

答：最初的資本是$\frac{13320000000}{64-27a}$圓.

84．有伍千圓紙幣和壹萬圓紙幣，共計 30 張，總值 175000 圓．求各種紙幣的張數！

85．有伍千圓紙幣和壹萬圓紙幣，共計 30 張，總值 400000 圓．求各種紙幣的張數！

86．有母、子二人，母比子大 23 歲．4 年後，母的歲數是子的 7 倍．子的現年怎樣？

87．有母、子二人，母比子大 18 歲．4 年後，母的歲數是子的 7 倍．子的現年怎樣？

88．一個商人，拿資本若干圓做生意．每年初除去 30000000 圓的雜用，年終都得 3 分之 1 的利，照此繼續兩年，第 2 年終所有等於最初資本的 2 倍．最初的資本是多少？

89．華氏溫度表和攝氏溫度表，在什麼時刻，它們所表示的度數一樣？

略解　設這時在華氏溫度表是 x 度，

那麼在攝氏溫度表是$\frac{5}{9}(x-32)$度．

依題得

$$x=\frac{5}{9}(x-32).$$

或設這時在攝氏溫度表是 x 度，

那麼在華氏溫度表是$\left(\frac{9}{5}x+32\right)$度．

依題得

$$x=\frac{9}{5}x+32.$$

90．列氏溫度表和華氏溫度表，在什麼時刻，它們所表示的度數一樣？

第二節 二元一次方程式

一. 關於兩個等式的定理

就兩個等式說,有下各定理:

(一)任取兩個等式,第一左式加第二左式,第一右式加第二右式,或第一左式加第二右式,第一右式加第二左式,仍成等式:

假設 $a=b$, $c=d$,

那麼 $a+c=b+d$, $a+d=b+c$.

(二)任取兩個等式,第一左式減第二左式,第一右式減第二右式,或第一左式減第二右式,第一右式減第二左式,仍成等式:

假設 $a=b$, $c=d$.

那麼 $a-c=b-d$, $a-d=b-c$.

(三)任取兩個等式,第一左式乘第二左式,第一右式乘第二右式,或第一左式乘第二右式,第一右式乘第二左式,仍成等式:

假設 $a=b$, $c=d$.

那麼 $ac=bd$, $ad=bc$.

(四)任取兩個等式,第一左式除第二左式,第一右式除第二右式,或第一左式除第二右式,第一右式除第二左式,仍成等式:

假設 $a=b$, $c=d$.

那麼 $c\div a=d\div b$, $d\div a=c\div b$.

但除數不能爲零.

二. 關於兩個等式的變化

兩個等式的變化,不外加、減、乘、除四種,和前面定理裏舉的例子一樣.

三. 解二元一次方程式

兩個二元一次方程式,假如有相同的解答,就是各方程式的相同元字都表示相同的數目,這兩個方程式,叫二元一次聯立方程式,或二元一次方程組.

解二元一次聯立方程式,就是求它們的解答,普通要分五個步驟:

(一)化各方程式,使左式含一個甲元字項和一個乙元字項,右式祇是一個常數項.

(二)各拿適當的數目去乘,使兩方程式甲元字項或乙元字項的係數相等.

(三)就上面所得兩個方程式,用加或減,消去一個元字.

(四)解這個化得的一元方程式,得一個元字的值.

(五)拿這元字的值代入原來的任一個方程式,求它一個元字的值.

例一 解 $\begin{cases} 3x+5y=22, \\ 7x-4y=20! \end{cases}$

解一

$$3x+5y=22 \cdots\cdots(1)$$
$$7x-4y=20 \cdots\cdots(2)$$

(1)×7, $21x+35y=154 \cdots\cdots(3)$

(2)×3, $21x-12y=60 \cdots\cdots(4)$

(3)-(4), $47y=94$.

$\therefore$ $y=2$.

拿2代(1)的y,

$$3x+10=22,$$

$\therefore$ $x=4$.

所以知道 $x=4$, $y=2$.

解二

$$3x+5y=22 \cdots\cdots(1)$$
$$7x-4y=20 \cdots\cdots(2)$$

(1)×4, $12x+20y=88 \cdots\cdots(3)$

(2)×5, $35x-20y=100 \cdots\cdots(4)$

(3)+(4), $47x=188$.

$\therefore$ $x=4$.

拿4代(1)的x,

$$12+5y=22.$$

$\therefore$ $y=2$.

所以知道 $x=4$, $y=2$.

這個解法,叫加減法. 還有下面幾種解法:

解三

$$3x+5y=22 \cdots\cdots(1)$$
$$7x-4y=20 \cdots\cdots(2)$$

從(1), $x=\dfrac{22-5y}{3} \cdots\cdots(3)$

代入(2),

$$7\times\frac{22-5y}{3}-4y=20$$

解得　$y=2.$

拿 2 代 (3) 的 y，

$$x=\frac{22-10}{3}=4.$$

所以知道　$x=4,\ y=2$

解四　$3x+5y=22$ ……………………(1)

$7x-4y=20$ ……………………(2)

從(1)，　$y=\frac{22-3x}{5}$ ……………………(3)

代入(2)，

$$7x-4\times\frac{22-3x}{5}=20.$$

解得　$x=4.$

拿 4 代 (3) 的 x，

$$y=\frac{22-12}{5}=2.$$

所以知道　$x=4,\ y=2.$

解五　$3x+5y=22$ ……………………(1)

$7x-4y=20$ ……………………(2)

從(1)，　$x=\frac{22-5y}{3}$ ……………………(3)

從(2)，　$x=\frac{20+4y}{7}$ ……………………(4)

從(3)、(4)，

$$\frac{22-5y}{3}=\frac{20+4y}{7}.$$

解得　$y=2.$

拿 2 代 (3) 的 y，

$$x=\frac{22-10}{3}=4.$$

所以知道　$x=4,\ y=2.$

解六　$3x+5y=22$ ……………………(1)

$$7x-4y=20\cdots\cdots(2)$$

從(1)， $$y=\frac{22-3x}{5}\cdots\cdots(3)$$

從(2)， $$y=\frac{7x-20}{4}\cdots\cdots(4)$$

從(3)、(4)，

$$\frac{22-3x}{5}=\frac{7x-20}{4}.$$

解得 $$x=4.$$

拿4代(3)的x，

$$y=\frac{22-12}{5}=2.$$

所以知道 $x=4$，$y=2$.

解三和解四的方法叫**代入法**，解五和解六的方法叫**比較法**.

解七 $$3x+5y=22\cdots\cdots(1)$$
$$7x-4y=20\cdots\cdots(2)$$

$(1)\times m$， $$3mx+5my=22m\cdots\cdots(3)$$

$(2)+(3)$， $$(7+3m)x+(5m-4)y=20+22m\cdots(4)$$

設 $$7+3m=0,$$

那麼 $$m=-\frac{7}{3}.$$

從(4)， $$y=\frac{20+22m}{5m-4}$$
$$=\frac{20+22\times\left(-\frac{7}{3}\right)}{5\left(-\frac{7}{3}\right)-4}$$
$$=2.$$

所以知道 $x=4$，$y=2$.

解八 $$3x+5y=22\cdots\cdots(1)$$
$$7x-4y=20\cdots\cdots(2)$$

$(2)\times n$， $$7nx-4ny=20n\cdots\cdots(3)$$

$(1)+(3)$， $$(3+7n)x+(5-4n)y=22+20n\cdots(4)$$

設　$5-4n=0$,

那麼　$n=\dfrac{5}{4}$.

從(4),　$x=\dfrac{22+20n}{3+7n}$

$=\dfrac{22+20\times\frac{5}{4}}{3+7\times\frac{5}{4}}$

$=4$.

所以知道　$x=4,\ y=2$.

解七、解八的方法,叫未定係數法.

問　題　一

解下各方程式!

1. $\begin{cases}9x+4y=53,\\7x+6y=47.\end{cases}$　　2. $\begin{cases}x+y=5,\\x-y=1.\end{cases}$

3. $\begin{cases}3x+4y=10,\\4x+y=9.\end{cases}$　　4. $\begin{cases}x+2y=13,\\3x+y=19.\end{cases}$

5. $\begin{cases}4x+7y=29,\\2x+3y=13.\end{cases}$　　6. $\begin{cases}2x-11y=19,\\3x-7y=19.\end{cases}$

7. $\begin{cases}5x+6y=39,\\7x+8y=53.\end{cases}$　　8. $\begin{cases}8x-3y=34,\\3x+8y=31.\end{cases}$

9. $\begin{cases}15x+7y=29,\\9x+15y=39.\end{cases}$　　10. $\begin{cases}14x-3y=39,\\6x+17y=35\end{cases}$

11. $\begin{cases}8x+5y=37,\\5x+8y=28.\end{cases}$

解　$8x+5y=37\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$5x+8y=28\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$$\begin{aligned}
&(1)+(2), & 13x+13y&=65 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)\\
&(1)-(2), & 3x-3y&=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)\\
&(3)\div 13, & x+y&=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)\\
&(4)\div 3, & x-y&=3 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)\\
&(5)+(6), & 2x&=8.\\
&(5)-(6), & 2y&=2.\\
&\therefore & x&=4,\ y=1.
\end{aligned}$$

12. $\begin{cases} 5x+6y=17, \\ 6x+5y=16. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 7x-3y=9, \\ 3x-7y=-19. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y=4, \\ 10x+y+36=10y+x. \end{cases}$

15. $\begin{cases} 3x-5y=8, \\ 5x-3y=16. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2(x+2y)+11=3(5x-8y), \\ 7x+8(3x-y)=85. \end{cases}$

17. $3x-4y+1=5x-6y-5=9.$

18. $4x-6y-3=7x+2y-23=-2x+3y+12.$

19. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{22}{15}, \\ \dfrac{7}{4}x-y=5. \end{cases}$

解 去分母,得

$3x+5y=22,\ 7x-4y=20.$

解得 $x=4,\ y=2.$

20. $\begin{cases} \dfrac{2x}{3}+y=16, \\ x+\dfrac{y}{4}=14. \end{cases}$

21. $\begin{cases} \dfrac{5x}{6}-y=3, \\ x-\dfrac{5y}{6}=8. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \dfrac{2x+3y}{5}+\dfrac{y+6}{7}=2, \\ \dfrac{2x-5y}{3}+\dfrac{x+7}{4}=1. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{y+2}{4}=0, \\ \dfrac{2x-5}{5}-\dfrac{11-2y}{7}=0. \end{cases}$

24. $\frac{7+x}{3}=\frac{9+y}{5}=\frac{11+x+y}{7}$.　25. $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{x+y}{4}$.

26. $\begin{cases} x+0.5y=5, \\ 0.5x+y=4. \end{cases}$　27. $\begin{cases} 0.5x-1.2y=-2.6, \\ 1.5x+0.4y=4.2. \end{cases}$

例二　解 $\begin{cases} (x-1)(y-2)-(x-2)(y-1)=-2, \\ (x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)=32! \end{cases}$

解

$$(x-1)(y-2)-(x-2)(y-1)=-2 \cdots\cdots(1)$$

$$(x+2)(y+2)-(x-2)(y-2)=32 \cdots\cdots(2)$$

整理(1)、(2)，

$$-x+y=-2 \cdots\cdots(3)$$

$$4x+4y=32 \cdots\cdots(4)$$

解(3)、(4)，得

$$x=5,\ y=3.$$

例三　解 $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8, \\ \frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13! \end{cases}$

解

$$\frac{3}{x}+\frac{4}{y}=8 \cdots\cdots(1)$$

$$\frac{5}{x}+\frac{6}{y}=13 \cdots\cdots(2)$$

(1)×5，$$\frac{15}{x}+\frac{20}{y}=40 \cdots\cdots(3)$$

(2)×3，$$\frac{15}{x}+\frac{18}{y}=39 \cdots\cdots(4)$$

(3)－(4)，$$\frac{2}{y}=1.$$

$\therefore$ $$y=2.$$

拿2代(1)的 y，

$$\frac{3}{x}+2=8.$$

$$\therefore \qquad x=\frac{1}{2}.$$

所以知道　$x=\frac{1}{2},\quad y=2.$

問　題　二

解下各方程式!

1. $\begin{cases}(x+1)(y+5)=(x+5)(y-11),\\ xy+x+y=(x+2)(y+2).\end{cases}$

2. $\begin{cases}xy-(y-1)(x-1)=6(y-1),\\ x-1=y.\end{cases}$

3. $\begin{cases}2x-\dfrac{3}{y}=3,\\ 8x+\dfrac{15}{y}-6=0.\end{cases}$

4. $\begin{cases}\dfrac{9}{x}-\dfrac{4}{y}=2,\\ \dfrac{18}{x}+\dfrac{8}{y}=10.\end{cases}$

5. $\begin{cases}\dfrac{8}{x}-\dfrac{9}{y}=7,\\ 6\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=1.\end{cases}$

四. 特殊二元一次方程式

例一　解 $\begin{cases}3(x-7)+5y=1,\\ 6x+10(y-4)=4!\end{cases}$

解　$3(x-7)+5y=1 \cdots\cdots(1)$

$6x+10(y-4)=4 \cdots\cdots(2)$

從(1),　$3x+5y=22 \cdots\cdots(3)$

從(2),　$6x+10y=44 \cdots\cdots(4)$

(4)÷2,　$3x+5y=22 \cdots\cdots(5)$

(5)和(3)完全一樣.

所以這兩式裏 x、y 的值完全相同,它們的解答組數是沒有限制的. 這兩個方程式,互稱是**相依方程式**,就是彼此相依不能獨立的,從甲可以得乙,從乙也可以得甲的.

例二 解 $\begin{cases} 3(x-7)+5y=1, \\ 6x+10(y-4)=3! \end{cases}$

解 $3(x-7)+5y=1 \cdots\cdots(1)$

$6x+10(y-4)=3 \cdots\cdots(2)$

從(1), $3x+5y=22 \cdots\cdots(3)$

從(2), $6x+10y=43 \cdots\cdots(4)$

(3)×2, $6x+10y=44 \cdots\cdots(5)$

(5)和(4),左式完全相同,右式一是 43,一是 44,竟不相同.

所以這兩式裏沒有一組 x、y 的值可以相同,它們是沒有一個解答的. 這兩個方程式,互稱是**不相容方程式**,就是彼此不相容不能聯立的,甲的解答都和乙不合,乙的解答都和甲不合的.

五. 二元一次文字方程式

例一 解 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2! \end{cases}$

解 $a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots(1)$

$a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots(2)$

$(1)\times b_2$, $a_1b_2x+b_1b_2y=b_2c_1 \cdots\cdots(3)$

$(2)\times b_1$, $a_2b_1x+b_1b_2y=b_1c_2 \cdots\cdots(4)$

(3)－(4) $(a_1b_2-a_2b_1)x=b_2c_1-b_1c_2$.

$\therefore$ $x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1} \cdots\cdots(5)$

拿 $\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ 代(1)的 x,

$$a_1\times\frac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}+b_1y=c_1.$$

$$\therefore\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

所以 $x=\dfrac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{A}{D},\quad y=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{B}{D}.$

例二 解 $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0,\\ a_2x+b_2y+c_2=0!\end{cases}$

解

$$a_1x+b_1y=-c_1\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$a_2x+b_1y=-c_2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

解得 $x=\dfrac{b_2(-c_1)-b_1(-c_2)}{a_1b_2-a_2b_1}=\dfrac{\begin{vmatrix}-c_1 & b_1\\ -c_2 & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\dfrac{A}{D},$

$$y=\frac{a_1(-c_2)-a_2(-c_1)}{a_1b_2-a_2b_1}=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & -c_1\\ a_2 & -c_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}}=\frac{B}{D}.$$

就$\dfrac{A}{D}$和$\dfrac{B}{D}$來討論：

(一)若 $D\neq0$，a_1、b_1、c_1 等表任何代數數，原兩個方程式必有一組解答

(二)若 $D=0$，$A\neq0$ 或 $B\neq0$，原兩個方程式沒有一組解答.

(三)若 $D=0$，$A=0$ 或 $B=0$，原兩個方程式沒有一定的解答. 但 $D=0$ 時，$A\neq0$，B 也不等於 0；$A=0$，B 也要等於 0 .

六. 二元一次方程式應用問題

解二元一次方程式的應用問題，就是求它的解答，普通要分五個步驟：

(一)看淸題目的意思.

(二)拿 x、y 代所求數或它未知數,或所求數和它未知數.

(三)依題目所含的條件,寫成兩個 x、y 的一次方程式.

(四)解這兩個方程式,求這題目的解答.

(五)把解答代入原題,驗明有無錯誤或是否合理.

例一 二數的和是 S,差是 D. 各數怎樣?

解 設 x=大數, y=小數.

依題得

$$x+y=S \cdots\cdots(1) \qquad x-y=D \cdots\cdots(2)$$

$(1)+(2)$, $2x=S+D \cdots\cdots(3)$

$(1)-(2)$, $2y=S-D \cdots\cdots(4)$

$$\therefore \quad x=\frac{S+D}{2}, \quad y=\frac{S-D}{2}.$$

驗

$$\frac{S+D}{2}+\frac{S-D}{2}=S.$$

$$\frac{S+D}{2}-\frac{S-D}{2}=D$$

答:大數是 $\frac{S+D}{2}$, 小數是 $\frac{S-D}{2}$.

例二 甲、乙、丙三人分錢 N 圓. 甲比乙多 a 圓,乙比丙少 b 圓. 各人分得若干圓?

解 設 x=甲分得的圓數, y=乙分得的圓數,

那麼 $N-x-y$=丙分得的圓數.

依題得

$$x-y=a \cdots\cdots(1) \qquad N-x-y-y=b \cdots\cdots(2)$$

$(1)+(2)$, $N-3y=a+b$.

$$\therefore \quad y=\frac{N-a-b}{3}.$$

代入 (1), 得 $x=y+a=\frac{N-a-b}{3}+a=\frac{N+2a-b}{3}$.

那麼 $N-x-y=\dfrac{N-a+2b}{3}$.

答：甲分得$\dfrac{N+2a-b}{3}$圓，乙分得$\dfrac{N-a-b}{3}$圓，

丙分得$\dfrac{N-a+2b}{3}$圓.

例三 一船下行3里的時間，和上行2里的時間相等．現在往復10里，共要10時．每時水流的速率和下行10里的時間怎樣?

解 設這船每時划行x里，水每時流y里．

依題得

$$\frac{3}{x+y}=\frac{2}{x-y}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{10}{x+y}+\frac{10}{x-y}=10\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)×5, $$\frac{15}{x+y}=\frac{10}{x-y}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(2)+(3), $$\frac{25}{x+y}=10.$$

∴ $$x+y=\frac{5}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2)÷10×3, $$\frac{3}{x+y}+\frac{3}{x-y}=3\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(5)−(1), $$\frac{5}{x-y}=3.$$

∴ $$x-y=\frac{5}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

從(4)、(6), $x=\dfrac{25}{12}$, $y=\dfrac{5}{12}$.

$$10\div\left(\frac{25}{12}+\frac{5}{12}\right)=4.$$

答：每時水流的速率是$\dfrac{5}{12}$里，下行10里的時間是4時．

例四　有兩位數，各位都做單位去看，加起來，和是 9．若把兩個數字顛倒，要比原數大63．求這個兩位數！

解　設十位數字是 x，單位數字是 y，

那麼這個兩位數是 $10x+y$．

依題得

$$x+y=9\cdots\cdots\cdots(1)\quad 10x+y=10y+x-63\cdots\cdots\cdots(2)$$

解得　$x=1$，$y=8$．

答：這個兩位數是18，

問　題　三

1．前節問題七裏第 2 到第 9 各題．
2．前節問題七裏第 13 和第 14 兩題．
3．前節問題七裏第 18 到第 23 各題．
4．前節問題七裏第 25 題．
5．前節問題七裏第 28 和第 29 兩題．
6．前節問題七裏第 31 和第 32 兩題．
7．前節問題七裏第 35 和第 37 兩題．
8．前節問題七裏第 39 到第 46 各題．
9．前節問題七裏第 50 到第 52 各題．
10．前節問題七裏第 57 到第 65 各題．

第三節　多元一次方程式

一．解多元一次方程式

n 個 n 元一次方程式，假如有相同的解答，就叫 n 元一次聯立方程式，或 n 元一次方程組．

解 n 元一次方程式，普通要分六個步驟：

(一)化各方程式，使左式祇含各元字項，右式祇是一個常數項.

(二)取兩個方程式合做一組，共總分做沒有一組相同的 n 組，各組用加減法或它法，消去某一元字，得 $(n-1)$ 個 $(n-1)$ 元的一次方程式.

(三)仿前繼續消它元字，最後得到一元一次方程式.

(四)解這個化得的一元方程式，得一個元字的值.

(五)拿這元字的值代入中間所得的相當方程式裏，求它一個元字的值.

(六)仿前繼續拿已得各元字的值，代入相當方程式，求得所有各元字的值.

例一 解 $\begin{cases} 2x+4y+z=7\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x+2y+2z=8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 5x-4y+4z=9\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解 $(1)\times 2,\quad 4x+8y+2z=14\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(4)-(2),\quad x+6y=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(1)\times 4,\quad 8x+16y+4z=28\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(6)-(3),\quad 3x+20y=19\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

$(5)\times 3,\quad 3x+18y=18\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

$(7)-(8),\quad 2y=1.$

$\therefore\quad y=\frac{1}{2}.$

拿 $\frac{1}{2}$ 代(5)的 y，得 $x=3$.

拿 3 和 $\frac{1}{2}$ 代(1)的 x 和 y，得 $z=-1$.

所以知道 $x=3$,　$y=\frac{1}{2}$,　$z=-1$.

例二　解 $\begin{cases} x+y+z=9 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ 2x-4y+5z=12 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ 5x+2y-3z=4 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解　$(1)\times5$,　$5x+5y+5z=45 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(4)-(2)$,　$3x+9y=33 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

$(5)\div3$,　$x+3y=11 \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

$(1)\times3$,　$3x+3y+3z=27 \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$

$(3)+(7)$,　$8x+5y=31 \cdots\cdots\cdots\cdots(8)$

$(6)\times8$,　$8x+24y=88 \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$

$(9)-(8)$,　$19y=57 \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$

$\therefore$　$y=3$.

拿3代(6)的 y, 得 $x=2$.

拿2和3代(1)的 x 和 y, 得 $z=4$.

所以知道 $x=2$,　$y=3$,　$z=4$.

例三　解 $\begin{cases} 5x+2y=14 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ y-6z=-15 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ x+2y+z=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解　$(3)\times6+(2)$,　$6x+13y=-15 \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$

$(1)\times6-(4)\times5$,　$-53y=159$.

$\therefore$　$y=-3$.

從(1)得　$x=4$.

從(2)得　$z=2$.

例四　解 $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=k_1 \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ a_2x+b_2y+c_2z=k_2 \cdots\cdots\cdots\cdots(2) \\ a_3x+b_3y+c_3z=k_3 \cdots\cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$

解 (1)$\times c_2-$(2)$\times c_1$, $(a_1c_2-a_2c_1)x+(b_1c_2-b_2c_1)y=k_1c_2-k_2c_1\cdots(4)$

(1)$\times c_3-$(3)$\times c_1$, $(a_1c_3-a_3c_1)x+(b_1c_3-b_3c_1)y=k_1c_3-k_3c_1\cdots(5)$

(4)$\times(b_1c_3-b_3c_1)-$(5)$\times(b_1c_2-b_2c_1)$,

$$[(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)-(a_1c_3-a_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)]x$$
$$=(k_1c_2-k_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)-(k_1c_3-k_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1).$$
$$x=\frac{(k_1c_2-k_2c_1(b_1c_3-b_3c_1)-(k_1c_3-k_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)}{(a_1c_2-a_2c_1)(b_1c_3-b_3c_1)-(a_1c_3-a_3c_1)(b_1c_2-b_2c_1)}.$$

仿此得 y 和 z 的值．討論從略．

問 題 一

解下各方程式！

1. $\begin{cases} x+3y+4z=13, \\ x+2y+z=8, \\ 2x+y+2z=10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x-2y+z=2, \\ 2x+3y-z=5, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x+2y+z=11, \\ 2x+y+z=7, \\ 3x+4y+z=14. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x+3y-4z=1, \\ x-2y+z=2, \\ 3x-y-z=3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+3y=5, \\ 2z-y=1, \\ 12x-9z=3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x-y=30, \\ 7y-z=26, \\ 2z+x=25. \end{cases}$

7. $\dfrac{x+y}{5}=\dfrac{y+z}{7}=\dfrac{z+x}{8}$, $x+y+z=10$,

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{9}+\dfrac{z}{10}=9, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}-\dfrac{z}{25}=11, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{18}+\dfrac{z}{10}=10. \end{cases}$

9. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{y}+4=0, \\ \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{z}+1=0, \\ \dfrac{2}{z}+\dfrac{3}{x}-14=0. \end{cases}$

10. $x+y=6$, $y+z=9$, $z+x=7$.

解一 三式相加， $2x+2y+2z=22$.

2 除，即得 $x+y+z=11$.

從這式減原各式,得 $x=2,\quad y=4,\quad z=5.$

解二 $(x+y)+(y+z)-(z+x)=6+9-7,$

即 $$2y=8.$$

$$\therefore \quad y=4.$$

代入原三式的前兩式,得 $x=2,\quad z=5.$

11. $x+y-z=1,\ y+z-x=7,\ z+x-y=3.$

解 設 $S=x+y+z,$

那麼 $x+y-z=x+y+z-2z=S-2z=1 \cdots\cdots\cdots(1)$

$y+z-x=x+y+z-2x=S-2x=7 \cdots\cdots\cdots(2)$

$z+x-y=x+y+z-2y=S-2y=3 \cdots\cdots\cdots(3)$

$(1)+(2)+(3),\quad 3S-2S=S=11.$

代入(1), $$11-2z=1.$$

$$\therefore \quad z=5.$$

仿此得 $$x=2,\quad y=4.$$

12. $x+y-z=0,\quad y+z-2x=3,\quad z+x-3y=-2.$

解 設 $S=x+y+z,$

那麼 $x+y-z=S-2z=0 \cdots\cdots\cdots(1)$

$y+z-2x=S-3x=3 \cdots\cdots\cdots(2)$

$z+x-3y=S-4y=-2 \cdots\cdots\cdots(3)$

$(1)\times 6+(2)\times 4+(3)\times 3,\quad 13S-12S=S=6.$

從此得 $x=1,\quad y=2,\quad z=3.$

13. $\begin{cases} x+y=4, \\ y+z=8, \\ z+x=6. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x+y+2z=14, \\ y+z+2x=10, \\ z+x+2y=12. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x+y+2z=13, \\ x+3y+z=15, \\ 5x+y+z=17. \end{cases}$

16. $\begin{cases} (x+y+z)+3x=4, \\ 2(x+y+z)+2y=-2, \\ 3(x+y+z)+z=5. \end{cases}$

17. 有聯立方程式 $2x-3y=11-4m,\ 3x+2y=21-5m,$ 它們 x、y 的值又適合 $x+3y=20-7m,$ m 的值怎樣?

二. 多元一次方程式應用問題

解多元一次方程式的應用問題，步驟仍和解二元一次方程式應用問題彷彿.

問 題 二

1. 甲、乙、丙三人 30 日所做的事，最初使甲、乙合做 20 日，後使丙加入，再做 14 日，就完全成功. 若最初使甲、丙合做 24日，再使甲、乙合做，還要 16 日半. 各人獨做這事，要幾日可成功?

2. 有一水槽，開甲、乙二管進水，要 $1\frac{5}{7}$時才滿；開乙、丙二管進水，要 $2\frac{2}{9}$時；開丙、甲二管進水，要 $1\frac{7}{8}$時. 祇開一管進水，各要多少時才滿?

3. 有矩形地兩塊，甲較乙寬 2 尺，短 3 尺，面積小 6 方尺. 若甲較乙寬 2 尺，長 3 尺，面積要大 54 方尺. 求這兩塊地的長寬!

4. 有上中下三種酒，取上酒 1 份、中酒 2 份、下酒2份混合，可得每斤 7400 圓的酒. 若取上酒 3 份，中酒 4 份，下酒 5 份混合，可得每斤 7500 圓的酒. 又取上酒2份 、中酒 1 份、下酒 7 份混合，可得每斤 6900 圓的酒. 上、中、下酒各 1 斤的價是多少?

5. 甲、乙、丙三市成一個三角形. 從甲到乙的路程，如要經過丙市，就增加到 3 倍. 從甲市到丙市的路程，如要經過乙市，就遠 5 里. 從乙市到丙市的路程，如要經過甲市，全長要多 25 里. 各市間的距離怎樣?

6. 有三位的整數，減去 396，各位數字完全顛倒. 三位數字的和是 15，百位數字是單位數字的 2 倍. 求這數!

注意 各位數字，是指把各位都看做單位時所表示的數目.

7. 有三個有效數字排成一個三位的整數，他的值等於各數字和的 4 倍. 若這數減去 198，各位數字就完全顛倒. 又兩端數字的和等於中央數字的 2 倍. 這數怎樣?

8. 某人有錢分給甲、乙、丙三人. 甲所得和乙、丙兩人所得的2倍合起來，

是8000圓;乙所得和甲、丙兩人所得的3倍合起來,是10500圓;丙所得和甲、乙兩人所得的4倍合起來,是12000圓.這人有多少錢分給他們?

9. 10畝地分給甲、乙、丙、丁四人.甲所得比丁多的,等於丙所得的3分之1;乙所得等於丙所得的1半;又乙所得增30方丈,就等於甲、丁兩人的所得.各人所得怎樣?

第四節　研究和測驗

一．研究

解一元一次方程式,第一步就要化簡:

(一)有括號的,要去括號.

(二)有常數的分母,要去分母.

(三)有小數的,要去小數點.

(四)各邊有不是最簡式的,要整理.

若不遇到特別情形,都是如此.至於方法次序,要看方程式的情形變更,各人也可以不相同.熟悉的人,他所用的方法次序,總比別人簡便,演算起來,比別人快.

解一元一次方程式,結果是求$x=\frac{b}{a}$,就是要左邊祇有一個x,右邊祇有一個常數項.從原式化到這樣,雖然不外用關於一個等式的定理和移項等關於一個等式變化的方法,但是因爲各人運用的情形不同,也很有巧拙的分別.

解多元一次方程式,要用關於兩個等式的定理,把所含的各元字,一個一個消去,結果得到一個一元一次方程式,這更要看各方程式的情形,有適當的變更;若一律完全用一樣的法子,那

就拙笨極了.

在三元一次聯立方程式裏，有三個方程式 $A=0$，$B=0$，$C=0$. 若 $lA+mB=nC$，合於第一、第二兩方程式的解答都合於第三方程式，它們的解答多到沒有限制. 若 $lA+mB=nC+k$，合於第一、第二兩方程式的解答都不合於第三方程式，它們沒有一個適合的解答. 但是 l、m、n、k 都表常數.

在多元一次方程式裏，若元字數比方程式多，大抵解答數無限；若元字數比方程式少，大抵沒有一個解答.

解一次方程式的應用問題，要用元字多少，並不是祇看所求的數，也不是祇用元字代所求數，要看求這個要求的數，直接去求，能不能做到，容易不容易. 第一節第六段的例二，求兩數祇用一個元字，是因爲第二數和第一數有一個簡單的關係，容易從第一數求得，間接反比直接容易. 第二節第六段的例三，求兩數用兩個元字，並不是代所求的兩數，是因爲下行 10 里的時間不容易直接去求，先知船的划行速率才容易去求的. 又同節同段的例四，求一個數用兩個元字，都不是代所求數，是因爲不知兩位的數字，就不能得到這個數目.

二. 測驗

1. 解下各方程式！

(1) $6x-2(4-3x)=7-3(17-x)$.

(2) $5(x-2)^2+7(x-3)^2=(3x-7)(4x-19)+42$.

(3) $0.26x+1.12=1.2+0.3x-0.05x$.

(4) $\frac{x}{2}-\frac{x-2}{3}=\frac{3}{4}(x-2)+1$.

(5) $\frac{2x-5}{3}-\frac{x-9}{5}=x-\frac{8x-2}{15}$.

(6) $\frac{4}{3}(2a+x)+2(a+x)+3a+x=12a$.

(7) $\frac{a}{2}(x-a)-\frac{3a}{4}(2a-x)-\frac{a^2}{2}=0$.

(8) $\frac{1}{2}\left\{x-\frac{1}{3}\left[x-\frac{1}{4}\left(x-\frac{x-\frac{1}{6}x}{5}\right)\right]\right\}=53$.

2．解下各方程式！

(1) $\begin{cases}2x+3y=7,\\4x-5y=3.\end{cases}$　(2) $\begin{cases}8x+3y=73,\\3x+8y=48.\end{cases}$

(3) $17x+30y-50=19x+28y-68=x+y$.

(4) $\begin{cases}\frac{x-2}{5}-\frac{17-2x}{3}=\frac{y-10}{4},\\\frac{y+20}{5}-\frac{10-x}{3}=\frac{x+13}{4}.\end{cases}$

(5) $\begin{cases}1.3x+0.125y=2x-6,\\3x-1.5y=28-0.25y-0.8x.\end{cases}$

(6) $\begin{cases}(x+2)(y+3)=(x+3)(y+2)-1,\\(x-2)(y-3)=(x-3)(y-2)+1.\end{cases}$

(7) $\begin{cases}5\frac{19}{27}x+3\frac{25}{72}y=2\frac{5}{32},\\0.0\dot{7}x+0.\dot{1}\dot{3}y=0.1\dot{6}2\dot{1}.\end{cases}$

3. 有酒和水的混合液，酒比全量的1半多2斤4兩，水比全量的3分之1少5兩．全量是多少?

4. 有菓子若干個，拿1半和1個給第一人，拿殘餘的1半和1個給第二人，再拿殘餘的1半和1個給第三人，最後還餘6個．求菓子的總數!

5. 梨加價5成後，12000圓要少買20個梨．未加價前10個梨的價錢怎樣?

6. 某人僱車36日，說明來1日給20000圓．1日不來罰12000圓．到期給464000圓．求來的日數!

7. 有四種酒，在三種裏各買1斤，總價是27000圓、24000圓、22000圓、20000圓．若各種買1斤，各要多少圓?

8. 解不是一次的方程式，可用一次方程式的解法嗎? 前面有例子嗎?

第三章 二次方程式

第一節 一元二次方程式

解一元二次方程式，都是用第二章裏關於一個等式的定理(五)或關於一個等式的變化(五).

例一 解 $5x^2=125$!

解一 $5x^2=125.$

5 除， $x^2=25.$

開方， $x=\pm 5.$

解二 $5x^2=125.$

移項， $5x^2-125=0.$

析因， $5(x+5)(x-5)=0.$

那麼 $x+5=0$ 或 $x-5=0.$

$\therefore$ $x=\pm 5.$

例二 解 $x^2-3x+2=0$!

解一 $x^2-3x+2=0.$

析因， $(x-2)(x-1)=0.$

那麼 $x-1=0$ 或 $x-2=0.$

$\therefore$ $x=1$ 或 $2.$

解二 $x^2-3x+2=0.$

移項， $x^2-3x=-2.$

配方， $x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$

開方， $x-\frac{3}{2}=\pm\frac{1}{2}.$

$\therefore$ $x=1$ 或 $2.$

例三 解 $ax^2+bx+c=0$!

解 $$ax^2+bx+c=0.$$

移項， $$ax^2+bx=-c.$$

除， $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

配方， $$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

開方， $$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}.$$

$\therefore$ $$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{2a}}.$$

例四 解 $3x^2-10x+6=0$！

解一 $$3x^2-10x+6=0.$$

移項， $$3x^2-16x=-6.$$

3 除， $$x^2-\frac{10}{3}x=-2.$$

配方， $$x^2-\frac{10}{3}x+\left(\frac{5}{3}\right)^2=-2+\left(\frac{5}{3}\right)^2=\frac{7}{9}.$$

開方， $$x-\frac{5}{3}=\pm\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

$\therefore$ $$x=\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

解二 和例三比較，知 $a=3$，$b=-10$，$c=6$.

代入例三求得的式子裏，得

$$x=\frac{10}{6}\pm\frac{\sqrt{100-72}}{6}=\frac{5}{3}\pm\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

例一裏解一的方法，叫**開方法**；例一裏解二和例二裏解一的方法，叫**析因法**；例二裏解二和例四裏解一的方法，叫**配方法**；例四裏解二的方法，叫**公式法**. 配方就是把不是完全平方的式子變成完全平方式.

問　題

1. 解下各方程式！

(1) $(ax-b)(bx-a)=c^2$.　(2) $2a^2-x^2+ax=9b(a-b)$.

(3) $(x-4)(3x-1)=7x-x^2-21$.　(4) $x^2-2ax+a^2=b^2$.

(5) $\left(\frac{3x+4}{5}\right)^2-\frac{12}{5}x=8\frac{1}{5}$.　(6) $8x^2-15x-7=0$.

2. 設 $3x^2+3(x+2)=5x+18$, $3x^3-x^2+5x-6$ 的值怎樣?

3. 設 $3x^2-5x=6$, $3x^3+4x^2-15x-8$ 的值怎樣?

4. 解 $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$!

5. 解 $x^2+bx+c=0$. $ax^2+2bx+c=0$. $x^2+2bx+c=0$!

第二節　二元二次方程式

解二元二次聯立方程式，普通是用第二章裏關於兩個等式的定理,先消去一元.

例一　解 $\left\{\begin{array}{r}2y-3x=1\\13x^2-8xy+3=0\end{array}\right\}$!

解

$$2y-3x=1\cdots\cdots(1)$$

$$13x^2-8xy+3=0\cdots\cdots(2)$$

從(1),　$y=\frac{1}{2}(3x+1)\cdots\cdots(3)$

代入(2),

$$13x^2-8x(3x+1)+3=0.$$

去括號並整理,

$$x^2-4x+3=0.$$

析因,　$(x-1)(x-3)=0.$

$\therefore$　$x=1$ 或 3.

代入(3),　$y=2$ 或 5.

所以知道　$\left.\begin{array}{l}x=1\\y=2\end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l}x=3\\y=5\end{array}\right\}$.

例二　解 $\left\{\begin{array}{l}x+2y+xy=2\\2x-y+3xy=1\end{array}\right\}$!

解 $$x+2y+xy=2\cdots\cdots(1)$$
$$2x-y+3xy=1\cdots\cdots(2)$$

(1)×3-(2),消去 xy 項,
$$x+7y=5.$$
$$\therefore\quad x=5-7y\cdots\cdots(3)$$
代入(1),
$$5-7y+2y+(5-7y)y=2.$$
$$\therefore\quad 7y^2=3.$$
$$\therefore\quad y=\pm\sqrt{\frac{3}{7}}.$$
代入(3), $$x=5\mp\sqrt{21}.$$
所以知道 $$\left.\begin{array}{l}x=5-\sqrt{21}\\ y=\sqrt{\frac{3}{7}}\end{array}\right\}\text{ 或 }\left.\begin{array}{l}x=5+\sqrt{21}\\ y=-\sqrt{\frac{3}{7}}\end{array}\right\}.$$

例三 解 $\left\{\begin{array}{r}xy-ay-bx+ab=0\\ x^2-y^2=0\end{array}\right\}$!

解 $$xy-ay-bx+ab=0\cdots\cdots(1)$$
$$x^2-y^2=0\cdots\cdots(2)$$
從(1), $$(x-a)(y-b)=0.$$
$$\therefore\quad x-a=0\cdots\cdots(3)\text{ 或 }y-b=0\cdots\cdots(4)$$
所以從(3)就得 $x=a$.

代入(2), $a^2-y^2=0$, 得 $y=\pm a$.

從(4)就得 $y=b$.

代入(2), $x^2-b^2=0$, 得 $x=\pm b$.

所以知道 $$\left.\begin{array}{l}x=a\\ y=a\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=a\\ y=-a\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=b\\ y=b\end{array}\right\}\quad\left.\begin{array}{l}x=-b\\ y=b\end{array}\right\}.$$

例四 解 $\left\{\begin{array}{l}x^2=ax+by\\ y^2=ay+bx\end{array}\right\}$!

解
$$x^2=ax+by \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$y^2=ay+bx \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(1)－(2)，　$(x-y)(x+y)=a(x-y)-b(x-y)$.

$\therefore$　$(x-y)(x+y-a+b)=0$.

$\therefore$　$x-y=0 \cdots\cdots(3)$ 或 $x+y-a+b=0 \cdots\cdots(4)$

從(1)和(3)，　$x^2=ax+bx$.

$\therefore$　$x(x-a-b)=0$.

所以　$x=0$ 或 $a+b$,

$y=0$ 或 $a+b$.

從(1)和(4)，$x^2-(a-b)x-b(a-b)=0$.

所以
$$x=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)^2+4b(a-b)}}{2}$$
$$=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2},$$
$$y=\frac{a-b\pm\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}.$$

所以知道
$$\left.\begin{matrix}x=0\\y=0\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=a+b\\y=a+b\end{matrix}\right\}\quad\left.\begin{matrix}x=\dfrac{a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\\y=\dfrac{a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\end{matrix}\right\}$$
$$\left.\begin{matrix}x=\dfrac{a-b-\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\\y=\dfrac{a-b+\sqrt{(a-b)(a+3b)}}{2}\end{matrix}\right\}.$$

例五　解$\left\{\begin{matrix}x^2+y^2=5\\x^2-y^2=xy+1\end{matrix}\right\}$!

解
$$x^2+y^2=5 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$
$$x^2-xy-y^2=1 \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(2)×5－(1)，$4x^2-5xy-6y^2=0$.

$\therefore$　$(4x+3y)(x-2y)=0$.

$\therefore$　$4x+3y=0 \cdots\cdots(3)$ 或 $x-2y=0 \cdots\cdots(4)$

所以從(1)和(3)，就得 $x=\pm\frac{3}{\sqrt{5}}$，　$y=\mp\frac{4}{\sqrt{5}}$.

從(1)和(4)，就得　$x=\pm 2$，　$y=\pm 1$.

例六 解 $\left\{\begin{array}{r} 2x^2-xy+y^2=2y \\ 2x^2+4xy=5y \end{array}\right\}$！

解
$$2x^2-xy+y^2=2y\cdots\cdots(1)$$
$$2x^2+4xy=5y\cdots\cdots(2)$$

(1)×5－(2)×2，$6x^2-13xy+5y^2=0$.

$\therefore$　$(2x-y)(3x-5y)=0$.

$\therefore$　$2x-y=0\cdots\cdots(3)$　或　$3x-5y=0\cdots\cdots(4)$

所以從(2)和(3)，就得 $x=0$，$y=0$；　$x=1$，　$y=2$.

從(2)和(4)，就得　$x=0$，$y=0$；　$x=\frac{15}{22}$，　$y=\frac{9}{22}$.

例七 解 $\left\{\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{array}\right\}$！

解
$$x^2+y^2=25\cdots\cdots(1)$$
$$xy=12\cdots\cdots(2)$$

(1)－(2)×2，$x^2-2xy+y^2=1$.

$\therefore$　$x-y=1\cdots\cdots(3)$　或　$x-y=-1\cdots\cdots(4)$

所以從(2)和(3)，就得 $x=4$，$y=3$；　$x=-3$，$y=-4$.

從(2)和(4)，就得　$x=3$，$y=4$；　$x=-4$，$y=-3$.

例八 解 $\left\{\begin{array}{r} x^2-3xy-10y^2=32 \\ x^2-xy-6y^2=24 \end{array}\right\}$！

解
$$x^2-3xy-10y^2=32\cdots\cdots(1)$$
$$x^2-xy-6y^2=24\cdots\cdots(2)$$

從(1)，　$(x-5y)(x+2y)=32\cdots\cdots(3)$

從(2)，　$24=(x-3y)(x+2y)\cdots\cdots(4)$

(3)×(4)，$24(x-5y)(x+2y)=32(x-3y)(x+2y)\cdots(5)$

$(5)\div 8(x+2y),\qquad 3x-15y=4x-12y.$

$\therefore\qquad x=-3y.$

代入(1)，$\qquad 8y^2=32.$

$\therefore\qquad y=\pm 2.$

$\therefore\qquad x=\mp 6.$

例九　解 $\left\{\begin{matrix}2x^2-5xy-3y^2=36\\2x^2-11xy-6y^2=60\end{matrix}\right\}$！

解　設 $\qquad y=kx,$

那麼 $\left\{\begin{aligned}&2x^2-5kx^2-3k^2x^2=36,\\&2x^2-11kx^2-6k^2x^2=60.\end{aligned}\right.$

$\therefore\qquad (2-5k-3k^2)x^2=36\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$60=(2-11k-6k^2)x^2\cdots\cdots(2)$

$(1)\times(2),\quad 60(2-5k-3k^2)x^2=36(2-11k-6k^2)x^2\cdots(3)$

$(3)\div 12x^2,\quad 10-25k-15k^2=6-33k-18k^2.$

$\therefore\qquad 3k^2+8k+4=0.$

$\therefore\qquad (k+2)(3k+2)=0.$

$\therefore\qquad k=-2$ 或 $-\dfrac{2}{3}.$

因 $k=-2$ 時，(1) 的左邊 x^2 的係數等於 0，祇取 $k=-\dfrac{2}{3}.$

從(1)，$\qquad 4x^2=36.$

$\therefore\qquad x=\pm 3.$

$\therefore\qquad y=\mp 2.$

例十　解 $\left\{\begin{matrix}x^2+xy-2y^2=3\\(x-y)^2+(x+2y)^2=10\end{matrix}\right\}$！

解　因爲 $\qquad x^2+xy-2y^2=(x-y)(x+2y),$

所以設 $\qquad X=x-y,\quad Y=x+2y,$

得 $\qquad XY=3\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$

$X^2+Y^2=10\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

$(2)+(1)\times 2,\ (X+Y)^2=16,\quad \therefore X+Y=\pm 4\ \cdots\cdots(3)$

$(2)-(1)\times 2,\ (X-Y)^2=4,\quad \therefore X-Y=\pm 2\ \cdots\cdots(4)$

從(3)、(4)得下各組:

(一) $X+Y=4,\qquad X-Y=2.$

$\therefore\qquad X=3,\qquad Y=1.$

因此 $x-y=3,\qquad x+2y=1.$

所以 $x=\frac{7}{3},\qquad y=-\frac{2}{3}.$

(二) $X+Y=4,\qquad X-Y=-2.$

$\therefore\qquad X=1,\qquad Y=3.$

因此 $x-y=1,\qquad x+2y=3.$

所以 $x=\frac{5}{3},\qquad y=\frac{2}{3}.$

(三) $X+Y=-4,\qquad X-Y=2.$

$\therefore\qquad X=-1,\qquad Y=-3.$

因此 $x-y=-1,\qquad x+2y=-3.$

所以 $x=-\frac{5}{3},\qquad y=-\frac{2}{3}.$

(四) $X+Y=-4,\qquad X-Y=-2.$

$\therefore\qquad X=-3,\qquad Y=-1.$

因此 $x-y=-3,\qquad x+2y=-1.$

所以 $x=-\frac{7}{3},\qquad y=\frac{2}{3}.$

例一的解法叫代入法，例二的解法叫加減法，例三到例八的解法叫析因法，例九的解法叫公約式法，例十的解法叫輔助式法.

問　　題

解下各方程式!

1. $\begin{cases} 4x-3y=1, \\ 12xy+13y^2=25. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2+4y^2=(x+2y-1)^2, \\ 4x^2+9y^2=(2x-3y+2)^2. \end{cases}$

3. $\begin{cases}(x+y)(x+y+1)=30,\\(x-y)(x-y-2)=15.\end{cases}$　4. $\begin{cases}x^2+xy=12,\\xy-2y^2=1.\end{cases}$

5. $\begin{cases}x^2+y^2+2(x+y)=43,\\7xy=10(x+y).\end{cases}$　6. $\begin{cases}3x^2-3xy+2y^2=2x,\\2x^2+3y^2-4x=xy.\end{cases}$

7. $\begin{cases}x^2+y^2=19+x^2y^2,\\x+y=4+xy.\end{cases}$　8. $\begin{cases}x^2+y^2=2xy+16,\\xy(xy-11)=12.\end{cases}$

第三節　二次方程式應用問題

解二次方程式的應用問題，步驟也和解一次方程式應用問題彷彿．

例一　有二萬斤以內的煤，用若干人搬運，要 8 時．若添 8 人，每人每時少搬 5 斤，要 7 時；若減 8 人，每人每時多搬 11 斤，要 9 時．究竟原用幾人？

解　設原用 x 人，每人每時搬 y 斤，那麼

$8xy=7(x+8)(y-5)=9(x-8)(y+11)$,

卽 $\begin{cases}8xy=7xy-35x+56y-280,\\8xy=9xy+99x-72y-792.\end{cases}$

$\therefore\begin{cases}xy=-35x+56y-280\cdots\cdots(1)\\-xy=99x-72y-792\cdots\cdots(2)\end{cases}$

(1)+(2)，並化簡，$y=4x-67\cdots\cdots(3)$

代入 (1)，並化簡，$x^2-64x+1008=0$.

$\therefore\quad(x-36)(x-28)=0.$

$\therefore\quad x=36$或28.

但　$x=36$ 時，從 (3) 得 $y=77$,

煤的斤數$=8xy=22176\cdots\cdots(4)$

又　$x=28$ 時，從 (3) 得 $y=45$,

$$煤的斤數=8xy=10080 \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

(4)不合題意，祇有(5)合.

答：36人.

例二 甲每秒走8尺，乙每秒走6尺，在直交的兩條路上，都向交點行走. 甲先過交點，2秒後乙過交點. 他們離開20尺，在什麼時刻？

解 設所要時刻在甲過交點前 x 秒，就是乙過交點前 $(x+2)$ 秒，得下方程式：

$$(8x)^2+[(6x+2)]^2=400.$$

化簡，
$$25x^2+36x-64=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{-18\pm\sqrt{1924}}{25}.$$

因為 $x>0$，是表甲過交點前的秒數，$x<0$ 是表他過交點後的秒數，所以都合題意.

答 $\begin{cases}甲過交點前\dfrac{\sqrt{1924}-18}{25}秒.\\[2ex] 乙過交點前\dfrac{\sqrt{1924}+18}{25}秒.\end{cases}$

問 題

1. 一直角三角形，斜邊長5尺，面積6平方尺. 求餘兩邊的長！

2. 每邊長 b 單位的正方形，內接於長 a 單位的正方形. 求內接正方形各角頂的位置！

3. 每邊長3寸的正方形，內接於每邊長4寸的正方形. 求內接正方形各角頂的位置！

4. 一平面內，有半徑長7寸和5寸的兩圓，中心距離3寸. 求公有弦的長！

5. 有一位整數和小數第一位數合成的帶小數，若分做兩個一位整數，它們的平方和是52；又把兩位數字交換，新數較原數小1.8. 求這帶小數！

6. 底面積 117 方尺的長方房子，相隣兩面牆的面積是 130 平方尺和 90 平方尺．長闊高各多少尺?

7. 有矩形公園，繞行周圍一次要 14 分，走過一條對角綫要 5 分．走過這園的一條長邊和一條闊邊各要多少分?

第四節　研究和測驗

一．研究

解一元二次方程式，要化做一次方程式，非析因式不可，開方法、配方法和公式法都是根據析因法來的．從 $x^2=a^2$ 得 $x=\pm a$ 和從 $x^2-a^2=0$ 得 $x+a=0$ 或 $x-a=0$，不是一樣的嗎！從 $x^2+ax=b$，變做 $x^2+ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2=b+\left(\frac{a}{2}\right)^2$，得 $x+\frac{a}{2}=\pm\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}$，和變做 $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2+4b}{4}=0$，得 $\left(x+\frac{a}{2}\right)+\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}=0$ 或 $\left(x+\frac{a}{2}\right)-\frac{\sqrt{a^2+4b}}{2}=0$，不是一樣的嗎!

$ax^2+bx+c=0$ 的根是 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，$ax^2+2b^2x+c=0$ 的根是 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-ac}}{a}$，$x^2+bx+c=0$ 的根是 $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4c}}{2}$，$x^2+2bx+c=0$ 的根是 $-b\pm\sqrt{b^2-c}$．若 a、b、c 皆表整數，那麼看根號內的 b^2-4ac 等，表完全平方數或非完全平方數，就知方程式根是有理數或無理數；看它們表正數或負數，就知方程式根是實數或虛數．

解二元二次方程式，要化做一元一次方程式，大半也非代入和析因不可，因爲代入是可以消元，析因是可以減次的．有時用加減法，也能消元減次，如第二節的例二．

二元二次方程式的析因式，普通先化做三種形式：

（一）$acx^2+(ad+bc)x+bd=0$．

（二）$x^2+2ax+a^2=k^2$．

（三）$acx^2+(ad+bc)xy+bdy^2=0$，或$xy+ax+by+ab=0$．

在解一元二次方程式時，開方法、配方法裏，都是用（二）式，析因法裏用（一）式．第一節例二的 $x^2-3x+2=0$，就是（一）式的一個特例．在解二元二次聯立方程式時，多用（三）式，少用（一）式，（二）式簡直不大用着．第二節例三的 $xy-ay-bx+ab=0$，就是（三）的第二式，例四的 $(x-y)(x+y)-a(x-y)+b(x-y)=0$ 可說是 $(x-y)(x+y)+(-a+b)(x-y)+0(x+y)+(-a+b)\times 0$ 的特例．第二節例五的 $4x^2-5xy+6y^2=0$，例六的 $6x^2-13xy+5y^2=0$、例八的 $x^2-xy-6y^2$，都是（三）的第一式或它的特例．

繁複的方程式，用補助式，往往可化做簡單易解的形式．如第二節的例九，用補助式，可以從二次方程式得一次方程式，又同節的例九，用補助式，可以從二元方程式得一元方程式．前章第二節第三段的例三，用 X 代 $\frac{1}{x}$，Y 代 $\frac{1}{y}$，同節第六段的例三，用 X 代 $\frac{1}{x+y}$，Y 代 $\frac{1}{x-y}$，都可變做一次方程式，所以放在一

次方程式裏，當做整式方程式看.

解二次方程式的應用問題，其中要注意的地方，和解一次方程式應用問題差不多.

二. 測驗

1. 解下各方程式!

(1) $\begin{cases} x+y=8, \\ x^2-xy+y^2=19. \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x-y=2, \\ x^2+xy+y^2=47. \end{cases}$

(3) $\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2, \\ x^2+y^2=ax+by. \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x^2+xy=6y, \\ x^2+y^2=5y. \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x(1+x)=y(4-y), \\ x+4y=(x+y)^2. \end{cases}$　(6) $\begin{cases} 45(n-v)=m, \\ 225n^2=225v^2+m^2. \end{cases}$

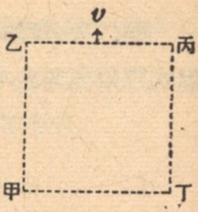
2. 解$x^2=\dfrac{10x-5}{3}$到小數第三位!

3. 一直角三角形，斜邊長 a 尺，面積是 S 平方尺. 餘二邊長怎樣?

4. 一菱形，邊長 15 尺，兩對角線的差是 6 尺. 面積怎樣?

5. 甲、乙兩造船廠；甲第 1 年造船萬噸，以後每年較前 1 年增加 r %；乙第 1 年造 2 萬 5 千噸，第 2 年較第 1 年增加 r %，第 3 年不造，年終計算，3 年共造噸數和甲廠恰相等. 求 r 的值!

6. 甲、乙、丙、丁四人，都依每分鐘 v 尺的速率向同方向進行，並且始終成每邊 m 尺的正方形，如右圖．現有戊，依每分鐘 u 尺的速率，順次訪甲、乙、丙、丁，復回到甲；從甲到乙要 45 分鐘，從乙到丙要 15 分鐘．但戊常走最速的路，從甲到乙或從丙到丁直行，餘都斜行．



(1) 求 $u:v$ 的值！

(2) 從丙到丁，從丁到甲，各要多少分鐘？

7. 解二元二次聯立方程式，在什麼情形時，可以用代入法？

8. 解二元二次聯立方程式，在什麼情形時，可以用析因法？

9. 二元二次方程式解答的數，都是有限制的嗎？

10. 二元二次方程式，都是有解答的嗎？

第四章　其他方程式

第一節　分式方程式

解分式方程式，普通是用式裏各分母的最低公倍式去乘，消去分母．但是求得的根或解答，須使原各分母，都不能等於0．

例一　解 $\frac{x^2-x+1}{x-1}+\frac{x^2+x+1}{x+1}=2x$！

解　拿 $x-1$、$x+1$ 的最低公倍式 $(x-1)(x+1)$ 乘兩邊，消去分母，

$$(x+1)(x^2-x+1)+(x-1)(x^2+x+1)=2x(x+1)(x-1).$$

$\therefore$ $$(x^3+1)+(x^3-1)=2x(x^2-1).$$

整理，$$2x=0.$$

所以 $$x=0.$$

因為 $x=0$，原方程式任何分母都不等於0，所以就是所要的根．

例二　解 $\frac{x}{x-2}+\frac{x-9}{x-7}=\frac{x-8}{x-6}+\frac{x+1}{x-1}$！

解　兩邊各項都減1，

$$\left(\frac{x}{x-2}-1\right)+\left(\frac{x-9}{x-7}-1\right)=\left(\frac{x-8}{x-6}-1\right)+\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right).$$

$\therefore$ $$\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x-7}=\frac{2}{x-1}-\frac{2}{x-6}.$$

$\therefore$ $$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-6}.$$

整理，$$\frac{-5}{(x-2)(x-7)}=\frac{-5}{(x-1)(x-6)}.$$

$\therefore$ $$(x-1)(x-6)=(x-2)(x-7).$$

整理，$$2x=8.$$

所以 $$x=4.$$

例三 解 $\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}$!

解一
$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

去分母，$x^2=1$.

$\therefore$ $x=\pm1$.

但 $1-1=0$, $1-(-1)=2$.

所以 $x=-1$.

解二
$$\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{x-1}.$$

移項，$\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{x-1}=0$.

即 $\frac{x^2-1}{x-1}=0$.

$\therefore$ $x+1=0$.

$\therefore$ $x=-1$.

例四 解 $\left\{\begin{array}{l} x+y=a+b \\ \frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=0 \end{array}\right\}$!

解
$$x+y=a+b \quad\cdots\cdots(1)$$
$$\frac{a}{x+b}+\frac{b}{y+a}=0 \quad\cdots\cdots(2)$$

去(2)的分母，
$$a(y+a)+b(x+b)=0.$$

$\therefore$ $bx+ay=-a^2-b^2 \quad\cdots\cdots(3)$

$(1)\times a-(3)$，$(a-b)x=2a^2+ab+b^2$.

所以設 $a-b\neq0$ 就得 $x=\frac{2a^2+ab+b^2}{a-b}$,

$$y=-\frac{a^2+ab+2b^2}{a-b}.$$

若 $a=b=0$，那麼 x、y 的值無定.

例五　解 $\dfrac{2}{x+2}+\dfrac{3}{y+3}=\dfrac{3}{x+2}+\dfrac{2}{y+3}=1$!

解　設 $X=\dfrac{1}{x+2}$，　$Y=\dfrac{1}{y+3}$，

那麼　$2X+3Y=1$ ……………………………(1)

$3X+2Y=1$ ……………………………(2)

$(1)\times 2-(2)\times 3$，$-5X=-1$.

$\therefore$　$X=\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{5}$，所以 $x=3$.

同樣，　$Y=\dfrac{1}{y+3}=\dfrac{1}{5}$，所以 $y=2$.

各值都不能使原方程式任何分母等於 0.

例六　解 $\left\{\begin{aligned}&\frac{y}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{20}{3}\\&xy+\frac{x}{y}=\frac{5}{3}\end{aligned}\right\}$!

解　設　$\dfrac{y}{x}=u$，$xy=v$，

那麼　$u+\dfrac{1}{v}=\dfrac{20}{3}$ ……………………………(1)

$v+\dfrac{1}{u}=\dfrac{5}{3}$ ……………………………(2)

從(1)，　$\dfrac{1}{v}=\dfrac{20}{3}-u$ ……………………(3)

從(2)，　$v=\dfrac{5}{3}-\dfrac{1}{u}$ ……………………(4)

(3)×(4)，　$1=\dfrac{100}{9}-\dfrac{20}{3u}-\dfrac{5}{3}u+1$.

$\therefore$　$15u-100+\dfrac{60}{u}=0$.

$\therefore$　$15u^2-100u+60=0$.

$\therefore$　$3u^2-20u+12=0$.

$\therefore \quad (3u-2)(u-6)=0.$

$\therefore \quad u=\frac{2}{3}$或$6$, $v=\frac{1}{6}$或$\frac{3}{2}$.

從此得下各組:

(一) $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$, $xy=\frac{1}{6}$.

解得 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm\frac{1}{3}$.

(二) $\frac{y}{x}=6$, $xy=\frac{3}{2}$.

解得 $x=\pm\frac{1}{2}$, $y=\pm 3$.

例七 某商買甲、乙兩種貨,共計 125000 圓. 賣時甲 91000 圓,乙 36000 圓,甲貨獲利的百分率等於乙貨虧本的百分率. 各貨原價怎樣?

解 設甲、乙貨原價順次是 x 圓、y 圓,得下方程式:

$$x+y=125000 \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\frac{91000}{x}-1=1-\frac{36000}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

解得, $\begin{cases} x=87500 \\ y=37500 \end{cases}$ $\begin{cases} x=65000 \\ y=60000 \end{cases}$

因爲要 $x<91000$, $y>36000$, 所以都合題意.

答: 甲 87500 圓、乙 37500 圓; 甲 65000 圓、乙 60000 圓.

例八 某地某時溫度的 x 倍是 p 度. 若加 a 度,他的 $(x-1)$ 倍也是 p 度. 求這溫度是多少度!

解 依題意,某地某時的溫度是 $\frac{p}{x}$ 度,得下方程式:

$$\frac{p}{x}+a=\frac{p}{x-1}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4ap}}{2a}.$$

因爲溫度表的溫度分正負，所以在 $a^2+4ap>0$ 時，可得兩種的答．

答 $\dfrac{2ap}{a\pm\sqrt{a^2+4ap}}$ 度．

問　題

1．解下各方程式！

(1) $\dfrac{x}{x-1}=2-\dfrac{3}{x-1}.$　　(2) $\dfrac{a}{x-a}-\dfrac{b}{x-b}=\dfrac{a-b}{x}.$

(3) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{5x^2-15x-8}{10(x-3)}-\dfrac{5x-9}{5}=1.$　　(4) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-9}=\dfrac{1}{x-3}+\dfrac{1}{x-y}.$

2．解下各方程式！

(1) $\dfrac{x-y}{y-1}=\dfrac{y+1}{x}=\dfrac{5}{8}.$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-3}+\dfrac{-3}{y+3}=2,\\[2ex]\dfrac{x-3}{2x+3}+\dfrac{y-3}{2y+3}=1.\end{cases}$

3．解下各方程式！

(1) $\begin{cases}y+z=\dfrac{1}{x},\\[2ex]z+x=\dfrac{1}{y},\\[2ex]x+y=\dfrac{1}{z}.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}+2\dfrac{y}{x}=3,\\[2ex]x^2-y^2-2x+1=0.\end{cases}$

(3) $\begin{cases}\dfrac{a^2}{x^2}+\dfrac{b^2}{y^2}=45,\\[2ex]\dfrac{a}{x}-\dfrac{b}{y}=9.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x\div y=63.\\[2ex]\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{41}{20}.\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{y^3}=91.\\[2ex]\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1.\end{cases}$

4. 甲、乙兩人合做若干時完成的工作，使甲獨做一半，可早1時成功；使乙獨做一半，須遲2時才成．求兩人合做此事成功所要的時間！

5. 某船夫划船，在上下16英里的河裏，要10時．上行5時的路程等於下行3時的路程．求上下這河所要的時間！

6. 甲乙兩地距離1540里．A號飛機從甲地出發飛往乙地，經1時後，B號飛機從乙地出發飛往甲地，兩機路中相會後，A號再從2時55分到乙地，B號再從3時到甲地．兩機的速率每時是多少里？

第二節　無理方程式

解無理方程式，普通是用乘方，消去根號．但是求得的根或解答，非代入原方程式去驗不可．

例一　解 $\sqrt{x-5}=3$！

解　$\sqrt{x-5}=3.$

自乘，　$x-5=9.$

$\therefore$　$x=14.$

因為　$\sqrt{14-5}=\sqrt{9}=3$，所以 $x=14$

例二　解 $x-7-\sqrt{x-5}=0$！

解　$x-7-\sqrt{x-5}=0.$

移項，　$x-7=\sqrt{x-5}.$

自乘，　$x^2-14x+49=x-5.$

$\therefore$　$x^2-15x+54=0.$

$\therefore$　$(x-6)(x-9)=0.$

$\therefore$　$x=6$ 或 $9.$

因為　$6-7-\sqrt{6-5}\neq 0$，　$9-7-\sqrt{9-5}=0$，　所以 $x=9.$

例三　解　$\sqrt[3]{\sqrt{x}+a}=\sqrt{b}$！

解　$$\sqrt[3]{\sqrt{x}+a}=\sqrt{b}.$$

去根號，　$$\sqrt{x}+a=b^{\frac{3}{2}}.$$

移項，　$$\sqrt{x}=b^{\frac{3}{2}}-a.$$

$\therefore$　$$x=(b^{\frac{3}{2}}-a)^2.$$

因為　$$\sqrt[3]{\sqrt{(b^{\frac{3}{2}}-a)^2}+a}=\sqrt[3]{b^{\frac{3}{2}}-a+a}=\sqrt[3]{b^{\frac{3}{2}}}=b^{\frac{1}{2}}=\sqrt{b},$$

所以　$$x=(b^{\frac{3}{2}}-a)^2.$$

例四　解　$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9$！

解　$$\sqrt{x+5}+\sqrt{x-4}=9.$$

移項，　$$\sqrt{x-4}=9-\sqrt{x+5}.$$

自乘，　$$x-4=81-18\sqrt{x+5}+x+5.$$

$\therefore$　$$\sqrt{x+5}=5.$$

自乘　$$x+5=25.$$

$\therefore$　$$x=20.$$

因為　$\sqrt{20+5}+\sqrt{20-4}=9$，所以 $x=20$.

例五　解　$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9$！

解　$$\sqrt{x+5}-\sqrt{x-4}=9.$$

移項，　$$\sqrt{x+5}=9+\sqrt{x-4}.$$

自乘，　$$x+5=81+18\sqrt{x-4}+x-4.$$

$\therefore$　$$\sqrt{x-4}=-4.$$

自乘， $x-4=16.$

$\therefore$ $x=20.$

因爲 $\sqrt{20+5}-\sqrt{28-4}\neq 9$，所以原方程式沒有根.

例六 解 $2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0$!

解 $$2x^2-6x-5\sqrt{x^2-3x-1}-5=0.$$

那麼 $$2(x^2-3x-1)-5\sqrt{x^2-3x-1}-3=0.$$

設 $X=\sqrt{x^2-3x-1}$，

那麼 $$2X^2-5X-3=0.$$

解得 $X=\sqrt{x^2-3x-1}=3$，或 $X=\sqrt{x^2-3x-1}=-\frac{1}{2}.$

第二方程式右邊是 $-\frac{1}{2}$，不能用，從第一方程式得 $x=5$ 或 -2.

因爲 $$2(5^2)-6\times5-5\sqrt{5^2-3\times5-1}-5=0,$$

$$2(-2)^2-6\times(-2)-5\sqrt{(-2)^2-3(-2)-1}-5=0.$$

所以 $x=5$ 或 -2.

問 題

解下各方程式!

1. $x^{\frac{1}{4}}=4.$
2. $x^{-\frac{1}{2}}=3.$
3. $x^{\frac{2}{3}}=8.$
4. $\left(\sqrt{2x-1}\right)^{\frac{1}{3}}=\sqrt{3}.$
5. $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}}=2.$
6. $\sqrt{4x^2+x+10}=2x+1.$
7. $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+11}=7.$
8. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+1}-\sqrt{9x+10}=0.$
9. $\sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2-x-1}=2.$
10. $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}.$

11. $3x^2-2x-5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$.

12. $3x^2-2x+5\sqrt{3x^2-2x+3}+9=0$.

第三節 研究和測驗

一. 研究

初中代數,差不多完全講方程式,在這些方程式裏,都是拿一元一次整式方程式做根據. 無理的化做有理,分式的化做整式,多元的化做一元,高次的化做一次.

多元的 (二元的)	高次的 (二次的)	分式的	無理的
↓	↓	↓	↓
一元的	一次的	整式的	有理的

化的時候,一種應用等式定理,一種用補助式. 等式定理不過幾條,善於運用,就能千變萬化,應付一切,補助式更要經驗豐富,心思靈敏,才能得着無上便利. 代數不但能拿一個式子代表一個數目,並且能拿一個式子代表別的式子,補助式就是這個式子,會用補助式的,數學必定容易進步.

二. 測驗

1. 方程和方程式,有什麼分別?

2. 等式和方程式,有什麼分別?

3. 常數和已知數,有什麼分別?

4. 變數和未知數,有什麼分別?

5. 用等式定理化一個無理方程式成一個有理方程式,是

怎樣的？舉一個例子！

6．用補助式化一個無理方程式成一個有理方程式，是怎樣的？舉一個例子！

7．用等式定理化一個分式方程式成一個整式方程式，是怎樣的？舉一個例子！

8．用補助式化一個分式方程式成一個整式方程式，是怎樣的？舉一個例子！

9．用等式定理化一元二次方程式成一元一次方程式，是怎樣的？舉一個例子！

10．化一元二次方程式，可用補助式嗎？

11．用等式定理化兩個二元一次聯立方程式成一個一元一次方程式，是怎樣的？舉一個例子！

12．化兩個二元一次聯立方程式成一個一元一次方程式，可用補助式嗎？

13．用等式定理化兩個二元二次聯立方程式成一個一元一次方程式，是怎樣的？舉一個例子！

14．用補助式化兩個二元二次聯立方程式成一個一元一次方程式，是怎樣的？舉一個例子！

15．用等式定理化兩個二元二次聯立方程式成兩個二元一次聯立方程式，是怎樣的？舉一個例子！

16．用補助式化兩個二元聯立分式方程式成兩個二次聯立整式方程式，是怎樣的？舉一個例子！

民國三十七年二月發行
民國三十七年二月初版

中華文庫 初中第一集 代數方程式（全一冊）

◎定價