$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{yx}(x,\ y)=f_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{yy}(x,\ y)=f_{yy}$$

更ニ是等ノ $x,\ y$ ニ對スル偏微係數ヲ求メルト，次ノヤウナ符號デ表シ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f_{xxx}(x,\ y)=f_{xxx}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial^2 x\partial y}=f_{yxx}(x,\ y)=f_{yxx}$$

....

....

之ヲ**第三次偏微係數**ト云フ。其ノ他ノ場合モ之ニ準ジ，夫等ヲ總稱シテ**高次偏微係數**ト云フ。

例　$z=x^5y^2+xy$ ナルトキ第二次偏微係數ヲ求メヨ。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=5x^4y^2+y \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^5y+x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=10x^4y+1 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=10x^4y+1$$

，此ノ例ニ於テ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ ト $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ トハ何レモ $10x^4y+1$ ニテ同ジ値ヲ有スルハ一見偶然ノ結果ノヤウデアルガ，此ノ性質ハ一般ニ成立スルモノデ，常ニ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \qquad \cdots(4)$$

ナル關係ガ存在スル。之ヲ**しゆわるつ** (Schwarz) **ノ定理**ト云フ。

問　　題

8.　$z=ax^3+bx^2y+cxy^2$ ナルトキ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ヲ求メヨ。

9.　次ノ函數ニ於テ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ヲ求メヨ。

(*a*)　$z=\dfrac{x^m}{y^n}$　　　(*b*)　$z=x^2\sin y+y^2\sin x$

21.6　陰函數ノ高次微係數

第 21.4 節ニ於テ陰函數 $f(x,y)=0$ ニ就キ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ求メル方法ヲ說明シテ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

又ハ

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

ヲ得ルコトヲ述ベタ。本節ニ於テハ更ニ進ンデ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メルコトヲ論ジヨウ。

公式 (3) ヲ得タト全ク同ジ考ヘニヨツテ之ヲ微分スレバ

$$\frac{d^2y}{d^2x}=-\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,\dfrac{dy}{dx}\right)-\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\dfrac{dy}{dx}\right)}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

此ノ式ニ公式 (3) ヲ代入シテ $\dfrac{dy}{dx}$ ヲ逐出スト

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2-2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial y}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^3}$$

或ハ

$$y''=-\frac{f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2}{f_y^3}$$

尙進ンデ之ヲ微分シ，ソレニ $\dfrac{dy}{dx}$ 及ビ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ノ値ヲ入レレバ $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ ヲ求メルコトガ出來ル。

*例 $f(x, y)=x^2-xy+y^2-1=0$ ナルトキ $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ ヲ求メヨ。

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=-x+2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-1, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2(-x+2y)^2+2(2x-y)(-x+2y)+2(2x-y)^2}{(-x+2y)^3}$$

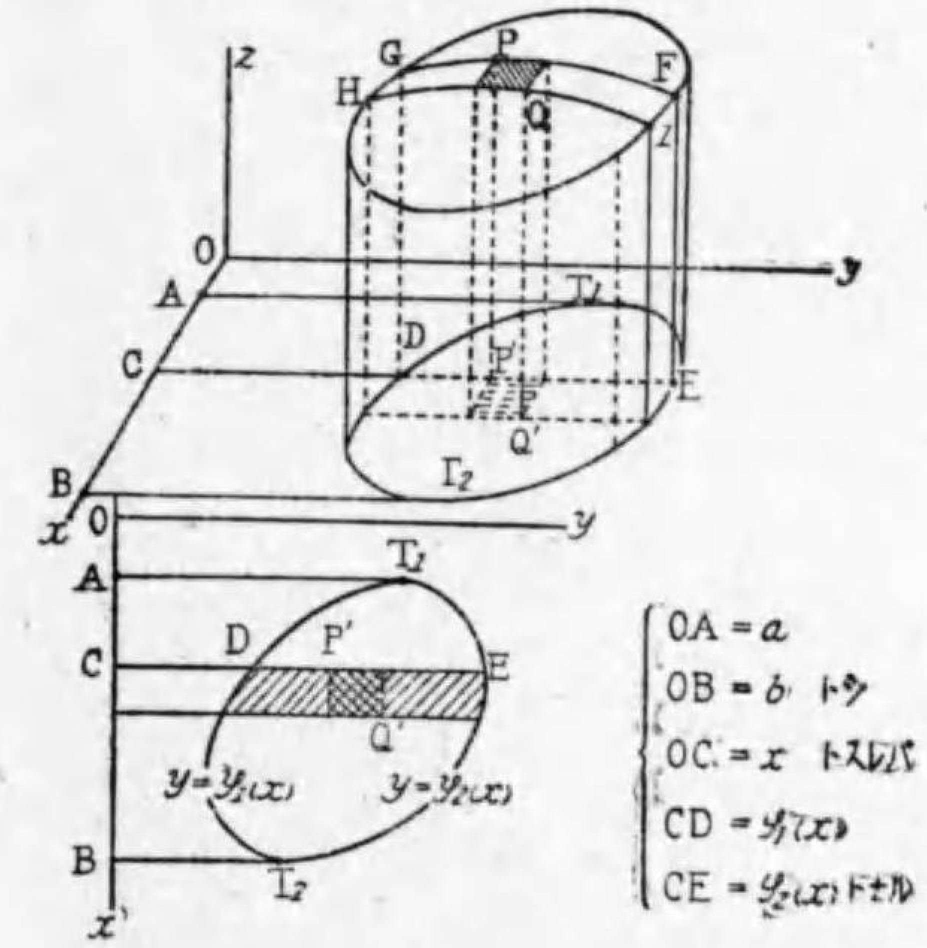
$$=-\frac{6(x^2-xy+y^2)}{(-x+2y)^3}=\frac{6}{(2y-x)^3}$$

第二十二章

二重積分ト其ノ應用

22.1 立體ノ體積

曲面 $z=f(x, y)$ ト柱面 $\varphi(x, y)=0$ ト xy 平面トニヨツテ圍マレタ部分ノ體積 V ヲ求メヨウ。



$\varphi(x, y)=0$ ト xy 平面トノ交リノ曲線ヲ DT_2ET_1 トシ, 此ノ曲線ニ y 軸ニ平行ナ切線 AT_1, BT_2 ヲ引キ x 軸トノ交リヲ A, B, 切點ヲ T_1, T_2 トスル。曲面上ニ $P(x, y, z)$, $Q(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ ノ二點ヲトリ, P 及ビ Q カラ xy 平面ニ下シタ垂線ノ足ヲ P' 及ビ Q' トスル。P' ヲ通ツテ y 軸ニ平行ニ引イタ直線ガ x 軸ト C, 曲線ト D 及ビ E デ交ツタトスル。xy 平面上デ曲線 T_1DT_2 及ビ T_1ET_2 ノ方程式ヲ夫々 $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ トスレバ, 平板 GDEF ノ面積ハ

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy$$

此ノ平板ガ yz 平面ニ平行ニ T_1 カラ T_2 マデ移動シタ跡ヲ考ヘルト丁度求メル體積 V トナル。故ニ

$$V=\int_a^b\left\{\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)dy\right\}dx$$

此ノ括弧ヲ略シテ次ノ如ク表ス。

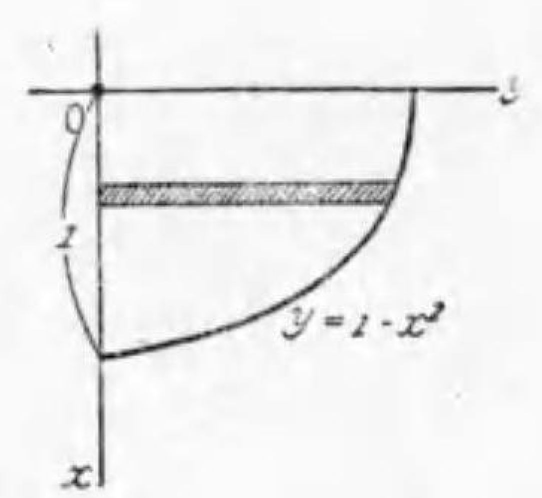
$$V=\int_a^b\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,\ y)dy\,dx \qquad \cdots(1)$$

サテ體積 V ハ底面 (A) [閉曲線 $\varphi(x,\ y)=0,\ z=0$ ニ依ッテ圍マレタ部分]上ニ微小面積 dA ヲトリ, 高サ $f(x,\ y)$ ト dA トノ積 $f(x,\ y)dA$ ヲ底面 (A) ノ全部ニ互ッテ寄セ集メタモノデ,

$$\int_{(A)} f(x,\ y)dA \qquad \cdots(2)$$

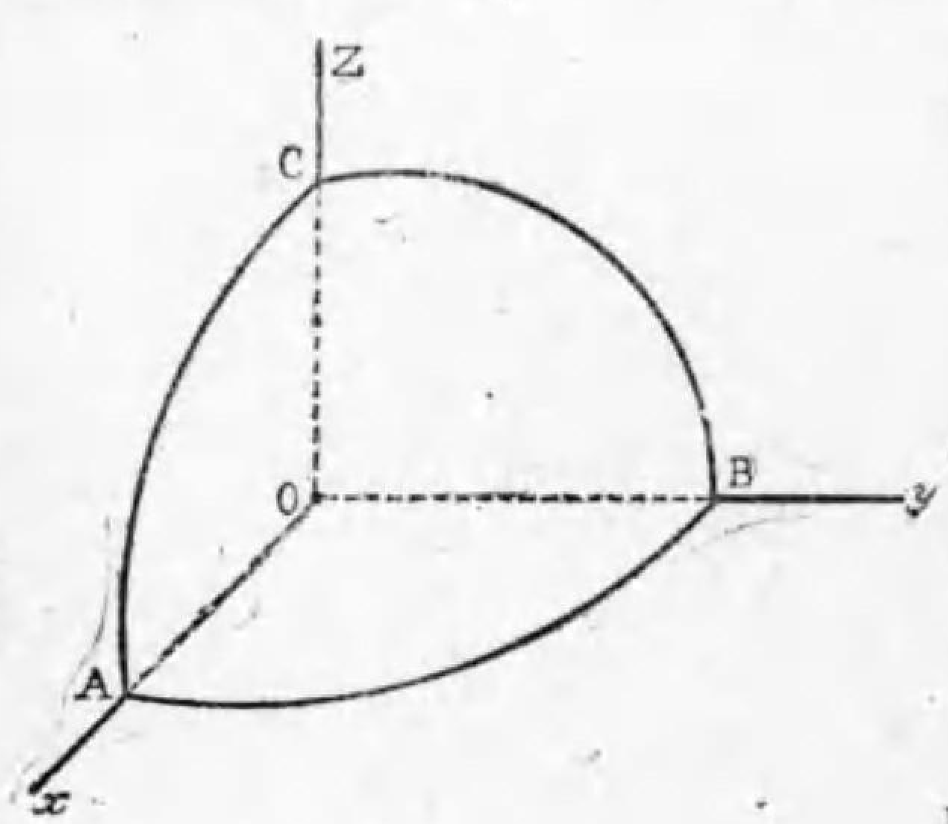
トモ書ク。(2) ノ様ナ積分ヲ (A) ニ於ケル $f(x,\ y)$ ノ**二重積分** (Double integral) ト云ヒ, (1) ノ様ナ積分ヲ**二回積分** (Repeated integral) ト云フ。

例 1. 曲面 $y=1-x^2$ ト平面 $z=x+y,\ x=0,\ y=0,\ z=0$ ニヨッテ圍マレタ部分ノ體積ヲ求メヨ。



$$V=\int_0^1\int_0^{1-x^2}(x+y)dy\,dx$$
$$=\int_0^1\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2}dx$$
$$=\int_0^1\left\{x(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}\right\}dx$$
$$=\frac{31}{60}$$

例 2. 楕圓體 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ ノ體積ヲ求メヨ。



各座標平面ニ關シテ對稱デアルカラ $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ ナル部分ノ體積ヲ求メテ 8 倍スレバヨイ。xy 平面ノ上方ノ曲面ノ方程式ハ

$$z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$$

xy 平面上ニ於テ OB ノ方程式ハ $x=0$, $\widehat{AB}$ ノ方程式ハ $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, 又 $OA=a$ デアルカラ

$$V=8\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dy\,dx$$

$$V=\frac{8c}{b}\int_0^a\int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)-y^2}\,dy\,dx$$

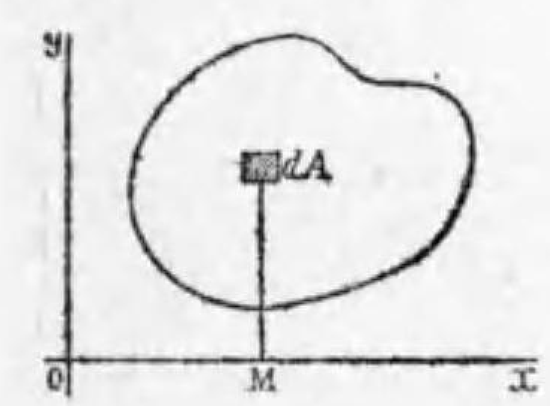
然ルニ
$$\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,dy=\frac{\pi R^2}{4}$$

デアルカラ,
$$V=\frac{8c}{b}\int_0^a\frac{\pi}{4}\cdot\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)dx=\frac{2\pi bc}{a^2}\int_0^a(a^2-x^2)dx=\frac{4\pi abc}{3}$$

問　　題

1. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(x+y)dy\,dx$ ノ値ヲ求メヨ。
2. $\int_0^{2a}\int_0^x(x^2+y^2)dy\,dx$ ノ値ヲ求メヨ。
3. 座標平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ トノ間ノ體積ヲ求メヨ。
4. 二ツノ柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ トノ間ノ體積ヲ求メヨ。
5. 楕圓拋物面 $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=z$ ト平面 $z=c$ トノ間ノ體積ヲ求メヨ。

22. 2　第一能率

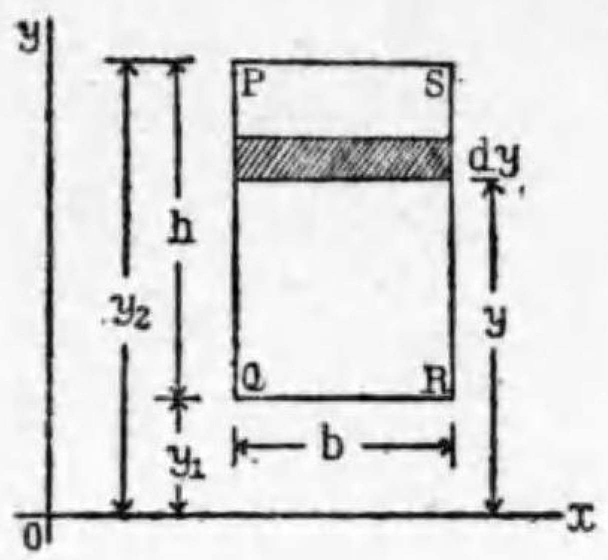


圖ノ様ナ平面圖形ガアッタトシ, 之ヲ微小部分ニ分チ, 其ノ各部分 dA トコレカラ其ノ平面上ニ設ケタ x 軸ニ至ル距離 y トノ積ノ總和 $\int y\,dA$ ヲ x 軸ニ關スル此ノ圖形ノ**第一能率** (First moment) 又ハ**面率** (Moment of area) ト云フ。今 x 軸ニ關スル面率ヲ G_x デ表スト,

$$G_x=\int y\,dA \qquad \cdots(3)$$

$$G_y=\int x\,dA \qquad \cdots(4)$$

例 一邊 QR ニ平行ナル x 軸ニ關スル矩形 PQRS ノ面率ヲ求メヨ。



$dA=b\,dy$ トスルト, (2) カラ

$$G_x=\int y\,dA=\int yb\,dy=b\int_{y_1}^{y_2}y\,dy$$

$$=\frac{b}{2}(y_2^2-y_1^2)$$

$$\therefore\quad G_x=b(y_2-y_1)\times\frac{y_2+y_1}{2}$$

$$=A\times\frac{y_2+y_1}{2}\qquad(\text{但シ}\quad A=bh)$$

22.3 重心又ハ圖形ノ中心

力學ノ敎ヘル處ニヨルト, 質量ガ連續的ニ分布サレタ物體ノ重心ヲ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ トスレバ

$$\bar{x}=\frac{\int x\rho\,dv}{\int\rho\,dv},\qquad \bar{y}=\frac{\int y\rho\,dv}{\int\rho\,dv},\qquad \bar{z}=\frac{\int z\rho\,dv}{\int\rho\,dv}\qquad\cdots(5)$$

但シ x, y, z ハ物體ノ任意ノ點 P ニ於ケル直角座標ニシテ, ρ ハ P 點ニ於ケル密度, dv ハ P 點ニ於ケル微小體積ヲ表ス。

若シ密度ガ一樣ナラバ

$$\bar{x}=\frac{\int x\,dv}{V},\qquad \bar{y}=\frac{\int y\,dv}{V},\qquad \bar{z}=\frac{\int z\,dv}{V}\qquad\cdots(6)$$

但シ V ハ全體積ヲ表ス。

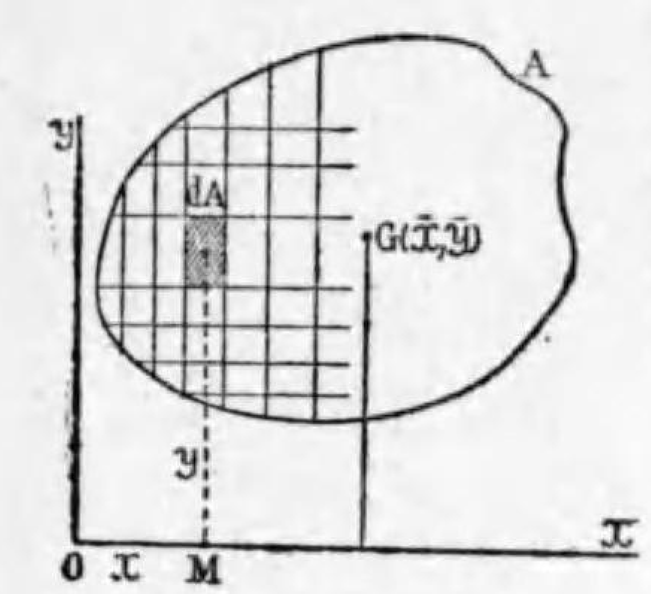
今後密度ハ總テ一樣デアルトスル。今 $dv=dx\,dy\,dz$ トスレバ

$$\bar{x}=\frac{\iiint x\,dx\,dy\,dz}{V},\qquad \bar{y}=\frac{\iiint y\,dx\,dy\,dz}{V}$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint z\,dx\,dy\,dz}{V}\qquad\cdots(7)$$

平面圖形ナラバ, 薄イ平板ト考ヘ其ノ厚サヲ t トスレバ $dv=t\cdot dA$

(6) 式カラ



$$\therefore\quad \bar{x}=\frac{\int x\,dA}{A},\qquad \bar{y}=\frac{\int x\,dA}{A}\qquad\cdots(8)$$

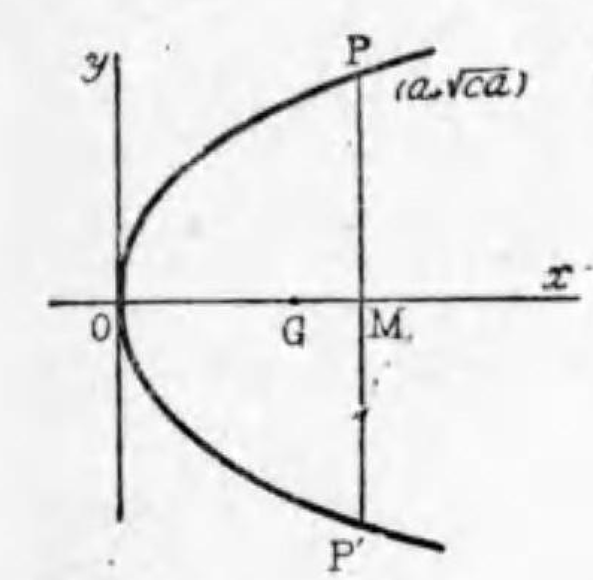
但シ分母ノ A ハ全面積ヲ表ス。

今 $dA=dx\,dy$ トスレバ

$$\bar{x}=\frac{\iint x\,dx\,dy}{A},$$

$$\bar{y}=\frac{\iint y\,dx\,dy}{A}\qquad\cdots(9)$$

例 1. 拋物線 $y^2=cx$ ト直線 $x=a$ トノ間ノ平面圖形ノ重心ヲ求メヨ。

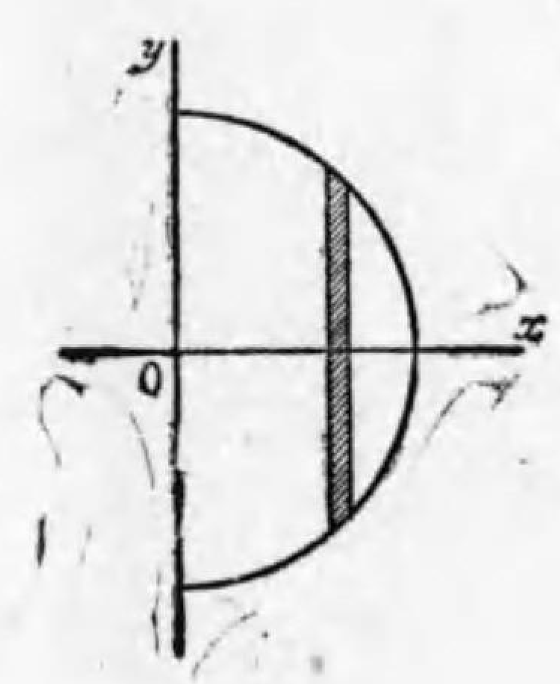


曲線 $y^2=cx$ ト直線 $y=a$ トノ交點ヲ P, P′ トスレバ, 平面圖形 POP′ ノ重心 G ノ座標ハ次ノ如クナル。

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a x\cdot y\,dx}{\int_0^a y\,dx}=\frac{\frac{2}{5}c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{5}{2}}}{\frac{2}{3}c^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}}=\frac{3}{5}a$$

$$\bar{y}=\frac{\int_{-\sqrt{ca}}^{\sqrt{ca}}y\cdot\left(a-\frac{y^2}{c}\right)dy}{\int_{-\sqrt{ca}}^{\sqrt{ca}}\left(a-\frac{y^2}{c}\right)dy}=0$$

【本例デハ $\bar{y}$ ヲ計算シタガ, 此ノ樣ニ圖形ガ x 軸ニ關シテ對稱ナラバ, 重心ハ x 軸ニアルコト明ラカデアルカラ, 此ノ例ノ樣ニ明ラカナ場合ハ省略スル。



例 2. 半圓形ノ重心ヲ求メヨ。

半徑ヲ a, $dA=y\,dx$ トスレバ

$$\bar{x}=\frac{\int_0^a x\cdot y\,dx}{\frac{\pi a^2}{4}}=\frac{4}{\pi a^2}\int_0^a x\cdot\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{4a}{3\pi}$$

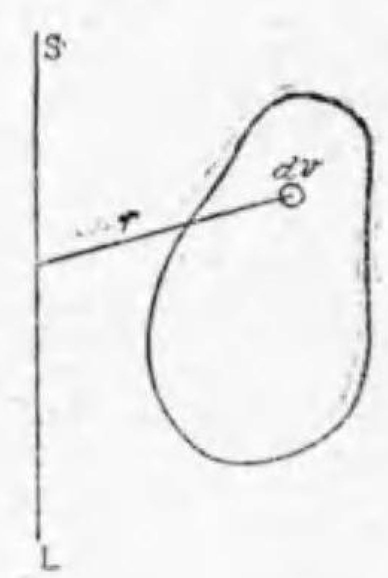
$\bar{y}=0$ ナルコトハ明ラカデアル。

問　題

6. 半徑ガ a ナル四分圓ノ重心ヲ求メヨ。
7. 半徑ガ a, 中心角ガ 2α ナル扇形ノ重心ヲ求メヨ。
8. 半徑ガ a ナル半球ノ重心ヲ求メヨ。
9. 高サ h ナル圓錐體ノ重心ヲ求メヨ。

22.4　慣性能率

或ル立體ノ微小部分 dv ノ質量 $\rho\,dv$ [ρ ハ密度] ト, 其ノ部分ヨリ定直線 SL ニ至ル距離ノ二乘 r^2 トノ積 $r^2\rho\,dv$ ノ總和 $\int r^2\rho\,dv$ ヲ, 定直線 SL ニ關スル此ノ立體ノ **慣性能率** (Moment of inertia) 又ハ **第二能率** (Second moment) ト云ヒ, 通常 I デ表ス。卽チ



$$I=\int r^2\rho\,dv \qquad \cdots(10)$$

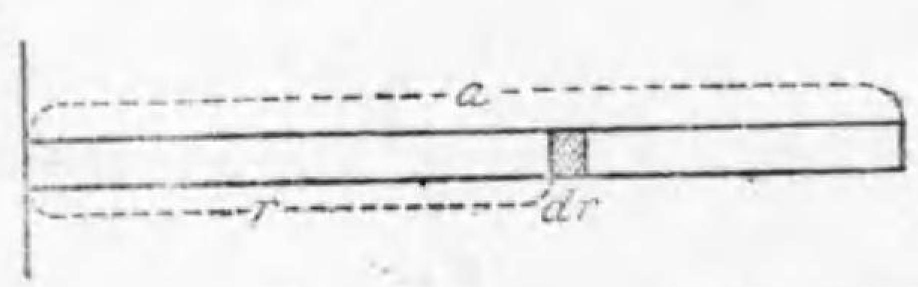
全質量 $\int\rho\,dv$ ヲ M トスルトキ, $\sqrt{\dfrac{I}{M}}$ ヲ **廻轉半徑** (Radius of gyration) ト云ヒ, 之ヲ R トスレバ

$$R=\sqrt{\frac{I}{M}} \qquad \cdots(11)$$

今後密度ハ一様デアルトスル。

例 1. 太サ一様ニシテ細イ棒ノ一端カラ, コレニ垂直ナル直線ニ關スル此ノ棒ノ慣性能率及ビ廻轉半徑ヲ求メヨ。但シ棒ノ長サヲ a, 太サヲ t トスル。

$$I=\int_0^a r^2\rho\,t\,dr=\frac{a^3t}{3}\rho$$

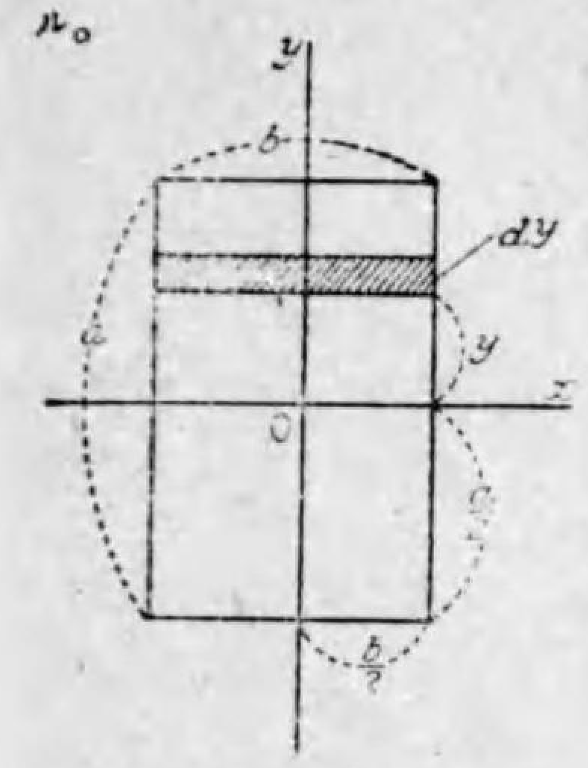


全質量ヲ M トスレバ

$$I=\frac{a^2M}{3}$$

故ニ廻轉半徑ハ　$R=\sqrt{\dfrac{I}{M}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\fallingdotseq 0.577a$

例 2. 薄イ矩形板ノ中心ヲ通リ, 圖ノ様ニ兩邊ニ平行ニ x 軸及ビ y 軸ヲトルトキ, x 軸及ビ y 軸ニ關スル慣性能率ト廻轉半徑ヲ求メヨ。但シ兩邊ノ長サヲ a, b トシ, 厚サヲ t トスル。



x 軸ニ關スル慣性能率ハ

$$I_x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2\cdot\rho\cdot b\,t\,dy=\frac{a^3b\,t}{12}\rho=\frac{a^2M}{12}$$

y 軸ニ關スル慣性能率ハ同様ニシテ

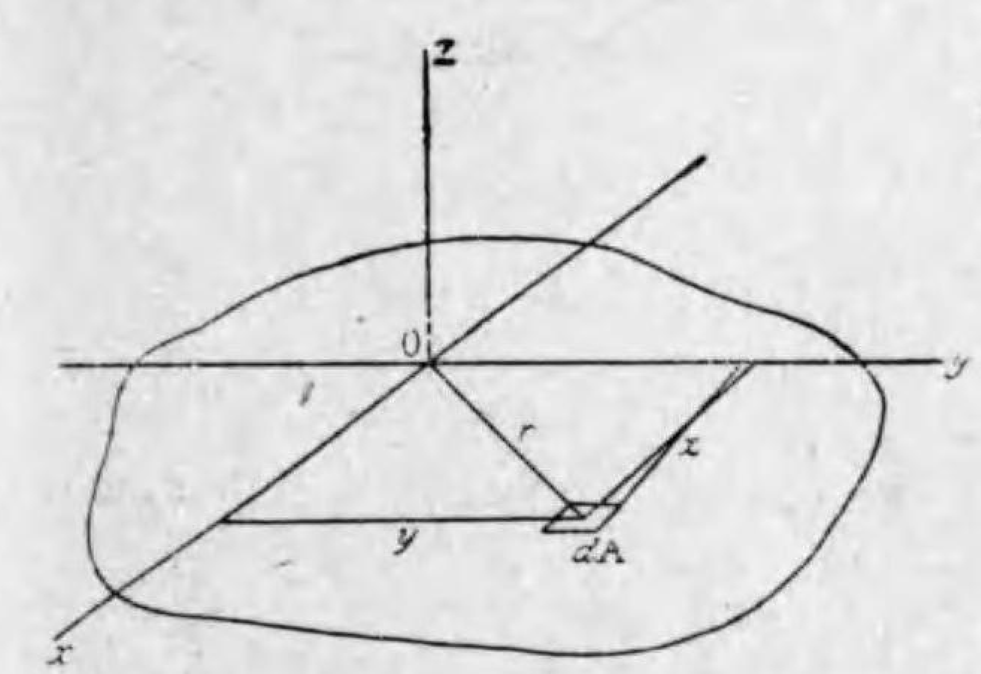
$$I_y=\frac{b^2M}{12}$$

廻轉半徑ハ次ノ如クナル。

$$R_x=\frac{a}{2\sqrt{3}},\quad R_y=\frac{b}{2\sqrt{3}}$$

定理　平面板上ノ一點ヲ通リ, 其レニ垂直ナル直線ニ關スル慣性能率ハ, 其ノ點ヲ通リ其ノ面上ニアッテ直交スル直線ニ關スル慣性能率ノ和ニ等シイ。

證明　平面板上ノ一點ヲ原點ニトリ, 平面板上ニ x 軸及ビ y 軸ヲ圖ノ様ニトリ, x 軸, y 軸, z 軸ニ關スル慣性能率ヲ夫々 I_x, I_y, I_z トスレバ



$$\begin{aligned}I_z&=\int r^2\rho\cdot t\,dA\ \left(\text{厚サハ薄ク其レヲ } t \text{ トスル}\right)\\&=\int(x^2+y^2)\rho\,t\,dA\\&=\int x^2\rho\,t\,dA+\int y^2\rho\,t\,dA\\&=I_y+I_x\end{aligned}$$

例 3. 例 2 ニ於ケル矩形板ノ O 點ヲ通リ, 其ノ矩形板ニ垂直ナル直線ニ關スル慣性能率 I_0 ヲ求メヨ。

$$I_0=I_x+I_y=\frac{a^2M}{12}+\frac{b^2M}{12}=\frac{(a^2+b^2)M}{12}$$

問　　題

10. 半徑 a ナル細イ圓輪ノ中心 O ヲ通リ，此ノ圓輪ノ面ニ垂直ナル軸ニ關スル慣性能率及ビ任意ノ直徑ニ關スル慣性能率ヲ求メヨ。

11. 半徑 a ナル圓板ノ中心ヲ通リ，板面ニ垂直ナル軸ニ關スル其ノ圓板ノ慣性能率ヲ求メヨ。

12. 半徑 a ナル球面（薄イ球殼）ノ直徑ニ關スル慣性能率及ビ廻轉半徑ヲ求メヨ。

13. 稜ノ長サガ a, b, c ナル直六面體ノ一ツノ稜（長サ a ナル稜）ニ關スル慣性能率ヲ求メヨ。

第二十三章
微　分　方　程　式

23.1 定義ト分類

微分係數ヲ含ム關係式

$$f\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \frac{d^2y}{dx^2},\ \cdots\cdots\right)=0 \tag{1}$$

$$\varphi\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \cdots\cdots\right)=0 \tag{2}$$

ノ様ナ式ヲ**微分方程式**ト云フ。(1) ノ様ニ自變數ガ只一個デアル微分方程式ヲ常微分方程式 (Ordinary differential equation) ト云ヒ，(2) ノ様ニ自變數ガ二個以上デアル微分方程式ヲ**偏微分方程式** (Partial differential equation) ト云フ。

微分方程式中ニ含マレル最高位ノ微係數ノ位數ガ n ナルトキ，即チ微分回數ガ n ナル微係數ヲ含ムトキ，之ヲ**第 n 階微分方程式**ト云フ。

第 n 階微分方程式ヲ微係數ニ關シテ有理整方程式トナシタ場合ニ第 n 位ノ微係數ノ次數ガ m トナレバ，コレヲ**第 n 階，第 m 次微分方程式**ト云フ。例ヘバ

$$y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{a}{\dfrac{dy}{dx}} \qquad \text{第一階二次常微分方程式}$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-\frac{dy}{dx} \qquad \text{第二階一次常微分方程式}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=xy \qquad \text{第二階一次偏微分方程式}$$

次ノ例ニ示ス如ク，被變數ガ二個以上ナル微分方程式ノ一組ヲ**聯立微分方程式** (Simultaneous diff. eq.) ト云フ。

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-8x=t\\ \frac{dx}{dt}+2\frac{dy}{dt}-3y=0\end{aligned}\right\}$$

又次ノ例ノ如ク，被變數ト微係數＝關シテ一次ナル微分方程式ヲ**線形微分方程式** (Linear differential equation) ト云フ。

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+y=0$$

例 1. $y=cx+\frac{a}{c}$ カラ任意常數 c ヲ消去セヨ。

$$\frac{dy}{dx}=c \qquad \therefore\ y\frac{dy}{dx}x=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a$$

例 2. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{e^x}{2}$ カラ任意常數 c_1 及ビ c_2 ヲ消去セヨ。

$$\frac{dy}{dx}=c_1\cos x-c_2\sin x+\frac{e^x}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-c_1\sin x-c_2\cos x+\frac{e^x}{2}$$

$$\therefore \qquad \frac{d^2y}{dx^2}+y=e^x$$

一般＝ n 個ノ任意常數ヲ含ム式ヲ n 回微分シテ $(n+1)$ 個ノ式カラ n 個ノ任意常數ヲ消去スレバ第 n 階ノ微分方程式ガ得ラレル。

$$y=cx+\frac{a}{c},\ (1)\quad ハ\quad y\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a,\ (2)$$

ヲ滿足シ，　$y=c_1\sin x+c_2\cos x+\frac{e^x}{2}$, (3)　ハ　$\frac{d^2y}{dx^2}+y=e^x$,　(4)

ヲ滿足スル。斯クノ如ク微分方程式ヲ滿足シ且ツ微分係數ヲ含マナイ關係式ヲ與ヘラレタ微分方程式ノ**解**ト云ヒ，解ヲ求メルコトヲ**積分スル**又ハ**解ク**ト云フ。

n 階ノ常微分方程式ヲ解イテ階數ト同數ノ互＝獨立ナル任意常數ヲ含ム解ヲ得タルトキ，之ヲ**一般解** (General solution) ト云フ。前＝示シタ (1) 式ハ (2) 式ノ，(3) 式ハ (4) 式ノ一般解デアル。一般解＝含マレタ任意常數ノ一部若シクハ全部＝定マツタ値ヲ代入シタトキノ解ヲ**特別解** (Particular solution) ト云フ。

本章＝於テハ最モ簡單ナル常微分方程式ノミ＝就テ述ベルコトニスル。

23. 2　變數分離形

$$\frac{dy}{dx}+\frac{f(x)}{\varphi(y)}=0 \qquad \cdots(1)$$

＝於テ $\varphi(y)$ ヲ乘ズレバ　$\varphi(y)\frac{dy}{dx}+f(x)=0$

x ＝就テ積分スレバ　$\int\varphi(y)\frac{dy}{dx}dx+\int f(x)dx=C$

或ハ　$$\int\varphi(y)dy+\int f(x)dx=C \qquad \cdots(2)$$

(2) ハ (1) ノ一般解＝シテ，(1) カラ (2) ヲ求メル＝ハ形式的＝ (1) ノ分母ヲ拂ヒ　$\varphi(y)dy+f(x)dx=0$

トシテ (2) ノ様＝積分記號ヲ冠シ，左邊＝任意常數ヲ置ケバヨイ。

例 1. $\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}=0$ ヲ解ケ。

$$x\,dx+y\,dy=0,\qquad \int x\,dx+\int y\,dy=C \qquad \therefore\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C$$

或ハ　$$x^2+y^2=C'$$

例 2. $2x\frac{dy}{dx}=y$ ヲ解ケ。

$$2\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x},\qquad 2\log y=\log x+C$$

今 $C=\log C'$ トオケバ　$\log y^2=\log C'x \qquad \therefore\ y^2=C'x$

例 3. 落下運動＝於テ空氣ノ抵抗ガ速度＝比例スルモノトシテ速度 v ヲ時間 t ノ函數デ表セ。但シ初速度ハ零トスル。

題意カラ次ノ微分方程式ガ得ラレル。

$$\frac{dv}{dt}=g-kv \qquad (1)$$

$$\frac{dv}{g-kv}=dt \quad 積分スレバ \quad \frac{1}{k}\log\frac{1}{g-kv}=t+c$$

今 $c=\log c'$ トオケバ　　$\log(g-kv)=-kt-\log c'$

或ハ　　$c'(g-kv)=e^{-kt}$　　(2)

(2) ハ (1) ノ一般解デアル。初速度ガ零デアルカラ $t=0$ ナルトキ $v=0$ ナル條件ヲ代入スルト

$$c'=\frac{1}{g}$$

$$\therefore \quad v=\frac{g}{k}(1-e^{-kt}) \qquad (3)$$

(3) ハ (1) ノ特別解デアル。初速度ガ零デアルト云フ條件ニ依ツテ任意率數 c' ハ定マル。此ノ樣ナ條件ヲ**原始條件** (Initial condition) ト云フ。

問　　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ。

1. $\dfrac{dy}{dx}=2x+3$　　**2.** $\dfrac{dy}{dx}=y$

3. $\dfrac{dy}{dx}+3x^2y=0$　　**4.** $\dfrac{dy}{dx}+e^xy=e^xy^2$

5. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=0$　　**6.** $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{1+x^2}$

23. 3　同次微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \cdots(3)$$

ナル形ノ微分方程式ヲ同次微分方程式 (Homogeneous differential equation) ト云フ。

$$\frac{y}{x}=u$$

トオケバ　　$y=xu,\qquad \dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$

$1-y+y$

コレヲ (3) ニ代入スルト

$1-y+y$

$$u+x\frac{du}{dx}=f(u)$$

或ハ　　$$\frac{du}{f(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

積分スレバ　　$$\int\frac{du}{f(u)-n}=\log x+c$$

或ハ　　$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\log c'x \qquad \cdots(4)$$

例 1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y-x}{x}$ ヲ解ケ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-1,\qquad \frac{y}{x}=u$$

トオケバ　　$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{du}{(u-1)-u}=-\int du=-u=-\frac{y}{x}$$

故ニ一般解ハ　　$$-\frac{y}{x}=\log cx$$

或ハ　　$$e^{-\frac{y}{x}}=cx$$

尙變形スルト　　$$xe^{\frac{y}{x}}=c'$$

例 2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2xy}{x^2-y^2}$ ヲ解ケ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2\dfrac{y}{x}}{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2},\qquad \frac{y}{x}=u$$

トオケバ

$$\int\frac{du}{f(u)-u}=\int\frac{du}{\dfrac{2u}{1-u^2}-u}=\int\frac{1-u^2}{u(1+u^2)}du=\log\frac{u}{1+u^2}=\log\frac{xy}{x^2+y^2}$$

故ニ一般解ハ　　$$\log\frac{xy}{x^2+y^2}=\log cx$$

或ハ　　$$x^2+y^2=\frac{1}{c}y$$

問　　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ。

7. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x+y}{x}=0$　　**8.** $x\dfrac{dy}{dx}+2y+3x=0$

9. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2y+3y^3}{x^3+2xy^2}$　　**10.** $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2+y^2}$

$\frac{1}{u}-\frac{u}{1+u^2}$

$\underline{1+u^2+u^2}$

23.4 第一階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx}+Py=Q \qquad \cdots(5)$$

但シ P 及ビ Q ハ x ノ函數デ y ハ含マナイモノトスル。

(5) ノ兩邊ニ $e^{\int Pdx}$ ヲ乘ズルト,

$$e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+e^{\int Pdx}Py=e^{\int Pdx}Q$$

或ハ
$$\frac{d}{dx}(e^{\int Pdx}y)=e^{\int Pdx}Q$$

積分スルト
$$e^{\int Pdx}y=\int e^{\int Pdx}Q\,dx+C$$

或ハ
$$y=e^{-\int Pdx}\left\{\int e^{\int Pdx}Q\,dx+C\right\} \qquad \cdots(6)$$

例 1. $\frac{dy}{dx}+\frac{n}{x}y=\frac{a}{x^n}$ ヲ解ケ。

$$\int P\,dx=\int\frac{n}{x}dx=n\log x=\log x^n,\quad e^{\int Pdx}=e^{\log x^n}=x^n$$

故ニ一般解ハ

$$y=\frac{1}{x^n}\left\{\int x^n\cdot\frac{a}{x^n}dx+C\right\}=\frac{1}{x^n}\left\{\int a\,dx+C\right\}$$

$$\therefore\quad y=\frac{a}{x^{n-1}}+\frac{C}{x^n}$$

例 2. $\frac{dy}{dx}+y-x=0$ ヲ解ケ。

$$\int P\,dx=\int 1\,dx=x$$

故ニ一般解ハ
$$y=e^{-x}\left\{\int e^x x\,dx+C\right\}=e^{-x}\{e^x(x-1)+C\}$$

$$\therefore\quad y=x-1+Ce^{-x}$$

問 題

次ノ微分方程式ヲ解ケ。

11. $\frac{dy}{dx}+\frac{y}{x}=x^2$　　**12.** $\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}$

13. $\frac{dy}{dx}=x-2y$　　**14.** $\frac{dy}{dx}+y\cot x=\sec x$

23.5 常係數ノ線形微分方程式

本節ニ於テハ第二階ノ微分方程式ニ就テ述ベルガ第三階デモ第四階デモ同樣ニ擴張スルコトガ出來ル。

[1]
$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \qquad \cdots(7)$$

但シ a, b, c ハ常數トスル。

第一階ノ微分方程式 $\frac{dy}{dx}-ry=0$, (r ハ常數トスル) ノ一般解ハ $y=Ce^{rx}$ トナルカラ, 今 $y=Ce^{rx}$ トシテ (7) 式ニ代入スルト

$$Ce^{rx}(ar^2+br+c)=0$$

トナル。
$$ar^2+br+c=0 \qquad \cdots(8)$$

ヲ滿足スル樣ニ r ノ値ヲトレバ $y=Ce^{rx}$ ハ (7) 式ノ解トナル。

此ノ (8) 式ヲ (7) 式ノ**補助方程式** (Auxiliary equation) ト云フ。

(8) 式ノ相異ナル二根ヲ r_1, r_2 トスレバ $y=C_1e^{r_1x}$ 及ビ $y=C_2e^{r_2x}$ ハ無論 (7) 式ノ解デハアルガ, 任意常數ハ一個デアルカラ一般解デナク特別解デアル。今

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x} \qquad \cdots(9)$$

トオケバ, (9) 式ハ (7) 式ヲ滿足シ, 且獨立ナル二ツノ任意常數 C_1, C_2 ヲ含ムカラ (9) 式ハ (7) 式ノ一般解デアル。 若シ (8) 式ガ等根 $r_1=-\frac{a}{2b}$ ヲ有スルナラバ $y=Ce^{r_1x}$ ハ (7) 式ノ解デアルガ一般解デハナイ。今 C ヲ x ノ函數ト見做シテ (7) 式ニ代入スルト

$$e^{r_1x}\left\{C(ar_1^2+br_1+c)+\frac{dC}{dx}(2ar_1+b)+a\frac{d^2C}{dx^2}\right\}=0$$

或ハ $\frac{d^2C}{dx^2}=0$, コレヲ x デ二回積分スルト $C=C_1x+C_2$ (但シ C_1, C_2 ハ任意常數) ヲ得ル。從ツテ r_1 ガ (8) 式ノ等根ナラバ

$$y=(C_1x+C_2)e^{r_1x} \qquad \cdots(10)$$

ハ (7) 式ヲ滿足シ, 且獨立ナル二ツノ任意常數ヲ含ムカラ (10) 式ハ (7) 式ノ一般解デアル。

例 1. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+3\dfrac{dy}{dx}+2y=0$ ヲ解ケ。

補助方程式 $r^2+3r+2=0$ ヲ解クト　$r=-1,\ -2$

故ニ一般解ハ　　　$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$

例 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-5\dfrac{dy}{dx}+6y=0$ ヲ解ケ。

補助方程式 $r^2-5r+6=0$ ヲ解クト　$r=2,\ 3$

故ニ一般解ハ　　　$y=C_1e^{2x}+C_2e^{3x}$

例 3. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+9y=0$ ヲ解ケ。

補助方程式 $r^2-6r+9=0$ ヲ解クト等根 3 ヲ得ル。

故ニ一般解ハ　　　$y=(C_1x+C_2)e^{3x}$

補助方程式ノ根ガ實根ノ場合ハ (9) 式デ表スガ，虚根 $\alpha\pm i\beta$ ノ場合ハ次ノ如ク變形スル。

$$y=C_1e^{(\alpha+i\beta)x}+C_2e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(C_1e^{i\beta x}+C_2e^{-i\beta x})$$
$$=e^{\alpha x}\{C_1(\cos\beta x+i\sin\beta x)+C_2(\cos\beta x-i\sin\beta x)\}$$
$$=e^{\alpha x}\{(C_1+C_2)\cos\beta x+i(C_1-C_2)\sin\beta x\}$$

(C_1+C_2) 及ビ $i(C_1-C_2)$ ハ任意常數デアルカラ，之レヲ A 及ビ B トスレバ

$$\boldsymbol{y=e^{\alpha x}(A\cos\beta x+B\sin\beta x)} \qquad \cdots\textbf{(11)}$$

但シ $A,\ B$ ハ任意常數デアル。

(7) 式ノ補助方程式 (8) 式ノ根ガ $\alpha\pm i\beta$ ナラバ，(11) 式ヲ (7) 式ニ代入スルト滿足スルコトガ分ル (證明略ス)。

例 4. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4\dfrac{dy}{dx}+7y=0$ ヲ解ケ。

補助方程式 $r^2+4r+7=0$ ヲ解クト　$r=-2\pm\sqrt{3}\,i$

故ニ一般解ハ　　　$y=e^{-2x}(A\cos\sqrt{3}\,x+B\sin\sqrt{3}\,x)$

例 5. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+k^2y=0$ ヲ解ケ。　　$(k>0)$

補助方程式 $r^2+k^2=0$ ヲ解クト　　$r=\pm ki$

故ニ一般解ハ　　　$y=C_1\cos kx+C_2\sin kx$

問　　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ。

15. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+\dfrac{dy}{dx}-2y=0$　　**16.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}-7\dfrac{dy}{dx}+12y=0$

17. $2\dfrac{d^2y}{dx^2}+5\dfrac{dy}{dx}-12y=0$　　**18.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4\dfrac{dy}{dx}+4y=0$

19. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2\dfrac{dy}{dx}+5y=0$　　**20.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}+8\dfrac{dy}{dx}+25y=0$

21. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+a\dfrac{dx}{dt}+bx=0$ ニ於テ $t=0$ ナルトキ $x=x_0$, $\dfrac{dx}{dt}=0$ デアルト云フ。此ノ特別解ヲ求メヨ。

但シ $a>0,\ b>0,\ a^2-4b<0$ トスル。

[2]　　$$\boldsymbol{a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x)} \qquad \cdots\textbf{(12)}$$

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=0 \qquad (1)$$

(1) 式ノ一般解ヲ　　$y=u(x)$　　(2)　2-3

トスレバ $u(x)$ ノ中ニ獨立ナル任意常數ヲ二ツ含ム。此ノ函數 $u(x)$ ヲ　1 4

(12) 式ノ**餘函數** (Complementary function) ト云フ。　8-35

(12) 式ノ特別解ヲ何等カノ方法ニ依ツテ求メ得タトシ，ソレヲ

$$y=v(x) \qquad (3)$$

トスレバ　　$$\boldsymbol{y=u(x)+v(x)} \qquad \cdots\textbf{(13)}$$

ハ (12) 式ヲ滿足シ，且任意常數ヲ二ツ含ムカラ，(13) 式ハ (12) 式ノ一般解デアル。特別解ヲ求メル一般ノ方法ハ省略シ，只視察ニ依ツテ求メル方法ヲ例デ說明スル。

例 6. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}+2y=x^2$ ヲ解ケ。　25-20

原式ノ右邊ガ x^2 デアルカラ，y ハ x ノ二次ノ整函數デアルコトガ分ル。　$=\sqrt{5}$

若シ左邊ノ第三項ノ $2y$ ガナケレバ，y ハ x ノ三次ノ整函數デアル。

此ノ場合特別解ハ視察ニ依ツテ $y=Ax^2+Bx+C$ ナル形デアルコトガ分ル。　-5?

$$\begin{array}{r|l} 2 & y=Ax^2+Bx+C \\ -3 & y'=2Ax+B \\ & y''=2A \\ \hline \end{array}$$

$$y''-3y'+2y=2Ax^2+(2B-6A)x+2C-3B+2A$$

此ノ右邊ガ x^2 ニナルタメニハ

$$2A=1,\quad 2B-6A=0,\quad 2C-3B+2=$$

依ツテ $$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{3}{2},\quad C=\frac{7}{4}$$

故ニ特別解ハ $$y=\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{7}{4}$$

然ル原式ノ餘函數ハ $C_1e^x+C_2e^{2x}$ デアルカラ,

一般解ハ $$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{7}{4}$$

例 7. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=e^x$

原式ノ餘函數ハ $C_1\cos x+C_2\sin x$ トナル。

特別解ハ觀察ニ依ツテ $y=Ae^x$ ナル形デアルコトガ分ル。

之ヲ原式ニ代入スルト $$2Ae^x=e^x$$

故ニ $$A=\frac{1}{2}$$

依ツテ特別解ハ $$y=\frac{e^x}{2}$$

故ニ一般解ハ $$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\frac{e^x}{2}$$

問　題

次ノ微分方程式ヲ解ケ。

22. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-6\dfrac{dy}{dx}+5y=3$　　**23.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}-4y=e^{3x}$

24. $\dfrac{d^2y}{dx^2}-\dfrac{dy}{dx}=x^2$　　**25.** $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=\sin 3x$

第二十四章

複　素　數

24. 1 複素數ノ意義及ビ算法

$x^2=-a^2$ (a ハ實數) ヲ滿足スル x ノ値ハ實數ノ範圍デハ存在シナイ。此ノ不便ヲ除クタメニ新タナ數, 卽チ負數ノ平方根ヲ導入スル。

$-a^2$ ノ平方根, 卽チ $\sqrt{-a^2}$ ヲ ai ト書キ**虛數** (Imaginary number) ト云フ。

實數 a ト虛數 bi トノ和 $a+bi$ ヲ**複素數** (Complex number) ト云ヒ, a ヲ**實數部分** (Real part), bi ヲ**虛數部分** (Imaginary part), i ヲ**虛數單位** (Imaginary unit) ト云フ。

複素數ノ算法ハ次ノ樣ニ實數ノ場合ト同一デアルト規約スル。尙 $i^2=-1$ トスル。

[1] $a=0,\ b=0$ ナルトキ $a+bi=0$

[2] $a=c,\ b=d$ ナルトキ $a+bi=c+di$

[3] $(a\pm bi)+(c\pm di)=(a\pm c)+(b\pm d)i$

[4] $(a\pm bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$

[5] $c+di\neq 0$ ナルトキ

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

$a+bi$ ト $a-bi$ トハ互ニ共軛デアルト云ヒ, 一方ヲ他方ノ**共軛數** (Conjugate number) ト云フ。

例 $\dfrac{3+\sqrt{2}i}{2-i}+\dfrac{3-\sqrt{2}i}{2+i}$ ヲ計算セヨ。

$$\frac{(3+\sqrt{2}i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\frac{(3-\sqrt{2}i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1}{5}\{6-\sqrt{2}+(3+2\sqrt{2})i+6-\sqrt{2}-(3+2\sqrt{2})i\}$$

$$=\frac{6-\sqrt{2}}{5}.$$

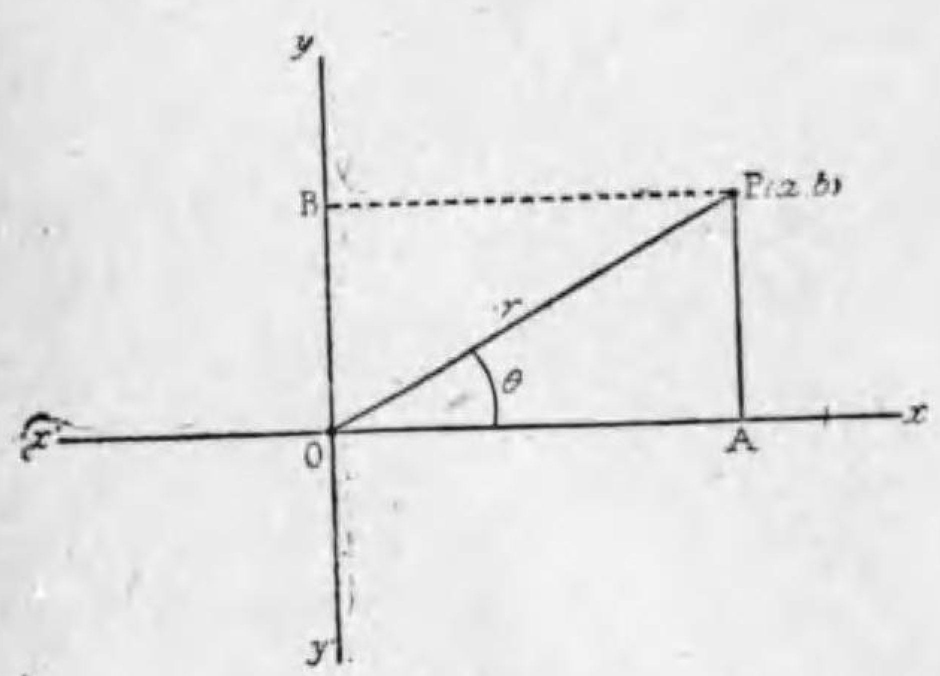
問　　題

1. $Z_1=3+2i$, $Z_2=4-1$ ナルトキ, Z_1+Z_2, Z_1-Z_2, Z_1Z_2 及ビ $\dfrac{Z_1}{Z_2}$ ヲ求メヨ。

2. $\dfrac{2+7i}{2+5i}-\dfrac{3-11i}{2-5i}$ ヲ計算セヨ。　　3. $\dfrac{(1+i)^2}{2-2\sqrt{3}\,i}$ ヲ計算セヨ。

24.2 複素數ノ幾何學的表示

一ツノ複素數 $a+bi$ ガ與ヘラレタトキ, 一平面上ニ直角座標軸ヲ考ヘテ, 點 (a, b) ヲトリ, 複素數 $a+bi$ ト點 (a, b) トヲ對應セシメタトキ, 點 (a, b) ヲ複素數 $a+bi$ ヲ表ス點デアルト云フ。斯樣ニスレバ複素數ノ全體ト平面上ノ點ノ全體トガ一ツ宛完全ニ對應スルカラ, 複素數ノ間ノ關係ヲ點ト點ノ間ノ幾何學的關係ニ移スコトガ出來ル。之ニ依ツテ便益ヲ得ルコトガ多イ。



xx' ヲ**實軸** (Real axis), yy' ヲ**虛軸** (Imaginary axis), O ヲ原點ト云フ。複素數 $a+bi$ ヲ表ス點 P カラ實軸ニ垂線 PA, 虛軸ニ垂線 PB ヲ引ケバ

$$OA=a, \quad OB=bi$$

OA ハ實數部分ヲ表シ, OB ハ虛數部分ヲ表ス。

OP$=r$ トスレバ　　$r=\sqrt{a^2+b^2}$

ヲ $a+bi$ ノ**絕對値** (Absolute value) ト云ヒ, $|a+bi|$ ナル記號デ表ス。

$\angle x$OP$=\theta$ トスレバ　　$\tan\theta=\dfrac{b}{a}$

此ノ θ ヲ $a+bi$ ノ**偏角** (Amplitude) ト云ヒ, amp$(a+bi)$ ナル記號デ表ス。

$a+bi$ ノ絕對値ヲ r, 偏角ヲ θ トスレバ,

$$a=r\cos\theta, \qquad b=r\sin\theta$$

$$\therefore \quad a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta) \qquad \cdots(1)$$

右邊ノ形式ヲ**極形式** (Polar form), 之ニ對シテ左邊ノ形式ヲ**直形式** (Rectangular form) ト云フ。

一ツノ複素數ニ對スル偏角ノ値ハ無數ニ多ク存在スルガ, 其ノ何レノ二ツヲトルモ其ノ差ハ 2π ノ整數倍デアルカラ偏角ノ一ツヲ θ_0 トスレバ

$$\theta=\theta_0+2n\pi \qquad (\text{但シ } n \text{ ハ任意ノ整數})$$

通例 θ ハ $-180^\circ<\theta\leqq180^\circ$ ノ間ノ値ヲトル。

例 1. $1+\sqrt{3}\,i$ ヲ極形式デ表セ。

$$r=\sqrt{1+3}=2, \qquad \tan\theta=\sqrt{3}$$

此ノ複素數ハ第一象限ニアルカラ　$\theta=60^\circ$

$$\therefore \quad 1+\sqrt{3}\,i=2(\cos60^\circ+i\sin60^\circ)$$

一般ニ,　$1+\sqrt{3}\,i=2\{\cos(360^\circ\times n+60^\circ)+i\sin(360^\circ\times n+60^\circ)\}$

例 2. $1-i$ ヲ極形式デ表セ。

$$r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}, \qquad \tan\theta=-1$$

此ノ複素數ハ第四象限ニアルカラ　$\theta=-\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore \quad 1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

一般ニ　$1-i=\sqrt{2}\left\{\cos\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(2n\pi-\dfrac{\pi}{4}\right)\right\}$

電氣工學ニ於テハ極形式ヲ $\theta>0$ ナルトキ $r\angle\theta$ ト書キ, $\theta<0$ ナルトキ $r\urcorner\theta$ ト書ク。

問　　題

次ノ式ヲ極形式デ表セ。

4. $1+i$　　5. $1-i$　　6. i　　7. 4

8. $-1+\sqrt{3}\,i$　　9. $\dfrac{2}{1+i}$　　10. $\dfrac{i^3+1}{i+1}$

24. 3　極形式ニ依ル乘法, 除法及ビ乘根

$Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$,　$Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$　トスル。

［1］ **乘法**　$Z_1Z_2=r_1r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)$
$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{Z_1Z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}} \qquad \cdots(2)$$

卽チ二ツノ複素數ノ積ノ絶對値ハ其ノ因數ノ絶對値ノ積ニ等シク, 其ノ偏角ハ因數ノ偏角ノ和ニ等シイ。尙式デ表スト,

$$|Z_1Z_2|=|Z_1|\cdot|Z_2|,\quad \mathrm{amp}(Z_1Z_2)=\mathrm{amp}(Z_1)+\mathrm{amp}(Z_2)$$

［2］ **除法**

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdot(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)}$$
$$=\frac{r_1\{(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)\}}{r_2(\cos^2\theta_2+\sin^2\theta_2)}$$

但シ　$r_2\neq 0$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\}} \qquad \cdots(3)$$

卽チ二ツ複素數ノ商ノ絶對値ハ其ノ絶對値ノ商ニ等シク, 其ノ偏角ハ分子ノ偏角ヨリ分母ノ偏角ヲ引イタモノニ等シイ。尙式デ表スト,

$$\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|=\frac{|Z_1|}{|Z_2|},\qquad \mathrm{amp}\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)=\mathrm{amp}(Z_1)-\mathrm{amp}(Z_2)$$

［3］ **乘根**　(2) 式カラ

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\cdots\cdots r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)$$
$$=r_1r_2\cdots\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_n)\}$$

此ノ式ニ於テ　$r_1=r_2=\cdots\cdots=r_n=1$,　$\theta_1=\theta_2=\cdots\cdots\theta_n=\theta$　トオケバ

$$\boldsymbol{(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta} \qquad \cdots(4)$$

(4) ハ n ガ正整數ナルトキ成立スル許リデナク, n ガ負ノ整數デモ分數デモ成立スル。次ニ n ガ正ノ分數ナルトキ成立スルコトヲ證明スル。

$n=\dfrac{p}{q}$　(但シ p 及ビ q ハ互ニ素デ正整數デアルトスル。)

$\dfrac{\theta}{q}=\varphi$　トオケバ　$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos q\varphi+i\sin q\varphi)^{\frac{p}{q}}$
$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^p$$
$$=\cos p\varphi+i\sin p\varphi$$
$$=\cos\frac{p}{q}\theta+i\sin\frac{p}{q}\theta$$
$$=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

(4) ナル定理ヲ**ど・もあぶるノ定理** (De Moivre's theorem) ト云フ。

n ガ正整數ナルトキ $\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}$ ハ次ノ如キ n 通リノ値ヲ有スル。

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}=r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right\}}\\ \qquad\qquad \boldsymbol{k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1}\end{array}\right\}\cdots(5)$$

何トナレバ $\dfrac{\theta+2k\pi}{n}$ ノ $k=0, 1, 2, \cdots\cdots, n-1$ ノ何レノ二ツヲ代入スルモ, 其ノ差ハ 2π ヨリ小デアルカラ, 之等ヲ代入シタ (5) ノ n 通リノ値ハ皆互ニ相異ナル。次ニ k ガ他ノ任意ノ整數 $k=an+b$, $(0\leqq b\leqq n-1)$ ヲトツタトスレバ $\dfrac{\theta+2k\pi}{n}=\dfrac{a+2b\pi}{n}+2a\pi$ トナリ, 前ノ n 通リノ何レカニ屬スル。依ツテ (5) ノ値ハ n 通リニ限ル。

例 1.　$(1+i)^5$ ノ値ヲ求メヨ。

$$(1+i)^5=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^5=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-4(1+i)$$

例 2.　$(-2+2i)^{\frac{1}{3}}$ ノ値ヲ求メヨ。

$$(-2+2i)^{\frac{1}{3}}=\left\{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{3\pi}{4}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$
$$=\sqrt{2}\left\{\cos\frac{8k\pi+3\pi}{12}+i\sin\frac{8k\pi+3\pi}{12}\right\},\quad (k=0,\ 1,\ 2)$$

$k=0$　トスレバ　$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)=1+i$

$k=1$　トスレバ　$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11\pi}{12}+i\sin\dfrac{11\pi}{12}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}i$

$k=2$　トスレバ　$\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{19\pi}{12}+i\sin\dfrac{19\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}i$

問　　題

次ノ式ノ値ヲ求メヨ。

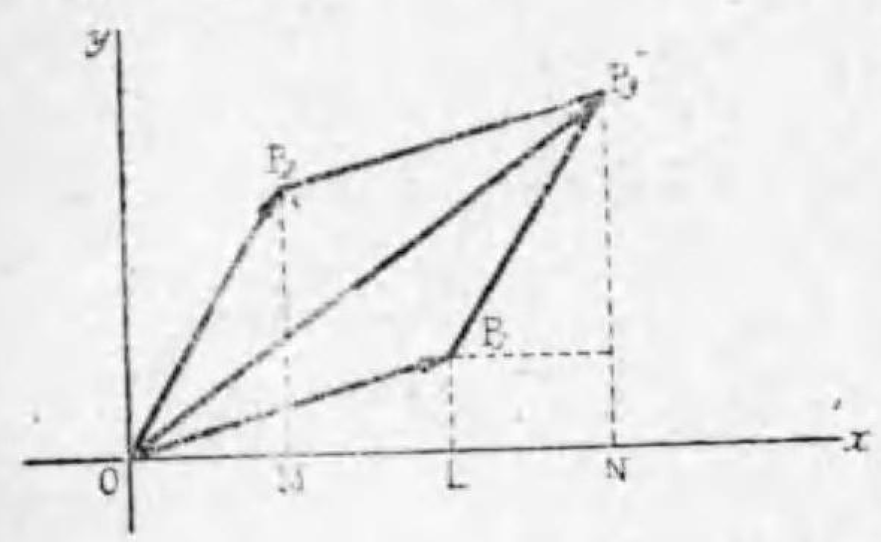
11. $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9$　　12. $(3+\sqrt{3}i)^5$　　13. $\sqrt{i}$

14. $\sqrt[3]{2+2i}$　　15. $\sqrt[3]{i}$

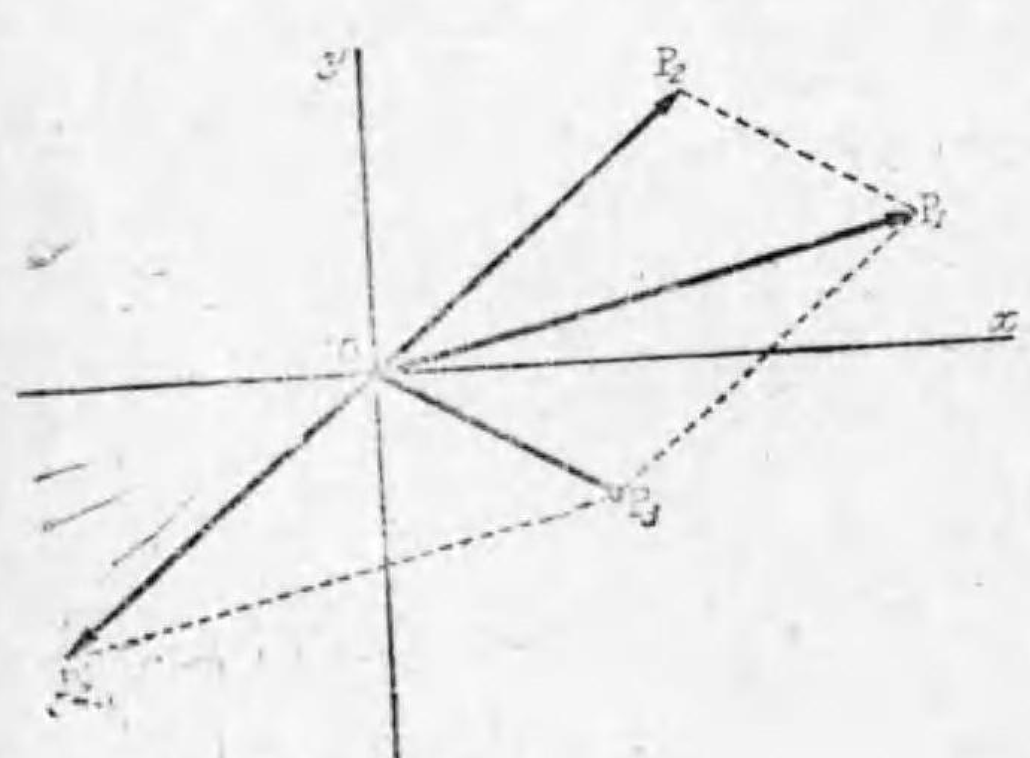
24. 4 圖式加減乘除

與ヘラレタ二ツノ複素數 $Z_1=a_1+b_1i$, $Z_2=a_2+b_2i$ ヲ表ス點ヲ P_1, P_2 トスル。

[1] **加法** $Z_1+Z_2=Z_3$ トスレバ $Z_3=a_1+a_2+(b_1+b_2)i$ トナル。今 OP_1 及ビ OP_2 ヲ二邊トスル平行四邊形ヲ作ルト, O ヲ通ル對角線ノ先端 P_3 ハ Z_3 ヲ表ス。何トナレバ P_1, P_2, P_3 カラ實軸ヘ垂線ヲ引キ其ノ足ヲ夫々 L, M, N トスレバ



$$ON=OL+OM=a_1+a_2$$
$$NP_3=LP_1+MP_2=b_1+b_2$$



依ツテ P_3 ハ $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$ ナル複素數, 即チ (Z_1+Z_2) ヲ表ス。

[2] **減法** Z_1-Z_2 ヲ表ス點ヲ次ニ求メル。

$Z_1-Z_2=Z_1+(-Z_2)$

Z_2 ヲ表ス點 P_2 ノ原點ニ關スル對稱點 P_2' ハ $-Z_2$

ヲ表スカラ, OP_1 及ビ OP_2' ヲ二邊トスル平行四邊形ヲ作ルト, 前述ノ方法ニ依ツテ O ヲ通ル對角線ノ先端 P_3 ガ (Z_1-Z_2) ヲ表ス。

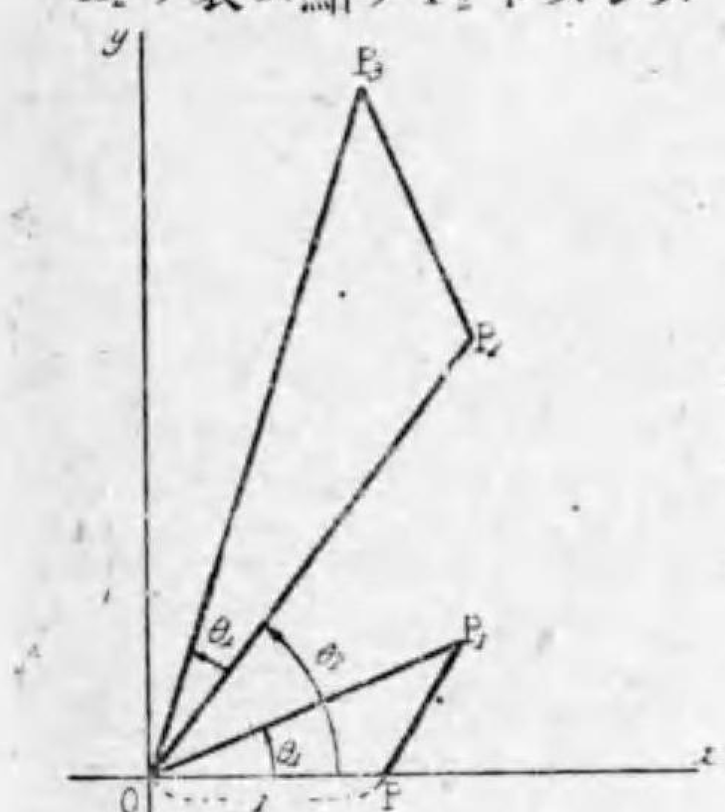
[3] **乘法** 乘法及ビ除法ノ場合ハ極形式ニ依ルノガ便利デアル。

$Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ トスレバ

$$Z_1Z_2=r_1r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$$

Z_1 ヲ表ス點ヲ P_1 トスレバ　$OP_1=r_1$,　$\angle xOP_1=\theta_1$

Z_2 ヲ表ス點ヲ P_2 トスレバ　$OP_2=r_2$,　$\angle xOP_2=\theta_2$



Z_1Z_2 ヲ表ス點ヲ P_3 トスレバ

$OP_3=r_1r_2$,　$\angle xOP_3=\theta_1+\theta_2$

今 Ox 上ニ $OP=1$ ナル如ク點 P ヲ求メ, $\triangle OPP_1$ 及ビ OP_2P_3 ニ就テ考ヘルト,

$\angle P_2OP_3=\angle xOP_3-\angle xOP_2=(\theta_1+\theta_2)-\theta_2=\theta_1$

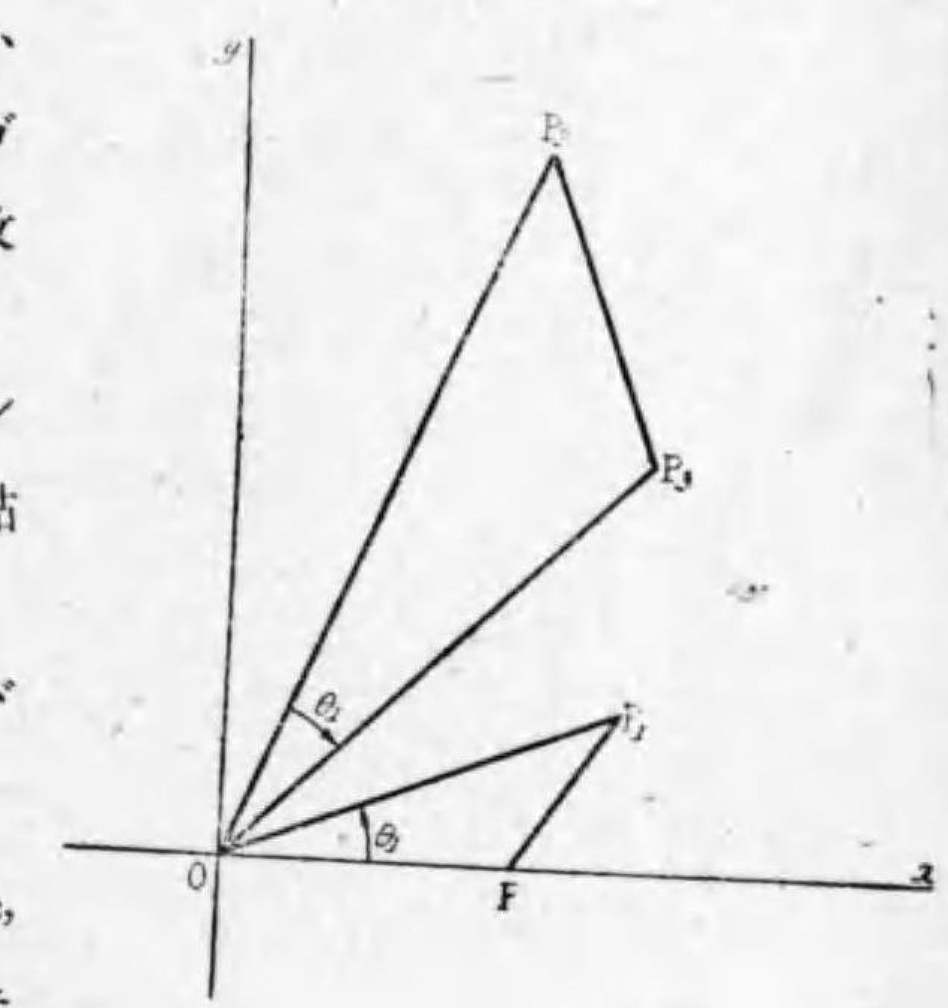
$\therefore$　$\angle POP_1=\angle P_2OP_3$

$PO : OP_1=1 : r_1$

$OP_2 : OP_3=r_2 : r_1r_2=1 : r_1$

$\therefore$　$OP : OP_1=OP_2 : OP_3$

依ツテ $\triangle OPP_1$ ト $\triangle OP_2P_3$ ハ一角相等シク, 且コレヲ夾ム邊ガ比例ヲナスカラ相似形トナル。故ニ Z_1Z_2 ヲ表ス點ヲ求メルニハ, 圖ノヤウニ $\triangle OPP_1$ ト相似ナル $\triangle OP_2P_3$ ヲ作ルト, P_3 ハ求メル點デアル。



[4] **除法** $\frac{Z_2}{Z_1}=Z_3$ トスレバ

$Z_1Z_3=Z_2$

Z_1, Z_2, Z_3 ヲ表ス點ヲ夫々 P_1, P_2, P_3 トスレバ [2] ノ場合ト同様ニ

シテ $\triangle OPP_1$ ト $\triangle OP_3P_2$ ハ相似トナルカラ，乘法ノ場合ト反對ノ方向ニ $\triangle OP_1P$ ト相似ナル $\triangle OP_2P_3$ ヲ作レバ P_3 ハ求メル點デアル。

問 題

16. 複素數 Z_1, Z_2 ヲ表ス點ヲ結ンダ線分ノ中點ヲ複素數デ表セ。

17. 複素數 Z_1, Z_2, Z_3 ヲ表ス點ヲ頂點トスル三角形ノ重心ヲ複素數デ表セ。

24.5 指數函數ト三角函數

複素數 Z ニ關スル無限冪級數 $1+Z+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}+\cdots\cdots$ ヲ e^Z トスル。

卽チ
$$e^Z=1+Z+\frac{Z^2}{2!}+\frac{Z^3}{3!}+\frac{Z^4}{4!}+\frac{Z^5}{5!}+\cdots\cdots \qquad \cdots(6)$$

Z ガ實數ナルトキ成立スルコトハ旣ニ知ル所デアル。

$Z=i\theta$ トオケバ

$$e^{i\theta}=1+i\theta+\frac{(i\theta)^2}{2!}+\frac{(i\theta)^3}{3!}+\frac{(i\theta)^4}{4!}+\frac{(i\theta)^5}{5!}+\cdots\cdots$$
$$=\left(1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\cdots\right)+i\left(\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots\cdots\right)$$

$\therefore$
$$\left.\begin{array}{ll} & e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \\ \theta=-\theta \text{ トオケバ} & e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta \end{array}\right\} \qquad \cdots(7)$$

(7) 式カラ $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$, $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ $\qquad\cdots(8)$

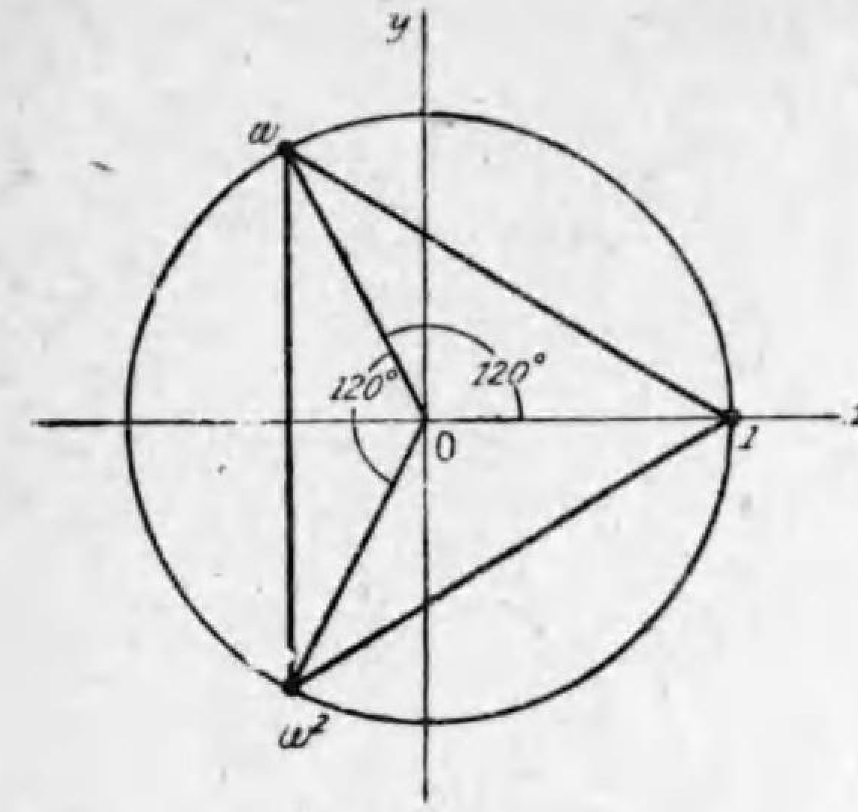
$(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ ダカラ $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ $\qquad\cdots(9)$

$$\left.\begin{array}{l}(re^{i\theta})^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}=\sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} \\ \text{但シ } k=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1\end{array}\right\} \qquad \cdots(10)$$

例 1. $x^3-1=0$ ヲ解ケ。

$$x^3=1 \quad \text{或ハ} \quad x^3=e^{i\cdot 2k\pi}$$

$\therefore$
$$x=e^{i\frac{2k\pi}{3}}, \qquad (k=0,\ 1,\ 2)$$



$k=0$ ナルトキハ
$$x_1=e^0=1$$

$k=1$ ナルトキハ
$$x_2=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\equiv\omega$$

$k=2$ ナルトキハ
$$x_3=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\equiv\omega^2$$

例 2. i ヲ實常數ト見做シテ

$$\int e^{-kx}\cos mx\,dx=\frac{e^{-kx}}{k^2+m^2}(m\sin mx-k\cos mx)$$
$$\int e^{-kx}\sin mx\,dx=\frac{e^{-kx}}{k^2+m^2}(-k\sin mx-m\cos mx)$$

ヲ證明セヨ。

$$\int e^{-kx}(\cos mx+i\sin mx)dx=\int e^{(-k+mi)x}\,dx=\frac{e^{(-k+mi)x}}{-k+mi}$$
$$=\frac{1}{-k+mi}e^{-kx}(\cos mx+i\sin mx)=\frac{k+mi}{-(k^2+m^2)}e^{-kx}(\cos mx+i\sin mx)$$
$$=\frac{e^{-kx}}{k^2+m^2}(m\sin mx-k\cos mx)+i\frac{e^{-kx}}{k^2+m^2}(-k\sin mx-m\cos mx)$$

$\therefore$
$$\int e^{-kx}\cos mx\,dx=\frac{e^{-kx}}{k^2+m^2}(m\sin mx-k\cos mx)$$
$$\int e^{-kx}\sin mx\,dx=\frac{e^{-kx}}{k^2+m^2}(-k\sin mx-m\cos mx)$$

問 題

18. $x^3+1=0$ ヲ解ケ。

19. $x^4+64=0$ ヲ解ケ。

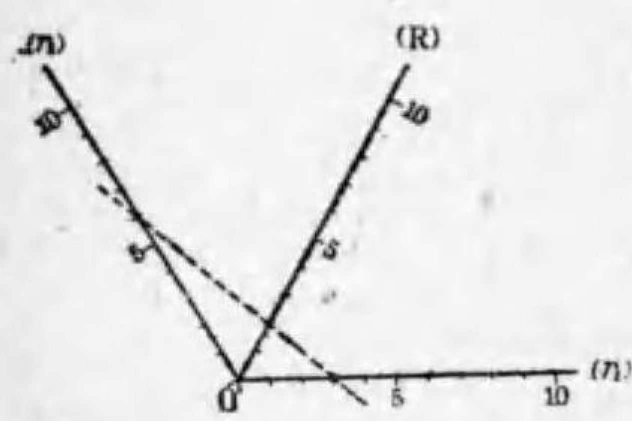
20. $\int_0^\infty e^{-x}\cos 2x\,dx$ 及ビ $\int_0^\infty e^{-2x}\sin 3x\,dx$ ノ値ヲ求メヨ。

第二十五章

計　算　圖　表

25.1　計算圖表

計算圖表 (Nomograph) ト云フノハ，三個以上ノ變數間ノ關係ヲ圖示シタモノデ，必要ニ應ジテ求メタイ變數ノ値ヲ，容易ニ圖上ニ讀ミ取ルトコロノ計算用圖面ノコトデアル。



例ヘバ左圖ハ $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ ノ計算圖表デアッテ，此ノ式ヲ成リ立タセルトコロノ r_1, r_2, R ノ一組ノ値ガ一直線上ニアルヤウニ出來テヰル。從ッテ r_1, r_2, R ノ中ノ何レカ二ツノ値ガ知レレバ，定規ヲ用ヒルコトニヨッテ殘リノモノヲ容易ニ求メルコトガ出來ルノデアル。例ヘバ $r_1=3$, $r_2=6$ ノトキニハ定規ヲ圖ノ點線ノヤウニ當テレバ $R=2$ ガ出テ來ル。

變數間ノ關係式ガ複雜デ，計算ガ面倒デアルトキ，ソシテソノ計算ガ屢々行ハレルモノデアルトキニ，計算圖表ハ非常ニ役立ツモノデアッテ，近時工學ノ諸方面ニ於テ，盛ニソノ應用ヲ見ッヽアルモノデアル。

25.2　函數尺

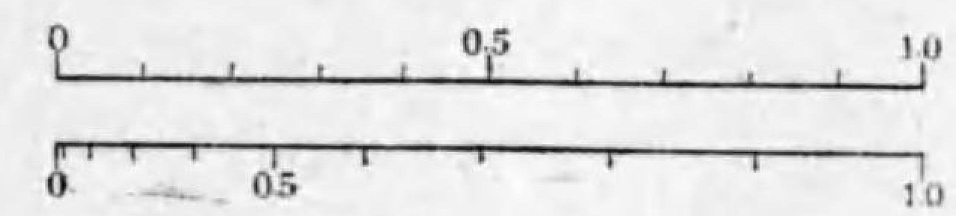
函數 $f(u)$ ガ與ヘラレタトキ，アル單位ヲ定メテ，原點カラ $f(u)$ ノ距離ニアル點ニハ u ト目盛ルヤウニシテ，一ツノ直線上ニ作ッタ尺度ヲ $f(u)$ ノ**函數尺**ト云フ。

$f(u)=u$ ナラバ，ソレハ普通ノ尺度ニ他ナラナイ。ソコデ u ノ函數尺ヲ我々ハ**普通尺**ト呼ブコトニスル。

$f(u)=u^2$ ナラバ

u	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
u^2	0	0.01	0.04	0.09	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1.00

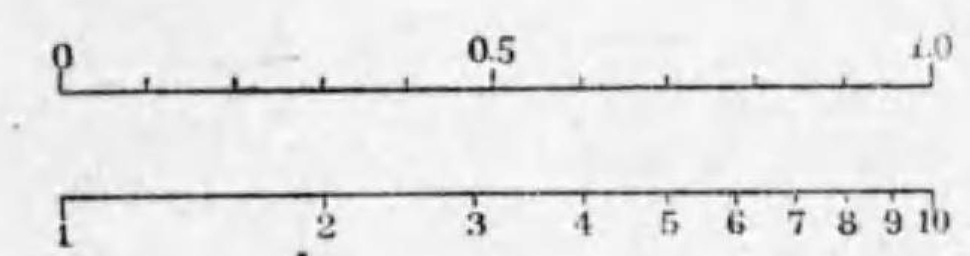
デアルカラ，普通尺ト u^2 ノ函數尺トヲ並ベテミレバ，次ノヤウニナル。



又 $f(u)=\log_{10}u$ ナラバ

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10}u$	0.000	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.000

デアルカラ，普通尺ト $\log_{10}u$ ノ函數尺トヲ並ベテミレバ，次ノヤウニナル。



コノ $\log_{10}u$ ノ函數尺ヲ我々ハ**對數尺**ト云フ。コレハ計算尺ニ用ヒラレテヰルモノデアル。

ナホ $f(u)$ ノ函數尺ヲ 2 倍ニ擴大シタモノハ $2f(u)$ ノ函數尺デアリ，$\frac{1}{2}$ ニ縮小シタモノハ $\frac{1}{2}$ ノ函數尺デアル。

問　　題

長サ 20 cm ノ線分上ニ，次ノ各函數尺ヲ作レ。

1. $u=1$ カラ $u=100$ マデノ $\log_{10}u$ ノ函數尺
   ($u=1, 2, 3, \cdots\cdots, 9, 10, 20, 30, \cdots\cdots, 90, 100$ ヲ目盛レ。)
2. $u=0.1$ カラ $u=1$ マデノ $\log_{10}u$ ノ函數尺

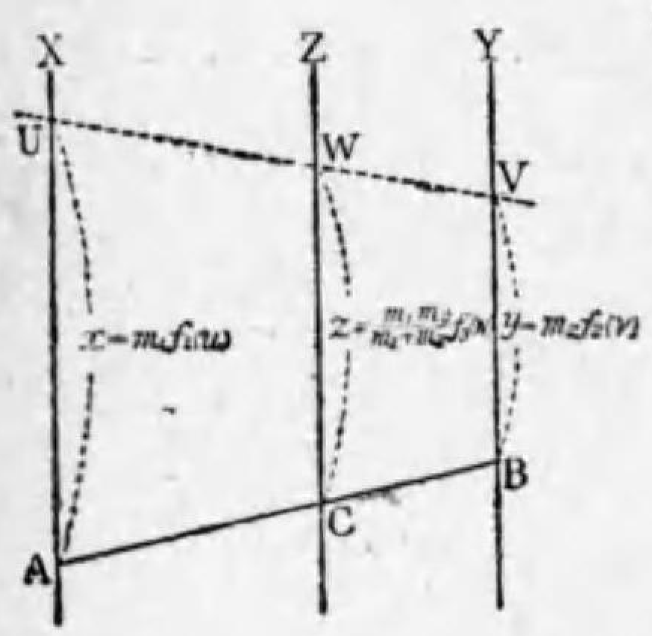
(u=0.1 0.2, 0.3, ……, 0.9, 1.0 ヲ目盛レ。)

3. $u=0$ カラ $u=90$ マデノ $\sin u^\circ$ ノ函數尺

(u=0, 10, 20, ……, 80, 90 ヲ目盛レ。)

25. 3 $f_1(u)+f_2(v)=f_3(w)$ ノ圖表

定直線 AB (コレヲ基線ト云フ) ト夫々 A, C, B ニ於テ交ハル三平行線 AX, CZ, BY ガ任意ノ一直線ト夫々 U, W, V ニ於テ交ツタモノトシ, AU$=x$, BV$=y$, CW$=z$, AC : CB$=m_1:m_2$ トスレバ, W ハ線分 UV ヲ



$m_1:m_2$ ニ分ツ點トナルカラ

$$z=\frac{m_2x+m_1y}{m_1+m_2}$$

トナル。コレヲ變形スレバ

$$\frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}=\frac{z}{\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}} \qquad (1)$$

從ツテ豫メ AX, BY, CZ 上ニ夫々

$m_1f_1(u)$, $m_2f_2(v)$, $\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}f_3(w)$ ナル函數尺ヲ作ツテ置イタトスレバ, 三點 U, V, W ノ目盛ガ夫々 u, v, w ナラバ

$$x=m_1f_1(u), \qquad y=m_2f_2(v), \qquad z=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}f_3(w)$$

トナツテ (1) カラ $f_1(u)+f_2(v)=f_3(w)$ ガ得ラレル。

卽チ $f_1(u)+f_2(v)=f_3(w)$ ノ圖表ヲ作ルニハ

AX 上ニ $\quad x=m_1f_1(u)$

BY 上ニ $\quad y=m_2f_2(v)$

CZ 上ニ $\quad z=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}f_3(w)$

ナル函數尺ヲ夫々作レバヨイ。

但シ C ハ AC : CB$=m_1:m_2$ デアルヤウニ定メラレタモノトスル。

ナホ, 我々ハ三直線 AX, BY, CZ ヲ夫々 u 軸, v 軸, w 軸ト呼ブコトニスル。

25. 4 $f_1(u)f_2(v)=f_3(w)$ ノ圖表

$f_1(u)f_2(v)=f_3(w)$ ノ兩邊ノ對數ヲ考ヘレバ

$$\log_{10}f_1(u)+\log_{10}f_2(v)=\log_{10}f_3(w)$$

トナツテ前節ノ形式トナル。

從ツテ

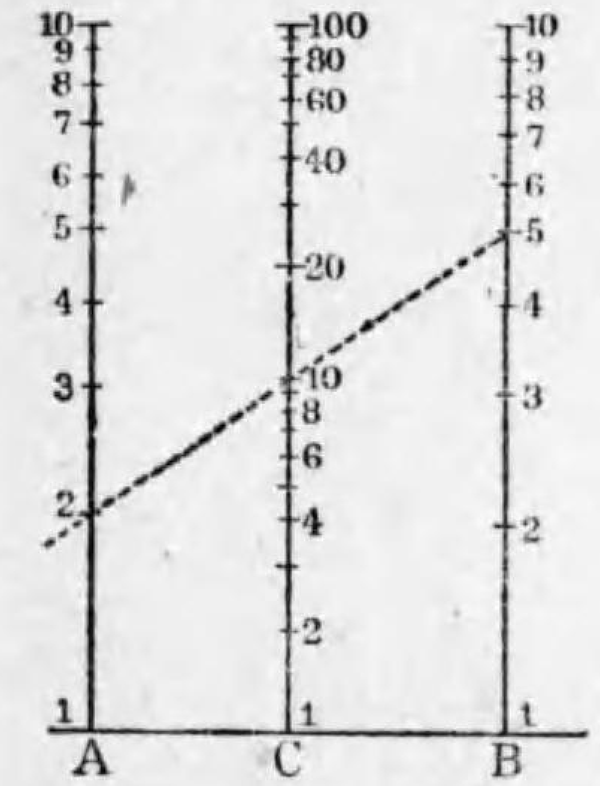
u 軸上ニ $\quad x=m_1\log_{10}f_1(u)$

v 軸上ニ $\quad y=m_2\log_{10}f_2(v)$

w 軸上ニ $\quad z=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\log_{10}f_3(w)$

ナル函數尺ヲ夫々作レバヨロシイ。

例 1. 乘除ノ圖表



$$u\cdot v=w$$

$$f_1(u)=u, \quad f_2(v)=v, \quad f_3(w)=w$$

デアルカラ $m_1=m_2=1$ トスレバ, 三軸上ニ目盛ルベキ函數尺ハ

$$x=\log_{10}u$$

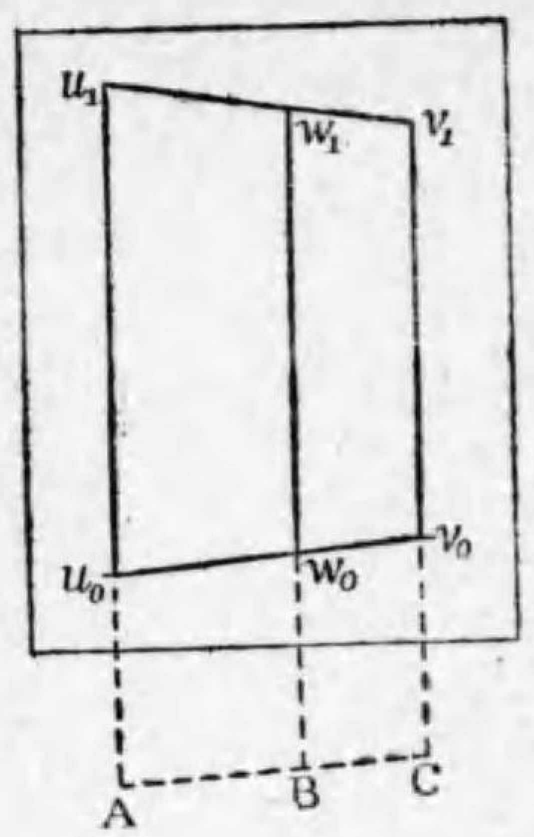
$$y=\log_{10}v$$

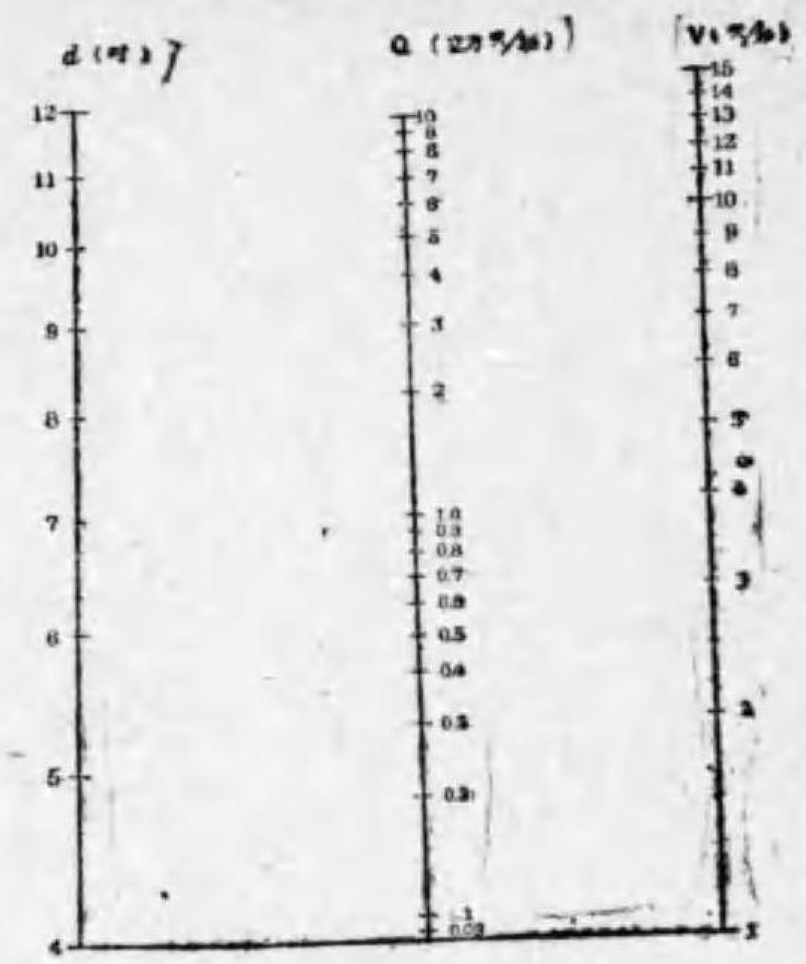
$$z=\frac{1}{2}\log_{10}w$$

トナリ, u 軸及ビ v 軸ノ目盛ハ同一ノ對數尺, ソノ縮尺 $\frac{1}{2}$ ノモノガ w 軸ノ目盛ト云フコトニナル。

圖ノ點線ハ $2\times5=10$ ヲ示シテヰル。コレハマタ $10\div5=2$ (マタハ $10\div2=5$) ヲ示シテモヰル。

サテ上ノ例 1 ニ於テハ $m_1=m_2=1$ ニ採ツタガ, 一般ニハ m_1, m_2 ハ圖面ノ大キサ, 目盛ノ範圍等ヲ考慮シテ適當ニ定メナケレバナラヌモノデアル。又必要ナ目盛ノ範圍如何ニヨツテハ, 上述ノ基線 ($x=0$, $y=0$, $z=0$ ヲ通ルモノ) ガ圖面ノ上ニ表レナイコトガアル。此ノヤウナ場合ニ





ハ左圖ノ如ク $f_1(u_0)+f_2(v_0)=f_3(w_0)$ トナルヤウナ一組ノ目盛 u_0, v_0, w_0 ガ一直線上ニアルヤウニシテ, 上述ノ函數尺ヲ作レバヨイ。

例 2. $Q=\frac{\pi}{576}d^2v$ ノ圖表

毎秒 v 呎ノ速サデ, 内徑 d 吋ノ圓管ヲ流レル空氣ノ量ヲ毎秒 Q 立方呎トスレバ $Q=\frac{\pi}{576}d^2v$ トナルノデアルガ, $4\leqq d\leqq 12$, $1\leqq v\leqq 15$, 圖面ノ大サハ大體幅 22 糎, 高サ 30 糎ト云フ條件ノ下ニ圖表ヲ作ルコトヲ考ヘテミヨウ。

$$\log_{10}\frac{576Q}{\pi}=2\log_{10}d+\log_{10}v$$

トシテ

$$\begin{cases} x=2m_1\log_{10}d \\ y=m_2\log_{10}v \\ z=\dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}\log_{10}\dfrac{576Q}{\pi} \end{cases}$$

トスルノデアルガ, 高サヲ丁度 30 糎ニトレバ

$$\begin{cases} 30=2m_1\{\log_{10}12-\log_{10}4\} \\ 30=m_2\{\log_{10}15-\log_{10}1\} \end{cases}$$

コレヨリ $m_1=31.55$, $m_2=25.51$ トナルガ, 簡單ノタメニ

$$m_1=30,\quad m_2=25$$

ニ採リ, $\mathrm{AC}=22\times\frac{30}{30+25}=12$ (糎), $\mathrm{CB}=22\times\frac{25}{30+25}=10$ (糎) トシテ

$$\begin{cases} x=60\log_{10}d \\ y=25\log_{10}v \\ z=\dfrac{150}{11}\log_{10}\dfrac{576Q}{\pi} \end{cases}$$

ナル函數尺ヲ, $d=4$, $v=1$, $Q=\frac{\pi}{36}$ ガ一直線上ニアルヤウニ作レバ上ノ樣ナ圖表ガ出來ル。

問　　題

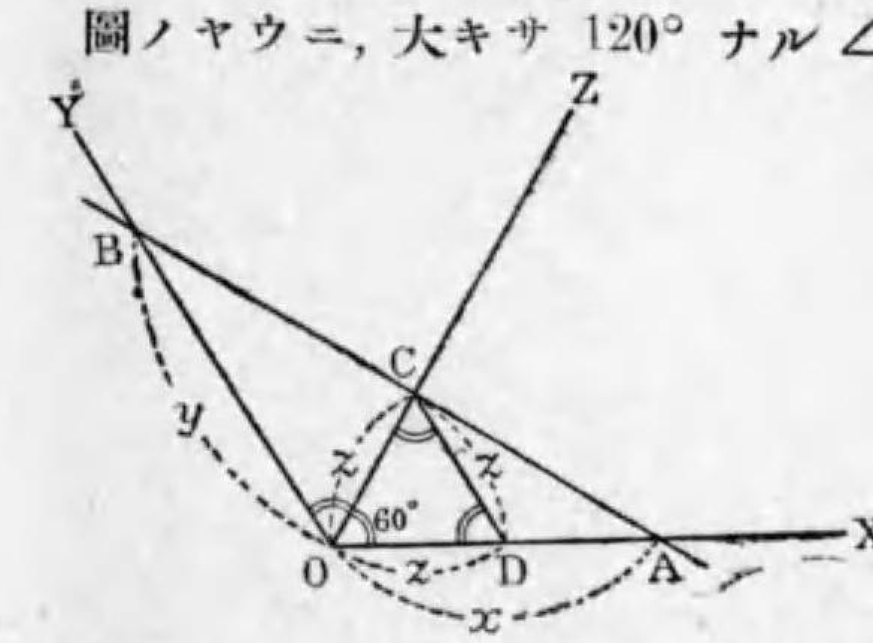
4. $pv^{1.41}=w$ ノ圖表ヲ作レ。　　**5.** $I=\frac{BH^3}{12}$ ノ圖表ヲ作レ。

但シ $0.1\leqq B\leqq 1$, $0.1\leqq H\leqq 1$, 圖面ハ大體高サ 20 糎, 幅 16 糎。

25.5 $\dfrac{1}{f_1(u)}+\dfrac{1}{f_2(v)}=\dfrac{1}{f_3(w)}$ ノ圖表

コレハ $f_1(u)+f_2(v)=f_3(w)$ ノ形式ニ屬スルモノデアルガ, 多クノ場合次ノヤウニ扱フノガ便利デアル。

圖ノヤウニ, 大キサ 120° ナル $\angle\mathrm{XOY}$ ノ二等分線ヲ OZ トシ, 任意ノ一直線ガ OX, OY, OZ ト夫々 A, B, C ニ於テ交ツタモノトシテ, $\mathrm{OA}=x$, $\mathrm{OB}=y$, $\mathrm{OC}=z$ ト置ク。



サテ C カラ BO ニ平行線ヲ引キ, OX トノ交點ヲ D トスレバ

$$\triangle\mathrm{BOA}\backsim\triangle\mathrm{CDA}$$

トナルカラ

$$\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DA}} \qquad (1)$$

デアル。然ルニ △COD ハ正三角形トナルカラ $\mathrm{CD}=\mathrm{OD}=\mathrm{OC}=z$ デアッテ (1) ハ

$$\frac{y}{x}=\frac{z}{x-z}$$

トナリ，コレヲ變形スレバ

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$$

ヲ得ル。故ニ夫々ノ軸上ニ

$$\boldsymbol{x=mf_1(u)},\qquad \boldsymbol{y=mf_2(v)},\qquad \boldsymbol{z=mf_3(w)}$$

ナル函數尺ヲ目盛レバ

$$\frac{1}{f_1(u)}+\frac{1}{f_2(v)}=\frac{1}{f_3(w)}$$

ガ得ラレル。

此ノ形式ノ最簡ノモノハ，$\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{1}{w}$ デアツテ，各軸上ニハ普通尺ヲ目盛レバヨイ。

$u=r_1,\ v=r_2,\ w=R$ トシタモノガ，$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}=\frac{1}{R}$ デアツテ本章ノ始メノ圖デアル。又同ジ圖ハ $r_1=a,\ r_2=b,\ R=f$ ト考ヘレバ，れんずニ關スル一公式

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$$

ノ圖表トモナル。

問　　題

次ノ各圖表ヲ作レ。

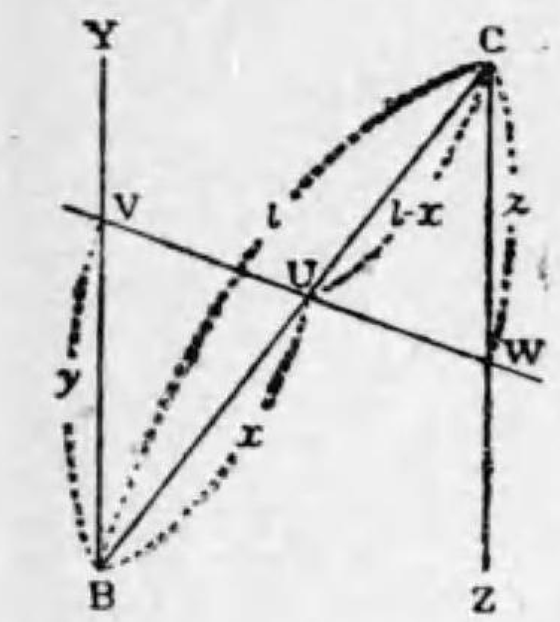
6. $\frac{1}{u^2}+\frac{1}{v^2}=\frac{1}{w^2}$　　**7.** $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$

8. $\frac{1}{R}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}$

25.6 $f_1(u)f_2(v)=f_3(w)$ ノ Z 圖表

普通ハ對數ヲ取ツテ $\log_{10}f_1(u)+\log_{10}f_2(v)=\log_{10}f_3(w)$ トシテ，第 25·4 節ノヤウナ圖表ヲ作ルノデアルガ，コヽニハ **Z 圖表**ト呼バレルモノヲ考

ヘテミヨウ。



與ヘラレタ長サ l ヲ持ツ定線分 BC ガアツテ，B ト C カラ逆方向ニ平行ナル BY ト CZ トガ引カレテキルモノトスル。

今任意ノ一直線ガ BC, BY, CZ ヲ夫々 U, V, W デ截ツタモノトシテ

$$BU=x,\quad BV=y,\quad CW=z$$

ト置ケバ，$\triangle BUV\backsim\triangle CUW$ デアルカラ

$$\frac{y}{z}=\frac{x}{l-x}\tag{1}$$

然ルニ $f_1(u)f_2(v)=f_3(w)$ ハ

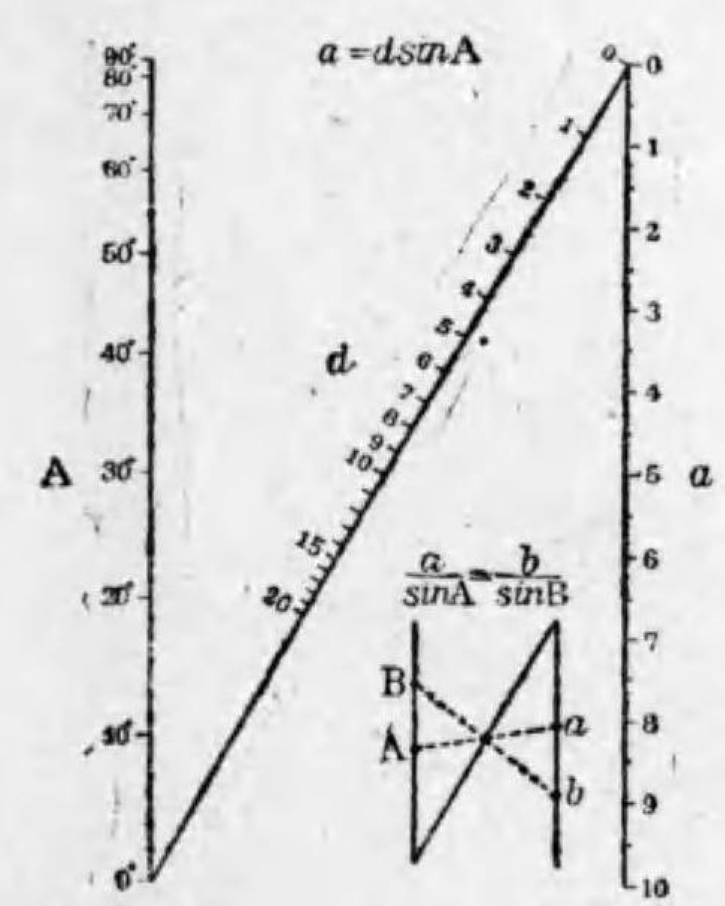
$$\frac{m_1f_2(v)}{m_2f_3(w)}=\frac{m_1}{m_2f_1(u)}\tag{2}$$

ノ形ニ變形出來ルカラ，(1) ト (2) トヲ比較シテ

$$y=m_1f_2(v),\quad z=m_2f_3(w),\quad \frac{x}{l-x}=\frac{m_1}{m_2f_1(u)}$$

ナラバヨイト云フコトガ知レル。

$\frac{x}{l-x}=\frac{m_1}{m_2f_1(u)}$ ヲ x ニ就イテ解ケバ $x=\frac{m_1l}{m_1+m_2f_1(u)}$ ガ得ラレル。



故ニ $f_1(u)f_2(v)=f_3(w)$ ノ圖表ハ

BC 上ニ　$\boldsymbol{x=\frac{m_1l}{m_1+m_2f_1(u)}}$

BY 上ニ　$\boldsymbol{y=m_1f_2(v)}$

CZ 上ニ　$\boldsymbol{z=m_2f_3(w)}$

ナル函數尺ヲ作レバヨイ。

但シ線分 BC ハ長サ l ト云フダケデ傾キ工合ハ任意デアル。

例　$a=d\sin A$ ノ圖表

左圖ハ $x=\frac{10l}{10+d}$, $y=10\sin A$, $z=a$ トシテ畫イタモノデアル。

又此ノ圖表ハ $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ ノ圖表ニモ應用出來ル。

25.7 $\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)}=\dfrac{f_3(w)}{f_4(t)}$ ノ二重 Z 圖表

$$s\,f_1(u)=f_3(w) \qquad (1)$$

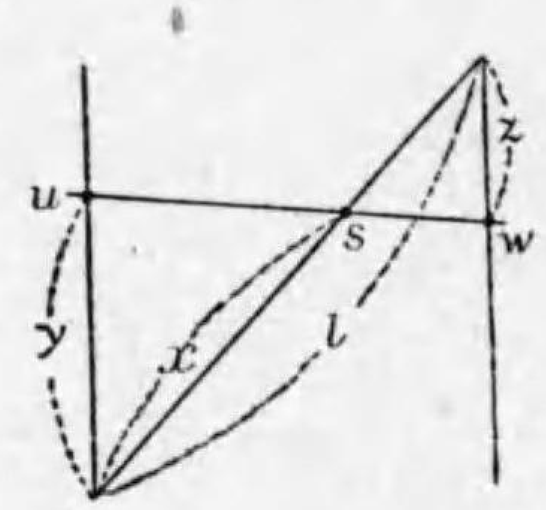
$$s\,f_2(v)=f_4(t) \qquad (2)$$

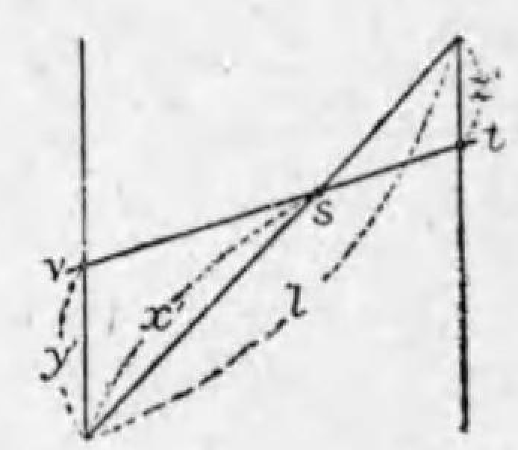
ナル二式ガ成立スレバ

$$\frac{f_1(u)}{f_2(v)}=\frac{f_3(w)}{f_4(t)} \qquad (3)$$

ハ成立スル。

ソコデ，マヅ (1) ト (2) ノ Z 圖表ヲ作ツテ，下ノ甲，乙兩圖表ガ得ラレタモノトスル。



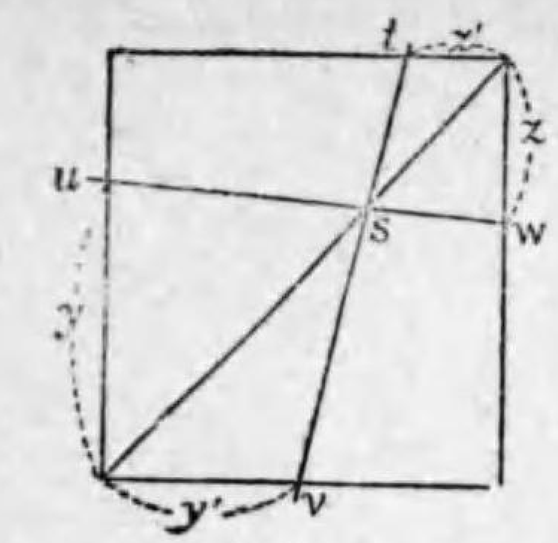


(甲) $\begin{cases} x=\dfrac{m_1 l}{m_1+m_2 s} \\ y=m_1 f_1(u) \\ z=m_2 f_3(w) \end{cases}$ (乙) $\begin{cases} x'=\dfrac{m_1' l}{m_1'+m_2' s} \\ y'=m_1' f_2(v) \\ z'=m_2' f_4(t) \end{cases}$

今 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{m_1'}{m_2'}$ ニ採レバ $x=x'$ トナツテ，兩圖表ノ s 軸ハ同一ノ函數尺トナル。コヽニ於テ乙ノ圖表ヲ裏返シニシタ上デ，兩圖表ノ s 軸ヲ合致サセレバ，丙ノ圖表ガ得ラレル。

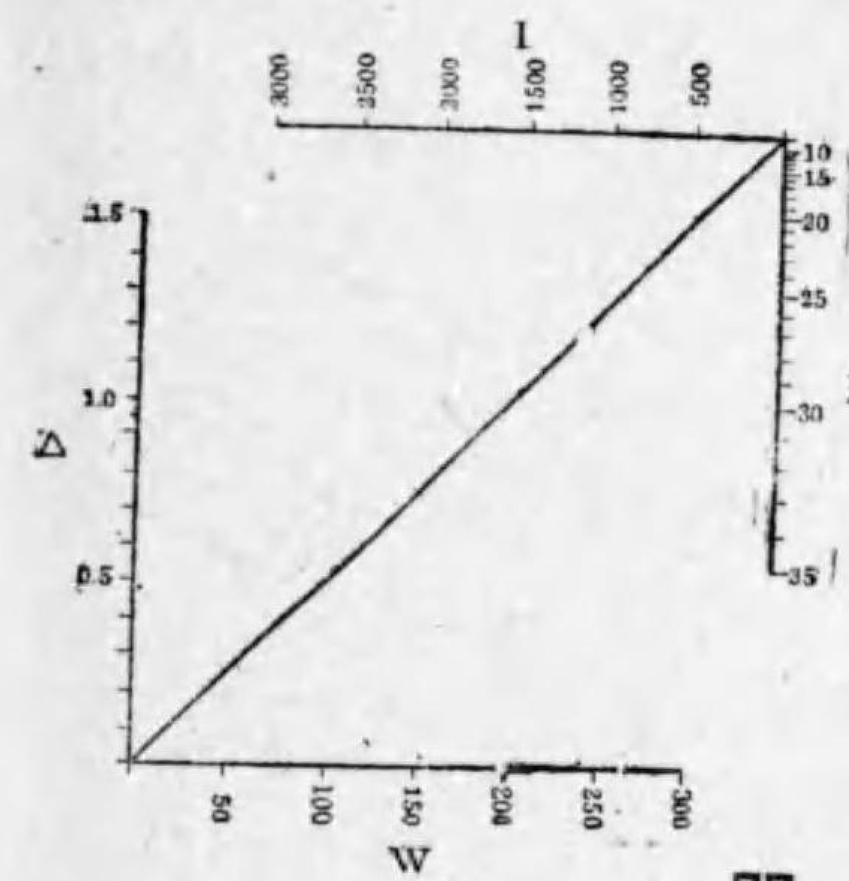
但シ s 軸ノ傾キハ 45° ニシテ置クガヨイ。

コレガ (3) ノ計算圖表デアツテ，此ノ圖表ニ於テハ s 軸ノ目盛ヲ省略スルコトガ出來ル。



(丙) $\begin{cases} y=m_1 f_1(u) \\ z=m_2 f_3(w) \\ y'=m_1' f_2(v) \\ z'=m_2' f_4(t) \\ \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{m_1'}{m_2'} \end{cases}$

例 $\Delta=\dfrac{WL^3}{3333000\,\mathrm{I}}$ ノ圖表



$$\frac{\Delta}{W}=\frac{L^3}{3333000\,I}$$

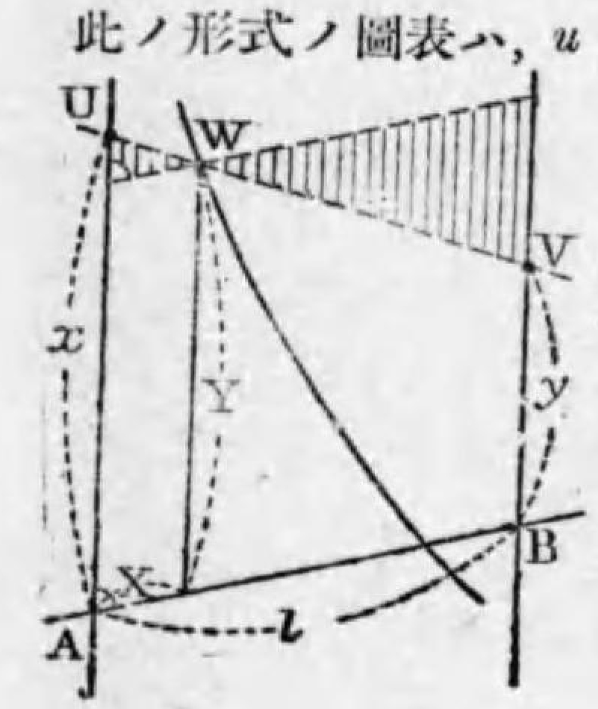
$$\begin{cases} y=m_1\Delta \\ z=m_2 L^3 \\ y'=m_1' W \\ z'=m_2' \ (3333000\ I) \\ \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{m_1'}{m_2'} \end{cases}$$

問　　題

9. $PV=RT$ ノ圖表ヲ作レ。

25.8 $f_1(u)+f_2(v)f_3(w)=f_4(w)$ ノ圖表

此ノ形式ノ圖表ハ，u 軸ト v 軸トガ平行線デ，w 軸ガ曲線デアル。



圖ニ於テ，$x=m_1 f_1(u)$，$y=m_2 f_2(v)$ トシタトキ X, Y ヲドンナ w ノ函數トシタラ $f_1(u)+f_2(v)f_3(w)=f_4(w)$ ガ得ラレルカガ當面ノ問題デアル。

圖ニ於テ，印ノ附ケラレタ二ツノ三角形ハ相似デアルカラ

$$\frac{x-Y}{Y-y}=\frac{X}{l-X}$$

コノ式ヲ x, y ニ就イテ整頓スレバ

$$x+\frac{X}{l-X}y=\frac{lY}{l-X}$$

ガ得ラレル。

従ツテ $x=m_1f_1(u)$, $y=m_2f_2(v)$ ト置クトキ

$$\frac{X}{l-X}=\frac{m_1}{m_2}f_3(w),\qquad \frac{lY}{l-X}=m_1f_4(w)$$

トナツテキルナラバ, 卽チ

$$X=\frac{m_1lf_3(w)}{m_2+m_1f_3(w)},\qquad Y=\frac{m_1m_2f_4(w)}{m_2+m_1f_3(w)}$$

トナツテキルナラバ

$$f_1(u)+f_2(v)f_3(w)=f_4(w)$$

ガ得ラレル。

従ツテ求メル圖表ハ

$$\begin{cases} x=m_1f_1(u) \\ y=m_2f_2(v) \\ X=\dfrac{m_1l\,f_3(w)}{m_2+m_1f_3(w)} \\ Y=\dfrac{m_1m_2f_4(w)}{m_2+m_1f_3(w)} \end{cases}$$

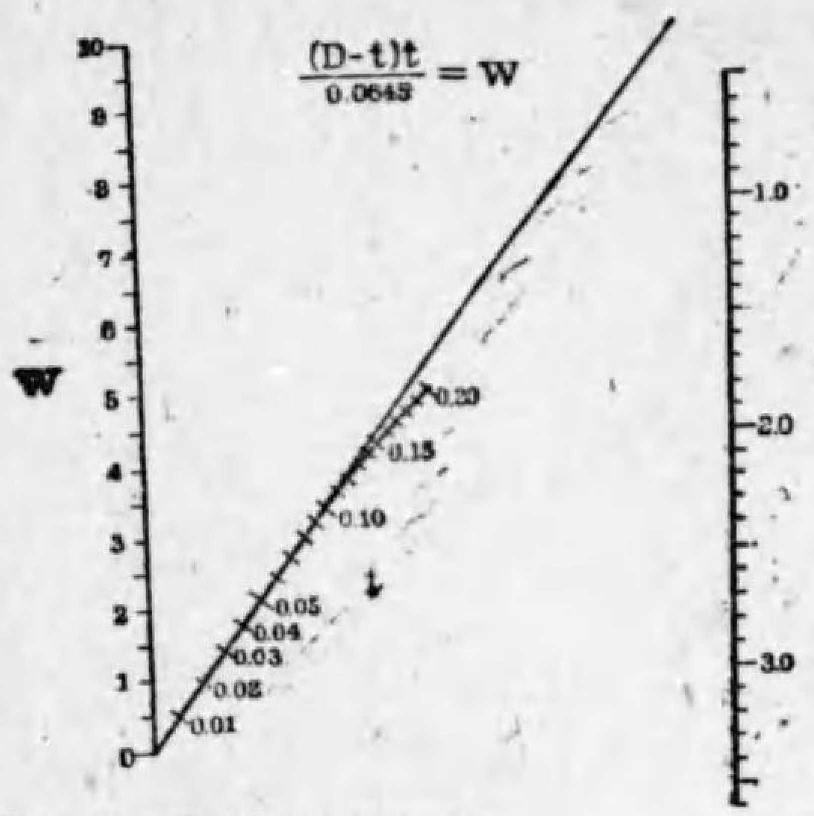
ニ依ツテ作ラレル。コヽニ w 軸ハ, 點 (X, Y) ニ w ト目盛ルコトニシテ, w ノ値ヲイロイロニ變ヘテ畫キ上ゲルノデアル。

例 $\dfrac{(D-t)t}{0.0645}=W$ ノ圖表

次ノ圖ハ $\dfrac{(D-t)t}{0.0645}=W$ ヲ $0.0645W+(-D)t=-t^2$ ト書キ直シ

$$\begin{cases} f_1(W)=0.0645\,W \\ f_2(D)=-D \\ f_3(t)=t \\ f_4(t)=-t^2 \end{cases}$$

ト考ヘテ



$$\begin{cases} x=m_1\times 0.0645\,W \\ y=m_2\times(-D) \\ X=\dfrac{m_1l\,t}{m_2+m_1t} \\ Y=-\dfrac{m_1m_2t^2}{m_2+m_1t} \end{cases}$$

ト置イテ, 作ツタモノデアル。

25.9 圖表ノ組合セ

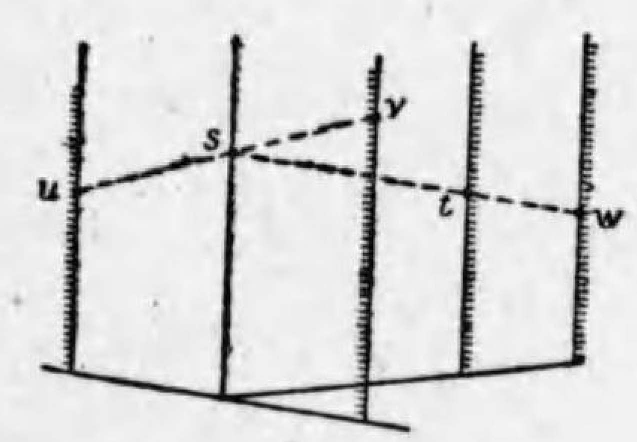
$\dfrac{f_1(u)}{f_2(v)}=\dfrac{f_3(w)}{f_4(t)}$ ノ圖表ハ, 二ツノ Z 圖表ヲ組合セテ作リ得ルコトヲ, 前々節ニ於テ説明シタ。

コヽニハ尚二, 三ノ組合セ方ヲ示サウ。

[1] $f_1(u)+f_2(v)+f_3(w)=f_4(t)$ ノ圖表

$$\begin{cases} f_1(u)+f_2(v)=s & (1) \\ s+f_3(w)=f_4(t) & (2) \end{cases}$$

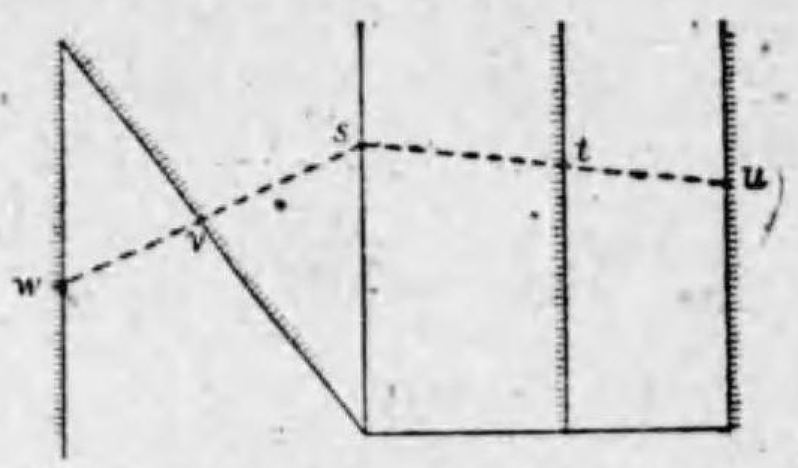
(1), (2) ノ圖表ヲ作ツテ, s 軸ヲ合致サセレバヨイ。但シ s 軸ノ目盛ハ施スニ及バヌ。



[2] $f_1(u)+f_2(v)f_3(w)=f_4(t)$ ノ圖表

$$\begin{cases} f_1(u)+s=f_4(t) & (1) \\ s=f_2(v)\,f_3(w) & (2) \end{cases}$$

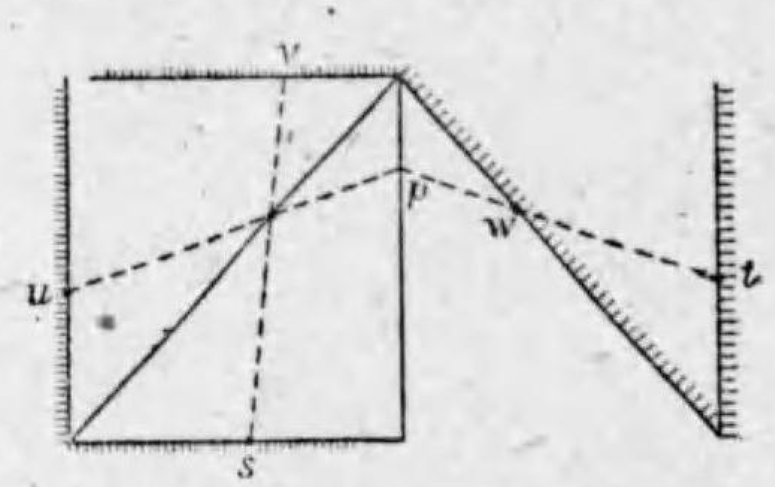
次ノ圖ノヤウニ組合セレバヨイ。



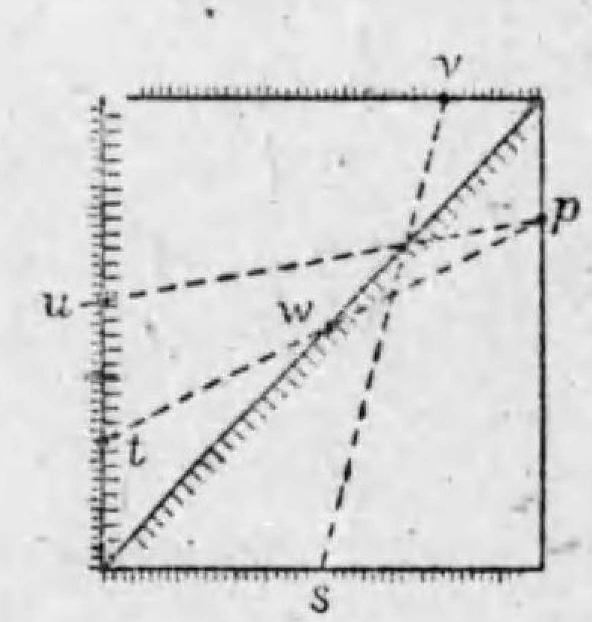
[3] $f_1(u)f_2(v)f_3(w)=f_4(s)f_5(t)$ ノ圖表

$$\begin{cases} \dfrac{f_1(u)}{f_4(s)}=\dfrac{p}{f_2(v)} & (1) \\ p\,f_3(w)=f_5(t) & (2) \end{cases}$$

ノ組合セト考ヘテ次ノ圖ノ様ニスルノモ一法デアル。



此ノ圖ヲ p 軸ヲ折リ目トシテ折リ重ネテ,次ノ様ニスレバ圖面ヲ小サク纏メルコトガ出來ル。



第二十六章

實 驗 式

26.1 實驗式

理學及ビ工學ノ研究ニ於テ，二量ノ測定値ノ間ノ關係ヲ求メル場合ガ頗ル多イ。例ヘバ物體ノ體積ト溫度，自由落下體ノ距離ト時間，針金ノ荷重ト伸長等ノ如キハ關係ヲ求メルベキ二量ノ數例デアル。

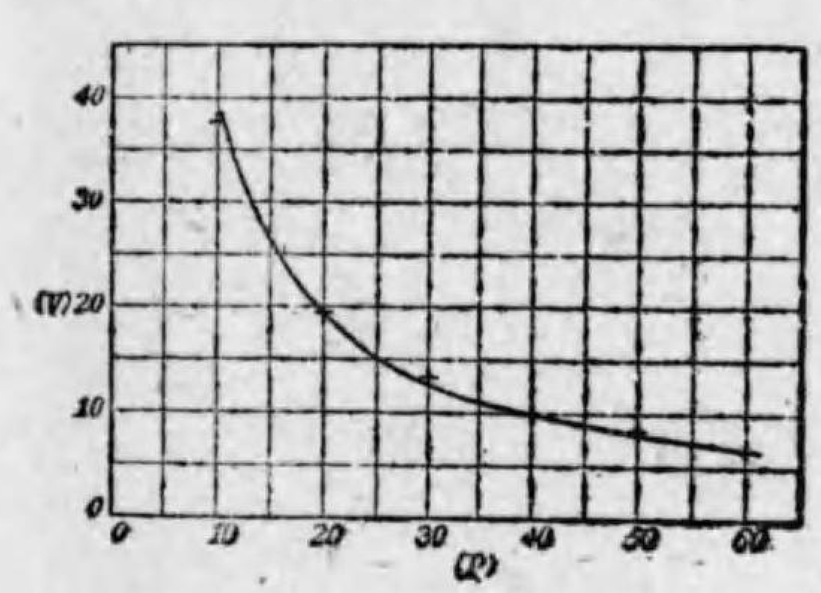
[1] **表** 同樣ノ條件ノ下ニ於テナセル二量ノ測定結果ハ通常**表**デ表スコトガ出來ル。

次ニ掲ゲタノハ毎平方吋ニ對スル飽和水蒸氣ノ壓力 P ト其ノ 1 封度ノ體積 V トノ間ノ關係ヲ示スモノデアル。

P	10	20	30	40	50	60
V	37.80	19.72	13.48	10.29	8.34	6.62

[2] **曲線** 上表ノ結果ハ方眼紙上ニ於テ横線ニ P ヲ取リ，縱線ニ V ヲ取リ，測定値ヲ點トシテ表シ，次ニ各點ニ出來ルダケ近接スルヤウニ滑カナ曲線ヲ描イテ次圖ノ如ク圖示スルコトガ出來ル。

[3] **實驗式** 下圖ニ於ケル如ク,略々各點ヲ通ジテ滑カナ曲線ヲ描キ得ル場合ニハ兩測定値ノ間ニ存在スル關係ヲ表ス方程式ヲ求メルコトガ出來ルガ，此ノ方程式ヲ通常**實驗式**ト稱スル。



勿論測定値ハ近似數デアル。故ニ之ヲ表ス點モ，曲線モ，實驗式モ二量間ノ關係ヲ近似的ニ表スモノデアル。圖

上ノ各點ニ近接シテ無數ノ曲線ヲ描キ得ルカラ，測定値間ノ關係ヲ近似的ニ表ス實驗式モ亦無數ニアルコトハ明カデアル。然シ是等ノ式ノ中ニ於テ最モ良ク所求ノ關係ヲ表スモノハ實驗ノ性質及ビ曲線ノ形狀ヨリ自然ニ判ルモノデアル。

[4] **實驗式ノ作製** 實驗式ヲ作製スルニハ圖上ノ各點ガ略々一直線上ニアルカ否カヲ見ル。若シ一直線上ニアレバ所求ノ式ハ

$$y=a+bx$$

ナル一次式デ表サレル。

若シ又各點ガ一直線上ニ無クシテ，直線ニ對シテ規則的ニ偏倚シテ居ルトキハ曲線ノ形狀ヲ見テ直チニ拋物線式，指數函數式，三角函數式等ノ何レヲ採用スベキカヲ推定スル。

此ノ場合ニハ茲ニ述ベル**直線化ノ方法**ニ依ツテ推定セル方程式ノ形式ノ正否ヲ檢査スルガ良イ。

即チ推定セル方程式ヲ

$$f(y)=a+b\,\varphi(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ノ如ク變形シ，又 $Y=f(y)$ 及ビ $X=\varphi(x)$ トシテ

$$Y=a+bX \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

ナル形ニ變ジ，次ニ X, Y ヲ座標トシテ點ヲ描キ，是等ノ諸點ガ大略一直線上ニアルカヲ檢査スル。若シアレバ此ノ直線ハ (2) ニ依ツテ表サレ，從ツテ原曲線ハ (1) ニ依ツテ表サレルコトガ確實ニナル。此ノ直線化ノ方法ハ今後屢々適用サレル。

[5] **常數ノ決定** 既ニ近似方程式ヲ見出シタトキハ式中ニアル常數ヲ決定セネバナラヌ。

是ニ使用サレル主ナル方法ハ次ノ三種デアル。

{*1*} **選點法** (Method of selected points)

{*2*} **平均法** (Method of averages)

{*3*} **最小二乘法** (Method of least squares)

{*1*} ハ最モ簡單ナモノデアルガ實際問題ニ對シテハ是ダケデ十分ナ場合ガ多イ。{*2*} ハ稍々計算ヲ要スルガ，更ニ精密ナ結果ヲ與ヘル。

{*3*} ハ三法中最モ勞多キモノデアルガ最モ精密ナ結果ヲ與ヘルモノデアル。

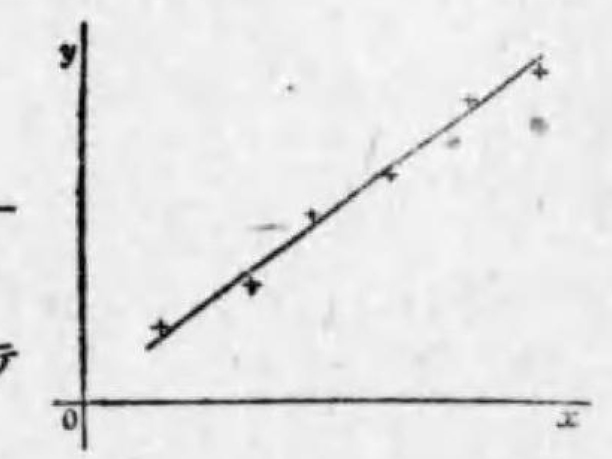
26.2 直線 $y=a+bx$

今實驗ノ結果トシテ次表ノ數値ガ得ラレタトシ，是等ノ點ヲ圖ニ表ストキ，下圖ノ如ク殆ド一直線上ニアルモノトスレバ，實驗式ハ

$$y=a+bx \qquad (1)$$

ナル形狀ヲ持ツト見做スベキデアル。

x	x_1	x_2	x_3	……	x_n
y	y_1	y_2	y_3	……	y_n



然ルトキハ前節ノ三法ノ何レカヲ使用シテ二個ノ常數 a, b ヲ決定セネバナラヌ。

[1] **選點法** せるろいど製ノ定規ヲ用ヒテ，實驗ヨリ得タ點ガ成ルベク直線ノ兩側ニ同數アル如ク適當ニ直線ヲ描キ，次ニ其ノ直線上ニ任意ノ二點 (X_1, Y_1), (X_2, Y_2) ヲ取ツテ其ノ座標ヲ讀定シ，之ヲ上式ニ代入シテ

$$Y_1=a+bX_1 \qquad (2)$$

$$Y_2=a+bX_2 \qquad (3)$$

ヲ得，(2) ト (3) ヲ a, b ニ關スル聯立方程式トシテ解イテ a, b ヲ決定スルノガ**選點法**デアル。

[2] **平均法** a, b ヲ決定スルニハ二個ノ方程式ガ必要デアル。測定セル點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), …… ヨリ曲線ニ至ル上下ノ距離ヲ殘差 (Residual) ト稱スルガ，全數 n 組ノ測定値ヲ略々同數ノ二群ニ分ケ，各群ニツキ殘差ノ和ヲ 0 ト置ケバ

$$\sum_{k=1}^{l}(y_k-a-bx_k)=0 \quad 又ハ \quad \sum_{k=1}^{l}y_k=la+b\sum_{k=1}^{l}x_k \qquad (4)$$

$$\sum_{k=l+1}^{n}(y_k-a-bx_k)=0 \quad 又ハ \quad \sum_{k=l+1}^{n}=(n-l)a+b\sum_{k=l+1}^{n}x_k \qquad (5)$$

此ノ (4) ト (5) ヲ a, b ニ關スル聯立方程式トシテ解キ, a, b ヲ決定スルノガ**平均法**デアル。

[3]　**最小二乘法**　測定セル點 (x_1, y_1), (x_2, y_2), …… ガ上式ノ直線上ニアルトスレバ, 殘差

$$\Delta_1=y_1-(a+bx_1), \quad \Delta_2=y_2-(a+bx_2), \quad \cdots\cdots$$

ハ 0 トナルコトハ勿論デアルガ, 實際問題ニ於テハ是等ノ測定セル點ハ必ズシモ直線上ニ無イカラ, Δ_1, Δ_2, …… ハ一般ニ 0 トハナラヌ。

然ルニ誤差ノ理論ニ於ケル重要ナル原則, **最小二乘法**ニ依レバ

多數ノ測定ノ結果 (x_1, y_1), (x_2, y_2), …… (x_n, y_n) ヨリ $y=a+bx$ ニ適合スル常數 a, b ノ最近眞値ヲ求メルニハ, 各點ニ於ケル殘差ノ二乘ノ和ヲシテ最小ナラシメルヤウニセネバナラヌ,

ノデアル。即チ

$$\Delta_1^2+\Delta_2^2+\cdots\cdots+\Delta_n^2=(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n)^2 \quad (6)$$

ヲ極小ナラシメルヤウニ a, b ヲ決定スレバ, 最モ正確ナ實驗式ガ得ラレルノデアル。然ルニ (6) ハ a, b ナル二變數ノ函數デアルカラ, ソレヲ極小ナラシメルベキ a, b ノ値ニ對シテ (6) ノ a 及ビ b ニ關スル偏微係數ハ 0 デアル。故ニ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a}\{(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n)^2\}=0\\ \frac{\partial}{\partial b}\{(y_1-a-bx_1)^2+(y_2-a-bx_2)^2+\cdots\cdots+(y_n-a-bx_n)^2\}=0\end{aligned}\right\}$$

即チ

$$\left.\begin{aligned}-2(y_1-a-bx_1)-2(y_2-a-bx_2)-\cdots\cdots-2(y_n-a-bx_n)=0\\ -2x_1(y_1-a-bx_1)-2x_2(y_2-a-bx_2)-\cdots\cdots-2x_n(y_n-a-bx_n)=0\end{aligned}\right\}$$

或ハ

$$na+[x]b=[y] \qquad (7)$$

$$[x]a+[x^2]b=[xy] \qquad (8)$$

但シ　$[x]=x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n$,　$[y]=y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n$

$[x^2]=x_1^2+x_2^2+\cdots\cdots+x_n^2$,　$[xy]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots\cdots+x_ny_n$

トスル。

此ノ (7), (8) ノ聯立方程式ヲ解イテ a, b ノ値ヲ決定スレバ次ノ如クナル。

$$a=\frac{[x][xy]-[y][x^2]}{[x]^2-n[x^2]} \qquad (9)$$

$$b=\frac{[x][y]-n[xy]}{[x]^2-n[x^2]} \qquad (10)$$

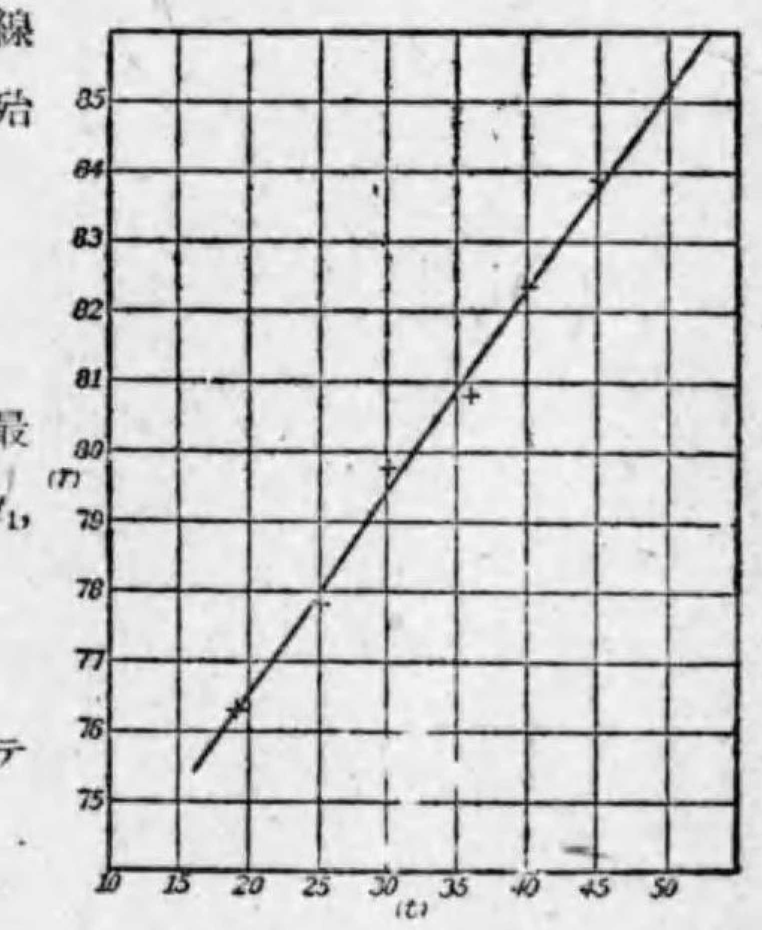
例　直徑 0.3667 吋, 長サ 30.55 吋ノ銅棒ノ溫度ト抵抗トノ關係ヲ測定スルタメニ實驗ヲ行ツテ次表ノ如キ結果ヲ得タトシテ實驗式ヲ求メヨ。但シ t ハ溫度 (攝氏) デアツテ, r みくろおーむハ棒ノ抵抗デアルトスル。

t	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
r	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85,10

上表ノ結果ヲ方眼紙上ニ於テ橫線ニ t ヲ取リ, 縱線ニ r ヲ取リ, 測定値ヲ點トシテ表セバ, 是等ノ點ハ殆ド一直線上ニアルコトヲ知リ得ルカラ, 實驗式ヲ

$$r=a+bt \qquad (11)$$

ト假定シ, 兩常數 a, b ヲ決定ショウ。



選點法　前述ノ如クせるろいど製ノ定規ヲ用ヒ, 最良直線ノ近似位置ヲ定メ, 次ニ其ノ直線上ニ二點 (t_1, r_1), (t_2, r_2) ヲ取リ, 其ノ座標ガ

$$t_1=20, \ r_1=76.45 \quad 及ビ \quad t_2=48, \ r_2=84.60$$

デアルトスル。之ヲ $r=a+bt$ ナル方程式ニ代入シテ

$$76.45=a+20b \qquad (12)$$

$$84.60=a+48b \qquad (13)$$

ヲ得, (12), (13) ヲ a, b ニ關スル聯立方程式トシテ解イテ

$$a=70.63, \quad b=0.291$$

ヲ求メ, 所求ノ實驗式トシテ

$$r=70.63+0.291t \tag{14}$$

ヲ得ルノデアル。

平均法 前記ノ表ノ 7 組ノ測定値ヲ初メノ 4 組ト後ノ 3 組ニ分ケ，各組ニツイテ和ヲ求メレバ

$$\sum_{k=1}^{l} y_k = la + b\sum_{k=1}^{l} x_k$$

及ビ

$$\sum_{k=l+1}^{n} y_k = (n-l)a + b\sum_{k=l+1}^{n} x_k$$

ハ

$$314.65=4a+110.2b,\quad 251.35=3a+135.1b$$

トナル。コレヨリ

$$a=70.59,\quad b=0.293$$

ヲ得ル。故ニ所求ノ實驗式トシテ

$$r=70.59+0.293t \tag{15}$$

ヲ得ルノデアル。

最小二乗法 此ノ方法ニヨレバ a, b ヲ決定スル方程式ハ

$$[r]=7a+[t]b,\quad [rt]=[t]a+[t^2]b$$

トナル。然ルニ表ヨリ判ル如ク，

$$[r]=566.00,\quad [t]=245.3,$$
$$[rt]=20044.50,\quad [t^2]=9325.83$$

デアルカラ，是等ヲ上式ニ代入スレバ

$$566.00=7a+245.3b,$$
$$20044.50=245.3a+9325.83b$$

是ヨリ

$$a=70.76,\quad b=0.288$$

ヲ得ル。依ツテ實驗式トシテ

$$r=70.76+0.288t \tag{16}$$

ヲ得ルノデアル。

以上三種ノ異ナレル方法ニ依ツテ三個ノ實驗式ヲ得タノデアルガ，此ノ (14), (15), (16) ニ依ツテ r ヲ計算スレバ，測定値ト計算値トガ何レノ實驗式ヲ用ヒタ場合ニモ非常ニ良ク一致スルコトヲ知ルノデアル。

問 題

1. 線輪ノ抵抗ト溫度トノ關係ヲ測定スルタメニ實驗ヲ行ツテ次表ノ如キ結果ヲ得タトシテ實驗式ヲ求メヨ。但シ r ハ線輪ノ抵抗 (おーむ) デ，θ ハ攝氏デ測ツタ線輪ノ溫度デアルトスル。

r	10.421	10.939	11.321	11.799	12.242	12.668
θ	10.50	29.49	42.70	60.01	75.51	91.05

2. 長サ 8 吋，直徑 0.748 吋ナル鐵棒ヲ吊シ，其ノ端ニ W ナル重量ヲ加ヘタトキ，此の棒ガ E 吋ダケ延ビタトスレバ，實驗ノ結果ハ次表ノ如クデアルト云フ。W ト E トノ關係ヲ示ス實驗式ヲ求メヨ。

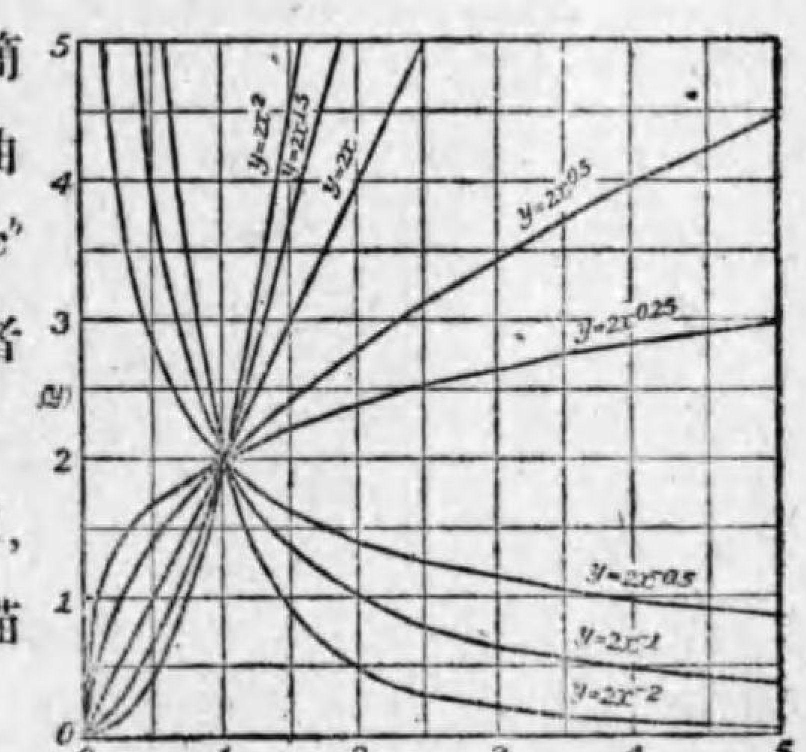
W	0	1	2	3	4	5	6
E	0	0.0014	0.0027	0.0040	0.0055	0.0068	0.0082

3. 攝氏 $\theta°$ ニ於テ水 100 瓦ノ中ニ溶解スル鹽化加里ノ量ヲ m 瓦トスレバ，實驗ノ結果ハ次表ノ通リデアル。θ ト m トノ關係ヲ示ス實驗式ヲ作製セヨ。

θ	0	20	40	60	80	100
m	28.5	39.7	49.8	59.2	69.5	79.5

26. 3 簡單ナ拋物線狀及ビ双曲線狀ノ曲線 $y=ax^b$

多數ノ測定值ヲ近似的ニ表ス最モ簡單ナ曲線ハ拋物線狀又ハ双曲線狀ノ曲線デアル。其ノ方程式ハ共ニ $y=ax^b$ デアルガ，唯 b ノ正，負ニヨツテ前者トナリ，後者トナルノデアル。



$y=ax^b$

次圖ハ $a=2$ トシ，$x=-2,\ -1,\ -0.5,\ -0.25,\ 0.5,\ 1,\ 1.5,\ 2$ トシテ描イタ曲線ヲ示スモノデアル。

此ノ圖ニ依ツテ明白ナル如ク，拋物

線狀曲線ハ總テ點 $(0, 0)$ 及ビ $(1, a)$ ヲ通過シ，x ガ增加スレバ，y モ是ニ從ツテ增加スル。然シ双曲線狀曲線ハ皆點 $(1. a)$ ヲ通過スルガ，橫軸ヲ漸近線トシ，且 x ガ增加スレバ y ハ減少スルコトニ注意スル必要ガアル。

曲線 $y=ax^b$ ガ多數ノ測定値ヲ近似的ニ表シ得ル場合ニハ此ノ方程式ノ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log_{10} y=\log_{10} a+b\log_{10} x$$

トナル。今 $X=\log_{10} x$ 及ビ $Y=\log_{10} y$ ト置ケバ，此ノ式ハ次ノ如クナル。

$$Y=\log_{10} a+bX \qquad (1)$$

(1) ハ X 及ビ Y ニツイテ一次式デアルカラ (X, Y) 卽チ $(\log_{10} x, \log_{10} y)$ ノ曲線ヲ描ケバ略々一直線ヲ得ル筈デアル。

故ニ測定値ガ $y=ax^b$ ナル曲線ニテ近似的ニ表サレルカ否カヲ檢査スルニハ，先ヅ (x, y) ノ曲線ヲ描キ，コレガ上圖ノ曲線ニ類似スルカヲ調べ，若シ類似スルコトヲ知ツタトキハ更ニ $(\log_{10} x, \log_{10} y)$ ノ曲線ヲ描キ，一ツノ直線ガ得ラレルカ否カヲ見レバ良イノデアル。

普通ノ方眼紙ニ $(\log_{10} x, \log_{10} y)$ ヲ描ク代リニ**對數方眼紙**上ニ (x, y)

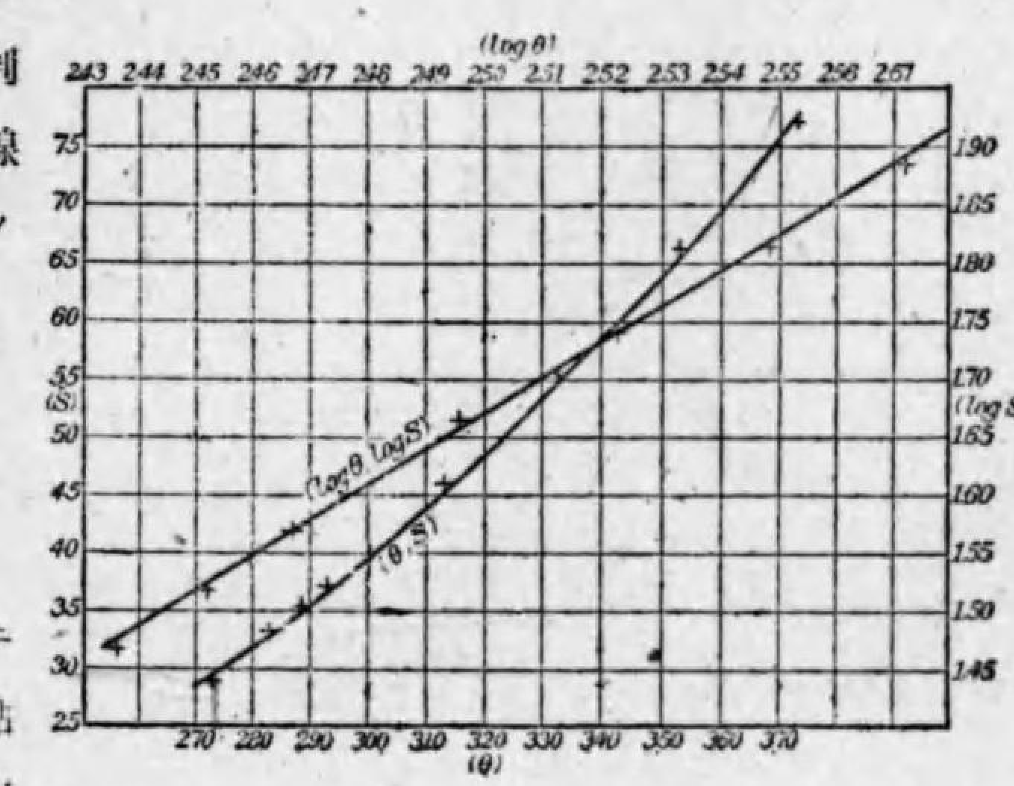
θ	S	$\log_{10}\theta$	$\log_{10} S$	S_e
273	29.4	2.4362	1.4684	29.7
283	33.3	2.4518	1.5224	33.2
288	35.2	2.4594	1.5465	35.0
293	37.2	2.4669	1.5705	37.0
313	45.8	2.4955	1.6609	45.3
333	55.2	2.5224	1.7419	54.9
353	65.6	2.5478	1.8169	65.7
373	77.3	2.5717	1.8882	77.9

ヲ描イテモ良イ。

斯クシテ得ラレタ直線ノ方程式ヲ前記三種ノ方法ノ何レカニ依ツテ定メレバ，從ツテ常數 a, b ハ決定セラレ，所求ノ實驗式ガ得ラレル。

例 1. 前頁ノ表ハ種々ノ絕對溫度 $\theta°$ ニ於テ無水鹽化あんもにうむガ 100 瓦ノ水中ニ溶解シテ飽和スル量 S 瓦ヲ示スモノデアル。是ニ依ツテ θ ト S トノ關係ヲ表ス實驗式ヲ作レ。

右圖ニ示ス如ク (θ, S) ノ曲線ヲ描ケベ拋物線狀曲線デアルコトガ判ル。ソコデ $(\log_{10}\theta, \log_{10} S)$ ノ曲線ヲ描ケバ略々一直線トナリ，推定ノ誤デ無イコトガ明白ニナツタカラ，次ノ如ク置ク。



$$S=a\theta^b$$

又ハ　$\log_{10} S=\log_{10} a+b\log_{10}\theta$

次ニ上式ノ常數ヲ決定スルタメニ先ヅ選點法ヲ應用シ，直線上ニ二點ヲ取リ，其ノ座標ガ次ノ通リニ算出サレタトスル。

$$\log_{10}\theta=2.445, \qquad \log_{10} S=1.50$$

$$\log_{10}\theta=2.555, \qquad \log_{10} S=1.84$$

コレヨリ

$$1.50=\log_{10} a+2.445b$$

$$1.84=\log_{10} a+2.555b$$

$$\therefore \qquad b=3.09, \qquad \log_{10} a=-6.0550=\overline{7}.9450$$

$$\therefore \qquad a=0.000000881$$

$$\therefore \qquad \log_{10} S=\overline{7}.9450+3.09\log_{10}\theta$$

從ツテ實驗式ハ　$S=0.000000881\,\theta^{3.09}$

此ノ式ヨリ S ノ各値ヲ計算シ，コレヲ測定値ト比較スレバ，此ノ式ガ可ナリ正確デアルコトヲ知ルコトガ出來ル。

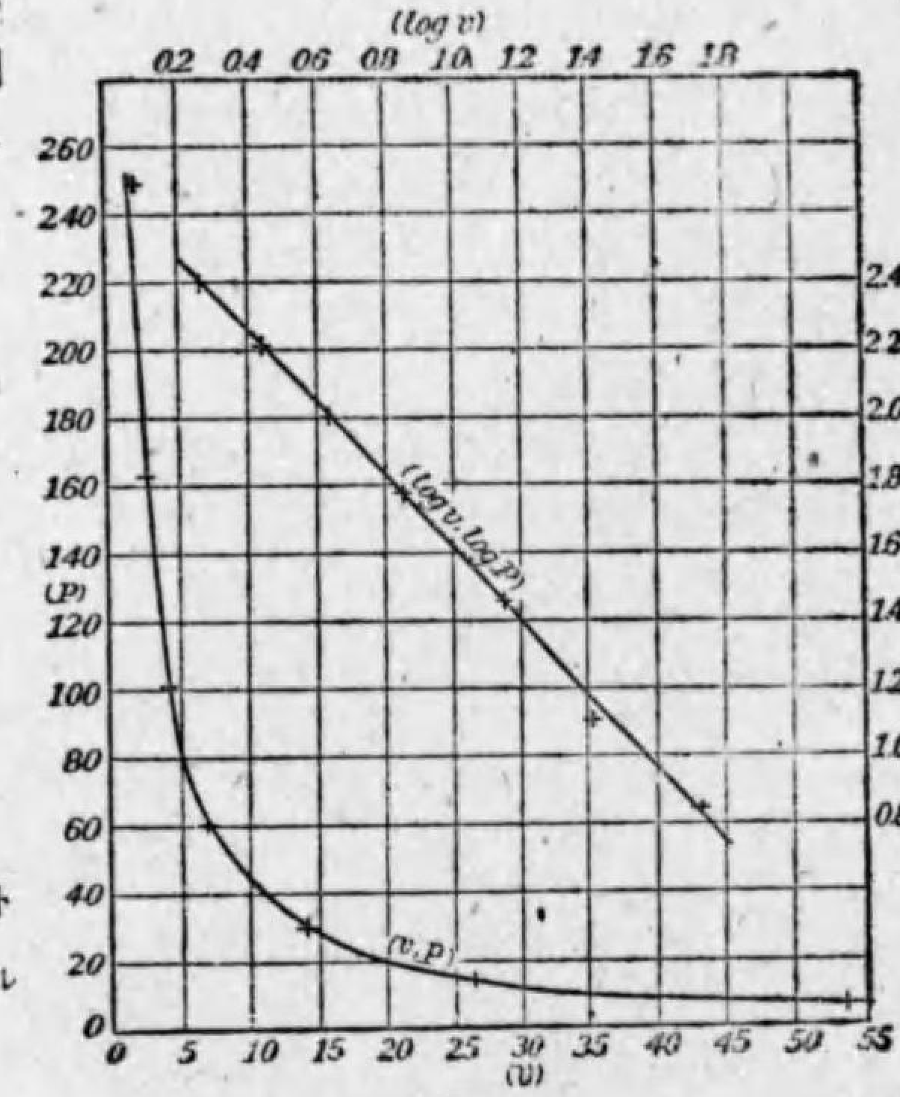
例 2. 次表ハ種々ノ壓力 p 封度/平方吋ト是ニ對應スル飽和水蒸氣ノ體積 v 立方呎ヲ示シタモノデアル。是ニ依ツテ v ト p トノ間ノ關係ヲ表ス實驗式ヲ作製セヨ。

v	p	$\log_{10} v$	$\log_{10} p$	p_c
53.92	6.86	1.7318	0.8363	6.85
26.36	14.70	1.4210	1.1673	14.69
14.00	28.83	1.1461	1.4599	28.85
6.992	60.40	0.8446	1.7810	60.49
4.280	101.9	0.6314	2.0082	102.1
2.748	163.3	0.4390	2.2130	163.7
1.853	250.3	0.2679	2.3984	249.2

次圖ニ示ス如ク (v, p) ノ曲線ヲ描ケバ双曲線狀曲線トナル。故ニ $(\log_{10} v, \log_{10} p)$ ヲ圖示シ, 直線トナルカヲ檢査シテ推察ノ誤リナキヲ知ツタ上デ

$$p=av^b \quad 又ハ \quad \log_{10} p=\log_{10} a+b\log_{10} v$$

ト置ク。



平均法ニ依リ, a, b ヲ決定スルタメニ測定値ヲ初メノ 4 組及ビ後ノ 3 組ニ分ケテ各組ニツイテ和ヲ求メレバ

$$5.2445=4\log_{10} a+5.1435\,b$$

$$6.6196=3\log_{10} a+1.3383\,b$$

$$\therefore \quad b=-1.0662$$

$$\log_{10} a=2.6822,$$

$$\therefore \quad a=481.1$$

$$\therefore \quad \log_{10} p=2.6822-1.0662\log_{10} v$$

從ツテ實驗式ハ

$$pv^{1.0662}=481.1$$

コレヨリ壓力ヲ計算シ, 其ノ計算値 p_c ト測定値トヲ比較スレバ兩者ノ良クー致スルコトヲ認メルノデアル。

問 題

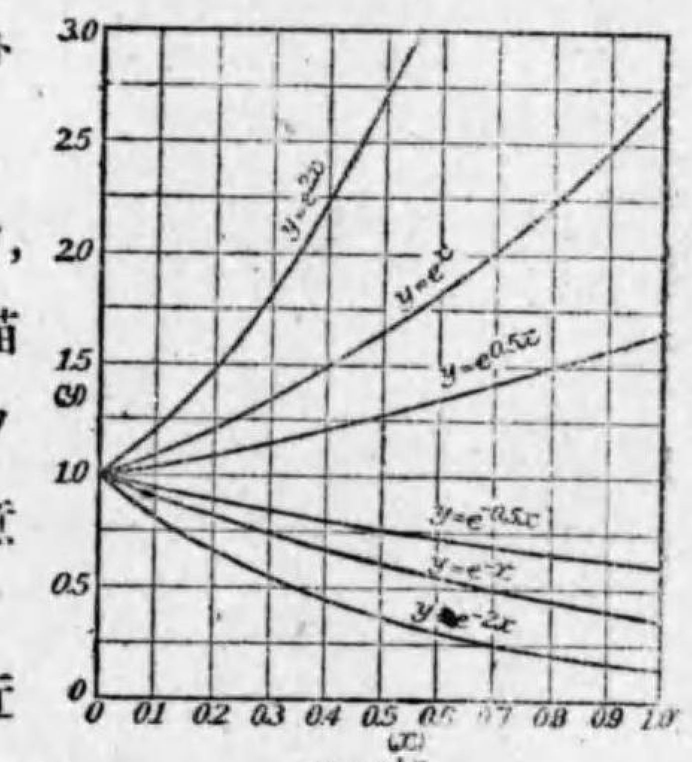
4. 中空ナル鐵ノ圓柱ニ應張力ヲ加ヘルトキ, x (瓩/平方糎) ヲ張力, y ヲ圓柱ノ延ビ (1/600 糎ヲ單位トスル) トスレバ次表ノ如キ結果ヲ得ルト云フ。コレニ依ツ

テ實驗式ヲ求メ, 其ノ式ヨリ計算セル圓柱ノ延ビト其ノ測定値トヲ比較セヨ。

x	9.79	20.02	40.47	60.92	81.37	101.82	204.00	408.57
y	0.330	0.695	1.530	2.410	3.295	4.185	8.960	19.490

26.4 簡單ナ指數曲線 $y=ae^{bx}$

以上ノ曲線ノ外ニ多數ノ實驗結果ヲ良ク表シ得ル他ノ簡單ナ曲線ハ指數曲線又ハ對數曲線デアル。此ノ種ノ曲線ハ $y=ae^{bx}$ ナル形狀デ表サレル。但シ e ハ自然對數ノ底數デアル。時トシテ $y=ab^x$ ナル形狀モ使用サレル。



$y=ae^{bx}$

右圖ハ斯クノ如キ曲線ノ中, $a=1$ トシ, $b=-2,\ -1,\ -0.5,\ 0.5,\ 1,\ 2$ ト變化シテ描イタモノデアル。是等ノ曲線ハ皆 $(0, a)$ ヲ通過シ, 且 x 軸ヲ漸近線トスルコトニ注意スベキデアル。

與ヘラレタ測定値ガ $y=ae^{bx}$ ニ依ツテ近似的ニ表シ得ル場合ニハ兩邊ノ對數ヲ取レバ

$$\log_{10} y=\log_{10} a+(b\log_{10} e)\,x$$

トナル。此ノ方程式ハ $\log_{10} y$ 及ビ x ニツイテ一次式デアル。從ツテ $(x, \log_{10} y)$ ノ曲線ヲ描ケバ一ツノ直線ヲ得ル筈デアル。

故ニ測定値ガ $y=ae^{bx}$ ナル式ヲ以テ近似的ニ表シ得ルカ否カヲ檢査スルニハ (x, y) ノ圖ヲ描イタトキ上圖ノ如キ曲線ニナカヲ調べ, 然ルトキハ更ニ $(x, \log_{10} y)$ ヲ圖示シテ一直線ヲ得ルカヲ見レバ良イノデアル。

而シテ常數 a 及ビ b ハ前節ト同樣ノ方法ニ依ツテ求メラレルノデアル。

例 一ツノ化學的反應系統ニ於テ t 時間ノ後ノ物質ノ殘量ヲ A トシ, 實驗ノ結果次ノ表ヲ得タトスル。

t	A	$\log_{10} t$	$\log_{10} A$	A_c
2	94.8	0.3010	1.9768	94.9
5	87.9	0.6990	1.9440	87.7
8	81.3	0.9031	1.9101	81.0
11	74.9	1.0414	1.8745	74.8
14	68.7	1.1461	1.8370	69.1
17	64.0	1.2304	1.8062	63.8
27	49.3	1.4314	1.6928	49.0
31	44.0	1.4914	1.6435	44.1
35	39.1	1.5441	1.5922	39.6
44	31.6	1.6435	1.4997	31.2

點 (t, A) ノ圖ヲ次圖ノ如ク描ケバ，コレハ指數曲線狀ヲナス樣デアル。故ニ試ミニ $(\log_{10} t, A)$ 及ビ $(t, \log_{10} A)$ ヲ圖示スレバ後者ガ略々一直線トナル。從ッテ上記ノ測定値ニ對シテ

$$A=ae^{bt}$$

又ハ　$\log_{10} A=\log_{10} a+(b \log_{10} e)t$

ト云フ方程式ヲ推定シ得ルノデアル。

上式ノ常數ヲ決定スルタメニ平均法ヲ用ヒ，先ヅ測定値ヲ二群ニ分ケテ加ヘレバ

$$9.5424=5 \log_{10} a+40\,(b \log_{10} e)$$

$$8.2344=5 \log_{10} a+154\,(b \log_{10} e)$$

$\therefore\ (b \log_{10} e)=-0.0115,\quad \log_{10} a=2.0005$

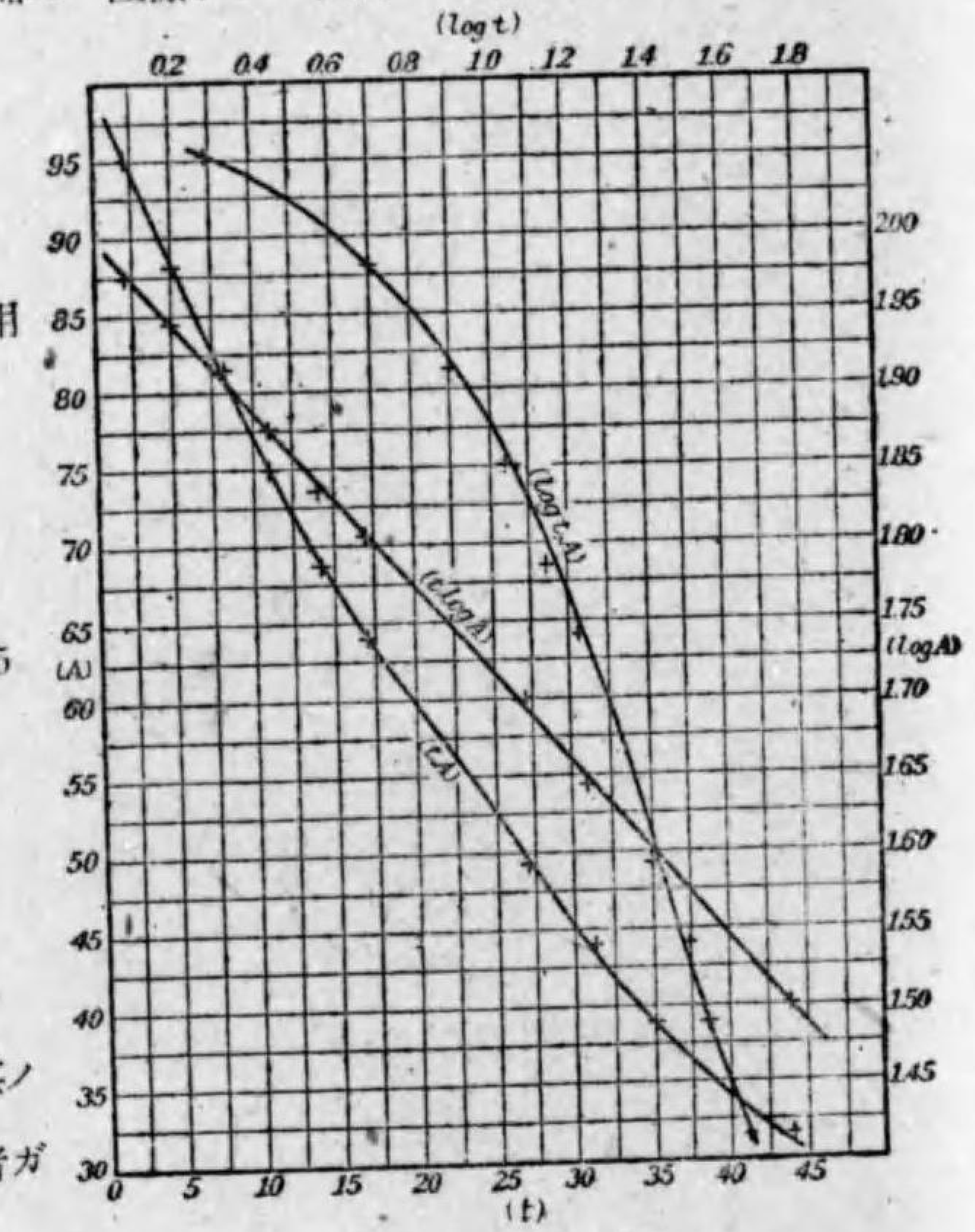
然ルニ　$\log_{10} e=0.4343$ デアルカラ

$$b=-0.0265,\quad a=100.1$$

故ニ　$\log_{10} A=2.0005-0.0115\,t$

又ハ　$A=100.1\,e^{-0.0265\,t}$

トナル。次ニ此ノ式ヨリ A ヲ計算シ，其ノ計算値 A_c ト測定値トヲ比較スレバ兩者ガ良ク一致スルコトヲ知ル。



問　　題

5. 次表ハ溫度 θ°F ニ於ケル硝子ノ電氣傳導度 C ヲ測定シタ結果デアル。コレニ依ッテ實驗式ヲ作製シ，且 C ノ計算値 C_c ト測定値トヲ比較セヨ。

θ	58	86	148	166	188	202	210
C	0	0.004	0.018	0.029	0.051	0.073	0.090

6. 滑車ト調革トノ間ノ摩擦ヲ測ルタメニ滑車ト調革トノ間ノ切觸角ヲ θ トシ，滑車ノ一方ノ端ニ加ヘラレタ一定ノ重量ヲ吊リ上ゲルタメニ他方ノ端ニ加ヘルベキ力ヲ P 封度トスレバ測定ノ結果ハ次表ノ通リデアルト云フ。コレヨリ實驗式ヲ求メヨ。

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
P	5.62	6.93	8.52	10.50	12.90	15.96	19.67	24.24	29.94

26.5　拋物線 $y=a+bx+cx^2$

此ノ方程式ハ y 軸ニ平行ナル軸ヲ有スル拋物線ヲ表ス。此ノ式ガ測定値ヲ表ス場合ニハ，測定曲線上ノ任意ノ一點 (x_k, y_k) ヲ取レバ

$$y_k=a+bx_k+cx_k^2$$

故ニ

$$y-y_k=b(x-x_k)+c(x^2-x_k^2)$$

或ハ

$$\frac{y-y_k}{x-x_k}=(b+cx_k)+cx$$

然ルニ此ノ最後ノ式ハ x 及ビ $\dfrac{y-y_k}{x-x_k}$ ニツイテ一次式デアルカラ $\left(x, \dfrac{y-y_k}{x-x_k}\right)$ ヲ圖示スレバ略々一直線ヲ得ル筈デアル。

故ニ測定値ガ $y=a+bx+cx^2$ ナル方程式ニ依ッテ表シ得ルカヲ檢査スルニハ (x_k, y_k) ガ測定曲線上ノ任意ノ一點ノ座標デアルトキ，$\left(x, \dfrac{y-y_k}{x-x_k}\right)$ ヲ描イテ略々直線ヲ得ルカヲ見レバ良イ。

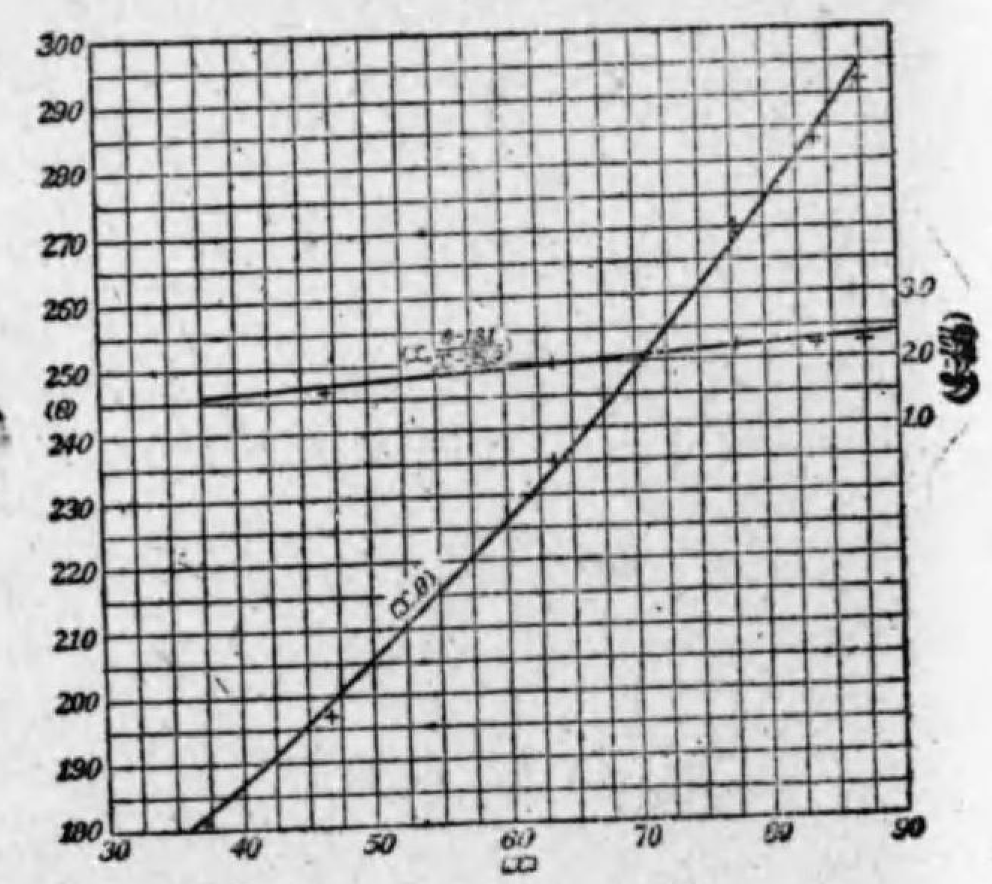
常數 a, b, c ヲ決定スル方法ヲ示スタメニ次ニ一ツノ計算例ヲ取ルコ

トニスル。

例　鉛ト亜鉛トノ合金ニ於テ鉛ノ量ヲ $x\%$ トシ，其ノ融解點ヲ θ°C トシテ次表ニ依ツテ實驗式ヲ作製セヨ。

x	θ	$x-36.9$	$\theta-181$	$\dfrac{\theta-181}{x-36.9}$	θ_c
87.5	292	50.6	111	2.20	295
84.0	283	47.1	102	2.17	285
77.8	270	40.9	89	2.18	268
63.7	235	26.8	54	2.01	234
46.7	197	9.8	16	1.63	199
36.9	181	0	0	*	182

(x, θ) ヲ描イテ次圖ヲ得タトスル。$\theta=a+bx+cx^2$ ナル曲線式ヲ假定シテ此ノ式ガ測定値ニ適合スルカ否カヲ檢査シヤウ。圖ニ依ツテ曲線ハ一點 $x_k=36.9$, $\theta_k=181$ ヲ通過スルコトガ判ル。



故ニ $\left(x, \dfrac{\theta-181}{x-36.9}\right)$ ヲ圖示スレバ略々一直線ガ得ラレル。茲ニ於テ

$$\frac{\theta-181}{x-36.9}=a_1+b_1x$$

ト置キ，平均法ニ依ツテ常數ヲ決定スル。

即チ測定値ヲ 3 組ト 2 組トニ分チ，別々ニ加ヘレバ

$$6.55=3a_1+249.3b_1$$

$$3.64=2a_1+110.4b_1$$

$$\therefore \quad b_1=0.0130, \qquad a_1=1.10$$

$$\therefore \quad \frac{\theta-181}{x-36.9}=1.10+0.0130\,x$$

又ハ

$$\theta=141.4+0.620x+0.0130x^2$$

此ノ式ニ依リ θ ヲ計算シ，其ノ計算値 θ_c ト測定値トヲ比較スレバ可ナリ良ク一致スルコトガ判ル。

問　題

7.　4°C ノ鹽酸ノ比重ヲ S, 其ノ中ニ含マレテ居ル鹽化水素ノ量ヲ $P\%$ トスレバ，次ノ表ガアル。是ニ依ツテ實驗式ヲ作製セヨ。

P	5	10	15	20	25
S	1.024	1.049	1.074	1.100	1.127

8.　汽車ノ速度ヲ v 哩/時，線路ノ抵抗ヲ r 封度/噸トスレバ，次ノ表ノ通リデアル。實驗式ヲ作製シ，計算値 v_c ト測定値トヲ比較セヨ。

v	20	40	60	80	100	120
r	5.5	9.1	14.9	22.8	33.3	46.0

26.6　拋物線狀又ハ双曲線狀曲線 $y=a+bx^n$

此ノ式ヲ使用スルニ當リ，n ハ理論的ノ考察カラ推知シ得ルモノト假定スル。若シ測定値ガ

$$y=a+bx^n$$

ヲ以テ表シ得ルナラバ (x^n, y) ノ圖ヲ描ケバ直線トナルト云フコトハ明カデアル。

例　或ル蒸氣機關ヲ毎回 3 時間定荷重ノ下ニ 7 回試驗ヲ行ツタ結果次ノ表ヲ得タト云フ。實驗式ヲ作製シ，測定値ト計算値ヲ比較セヨ。但シ I ハ馬力，w ハ毎時間 1 馬力當リノ使

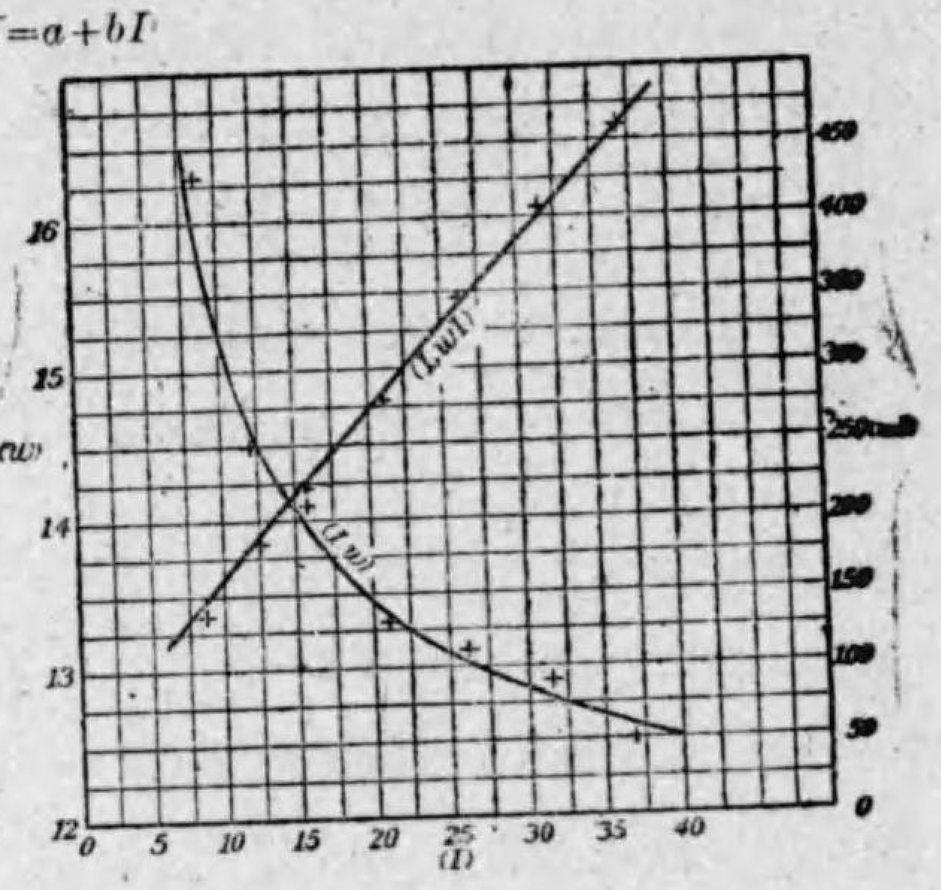
I	w	wI	w_c
36.8	12.5	460.0	12.6
31.5	12.9	406.4	12.8
26.3	13.1	344.5	13.0
21.0	13.3	279.3	13.4
15.8	14.1	222.8	14.0
12.6	14.5	182.7	14.6
8.4	16.3	136.9	16.1

用シタ蒸氣量（封度）デアル。

(I, w) ノ圖ヲ描ケバ，次圖ノ如クデアル。コレハ直線ニナラヌ。然シ I ノ代リニ毎時消費セル蒸氣量ノ總量 wI ヲ用ヒテ (I, wI) ノ圖ヲ描ケバ略々一直線ヲナス。故ニ

$$wI=a+bI$$

ナル關係ヲ假定スルコトガ出來ル。



此ノ關係ハ又

$$w=b+\frac{a}{I}$$

ト書換ヘ得ル。

故ニ $\left(\frac{1}{I}, w\right)$ ノ圖表モ亦直線トナル。

次ニ平均法ニ依ッテ常數ヲ決定スルタメニ測定値ヲ初メノ 3 組ト後ノ 4 組ニ分ケ，之ヲ加ヘレバ

$$1210.9=3a+94.6b,\quad 821.7=4a+57.8b$$

$$\therefore\quad b=11.6,\quad a=37.8$$

$$\therefore\qquad wI=37.8+11.6\,I$$

又ハ

$$w=11.6+\frac{37.8}{I}$$

次ニ測定値 w ト計算値 w_c ヲ比較スレバ，前表ノ如ク良ク一致スルコトヲ知ル。

問　　題

9. 一ツノ平板落下傘ガ空中ニ落下スルモノヲ觀測シテ次ノ結果ヲ得タト云フ。毎秒ノ速サ v ト壓力 p 封度/平方吋ノ關係ヲ表ス實驗式ヲ作製シ，且壓力ノ測定値 p ト計算値 p_c トヲ比較セヨ。

v	7.87	11.50	16.40	22.60	32.80
p	0.2	0.4	0.8	1.6	3.2

26.7　双曲線 $y=\dfrac{x}{a+bx}$ 又ハ $\dfrac{x}{y}=a+bx$

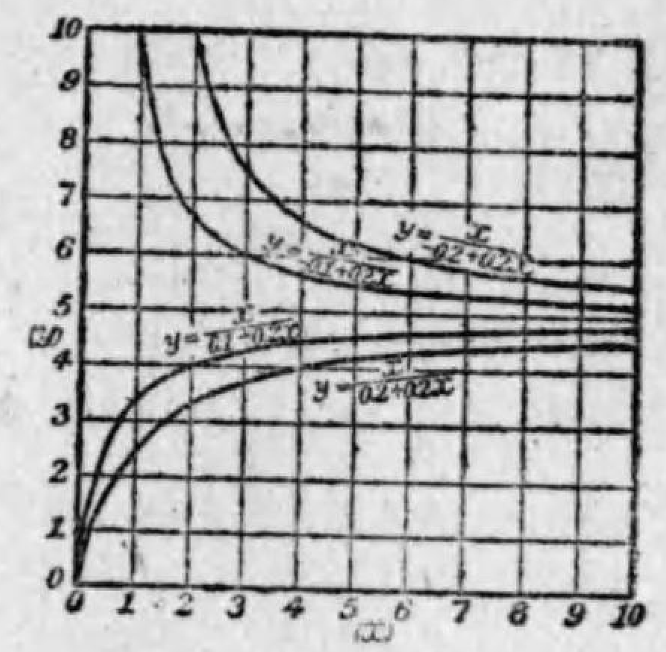
此ノ方程式ハ $x=-\dfrac{a}{b}$ 及ビ $y=\dfrac{1}{b}$ ヲ漸近線ニ持ツ通常ノ双曲線デアル。

右圖ハ

$(a=0.2,\ b=0.2),\ (a=0.1,\ b=0.2),$

$(a=-0.1,\ b=0.2),\ (a=-0.2,\ b=0.2)$

トシテ此ノ曲線ヲ描イタモノデアル。



$y=\dfrac{x}{a+bx}$

多數ノ測定ノ結果ガ此ノ式デ表サレル。

此ノ式ハ又

$$\frac{1}{y}=b+\frac{a}{x}$$

ト書ケル。故ニ $\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$ 又ハ $\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ ノ圖ヲ描ケバ略々一直線トナル。

故ニ測定値ガ近似的ニ

$$y=\frac{x}{a+bx}\quad 又ハ\quad \frac{x}{y}=a+bx$$

ヲ以テ表シ得ルカヲ檢査スルニハ，$\left(x, \dfrac{x}{y}\right)$ 又ハ $\left(\dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{y}\right)$ ノ圖ガ近似的ニ直線トナルカヲ檢ベレバ良イノデアル。

例　鐵ノ磁化 (Magnetization) ノ實驗ノ結果次ノ表ヲ得タトスル。H ハ毎糎ノ磁場ノ强サヲぎるべると單位デ表シタモノ，B ハ磁束 (Magnetic flux) ノ密度ヲ毎平方糎 1000 本單位デ表シタモノデアル。

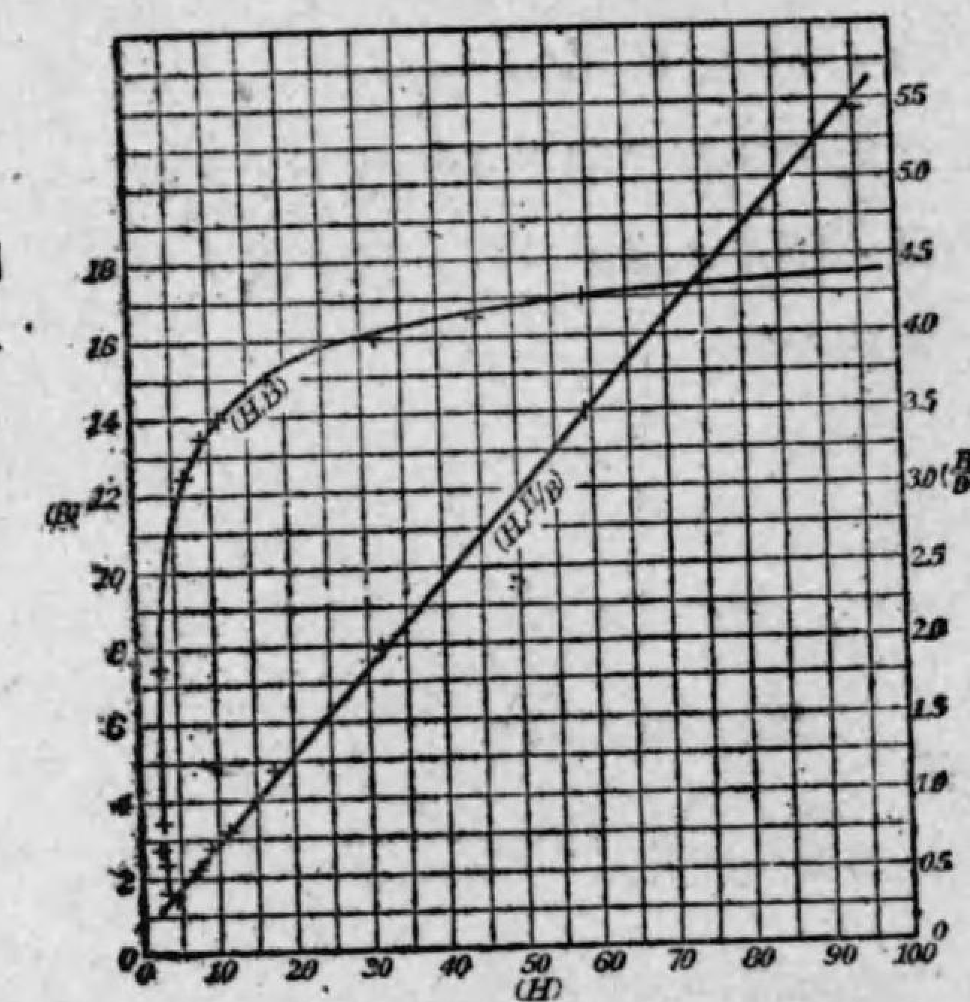
H	B	H/B	B_c
2.5	3.5	0.714	7.97
3.0	5.0	[illegible]	8.78
3.1	7.5	0.413	8.91
3.8	10.0	0.380	9.8
7.0	12.5	0.560	12.4
9.5	13.5	0.703	13.6
11.3	14.0	0.808	14.0
17.5	15.0	1.17	15.1
31.5	16.0	1.97	16.2
45.0	16.5	2.72	16.7
64.0	17.0	3.76	17.0
95.0	17.5	5.43	17.3

(H, B) ヲ描ケバ次圖ノ如クナル。更ニ (H/B ハ磁氣抵抗デ重要ナ量デアルカラ), $(H, H/B)$ ノ圖ヲ描ケバ $H>3.1$ ナル値ニ對シテ略々直線ニナル。

同樣ニシテ磁氣透過率 B/H ト B トノ圖ヲ描ケバ, 略々一直線ヲ得ル。故ニ

$$\frac{H}{B}=a+bH$$

ナル關係ヲ推定スルコトガ出來ル。



平均法ニ依リ H ノ初メノ 3 個ノ測定値ヲ除キ, 殘リヲ 2 群ニ分ケテ加ヘレバ

$$3.621=5a+49.1\,b$$

$$13.88=4a+235.5\,b$$

$$\therefore\quad b=0.0560,\quad a=0.174$$

$$\therefore\quad \frac{H}{B}=0.174+0.0560H$$

又ハ $$B=\frac{H}{0.174+0.0560H}$$

トナル。

次ニ測定値 B ト計算値 B_c トヲ比較スレバ前表ノ如ク可成リ一致スルコトヲ知ル。

問 題

10. れんずヨリ物體マデノ距離ヲ x, 其ノ像マデノ距離ヲ y トスレバ, 測定ノ結果ハ次表ノ通リデアルト云フ。コレヨリ實驗式ヲ作製セヨ。

x	320	240	180	140	120	100	80	60
y	21.35	21.80	22.50	23.20	23.80	24.60	26.20	29.00

附錄第一

對 數

1.1. **對數** a ガ 1 デナイ正數ノ場合ニ

$$x=a^y$$

ナル式ヲ考ヘルニ, 是ハ a ノ y 冪ガ x ニ等シイコトヲ示スモノデアルガ, 此ノ時 y ヲ名ヅケテ a ヲ底數トスル x ノ對數ト云ヒ, 之ヲ記號

$$y=\log_a x$$

デ表ス。即チ $x=a^y$ ト $y=\log_a x$ トハ全ク同ジ事實ヲ表スモノデアル。又 x ヲ對數 y ノ眞數ト云フ。

1.2. **對數ノ性質** **[1] 1 ノ對數ハ 0 デアル。**

即チ $$\log_a 1=0 \qquad \because\ 1=a^0$$

[2] 底數ノ對數ハ 1 デアル。

即チ $$\log_a a=1 \qquad \because\ a=a^1$$

[3] 積ノ對數ハ其ノ各因數ノ對數ノ和ニ等シイ。

即チ例ヘバ因數ノ數ガ三個ノ場合ナラバ

$$\log_a(M\times N\times P)=\log_a M+\log_a N+\log_a P$$

$$\log_a M=m,\quad \log_a N=n,\quad \log_a P=p$$

トスレバ $$M=a^m,\quad N=a^n,\quad P=a^p$$

$$\therefore\quad M\times N\times P=a^m\times a^n\times a^p=a^{m+n+p}$$

$$\therefore\quad \log_a(M\times N\times P)=m+n+p$$

$$=\log_a M+\log_a N+\log_a P$$

[4] 商ノ對數ハ被除數ノ對數ヨリ除數ノ對數ヲ減ジタモノニ等シイ。

即チ $$\log_a\frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

何トナレバ [3] ニ依ツテ

$$\log_a\frac{M}{N}+\log_a N=\log_a\frac{M}{N}\times N=\log_a M$$

ダカラデアル。

又特別ノ場合トシテ

$$\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N$$

[5]　或數ノ羃ノ對數ハ原數ノ對數ニ其ノ羃指數ヲ乘ジタモノニ等シイ。

即チ
$$\log_a(M^r) = r\log_a M$$

$\log_a M = x$ トスレバ
$$M = a^x$$

$$M^r = (a^x)^r = a^{rx}$$

∴
$$\log_a(M^r) = rx = r\log_a M$$

∴

[6]　或數ノ羃根ノ對數ハ原數ノ對數ヲ其ノ根指數デ除シタモノニ等シイ。

即チ
$$\log_a \sqrt[r]{M} = \frac{1}{r}\log_a M$$

何トナレバ $\sqrt[r]{M} = M^{\frac{1}{r}}$ デアルカラ [5] ニ依リ

$$\log_a \sqrt[r]{M} = \log_a M^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}\log_a M$$

ダカラデアル。

以上述ベタ對數ノ性質ニ依リ，對數ヲ使用スレバ或數ノ乘除ハ其ノ對數ノ加減ニ導カレ，又羃ヤ羃根ヲ求メルコトハ單ニ對數ニ對シテ簡單ナ乘除ヲ行フコトニ導カレ，一般ニ數ノ計算ニ非常ナル便利ヲ得ルノデアル。

1.3.　常用對數　底數ヲ變ヘレバ異ナル種類ノ對數ガ得ラレルノデアルガ，各種ノ對數ノ中デ最モ主要ナモノハ自然對數ト常用對數デアル。

自然對數ハ $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots=2.7182818285$ 强（之ヲ e ニテ表ス）ヲ底數トスル對數デアツテ，主トシテ理論上ノ計算ニ用ヒラレ，**常用對數**ハ 10 ヲ底數トスル對數デアツテ專ラ實用上ノ計算ニ使用サレルモノデアル。

本節以下ニ於テハ常用對數ノミヲ取扱フカラ單ニ對數ト云フトキハ常用對數ヲ意味スルコトヽシ，又記號ニ於テモ底數ヲ略スコトヽスル。

對數ノ小數部ハ常ニ正數ニナル如ク書クコトニ定メル。

例ヘバ對數ガ -2.3457 ノ如ク負數ナルトキハ之ヲ $(-3)+0.6543$ ト見做シ $\bar{3}.6543$ ト書ク。而シテ斯ク書イタ對數ノ整數部ヲ**指標**ト云ヒ，小數部ヲ**假數**ト云フ。

對數ノ定義ニ依レバ
$$\log 10^r = r$$

故ニ
$$1=10^0,\quad 10=10^1,\quad 100=10^2,\quad 1000=10^3,\quad \cdots\cdots$$

ノ對數ハ夫々 0, 1, 2, 3, …… ニ等シク，

$$0.1=10^{-1},\quad 0.01=10^{-2},\quad 0.001=10^{-3},\quad \cdots\cdots$$

ノ對數ハ夫々 $-1, -2, -3, \cdots\cdots$ ニ等シイ。而シテ對數ハ眞數ト共ニ增減スルカラ，例ヘバ次ノ關係ガ判ル。

$$10^0<3.81<10^1 \qquad \therefore\ \log 3.81=0.\cdots\cdots$$

$$10^1<83.21<10^2 \qquad \therefore\ \log 83.21=1.\cdots\cdots$$

$$10^2<135.9<10^3 \qquad \therefore\ \log 135.9=2.\cdots\cdots$$

又
$$10^{-1}<0.421<100 \qquad \therefore\ \log 0.421=\bar{1}.\cdots\cdots$$

$$10^{-2}<0.05173<10^{-1} \qquad \therefore\ \log 0.05173=\bar{2}.\cdots\cdots$$

故ニ一般ニ次ノ如ク云フコトガ出來ル。

[1]　1 ヨリ大ナル數ノ對數ノ指標ハ其ノ整數部ノ桁數ヨリ 1 ヲ減ジタモノデアル。

[2]　1 ヨリ小ナル數ノ對數ノ指標ハ小數點ト最初ノ有效數字トノ間ニアル 0 ノ數ニ 1 ヲ加ヘタモノヲ絕對値トスル負數デアル。

例ヘバ
$$\log 83.213=1.92019$$

トスレバ
$$83213=83.213\times 10^2$$

故ニ
$$\log 83213=\log(83.213\times 10^2)=\log 83.213+\log 10^2$$
$$=1.92019+2=3.92019$$

更ニ
$$0.083213=83.213\times 10^{-3}$$

故ニ
$$\log 0.083213=\log 83.213+\log 10^{-3}$$
$$=1.92019+\bar{3}=\bar{2}.92019$$

故ニ一般ニ次ノ如ク云フコトガ出來ル。

[3]　小數點ノ位置ダケ異ナル二數ノ對數ノ假數ハ互ニ相等シイ。

例 1.　$\log 6.453=0.80976$ ヲ知ツテ $\log 6453$ ヲ求メヨ。

6453 ハ整數部ガ四桁ノ數デアルカラ，其ノ對數ノ指標ハ 3 デアル。而シテ 6.453 ト 6453 トハ數字ノ順序ガ同ジデ，小數點ノ位置ダケ異ナル二數ダカラ其ノ對數ノ假數ハ相等シク 0.80976 デアル。

故ニ
$$\log 6453=3.80976$$

例 2.　$\log 2=0.30103$ ヲ知ツテ $\log 5$ ヲ求メヨ。

$$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.30103$$
$$= 0.69897$$

問　題

1. $\log_2 32$ 及ビ $\log_5\frac{1}{625}$ ヲ求メヨ。

2. $\log_3 x=2$ ニ於ケル x ノ値ヲ求メヨ。

3. $\log 2=0.30103$, $\log 3=0.47712$ ヲ知ツテ $\log 450$ ヲ求メヨ。

1.4. 對數表使用法　**數ノ對數表**ハ數ノ對數ノ假數ヲ小數點下或位マデ求メテ，其ノ末位未滿ヲ四捨五入シ，小數點ヲ省イテ，之ヲ表ニ作ツタモノデアル。小數點下ノ桁數ニ依ツテ，七桁ノ表，六桁ノ表，五桁ノ表，四桁ノ表等ト云フ。以下五桁ノ對數表ヲ使用スルモノトシテ説明スル。

例 1. $\log 2334$,　$\log 23340$, $\log 0.2334$ ヲ求メヨ。

表ノ上行ノ左端ノ數ノ欄ノ 233 ト同行ニ於テ，上行ノ 4 ノ直下ニアル數 36810 ハ求メル假數デアル。而シテ眞數ハ 2334, 23340, 0.2334 デアルカラ，指標ハ 3, 4, $\bar{1}$ デアル。依ツテ

$$\log 2334=3.36810,\quad \log 23340=4.36810$$
$$\log 0.2334=\bar{1}.36810$$

例 2. $\log 26247$ ヲ求メヨ。

26247 ハ表中ニハナイ。今コレニ最モ近イ表中ノ大小ノ二數ノ對數ヲ求メレバ

$$\log 26240=4.41896$$
$$\log 26250=4.41913$$
$$表差=0.00017$$

7 ニ對スル對數ノ變化ヲ x トスレバ

$$10:7=0.00017:x$$
$$\therefore\quad x=\frac{0.00017\times 7}{10}=0.00012$$
$$\therefore\quad \log 26247=4.41896+0.00012=4.41908$$

實際ノ計算ハ次ノ如クスルガ良イ。

$$\begin{array}{ll} \log 26247 & \\ \quad 26240\cdots 4.41896 & 表差=17 \\ \qquad\quad 7\cdots\cdots 12 & 17\times\frac{7}{10}\fallingdotseq 12 \\ \hline \log 26247=4.41908 & \end{array}$$

例 3. $\log N=\bar{3}.58692$ ヨリ N ヲ求メヨ。

假數 .58692 ハ表中ニアリ。其ノ數ノ數字ノ順ハ 3863 デアル。而シテ指標ガ $\bar{3}$ デアルカラ小數點ト初メノ有効數字トノ間ニアル 0 ノ數ハ二ツデアル。

故ニ　$$N=0.003863$$

例 4. $\log N=1.23456$ ヨリ N ヲ求メヨ。

表ニヨリ

$$\begin{array}{r} \log 17.16\ \ =1.23452 \\ \log 17.170=1.23477 \\ \hline 表差=0.00025 \end{array}$$

然ルニ　$$\log N-\log 17.160=0.00004$$

故ニ　$$0.00025:0.00004=0.01:x$$

從ツテ　$$x=0.002$$

故ニ　$$N=17.160+0.002=17.162$$

實際ノ計算ハ下ニ示ス如クスルガ良イ。

$$\begin{array}{ll} \log N=1.23456 & \\ \quad 1.23452\cdots 17.160 & 表差=25 \\ \qquad\quad 4\cdots\cdots 2 & 10\times\frac{4}{25}\fallingdotseq 2 \\ \hline \quad N=17.162 & \end{array}$$

次ニ**三角函數ノ對數表**ハ三角函數ノ眞數ノ對數ヲ列記シタモノデ，數ノ對數表ト同樣ニ數種類アル。以下五桁ノ對數表ヲ使用スルモノトシテ説明スル。

［1］ 三角函數ノ値ハ 1 ヨリ小ナルモノガ多イカラ，其ノ對數ノ指標ニハ負數ガ多イ。故ニ表ヲ作製スルトキノ植字上ノ都合カラ負ノ指標ヲ避ケルタメ，總テノ指標ニ 10 ヲ加ヘタモノガ屢々アル。斯ク 10 ヲ加ヘタモノヲ**表對數**ト云ヒ L sin, L cos, L tan 等ノ記號デ之ヲ表ス。例ヘバ

$$\mathrm{L}\sin 30^\circ=\log\sin 30^\circ+10=9.69897$$
$$\mathrm{L}\tan 85^\circ=\log\tan 85^\circ+11=11.0580$$

デアル。

［2］ 三角函數ノ對數表ニハ指標ト假數トヲ併記シテアルモノモアル。

［3］ 角ノ増大スルニ從ツテ正弦及ビ正切ノ對數ハ増大スルガ餘弦及ビ餘切ノ對數ハ減少スル。

例 5. $\log\sin 30°10'$ ヲ求メヨ。

表ノ上行ノ $L\sin$ ノ欄ニ於テ左端ノ欄ノ $30°10'$ ト同行ノ數 9.70115 ヲ求メ，是ノ指標ヨリ 10 ヲ減ジテ $\bar{1}.70115$ ヲ求メル値トスル。

即チ $$\log\sin 30°10'=\bar{1}.70115$$

例 6. $\log\tan 24°36'$ ヲ求メヨ。

コレハ表中ニナイ。次ノ如ク計算スル。

$$\begin{array}{rl}
\log\tan 24°36' & \\
24\ 30\cdots\bar{1}.65870 & \\
\underline{\qquad} & \\
6'\cdots\cdots\ 200 & \\
\hline
\log\tan 24°36'=\bar{1}.66070 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
表差=334 \\
334\times\frac{6}{10}\fallingdotseq 200
\end{array}$$

例 7. $\log\cos 67°43'$ ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r}
\log\cos 67°43' \\
67\ 40\cdots\ \bar{1}.57978 \\
3\cdots\cdots\ -93 \\
\hline
\log\cos 67°43'=\bar{1}.57885
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
表差=309 \\
309\times\frac{3}{10}\fallingdotseq 93
\end{array}$$

例 8. $\log\sin A=\bar{1}.84772$ ヨリ A ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r}
\log\sin A=\bar{1}.84772 \\
\bar{1}.84694\cdots 44°40' \\
78\cdots\cdots\ 6.1 \\
\hline
A=44°46'.1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
表差=128 \\
10'\times\frac{78}{128}\fallingdotseq 6'.1
\end{array}$$

例 9. $\log\cot A=0.40356$ ヨリ A ヲ求メヨ。

$$\begin{array}{r}
\log\cot A=0.40356 \\
0.40460\cdots 21°30' \\
-104\cdots\cdots\ 2'.3 \\
\hline
A=21°32'.3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
表差=369 \\
10'\times\frac{104}{369}=2'.3
\end{array}$$

1.5. 對數計算 **[1]** 對數ヲ減ズル必要ガアルトキハ其ノ符號ヲ變ヘタモノヲ加ヘル方ガ便利ナコトガ屢々アル。或數ノ對數ノ符號ヲ變ヘタモノヲ其ノ數ノ餘對數ト云フ。

今或數 x ノ對數ノ指標ヲ c, 假數ヲ m トスレバ

$$\log x=c+m$$

故ニ $$-\log x=-(c+m)=-c-m$$

從ツテ $$-\log x=-(c+1)+(1-m)$$

即チ餘對數ノ指標ハ原對數ノ指標ニ 1 ヲ加ヘテ符號ヲ變ヘタモノ，假數ハ 1 カラ原假數ヲ減ジタモノデアル。

例ヘバ $$\log 358=2.55388$$

故ニ $$-\log 358=\bar{3}.44612$$

又 $$\log 0.00358=\bar{3}.55388$$

故ニ $$-\log 0.00358=2.44612$$

[2] 次ニ指標ガ負ナル對數ヲ整數ニテ割ルニハ，假數ガ整數商ヲ得ル樣ニ適當ノ負數ヲ指標ニ加ヘ，同時ニコレノ絕對値ヲ假數ニ加ヘテカラ割リ算ヲ行フト良イ。

例ヘバ $$\frac{\bar{1}.47714}{5}=\frac{\bar{5}+4.47714}{5}=\bar{1}.89543$$

$$\frac{\bar{3}.32708}{2}=\frac{\bar{4}+1.32708}{2}=\bar{2}.66354$$

例 1. $45.82\times 2.345\times 0.5973$ ヲ計算セヨ。

$$x=45.82\times 2.345\times 0.5973$$

ト置ケバ $$\log x=\log 45.82+\log 2.345+\log 0.5973$$

表ニヨリ
$$\begin{array}{r}
\log 45.82\ =1.66106 \\
\log 2.345\ =0.37014 \\
\log 0.5973=\bar{1}.77619 \\
\hline
\log x=1.80739 \\
x=64.179
\end{array}$$

1,97165 + $\bar{1}$,13033

97165

13031

0,86132

例 2. $x=93.68\times 0.135\div 2.108$ ヲ計算セヨ。

$$\log x=\log 93.68+\log 0.135-\log 2.108$$

表ニヨリ
$$\begin{array}{r}
\log 93.68=1.97165 \\
\log 0.135=\bar{1}.13033 \\
-\log 2.108=\bar{1}.67613 \\
\hline
\log x=0.77811 \\
x=5.9994
\end{array}$$

例 3. $x=\sqrt[3]{0.387}$ ヲ計算セヨ。

$$\log x=\frac{1}{3}\log 0.387=\frac{1}{3}\times\bar{1}.58771=\bar{1}.86257$$

$$\therefore\quad x=0.72873$$

例 4. $x=7803\times\dfrac{\sin 37°17'}{\cot 57°24'}$ ヲ計算セヨ。

$$\log x=\log 7803+\log\sin 37°17'-\log\cot 57°24'$$

表ニヨリ

$$\begin{array}{r} \log 7803 = 3.89226 \\ \log \sin 37^\circ 17' = \bar{1}.78230 \\ -\log \cot 57^\circ 24' = 0.19414 \\ \hline \log x = 3.86870 \\ x = 7392 \end{array}$$

問　題

1. 對數表ヲ用ヒテ次ノ各式ヲ計算セヨ。

(*a*) 0.296^3　　(*b*) $\dfrac{\sqrt[3]{0.5261}}{\sqrt[3]{37.78}}$

(*c*) $523^3 \times \dfrac{\sqrt{234}}{0.35219}$

2. 對數表ヲ用ヒテ次ノ値ヲ求メヨ。

(*a*) $\dfrac{\sin 38^\circ 40'}{\tan 27^\circ 56'}$　　(*b*) $\dfrac{\sqrt{789}\sin 27^\circ 25'}{\sqrt[3]{135}\cos 53^\circ 38'}$

3. $\dfrac{\sqrt[3]{0.0005377 \times \sqrt{789.2^3}}}{\sqrt{0.003892} \times 309^2}$ ヲ計算セヨ。

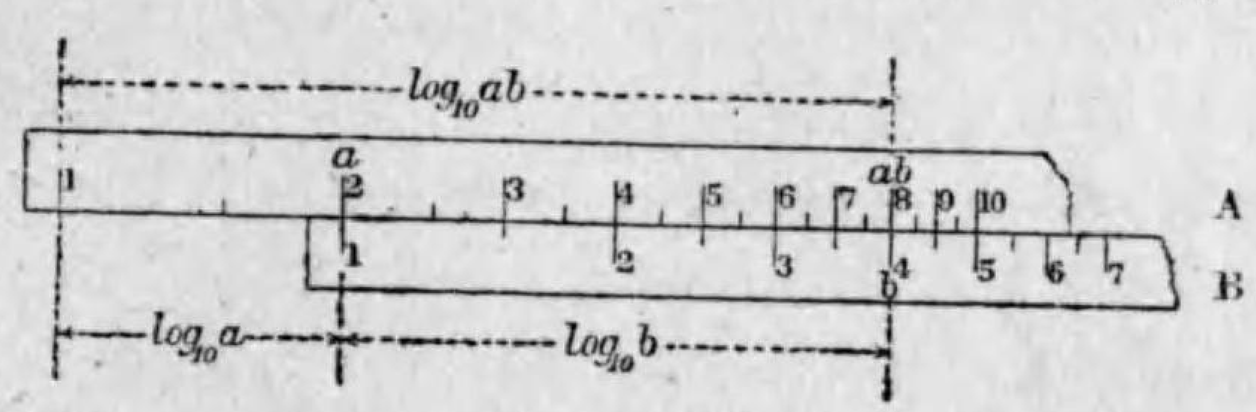
4. $3517 \times \dfrac{\sin 15^\circ 33'}{\cot 72^\circ 37'}$ ヲ計算セヨ。

附録第二

計　算　尺

2.1. 計算尺ノ原理 對數ノ性質ニ依レバ

$$\log_{10} a + \log_{10} b = \log_{10} ab$$

デアル。故ニ a ト b ノ積ヲ求メルニハ對數表ヲ使用シテ $\log_{10} a$ ト $\log_{10} b$ ヲ求メ，其ノ和ニ對スル眞數ヲ求メレバ良イノデアル。從ツテ若シ圖ノ如キ A, B 兩尺ニ對數ノ目盛ヲナセル尺度，卽チ**對數尺**ヲ使用シ，A尺ノ a 目盛ノ所ニ B 尺ノ 1 ノ目盛ヲ合ハセ，B 尺ノ b ノ目盛ニ對應スル A 尺ノ目盛ヲ讀メバ ab ヲ得ル理デアル。

更ニ除法，平方及ビ開方等ノ運算モ對數ヲ使用スレバ總テ加法ト減法トノ形ニ變ズルコトガ出來ルカラ，是等モ對數尺ニ依ツテ其ノ結果ガ簡單ニ得ラレルノデアル。

計算尺 (Slide rule) ハ對數ノ理論ヲ應用シテ作レル對數尺ヲ組合ハセ使用シ，各種ノ計算ヲ迅速ニナシ得ルヤウニシタモノデアル。

2.2. 計算尺ノ構造 通常使用サレル計算尺ハ次圖ノ如ク A, D ノ兩尺ヲ有スル**臺尺**ト B, C ノ兩尺ヲ有スル**滑尺**カラ成リ，是ニ目盛ヲ正確ニ讀定スルクメノ**かーそる** (Cursor) ガ附ケテアル。

A, B ノ兩尺ハ對數尺デ，其ノ中央ヨリ左方ト右方トハ全ク同一ノ目盛ガシテアツテ，左端ヨリ中央ニ至ル目盛ヲ更ニ中央ヨリ右端ニ向ツテ繰返シ施シテアル。

A 尺又ハ B 尺ノ左端ニアル尺度ノ起點ハ $\log_{10} 1 = 0$ ノ點デアルカラ此ノ 1 ヲ

左方指數ト稱シ，兩尺度ノ中央ハ $\log_{10}10=1$ ニ相當スルカラ 10 ヲ**中央指數**ト稱スル。又上述ノ如ク中央ヨリ右方ハ左方ト同樣ノ目盛ガシテアルガ其ノ數値ハ 10, 20, 30, ……100 ト記シテアリ，此ノ右端ノ 100 ヲ A 尺又ハ B 尺ノ**右方指數**と稱スル。中央指數ヲ境トシテ A, B 兩尺ノ左右ヲ夫々**左方 A 尺**（又ハ **B 尺**），**右方 A 尺**（又ハ **B 尺**）ト稱スル。

C 尺及ビ D 尺ハ兩者全ク同一ノ對數尺デアル。而シテ其ノ起點ハ $\log_{10}1=0$ ノ點デアル。此ノ 1 ヲ C 尺又ハ D 尺ノ**左方指數**ト稱スル。目盛ハ上圖ノ如ク起點ヨリ右ニ $2\log_{10}2=0.602$ ノ所ニ 2 ト記シ，$2\log_{10}3=0.954$ ノ所ニ 3 ト記シ，次第ニ進ンデ A, B 兩尺ノ右方指數即チ 100 ニ相當スル所ニ 10 ト記セバ 10 ハ C, D 兩尺ノ**右方指數**トナル。

A 尺又ハ B 尺ノ左方指數ト C 尺又ハ D 尺ノ左方指數トハ滑尺ガ正位ニアルトキハ同一垂直線上ニアリ，又右方指數モ同一垂直線上ニアル。

滑尺ノ裏面ニ S, L, T ナル三個ノ目盛ガアルガ，コレノ說明ハ後ニ讓ル。

2.3. 計算尺ノ使用法 計算尺ハ主トシテ乘法，除法，平方，開方，三角函數等ノ計算ニ使用サレル。而シテ計算尺ニ依ツテ乘法，除法ヲ行フ場合ニハ與ヘラレタ各數ヲ整數部ニ一個ノ有效數字ヲ有スル帶小數ニ 10^n ヲ乘ジタ形ニ變ズルガ良イ。斯クスレバ計算ノ結果位取ガ頗ル容易ニナル便利ガアル。

例ヘバ
$$\begin{aligned}34500\times0.0048&=3.45\times10^4\times4.8\times10^{-3}\\&=3.45\times4.8\times10^{4-3}\\&=16.56\times10\\&=165.6\end{aligned}$$

C, D 兩尺ハ A, B 兩尺ニ比シ，精密ニ目盛ガ施シテアル。故ニ乘法，除法ノ計算ニ於テ一層正シイ結果ヲ得ヨウトスルトキハ C, D 兩尺ヲ使用スベキデアル。

2.4. 乘法 乘法ヲ行フニハ被乘數ヲ D 尺上ニ置キ C 尺ノ指數(場合ニ依ツテ左方又ハ右方ノ指數）ヲ此ノ上ニ置キ C 尺上ノ乘數ニ對スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ良イ。

例 1. 3×2 ヲ求メヨ。

D 尺上ノ 3 ノ目盛ニ C 尺ノ左方指數ヲ合ハセ，C 尺上ノ 2 ノ目盛ニ對應スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定シテ答 6 ヲ得ルノデアル。

例 2. 36×25 ヲ求メヨ。

$36\times25=3.6\times2.5\times10^2$ デアル。故ニ 3.6×2.5 ヲ例 1 ト同樣ニシテ求メテ 9 ノ得，之ヲ 10^2 倍シテ 900 ヲ得テ答トスルノデアル。

例 3. 3×6 ヲ求メヨ。

滑尺ヲ左方ニ引出シ，D 尺上ノ 3 ノ目盛ニ C 尺ノ右方指數ヲ合ハセ，C 尺上ノ 6 ノ目盛ニ對應スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定シテ答 18 ヲ得ルノデアル。

例 4. 23.5×4.86 ヲ求メヨ。

$23.5\times4.86=2.35\times4.86\times10$ ト考ヘ，2.35×4.86 ヲ例 3 ト同樣ニシテ求メテ 11.42 ヲ得，之ヲ 10 倍シテ 114.2 ヲ得テ答トスル。

問　題

計算尺ヲ使用シテ次ノ結果ヲ求メヨ。

1. (*a*) 3.8×8.45　(*b*) 86×368　(*c*) $354\times16\times0.263$

2. (*a*) 0.547×89.2　(*b*) 93.5×0.000427　(*c*) $2.12\times88\times0.0024$

2.5. 除法 除法ハ乘法ノ逆運算デアルカラ，計算尺ニ依ツテ除法ヲ行フ方法ハ乘法カラ容易ニ之ヲ知ルコトガ出來ル。即チ被除數ヲ D 尺上ニ置キ，C 尺上ノ除數ヲ是ニ合ハセ，C 尺上ノ指數（場合ニ依ツテ左方又ハ右方ノ指數）ニ對スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ良イ。

例 1. $1260\div45$ ヲ求メヨ。

$$1260\div45=\frac{1.26\times10^3}{4.5\times10}=\frac{1.26}{4.5}\times10^2$$

デアル。今 $1.26\div4.5$ ヲ求メタルニ D 尺上ノ 1.26 ニかーそる線ヲ合ハセ，C 尺ヲ左方ニ引出シテ其ノ 4.5 ノ線ヲかーそる線ニ合ハセ，C 尺ノ右方指數ノ下ノ D 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ 0.28 ヲ得ル。故ニ之ヲ 10^2 倍ニシテ答 28 ヲ得ルノデアル。

例 2. $850\div45$ ヲ求メヨ。

$$850\div45=\frac{8.5\times10^2}{4.5\times10}=\frac{8.5}{4.5}\times10$$

デアル。今 $8.5\div4.5$ ヲ求メルタメニ D 尺上ノ 8.5 ニかーそる線ヲ合ハセ，C 尺ヲ右ニ引出シテ其ノ 4.5 ノ線ヲかーそる線ト合ハセ，C 尺ノ左方指數ノ下ノ D 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ 1.89 ヲ得ル。故ニ之ヲ 10 倍シテ答 18.9 ヲ得ルノデアル。

問題

計算尺ヲ使用シテ次ノ結果ヲ求メヨ。

3. (*a*) $85 \div 23$ (*b*) $1234 \div 58$ (*c*) $15.36 \div 4.27$

4. $\dfrac{53 \times 97}{48}$ **5.** $\dfrac{4.84 \times 8.31}{9.87}$ **6.** $\dfrac{56.2 \times 72.5}{23.6 \times 35.3}$

2.6. 平方 D 尺上ノ與ヘラレタ數ニかーそる線ヲ合ハセ, A 尺上ニ於テかーそる線ノ一致スル目盛ヲ讀定スレバ, 與ヘラレタ數ノ平方ガ得ラレル。

例 1. 8^2 ヲ求メヨ。

D 尺上ノ 8 ニかーそる線ヲ合ハセ, A 尺上ニ於テ此ノかーそる線ノ一致スル目盛ヲ讀定シ 64 ヲ得テ答トスル。

例 2. 124^2 ヲ求メヨ。

$$124^2 = (1.24 \times 10^2)^2 = 1.24^2 \times 10^4$$

デアル。故ニ 1.24^2 ヲ例 1 ノ如クシテ求メテ 1.5376 ヲ得, 之ヲ 10^4 倍シ, 15376 ヲ得テ答トスル。

例 3. 0.0073^2 ヲ求メヨ。

$$0.0073^2 = (7.3 \times 10^{-3})^2 = 7.3^2 \times 10^{-6}$$

デアル。故ニ 7.3^2 ヲ求メテ 53.29 ヲ得, 是ニ 10^{-6} ヲ乘ジ, 0.00005329 ヲ得テ答トスル。

問題

計算尺ニ依ツテ次ノ結果ヲ求メヨ。

7. 314^2 **8.** 2.96^2 **9.** 0.083^2

2.7. 平方根 平方根ハ平方ノ逆運算デアルカラ, 計算尺ニ依ツテ平方根ヲ求メル方法ハ平方ノ運算カラ容易ニ之ヲ知ル事ガ出來ル。即チ平方根ヲ求メルニハ A 尺上ノ與ヘラレタ數ニかーそる線ヲ合ハセ, 此ノかーそる線ノ一致スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ良イ。

例 1. $\sqrt{9}$ ヲ求メヨ。

左方 A 尺上ノ 9 ニかーそる線ヲ合ハセ, D 尺上ニ於テ此ノかーそる線ノ一致スル目盛ヲ讀定シ, 3 ヲ得テ答トスル。

例 2. $\sqrt{64}$ ヲ求メヨ。

右方 A 尺上ノ 64 ニ對シテ例 1 ト同様ノ方法ヲ施シテ D 尺上ニ於テ 8 ヲ得テ答トスル。

例 3. $\sqrt{34567}$ ヲ求メヨ。

與ヘラレタ數 34567 ヲ小數點ヨリ左方二桁毎ニ區切レバ

$$\sqrt{34567} = \sqrt{3.4567 \times 10^4} = \sqrt{3.4567} \times 10^2$$

デアル。故ニ $\sqrt{3.4567}$ ヲ例 1 ト同様ニシテ求メテ 1.86 ヲ得, 之ヲ 10^2 倍シ, 186 ヲ得テ答トスル。

例 4. $\sqrt{0.00527}$ ヲ求メヨ。

與ヘラレタ數 0.00527 ヲ小數點ヨリ右方二桁毎ニ區切レバ

$$\sqrt{0.00527} = \sqrt{52.7 \times 10^{-4}} = \sqrt{52.7} \times 10^{-2}$$

デアル。故ニ $\sqrt{52.7}$ ヲ例 2 ト同様ニシテ求メテ 7.26 ヲ得, 之ヲ 10^{-2} 倍シ, 0.0726 ヲ以テ答トスル。

問題

計算尺ニ依ツテ次ノ結果ヲ求メヨ。

10. $\sqrt{5.6}$ **11.** $\sqrt{18.3}$

12. (*a*) $\sqrt{21865}$ (*b*) $\sqrt{7453}$

2.8. 立方 $a^3 = a^2 \times a$ デアル。故ニ a^3 ヲ求メルニハ D 尺上ノ a ニかーそる線ヲ置キ, 是ニ B 尺ノ左方又ハ右方指數ヲ合ハセ, B 尺ノ a ニ一致スル A 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ良イ。

例 1. 1.35^3 ヲ求メヨ。

D 尺上ノ 1.35 ノ目盛ニ C 尺ノ左方指數ヲ合ハセ, 左方 B 尺上ノ 1.35 ニ對應スル左方 A 尺上ノ目盛ヲ讀定シ, 2.46 ヲ得テ答トスルノデアル。

例 2. 567^3 ヲ求メヨ。

$$567^3 = (5.67 \times 10^2)^3 = 5.67^3 \times 10^6$$

デアル。然ルニ $5.67^3 = 182.3$ ハ例 1 ト同様ニシテ知レル。故ニ 182.3 ヲ 10^6 倍シ, 182300000 ヲ得テ答トスル。

問題

計算尺ニ依ツテ次ノ結果ヲ求メヨ。

13. 3.9^3 **14.** 254^3 **15.** 0.56^3

2.9. 立方根 與ヘラレタ數ヲ A 尺上ニ置キ，かーそる線ヲ此ノ目盛ニ合ハセ，滑尺ヲ右又ハ左ニ引出シ，かーそる線下ノ B 尺上ノ數ト，C 尺ノ指數ニ對スル D 尺上ノ數ガ同一ノ數ニナルヤウニスル。此ノ時ノ D 尺上ノ讀數ハ求メル立方根デアル。

例 1. $\sqrt[3]{8.5}$ ヲ求メヨ。

左方 A 尺ノ 8.5 ニかーそる線ヲ合ハセ，滑尺ヲ右ニ引出シ，かーそる線下ノ B 尺上ノ數ト，C 尺ノ指數ニ對スル D 尺上ノ數ガ同一ノ數ニナルヤウニスレバ 2.04 デアル。故ニ 2.04 ヲ求メル立方根トスル。

例 2. $\sqrt[3]{64.8}$ ヲ求メヨ。

右方 A 尺ノ 64.8 ニかーそる線ヲ合ハセ，滑尺ヲ右ニ引出シ，かーそる線下ノ B 尺上ノ數ト，C 尺ノ指數ニ對スル D 尺上ノ數ガ同一ノ數ニナルヤウニスレバ 4.02 デアル。故ニ 4.02 ヲ求メル立方根トスル。

例 3. $\sqrt[3]{345.6}$ ヲ求メヨ。

左方 A 尺ノ 345.6 ニかーそる線ヲ合ハセ，滑尺ヲ左ニ引出シ，かーそる線下ノ B 尺上ノ數ト，C 尺ノ指數ニ對スル D 尺上ノ數ガ同一ノ數ニナルヤウニスレバ 7.02 デアル。故ニ 7.02 ヲ求メル立方根トスル。

若シ整數部ノ桁ガ上例以外ノ場合ニハ次ノ如クシテ是等ノ場合ニ直シテ求メレバ良イ。

例ヘバ $\sqrt[3]{54792}$ ヲ求メル時ハ之ヲ

$$\sqrt[3]{54.792\times10^3}=\sqrt[3]{54.792}\times10$$

ト考ヘテ例 2 ニ依ツテ結果ヲ求メ，又 $\sqrt[3]{0.00258}$ ヲ求メル時ハ之ヲ

$$\sqrt[3]{2.58\times10^{-3}}=\sqrt[3]{2.58}\times10^{-1}$$

ト考ヘ，例 1 ニ依リ結果ヲ求メレバ良イノデアル。

問題

計算尺ニ依ツテ次ノ結果ヲ求メヨ。

16. (*a*) $\sqrt[3]{3.45}$ (*b*) $\sqrt[3]{54.3}$ (*c*) $\sqrt[3]{753}$

17. (*a*) $\sqrt[3]{4352}$ (*b*) $\sqrt[3]{0.002139}$

2.10. 對數 通常ノ計算尺ノ滑尺ノ裏面ニハ L 尺ノ目盛ガアル。目盛ノ大キサハ D 尺ト同長ノ間隔ヲ 10 等分シ，各區分ヲ更ニ 50 等分シタモノデアル。今例ニ依ツテ或數ノ對數及ビ或對數ノ眞數ヲ求メル方法ヲ説明スル事ニスル。

例 1. $\log_{10}258$ ヲ求メヨ。

此ノ場合ニハ D 尺上ニ 258 ヲ置キ，滑尺ノ左方指數ヲ是ニ一致サセ，裏面指線ニ對スル L 尺上ノ目盛ヲ讀定シ 412 ヲ得ル。而シテ對數ノ性質ニ依リ 258 ハ三桁ノ數デアルカラ，其ノ對數ノ指標ハ 2 デアル。故ニ 2.412 ヲ以テ求メル答トスル。

例 2. $\log_{10}x=1.7102$ ヨリ x ヲ求メヨ。

此ノ場合ニハ 7102 ヲ L 尺上ニ置キテ指線ニ一致サセ，裏返シテ C 尺上ノ左方指數ニ對スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定シ，513 ヲ得ル。而シテ對數ノ指標ハ 1 デアルカラ x ハ整數部ガ二桁ノ數デアル。故ニ $x=51.3$ ヲ以テ答トスル。

問題

計算尺ニ依ツテ次ノ値ヲ求メヨ。

18. (*a*) $\log_{10}438$ (*b*) $\log_{10}5870$ (*c*) $\log_{10}0.076$

計算尺ニ依ツテ次ノ x ヲ求メヨ。

19. (*a*) $\log_{10}x=1.8632$ (*b*) $\log_{10}x=2.631$ (*c*) $\log x=0.0216$

2.11. 三角函數 通常ノ計算尺ノ滑尺ノ裏面ニハ S 及ビ T ナル二種ノ目盛ガアリ，其ノ中 S 尺ニハ角度 34′ 乃至 90° ノ正弦ノ目盛ガアリ，T 尺ニハ角度 5°43′ 乃至 45° ノ正切ノ目盛ガアリ，又臺尺ノ裏面ニハ左右兩端ニ近ク一個宛ノ指線ガアル。次ニ例ヲ設ケテ或角ノ正弦，正切及ビ正弦，正切ノ既知ナル角ヲ求メル方法ヲ説明スル。

〔1〕 **既知角 θ ノ正弦** $(0°—0°34′—5°44′—70°—90°)$

{*1*} **$0°<\theta<0°\,34''$ ノ場合**

例 $\sin 24'$ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク 34′ ヨリ小ナル角ノ正弦ヲ求メルニハ $\sin\theta=\theta\sin 1'$ ニ依リ次ノ如クスル。即チ

$$\sin 24' = 24 \sin 1' = 24 \times 0.000291 = 0.00702$$

{2} $0°\,34' < \theta < 5°\,44'$ ノ場合

例 $\sin 4°\,50'$ ヲ求メヨ。

$\sin 0°\,34' = 0.01$ デ $\sin 5°\,44' = 0.1$ デアル。故ニ $0°\,34'$ ト $5°\,44'$ トノ間ノ角ノ正弦ハ 0.01 ト 0.1 トノ間ニアル。斯カル場合ニハ S 尺上ノ $4°\,50'$ ト裏面指線トヲ一致サセ，A 尺ノ右方指數ニ對スル B 尺上ニテ 843 ヲ得，上述ノ小數點ノ位置ヲ考ヘ，0.0843 ヲ以テ答トスル。

{3} $5°44' < \theta < 70°$ ノ場合

例 $\sin 31°$ ヲ求メヨ。

$\sin 5°\,44' = 0.1$ デアル。故ニ $0.1 < \sin 31°$ デアル。斯カル場合ニハ前例ノ如クシテ 515 ヲ得，此ノ小數點ノ位置ヲ考ヘ，0.515 ヲ以テ答トスル。

{4} $70° < \theta < 90°$ ノ場合

例 $\sin 86°20'$ ヲ求メヨ。

S 尺ノ目盛ハ 70° 以上ハ粗ク使用シ難イ。依ツテ本例ノ如キ場合ニハ次ノ如クスル。即チ

$$\sin\theta = 1 - 2\sin^2\frac{90° - \theta}{2} = 1 - 2\sin^2 1°\,50'$$

故ニ $\sin 1°50' = 0.0320$ ヲ求メ，更ニ $2 \times 0.0320^2 = 0.0020$ ヲ計算シ，之ヲ 1 ヨリ減ジ，0.998 ヲ以テ答トスル。

問 題

計算尺ニ依ツテ次ノ値ヲ求メヨ。

20.	(*a*) $\sin 18°$	(*b*) $\sin 34°$	(*c*) $\sin 65°$
21.	(*a*) $\sin 21°\,40'$	(*b*) $\sin 47°\,10'$	(*c*) $\sin 59°\,20'$
22.	(*a*) $\sin 0°\,18'$	(*b*) $\sin 0°\,31'$	
23.	(*a*) $\sin 1°\,26'$	(*b*) $\sin 3°\,43'$	(*c*) $\sin 5°\,08'$
24.	(*a*) $\sin 72°$	(*b*) $\sin 83°$	

〔2〕 正弦ノ既知ナル角 θ (0—0.01—0.1—0.8—1)

{1} $0 < \sin\theta < 0.01$ ノ場合

例 $\sin\theta = 0.0084$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

$\sin\theta$ ガ微小ナルトキハ θ ヲ分デ表セバ $\sin\theta = \theta \sin 1'$ デアル。

故ニ
$$\theta = \frac{1}{\sin 1'}\sin\theta$$
從ツテ
$$\theta = 3438 \sin\theta$$
故ニ本問ニ於テハ
$$\theta = 3438 \times 0.0084 = 29 \quad (\text{分})$$
デアル。

{2} $0.01 < \sin\theta < 0.1$ ノ場合

例 $\sin\theta = 0.0233$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク眞數ガ 0.01 ト 0.1 トノ間ニアルトキハ左方 B 尺上ノ眞數 0.0233 ヲ A 尺上ノ指數ニ一致サセ，裏面指線ニ對スル S 尺上ニテ所求ノ角度
$$\theta = 1°\,20'$$
ヲ得ルノデアル。

{3} $0.1 < \sin\theta < 0.8$ ノ場合

例 $\sin\theta = 0.233$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク眞數ガ 0.1 ト 1 トノ間ニアルトキハ右方 B 尺上ノ眞數 0.0233 ヲ A 尺上ノ指數ト一致サセ，裏面指線ニ對スル S 尺上ニテ所求ノ角度
$$\theta = 13°\,30'$$
ヲ得ルノデアル。

{4} $0.8 < \sin\theta < 1$ ノ場合

例 $\sin\theta = 0.932$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク $\sin\theta$ ガ 0.8 ヨリ大ナルトキハ次ノ如クスル。

即チ
$$\sin\frac{90° - \theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{2}}$$
デアルカラ
$$\sin\frac{90° - \theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - 0.932}{2}} = \sqrt{0.034}$$

故ニ $\sqrt{0.034} = 0.1844$ ヲ正弦トスル角 $10°\,40'$ ノ二倍即チ $21°\,20'$ ヲ $90°$ ヨリ減ジタモノ $68°\,40'$ ヲ以テ答トスル。

問 題

計算尺ニ依ツテ次ノ各式ヨリ θ ヲ求メヨ。

25. (*a*) $\sin\theta=0.243$　(*b*) $\sin\theta=0.382$　(*c*) $\sin\theta=0.473$

26. (*a*) $\sin\theta=0.532$　(*b*) $\sin\theta=0.654$　(*c*) $\sin\theta=0.753$

27. (*a*) $\sin\theta=0.00345$　(*b*) $\sin\theta=0.00493$

28. (*a*) $\sin\theta=0.897$　(*b*) $\sin\theta=0.935$

〔3〕 **既知角ノ餘弦及ビ餘弦ノ既知ナル角**　三角法ニ依レバ

$$\cos\theta=\sin(90^\circ-\theta)$$

デアルカラ，或角ノ餘弦ヲ求メルコトハ其ノ餘角ノ正弦ヲ求メルコトニ歸シ，又餘弦ノ既知ナル角ヲ求メルコトハ正弦ノ既知ナル角ヲ求メルコトニ歸スル。故ニ上述ノ方法デ求メラレル。

問　題

次ノ各式ヨリ θ ヲ求メヨ。

29. (*a*) $\cos\theta=0.456$　(*b*) $\cos\theta=0.693$　(*c*) $\cos\theta=0.7753$

〔4〕 **既知角 θ ノ正切** $(0^\circ—5^\circ 43'—45^\circ—48^\circ 17'—89^\circ 26'—90^\circ)$

{1} **$0^\circ<\theta<5^\circ 43'$ ノ場合**

例 $\tan 3^\circ 20'$ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク微小角ノ場合ニハ其ノ正切ハ正弦ニ等シイト見做シ得ルカラ，正弦ノ場合ト同樣ニシテ其ノ値ヲ求メルコトガ出來ル。即チ

$$\tan 3^\circ 20'=\sin 3^\circ 20'=200\sin 1'$$
$$=200\times 0.000291=0.0582$$

ヲ得ル。

{2} **$5^\circ 43'<\theta<45^\circ$ ノ場合**

例 $\tan 20^\circ 30'$ ヲ求メヨ。

$\tan 5^\circ 43'=0,1$ デ $\tan 45^\circ=1$ デアルカラ，$5^\circ 43'$ ト 45° トノ間ノ角ノ正切ハ 0.1 ト 1 トノ間ニアル。本例ノ如ク $5^\circ 43'$ ト 45° トノ間ノ角ノ正切ヲ求メル場合ニハ T 尺上ノ $20^\circ 30'$ ニ左方指數ヲ一致サセ，裏返シテ D 尺ノ左方指數ニ對スル C 尺上ノ目盛ヲ讀定スレバ 3739 ヲ得ル。故ニ上述ノ小數點ノ位置ヲ考ヘ，0.3739 ヲ以テ答トスル。

{3} **$45^\circ<\theta<84^\circ 17'$ ノ場合**

例 $\tan 67^\circ 10'$ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク 45° ト $84^\circ 17'$ トノ間ノ角ノ正切ヲ求メル場合ニハ次ノ如クスル。即チ三角法ニ依レバ

$$\tan\theta=\frac{1}{\tan(90^\circ-\theta)}$$

デアルカラ，T 尺上ノ $90^\circ-\theta=90^\circ-67^\circ 10'=22^\circ 50'$ ヲ左方指數ニ一致サセ，C 尺ノ右方指數ニ對スル D 尺上ニ於テ所求ノ眞數 2.375 ヲ得ル。但シ此ノ場合ニ所求ノ眞數ハ 1 ト 10 トノ間ニアルコトヲ考ヘ，上ノ如ク小數點ヲ打ツノデアル。

{4} **$84^\circ 17'<\theta<89^\circ 26'$ ノ場合**

例 $\tan 88^\circ 30'$ ヲ求メヨ。

$\tan 84^\circ 17'=10$ デ $\tan 89^\circ 26'=100$ デアルカラ，$84^\circ 17'$ ト $89^\circ 26'$ トノ間ノ角ノ正切ハ 10 ト 100 トノ間ニアル。本例ノ如ク $84^\circ 17'$ ト $89^\circ 26'$ トノ間ノ角ノ正切ヲ求メル場合ニ於テハ次ノ如クスル。即チ $90^\circ-\theta$ ハ微小角デアルカラ其ノ正切ハ正弦ニ等シイト見做セル。

故ニ

$$\tan\theta=\frac{1}{\tan(90^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin 1^\circ 30'}$$

ナル關係ガアル。故ニ滑尺ヲ裏返シテ逆サニ挿入シ，$90-\theta$ ヲ S 尺上ニ置キ，かーそる線ヲ此ノ上ニ置キ，A 及ビ D 尺ノ左方指數ト，T 尺及ビ S 尺ノ右方指數ト一致サセ，かーそる線下 A 上ニテ目盛ヲ讀定スレバ 3819 ヲ得ル。故ニ小數點ノ位置ヲ考ヘ，38.19 ヲ以テ答トスル。

{5} **$89^\circ 26'<\theta<90^\circ$ ノ場合**

例 $\tan\theta=\tan 89^\circ 45'$ ヲ求メヨ。

本例ノ如ク $90^\circ-\theta$ ガ微小角ノトキハ次ノ如クスル。

$$\tan\theta=\frac{1}{\tan(90^\circ-\theta)}=\frac{1}{\sin(90^\circ-\theta)}=\frac{3438}{90^\circ-\theta}$$

但シ $90^\circ-\theta$ ハ分ニテ表ス。

$90^\circ-\theta=90^\circ-89^\circ 45'=15'$ ヲ C 尺上ニ置キ，D 尺ノ 3438 ト一致サセ，C 尺ノ右方指數ニ對スル D 尺上ノ目盛ヲ讀定シ，小數點ノ位置ヲ考ヘ 229 ヲ得テ答トスル。

問　題

計算尺ニ依ツテ次ノ値ヲ求メヨ。

30. (*a*) $\tan 10^\circ 20'$　(*b*) $\tan 29^\circ 40'$　(*c*) $\tan 37^\circ 50'$

31. (*a*) tan 48° 40′ (*b*) tan 54° 20′ (*c*) tan 64° 30′

32. (*a*) tan 1° 30′ (*b*) tan 2° 10′ (*c*) tan 3° 50′

33. (*a*) tan 85° (*b*) tan 88° 30′

34. (*a*) tan 89° 30′ (*b*) tan 89° 40′

〔5〕 正切ノ既知ナル角 θ (0—0.1—1—10—100—∞)

{1} $0<\tan\theta<0.1$ ノ場合

例 $\tan\theta=0.065$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

$0.065<0.1$ デアルカラ $\theta<5°43'$ デアッテ．斯カル微小角ニ對シテハ次ノ式ヲ書クコトガ出來ル。

$$\tan\theta'=\theta'\tan 1'=\theta'\times\frac{1}{3438}$$

故ニ $\theta'=3438\tan\theta'$

故ニ $\theta'=3438\times 0.065=223'=3°43'$

即チ $3°43'$ ヲ以テ答トスルノデアル。

{2} $0.1<\tan\theta<1$ ノ場合

例 $\tan\theta=0.468$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

$0.1<0.468<1$ デアルカラ，$5°43'<\theta<45°$ デアル。斯カル場合ニハ C 尺上ノ 468 ヲ D 尺ノ左方指數ニ一致サセ，左方裏面指線ニ對スル T 尺上ノ目盛ヲ讀定シ，

$$\theta=25°5'$$

ヲ得テ答トスル。

{3} $1<\tan\theta<10$ ノ場合

例 $\tan\theta=7.86$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

$1<7.86<10$ デアルカラ，$45°<\theta<84°17'$ デアル。斯カル場合ニハ 7.86 ヲ D 尺上ニ置キ，C 尺ノ右方指數ト一致サセ，裏返シテ左方指數ニ對スル T 尺上ノ角度 $7°15'$ ヲ得，之ヲ $90°$ ヨリ減ジ，

$$\theta=82°45'$$

ヲ得テ答トスル。

{4} $10<\tan\theta<100$ ノ場合

例 $\tan\theta=20.4$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

$10<20.4<100$ デアルカラ $84°17'<\theta<89°26'$ デアル。斯カル場合ニハ三角公式

$$\tan\theta=\frac{1}{\tan(90°-\theta)}=\frac{1}{\sin(90°-\theta)'}$$

ニ依リ S 尺ヲ使用シテ計算スル。即チ滑尺ヲ拔キ，裏返シテ逆サニ挿入シ，S 尺ト D 尺トヲ相接シテ其ノ各々ノ指數ト指數トヲ一致サセ，右方 A 尺上ノ 204 ニ對應スル S 尺上ニテ角度ヲ讀定シテ $2°48'$ ヲ得，之ヲ $90°$ ヨリ減ジタモノ $87°12'$ ヲ以テ答トスル。

{5} $100<\tan\theta<\infty$ ノ場合

例 $\tan\theta=125$ ヨリ θ ヲ求メヨ。

$100<125$ デアルカラ $89°26'<\theta$ ナルコトハ明カデアル。斯クノ如ク $90°-\theta$ ガ微小角デアルトキハ，之ヲ分ニテ表セバ

$$\tan\theta=\frac{1}{\tan(90°-\theta)}=\frac{1}{\sin(90°-\theta)}=\frac{3438}{90°-\theta}$$

故ニ C 尺上ノ 125 ヲ D 尺上ノ 3438 ニ一致サセ，C 尺ノ指數ニ對スル D 尺上ニテ目盛(分數) ヲ讀定シテ 27.′5 ヲ得，之ヲ $90°$ ヨリ減ジタモノ $89°32'.5$ ヲ以テ答トスル。

問　題

計算尺ニ依ツテ次ノ各式ノ θ ヲ求メヨ。

35. $\tan\theta=0.0346$

36. (*a*) $\tan\theta=0.135$ (*b*) $\tan\theta=0.384$

37. (*a*) $\tan\theta=2.46$ (*b*) $\tan\theta=3.21$

38. (*a*) $\tan\theta=15.82$ (*b*) $\tan\theta=25.36$

39. (*a*) $\tan\theta=284$ (*b*) $\tan\theta=876$

〔6〕 既知角ノ餘切及ビ餘切ノ既知ナル角 三角法ニ依レバ

$$\cot\theta=\tan(90°-\theta)$$

デアルカラ，或角ノ餘切ヲ求メルコトハ其ノ餘角ノ正切ヲ求メルコトニ歸シ，又餘切ノ既知ナル角ヲ求メルコトハ正切ノ既知ナル角ヲ求メルコトニ歸スル。故ニ上述ノ方法ニ依ツテ求メラレルノデアル。

問　題

次ノ各式ノ θ ヲ求メヨ。

40. (a) $\cot\theta=1.861$ (b) $\cot\theta=0.679$

2.12. 文字解說 計算尺上ニ記サレタ主ナル文字ノ意味ハ次ノ如クデアル。

$$M=\frac{100}{\pi}=31.83 \qquad C=\sqrt{\frac{4}{\pi}}=1.128$$

$$C'=\sqrt{\frac{40}{\pi}}=3.569 \qquad \rho'=\frac{1}{\sin 1'}=3438=\left(\frac{360\times 60}{2\pi}\right)$$

$$\rho''=\frac{1}{\sin 1''}=206265=\left(\frac{360\times 60\times 60}{2\pi}\right)$$

附錄第三

第二章　雜　題

1. 二點 $(3, y)$, $(-4, 8)$ ノ距離ハ 13 デアルト云フ。y ノ値ヲ求メヨ。

2. $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$, $C(3, -2)$ ヲ頂點トスル三角形ノ外心ノ座標ヲ求メヨ。

3. $(0, 0)$, $\left(3, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(3, \frac{\pi}{6}\right)$ ヲ頂點トスル三角形ハ正三角形デアルコトヲ證明セヨ。

4. $(-3, 4)$, $(5, -2)$ ナル二點ヲ底邊ノ兩端トスル正三角形ノ頂點ノ座標ヲ求メヨ。

5. 極座標 $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$ ヲ直角座標ニ直セ。

6. $\rho^2=2a^2\cos 2\theta$ ヲ直角座標ニ關スル方程式ニ直セ。

7. $x^3-3axy+y^3=0$ ヲ極座標ニ關スル方程式ニ直セ。

第四章　雜　題

1. 原點ヲ通リ直線 $3x+5y=7$ ニ平行ナル直線ノ方程式ヲ求メヨ。

2. 三直線 $3x+y=2$, $ax+2y-3=0$, $2x-y=3$ ガ一點ニ會スルナラバ a ノ値如何。

3. 二點 $(5, -3)$, $(-4, -1)$ ヲ兩端トスル線分ノ垂直二等分線ノ方程式ヲ求メヨ。

4. 二定點カラノ距離ノ平方ノ差ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

5. $3x^2-7xy+2y^2-x+7y-4=0$ ハ二直線ヲ表シ，交角ハ $45°$ ナルコトヲ證明セヨ。

6. $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(-2, 1)$ ヲ頂點トスル三角形ノ面積ヲ求メヨ。

7. 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ニ會スルコトヲ證明セヨ。

8. $(2, -3)$ ヲ通リ直線 $2x+y+3=0$ ト $45°$ ノ角ヲナス直線ノ方程式ヲ求メヨ。

第五章雜題

1. 點 $(-3, 5)$ ヲ中心トシ，半徑ガ 5 ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 圓 $x^2+y^2-4x+6y=12$ ノ中心ノ座標及ビ半徑ヲ求メヨ。

3. 點 $(5, 2)$ ハ圓 $x^2+y^2-6x-8y=0$ ノ外ニアルカ，內ニアルカ。

4. $x^2+y^2=4$ ノ切線ノ中 $x+2y+3=0$ ニ平行ナモノヲ求メヨ。

5. 二點 $(5, 2)$, $(7, 6)$ ヲ通リ，半徑ガ 5 ナル圓ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 三定點カラノ距離ノ平方ノ和ガ一定ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

7. 定點ト定圓上ノ任意ノ點ヲ結ビ付ケタ線ヲ定比ニ分ツ點ノ軌跡ヲ求メヨ。

8. O ハ定點，P ハ定直線上ノ任意ノ點ナルトキ OP 上ニ點 Q ヲ $OP \cdot OQ=k^2$, (k ハ常數) ナル樣ニトルトキ Q ノ軌跡ヲ求メヨ。

9. 半徑 r ナル圓ノ任意ノ切線ガ直徑 AB ノ兩端ニ於ケル切線ト交ハル點ヲ夫夫 Q, R トスレバ $AQ \cdot BR=r^2$ ナルコトヲ證明セヨ。

第六章雜題

1. $x^2+y^2+6x-2y=0$ ノ一次ノ項ヲ消失セシメルニハ原點ヲ何レニ移シタラヨイカ。$(-3, 1)$

2. $x^2+y^2=r^2$ ハ軸ノ廻轉ニヨツテ變化シナイコトヲ證明セヨ。

3. 直交軸ヲ 45° 廻轉スルトキ次ノ式ハドウ變ルカ。

(a) $x^2+y^2+2xy=1$ $\left(X=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $x^4+y^4+6x^2y^2=1$ $\left(X^4+Y^4=\dfrac{1}{2}\right)$

4. 原點ヲ $\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}\right)$ ニ移シ，軸ヲ 45° 廻轉スルトキ $2x^2-5xy+2y^2+3y-4=0$ ハドウ變ルカ。$(x^2-9y^2+4=0)$

5. $x^2+6xy+y^2-3=0$ ノ xy 項ヲ消失セシメルニハ兩軸ヲ何度廻轉シタラヨイカ。(45°)

第七章雜題

1. 通徑ノ長サ $\dfrac{18}{5}$, 離心率 $\dfrac{4}{5}$ ナル楕圓ノ方程式ヲ求メヨ。

2. 短軸ノ一端ニ於テ二ツノ焦點ノ張ル角ガ直角ナル楕圓ノ兩軸ノ比ハ $\sqrt{2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. 楕圓 $x^2+6y^2=6$ ノ切線ノ中デ直線 $y=2x$ ニ平行ナルモノノ方程式ヲ求メヨ。

4. 楕圓 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ ト直線 $y=x$ トノ交點ノ離心角ヲ求メヨ。

5. 楕圓 $x^2+4y^2=5$ ト直線 $x=2$ トノ交點ニ於ケル楕圓ノ切線ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 直線 $y=mx+2$ ガ楕圓 $x^2+4y^2=1$ ニ切スル如ク m ノ値ヲ定メヨ。

7. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ互ニ垂直ナル切線ノ交點ノ軌跡ヲ求メヨ。

8. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ニ於テ角係數 m ナル平行弦ノ中點ノ軌跡ハ $y=-\dfrac{b^2}{a^2m}x$ ナルコトヲ證明セヨ。

9. 中心 C ナル楕圓上ノ點 P ヨリ x 軸ニ下セル垂線ノ足ヲ M トシ，又點 P ニ於ケル切線ガ x 軸ト交ル點ヲ T トスレバ，$CM \cdot CT$ ハ一定ナルコトヲ證明セヨ。

10. 中心 C ナル楕圓上ノ一點ヲ短軸ノ兩端ニ結ビ付ケタル直線ガ長軸又ハ其ノ延長ト交ル二點ヲ M, N トスレバ，$CM \cdot CN$ ハ一定ナルコトヲ證明セヨ。

第八章雜題

1. 双曲線 $3y^2-4x^2+24=0$ ノ焦點ノ座標，離心率及ビ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

2. 双曲線 $x^2-3y^2=48$ ノ共軛双曲線ノ焦點ノ座標及ビ準線ノ方程式ヲ求メヨ。

3. 双曲線 $25x^2-9y^2=225$ ト直線 $25x-12y=45$ トノ交點ヲ求メヨ。

4. 二ツノ定圓ニ外切スル圓ノ中心ノ軌跡ハ定圓ノ中心ヲ焦點トスル双曲線ナルコトヲ證明セヨ。

5. 双曲線 $4x^2-9y^2=1$ ニ於テ直線 $4x-3y=1$ ニ平行ナル切線ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 漸近線ノ方程式ガ $y=\pm 2x$ ニシテ，一點 P(1, 1) ヲ通ル双曲線ノ方程式ヲ求メヨ。

7. 楕圓 $x^2+2y^2=1$ ト双曲線 $3x^2-6y^2=1$ トノ交點ニ於ケル楕圓ノ切線ハ其ノ點ニ於ケル双曲線ノ法線トナルコトヲ證明セヨ。

8. 双曲線ノ離心率ハ其ノ漸近線ノナス角ノ半分ヲ α トスレバ，$\sec\alpha$ ニ等シキ

コトヲ證明セヨ。

9. 等邊双曲線上ノ任意ノ一點ヨリ中心マデノ距離ハ其ノ點ヨリ兩焦點ニ至ル距離ノ比例中項トナルコトヲ證明セヨ。

10. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ切線ニ中心ヨリ下セル垂線ノ足ノ軌跡ハ $(x^2+y^2)^2=a^2x^2-b^2y^2$ トナルコトヲ證明セヨ。

第十章　雜　題

1. 次ノ各問ニ於ケル x 及ビ y ノ函數的關係如何。

(a) $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=a\sin\varphi \end{cases}$　　(b) $\begin{cases} x=a\cos\varphi \\ y=b\sin\varphi \end{cases}$

2. $x=a\sec\varphi,\ y=b\tan\varphi$ ナルトキ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ナル函數的關係アルコトヲ證セヨ。

3. $f(x)=2x^3-3x^2+3x+14$ ナルトキ $f(-1),\ f(0),\ f(1),\ f(2)$ ノ値如何。

4. $f(x)=x^4+7x^3-2x^2-15x+13$

$\varphi(x)=x^3+5x^2-17x+6$

ナルトキ $3f(1)=2\varphi(0)$ ナルコトヲ證明セヨ。

5. 次ノ各函數ノ逆函數ヲ求メヨ。

(a) $y=\sqrt{2x-7}$　　(b) $y=\dfrac{a^2x+b^2}{ax-b}$

6. 次ノ各函數ガ表ス曲線ヲ畫ケ。

(a) $y=-2x^2$　　(b) $y=-x^3$

第十一章　雜　題

次ノ各題ニ於テ其ノ極限値ヲ求メヨ。

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x(x+1)}$　　**2.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}$　　**4.** $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-6x^2}{3x^4-12x^2}$　　**6.** $\lim\limits_{m\to 0}\dfrac{(x-m)^2-2mx^3}{x(x+m)}$

7. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot ax$　　**8.** $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-x)$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+1}{x+1}$　　**10.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a+bx+cx^2}{d+ex+fx^2}$

11. $\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{1}{x}}$

第十二章　雜　題

1. 函數 $\dfrac{2x}{x^2-1}$ ハ x ノ如何ナル値ニ對シテ不連續デアルカ。

2. $y=x^3+2x$ ノ微係數ハ $x=2$ ナルトキ如何ナル値ヲ取ルカ。

3. $y=\dfrac{1}{x}$ ノ微係數ヲ求メヨ。

4. 函數 $\dfrac{3x+2}{x^2-5x+6}$ ハ區間 $(0,5)$ ニ於テ連續デアルカ。

第十三章　雜　題

次ノ各函數ノ微係數ヲ求メヨ。

1. $\sqrt{a^3-x^3}$　　**2.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3. $(x^2+4)(x^2+5x+7)$　　**4.** $\dfrac{3x^3-2}{x^2}$

5. $\dfrac{(1+x^2)(1+2x)}{x^2}$　　**6.** $(3x^2-2x)^7$

7. $\left(5x^2-\dfrac{3}{2}x^3\right)^5$　　**8.** $(5+4x)\sqrt{3x+2}$

9. $\tan^2(px^2+q)$　　**10.** $(a^2\sin^2x-b^2\cos^2x)^m$

11. $x\sqrt{a^2-x^2}$　　**12.** $\tan 3x-\cot 3x$

13. $e^x(\sin 2x-\sin x)$　　**14.** $\sin^2x\cos^3x$

15. $\sec(ax+b)$　　**16.** $\sin(\log x)$

17. $\log\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$　　**18.** $\log(\sin 2x)$

19. $e^{ax}(1+bx^3)$　　**20.** $\dfrac{x^m}{(1+x)^m}$

21. $\dfrac{1}{3}\tan^3x+\tan x+x^3$　　**22.** $\left(\dfrac{x}{a}\right)^{ax}$

23. $\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$　　**24.** $\sin^{-1}x^2$

25. $x^3 \sec ax$

26. $\tan^{-1} x + \tan^{-1} \frac{1}{x}$

27. $\log \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}}$

28. $(1+x^2) e^{\tan^{-1} x}$

29. $x \sin^{-1} \sqrt{x}$

30. $2xy + y^2 - 10 = 0$

31. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

32. $x^3 y - y^4 + x^4 = a^4$

33. $y = ax^2 + b$ ナルトキハ $xy'' - y' = 0$ ナルコトヲ證セヨ。

34. $y = x^3 - 3x$ ヨリ $x = -1$ ナルトキノ y'' ノ値ヲ求メヨ。

35. 半徑 5 cm ノ球ガアル。半徑ガ 0.02 cm 增加スルトキ體積ノ增加ハ約何程デアルカ。

第十四章　雜　題

次ノ函數ヲ積分セヨ。〔1—14〕

1. (a) $\sqrt[4]{x^3}$　　1. (b) $\frac{a}{x^4}$

2. (a) $e^x - e^{-x}$　　2. (b) $\frac{3}{5-2x}$

3. (a) $\cos^2 ax$　　3. (b) $\operatorname{cosec}^2 \frac{x}{a}$

4. (a) $\frac{4}{1+9x^2}$　　4. (b) $\frac{1}{36-x^2}$

5. (a) $\frac{c}{\sqrt{a^2x^2-b^2}}$　　5. (b) $e^{-ax} + \cos bx$

6. (a) $\cot ax$　　6. (b) $\frac{2x}{x+2} - \frac{4x}{4+x^2}$

7. (a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$　　7. (b) $\frac{b \sin 2x}{a + b \sin^2 x}$

8. (a) $\sin^2 bx$　　8. (b) $\frac{x^3}{1-x^2}$

9. (a) $\frac{6x+9}{3x^2-x-2}$　　9. (b) $\frac{x+4}{x^2+4x+3}$

10. (a) $\cos 10x \sin 3x$　　10. (b) $\cot^4 x$

11. (a) $\tan^5 x$　　11. (b) $\sin^2 x \cos^2 x$

12. (a) $\frac{2x}{(a^2+x^2)^4}$　　12. (b) $\frac{x-7}{x^2+4x+13}$

13. (a) $\sec x$　　13. (b) $\operatorname{cosec} x$

14. (a) $x \cos x$　　14. (b) $\frac{1}{\sqrt{x^2-2x}}$

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

15. (a) $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$　　15. (b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$

16. (a) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$　　16. (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$

17. (a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x \, dx$　　17. (b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$

18. (a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x \cos x \, dx$　　18. (b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \theta \sin \theta \cos \theta \, d\theta$

19. (a) $\int_0^a \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$　　19. (b) $\int_0^1 x(1-x)^9 \, dx$

20. (a) $\int_0^\infty \frac{dx}{a^2+b^2x^2}$　　20. (b) $\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$

第十五章　雜　題

1. $x>1$ ナルトキハ $e^x - x - 1$ ノ値ハ常ニ正ナルコトヲ證明セヨ。

2. $0<x<\frac{\pi}{2}$ ナルトキハ $x<\tan x$ ナルコトヲ證明セヨ。

3. $0<x<2\pi$ ナル場合ニ $\sin x + \cos x$ ノ極値ヲ求メヨ。

4. 次ノ函數ノ極値ヲ求メヨ。

(a) $x^4 - 1$　　(b) $4 \cos x + \cos 2x$

5. 二邊ノ長サ各 6 糎ナル二等邊三角形ノ內，面積ノ最大ナルモノヲ求メヨ。

6. 半徑 R ナル球ニ內接スル體積ガ最大ナル直圓錐ノ高サヲ求メヨ。

7. 半徑 R ナル圓板ヨリ扇形ヲ切去リ，殘リノ部分ヲ以テ圓錐體ヲ作リ，其ノ圓錐體ノ體積ヲ最大ニスルニハ切去ルベキ扇形ノ中心角ヲ殆ド 66° ニスレバヨイコトヲ證明セヨ。

8. 直圓錐ノ側面積ガ一定ナルトキ，其ノ體積ヲ最大ニスルニハ高サト底ノ半徑ヲ如何ナル關係ニシタラヨイカ。

第十六章　雑　題

1. 双曲線 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上ノ點 (x_1, y_1) ニ於ケル切線及ビ法線ノ方程式ヲ求メヨ。
2. $x^2y^2=a^3(x+y)$ ナル曲線上ノ點 $(0, 0)$ ニ於ケル切線ノ方程式ヲ求メヨ。$(a \neq 0)$
3. 曲線 $y=x^3-3x^2-9x+5$ ノ切線ガ x 軸ニ平行ナルトキ，ソノ切點ヲ求メヨ。
4. 次ノ諸曲線ノ夫々與ヘラレタ點ニ於ケル曲率半徑ヲ求メヨ。

   (*a*)　$y^2=2x^3$　$(2, 4)$　　　(*b*)　$y^2=4ax$　$(a, 2a)$, $(a \neq 0)$
5. 次ノ諸曲線ノ漸近線ヲ求メヨ。$(a>0)$

   (*a*)　$y^2=xy^2+x^3$　　　(*b*)　$(x-a)^2y=a^2x$
6. 次ノ諸曲線ヲ追跡セヨ。$(a>0)$

   (*a*)　$y=x^3-9x^2+24x-16$　　　(*b*)　$y=(x-1)^2(x+1)$

   (*c*)　$y^2=x^2(x-a)$

第十七章　雑　題

1. $f(x)=0$ ガ n 個ノ實根ヲ有スレバ $f'(x)=0$ ハ少クトモ $(n-1)$ 個ノ實根ヲ有スルコトヲ證明セヨ。但シ $f(x)$ 及ビ $f'(x)$ ハ連續函數トスル。
2. $\sin 32°$ ノ近似値ヲ求メヨ。
3. 次ノ函數ヲ x ノ羃級數ニ展開セヨ。

   (*a*)　$e^{\sin x}$　　　(*b*)　$\sec x$

第十八章　雑　題

次ノ極限値ヲ求メヨ。

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-7x^2+6x}{3x^2+2x}$　　　2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{5x^2+3}$

3. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$　　　4. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\cos 3x}$

5. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x-\dfrac{\pi}{2}}{\cos x}$　　　6. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

7. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin^{-1}x}{x^3}$　　　8. $\displaystyle\lim_{x\to 0}(\sin x)^x$

9. $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$　　　10. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$

第十九章　雑　題

1. [illegible]線 $y^2=9x$ ト $y=3x$ ノ間ノ面積ヲ求メヨ。
2. $y^2=2px$ ト $x^2=2py$ ノ間ノ面積ヲ求メヨ。
3. $y=x^2$ ト $y=x$, $y=2x$ ノ間ノ面積ヲ求メヨ。
4. $x^2+(y-a)^2=r^2$ ガ x 軸ノ周リニ回轉シタトキニ生ズル回轉體ノ體積及ビ其ノ表面積ヲ求メヨ。但シ $a>r$ トスル。
5. 楕圓 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ ノ全面積ヲ求メヨ。
6. 圓 $x^2+y^2=a^2$ ガ x 軸ノ周リニ回轉シテ生ズル曲面ノ表面積ヲ求メヨ。
7. 曲線 $y=\dfrac{\sin x}{x}$ ト兩座標軸トニ依ツテ圍マレタ圖形ガ y 軸ヲ軸トシテ回轉スルトキニ生ズル立體ノ體積ヲ求メヨ。
8. $\displaystyle\int_0^{10}x^3\,dx$ ヲしんぷそんノ公式ニ依ツテ計算セヨ。但シ $h=1$ トスル。
9. $\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x}dx$ ヲ用ヒテ $\log 2$ ヲ求メヨ。但シ $h=0.1$ トスル。

第二十章　雑　題

1. 直線 $x=0$, $y+z=0$ ノ方向餘弦ヲ求メヨ。
2. 線分 MP ガ座標軸上ニ投ズル射影ガ夫々 $4, 3, -1$ デアツテ點 M ノ座標ガ $(2, -1, 3)$ ナルトキ P 點ノ座標ヲ求メヨ。
3. 方向餘弦ガ夫々 $\left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}\right)$, $\left(\dfrac{3}{7}, \dfrac{2}{7}, \dfrac{6}{7}\right)$ ナル二直線ノナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。
4. 二平面 $Ax+By+Cz+D=0$ ト $A'x+B'y+C'z+D'=0$ トガナス角ノ餘弦ヲ求メヨ。
5. 二平面 $Ax+By+Cz+D=0$, $A'x+B'y+C'z+D'=0$ ノ交線ヲ含ミ且原點ヲ通ル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

6. 直線 $\frac{x-a}{L}=\frac{y-b}{M}=\frac{z-c}{N}$ ト平面 $Ax+By+Cz=D$ トノナス角 θ ノ正弦ヲ求メヨ。

7. 點 (a, b, c) ヲ通ツテ直線 $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ ニ垂直ナル平面ノ方程式ヲ求メヨ。

8. 導線ガ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=c$ ニシテ頂點ガ原點ニアル錐面ノ方程式ヲ求メヨ。此ノ錐面ヲ楕圓錐面ト云フ。

第二十一章　雜　題

1. $z=x^2y+xy^2$ ヨリ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ。

2. $z=(ax^2+by^2)^n$ ヨリ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ。

3. $z=3x^2+4y^2$ ヨリ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ ヲ求メヨ。

4. $z=x^2y$ ナラバ $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=3z$ ナルコトヲ證明セヨ。

5. $z=x^2\sin y+y^2\sin x$ ナルトキ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ ヲ求メヨ。

6. $z=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ ナルトキ dz ヲ求メヨ。

7. $z=a\sin(x+bt)+c\cos(x+bt)$ ナルトキ $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=b^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ ナルコトヲ證明セヨ。

第二十二章　雜　題

次ノ定積分ノ値ヲ求メヨ。

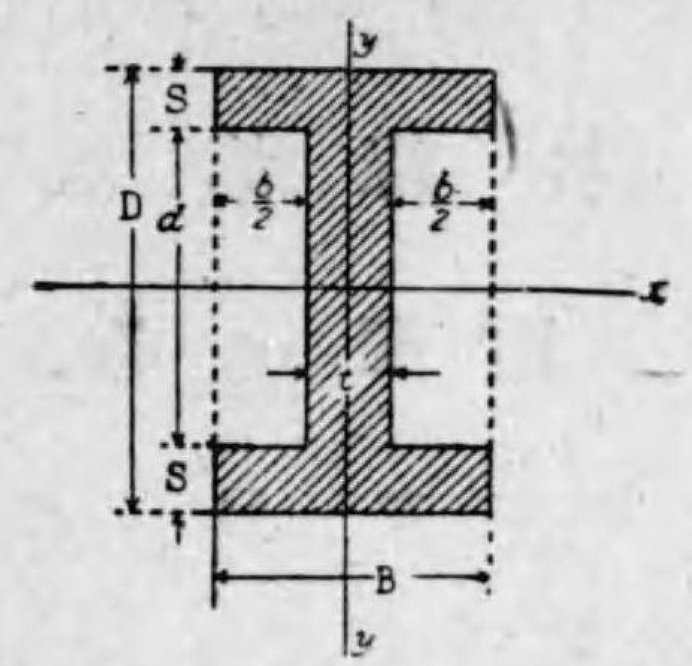
1. $\int_0^a\int_0^b x^2\,dx\,dy$

2. $\int_0^a\int_0^{2\sqrt{ax}} dy\,dx$

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$

4. $\int_0^a\int_{\frac{x^2}{a}}^{x}\frac{x}{x^2+y^2}dy\,dx$

5. 下圖ノ如キ平面圖形ノ y 軸ニ關スル慣性能率 I_y 及ビ廻轉半徑 R_y ヲ求メヨ。



6. 半徑 a ナル球體ノ直徑ニ關スル慣性能率ヲ求メヨ。

第二十三章　雜　題

1. $\frac{dy}{dx}=ax+b$

2. $\frac{dy}{dx}=e^x$

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1+x}}$

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{a^2}{(x+y)^2}$

5. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=\frac{1}{x^2}$

6. $\frac{dy}{dx}+2xy=x^3$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-15y=0$

8. $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y=0$

9. $\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^2$

10. $\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+5y=\frac{1}{2}\sin x$

附錄第四

問題ノ答

第二章問題

2. (*a*) $\sqrt{146}$　**2.** (*b*) $2\sqrt{29}$　**3.** $\left(-\frac{13}{14},\ \frac{39}{14}\right)$　**4.** $\left(\frac{11}{3},\ \frac{14}{3}\right)$

5. $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$　**7.** $P\left(\frac{5}{2},\ \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)$, $Q(-2\sqrt{3},\ -2)$,

$R(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$　**8.** $P\left(\sqrt{2},\ \frac{2\pi}{4}\right)$, $Q\left(4,\ \frac{5\pi}{3}\right)$, $R\left(2,\ \frac{7\pi}{6}\right)$

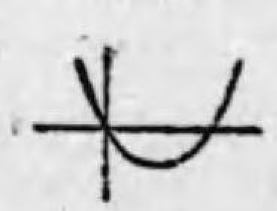
9. (*a*) $\rho=2a\sin\theta\sec 2\theta$　**9.** (*b*) $\rho^2=a^2$

第三章問題

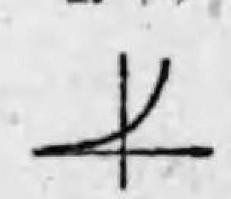
1. (*a*)

1. (*b*)

1. (*c*)



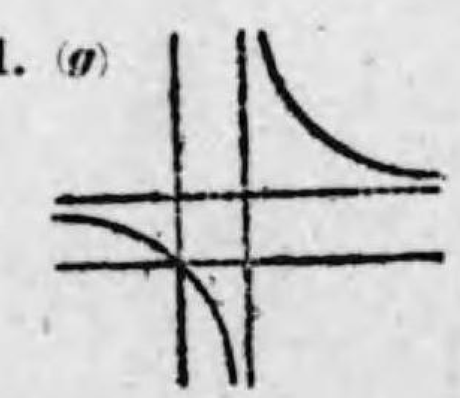
1. (*d*)



1. (*e*)

1. (*f*)

1. (*g*)



2. 通過セズ　**3.** $(4,\ -5)$　**4.** $(4,\ 3)$, $(4,\ -3)$

5. (*a*), (*c*)　**6.** $(0,\ b)$, $(0,\ -b)$

第四章問題

2. $x+y-5=0$　**3.** $\frac{x}{\sqrt{3}}+y-5=0$　**4.** $x+y+2=0$

5. $5x-y-13=0$　**6.** 一直線上ニナイ　**7.** $2x-y-6=0$

8. $\frac{12}{5},\ \frac{12}{7}$　**9.** $\left(\frac{8}{7},\ \frac{15}{7}\right)$

10. $Ax+By+C=\frac{Ax_1+By_1+C}{A'x_1+B'y_1+C'}(A'x+B'y+C')$　**11.** $45°$

12. $30°$　**13.** $\tan^{-1}\frac{10}{11}$　**15.** $2x-3y-\cancel{5}=0$ 13

17. $\sqrt{8}x-y+10=0$　**18.** $\frac{5}{2}$　**19.** 10

20. $\frac{34}{\sqrt{10}}$　**21.** $\frac{6}{\sqrt{5}}$　**22.** 30

23. 36

第五章問題

1. $x^2+y^2+12x+14y+60=0$　**2.** $x^2+y^2=2ry$

3. 外ニアル　**4.** (*a*) 中心 $(2,\ -6)$, 半徑 5　**4.** (*b*) 中心 $(-2,\ 3)$, 半徑 $\sqrt{\frac{17}{2}}$

5. $x^2+y^2-23x-19y+60=0$　**6.** $(-3,\ 4)$ $(2,\ -1)$

7. 交ラヌ　**8.** $3x\pm 4y=25$

第六章問題

1. $X^2+Y^2=25$　**2.** $\left(\frac{7}{2},\ -4\right)$　**3.** $Y=\sqrt{2}$

4. $\frac{X^2}{24}-\frac{Y^2}{8}=1$　**5.** $\frac{X^2}{2}+\frac{Y^2}{3}=1$

第七章問題

1. 長軸 10, 短軸 8, 焦點間ノ距離 6　**2.** $e=\frac{\sqrt{7}}{4}$

3. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$　**4.** $FB=a$　**5.** $6-\sqrt{3}$, $6+\sqrt{3}$

6. $\frac{45}{8}$　**7.** $x=\pm\frac{25}{4}$　**8.** $x+2y=4$

第八章問題

1. $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$　**2.** 焦點間ノ距離 10, 離心率 $\frac{5}{3}$

3. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 4. CM=CD=CA sec DCM トナル。

5. $\frac{25}{3}\pm3$, 通徑ノ長サ $\frac{22}{3}$ 6. $x=\pm\frac{16}{5}$

7. 切線 $4x\pm3y\pm16=0$, 法線 $12x\pm16y\mp123=0$ 8. $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$, $60°$

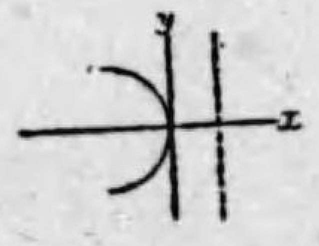
9. $e=\sqrt{2}$, $x=\pm\frac{a}{\sqrt{2}}$

第九章問題

1. (a)

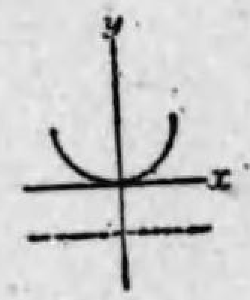
焦點 (2, 0)
準線 $x=-2$

1. (b)



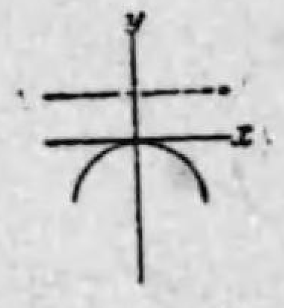
焦點 (−2, 0)
準線 $x=2$

1. (c)



焦點 (0, 2)
準線 $y=-2$

1. (d)



焦點 (0, −2)
準線 $y=2$

2. 通徑ノ長サ 12, 焦點マデノ距離 15 3. $x=0$, $3x-2y+4=0$

4. 原點ヲ $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ ニ移スト $y=ax^2$ ノ形トナル。

5. (a) 楕圓 5. (b) 拋物線 5. (c) 双曲線

5. (d) $e>1$ ナルトキ双曲線
$e=1$ ナルトキ拋物線
$e<1$ ナルトキ楕圓

第十章問題

1. $y=\frac{4}{3}\pi x^3$ 2. 11, 0, −19, −15, −64 4. $\frac{dx-b}{cx-a}$

5. $\frac{\pm\sqrt{x^2+7}}{2}$ 6. $\tan^{-1}x$ 7. $\log_a x$

8. $y=\frac{1}{2}(10x-15)$ 9. $y=\frac{8-7x}{3x-1}$ 10. $y=\frac{2}{(a-b)x-c}$

11. $y=x\cos a$ 12. 拋物線 13. 双曲線

14. 拋物線 15. 正弦曲線

16. (a) $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$ 16. (b) $a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$

16. (c) $x^4+20x^3+150x^2+500x+625$

17. (a) $1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$ 17. (b) $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\cdots\cdots$

17. (c) $1-x+2x^2-\frac{14}{3}x^3+\cdots\cdots$ 17. (d) $8+9x+\frac{27}{16}x^2-\frac{27}{128}x^3+\cdots\cdots$

18. (a) 0.9950 18. (b) 0.9606 18. (c) 1.0123 18. (d) 0.9803

第十一章問題

1. 16 2. $\frac{1}{2}$ 3. 5 4. $+\infty$, $-\infty$

5. ∞ 6. $\frac{1}{\sqrt{a}}$ 7. 0 8. 6

9. 0 10. $2a$ 11. 2 12. 0

13. $\frac{m}{n}$ 14. $\frac{1}{a}$ 15. π 16. $\frac{1}{2}$

17. 1 18. $\frac{a}{b}$

第十二章問題

1. 不連續デアル。 2. $2x$ 3. $\frac{1}{(x+a)^2}$ 4. 2

5. $3ax^2+b$

第十三章問題

1. $5x^4$ 2. $15x^{14}$ 3. $23x^{22}$

4. $58x^{57}$ 5. $18x^5$ 6. $9(a+4)x^8$

7. $10mx^9$ 8. $15(a^2+ab+b^2)x^{14}$ 9. $5x^4+12x^2-10x$

10. $18x^2-5$ 11. x^3+x^2-x 12. $-21x^2+28x^6-8x^7$

13. $4(a+b)x^3+(a-b)$ 14. $24x^7-30x^5+28x^3$ 15. $x^4(6x+15)$

16. $5x^4-9x^2+4x$ 17. $14x^6-39x^3-21$ 18. $4x^2(4ax-3b)$

19. $3x^2-6x+2$ 20. $5x^4+16x^3-3x^2-8x$ 21. $\frac{7}{(2x+3)^2}$

22. $-\dfrac{2bx}{(x^2+a^2)^2}$ **23.** $\dfrac{1-2x^2}{(2x^2+1)^2}$ **24.** $-\dfrac{x^2-6x-11}{(x^2+3x+2)^2}$

25. $3(x^3-x^2+x+1)^2(3x^2-2x+1)$ **26.** $5(ax^2-bx+c)^4(2ax-b)$

27. $4(x+a)^3+5(x-b)^4$ **28.** $8(x-1)(x^2-2x+3)^3$

29. $(2x+3)(3x-4)^2(30x+11)$ **30.** $\dfrac{(x-1)(5-x)}{(x+1)^4}$

31. $\dfrac{a}{2y}$ **32.** $\dfrac{b^2x}{a^2y}$ **33.** $\dfrac{x^2-ay}{ax-y^2}$

34. $\dfrac{y(x^2+3)}{2x(x^2+1)}$ **35.** $\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\dfrac{9}{2}x^{-\frac{1}{4}}$ **36.** $-\dfrac{1}{x^4}-\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$

37. $\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}$ **38.** $\sqrt{x-1}+\dfrac{x}{2\sqrt{x-1}}$ **39.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$

40. $\dfrac{(a+b)-2x}{2\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ **41.** $\dfrac{x}{\sqrt{2a+x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{2a-x^2}}$ **42.** $-\dfrac{a+x}{\sqrt{(2ax+x^2)^3}}$

43. $\dfrac{4}{2x+3}$ **44.** $\dfrac{9x^2-8x+3}{(x^2+1)(3x-4)}$ **45.** $\dfrac{6x}{3x^2+a^2}$

46. $\dfrac{3x^2+12x+11}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ **47.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

48. $-\dfrac{3x+x^2}{1-x^4}$ **49.** $\dfrac{3(2ax+b)}{ax^2+bx+c}$ **50.** $\dfrac{4x+3}{2x^2+3x+8}$

51. $(1-x)^2(-3+4x-10x^2)$ **52.** $(a+3x)(a+2x)^2(36x^2+17ax+a^2)$

53. $\dfrac{x(-9x^2-4x^2+5x+2)}{\sqrt{1+2x}}$ **54.** $(x^3+1)^2(11x^4+18x^2+2x)$

55. $-ae^{-ax}$ **56.** e^x-e^{-x} **57.** $\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

58. $(6x+1)e^{3x^2+x}$ **59.** $-\dfrac{1}{x^2}a^{\frac{1}{x}}\log a$ **60.** $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}a^{\sqrt{1+x^2}}\log a$

61. $2ax\cos ax^2$ **62.** $(2ax+b)\sec^2(ax^2+bx+c)$

63. $-\dfrac{2}{m}\cos\dfrac{x}{m}\sin\dfrac{x}{m}$ **64.** $1-\cos mx$ 1-macomx

65. $\tan^2 x$ **66.** $\dfrac{1}{\sin x\cos x}$ **67.** $2x\sin(1-x^2)$

68. $x\cos x$ **69.** $\dfrac{2}{m}\tan\dfrac{x}{m}\sec^2\dfrac{x}{m}$ **70.** $3x^2\cos x-x^3\sin x$

71. $\cot x$ **72.** $-\dfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\sec^2\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ **73.** $\dfrac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}$

74. $\dfrac{m}{m^2+x^2}$ **75.** $\dfrac{a+b}{\sqrt{1-x^2}}$ **76.** $\dfrac{-1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$

77. $\dfrac{-1}{2\sqrt{x(1+x)}}$ **78.** $\dfrac{x^2}{1+x^2}+2x\tan^{-1}x$ **79.** $\sin^{-1}x$

80. $\dfrac{5}{1+25x^2}$ **81.** $\dfrac{-12}{(x+3)^2}$ **82.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

83. $\dfrac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$ **84.** $\sec x(\sec^2 x+\tan^2 x)$ **85.** $\dfrac{4}{(x+a)^3}$

86. $-\dfrac{3!}{(a+x)^4}$ **87.** $\dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(x+2)^n}$ **88.** a^ne^{ax}

89. $-\dfrac{1}{8}$ **91.** 1 **92.** $\dfrac{3}{2}$

93. (2, 1) **94.** 0.016 **95.** 9.06 m^2

96. 9.8 cm

第十四章 問 題

1. $\dfrac{x^6}{6}$ **2.** $3x^{\frac{1}{3}}$ **3.** $\dfrac{2}{3}\log x$

4. $4\log(x-2)$ **5.** $-\dfrac{1}{2}\cos 2x$ **6.** $\dfrac{1}{3}\sin 3x$

7. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}\dfrac{x}{3}$ **8.** $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}2x$ **9.** $\dfrac{1}{8}\log\dfrac{x-4}{x+4}$

10. $\dfrac{1}{3}\tan^{-1}3x$ **11.** $\sin^{-1}\dfrac{x}{2}$ **12.** $\log(x+\sqrt{x^2+16})$

13. $\log\sec x$ **14.** $-\dfrac{1}{x}+\log x+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}$

15. $\dfrac{dy}{dx}=2x+1$ ヨリ $y=x^2+x+C$ ヲ得。 $C=1$ $\therefore\ y=x^2+x+1$

16. $\dfrac{3}{16}$ **17.** $\dfrac{1}{7}\log\dfrac{16}{9}$ **18.** $\dfrac{\pi}{4a}$

19. $\dfrac{\pi}{6}$ **20.** $\dfrac{\pi}{2}$ **21.** $\dfrac{1}{3}(e^{12}-1)$

22. $\dfrac{1}{2}$ **23.** $\dfrac{1}{m}$ **24.** $-\dfrac{1}{44}(3-4x)^{11}$

25. $\dfrac{1}{10}(1+x^2)^5$ **26.** $\dfrac{1}{4}(3x-2)^{\frac{4}{3}}$

27. $1-\sqrt{x}=z$ ト置ケ, $2(1-\sqrt{x})-2\log(1-\sqrt{x})$

28. $\frac{1}{a}\sin(ax+b)$　　29. $\frac{2}{3}\tan^{-1}\frac{x-1}{3}$　　30. $\frac{3}{8}$

31. $\log(1+\sqrt{2})$　　32. 左右兩邊共＝ 1　　33. $x\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$

34. $\sin x-x\cos x$　　35. $\frac{1}{2}x^2\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\tan^{-1}x-\frac{1}{2}x$

36. $\frac{1}{10}e^{3x}(\sin x+3\cos x)$　　37. $\frac{64}{3}\log 4-7$

38. $\frac{\pi}{4}a^2$　　39. $\log\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}$　　40. $x+\log\frac{(x+3)^9}{(x+4)^{16}}$

41. $2\log(x+2)-\frac{1}{x+2}$　　42. $\log\frac{3}{2\sqrt{2}}$

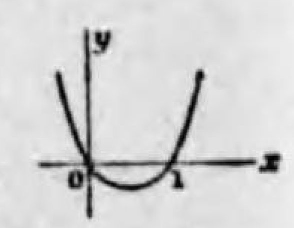
43. $\log\frac{9}{5}$　　44. $\frac{1}{14}(7\cos x-\cos 7x)$　　45. $\frac{1}{8}(2\sin 2x-\sin 4x)$

46. $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x$　　47. $-\frac{\cos^3 x}{3}$

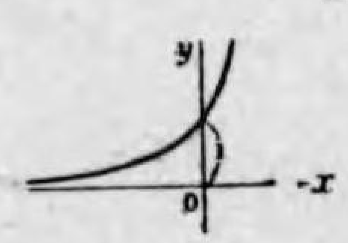
48. $\frac{1}{6}$　　49. $1-\frac{\pi}{4}$　　50. $\frac{3}{16}\pi$

第十五章　問　題

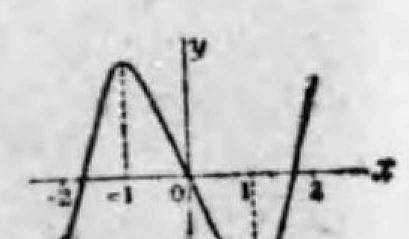
1. (a) $x>\frac{1}{2}$ ノトキ增加函數, $x<\frac{1}{2}$ ノトキ減少函數, 變化ノ略圖ハ



1. (b) $x>1$ ノトキ增加函數, $1>x>-1$ ノトキ減少函數, $-1>x$ ノトキ增加函數, 變化ノ略圖ハ



1. (c) $-\infty<x<+\infty$ ノトキ增加函數, 變化ノ略圖ハ



2. (a) $f(x)=x-\sin x$ ト置キ, $0<x<\pi$ ナルトキ $f'(x)>0$ デ, 且 $f(0)=0$ ナルコトヨリ $f(x)>0$, 從ツテ $x>\sin x$ ナルコトヲ證スル。

2. (b) $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ ト置キ前題ト同法ニテ證明スル。　　3. (a) 1

3. (b) $\frac{13}{4}$　　3. (c) $\pm\frac{2}{2\sqrt{3}}$　　4. (a) $1,\ -\frac{2}{3}$

4. (b) 4, 16　　4. (c) ± 3　　5. 縱邊＝橫邊＝$\sqrt{\text{面積}}$

6. $\frac{d}{\sqrt{3}}$　　7. $\frac{1}{6}$米　　8. 2×高サ＝直徑

第十六章　問　題

1. $y=7x+2$　　2. $y_1y=2a(x+x_1),\ y_1x+2ay=(2a+x_1)y_1$

4. $y=x$　　5. $x>0$ ニテ凸, $x<0$ ニテ凹, $x=0$ ハ反曲點

6. $x>2$ ニテ凹, $x<2$ ニテ凸, $x=2$ ハ反曲點

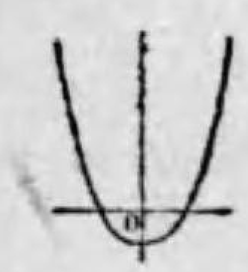
7. $2n\pi<x<(2n+1)\pi$ ニテ凸, $(2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi$ ニテ凸, $x=n\pi$ ハ反曲點

8. $\frac{125}{24}$　　9. $\sqrt{2}$　　10. $\frac{5\sqrt{5}}{8}$

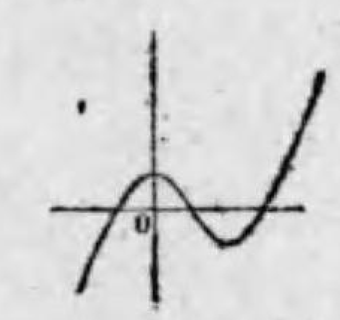
11. $y=\pm\frac{b}{a}x$　　12. $x=0,\ y=1$　　13. $y=0$

14. $x=a$　　15. ナシ

16.

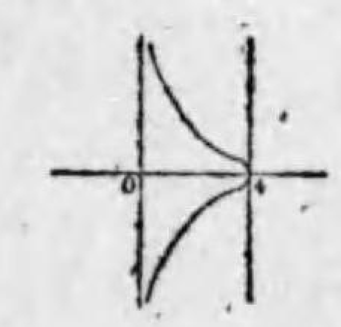


17.



18.

19.



第十七章　問　題

1. 256.768　　2. 4.61512　　3. 0.86312　　4. 3.00217

5. $a^x=1+x\log a+\frac{(x\log a)^2}{2!}+\frac{(x\log a)^3}{3!}+\cdots\cdots\cdots$

6. $\sin^2 x=x^2-\frac{x^4}{3}+\frac{2x^6}{45}-\cdots\cdots\cdots$　　7. 0.99620

8. $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ デアルカラ $\tan x=A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots\cdots$ ト置キ $(A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots\cdots\cdots)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots\right)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots$ ノ兩邊ノ係數ヲ比較シテ見ヨ。　　9. 9.94639　　10. 357.171

11. 10.0794　　12. 1.414　　13. 0.00795

14. $\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots\cdots\cdots$　　15. 3.1416

第十八章　問　題

1. 1　　2. 1　　3. $\frac{1}{2}$　　4. $\frac{1}{6}$

5. 0　　6. $-\infty$　　7. 0　　8. ∞

9. 0　　10. 1　　11. 1　　12. 1

第十九章　問　題

1. 4　　2. 2　　3. $\frac{3}{4}a^{\frac{4}{3}}$　　4. $\frac{335}{27}$

5. $\sqrt{y^2-a^2}$　　6. $\frac{3}{2}a$　　7. $\frac{56}{3}\pi$　　8. $4\pi r^2$

9. $2\pi a^{\frac{5}{3}}$　　10. $2\pi a^3$　　11. $\frac{4}{3}\pi a^3$　　12. $\frac{\pi}{3}h^3\tan^2\alpha$

13. $\frac{\pi}{2}a^3(15-16\log 2)$　　14. 5.6　　15. 0.62294

16. $S=0.78539815,\ \pi \fallingdotseq 3.14159260$

第二十章　問　題

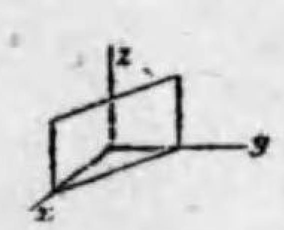
2. 7　　3. $AB=BC=CA=\sqrt{38}$　　4. $x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1$

5. $\frac{2}{\sqrt{29}},\ \frac{3}{\sqrt{29}},\ \frac{4}{\sqrt{29}}$　　6. $-\frac{6}{7},\ \frac{2}{7},\ \frac{3}{7}$

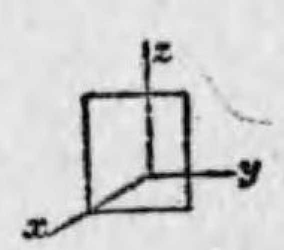
7. $\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\ \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},\ \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$

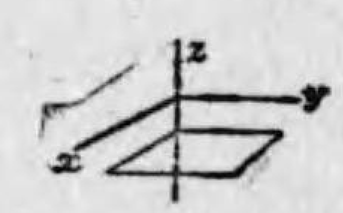
8. $\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}$ 又ハ $-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}$　　9. 直角

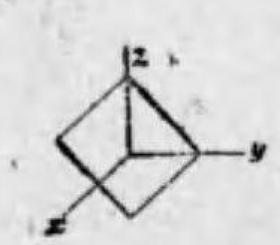
10. $\frac{L_1L_2+M_1M_2+N_1N_2}{\sqrt{L_1^2+M_1^2+N_1^2}\sqrt{L_2^2+M_2^2+N_2^2}}$　　11. $\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$

12.


13.


14. (a)


15. (b)


14. (c) yz 平面　　14. (d)


15. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\ \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$　　16. $A(x-a)+B(y-b)+C(z-c)=0$

17. y 軸ニ平行ナル直線　　18. $y=0,\ z=0$

19. $\frac{x-a}{L}=\frac{y-b}{M}=\frac{z-c}{L}$　　20. $\frac{x-a}{a'-a}=\frac{y-b}{b'-b}=\frac{z-b}{c'-c}$

21. $\frac{x-a}{A}=\frac{y-b}{B}=\frac{z-c}{C}$　　22. 中心 $\left(1,\ -3,\ \frac{1}{2}\right)$, 半徑 $\frac{7}{2}$

24. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　　25. xy 平面デハ楕圓, yz 平面デハ平行二直線, zx 平面デハ楕圓

第二十一章　問　題

1. (a) $6x,\ 3y^2$　　1. (b) $2(x-y),\ 2(y-x)$　　1. (c) $\frac{1}{y},\ -\frac{x}{y^2}$

1. (d) $\cos(x-3y),\ -3\cos(x-3y)$　　1. (e) $y\sec^2 xy,\ x\sec^2 xy$

1. (f) $-\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y},\ \frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}$　　3. (a) $2xy\,dx+x^2\,dy$

3. (b) $2(x\,dx-y\,dy)$　　3. (c) $-\frac{x\,dx+y\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

4. $2\pi rh\,dr+\pi r^2\,dh,\ 50\pi$　　7. (a) $\frac{5-y}{x}$

7. (b) $\frac{x}{y}$　　7. (c) $-\frac{x^2-ay}{y^2-ax}$　　9. $6ax+2by,\ 2cx$

9. (a) $m(m-1)\frac{x^{m-2}}{y^n},\ -mn\frac{x^{m-1}}{y^{n+2}}$　　9. (b) $2\sin y-y^2\sin x,\ 2(x\cos y+y\cos x)$

第二十二章　問　題

1. $\frac{2}{3}a^3$　　2. $\frac{16}{3}a^4$　　3. $\frac{abc}{6}$

4. $\frac{16}{3}abc$　　5. $\frac{\pi}{2}\sqrt{ab}\,c^2$　　6. $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4a}{3\pi}$

7. 中心角ノ二等分線上デ頂點カラ $\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$ ノ距離

8. 中心軸上ニアツテ中心カラ $\frac{3a}{8}$ ノ距離

9. 中心軸上ニアツテ底面カラ $\frac{h}{4}$ ノ距離　　10. $a^2M,\ \frac{a^2}{2}M$

11. $\frac{a^2M}{2}$　　12. $\frac{2a^2}{3}M,\ \sqrt{\frac{2}{3}}a$　　13. $\frac{b^2+c^2}{3}M$

第二十三章　問　題

1. $y=x^2+3x+c$　　2. $y=ce^x$　　3. $ye^{x^3}=c$

4. $\log\frac{y-1}{y}=e^x+c$　5. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=c$ 又ハ $y\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-y^2}=c_1$

6. $\tan^{-1}y-\tan^{-1}x=c$ 又ハ $\frac{x+y}{1-xy}=c_1$　7. $x^2+2xy=c$

8. $x^2(x+y)=c$　9. $y\sqrt{x^2+y^2}=cx^3$　10. $c^2x^2=2cy+1$

11. $y=\frac{x^3}{4}+\frac{c}{x}$　12. $y=e^{-x}(x+c)$　13. $y=\frac{1}{4}(2x-1)+ce^{-2x}$

14. $y=\frac{1}{\sin x}(\log\sec x+c)$　15. $y=c_1e^x+c_2e^{-2x}$

16. $y=c_1e^{3x}+c_2e^{4x}$　17. $y=c_1e^{\frac{3}{2}x}+c_2e^{-4x}$　18. $y=(c_1x+c_2)e^{2x}$

19. $y=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin x)$　20. $y=e^{-4x}(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x)$

21. $x=\frac{x_0\sqrt{m^2+a^2}}{m}e^{-\frac{a}{2}t}\sin\left(\frac{m}{2}t+\alpha\right)$ 但シ $m=\sqrt{4b-a^2}$, $\tan\alpha=\frac{m}{a}$

22. $y=c_1e^x+c_2e^{5x}+\frac{3}{5}$　23. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+\frac{1}{5}e^{3x}$

24. $y=c_1+c_2e^x-\frac{x^3}{2}-x^2-2x$　25. $y=c_1\sin x+c_2\cos x-\frac{1}{8}\sin 3x$

第二十四章　問　題

1. $7+i,\ -1+3i,\ 14+5i,\ \frac{10}{17}+\frac{11}{17}i$　2. $\frac{39}{29}-\frac{11}{29}i$

3. $-\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i$　4. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

5. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$　6. $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$

7. $4(\cos 0+i\sin 0)$　8. $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

9. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$　10. $\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}$

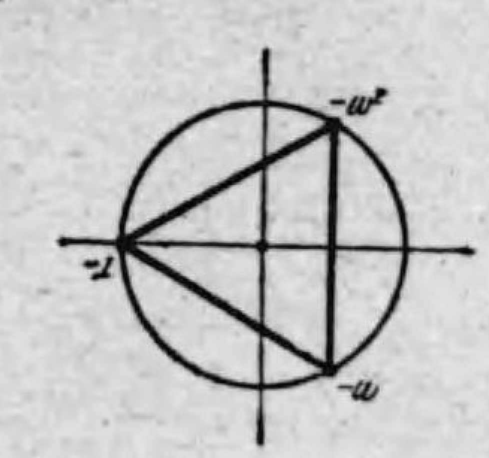
11. -1　12. $-432+144\sqrt{3}i$　13. $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

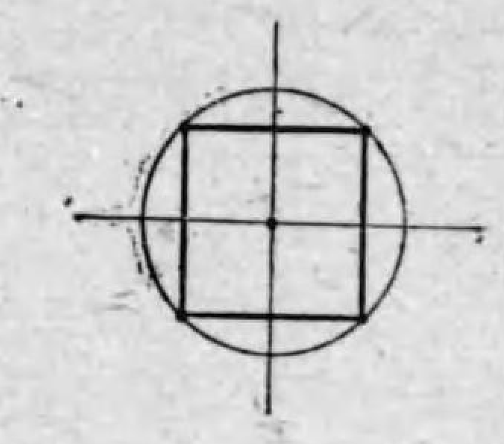
14. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}+\frac{\sqrt{3}-1}{2}i,\quad -1-i,\quad -\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

15. $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\quad -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　16. $\frac{Z_1+Z_2}{2}$

17. $\frac{Z_1+Z_2+Z_3}{3}$　18. $-1,\ -\omega,\ \omega^2$　19. $2\pm 2i,\ -2\pm 2i$

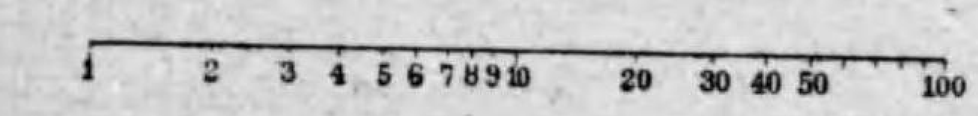
20. $\frac{1}{5},\ \frac{3}{13}$



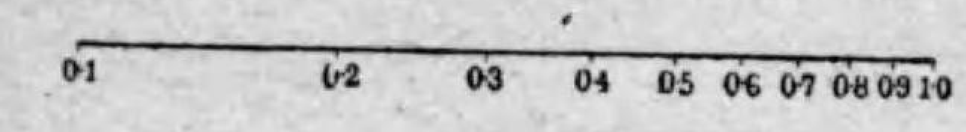


第二十五章　問　題

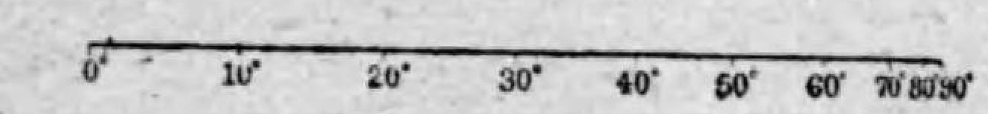
1.



2.



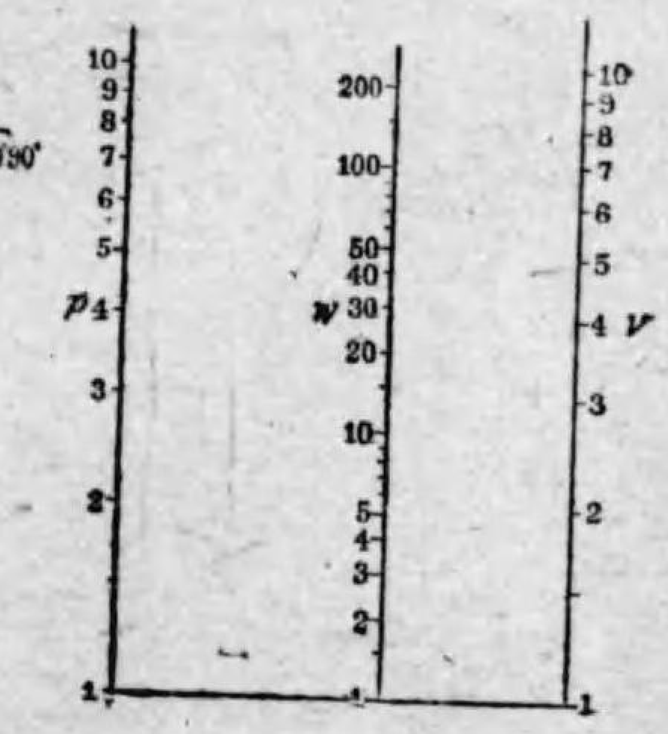
3.



4. $\log_{10}p+1.41\log_{10}v=\log_{10}w$

$$\begin{cases} x=m_1\log_{10}p \\ y=m_2\times 1.41\log_{10}v \\ z=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\log_{10}w \end{cases}$$

ニ於テ $m_1=1$, $m_2=\frac{1}{1.41}$ トシテ畫イタモノガ右ノ圖デアル。

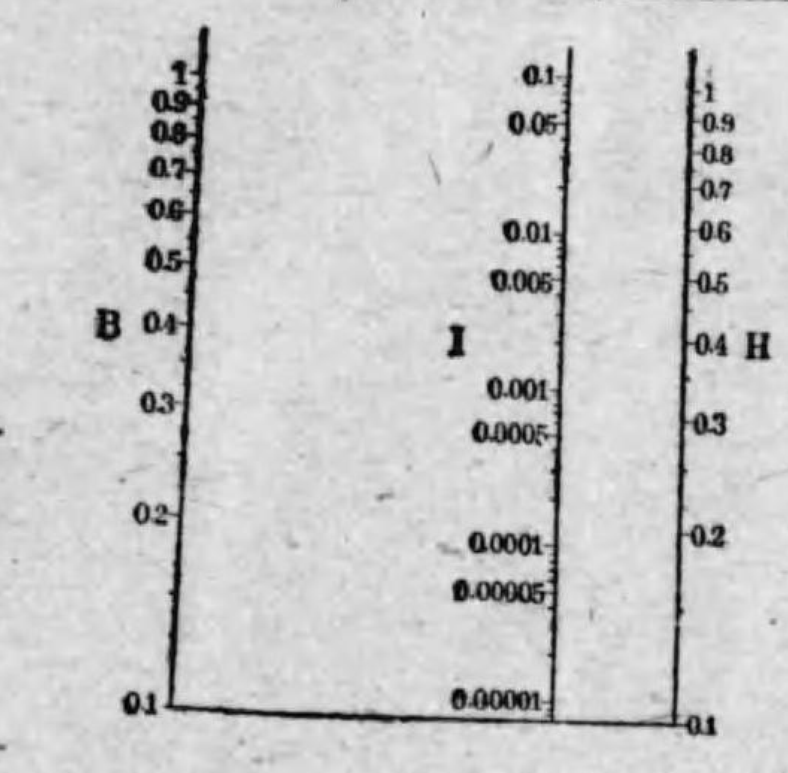


5. $\log_{10}B+3\log_{10}H=\log_{10}(12\cdot I)$

$$\begin{cases} x=m_1\log_{10}B \\ y=m_2\times 3\log_{10}H \\ z=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\log_{10}(12\cdot I) \end{cases}$$

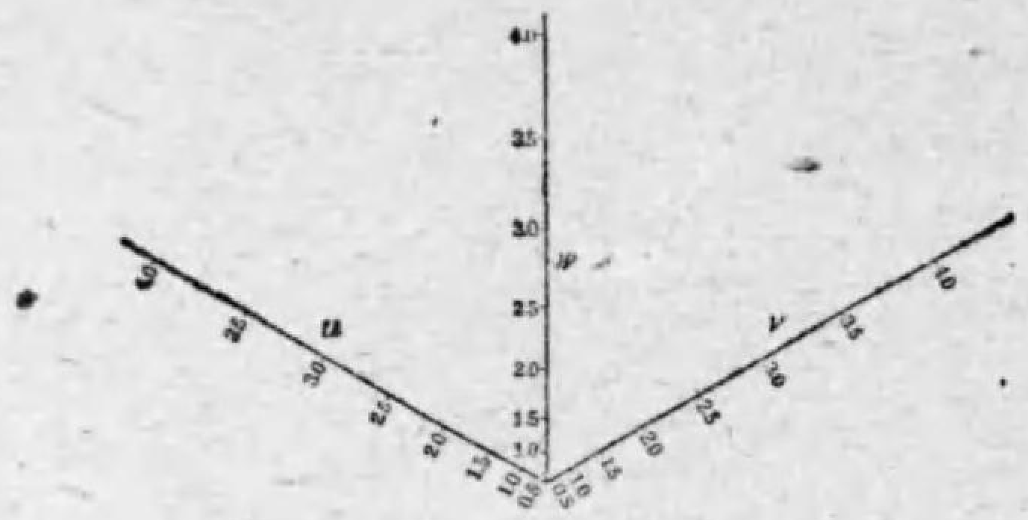
ニ於テ高サ 20 糎デアルカラ

$$\begin{cases} m_1(\log_{10}1-\log_{10}0.1)=20 \\ 3m_2(\log_{10}1-\log_{10}0.1)=20 \end{cases}$$

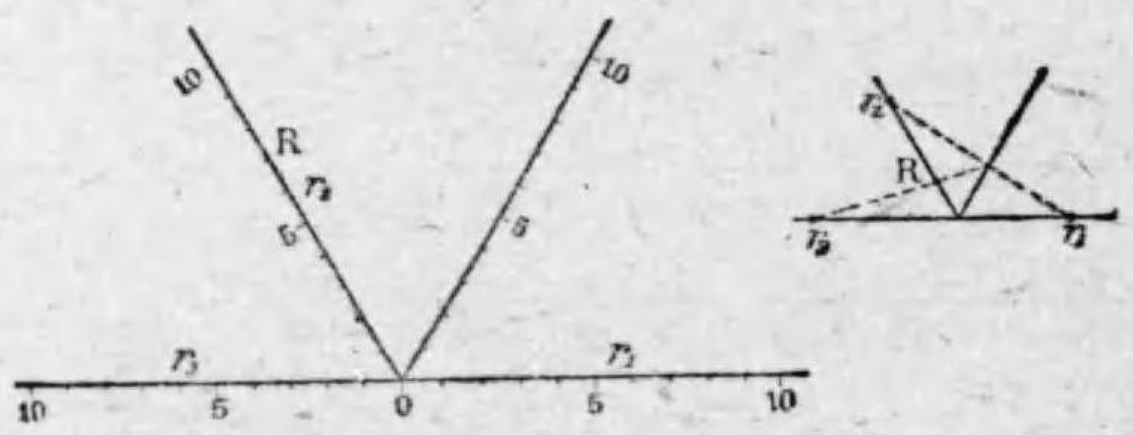


即チ $m_1=20$, $m_2=\frac{20}{3}$ トシテ作レバヨイ。

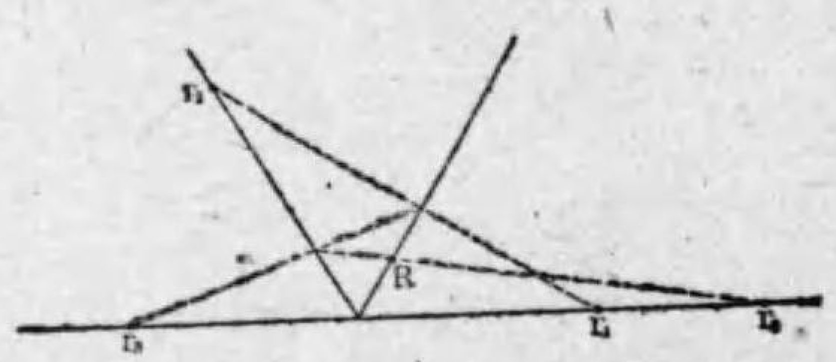
6.



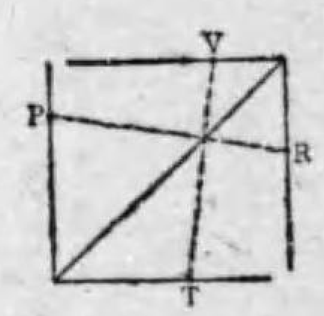
7.



8. 前問ノ圖ヲ次ノヤウニ用ヒレバヨイ。



9. $\frac{P}{R}=\frac{T}{V}$ トシテ作レバヨイ。



第二十六章　問　題

1. $\theta=-361.56+35.720\,r$

2. $E=0.00137\,W$

3. $m=29.31+0.5011\,\theta$

4. $y=0.0263\,x^{1.1}$

5. $C=0.000436\,e^{0.0253\theta}$

6. $P=3\,e^{0.399\theta}$

7. $S=0.9992+0.00494\,p+0.0000057\,p^2$

8. $r=4.62-0.004\,v+0.0029\,v^2$

9. $p=0.00111+0.00303\,v^2$

10. $y=\frac{x}{-0.9063+0.04959\,x}$

附 錄 第 五

雜 題 ノ 答

第 二 章 雜 題

1. $8\pm2\sqrt{30}$　**2.** $\left(\frac{10}{11}, \frac{2}{11}\right)$　**4.** $(1+3\sqrt{3}, 1+4\sqrt{3}), (1-3\sqrt{3}, 1-4\sqrt{3})$

5. $(2, 2\sqrt{3})$　**6.** $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$　**7.** $\rho=\frac{3a\cos\theta\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin^3\theta}$

第 四 章 雜 題

1. $y=-\frac{3}{5}x$　**2.** $a=5$　**3.** $18x-4y-17=0$

4. 二定點ヲ結ンダ直線ニ垂直ナル直線　**5.** $(x-2y+1)(3x-y-4)=0$

6. 1　**8.** $x+3y+7=0$

第 五 章 雜 題

1. $x^2+y^2+6x-10y+9=0$　**2.** 中心 $(2, -3)$, 半徑 5　**3.** 內ニアル

4. $y=-\frac{1}{2}x\pm\sqrt{5}$　**5.** $(x-2)^2+(y-6)^2=25$, $(x-10)^2+(y-2)^2=25$

6. 三定點ヲ頂點トスル三角形ノ重心ヲ中心トスル圓。 **7.** 定點 $(a, 0)$ カラ定圓 $x^2+y^2=r^2$ ニ引イタ線分ヲ $m:n$ ニ分ツ點ノ軌跡ハ圓 $\left(x-\frac{ma}{m+n}\right)^2+y^2=\frac{n^2r^2}{(m+n)^2}$ トナル。

8. 定點ヲ原點ニトリ定直線ヲ $x=a$ トスレバ $x^2+y^2=\frac{k^2}{a}x$

第 七 章 雜 題

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$　**2.** $2a^2=4c^2=4(x^2-b^2)$ ヲ利用セヨ。　**3.** $y=2x\pm5$

4. $\frac{\pi}{3}, \pi+\frac{\pi}{3}$　**5.** $2(x\pm y)=5$　**6.** $\pm\frac{\sqrt{15}}{2}$

7. 互ニ垂直ナル二切線ヲ $y=mx\pm\sqrt{m^2a^2+b^2}$, $y=-\frac{1}{m}x\pm\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$ トシ, 第一ヲ $(y-mx)^2=m^2a^2+b^2$ ニ, 第二ヲ $(my+x)^2=a^2+m^2b^2$ ニ變形シ, 此ノ兩者ヨリ m ヲ消去

スレバ $x^2+y^2=a^2+b^2$ ナル結果ヲ得ル。　**8.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ト $y=mx+k$ トノ交點ノ橫座標 x_1, x_2 ヲ求メ, $x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-\frac{a^2mk}{a^2m^2+b^2}$ ト $y=mx+k$ トノ間ヨリ k ヲ消去スレバ求メル結果ヲ得ル。　**9.** 一定 a^2　**10.** 一定 a^2

第 八 章 雜 題

1. 焦點 $(\pm\sqrt{14}, 0)$, $e=\sqrt{\frac{7}{3}}$, 準線 $x=\pm\frac{6}{\sqrt{14}}$　**2.** $(0, \pm8)$, $y=\pm2$

3. $\left(5, \frac{20}{3}\right)$　**4.** 二定圓ノ半徑ヲ a, b トシ, 且外切圓ノ半徑ヲ r トスレバ $(a+r)\sim(b+r)=a\sim b=$一定 デアルカラ双曲線トナル。　**5.** $y=\frac{1}{3}(4x\pm\sqrt{3})$

6. $4x^2-y^2=3$　**7.** 交點 $\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, \pm\sqrt{\frac{1}{6}}\right)$ ヲ求メ, 之ヲ公式ニ入レル。

8. $\tan\alpha=\frac{b}{a}$ ヨリ $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\tan^2\alpha}=\sec\alpha$

9. 双曲線上ノ一點ヲ $P(x_1, y_1)$ トスレバ $FP=\sqrt{2}x_1-a$, $F'P=\sqrt{2}x_1+a$

$\therefore\ EP\cdot F'P=(\sqrt{2}x_1-a)(\sqrt{2}x_1+a)=2x_1^2-a^2=x_1^2+(x_1^2-a^2)=x_1^2+y_1^2$

10. $y=mx\pm\sqrt{m^2a^2-b^2}$ ト $y=-\frac{1}{m}x$ ヨリ m ヲ消去スレバヨイ。

第 十 章 雜 題

1. (a) $x^2+y^2=a^2$　**1. (b)** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$　**3.** 6, 14, 16, 24

5. (a) $\frac{x^2+7}{2}$　**5. (b)** $\frac{b(x+b)}{a(x-a)}$

6. (a) 拋物線　**6. (b)** 三次拋物線

第十一章 雜 題

1. -2　**2.** m　**3.** -8　**4.** $-\infty$ 又ハ $+\infty$, $-\frac{c}{b}$　**5.** $\frac{1}{2}$

6. 1　**7.** $\frac{1}{a}$　**8.** $\frac{1}{2}$　**9.** 1　**10.** $\frac{c}{f}$　**11.** e^a

第十二章 雜 題

1. $x=\pm1$ ヲ除ケバ他ハ連續デアル。　**2.** 14　**3.** $-\frac{1}{x^2}$

4. $x=2$ 及ビ $x=3$ ナル點ヲ除ケバ他ハ總テ連續デアル。

第十三章 雜題

1. $\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{a^3-x^3}}$ 2. $\dfrac{-x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$ 3. $4x^3+15x^2+22x+20$ 4. $\dfrac{3x^3+4}{x^3}$

5. $2-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}$ 6. $14(3x^2-2x)^6(3x-1)$ 7. $5\left(5x^2-\dfrac{3}{2}x^3\right)^4\left(10x-\dfrac{9}{2}x^2\right)$

8. $\dfrac{36x+31}{2\sqrt{3x+2}}$ 9. $4px\tan(px^2+q)\sec^2(px^2+q)$

10. $m\sin 2x(a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x)^{m-1}(a^2+b^2)$ 11. $\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

12. $3\sec^2 3x+3\operatorname{cosec}^2 3x$ 13. $e^x[2\cos 2x+\sin 2x-\sin x-\cos x]$

14. $\cos^2 x\sin x[2\cos^2 x-3\sin^2 x]$ 15. $a\sec(ax+b)\tan(ax+b)$

16. $\dfrac{1}{x}\cos(\log x)$ 17. $\sec x$ 18. $2\cot 2x$ 19. $e^{ax}[abx^3+3bx^2+a]$

20. $\dfrac{m}{(1+x)^2}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{m-1}$ 21. $\sec^4 x+3x^2$ 22. $a\left(\dfrac{x}{a}\right)^{ax}\left[\log\dfrac{x}{a}+1\right]$

23. $\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$ 24. $\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ 25. $x\sec ax[2+ax\tan ax]$

26. 0 27. $\dfrac{4+3x^2}{x(1+x^2)}$ 28. $e^{\tan^{-1}x}[1+2x]$

29. $\sin^{-1}\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}}$ 30. $\dfrac{-y}{x+y}$ 31. $-\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$

32. $\dfrac{3x^2y+4x^3}{4y^3-x^3}$ 34. -6 35. 6.2832 立方糎

第十四章 雜題

1. (a) $\dfrac{4}{7}x^{\frac{7}{4}}$ 1. (b) $-\dfrac{a}{3}x^{-3}$ 2. (a) e^x+e^{-x} 2. (b) $-\dfrac{3}{2}\log(5-2x)$

3. (a) $\dfrac{1}{2}\left[x+\dfrac{\sin 2ax}{2a}\right]$ 3. (b) $-a\cot\dfrac{x}{a}$ 4. (a) $\dfrac{4}{3}\tan^{-1}3x$

4. (b) $-\dfrac{1}{12}\log\dfrac{x-6}{x+6}$ 5. (a) $\dfrac{c}{a}\log\left\{x+\sqrt{x^2-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}\right\}$ 5. (b) $-\dfrac{1}{a}e^{-ax}+\dfrac{1}{b}\sin bx$

6. (a) $\dfrac{1}{a}\log\sin ax$ 6. (b) $2x-4\log(x+2)-2\log(4+x^2)$

7. (a) $\log\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\sqrt{x^2+x+1}\right]$ 7. (b) $\log(a+b\sin^2 x)$

8. (a) $\dfrac{1}{2}\left[x-\dfrac{1}{2b}\sin 2bx\right]$ 8. (b) $-\dfrac{x^2}{2}-\log\sqrt{x^2-1}$

9. (a) $3\log(x-1)-\log(3x+2)$ 9. (b) $\dfrac{7}{2}\log(x-3)-\dfrac{5}{2}\log(x-1)$

10. (a) $\dfrac{1}{14}\cos 7x-\dfrac{1}{26}\cos 13x$ 10. (b) $-\dfrac{\cot^3 x}{3}-\cot x+x$

11. (a) $\dfrac{\tan 4x}{4}-\dfrac{\tan^2 x}{2}+\log\sec x$ 11. (b) $\dfrac{1}{8}\left[x-\dfrac{\sin 4x}{4}\right]$

12. (a) $-\dfrac{1}{2a^2}\cos 2\theta$ 12. (b) $3\tan^{-1}\left(\dfrac{x-2}{3}\right)$

13. (a) $\log(\sec x+\tan x)$ 13. (b) $\log(\operatorname{cosec} x-\cot x)$

14. (a) $x\sin x+\cos x$ 14. (b) $\log[(x-1)+\sqrt{x^2-2x}]$

15. (a) 1 15. (b) $\sqrt{2}-1$ 16. (a) $\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ 16. (b) $\dfrac{\pi}{2}-1$

17. (a) $\log\sqrt{2}$ 17. (b) $\dfrac{3}{16}\pi$ 18. (a) $\dfrac{1}{8}$ 18. (b) $\dfrac{\pi}{4}$

19. (a) a 19. (b) $\dfrac{1}{110}$ 20. (a) $\dfrac{\pi}{2ab}$ 20. (b) $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$

第十五章 雜題

3. $\pm\sqrt{2}$ 4. (a) -1 4. (b) $-3,\ +5$ 5. 18

6. $\dfrac{4}{3}R$ 8. 高サ$=\sqrt{2}\times$半徑

第十六章 雜題

1. $\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1,\quad \dfrac{y_1x}{b^2}+\dfrac{x_1y}{a^2}=x_1y_1\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)$ 2. $x+y=0$

3. $(-1,\ 10)$ 及ビ $(3,\ -22)$ 4. (a) $\dfrac{40}{3}\sqrt{10}$ 4. (b) $\sqrt{2}a$

5. (a) $x=1$ 5. (b) $x=a$ 及ビ $y=0$

6. (a)

6. (b)

6. (c)

第十七章 雜 題

2. 0.52987 **3.** (*a*) $e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{\sin^2 x}{2!}+\frac{\sin^3 x}{3!}+\frac{\sin^4 x}{4!}+\cdots\cdots$

= $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots$ ヲ代入シテ見レバ $e^{\sin x}=1+x+\frac{x^2}{2!}-\frac{3x^4}{4!}+\cdots\cdots$

3. (*b*) $\sec x\cos x=1$ ナルコトヲ利用スレバ $\sec x=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{4!}+\cdots\cdots$

第十八章 雜 題

1. 3 **2.** $\frac{3}{5}$ **3.** 1 **4.** $-\frac{5}{3}$

5. -1 **6.** $\frac{1}{2}$ **7.** $\frac{1}{6}$ **8.** 1

9. $\frac{2}{\pi}$ **10.** e^a

第十九章 雜 題

1. 0.5 **2.** $\frac{4}{3}p^2$ **3.** $\frac{7}{6}$ **4.** $2\pi^2ac^2$, $4\pi^2ac$

5. πab **6.** $4\pi a^2$ **7.** 4π **8.** 2500 **9.** 0.69315

第二十章 雜 題

1. $0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ **2.** P(6, 2, 2) **3.** $-\frac{8}{21}$ **4.** $\frac{AA'+BB'+CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$

5. $D'(Ax+By+Cz)-D(A'x+B'y+C'z)=0$ **6.** $\frac{AL+BM+CN}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$

7. $l(x-a)+m(y-b)+n(z-c)=0$ **8.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

第二十一章 雜 題

1. $2xy+y^2$, x^2+2xy **2.** $2nax(ax^2+by^2)^{n-1}$, $2nby(ax^2+by^2)^{n-1}$ **3.** $6x$, $8y$

5. $2\sin y-y^2\sin x$, $2(x\cos y+y\cos x)$ **6.** $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

第二十二章 雜 題

1. $\frac{ab^3}{3}$ **2.** $\frac{4a^2}{3}$ **3.** $\frac{\pi}{4}$ **4.** $\frac{a}{2}\log 2$

5. $I_y=\frac{2SB^3+dt^3}{12}$, $R_y=\sqrt{\frac{2SB^3+dt^3}{12(BD-bd)}}$ **6.** $\frac{2}{5}a^2M$

第二十三章 雜 題

1. $y=\frac{a}{2}x^2+bx+c$ **2.** $y=e^x+c$ **3.** $\sqrt{1+y}=\sqrt{1+x}+c$

4. $y=a\tan^{-1}\frac{x+y}{a}+c$ **5.** $y=\frac{1}{x}+\frac{c}{x^2}$ **6.** $y=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+ce^{-x^2}$

7. $y=c_1e^{5x}+c_2e^{-3x}$ **8.** $y=e^x(c_1\sin 3x+c_2\cos 3x)$

9. $y=c_1\sin x+c_2\cos x+x^2-2$ **10.** $y=e^{-2x}(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{1}{16}(\sin x-\cos x)$

昭和十六年六月廿八日　初版印刷
昭和十六年七月　三　日　初版發行
昭和十七年三月　廿　日　二版發行
昭和十八年三月　十　日　三版發行
昭和廿一年七月廿五日　四版印刷　（3.000部）
昭和廿一年七月卅一日　四版發行

高等數學　附錄（對數表及び眞數表）

定價　金拾六圓

編纂者　早稻田高等工學校
代表者　吉　田　享　二

東京都淀橋區戸塚町一丁目五八番地
發行者　早稻田大學出版部
代表者　東　清　重

東京都立川市曙町三丁目五五番地
印刷者　石　上　利　雄

東京都神田區淡路町二丁目九番地
配給元　日本出版配給株式會社

發行所　東京都淀橋區　早稻田大學出版部
會員番號A123001番

株式會社 行政學會印刷所 印刷

對數表

及ビ

眞數表

早稻田高等工學校編

早稻田大學出版部刊

對數表

及ビ

眞數表

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253				4	8	13	12	21	25	29	34	38
								0294	0334	0374	4	8	12	16	20	24	28	32	36
11	0414	0453	0492	0531	0569						4	8	12	16	20	23	27	31	35
						0607	0645	0682	0719	0755	4	7	11	15	19	22	26	30	33
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004				4	7	11	14	18	21	25	28	32
								1038	1072	1106	3	7	10	14	17	20	24	27	31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3	7	10	13	17	20	23	26	29
						1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	22	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3	6	9	12	16	19	22	25	28
						1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847							3	6	9	12	15	17	20	23	26
					1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175					3	5	8	11	14	16	19	22	24
							2201	2227	2253	2279	3	5	8	10	13	16	18	21	23
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480			3	5	8	10	13	15	18	20	23
									2504	2529	2	5	7	10	12	14	17	19	22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2	5	7	10	12	14	17	19	22
						2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	18	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900					2	5	7	9	12	14	16	18	21
							2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	15	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	12	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	11	13	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	8	10	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	13	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4293	2	3	5	6	8	10	11	13	14
27	4314	4330	4346	4362	4378	4394	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	10	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	11	12	14
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	8	10	11	13
31	4912	3928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	13
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	10	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	7	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	2	4	5	6	7	8	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	8	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	4	5	6	7	8	10	11
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	4	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	6	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	6	7	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6627	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	6	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	5	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	4	5	5	6	7	8

$\log \pi = 0.4971$ $\log e = 0.4343$

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4

$\log_e 10 = 2.303$ $\log_e x = 2.303 \log_{10} x$

對數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	1061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

對數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	6491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4375	4385	4295	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	2529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	829[illegible]	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	6683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	21

log sin (0°—40°)

°\′	0	10	20	30	40	50	60		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		$\bar{3}$.4637	$\bar{3}$.7648	$\bar{3}$.9408	$\bar{2}$.0658	$\bar{2}$.1627	$\bar{2}$.2419	89									
1	$\bar{2}$.2419	3088	3668	4179	4637	5050	5428	88									
2	5428	5776	6097	6397	6677	6940	7188	87									
3	7188	7423	7645	7857	8059	8251	8436	86									
4	8436	8613	8783	8946	9104	9259	9403	85									
5	9403	9545	9682	9816	9945	$\bar{1}$.0070	$\bar{1}$.0192	84	細詳ハ第10頁ニアリ								
6	$\bar{1}$.0192	0311	0426	0539	0648	0755	0859	83									
7	0859	0961	1060	1157	1252	1345	1436	82									
8	1436	1525	1612	1697	1781	1863	1943	81									
9	1943	2022	2100	2176	2251	2324	2397	80									
10	2397	2468	2538	2606	2674	2740	2806	79									
11	2806	2870	2934					78	6	13	19	26	32	38	45	51	58
				2997	3058	3119	3179		6	12	18	24	31	37	43	49	55
12	3179	3238	3296					77	6	12	17	23	29	35	41	46	52
				3353	3410	3466	3521		6	11	17	22	28	33	39	44	50
13	3521	3575	3629					76	5	11	16	22	27	32	38	43	49
				3682	3734	3786	3837		5	10	16	21	26	31	36	42	47
14	3837	3887	3937					75	5	10	15	20	25	30	35	40	45
				3986	4035	4083	4130		5	9	14	19	24	29	34	38	43
15	4130	4177	4223					74	5	9	14	18	23	28	32	37	41
				4269	4314	4359	4403		5	9	14	18	23	27	32	36	41
16	4403	4447	4491					73	4	9	13	18	22	26	31	35	40
				4533	4576	4618	4959		4	8	13	17	21	25	29	34	38
17	4659	4700						72	4	8	12	16	21	25	29	33	37
			4741	4781	4821	4861	4900		4	8	12	16	20	24	28	32	36
18	4900							71	4	8	12	16	20	23	27	31	35
		4939	4977	5015	5052	5090	5126		4	8	11	15	19	23	27	30	34
19	5126							70	4	7	11	15	19	22	26	30	33
		5163	5199	5235	5270	5306	5341		4	7	11	14	18	22	25	29	32
20	5341	5375	5409	5443				69	3	7	10	14	17	20	24	27	31
					5477	5510	5543		3	7	10	13	17	20	23	26	30
21	5543	5576	5609	5641	5673	5704	5736	68	3	6	10	13	16	19	22	26	29
22	5736	5767	5798	5828	5859	5889	5919	67	3	6	9	12	16	19	22	25	28
23	5919	5048	5978	6007	6036	6065	6093	66	3	6	9	12	15	17	20	23	26
24	6093	6121	6149	6177	6205	6232	6259	65	3	6	8	11	14	17	20	22	25
25	6259	6286	6313	6340	6366	6392	6418	64	3	5	8	11	14	16	19	22	24
26	6418	6444	6470	6495	652:	6546	6570	63	3	5	8	10	13	16	18	21	23
27	6570	6595	6620	6644	6668	6692	6716	62	2	5	7	10	12	14	17	19	22
28	6716	6740	6763	6787	6810	6833	6856	61	2	5	7	9	12	14	16	18	21
29	6856	6878	6901	6923	6946	6968	6990	60	2	4	7	9	11	13	15	18	20
30	6990	7012	7033	7055	7076	7097	7118	59	2	4	6	8	11	13	15	17	19
31	7118	7139	7160	7181	7201	7222	7242	58	2	4	6	8	11	13	15	17	19
32	7242	7262	7282	7302	2322	7342	7361	57	2	4	6	8	10	12	14	16	18
33	7361	7380	7400	7419	7438	7457	7476	56	2	4	6	8	10	11	13	15	17
34	7476	7494	7513	7531	7550	7568	7586	55	2	4	5	7	9	11	13	14	16
35	7586	7604	7622	7640	7657	7675	7692	54	2	4	5	7	9	11	13	14	16
36	7692	7710	7727	7744	7761	7778	7795	53	2	3	5	7	9	10	12	14	15
37	7795	7811	7828	7844	7861	7877	7893	52	2	3	5	6	8	10	11	13	14
38	7893	7910	7926	7941	7957	7973	7989	51	2	3	5	6	8	10	11	13	14
39	7989	8004	8020	8035	8050	8066	8081	50	2	3	5	6	8	9	11	12	14
	60	50	40	30	20	10	0	′\°	1	2	3	4	5	6	7	8	9

log cos (50°—90°)

log sin (40°—90°)

°\′	0	10	20	30	40	50	60		1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	$\bar{1}$.8081	8096	8111	8125	8140	8155	8169	49	1	3	4	6	7	9	10	12	13
41	8169	8184	8198	8213	8227	8241	8255	48	1	3	4	6	7	8	10	11	13
42	8255	8269	8283	8297	8311	8324	8338	47	1	3	4	6	7	8	10	11	12
43	8338	8351	8365	8378	8391	8405	8418	46	1	3	4	5	7	8	9	11	12
44	8418	8431	8444	8457	8469	8482	8495	45	1	2	4	5	6	8	9	10	11
45	8495	8507	8520	8532	8545	8557	8569	44	1	2	4	5	6	7	9	10	11
46	8569	8582	8594	8606	8618	8629	8641	43	1	2	4	5	6	7	8	9	10
47	8641	8653	8665	8676	8688	8699	8711	42	1	2	3	5	6	7	8	10	11
48	8711	8722	8733	8745	8756	8767	8778	41	1	2	3	4	6	7	8	9	10
49	8778	8789	8800	8810	8821	8832	8843	40	1	2	3	4	5	6	7	8	10
50	8843	8853	8864	8874	8884	8895	8905	39	1	2	3	4	5	6	7	8	9
51	8905	8915	8925	8935	8945	8955	8965	38	1	2	3	4	5	6	7	8	9
52	8965	8975	8985	8995	9004	9014	9023	37	1	2	3	4	5	6	7	8	9
53	9023	9033	9042	9052	9061	9070	9080	36	1	2	3	4	5	6	7	8	9
54	9080	9089	9098	9107	9116	9125	9134	35	1	2	3	3	4	5	6	7	8
55	9134	9142	9151	9160	9169	9177	9186	34	1	2	3	3	4	5	6	7	8
56	9186	9194	9203	9211	9219	9228	9236	33	1	2	3	3	4	5	6	7	7
57	9236	9244	9252	9260	9268	9276	9284	32	1	2	3	3	4	5	6	7	7
58	9284	9292	9300	9308	9315	9323	9331	31	1	2	2	3	4	5	6	6	7
59	9331	9338	9346	9353	9361	9368	9375	30	1	2	2	3	4	4	6	6	7
60	9375	9383	9390	9397	9404	9411	9418	29	1	2	2	3	4	4	5	6	6
61	9418	9425	9432	9439	9446	9453	9459	28	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	9459	9466	9473	9479	9486	9492	9499	27	1	1	2	3	4	4	5	6	6
63	9499	9505	9512	9518	9524	9530	9537	26	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	9537	9543	9549	9555	9561	9567	9573	25	1	1	2	2	3	3	4	5	5
65	9573	9579	9584	9590	9596	9602	9607	24	1	1	2	2	3	3	4	5	5
66	9607	9613	9618	9624	9629	9635	9640	23	1	1	2	2	3	3	4	5	5
67	9640	9646	9651	9656	9661	9667	9672	22	0	1	2	2	3	3	4	4	5
68	9672	9677	9682	9687	9692	9697	9702	21	0	1	1	2	2	3	3	4	4
69	9702	9706	9711	9716	9721	9725	9730	20	0	1	1	2	2	3	3	4	4
70	6730	9734	9739	9743	9748	9752	9757	19	0	1	1	2	2	3	3	4	4
71	9757	9761	9765	9770	9774	9778	9782	18	0	1	1	2	2	2	3	3	4
72	9782	9786	9790	9794	9798	9802	9806	17	0	1	1	2	2	3	3	3	4
73	9806	9810	9814	9817	9821	9825	9828	16	0	1	1	2	2	2	3	3	3
74	9828	9832	9836	9839	9843	9846	9849	15	0	1	1	1	2	2	3	3	3
75	9849	9853	9856	9859	9863	9866	9869	14	0	1	1	1	2	2	2	3	3
76	9869	9872	9875	9878	9881	9884	9887	13	0	1	1	1	2	2	2	3	3
77	9887	9890	9893	9896	9899	9901	9904	12	0	1	1	1	2	2	2	3	3
78	9904	9907	9909	9912	9914	9917	9919	11	0	1	1	1	1	2	2	2	2
79	9919	9922	9924	9927	9929	9931	9934	10	0	1	1	1	1	2	2	2	2
80	9934	9936	9938	9940	9942	9944	9946	9	0	0	1	1	1	1	1	2	2
81	9946	9948	9950	9952	9954	9956	9958	8									
82	9958	9959	9961	9963	9964	9966	9968	7									
83	9968	9969	9971	9972	9973	9975	9976	6									
84	9976	9977	9979	9980	9981	9982	9983	5									
85	9983	9985	9986	9987	9988	9989	9989	4									
86	9989	9990	9991	9992	9993	9993	9994	3									
87	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	2									
88	9997	9998	9998	9999	9999	9999	9999	1									
89	9999	0.0000	0000	0000	0000	0000	0000	0									
	60	50	40	30	20	10	0	′\°	1	2	3	4	5	6	7	8	9

log cos (0°—50°)

log tan (0°—45°)

°\′	0	10	20	30	40	50	60		1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		$\bar{3}$.4637	$\bar{3}$.7648	$\bar{3}$.9409	$\bar{2}$.0658	$\bar{2}$.1627	$\bar{2}$.2419	89	詳細ハ第11頁ニアリ								
1	$\bar{2}$.2419	3089	3669	4181	4638	5053	5431	88									
2	5431	5779	6101	6401	6682	6945	7194	87									
3	7194	7429	7652	7865	8007	8261	8446	86									
4	8446	8624	8795	8960	9118	9272	9420	85									
5	9420	9563	9701	9836	9966	$\bar{1}$.0093	$\bar{1}$.0216	84									
6	$\bar{1}$.0216	0336	0453	0567	0678	0786	0891	83									
7	0891	0995	1096	1194	1291	1385	1478	82									
8	1478	1569	1658	1745	1831	1915	1997	81									
9	1997	2078	2158	2236	2313	2389	2463	80									
10	2463	2536	2609	2680	2750	2819	2887	79									
11	2887	2953	3020	3085	3149	3212	3275	78	7	13	20	26	33	40	46	53	59
									6	13	19	25	32	38	45	51	58
12	3275	3336	3397	3458	3517	3576	3634	77	6	12	18	24	31	37	43	49	55
									6	12	17	23	29	35	41	46	52
13	3634	3691	3748	3804	3859	3914	3968	76	6	11	17	23	29	34	40	46	51
									6	11	17	22	28	33	39	44	50
14	3968	4021	4074	4127	4178	4230	4281	75	5	11	16	21	27	32	37	43	48
									5	10	15	20	26	31	36	41	46
15	4281	4331	4381	4430	4479	4527	4575	74	5	10	15	20	25	30	35	40	45
									5	10	14	19	24	29	34	38	43
16	4575	4622	4669	4716	4762	4808	4853	73	5	9	14	19	24	28	33	38	42
									5	9	14	18	23	28	32	37	41
17	4853	4898	4943	4987	5031	5075	5118	72	5	9	14	18	23	27	32	36	41
									4	9	13	18	22	26	31	35	40
18	5118	5161	5203	5245	5287	5329	5370	71	4	8	13	17	21	25	29	34	38
									4	8	12	16	21	25	29	33	37
19	5370	5411	5451	5491	5531	5571	5611	70	4	8	12	16	20	24	28	32	36
20	5611	5650	5689	5727	5766	5804	5842	69	4	8	11	15	19	23	27	30	34
21	5842	5879	5917	5954	5991	6028	6064	68	4	7	11	15	19	22	26	30	33
22	6064	6100	6136	6172	6208	6243	6279	67	4	7	11	14	18	22	25	29	32
23	6279	6314	6348	6383	6417	6452	6486	66	4	7	11	14	18	21	25	28	32
24	6486	6520	6553	6587	6620	6654	6687	65	3	7	10	13	17	20	24	27	31
25	6687	6720	6752	6785	6817	6850	6882	64	3	7	10	13	17	20	23	26	30
26	6882	6914	6946	6977	7009	7040	7072	63	3	6	10	13	16	19	22	26	29
27	7072	7103	7134	7165	7196	7226	7257	62	3	6	9	12	16	19	22	25	28
28	7257	7287	7317	7348	7378	7408	7438	61	3	6	9	12	15	18	21	24	27
29	7438	7467	7497	7526	7556	7585	7614	60	3	6	9	12	15	17	20	23	26
30	7614	7644	7673	7701	7730	7759	7788	59	3	6	9	12	15	17	20	23	26
31	7788	7816	7845	7873	7902	7930	7958	58	3	6	8	11	14	17	20	22	25
32	7958	7986	8014	8042	8070	8097	8125	57	3	6	8	11	14	17	20	22	25
33	8125	8153	8180	8208	8235	8263	8290	56	3	6	8	11	14	17	20	22	25
34	8290	8317	8344	8371	8398	8425	8452	55	3	5	8	11	14	16	19	22	24
35	8452	8479	8506	8533	8559	8586	8613	54	3	5	8	11	14	16	19	22	24
36	8613	8639	8666	8692	8718	8745	8771	53	3	5	8	10	13	16	18	21	23
37	8771	8797	8824	8850	8876	8902	8928	52	3	5	8	10	13	16	18	21	23
38	8928	8954	8980	9006	9032	9058	9084	51	3	5	8	10	13	16	18	21	23
39	9084	9110	9135	9161	9187	9212	9238	50	3	5	8	10	13	15	18	21	23
40	9238	9264	9289	9315	9341	9366	9392	49	3	5	8	10	13	15	18	21	23
41	9392	9417	9443	9468	9494	9519	9544	48	3	5	8	10	13	15	18	20	23
42	9544	9570	9595	9621	9646	9671	9697	47	3	5	8	10	13	15	18	20	23
43	9697	9722	9747	9772	9798	9823	9848	46	3	5	8	10	13	15	18	20	23
44	9848	9874	9899	9924	9949	9975	0.0000	45	3	5	8	10	13	15	18	20	23
	60	50	40	30	20	10	0	′/°	1	2	3	4	5	6	7	8	9

log cot (45°—90°)

log tan (45°—90°)

°\′	0	10	20	30	40	50	60		1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	0.0000	0025	0051	0076	0101	0126	0152	44	3	5	8	10	13	15	18	20	23
46	0152	0177	0202	0228	0253	0278	0303	43	3	5	8	10	13	15	18	20	23
47	0303	0329	0354	0379	0405	0430	0456	42	3	5	8	10	13	15	18	20	23
48	0456	0481	0506	0532	0557	0583	0608	41	3	5	8	10	13	15	18	20	23
49	0608	0634	0659	0685	0711	0736	0762	40	3	5	8	10	13	15	18	20	23
50	0762	0788	0813	0839	0865	0890	0916	39	3	5	8	10	13	15	18	20	23
51	0916	0942	0968	0994	1020	1046	1072	38	3	5	8	10	13	16	18	21	23
52	1072	1098	1124	1150	1176	1203	1229	37	3	5	8	10	13	16	18	21	23
53	1229	1255	1282	1308	1334	1361	1387	36	3	5	8	10	13	16	18	21	24
54	1387	1414	1441	1467	1494	1521	1548	35	3	5	8	11	13	16	19	22	24
55	1548	1575	1602	1629	1656	1683	1710	34	3	5	8	11	13	16	19	22	24
56	1710	1737	1765	1792	1820	1847	1875	33	3	6	8	11	14	17	19	22	25
57	1875	1903	1930	1958	1986	2014	2042	32	3	6	8	11	14	17	20	22	25
58	2042	2070	2098	2127	2155	2184	2212	31	3	6	8	11	14	17	20	23	26
59	2212	2241	2270	2299	2327	2356	2386	30	3	6	9	12	15	17	20	23	26
60	2386	2415	2444	2474	2503	2533	2562	29	3	6	9	12	15	18	21	24	27
61	2562	2592	2622	2652	2683	2713	2743	28	3	6	9	12	15	18	21	24	27
62	2743	2774	2804	2835	2866	2897	2928	27	3	6	9	12	15	18	21	24	28
63	2928	2960	2991	3023	3054	3086	3118	26	3	7	10	13	16	19	22	25	29
64	3118	3150	3183	3215	3248	3280	3313	25	3	7	10	13	16	19	23	26	29
65	3313	3346	3380	3413	3447	3480	3514	24	3	7	10	13	17	20	24	27	30
66	3514	3548	3583	3617	3652	3686	3721	23	3	7	10	14	17	21	24	28	31
67	3721	3757	3792	3828	3864	3900	3936	22	4	7	11	14	18	22	25	29	32
68	3936	3972	4009	4046	4083	4121	4158	21	4	7	11	15	19	22	26	30	33
69	4158	4196	4234	4273	4311	4350	4389	20	4	8	12	16	19	23	27	31	35
70	4389	4429	4469	4509	4549	4589	4630	19	4	8	12	16	20	24	28	32	36
71	4630	4671	4713	4755	4797	4839	4882	18	4	8	13	17	21	25	29	34	38
									4	9	13	17	22	26	30	34	39
72	4882	4925	4969	5013	5057	5102	5147	17	4	9	13	17	22	26	31	35	40
									4	9	13	18	22	27	31	36	40
73	5147	5192	5238	5284	5331	5378	5425	16	5	9	14	18	23	27	32	36	41
									5	9	14	19	24	28	33	38	42
74	5425	5473	5521	5570	5619	5669	5719	15	5	10	14	19	24	29	34	38	43
									5	10	15	20	25	30	35	40	45
75	5719	5770	5822	5873	5926	5979	6032	14	5	10	16	21	26	31	36	41	46
									5	11	16	21	27	32	37	42	48
76	6032	6086	6141	6196	6252	6309	6366	13	6	11	17	22	28	33	39	44	50
									6	11	17	23	29	34	40	46	51
77	6366	6424	6483	6542	6603	6664	6725	12	6	12	18	24	30	35	41	47	53
									6	12	18	24	30	36	42	49	55
78	6725	6788	6851	6915	6980	7047	7113	11	6	12	19	25	31	38	44	51	57
									7	13	20	26	33	40	46	53	60
79	7113	7181	7250	7320	7391	7464	7537	10	7	14	21	28	35	42	49	55	62
									7	14	22	29	36	43	50	58	65
80	7537	7611	7687	7764	7842	7922	8003	9	詳細ハ第12頁ニアリ								
81	8003	8085	8169	8255	8342	8431	8522	8									
82	8522	8615	8709	8806	8904	9005	9109	7									
83	9109	9214	9322	9433	0547	9664	9784	6									
84	9784	9907	1.0034	1.0164	1.0299	1.0437	1.0580	5									
85	1.0580	0728	0882	1040	1205	1376	1554	4									
86	1554	1739	1933	2135	2348	2571	2806	3									
87	2806	3055	3318	3399	3899	4221	4569	2									
88	4569	4947	5362	5819	6331	6911	7581	1									
89	7581	8373	9342	2.0591	2.2352	2.5363		0									
	60	50	40	30	20	10	0	′/°	1	2	3	4	5	6	7	8	9

log cot (0°—45°)

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
0		$\bar{2}.2419$	$\bar{2}.5428$	$\bar{2}.7188$	$\bar{2}.8436$	$\bar{2}.9403$	$\bar{1}.0192$	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.1436$	$\bar{1}.1943$	$\bar{1}.2397$	60
1	$\bar{4}.4637$	2490	5464	7212	8454	9417	0204	0869	1445	1951	2404	59
2	7648	2561	5500	7236	8472	9432	0216	0879	1453	1959	2411	58
3	9408	2630	5535	7260	8490	9446	0228	0890	1462	1967	2418	57
4	$\bar{3}.0658$	2699	5571	7283	8508	9460	0240	0900	1471	1975	2425	56
5	1627	2766	5605	7307	8525	9475	0252	0910	1480	1983	2432	55
6	2419	2832	5640	7330	8543	9489	0264	0920	1489	1991	2439	54
7	3088	2898	5674	7354	8560	9503	0276	0930	1498	1999	2447	53
8	3668	2962	5708	7377	8578	9517	0287	0940	1507	2007	2454	52
9	4180	3025	5742	7400	8595	9531	0299	0951	1516	2015	2461	51
10	4637	3088	5776	7423	8613	9545	0311	0961	1525	2022	2468	50
11	5051	3150	5809	7445	8630	9559	0323	0971	1533	2030	2475	49
12	5429	3210	5842	7468	8647	9573	0334	0981	1542	2038	2482	48
13	5777	3270	5875	7491	8665	9587	0346	0991	1551	2046	2489	47
14	6099	3329	5907	7513	8682	9601	0357	1001	1560	2054	2496	46
15	6398	3388	5939	7535	8699	9614	0369	1011	1568	2061	2503	45
16	6678	3445	5972	7557	8716	9628	0380	1020	1577	2069	2510	44
17	6942	3502	6003	7580	8733	9642	0392	1030	1586	2077	2517	43
18	7190	3558	6035	7602	8749	9655	0403	1040	1594	2085	2524	42
19	7425	3613	6066	7623	8766	9669	0415	1050	1603	2092	2531	41
20	7648	3668	6097	7645	8783	9682	0426	1060	1612	2100	2538	40
21	7859	3722	6128	7667	8799	9696	0438	1070	1620	2108	2545	39
22	8061	3775	6159	7688	8816	9709	0449	1080	1629	2115	2551	38
23	8255	3828	6189	7710	8833	9723	0460	1089	1637	2123	2558	37
24	8439	3880	6220	7731	8849	9736	0472	1099	1646	2131	2565	36
25	8617	3931	6250	7752	8865	9750	0483	1109	1655	2138	2572	35
26	8787	3982	4279	7773	8882	9763	0494	1118	1663	2146	2579	34
27	8951	4032	6309	7794	8898	9776	0505	1128	1672	2153	2586	33
28	9109	4082	6339	7815	8914	9789	0516	1138	1680	2161	2593	32
29	9261	4131	6368	7836	8930	9803	0527	1147	1689	2169	2600	31
30	9408	4179	6397	7857	8946	9816	0539	1157	1697	2176	2606	30
31	9551	4227	6426	7877	8962	9829	0550	1167	1705	2184	2613	29
32	9689	4275	6454	7898	8978	9842	0561	1176	1714	2191	2620	28
33	9822	4322	6483	7918	8994	9855	0572	1186	1722	2199	2627	27
34	9952	4368	6511	7939	9010	9868	0583	1195	1731	2206	2634	26
35	$\bar{2}.0078$	4414	6539	7959	9026	9881	0594	1205	1739	2214	2640	25
36	0200	4459	6567	7979	9042	9894	0605	1214	1747	2221	2647	24
37	0319	4504	6595	7999	9057	9907	0616	1224	1756	2229	2654	23
38	0435	4549	6622	8019	9073	9919	0626	1233	1764	2236	2661	22
39	0548	4593	6650	8039	9089	9932	0637	1242	1772	2243	2667	21
40	0658	4637	6677	8059	9104	9945	0648	1252	1781	2251	2674	20
41	0765	4680	6704	8078	9119	9958	0659	1261	1789	2258	2681	19
42	0870	4723	6731	8098	9135	9970	0670	1271	1797	2266	2687	18
43	0972	4765	6758	8117	9150	9983	0680	1280	1806	2273	2694	17
44	1072	4807	6784	8137	9166	9996	0691	1289	1814	2280	2701	16
45	1169	4848	6810	8156	9181	$\bar{1}.0008$	0702	1299	1822	2288	2707	15
46	1265	4890	6837	8175	9196	0021	0712	1308	1830	2295	2714	14
47	1358	4930	6863	8194	9211	0033	0723	1317	1838	2303	2721	13
48	1450	4971	6889	8213	9226	0046	0734	1326	1847	2310	2727	12
49	1539	5011	6914	8232	9241	0058	0744	1336	1855	2317	2734	11
50	1627	5050	6940	8251	9256	0070	0755	1345	1863	2324	2740	10
51	1713	5090	6965	8270	9271	0083	0765	1354	1871	2332	2747	9
52	1797	5129	6991	8289	9286	0095	0776	1363	1879	2339	2754	8
53	1880	5167	7016	8307	9301	0107	0786	1372	1887	2346	2760	7
54	1961	5206	7041	8326	9315	0120	0797	1381	1895	2353	2767	6
55	2041	5243	7066	8345	9330	0132	0807	1390	1903	2361	2773	5
56	2119	5281	7090	8363	9345	0144	0818	1399	1911	2368	2780	4
57	2196	5318	7115	8381	9359	0156	0828	1409	1919	2375	2786	3
58	2271	5355	7140	8400	9374	0168	0838	1418	1927	2382	2793	2
59	2346	5392	7164	8418	9388	0180	0849	1427	1935	2390	2799	1
60	$\bar{2}.2419$	$\bar{2}.5428$	$\bar{2}.7188$	$\bar{2}.8436$	$\bar{2}.9403$	$\bar{1}.0192$	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.1436$	$\bar{1}.1943$	$\bar{1}.2397$	$\bar{1}.2806$	0
	89°	88°	87°	86°	85°	84°	83°	82°	81°	80°	79°	′

log cos (79°—90°)

′	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	
0		$\bar{2}.2419$	$\bar{2}.5431$	$\bar{2}.7194$	$\bar{2}.8446$	$\bar{2}.9420$	$\bar{1}.0216$	$\bar{1}.0891$	$\bar{1}.1478$	$\bar{1}.1997$	$\bar{1}.2463$	60
1	$\bar{4}.4637$	2491	5467	7218	8465	9434	0228	0902	1487	2005	2471	59
2	7648	2562	5503	7242	8483	9449	0240	0912	1496	2013	2478	58
3	9408	2631	5538	7266	8501	9463	0253	0923	1505	2022	2485	57
4	$\bar{3}.0658$	2700	5573	7290	8518	9477	0265	0933	1515	2030	2493	56
5	1627	2767	5608	7313	8536	9492	0277	0943	1524	2038	2500	55
6	2419	2833	5643	7337	8554	9506	0289	0954	1533	2046	2507	54
7	3088	2899	5677	7360	8572	9520	0300	0964	1542	2054	2515	53
8	3668	2963	5711	7383	8589	9534	0312	0974	1551	2062	2522	52
9	4180	3026	5745	7406	8607	9549	0324	0984	1560	2070	2529	51
10	4637	3089	5779	7429	8624	9563	0336	0995	1569	2078	2536	50
11	5051	3150	5812	7452	8642	9577	0348	1005	1578	2086	2544	49
12	5429	3211	5845	7475	8659	9591	0360	1015	1587	2094	2551	48
13	5777	3271	5878	7497	8676	9605	0371	1025	1596	2102	2558	47
14	6099	3330	5911	7520	8694	9619	0383	1035	1605	2110	2565	46
15	6398	3389	5943	7542	8711	9633	0395	1045	1613	2118	2573	45
16	6678	3446	5975	7565	8728	9646	0407	1055	1622	2126	2580	44
17	6942	3503	6007	7587	8745	9660	0418	1066	1631	2134	2587	43
18	7190	3559	6038	7609	8762	9674	0430	1076	1640	2142	2594	42
19	7425	3614	6070	7631	8778	9688	0441	1086	1649	2150	2601	41
20	7648	3669	6101	7652	8795	9701	0453	1096	1658	2158	2609	40
21	7860	3723	6132	7674	8812	9715	0464	1106	1667	2166	2616	39
22	8062	3776	6163	7696	8829	9729	0476	1116	1675	2174	2623	38
23	8255	3829	6193	7717	8845	9742	0487	1125	1684	2181	2630	37
24	8439	3881	6223	7739	8862	9756	0499	1135	1693	2189	2637	36
25	8617	3932	6254	7760	8878	9769	0510	1145	1702	2197	2644	35
26	8787	3983	6283	7781	8895	9782	0521	1155	1710	2205	2651	34
27	8951	4033	6313	7802	8911	9796	0533	1165	1719	2213	2658	33
28	9109	4083	6343	7823	8927	9809	0544	1175	1728	2221	2666	32
29	9261	4132	6372	7844	8944	9823	0555	1185	1736	2228	2673	31
30	9409	4181	6401	7865	8960	9836	0567	1194	1745	2236	2680	30
31	9551	4229	6430	7886	8976	9849	0578	1204	1754	2244	2687	29
32	9689	4276	6459	7906	8992	9862	0589	1214	1762	2252	2694	28
33	9823	4323	6487	7927	9008	9875	0600	1223	1771	2259	2701	27
34	9952	4370	6515	7947	9024	9888	0611	1233	1779	2267	2708	26
35	$\bar{2}.0078$	4416	6544	7967	9040	9901	0622	1243	1788	2275	2715	25
36	0200	4461	6571	7988	9056	9915	0633	1252	1797	2282	2722	24
37	0319	4506	6599	8008	9071	9928	0645	1262	1805	2290	2729	23
38	0435	4551	6627	8028	9087	9940	0656	1272	1814	2298	2736	22
39	0548	4595	6654	8048	9103	9953	0667	1281	1822	2305	2743	21
40	0658	4638	6682	8067	9118	9966	0678	1291	1831	2313	2750	20
41	0765	4682	6709	8087	9134	9979	0688	1300	1839	2321	2757	19
42	0870	4725	6736	8107	9150	9992	0699	1310	1848	2328	2764	18
43	0972	4767	6762	8126	9165	$\bar{1}.0005$	0710	1319	1856	2336	2770	17
44	1072	4809	6789	8146	9180	0017	0721	1329	1864	2343	2777	16
45	1170	4851	6815	8165	9196	0030	0732	1338	1873	2351	2784	15
46	1265	4892	6842	8185	9211	0043	0743	1348	1881	2359	2791	14
47	1359	4933	6868	8204	9226	0055	0754	1357	1890	2366	2798	13
48	1450	4973	6894	8223	9241	0068	0764	1367	1898	2374	2805	12
49	1540	5013	6920	8242	9256	0080	0775	1376	1906	2381	2812	11
50	1627	5053	6945	8261	9272	0093	0786	1385	1915	2389	2819	10
51	1713	5092	6971	8280	9287	0105	0796	1395	1923	2396	2825	9
52	1798	5131	6996	8299	9302	0118	0807	1404	1931	2404	2832	8
53	1880	5170	7021	8317	9316	0130	0818	1413	1940	2411	2839	7
54	1962	5208	7046	8336	9331	0143	0828	1423	1948	2419	2846	6
55	2041	5246	7071	8355	9346	0155	0839	1432	1956	2426	2853	5
56	2120	5283	7096	8373	9361	0167	0849	1441	1964	2434	2859	4
57	2196	5321	7121	8392	9376	0180	0860	1450	1973	2441	2866	3
58	2272	5358	7145	8410	9390	0192	0871	1460	1981	2448	2873	2
59	2346	5394	7170	8428	9405	0204	0881	1469	1989	2456	2880	1
60	$\bar{2}.2419$	$\bar{2}.5431$	$\bar{2}.7194$	$\bar{2}.8446$	$\bar{2}.9420$	$\bar{1}.0216$	$\bar{1}.0891$	$\bar{1}.1478$	$\bar{1}.1997$	$\bar{1}.2463$	$\bar{1}.2887$	0
	89°	88°	87°	86°	85°	84°	83°	82°	81°	80°	79°	′

log cot (79°—90°)

log tan (80°—90°)

′	80°	81°	82°	83°	84°	85°	86°	87°	88°	89°	
0	.7537	.8003	.8522	.9109	.9784	1.0580	1.1554	1.2806	1.4569	1.7581	60
1	.7544	.8011	.8531	.9119	.9796	1.0595	1.1572	1.2830	1.4606	1.7654	59
2	.7552	.8019	.8540	.9129	.9808	1.0610	1.1590	1.2855	1.4642	1.7728	58
3	.7559	.8027	.8550	.9140	.9820	1.0624	1.1608	1.2879	1.4679	1.7804	57
4	.7566	.8036	.8559	.9151	.9833	1.0639	1.1627	1.2904	1.4717	1.7880	56
5	.7574	.8044	.8568	.9161	.9845	1.0654	1.1645	1.2929	1.4754	1.7959	55
6	.7581	.8052	.8577	.9172	.9857	1.0669	1.1664	1.2954	1.4792	1.8038	54
7	.7589	.8060	.8587	.9182	.9870	1.0684	1.1683	1.2979	1.4830	1.8120	53
8	.7596	.8069	.8596	.9193	.9882	1.0698	1.1701	1.3004	1.4869	1.8202	52
9	.7604	.8077	.8605	.9204	.9895	1.0713	1.1720	1.3029	1.4908	1.8287	51
10	.7611	.8085	.8615	.9214	.9907	1.0728	1.1739	1.3055	1.4947	1.8373	50
11	.7619	.8094	.8624	.9225	.9920	1.0744	1.1758	1.3080	1.4987	1.8460	49
12	.7626	.8102	.8633	.9235	.9932	1.0759	1.1777	1.3106	1.5027	1.8550	48
13	.7634	.8110	.8643	.9246	.9945	1.0774	1.1796	1.3132	1.5067	1.8641	47
14	.7641	.8119	.8652	.9257	.9957	1.0789	1.1815	1.3158	1.5108	1.8735	46
15	.7649	.8127	.8662	.9268	.9970	1.0804	1.1835	1.3185	1.5149	1.8830	45
16	.7657	.8136	.8671	.9279	.9983	1.0820	1.1854	1.3211	1.5191	1.8928	44
17	.7664	.8144	.8681	.9290	.9995	1.0835	1.1874	1.3238	1.5233	1.9028	43
18	.7672	.8152	.8690	.9301	1.0008	1.0850	1.1893	1.3264	1.5275	1.9130	42
19	.7679	.8161	.8700	.9312	1.0021	1.0866	1.1913	1.3291	1.5318	1.9235	41
20	.7687	.8169	.8709	.9322	1.0034	1.0882	1.1933	1.3318	1.5362	1.9342	40
21	.7695	.8178	.8719	.9333	1.0047	1.0897	1.1952	1.3346	1.5405	1.9452	39
22	.7702	.8186	.8728	.9344	1.0060	1.0913	1.1972	1.3373	1.5449	1.9565	38
23	.7710	.8195	.8738	.9355	1.0072	1.0929	1.1992	1.3401	1.5494	1.9681	37
24	.7718	.8203	.8748	.9367	1.0085	1.0944	1.2012	1.3429	1.5539	1.9800	36
25	.7725	.8212	.8757	.9378	1.0099	1.0960	1.2033	1.3456	1.5584	1.9922	35
26	.7733	.8221	.8767	.9389	1.0112	1.0976	1.2053	1.3485	1.5630	2.0048	34
27	.7741	.8229	.8777	.9400	1.0125	1.0992	1.2073	1.3513	1.5677	2.0177	33
28	.7748	.8238	.8786	.9411	1.0138	1.1008	1.2094	1.3541	1.5724	2.0311	32
29	.7756	.8246	.8796	.9422	1.0151	1.1024	1.2114	1.3570	1.5771	2.0449	31
30	.7764	.8255	.8806	.9433	1.0164	1.1040	1.2135	1.3599	1.5819	2.0591	30
31	.7772	.8264	.8815	.9445	1.0177	1.1056	1.2156	1.3628	1.5868	2.0739	29
32	.7779	.8272	.8825	.9456	1.0191	1.1073	1.2177	1.3657	1.5917	2.0891	28
33	.7787	.8281	.8835	.9467	1.0204	1.1089	1.2198	1.3687	1.5967	2.1049	27
34	.7795	.8290	.8845	.9479	1.0218	1.1105	1.2219	1.3717	1.6017	2.1213	26
35	.7803	.8298	.8855	.9490	1.0231	1.1122	1.2240	1.3746	1.6068	2.1383	25
36	.7811	.8307	.8865	.9501	1.0244	1.1138	1.2261	1.3777	1.6119	2.1561	24
37	.7819	.8316	.8875	.9513	1.0258	1.1155	1.2283	1.3807	1.6171	2.1745	23
38	.7826	.8325	.8884	.9524	1.0271	1.1171	1.2304	1.3837	1.6224	2.1938	22
39	.7834	.8333	.8894	.9536	1.0285	1.1188	1.2326	1.3868	1.6277	2.2140	21
40	.7842	.8342	.8904	.9547	1.0299	1.1205	1.2348	1.3899	1.6331	2.2352	20
41	.7850	.8351	.8914	.9559	1.0312	1.1222	1.2369	1.3930	1.6386	2.2575	19
42	.7858	.8360	.8924	.9570	1.0326	1.1238	1.2391	1.3962	1.6441	2.2810	18
43	.7866	.8369	.8934	.9582	1.0340	1.1255	1.2413	1.3993	1.6497	2.3058	17
44	.7874	.8378	.8945	.9593	1.0354	1.1272	1.2435	1.4025	1.6554	2.3322	16
45	.7882	.8387	.8955	.9605	1.0367	1.1289	1.2458	1.4057	1.6611	2.3602	15
46	.7890	.8395	.8965	.9617	1.0381	1.1306	1.2480	1.4089	1.6670	2.3901	14
47	.7898	.8404	.8975	.9629	1.0395	1.1324	1.2503	1.4122	1.6729	2.4223	13
48	.7906	.8413	.8985	.9640	1.0409	1.1341	1.2525	1.4155	1.6789	2.4571	12
49	.7914	.8422	.8995	.9652	1.0423	1.1358	1.2548	1.4188	1.6850	2.4949	11
50	.7922	.8431	.9005	.9664	1.0437	1.1376	1.2571	1.4221	1.6911	2.5363	10
51	.7930	.8440	.9016	.9676	1.0451	1.1393	1.2594	1.4255	1.6974	2.5820	9
52	.7938	.8449	.9026	.9688	1.0466	1.1411	1.2617	1.4289	1.7037	2.6332	8
53	.7946	.8458	.9036	.9700	1.0480	1.1428	1.2640	1.4323	1.7101	2.6912	7
54	.7954	.8467	.9046	.9711	1.0494	1.1446	1.2663	1.4357	1.7167	2.7581	6
55	.7962	.8476	.9057	.9723	1.0508	1.1464	1.2687	1.4392	1.7233	2.8373	5
56	.7970	.8485	.9067	.9735	1.0523	1.1482	1.2710	1.4427	1.7300	2.9342	4
57	.7978	.8495	.9077	.9747	1.0537	1.1499	1.2734	1.4462	1.7369	3.0592	3
58	.7987	.8504	.9088	.9760	1.0551	1.1517	1.2758	1.4497	1.7438	3.2352	2
59	.7995	.8513	.9098	.9772	1.0566	1.1535	1.2782	1.4533	1.7509	3.5363	1
60	.8003	.8522	.9109	.9784	1.0580	1.1554	1.2806	1.4569	1.7581	—	0
	9°	8°	7°	6°	5°	4°	3°	2°	1°	0°	′

log cot (0°—10°)

眞 數 表

度	Radian	Sin	Tan	Cot	Cos		
0	o	o	o	∞	1.0000	1.571	90
1	.01745	.01745	.01746	57.29	.9998	1.553	89
2	.03491	.03490	.03492	28.64	.9994	1.536	88
3	.05236	.05234	.05241	19.08	.9986	1.518	87
4	.06981	.06976	.06993	14.30	.9976	1.501	86
5	.08727	.08716	.08749	11.43	.9962	1.484	85
6	.1047	.1045	.1051	9.514	.9945	1.466	84
7	.1222	.1219	.1228	8.144	.9925	1.449	83
8	.1396	.1392	.1405	7.115	.9903	1.431	82
9	.1571	.1564	.1584	6.314	.9877	1.414	81
10	.1745	.1736	.1763	5.671	.9848	1.396	80
11	.1920	.1908	.1944	5.145	.9816	1.379	79
12	.2094	.2079	.2126	4.705	.9781	1.361	78
13	.2269	.2250	.2309	4.331	.9744	1.344	77
14	.2443	.2419	.2493	4.011	.9703	1.326	76
15	.2618	.2588	.2679	3.732	.9659	1.309	75
16	.2793	.2756	.2867	3.487	.9613	1.292	74
17	.2967	.2924	.3057	3.271	.9563	1.274	73
18	.3142	.3090	.3249	3.078	.9511	1.257	72
19	.3316	.3256	.3443	2.904	.9455	1.239	71
20	.3491	.3420	.3640	2.747	.9397	1.222	70
21	.3665	.3584	.3839	2.605	.9336	1.204	69
22	.3840	.3746	.4040	2.475	.9272	1.187	68
23	.4014	.3907	.4245	2.356	.9205	1.169	67
24	.4189	.4067	.4452	2.246	.9135	1.152	66
25	.4363	.4226	.4663	2.145	.9063	1.134	65
26	.4538	.4384	.4877	2.050	.8988	1.117	64
27	.4712	.4540	.5095	1.963	.8910	1.100	63
28	.4887	.4695	.5317	1.881	.8829	1.082	62
29	.5061	.4848	.5543	1.804	.8746	1.065	61
30	.5236	.5000	.5774	1.732	.8660	1.047	60
31	.5411	.5150	.6009	1.664	.8572	1.030	59
32	.5585	.5299	.6249	1.600	.8480	1.012	58
33	.5760	.5446	.6494	1.540	.8387	.9948	57
34	.5934	.5592	.6745	1.483	.8290	.9774	56
35	.6109	.5736	.7002	1.428	.8192	.9599	55
36	.6283	.5878	.7265	1.376	.8090	.9425	54
37	.6458	.6018	.7536	1.327	.7986	.9250	53
38	.6632	.6157	.7813	1.280	.7880	.9076	52
39	.6807	.6293	.8098	1.235	.7771	.8901	51
40	.6981	.6428	.8391	1.192	.7660	.8727	50
41	.7156	.6561	.8693	1.150	.7547	.8552	49
42	.7330	.6691	.9004	1.111	.7431	.8378	48
43	.7505	.6820	.9325	1.072	.7314	.8203	47
44	.7679	.6947	.9657	1.036	.7193	.8029	46
45	.7854	.7071	1.000	1.000	.7071	.7854	45
		Cos	Cot	Tan	Sin	Radian	度

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0100	0.0198	0.0296	0.0392	0.0488	0.0583	0.0677	0.0770	0.0862
1.1	.0953	.1044	.1133	.1222	.1310	.1398	.1484	.1570	.1655	.1740
1.2	.1823	.1906	.1989	.2070	.2151	.2231	.2311	.2390	.2469	.2546
1.3	.2624	.2700	.2776	.2852	.2927	.3001	.3075	.3148	.3221	.3293
1.4	.3365	.3436	.3507	.3577	.3646	.3716	.3784	.3853	.3920	.3988
1.5	0.4055	0.4121	0.4187	0.4253	0.4318	0.4383	0.4447	0.4511	0.4574	0.4637
1.6	.4700	.4762	.4824	.4886	.4947	.5008	.5068	.5128	.5188	.5247
1.7	.5306	.5365	.5423	.5481	.5539	.5596	.5653	.5710	.5766	.5822
1.8	.5878	.5933	.5988	.6043	.6098	.6152	.6206	.6259	.6313	.6366
1.9	.6419	.6471	.6523	.6575	.6627	.6678	.6729	.6780	.6831	.6881
2.0	0.6932	0.6981	0.7031	0.7080	0.7130	0.7178	0.7227	0.7276	0.7324	0.7372
2.1	.7419	.7467	.7514	.7561	.7608	.7655	.7701	.7747	.7793	.7839
2.2	.7885	.7930	.7975	.8020	.8065	.8109	.8154	.8198	.8242	.8286
2.3	.8329	.8372	.8416	.8459	.8502	.8544	.8587	.8629	.8671	.8713
2.4	.8755	.8796	.8838	.8879	.8920	.8961	.9002	.9042	.9083	.9123
2.5	0.9163	0.9203	0.9243	0.9282	0.9322	0.9361	0.9400	0.9439	0.9478	0.9517
2.6	.9555	.9594	.9632	.9670	.9708	.9746	.9783	.9821	.9858	.9895
2.7	.9933	.9970	1.0006	1.0043	1.0080	1.0116	1.0152	1.0189	1.0225	1.0260
2.8	1.0296	1.0332	.0367	.0403	.0438	.0472	.0508	.0543	.0578	.0613
2.9	.0647	.0682	.0716	.0750	.0784	.0818	.0852	.0886	.0919	.0953
3.0	1.0986	1.1019	1.1053	1.1086	1.1119	1.1151	1.1184	1.1217	1.1249	0.1282
3.1	.1314	.1346	.1378	.1410	.1442	.1474	.1506	.1537	.1569	.1600
3.2	.1632	.1663	.1694	.1725	.1756	.1787	.1817	.1848	.1878	.1909
3.3	.1939	.1970	.2000	.2030	.2060	.2090	.2119	.2149	.2179	.2208
3.4	.2238	.2267	.2296	.2326	.2355	.2384	.2413	.2442	.2470	.2499
3.5	1.2528	1.2556	1.2585	1.2613	1.2641	1.2670	1.2698	1.2726	1.2754	1.2782
3.6	.2809	.2837	.2865	.2892	.2920	.2947	.2975	.3002	.3029	.3056
3.7	.3083	.3110	.3137	.3164	.3191	.3218	.3244	.3271	.3297	.3324
3.8	.3350	.3376	.3403	.3429	.3455	.3481	.3507	.3533	.3558	.3584
3.9	.3610	.3635	.3661	.3686	.3712	.3737	.3762	.3788	.3813	.3838
4.0	1.3863	1.3888	1.3913	1.3938	1.3963	1.3987	1.4012	1.4036	1.4061	1.4086
4.1	.4110	.4134	.4159	.4183	.4207	.4231	.4255	.4279	.4303	.4327
4.2	.4351	.4375	.4398	.4422	.4446	.4469	.4493	.4516	.4540	.4563
4.3	.4586	.4609	.4633	.4656	.4679	.4702	.4725	.4748	.4771	.4793
4.4	.4816	.4839	.4861	.4884	.4907	.4929	.4954	.4974	.4996	.5019
4.5	1.5041	1.5063	1.5085	1.5107	1.5129	1.5151	1.5173	1.5195	1.5217	1.5239
4.6	.5261	.5282	.5304	.5326	.5347	.5369	.5390	.5412	.5433	.5454
4.7	.5476	.5497	.5518	.5539	.5560	.5581	.5602	.5623	.5644	.5665
4.8	.5686	.5707	.5728	.5748	.5769	.5790	.5810	.5831	.5851	.5872
4.9	.5892	.5913	.5933	.5953	.5974	.5994	.6014	.6034	.6054	.6074
5.0	1.6094	1.6114	1.6134	1.6154	1.6174	1.6194	1.6214	1.6233	1.6253	1.6273
5.1	.6292	.6312	.6332	.6351	.6371	.6390	.6409	.6429	.6448	.6467
5.2	.6487	.6506	.6525	.6544	.6563	.6582	.6601	.6620	.6639	.6658
5.3	.6677	.6696	.6715	.6734	.6752	.6771	.6790	.6808	.6827	.6845
5.4	.6864	.6882	.6901	.6919	.6938	.6956	.6975	.6993	.7011	.7029

數	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	1.7048	1.7066	1.7083	1.7102	1.7120	1.7138	1.7156	1.7174	1.7192	1.7210
5.6	.7228	.7246	.7263	.7281	.7299	.7317	.7334	.7352	.7370	.7387
5.7	.7405	.7422	.7440	.7457	.7475	.7492	.7509	.7527	.7544	.7561
5.8	.7579	.7596	.7613	.7630	.7647	.7664	.7682	.7699	.7716	.7733
5.9	.7750	.7766	.7783	.7800	.7817	.7834	.7851	.7868	.7884	.7901
6.0	1.7917	1.7934	1.7951	1.7967	1.7984	1.8001	1.8017	1.8034	1.8050	1.8067
6.1	.8083	.8099	.8116	.8132	.8148	.8165	.8181	.8197	.8213	.8229
6.2	.8246	.8262	.8278	.8294	.8310	.8326	.8342	.8358	.8374	.8390
6.3	.8406	.8421	.8437	.8453	.8469	.8485	.8500	.8516	.8532	.8547
6.4	.8563	.8579	.8594	.8610	.8625	.8641	.8656	.8672	.8687	.8703
6.5	1.8718	1.8733	1.8749	1.8764	1.8779	1.8795	1.8810	1.8825	1.8840	1.8856
6.6	.8871	.8886	.8901	.8916	.8931	.8946	.8961	.8976	.8991	.9006
6.7	.9021	.9036	.9051	.9066	.9081	.9095	.9110	.9125	.9140	.9155
6.8	.9169	.9184	.9199	.9213	.9228	.9243	.9257	.9272	.9286	.9301
6.9	.9315	.9330	.9344	.9359	.9373	.9387	.9402	.9416	.9431	.9445
7.0	1.9459	1.9473	1.9488	1.9502	1.9516	1.9530	1.9544	1.9559	.9573	1.9587
7.1	.9601	.9615	.9629	.9643	.9657	.9671	.9685	.9699	.9713	.9727
7.2	.9741	.9755	.9769	.9782	.9796	.9810	.9824	.9838	.9851	.9865
7.3	.9879	.9892	.9906	.9920	.9933	.9947	.9961	.9974	.9988	2.0001
7.4	2.0015	2.0028	2.0042	2.0055	2.0069	2.0082	2.0096	2.0109	2.0122	.0136
7.5	2.0149	2.0162	2.0176	2.0189	2.0202	2.0216	2.0229	2.0242	2.0255	2.0268
7.6	.0282	.0295	.0308	.0321	.0334	.0347	.0360	.0373	.0386	.0399
7.7	.0412	.0425	.0438	.0451	.0464	.0477	.0490	.0503	.0516	.0528
7.8	.0541	.0554	.0567	.0580	.0592	.0605	.0618	.0631	.0643	.0656
7.9	.0669	.0681	.0694	.0707	.0719	.0732	.0744	.0757	.0769	.0728
8.0	2.0794	2.0807	2.0819	2.0832	2.0844	2.0857	2.0869	2.0882	2.0894	2.0906
8.1	.0919	.0931	.0943	.0956	.0968	.0980	.0992	.1005	.1017	.1029
8.2	.1041	.1054	.1066	.1078	.1090	.1102	.1114	.1126	.1138	.1151
8.3	.1163	.1175	.1187	.1199	.1211	.1223	.1235	.1247	.1259	.1270
8.4	.1282	.1294	.1306	.1318	.1330	.1342	.1354	.1365	.1377	.1389
8.5	2.1401	2.1412	2.1424	2.1436	2.1448	2.1459	2.1471	2.1483	2.1494	2.1506
8.6	.1518	.1529	.1541	.1552	.1564	.1576	.1587	.1599	.1610	.1622
8.7	.1633	.1645	.1656	.1668	.1679	.1691	.1702	.1713	.1725	.1736
8.8	.1748	.1759	.1770	.1782	.1793	.1804	.1816	.1827	.1838	.1849
8.9	.1861	.1872	.1883	.1894	.1905	.1917	.1928	.1939	.1950	.1961
9.0	2.1972	2.1983	2.1994	2.2006	2.2017	2.2028	2.2039	2.2050	2.2061	2.2072
9.1	.2083	.2094	.2105	.2116	.2127	.2138	.2149	.2159	.2170	.2181
9.2	.2192	.2203	.2214	.2225	.2235	.2246	.2257	.2268	.2279	.2289
9.3	.2300	.2311	.2322	.2332	.2343	.2354	.2364	.2375	.2386	.2396
9.4	.2407	.2418	.2428	.2439	.2450	.2460	.2471	.2481	.2492	.2502
9.5	2.2523	2.2523	2.2534	2.2544	2.2555	2.2565	2.2576	2.2586	2.2597	2.2607
9.6	.2628	.2628	.2638	.2649	.2659	.2670	.2680	.2690	.2701	.2711
9.7	.2721	.2732	.2742	.2752	.2762	.2773	.2783	.2792	.2803	.2814
9.8	.2824	.2834	.2844	.2854	.2865	.2875	.2885	.2895	.2905	.2915
9.9	.2935	.2935	.2946	.2956	.2966	.2976	.2986	.2996	.3009	.3016

		e^x		e^{-x}		sin h x		cos h x	
x	$\log_e x$	Value	$\log_{10}$	Value	$\log_{10}$	Value	$\log_{10}$	Value	$\log_{10}$
0.0	$-\infty$	1.000	0.000	1.000	0.000	0.000	$-\infty$	1.000	0
0.1	−2.303	1.105	0.043	0.905	9.957	0.100	9.001	1.005	0.002
0.2	−1.610	1.221	0.087	0.819	9.913	0.201	9.304	1.020	0.009
0.3	−1.204	1.350	0.130	0.741	9.870	0.305	9.484	1.045	0.019
0.4	−0.916	1.492	0.174	0.670	9.826	0.411	9.614	1.081	0.034
0.5	−0.693	1.649	0.217	0.607	9.783	0.521	9.717	1.128	0.052
0.6	−0.511	1.822	0.261	0.549	9.739	0.637	9.804	1.185	0.074
0.7	−0.357	2.014	0.304	0.497	9.696	0.759	9.880	1.255	0.099
0.8	−0.223	2.226	0.347	0.449	9.653	0.888	9.948	1.337	0.126
0.9	−0.105	2.460	0.391	0.407	9.609	1.027	0.011	1.433	0.156
1.0	0.000	2.718	0.434	0.368	9.566	1.175	0.070	1.543	0.188
1.1	0.095	3.004	0.478	0.333	9.522	1.336	0.126	1.669	0.222
1.2	0.182	3.320	0.521	0.301	9.479	1.509	0.179	1.811	0.258
1.3	0.262	3.669	0.565	0.273	9.435	1.698	0.230	1.971	0.295
1.4	0.336	4.055	0.608	0.247	9.392	1.904	0.280	2.151	0.333
1.5	0.405	4.482	0.651	0.223	9.349	2.129	0.328	2.352	0.372
1.6	0.470	4.953	0.695	0.202	9.305	2.376	0.376	2.577	0.411
1.7	0.531	5.471	0.738	0.183	9.262	2.646	0.423	2.828	0.452
1.8	0.588	6.050	0.782	0.165	9.218	2.942	0.469	3.107	0.492
1.9	0.642	6.686	0.825	0.150	9.175	3.268	0.514	3.418	0.534
2.0	0.693	7.389	0.869	0.135	9.131	3.627	0.560	3.762	0.575
2.1	0.742	8.166	0.912	0.122	9.088	4.022	0.604	4.144	0.617
2.2	0.788	9.025	0.955	0.111	9.045	4.457	0.649	4.568	0.660
2.3	0.833	9.974	0.999	0.100	9.001	4.937	0.690	5.037	0.702
2.4	0.875	11.02	1.023	0.091	8.958	5.466	0.738	5.557	0.745
2.5	0.916	12.18	1.086	0.082	8.914	6.050	0.782	6.132	0.788
2.6	0.956	13.46	1.129	0.074	8.871	6.695	0.826	6.769	0.831
2.7	0.993	14.88	1.173	0.067	8.827	7.406	0.870	7.473	0.874
2.8	1.030	16.44	1.216	0.061	8.784	8.192	0.913	8.253	0.917
2.9	1.065	18.17	1.259	0.055	8.741	9.060	0.957	9.115	0.960
3.0	1.099	20.09	1.393	0.050	8.697	10.018	1.001	10.068	1.003
3.5	1.253	33.12	1.520	0.030	8.480	16.543	1.219	16.573	1.219
4.0	1.386	54.60	1.737	0.018	8.263	27.290	1.436	27.308	1.436
4.5	1.504	90.02	1.954	0.011	8.046	45.003	1.653	45.014	1.653
5.0	1.609	148.4	2.171	0.007	7.829	74.203	1.870	74.210	1.870
6.0	1.792	403.4	2.606	0.002	7.394	201.7	2.305	201.7	2.305
7.0	1.946	1096.6	3.040	0.001	6.960	548.3	2.739	548.3	2.739
8.0	2.079	2981.0	3.474	0.000	6.526	1490.5	3.173	1490.5	3.173
9.0	2.197	8103.1	3.909	0.000	6.091	4051.5	3.608	4051.5	3.608
10.0	2.303	22026.	4.343	0.000	5.657	11013.	4.041	11013.	4.041

高等數學正誤表

頁	行	誤	正	頁	行	誤	正
3	下ヨリ5	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac<0$	80	下ヨリ12	單位連續	單値連續
30	表中	$\cos\theta \cdots \begin{array}{c\|c}135^\circ & 150^\circ \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}$	$\cos\theta \cdots \begin{array}{c\|c}135^\circ & 150^\circ \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}$	94	[illegible]	$=3x^3+$	$=3x^2+$
35	下ヨリ2	及　び	及　ビ	99	2	17. (x^2-7)	17. (x^3-7)
41	9	直線ヲ引	直線ニ引	102	下ヨリ6	$y=x\sqrt{f(x)}$	$y=\sqrt{f(x)}$
43	下ヨリ4	$-2,\ -3)$	$(-2,\ -3)$	103	13	$\frac{\Delta x}{\Delta x}=$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}=$
•	下ヨリ1	$x=X-,\ y=Y-$	$x=X-2,\ y=Y-2$	104	下ヨリ7	$\log(2x^2+b)$	$\log(ax^2+b)$
54	圖	P(x, y), Q	P(x_1, y_1), Q(x_1, y_2)	112	下ヨリ4	75	73
67	下ヨリ9	$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$	119	3	角　V　ガ	角　A　ガ
73	19行ノ下ニ	4. 問ヲ追加スル	4. 拋物線上ノ一點Pヲ通リ拋物線ニ平行ナル直線PQトPFトハPニ於ケル切線ト等角ヲナスコトヲ證明セヨ。	127	下ヨリ2	$(3-4x)^{20}$	$(3-4x)^{10}$
				136	4	極少ニ於テ	極小ニ於テ
				150	下ヨリ2	17. $y^3=x^3-$	17. $y=x^3-$

頁	行	誤	正	頁	行	誤	正
153	7	Expanded	Extended	208	1	$\bar{y}=\frac{\int xdA}{A}$	$\bar{y}=\frac{\int ydA}{A}$
158	2	$\sqrt{2}=\frac{7}{2}\sqrt{\frac{50}{49}}$	$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\sqrt{\frac{50}{49}}$	208	7	$y\frac{dy}{dx}x=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$	$y\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$
166	下ヨリ 9	$\int_c^b ds(x)$	$\int_a^b ds(x)$	209	下ヨリ 1	$\frac{1}{K}\log$	$-\frac{1}{K}\log$
〃	下ヨリ 5	$=\Delta s(x+\Delta x)-\Delta s(x)$	$=s(x+\Delta x)-s(x)$	213	下ヨリ 8	$r_1=-\frac{a}{2b}$	$r_1=-\frac{b}{2a}$
170	下ヨリ 7	$\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$	217	下ヨリ 9	$=(a\pm c)+(b\pm d)i$	$=(a+c)\pm(b+d)i$
175	4	(3.4, 2.9), (3.4, 2.9)	(3.4, 2.9)	〃	下ヨリ 8	$(a\pm bi)(c+di)$	$(a+bi)(c+di)$
189	8	$a>c$	$a<c$	〃	下ヨリ 1	$=\frac{6-\sqrt{2}}{5}$	$=\frac{2(6-\sqrt{2})}{5}$
192	下ヨリ 4	$=\{f(x,\ y+\Delta y)-$	$=\{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-$	218	2	$Z_2=4-1$	$Z_2=4-i$
〃	下ヨリ 3	$-\{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-$	$+\{f(x, y+\Delta y)-$	219	1	$a=r\cos\theta$	$a=r\cos\theta$
196	5	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 f}{\partial x^2}\right)=$	$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=$	〃	下ヨリ 2	5. $1-i$	5. $1-\sqrt{3}i$
200	14	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	220	13	$=\frac{r^2}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)$	$=\frac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1-\theta_2)$

頁	行	誤	正
229	下ヨリ 1	表	現
245	下ヨリ 4	$x=-2,$	$b=-2,$
260	下ヨリ 1	$=4.14908$	$=4.41908$
291	下ヨリ 3	6. $\frac{45}{8}$	6. $\frac{9}{2}$
292	2	通徑ノ長サ $\frac{22}{3}$	通徑ノ長サ $\frac{32}{3}$
293	6	18(c) 1.0123	18(c) 1.0247
〃	下ヨリ 2	17. $-39x^3$	17. $-44x^3$
294	6	34. $\frac{x^2(x^2+3)}{2x(x^2+1)}$	34. $\frac{x^2(x^2+3)}{2y(x^2+1)^2}$
〃	7	$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{5}x^{-\frac{6}{5}}$	$\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$
〃	11	48. $-\frac{3x+x^2}{1-x^4}$	48. $\frac{x(x^2+3)}{x^4-1}$
〃	13	53. $\frac{x(-9x^2-4x^3+5x+2)}{\sqrt{1+2x}}$	53. $\frac{x(-9x^3-4x^2+5x+2)}{\sqrt{1+2x}}$
〃	17	64. $1-\cos mx$	64. $1-m\cos mx$
〃	下ヨリ 2	73. $\frac{1}{\sqrt{m^2-x^2}}$	73. $\frac{m}{\sqrt{1-m^2x^2}}$

頁	行	誤	正
295	1	77. $\frac{-1}{2\sqrt{x(1+x)}}$	77. $\frac{-1}{2\sqrt{x}(1+x)}$
〃	2	81. $\frac{-12}{(x+3)^2}$	81. $\frac{-12}{(x+3)^3}$
296	下ヨリ 10	1 (b) ノ圖上	1 (c) ノ圖ヲ交換スル
〃	下ヨリ 3	3(c) $\pm\frac{2}{2\sqrt{3}}$	3(c) $\pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$
298	5	6. $\frac{8}{2}a$	6. $6a$
〃	6	9. $2\pi a^{\frac{3}{2}}$	9. $\frac{12}{5}\pi a^3$
〃	7	14. 5.6	14. 5.1
300	10	24. $-\frac{x^3}{2}$	24. $-\frac{x^3}{3}$
〃	下ヨリ 8	2. $\frac{39}{29}-\frac{11}{29}i$	2. $-\frac{22}{29}+\frac{11}{29}i$
〃	下ヨリ 6	5. $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$	5. $\sqrt{2}\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}$
〃	下ヨリ 2	$-1-i$	$-1+i$
〃	〃	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$	$-\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\sqrt{3}+1}{2}i$

終