國民政府教育部審定

復興高級中學教科書

解析幾何學

徐任吾 仲子明編著

商務印書館發行

徐任吾
仲子明 編著

復興高級中學教科書

解析幾何學

商務印書館發行

本書於二十四年十一月經
國民政府教育部審定
領到教字第八十五號執照

中華民國二十四年十一月審定本第一版
中華民國三十五年九月審定本第四二版

(57021.1)

高級中學用

復興教科書 解析幾何學 冊

定價國幣
印刷地點外

編著者 汪　晉
　　　 　　明
主編者 雲五
發行人 李宣龔 河南路
印刷所 商務印書館印刷廠
發行所 商務印書館 各地

（本書校對者 楊郁盦 胡達聰）

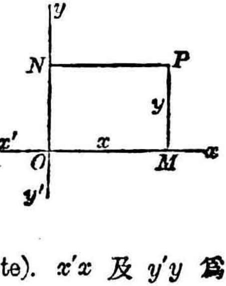
目次

解析幾何

第一章

坐標* (Coördinates)

1. 平面上點之位置. 如圖，P 爲平面上之一點.若在此平面上引互相垂直之兩直線 $x'x$ 及 $y'y$ 相交於 O，從 P 點引 $x'x$ 及 $y'y$ 之垂直線 PM 及 PN，則 OM 及 MP 稱爲 **P 點之坐標**. OM 爲**橫坐標** (abscissa), MP 爲**縱坐標** (ordinate). $x'x$ 及 $y'y$ 爲**坐標軸** (coördinate axes), 而橫軸 $x'x$ 常稱爲 **x 軸**

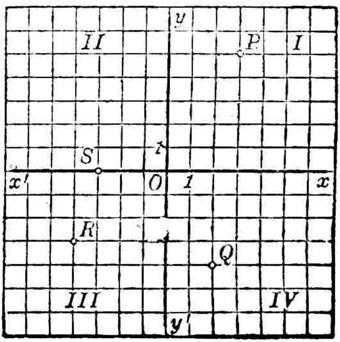


*本章所述之坐標一名笛卡兒坐標，因笛卡兒氏 Descartes) 所發明，故名. 又兩坐標軸互相垂直者稱爲正坐標，斜交者稱爲斜坐標. 本書祇用正坐標.

(x-axis), 縱軸 $y'y$ 常稱爲 y 軸 (y-axis), 又其交點爲原點 (origin).

橫坐標在 $y'y$ 之右者爲正,在左者爲負;縱坐標在 $x'x$ 之上者爲正,在下者爲負.

$x'x$ 與 $y'y$ 分平面爲四部份,稱爲象限(quadrants);在右上角者稱爲第一象限 (first quadrant), 左上角者爲第二象限 (second quadrant), 左下角者爲第三象限 (third quadrant), 右下角者爲第四象限 (fourth quadrant). 所以在第一象限之點之兩坐標皆爲正;在第二象限則橫坐標爲負,縱坐標爲正;在第三象限兩坐標皆爲負;在第四象限則橫坐標爲正,縱坐標爲負.



如圖, P 點之橫坐標爲 3, 縱坐標爲 5, 爲簡便計,記爲(3,5). 在括弧內先記橫坐標,次記縱坐標.

此$(3,5)$非但表示P點之坐標,以後竟以此代表P點.仿此,$(2,-4)$乃代表橫坐標爲2,縱坐標爲-4之Q點,$(-4,-3)$代表R點,$(-3,0)$代表S點,$(0,0)$代表原點.

在1頁圖中,縱坐標MP等於ON,故有時以ON作爲縱坐標.

由上述知幾何學上之一點必有二實數爲其坐標;以二實數爲坐標必可決定一點.故可以代數方法或稱爲解析方法研究幾何圖形之性質,解析幾何學即用代數方法研究幾何之科學也.

2. 有向線分及射影(directed line segment and projection).初等幾何學中之線分有大小而無方向,解析幾何學中則線分除大小外兼有方向.如圖,線分AB與線分BA大小

相等而方向相反.線分由A至B以AB表之,由B至A以BA表之.若AB爲正,則BA爲負.故$AB=-BA$.又在水平位置時,從左向右爲正;在鉛垂位置時,從下向上爲正.

因

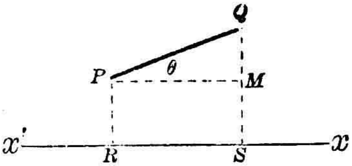
$$AB=-BA,$$

故 $$AB+BA=0.$$

又因 $$AB+BC=AC=-CA,$$

故 $$AB+BC+CA=0.$$

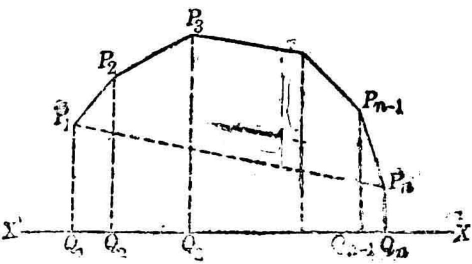
一有向線分 PQ 及無限直線 $x'x$. 從 P 及 Q 各引 $x'x$ 之垂線 PR 及 QS, 則 R 稱爲



P 點之射影, S 爲 Q 點之射影, 而 RS 爲 PQ 之射影. 又 QP 之射影爲 SR. 因 $RS=-SR$, 故 PQ 之射影與 QP 之射影大小相等而方向相反.

若已知 PQ 與 $x'x$ 所成之角爲 θ, 則 $RS=PQ\cos\theta$.

定理: 任意折線 $P_1P_2, P_2P_3, \cdots\cdots, P_{n-1}P_n$ 之射影之和等於 P_1P_n 之射影.

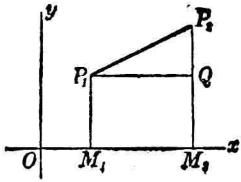


證: 如圖, P_1P_2, $P_2P_3 \cdots\cdots P_{n-1}P_n$ 之諸射影爲

$Q_1Q_2, Q_2Q_3 \cdots Q_{n-1}Q_n$,則$Q_1Q_2+Q_2Q_3+\cdots+Q_{n-1}Q_n=Q_1Q_n$.

系. 多邊形各邊順次所成之射影之和爲零.

3. 兩點間之距離. 若已知兩點之坐標,則兩點間之距離可用其坐標求得之.



設P_1之坐標爲(x_1, y_1),又P_2之坐標爲(x_2, y_2). 自P_1, P_2引Ox之垂線P_1M_1, P_2M_2,又過P_1點引Ox之平行線P_1Q,則

$$P_1P_2 \text{之距離} d=\sqrt{\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2}$$

但 $$P_1Q=M_1M_2=OM_2-OM_1=x_2-x_1,$$

$$QP_2=M_2P_2-M_2Q=y_2-y_1,$$

$$\therefore \quad d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \qquad \text{公式(1)}$$

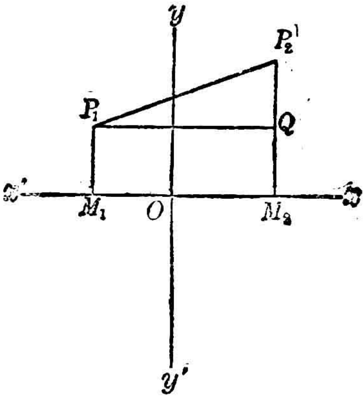
P_1, P_2二點不論在任何象限中,此公式亦能應用,今舉例如下:

若P_1在第二象限,P_2在第一象限,則

$$P_1P_2=d=\sqrt{\overline{P_1Q}^2+\overline{QP_2}^2};$$

但 $$P_1Q=M_1M_2$$

$$=M_1O+OM_2=-x_1+x_2=x_2-x_1,$$



又　　$QP_2 = M_2P_2 - M_2Q = M_2P_2 - M_1P_1$

$$= y_2 - y_1,$$

$$\therefore \quad d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

例題 1.　求點(1, 3)與點(−5, 5)間之距離.

解.　設(1, 3)為P_1, 又(−5, 5)為P_2, 則

$$x_1 = 1,\ y_1 = 3,\ x_2 = -5,\ y_2 = 5.$$

代入公式(1)得

$$d = \sqrt{(-5-1)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

習題一

1. 以(−10, −8), (36, 24), (−12, 20)為頂點, 繪一三角形.

2.　繪諸點：$\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right)$, $\left(1, \frac{7}{6}\right)$.

3.　以 $(0, 0)$, $(0.07, 0.11)$, $(-0.03, 0.06)$, $(0.20, -0.03)$ 爲頂點，繪一四邊形.

4.　繪諸點：$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0\right)$, $(-2\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$.

5.　在 x 軸上之各點之坐標若何？在 y 軸上者如何？在過 O 且二等分第一及第三象限之直線上者如何？二等分第二及第四象限上者如何？在 y 軸右邊二格且平行於 y 軸之直線上者如何？在 x 軸下三格且平行於 x 軸之直線上者如何？

求下列二點間之距離及其在二坐標軸上之射影.

6.　$(-4, -4)$ 及 $(1, 3)$,　　答：距離 $=\sqrt{74}$; 射影爲 $5, 7$.

7.　$(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 及 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$.

答；距離 $=\sqrt{10}$; 射影爲 $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3}$.

8.　$(0, 0)$ 及 $\left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$. 答：距離 $=a$; 射影爲 $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

9.　$(a+b, c+a)$ 及 $(c+a, b+c)$.

答：距離 $=\sqrt{(b-c)^2+(a-b)^2}$; 射影爲 $c-b$, $b-a$.

10.　證明以 $(2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 5)$ 爲頂點之三角形乃一直角三角形，且求其面積，　　答：10.

11.　證明以 $(5, 5)$, $(-7, 3)$, $(0, -2)$ 爲頂點之三角形乃一等腰三角形，且求其面積.　　答：37.

12.　若一圓之中心爲 $(2, 5)$，且過一點 $(14, 10)$，求其半徑. 此圓過點 $(13, 12)$ 否？

13. 一圓之中心爲 $(5, 6)$, 且切於 y 軸. 此圓過 $(4, 1)$ 否? 過 $(1, 3)$ 否?

14. 若弦長爲 4, 此弦被一點 $(5, 4)$ 所二等分, 又中心爲 $(3, 0)$, 求圓之半徑. 答: $2\sqrt{6}$.

15. 直徑之兩端爲 $(10, -2)$ 及 $(-4, -4)$. 此圓過 $(-2, 2)$ 否?

16. 圓之中心爲 $(-4, 2)$, 又半徑爲 5. 求被一點 $(-2, 1)$ 所二等分之弦之長. 答: $4\sqrt{5}$.

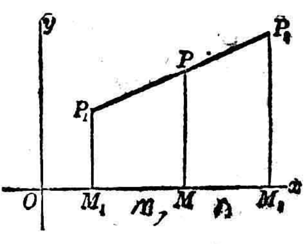
17. 求證三點 $(10, 2)$, $(7, 1)$, $(-2, -2)$ 在一直線上.

18. 三點 $(3, 0)$, $(-1, 8)$, $(48, -90)$ 在一直線上否?

19. 若一點 (x, y) 與一點 $(-5, 3)$ 間之距離爲 5, 用方程式表之. 答: $(x+5)^2+(y-3)^2=25$.

20. 一點與原點之距離爲 10, 又距 y 軸爲 -6. 求此點之坐標. 答: $(-6, \pm 8)$.

4. 線分之分點及中點. 如圖, P: (x, y) 爲線分 P_1P_2 上之任意一點.



設 P_1 之坐標爲 (x_1, y_1), P_2 爲 (x_2, y_2),

又 $P_1P : PP_2 = m : n$, 則

$$OM = OM_1 + M_1M.$$

但
$$OM = x,\ OM_1 = x_1,$$

又因
$$M_1M : MM_2 = m : n,$$

$$\therefore \quad M_1M : M_1M + MM_2 = m : m+n,$$

即
$$M_1M : M_1M_2 = m : m+n,$$

$$\therefore \quad M_1M = \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1),$$

$$\therefore \quad x = x_1 + \frac{m}{m+n}(x_2 - x_1),$$

同理，
$$y = y_1 + \frac{m}{m+n}(y_2 - y_1),$$

簡單之，
$$\begin{cases} x = \dfrac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \\ y = \dfrac{ny_1 + my_2}{m+n}. \end{cases} \qquad \text{公式(2)}$$

又 P: (x, y) 爲 P_1P_2 之中點時，則 $m = n$.

缺
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \\ y = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2). \end{cases} \qquad \text{公式(3)}$$

〔注意〕 公式(2), (3) 亦不專限於第一象限，即在其他任何象限亦能通用．嗣後從第一象限所得之公式皆能應用於其他任何象限，不再說明矣．

例題 1. 求分 $P_1(-1,-6)$ 與 $P_2(3,0)$ 間線分使成 $m:n=-\frac{1}{4}$ 之點之坐標.

解. $x_1=-1, y_1=-6, x_2=3, y_2=0,$

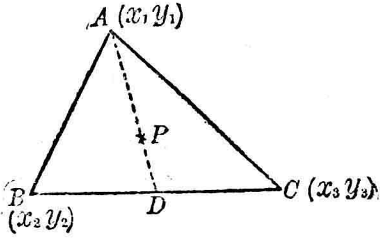
$$m:n=1:-4,$$

$$\therefore\quad x=\frac{(-4)\times(-1)+1\times 3}{1-4}=-2\frac{1}{3},$$

$$y=\frac{(-4)\times(-6)+1\times 0}{1-4}=-8.$$

故所求之分點為 $\left(-2\frac{1}{3},-8\right)$.

例題 2. 一三角形之頂點為 (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3), 求其中線交點之坐標.



解. 從平面幾何知 $AP=\frac{2}{3}AD$, 即 $AP:PD=2:1$. D 之坐標為 $\frac{1}{2}(x_2+x_3)$, $\frac{1}{2}(y_2+y_3)$. 故得

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{1}{2}(x_2+x_3)}{1+2}=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3),$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{1}{2}(y_2+y_3)}{1+2}=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3).$$

習題二

1. 自(8, −18)至(−6, −4)間之線分被分成四等分. 求各分點之坐標.

2. 自(−11, 1)至(7, −2)間之線分,延長至何處適等於原線分之二倍? 答: (25, −5).

3. 圓之中心爲(5, 5),求過圓上一點(6, −9)之直徑之其他一端之坐標.

4. 等腰三角形以(3, −9)與(6, −4)間之線分爲底;頂點爲(−8, 1),求其高. 答: $\frac{5}{2}\sqrt{34}$.

5. 分自(−1, 4)至(−5, −8)間之線分使成1:3,求分點之坐標. 答: (−2, 1).

6. 分自(−3, −5)至(6, 9)間之線分使成2:5.求分點之坐標. 答: $\left(-\frac{3}{7}, -1\right)$.

7. 分自(2, 6)至(−4, 8)間之線分使其比爲$-\frac{4}{3}$之點之坐標. 答: (−22, 14).

8. 直角三角形斜邊之中點至三頂點等距離,試證明之.

9. 矩形之三頂點爲 $(3,-2)$, $(7,6)$, $(3,8)$. 求第四頂點.

10. 用二種方法證明以 $(3,4)$, $(4,12)$, $(6,-2)$, $(5,-10)$ 爲頂點之四邊形爲一平行四邊形.

11. 平行四邊形之順次三頂點爲 $(5,2)$, $(-2,-3)$, $(3,-4)$. 求第四頂點.

12. 若四邊形之頂點爲 $(6,8)$, $(-4,0)$, $(-2,-6)$, $(4,-4)$, 求證對邊中點之聯結線互相二等分.

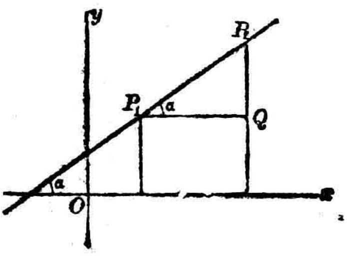
13. 若梯形之頂點爲 $(-8,0)$, $(-4,-4)$, $(-4,4)$ 及 $(4,-4)$, 證明不平行之兩邊之中點之聯結線等於二底和之半.

14. 求一點 $(16\ 3)$ 分自 $(-5,0)$ 至 $(4,-9)$ 間之線分之比.

答: $-\frac{3}{2}$.

15. 若一三角形三邊之中點爲 $(2,1)$, $(3,3)$ 及 $(6,2)$, 求三角形三頂點之坐標. 答: $(-1,2)$, $(5,0)$, $(7,4)$.

5. 直線之斜角 (angle of inclination) 及斜率 (slope). 一直線與 x 軸相交, 在交點右側之 x 軸部分與直線在 x 軸上方部分所成之正角稱爲**斜角**. 如圖, α 卽斜角. 又斜角之正切稱爲**斜率**. 斜角之範圍自 0° 起迄 180° 止.



若已知直線上兩點之坐標.則可求直線之斜率如下:

設已知$P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$為直線上之兩點,則

斜率$m=\tan\alpha=\frac{QP_2}{P_1Q}$,

因之,
$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\qquad\text{公式(4)}$$

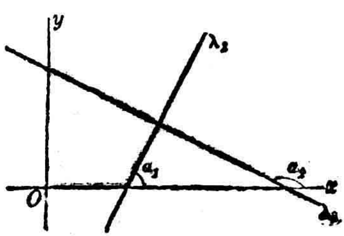
若α在0°與90°之間,則m為正.

若α在90°與180°之間,則m為負.

若α為0,則$m=0$,即直線與x軸平行.

若α為90°則直線與y軸平行.

6　平行線及垂直線.　若兩直線平行,則其斜率必相等,此顯而易見者;其逆亦眞.



若兩直線λ_1, λ_2互相垂直,λ_1之斜率為m_1,λ_2之斜率為m_2,

則
$$m_1=\tan\alpha_1,\ m_2=\tan\alpha_2.$$

但
$$\alpha_2=\alpha_1+90^\circ,$$

$$\therefore\quad \tan\alpha_2=\tan(\alpha_1+90^\circ)=-\cot\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_1}$$

即 $$m_2=-\frac{1}{m_1}.$$

或 $$m_1m_2=-1 \qquad \text{公式(5)}$$

故得

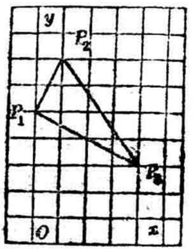
定理：若兩直線互相垂直,則一直線之斜率等於他直線斜率之負逆數.

或：若兩直線互相垂直,則兩斜率之積等於 -1.

本定理之逆定理亦眞.

例題. 求證 $P_1:(-1,4)$, $P_2:(0,6)$, $P_3:(3,2)$ 三點爲一直角三角形之三頂點.

解. 以 P_1, P_2, P_3 爲頂點,作 $\triangle P_1P_2P_3$,則知 P_1P_2 及 P_1P_3 之斜率爲



$$m_1=\frac{6-4}{0+1}=2,$$

$$m_2=\frac{2-4}{3+1}=-\frac{1}{2},$$

因之知 P_1P_2 與 P_1P_3 互相垂直.故 $\triangle P_1,P_2,P_3$ 爲直角三角形,即 P_1,P_2,P_3 爲一直角三角形之三頂點.

習題三

1. 求過 $(1, 3)$ 與 $(2, 7)$ 直線之斜率. 答: 4.

2. 求過 $(2, 7)$ 與 $(-4, -4)$ 直線之斜率. 答: $\frac{11}{6}$.

3. 求過 $(\sqrt{3}, \sqrt{2})$ 與 $(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 直線之斜率.

答: $2\sqrt{6}-5$.

4. 求過 $(a+b, c+a)$ 與 $(c+a, b+c)$ 直線之斜率.

答: $\frac{b-a}{c-b}$.

5. 若三角形之頂點爲 $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, 求各邊之斜率. 答: $1, \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}, \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

6. 用斜率證明 $(-4, -2)$, $(2, 0)$, $(8, 6)$, $(2, 4)$ 爲一平行四邊形之四頂點.

7. 用斜率證明 $(3, 0)$, $(6, 4)$, $(-1, 3)$ 爲一直角三角形之三頂點.

8. 用斜率證明 $(0, -2)$, $(4, 2)$, $(0, 6)$, $(-4, 2)$ 爲一矩形之四頂點. 再用公式 (1) 證明此乃一正方形.

9. 正方形之對角線互相垂直, 用其斜率證明之.

10. 設三角形之頂點爲 $(-5, 3)$, $(1, -3)$, $(7, 5)$; 證明聯二邊中點之直線等於第三邊之半, 且平行於第三邊.

11. 求證 $\left(\frac{17}{5}, \frac{6}{5}\right)$, $\left(\frac{33}{5}, -\frac{6}{5}\right)$, $\left(\frac{32}{5}, -\frac{24}{5}\right)$, $(0, 0)$ 爲等腰梯形之四頂點.

12. 求證以 $(-1, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 5)$, $(-6, 3)$ 爲頂點之四邊形有二個直角.

13. 求證 $(a, b+c)$, $(b, c+a)$ 及 $(c, a+b)$ 三點在一直線上.

14. 求 12 題之四邊形之面積.

15. 過 $(2, 2)$ 及 $(-2, -2)$ 之直線之斜角如何?

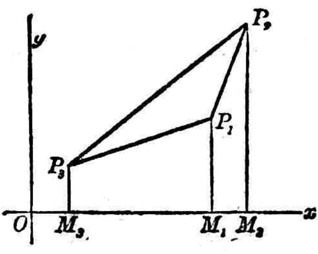
16. 過 $(3, 0)$ 及 $(2, \sqrt{3})$ 之直線之斜角如何? 答: $\frac{2\pi}{3}$.

17. 過 $(0, 0)$ 及 $(-\sqrt{3}, 1)$ 之直線之斜角如何? 答: $\frac{5\pi}{6}$.

18. 過 $(0, -4)$ 及 $(-\sqrt{3}, -5)$ 之直線之斜角如何?

答: $\frac{\pi}{6}$.

7. 三角形之面積. 如圖, $P_1 P_2 P_3$ 爲一三角形.若自梯形 $M_3 M_2 P_2 P_3$ 減去梯形 $M_3 M_1 P_1 P_3$ 及梯形 $M_1 M_2 P_2 P_1$ 卽得三角形之面積.



設 P_1, P_2, P_3 三點之坐標爲 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),

則 $$M_3 M_2 P_2 P_3 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3)(y_2 + y_3),$$

$$M_3 M_1 P_1 P_3 = \frac{1}{2}(x_1 - x_3)(y_1 + y_3),$$

$$M_1M_2P_2P_1=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(y_2+y_1).$$

$$\therefore\ 面積\ A=\frac{1}{2}\Big\{(x_2-x_3)(y_2+y_3)$$

$$-(x_1-x_3)(y_1+y_3)-(x_2-x_1)(y_2+y_1)\Big\}$$

$$\text{即面積}\ A=\frac{1}{2}\Big\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\Big\}$$

公式(6)

〔註〕求得面積之值,有時爲負數,本書祇取其絕對值,不詳論其符號.

習題四

求三角形之面積,若其頂點爲:

1. (2, 6), (5, 6), (−1, −4).　　答: 15.

2. $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{4}{3}, -\frac{7}{6}\right)$　　答: $\frac{23}{72}$.

3. (58, 16), (41, 17), (−36, −14).　　答: 8.

4. 四邊形之頂點爲 (1, 1), (2, 5), (4, 3), (4, −6), 求其面積.　　答: $\frac{37}{2}$.

---

*應用行列式,公式(6)可改成下式,便於記憶:

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

5. 用三種方法證明三點 $(4, 2)$, $(6, -3)$, $(10, -13)$ 在一直線上.

6. 求一點 $(-3, 3)$ 與過 $(2, 7)$, $(1, -2)$ 之直線之距離.

答: $\frac{1}{2}\sqrt{82}$.

7. 用新方法證明 $(2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 5)$ 爲一直角三角形之三頂點.

8. 矩形之三個頂點爲 $(2, 2)$, $(6, 5)$, $(4, 6)$. 用二種方法求其面積.

9. 平行四邊形之三個頂點爲 $(-2, 0)$, $(-7, 4)$, $(3, 3)$. 求其面積及其第四頂點之坐標.

10. 求證: 若三角形之頂點爲 $(3, -8)$, $(-4, 6)$, $(7, 0)$, 其面積四倍於聯各邊中點所成之三角形之面積.

第二章

曲線 (Curve)

8. 變數及常數 (variable and constant). 方程式

$$x+y=5.$$

中之x之值任為何數均可,即x代表一變化隨意之數值,y亦然.此等可以代表任何數值之文字稱為變數.又如 5,6 等數字只能代表一固定不變之數值,不能如上述x, y等任意變動者稱為常數.常數亦有以文字表之者,通例以字母次序末端之x, y, z等代表變數,以字母次序首端之a, b, c等代表常數.

9. 方程式之軌跡. 設x, y兩變數之關係以方程式表之,例如

$$y=2x+3,$$

$$y^3=2x,$$

或 $$x^2+y^2=1.$$

若任意指定一變數之值,即可求得其他變數之值;因之可得無數對x,y之數值,俱適合方程式.若以每一對數值用幾何表之作爲一點,則從每一個方程式可得無數之點.精密研究之,知此無數之點並非淩亂毫無規則,而往往形成一相聯無間之曲線(有時或爲直線).此曲線稱爲此方程式之**軌跡**(locus).嚴格言之,**曲線上諸點之坐標皆適合於方程式;方程式所有之每對根作爲坐標之點皆在曲線上**.此曲線稱爲方程式之軌跡或圖解線(graph),而方程式稱爲曲線之方程式.

解析幾何之目的有二:**其一,已知方程式而探討其軌跡之形狀;其二,已知曲線而求其方程式,並由其方程式用代數方法研究曲線之性質.**

本章先將第一目的研究之,以下數章則專論第二目的.

欲畫方程式之圖解線必須先求適合於方程式之數對x,y之數值而用點畫出之,然後經過此各點描一平滑曲線,此曲線即爲所求之圖解線.

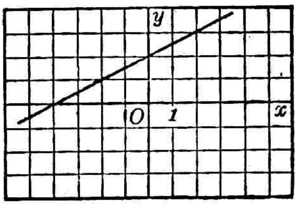
畫圖解線須用方格紙,直規及曲線板,當較隨手畫成者平滑而正確.

例題 1. 試求 $y=\frac{1}{2}x+2$ 之軌跡.

解. 先任意指定 x 之諸值而計算 y,得表如下:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3	-4	-5
y	2	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$

將諸點畫出,然後通過各點畫一平滑曲線,此即所求之軌跡.



〔註〕本例題所得之軌跡實爲一直線,至22節可正式證明:凡一次方程式之軌跡是一直線.

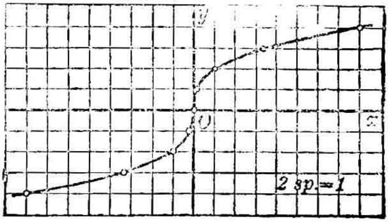
例題 2. 試畫曲線 $y^3=2x$.

解. 欲避免開立方,將方程式化爲

$$x=\frac{1}{2}y^3,$$

然後假設 y 之諸值而求 x,得表如下:

y	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-2
x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{27}{16}$	4	$-\frac{1}{16}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{27}{16}$	-4



依上例畫圖得右之曲線.此例與前例所得之曲線皆可向左右兩方向無限伸長.

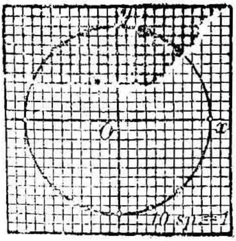
例題 3. 試畫 $x^2+y^2=1$.

解. 化方程式為 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$,

對於 x 之每一數值, y 有兩值, 且 x 之絕對值若大於 1, 則 y 為虛數.

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	-1
y	± 1	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$	0	$\pm\frac{2}{3}\sqrt{2}$	$\pm\frac{1}{3}\sqrt{5}$	0

〔註〕 本例之曲線為一圓, 至 31 節可正式證明之.



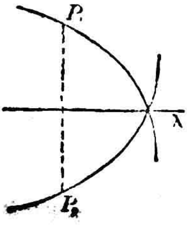
10 兩軸上之截距

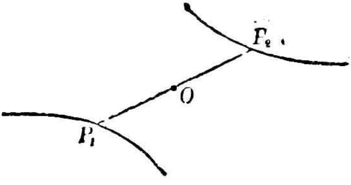
(intercepts). 曲線與兩軸相交之點甚易求得, 且求得之後對於曲線之探求, 非常便利, 其法: 如欲求曲線與 x 軸相交之點, 祇須將

$y=0$代入方程式,然後解方程式中之x值;求與y軸相交之點,祇須將$x=0$代入而求y之值.原點與x軸上交點之距離稱爲曲線之**x截距**,(x-intercept) y軸上之截距稱**y截距**.(y-intercept).截距之正負,一如坐標.

〔註〕若已知其方程式之軌跡爲直線,則祇須求其與兩坐標軸之交點,然後聯結兩交點卽可決定其直線矣.

11. 對稱 (symmetry). 若P_1, P_2兩點之聯結線分適被一直線λ所垂直二等分,則稱此P_1, P_2兩**點對於λ直線爲對稱**,而λ線稱爲**對稱軸**.若一曲線上一切之點對於一直線λ盡是一對一對相對稱,則稱此曲線對於λ直線爲對稱,λ線爲對稱軸.又若P_1, P_2兩點之聯結線分適被一點O所二等分,則稱P_1, P_2兩點**對於O點爲對稱**,O點爲**對稱中心**,若一曲線上一切之點對於一點O盡是





一對一對相對稱,則稱此曲線對於O為對稱,O點為對稱中心.

12. 對稱之鑑定. 用代數方法易知下述兩定理為眞:

定理I. 若方程式中之y以$-y$代之而其方程式不變,則此方程式之軌跡對稱於x軸;其逆亦眞.

因以$-y$代y而方程式不變,故此方程式中若有(x, y)點,必又有$(x, -y)$點.即每有一點P_1,必又有一點P_2,而此P_1, P_2對稱於x軸.故其軌跡對稱於x軸.學者試自證其逆.

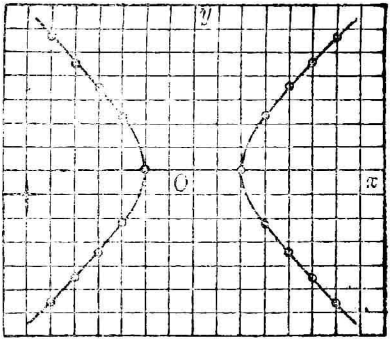
同理,若方程式中之x以$-x$代之而其方程式不變,則此方程式之軌跡對稱於y軸;其逆亦眞.

定理II. 若方程式中之x以$-x$代之,同時y以$-y$代之而方程式不變,則此方程式之軌跡對稱於原點;其逆亦眞.

學者試自證之.

例題. 試畫曲線$x^2-y^2=4$.

解 當$y=0$時,$x=\pm 2$; $x=0$時,y為虛數,故此



曲線與 y 軸不相交.又曲線對於兩軸及原點俱爲對稱.化原方程式爲

$$y=\pm\sqrt{x^2-4},$$

故知若 x 之絕對值小於 2,則 y 爲虛數.任意假設 x 大於 2 之值,則得下列諸點:

x	3	4	5	6
y	$\pm\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{21}$	$\pm 4\sqrt{2}$

得曲線如上圖;此曲線分爲兩枝,可伸張至無限遠.

習題五

畫下列直線:

1. $y=2x+1$.
2. $y=1-3x$.
3. $4x-3y=0$.
4. $3x-5y+6=0$.
5. $5x+2y+50=0$.
6. $y=3$.

選擇適當之比例尺,細心畫下列曲線:

7. $y=-2x^2$.
8. $y=\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

9. $y=1-\frac{1}{3}x^3$.　　10. $(y-2)^2=x$.

11. $4x^2+4y^2=1$.　　12. $y=x(x+2)(x-3)$.

13. $9x^2+y^2=36$.　　14. $x^2+y^2=2y$.

15. $x^2-y^2+9=0$.　　16. $xy=3$.

17. $xy^2=1$.　　18. $y=\frac{x^2}{x^2+1}$.

19. $y=\frac{x^3}{x^2+1}$.　　20. $y^2=x(x^2-4)$.

21. 敘述12節定理I之逆定理,并證明之.

22. 證明12節定理II.

23. 敘述12節定理II之逆定理,並證明之.

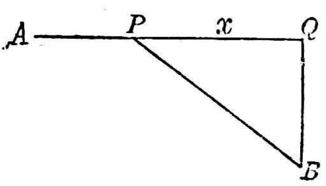
24. 若一曲線對於互相垂直之二直線皆對稱,則對稱於其交點.又舉例證明其逆定理之不眞.

25. 用幾何方法證明上第24題.

26. 一矩形內接於半徑爲12之圓內.設矩形之一邊爲$2x$,面積爲A,試用x表A,描寫如是所得含A及x之方程式,且求面積A最大時之x值.

27. 上問題26中,設矩形之周圍爲P,試用x表P,描寫含P及x之方程式,且求周圍P最小時之x值.

28. 如右圖,A及B爲二鎭,AQ爲河,BQ垂直於AQ,$AQ=8$里,又$BQ=5$里.在P處築一水塔供給兩鎭用水.若沿河之水管每里需\$600,沿PB之水管每里需\$1000,求水管之總價C,描寫其方程式,且決定最經濟時P之地位.



13. 注意. 本節所述之法則,備研究方程式與軌跡之用,其理明顯,不證自明.

法則I: 欲決定某已知點是否在已知曲線上,祗須驗明已知點之坐標是否適合於其方程式.

例如點 $(2, 12)$ 在曲線

$$y=3x^2 \text{ 上},$$

因 $$12=3\times 4;$$

點 $(-1, -3)$ 不在此曲線上,

因 $$-3\neq 3\times 1.$$

法則II. 用解析方法表明一點在曲線上之條件,祗須將曲線之方程式求出,然後以此點之坐標代入卽得.

例題 1. 求點 (x_1, y_1) 在曲線

$$x^2+y^2=a^2 \text{ 上之條件.}$$

解. 其條件爲 $x_1{}^2+y_1{}^2=a^2$.

其逆亦眞.

例題 2. 若點 $(-1, -3)$ 在曲線

$$y=ax^2 \text{ 上},$$

試決定 a 之值.

解. 由題意得

$$-3=a\cdot 1,$$

因之 $\qquad a=-3,$

故其方程式為 $\qquad y=-3x^2.$

法則III. 若已知曲線上一點之橫坐標欲求其縱坐標,則將橫坐標代入方程式中之x,解y之值即得若已知縱坐標欲求其橫坐標者,其法亦同.

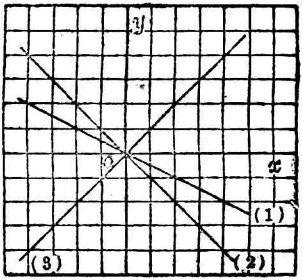
14. 可分解因數之方程式. 由代數知,

若 $\qquad x+2y=0, \qquad (1)$

或 $\qquad x+y=0, \qquad (2)$

或 $\qquad x-y=0, \qquad (3)$

則 $\qquad 3(x+2y)(x^2-y^2)=0.$



所以 $3(x+2y)(x^2-y^2)=0$…………(A)之軌跡由$x+2y=0, x+y=0, x-y=0$之三軌跡所組成.因(A)式之軌跡為(A)式所有一切之根所表之點,而(1),(2),(3)式一切之根即(A)式之根故也.

故如圖所示，$3(x+2y)(x^2-y^2)=0$ 之軌跡爲三直線.

習題六

決定已知各點是否在所設曲線上：

1. 曲線 $2x+3y=5$；點 $(1, 1)$, $(5, -5)$, $\left(0, \frac{5}{3}\right)$, $(13, 6)$.

2. 曲線 $x^2+y^2=25$；點 $(-5, 0)$, $(\pm3, \pm4)$, $(2\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $(2\sqrt{3}, 3\sqrt{2})$.

3. 曲線 $x^2-xy+2y^2+6y-4=0$；點 $(2, -2)$, $(0, 0)$, $(4, 2)$.

4. 曲線 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$；點 (a, b), $(-a, 0)$, $\left(\sqrt{a^2-b^2}, \frac{b^2}{a}\right)$.

5. 求 k 之數值，若直線 $x+2y=k$ 過 (a) $(4, 1)$；(b) $(-6, -5)$；(c) $(0, 0)$.

6. 求 k，若曲線 $y=kx^3$ 過 (a) $(-1, -3)$；(b) $(4, 2)$；(c) $(0, 0)$.

7. 求 m 若直線 $y=mx+2$ 過 (a) $(1, 3)$；(b) $(2, -2)$；(c) $(0, 2)$. 又此直線過 $(0, 0)$ 否?

8. 曲線 $y=ax^2+bx+c$ 過 $(0, 0)$ 之條件若何? 過 $(2, 1)$ 如何? 過 $(-1, c)$ 如何?

9. 設點 (x_1, y_1) 在曲線 $y^2=4ax$ 上，用解析方法表此事實.

10. 在何種情形之下，點 (h, k) 在直線 $3x+4y=6$ 上?

11. 在曲線 $y=6x^2$ 上，求 (a) 橫坐標爲 2 之點；(b) 縱坐標爲 3 之點.

12. 在曲線 $y^2-x-3y+2=0$ 上，求 (a) 縱坐標爲 3 之點；(b)

橫坐標爲0之點; (c) 橫坐標爲3之點; (d) 橫坐標爲 -4 之點.

13. 過 $(3,2)$, $(-2,5)$ 之直線之方程式爲 $3x+5y=19$, 試證之.

畫出曲線:

14. $x^2-3xy=0$ **15.** $x^3y=4xy^3$

16. $x^2-4xy+4y^2=0$ **17.** $x^2-4xy+4y^2=1.$

18. $(x^2+y^2-1)(y^3-2x)=0$ **19.** $xy-3y^2-2x+6y=0.$

20. $4y=x^4-8.$

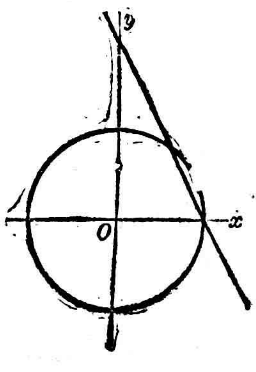
15. 二曲線之交點. 二曲線之交點之坐標必同時適合其二方程式. 故欲求其交點祇須將兩方程式作爲聯立方程式, 解得之根即所求交點之坐標.

例題. 求直線 $$2x+y=10 \qquad (1)$$

與圓 $$x^2+y^2=25 \qquad (2)$$

之交點.

解. 從 (1) 式得 y 之值, 代入 (2) 式



得 $$x^2+(10-2x)^2=25,$$

即 $$5x^2-40x+75=0,$$

即 $$x^2-8x+15=0,$$

因之 $$x=3 \text{ 或 } 5,$$

從 (1) 得 $y=4$ 或 0,

所以其交點為(3, 4); (5, 0).

〔注意〕 將此二交點代入二方程式驗之.

習題七

求下列曲線之交點;并驗所得之結果.

1. $3x-y=1,\ x+2y=5.$ 答: $(1, 2)$.

2. $2x+3y=0,\ 6x+6y+1=0.$

3. $2x+y=8,\ 3x-2y+16=0.$

4. $7x-8y=1,\ 3x+5y+5=0.$ 答: $\left(-\frac{35}{59}, -\frac{38}{59}\right)$.

5. $x^2+y^2=5,\ x+3y=5.$

6. $x^2+y^2=8, x+y+4=0.$

7. $x^2+y^2+2x-9=0,\ 3x-y=7.$

8. $x^2+y^2=6,\ x^2+y^2-4x+2=0.$ 答: $(2, \pm\sqrt{2})$.

9. $y=3x^2+5x+7,\ 4x+y=1.$ 答: $(-1, 5), (-2, 9)$.

10. $y=4x^2-16x,\ y=x^2-4x-15.$ 答: 虛數.

11. $xy=1,\ x^2y=2.$

12. $xy-x+y=2,\ xy+2x+4=0.$ 答: $(-2, 0),\left(-\frac{2}{3}, 4\right)$.

13. $y^2=2x,\ y=4x.$ 答: $(0, 0), \left(\pm\frac{1}{8}\sqrt{2}, \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$,

14. $y=4-3x^2-x^3,\ y=3x+5.$ 答: $(-1,2)$.

第三章

軌跡

16. 動點之軌跡 我人嘗以曲線乃由適合於某方程式之根作爲坐標,由是所得之點集合而成,今改變觀念,曲線者乃一動點依某條件移動所經之路,吾人稱其爲此動點之軌跡,如有一二等分第一及第三象限之直線乃由無數之點所構成,此等點之坐標皆適合方程式

$$y=x$$

此一說也;或此直線乃一動點與兩坐標軸等距離而動之軌跡,又一說也,後者在解析幾何學上非常重要.

例題 1. 一動點常與P_1:$(3,2)$,$P_2(-1,5)$等距離而動,求其軌跡之方程式.

解. 設動點之坐標爲P:(x,y),則依題意得

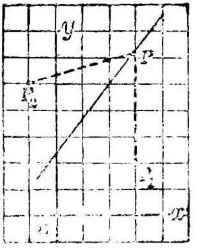
$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$$

此卽所求之方程式,兩邊平方而整理之,得

$$x^2-6x+9+y^2-4y+4=x^2+2x+1+y^2-10y+25,$$

卽　$$8x-6y+13=0.$$

此軌跡爲一直線.

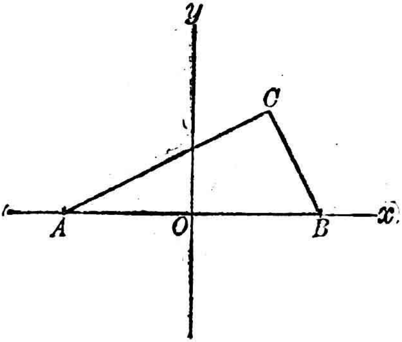


〔注意〕 $\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-5)^2}$ 是否爲所求軌跡之方程式,倘須嚴格證明,其手續有二:(1)軌跡上所有各點之坐標須適合此方程式;(2)坐標適合於方程式之點必在軌跡上.上例題1之解法祇完成第一步手續.惟平常第二步手續祇須將第一手續倒行逆上卽得,故略之.

例題 2. 已知三角形 ABC 之底邊 AB 及其他兩邊平方之差,求頂點之軌跡.

解. 以 AB 爲 x 軸,其垂直二等分線爲 y 軸.又設頂點 C 之坐標爲 (x, y), $AB=2k$, 平方之差爲 d^2, 則因 A 點爲 $(-k, 0)$, B 點爲 $(k, 0)$.

故　$$\overline{AC}^2=y^2+(k+x)^2,\ \overline{BC}^2=y^2+(k-x)^2,$$



$$\therefore \qquad \overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 4kx = d^2,$$

即 $$x = \frac{d^2}{4k},$$

此即爲其軌跡之方程式.

習題八

求下列各題軌跡之方程式,并畫其曲線.

1. 一動點與二點 (0, 0) 及 (4, 0) 等距離.　　答: $x=2$.

2. 一動點與二點 (4, 0) 及 (−6, −3) 等距離.

答: $20x+6y+29=0$.

3. 一動點與點 (0, 0) 之距離適二倍於與點 (0, −6) 之距離.　　答: $x^2+y^2+16y+48=0$.

4. 一動點與原點之距離爲 3.

5. 一動點與直線 $x=3$ 及點 (−3, 0) 等距離.

答: $y^2+12x=0$.

6. 一動點與點 (1, 0) 之距離適等於與直線 $x=4$ 之距離之半.　　答: $3x^2+4y^2=12$.

7. 三角形之面積爲3, 又其三頂點一爲動點, 一爲原點, 一爲點 (1, 0).　　答: $y=6$, $y=-6$.

8. 一動點與點 (4, 0) 及點 (−4, 0) 之距離之和爲10.

答: $9x^2+25y^2=225$.

9. 一動點與二點 (3, 2) 及 (−1, 5) 所成之三角形之面積爲2, 求軌跡之方程式　　答: $3x+4y=13$, $3x+4y=21$.

10. 聯 (4, 3), (0, 0) 間之線分爲三角形之底, 其高爲2. 求第三頂點之軌跡.　　答: $3x+4y=34$, $3x+4y=14$.

11. 聯 (3, 5), (2, 3) 間之線分爲等腰直角三角形之斜邊. 求第三頂點.　　答: $\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

12. 圓之半徑爲 $\sqrt{29}$, 又一弦之二端爲 (7, 2), (1, −6) 求中心.　　答: $\left(\frac{12}{5}, -\frac{4}{5}\right)$, $\left(\frac{28}{5}, -\frac{16}{5}\right)$.

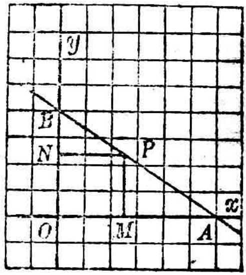
13. 聯 (3, −4), (2, 3) 間之線分爲一正方形之一對角線. 求其他頂點.　　答: (6, 0), (−1, −1).

√ 14. (0, 2), (4, 8), 爲直角三角形之二頂點, 又直角頂點爲 (4, 8). 求第三頂點之軌跡.　　答: $2x+3y=32$.

17. 求軌跡之方程式之兩方法　玆先舉例說明之.

例題 1. 一直線在兩坐標軸上之截距 $OA=3$, $OB=2$, 求其方程式.

解. 設在直線上任意一點P之坐標爲(x, y). 因P在直線上,故三角形MAP及OAB必相似,故得



$$\frac{MP}{OB}=\frac{MA}{OA};$$

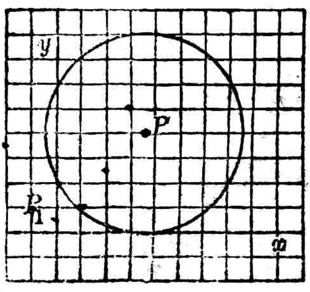
即
$$\frac{y}{2}=\frac{3-x}{3}.$$

此即AB直線之方程式.去分母而整理之,則得

$$2x+3y=6.$$

例題 2. 設有諸圓皆過P_1:(0, 1)點,且與x軸相切,求其中心之軌跡.

解. 如圖,作適合於問題之一圓,設其中心爲P:(x, y). 因P圓切於x軸,且過(0, 1),故得其軌跡之方程式如次



$y=\frac{1}{2}(x^2+1)$

$$y=\sqrt{x^2+(y-1)^2}.$$

如例題1,已知其曲線之性質;或如例題2,已知其作圖法,從此作圖法可決定曲

線上之點.則以(x, y)表曲線上任一點之坐標,然後依其幾何性質作含有x, y之方程式,卽爲所求之軌跡方程式矣.

習題九

1. 求切於二坐標軸之圓之中心之軌跡.

2. 求聯$(3, 3)$及$(5, -7)$間線分之垂直二等分線之方程式.　　答: $x-5y=14$.

3. 求過點$(2, 3)$, $(5, -2)$之圓之中心之軌跡.

答: $3x-5y=8$.

4. 聯$(2, 4)$, $(3, -5)$間之線分爲一等腰三角形之底;求頂點之軌跡.　　答: $x-9y=7$.

5. 聯$(3, -7)$, $(2, 6)$間之線分爲一直角三角形之斜邊;求第三頂點之軌跡.　　答: $x^2+y^2-5x+y=36$.

6. 求過原點及$(6, 4)$之直線方程式.

7. 求過$(0, 0)$, $(-7, 3)$之直線方程式.

8. 一直線之x截距及y截距各爲1及6;求其方程式.

答: $6x+y=6$.

9. 求過$(3, 6)$ $(-7, 2)$之直線方程式. 答 $2x-5y+24=0$.

10. 求半徑爲3以$(2, 5)$爲中心之圓方程式.

11. 聯$(4, 2)$, $(3, 3)$間之線分爲一等腰三角形之一腰,求第三頂點之軌跡.

答: $x^2+y^2-6x-6y+16=0$, $x^2+y^2-8x-4y+18=0$.

12. 一圓過$\left(-1, -\frac{1}{3}\right)$,且以$\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}\right)$爲中心,求其方程式.

答： $3x^2+3y^2-2x+10y=2.$

13. 一動點與 $(a, 0)$ 及 $(-a, 0)$ 之二聯結線互相垂直.求其軌跡.

14. 二已知圓之半徑皆為1, 各以$(5, 0)$ 及 $(1, 7)$ 為中心.求切於二已知圓之諸圓之中心之軌跡. 答: $8x-14y+25=0.$

15. 一圓過$\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$, 且切於直線$2x+1=0$.求其中心之軌跡. 答: $16y^2-32x+24y+9=0.$

16. 一動圓切於y軸, 及半徑為1以$(2, 0)$為中心之圓.求動圓中心之軌跡. 答: $y^2-6x+3=0, y^2-2x+3=0.$

17. 一直線平行於過$(3, 5)$, $(-1, 2)$, 之直線, 且二直線間之距離為4.求前者之方程式.

答: $3x-4y-9=0, 3x-4y+31=0.$

18. 半徑為$\sqrt{5}$之圓,在過點$(2, 0)$及$(0,4)$之直線上轉滾.求其中心之軌跡. 答: $2x+y-9=0, 2x+y+1=0.$

19. 求以點$(5, 5)$及$(-1, 3)$為直徑之二端之圓方程式.

答: $x^2+y^2-4x-8y+10=0.$

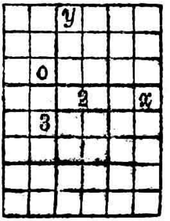
第　四　章

直　　線

18.　平行於坐標軸之直線　今用解析方法詳細探討各種曲線,先從直線始.

若一直線平行於y軸,則其方程式爲

$$x=k,\qquad 公式 (7a)$$



此處k爲直線與軸間之距離;其逆亦眞.

因 $x=k$ 卽 $0\times y+x=k$, 故直線上各點之坐標皆適合於方程式,而適合於方程式之各點皆在此直線上,故其方程式爲$x=k$.

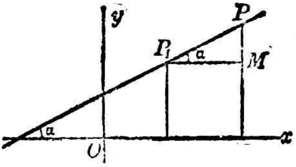
同理,平行於x軸且相距爲h之直線之方程式爲

$$y=h.\qquad 公式 (7b)$$

圖中所示為 $x=2$, $y=-3$ 之二直線.

19. 經過一已知點及已知方向之直線 設一直線經過一已知點 $P_1:(x_1, y_1)$, 又已知其斜率 $m=\tan\alpha$, 求其方程式.

設在直線上任取一點 $P:(x, y)$, 則在三角形 P_1MP 內,



$$\tan\alpha=\frac{MP}{P_1M}=m;$$

即

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=m,$$

或

$$\boldsymbol{y-y_1=m(x-x_1)}. \qquad \text{公式(8)}$$

〔注意1〕 此乃重要標準方程式之一.

〔注意2〕 若直線與 y 軸平行, 則 $m=\tan 90°$, 此式不能應用, 可用公式(7a)之方程式 $x=x_1$.

習 題 十

1. 描寫直線: (a) $x=0$, (b) $y=0$, (c) $x+4=0$, (d) $3x=5$, (e) $2y-1=0$, (f) $3+4y=0$.

求下列各直線之方程式,且描寫之:

2. 過 $(4, -2)$ (a) 平行於 Oy; (b) 平行於 Ox.

3. 過 $(1, 6)$, (a) 平行於直線 $2x+5=0$; (b) 垂直於此直線.

4. 過 $(-3, 2)$, 斜率為 $\frac{1}{3}$. 答: $x-3y+9=0$.

5. 過 $(1, 1)$, 斜率為 $-\frac{3}{5}$.

6. 過 $(-4, 1)$, 與 Ox 成 -45° 角.

7. 斜率為 $-\frac{2}{3}$, 又 x 截距為 -2.

8. 過 $(-2, 1)$, 且垂直於過 $(5, -3)$ 及 $(3, 6)$ 之直線.

答: $2x-9y+13=0$.

9. 過 $(3, 5)$ (a) 平行, (b) 垂直, 於過 $(2, -2)$ 及 $(0, -3)$ 之直線.

答: (a) $x-2y+7=0$; (b) $2x+y=11$.

10. 直角三角形之二頂點為 $(5, 5)$, $(-1, -2)$, 前者為直角頂點. 求第三頂點之軌跡.

11. 過 $\left(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{7}\right)$, 垂直於過 $(0, 0)$ 及 $(5, -2)$ 之直線.

答: $35x-14y+2=0$.

12. 過原點 (a) 平行, (b) 垂直於過 $(2, -3)$ 及 $(2, 1)$ 之直線.

13. 用新方法, 求點 $(3, 3)$ 及 $(5, -7)$ 之聯結線分之垂直二等分線之方程式(參閱習題九問題2.)

14. 用二種方法, 求 $(5, 2)$ 與 $(-4, -3)$ 間之線分之垂直二等分線之方程式.

15. 以點 $(4, 1)$ 與 $(5, -2)$ 間之線分為等腰三角形之底. 求第三頂點之軌跡.

答: $x-3y=6$.

16. 過點 $(1, 2)$, $(-5, -3)$ 作諸圓, 求其中心之軌跡.

17. 過 $(5, 1)$ 之直線其斜率為 2, 此直線過 $(20, 32)$ 否? 過 $(-2, -13)$ 否?

18. 矩形之三頂點為 $(3, -2)$, $(7, 6)$, $(3, 8)$. 用新方法求第四頂點.

19. 平行四邊形之順次三頂點爲(2, 0), (1, 3), (3, 4). 用二種方法求第四頂點. 答: (4, 1).

20. 二圓之半徑皆爲10, 又中心各爲(7, 1)及(−7, 3). 求其公共弦之方程式, 及其長. 答: $y=7x+2$, $10\sqrt{2}$.

20 過二已知點之直線方程式 設二已知點之坐標爲(x_1, y_1)及$(x_2\ y_2)$, 則依公式(4)知過二已知點之直線之斜率爲

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

再應用公式(8)得

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \qquad \text{公式(9)}$$

或
$$y-y_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2).$$

〔注意〕上兩方程式去括弧整理後完全相同, 故普通以前者爲標準式.

例題 求過兩已知點(3, − 5), (−6, −3)之直線之方程式.

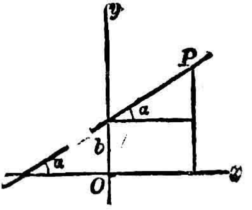
解. $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{-3+5}{-6-3}=-\dfrac{2}{9},$

故直線之方程式爲

$$y+3=-\frac{2}{9}(x+6),$$

即
$$2x+9y+39=0.$$

21. 已知斜率及 y 截距之直線方程式　設斜率為 m, y 截距為 b, 又在直線上任意一點為 $P:(x,y)$



則
$$\tan a=\frac{y-b}{x}=m,$$

故得

$$y=mx+b. \qquad \text{公式 (10)}$$

〔注意1〕 若化直線方程式為公式(10)之形式則 x 之係數即為此直線之斜率,常數項即為 y 截距.

〔注意2〕 公式(10)稱為直線之**斜率式** (slope form), 亦為重要標準方程式之一.

習題十一

求下列直線之方程式;

1. 過二點 (4, 3), (6, 2).　　答: $x+2y=10$.

2. 過二點 (−1, 0), (−3, −4).　　答: $y=2x+2$.

3. 過二點 $(-2,-7)$, $\left(-\frac{3}{2},\ \frac{2}{3}\right)$　　答: $3y=46x+71$.

4. 過原點及直線 $3x+2y+7=0$ 與 $x-5y=8$ 之交點.

答: $19y=31x$.

5. 三角形之頂點爲 $(3, 1)$, $(2, 5)$, $(-1, 7)$. 求二中線之交點,且驗明第三中線必過此點.

6. 求直線之方程式,其 y 截距爲 -3, 又與 Ox 成 (a) $60°$角; (b) $135°$角; (c) $-30°$角.

7. 求直線之方程式,其斜率爲$\frac{1}{2}$, 又 (a) 過原點; (b) 其 y 截距爲 -2.

8. 用 y 截距及斜率,畫下列直線:

(a) $y=\frac{2}{5}x-2$; (b) $y=-3x+3$;

(c) $y=-\frac{3}{4}x+60$; (d) $y=\frac{1}{10}x-\frac{1}{2}$.

9. 求直線之方程式,使過 $(2-, 1)$, 且 (a) 平行, (b) 垂直於 $y=-\frac{7}{2}x+1$.

10. 求直線之方程式,使 (a) 過 $\left(-2, -\frac{3}{5}\right)$ 且平行於 $y=-\frac{1}{4}x+2$; (b) 過 $\left(\frac{1}{10}, -\frac{3}{20}\right)$, 且垂直於 $y=-\frac{1}{5}x+1$.

答: (a) $5x+20y+22=0$, (b) $100x-20y=13$.

11. 直角三角形之二頂點爲 $(5, -3)$, $(-3, 2)$, 前者爲直角頂點. 求第三頂點之軌跡.

12. $(-1, 3)$ 及 $(4, 8)$ 之聯結線分爲等腰三角形之底邊,又頂點在 Ox 上. 求其坐標. 答: $(7, 0)$.

13. $(0, -2)$ 及 $(2, -3)$ 之聯結線分爲矩形之一邊,求其他二頂點之軌跡.

14. 一圓切直線 $y=8x+3$ 於 $(-1,\ -5)$. 求其中心之軌跡.

答: $x+8y+41=0$.

15. 一圓能各切直線 $y=2x+4$, 及 $y=-x+2$ 於 $(-4,\ -4)$, 及 $(5,\ -3)$ 否?

22. 普遍一次方程式 含 x, y 之一次普遍方程式通常有一項含 x, 一項含 y, 又一項爲常數, 故爲

$$Ax+By+C=0.$$

若 $B=0$, 則此方程式爲與 y 軸平行之直線. 若 $B\neq 0$, 則就 y 解之得

$$y=mx+b,\ \left(m=-\frac{A}{B},\ b=-\frac{C}{B}\right)$$

從 21 節知此爲一直線. 故得

定理: 一次方程式之軌跡爲一直線.

其逆定理: 一直線之方程式爲一次方程式.

若此直線與 y 軸平行, 則其方程式爲

$$x=k,$$

此乃一次方程式, 若與 y 軸相交, 則必有一定斜率及一定之 y 截距, 從公式 (10) 知其方程式爲

$$y=mx+b,$$

此亦爲一次方程式也. 故其逆定理亦眞.

23. 平行線及垂直線 若將二方程式

$$Ax+By+C=0,$$

$$Ax+By+K=0,$$

俱化成斜率式,則知此二直線互相平行;若將二式

$$Ax+By+C=0,$$

$$Bx-Ay+K=0,$$

俱化成斜率式,則知此二直線互相垂直.故欲使一直線與其他已知一直線互相平行,則所求方程式中之x,y之係數必與已知方程式中之x,y之係數各各相等;欲使其一直線與其他一已知直線互相垂直,則前者之x,y之係數必與後者之y,x之係數各各相等,且須變其中一項之係數之符號.

例題. 求作一直線之方程式,使過一點$(3,-1)$且垂直於直線 $3x+2y=6$.

解. 所求之直線必為 $2x-3y+k=0$; 又因此直線通過$(3,-1)$,故得

$$2\times3-3\times(-1)+k=0,$$

$$6+3+k=0,$$

$$k=-9.$$

故所求之方程式為

$$2x-3y-9=0.$$

習題十二

化下列方程式為斜率式,並畫其直線.

1. $3x-y+6=0$. **2**. $2x+5y=0$.

3. $3y+4=0$. **4**. $3-5y=0$.

求下列直線之方程式.

5. 過$\left(\frac{3}{2}, -2\right)$,且平行於直線$3x-2y+5=0$.

6 過$(-3, -1)$,且平行於直線$4x=5y+6$.

7. 過$(2, -3)$,且平行於直線$3x-5=0$.

8 過$(0, 0)$,且垂直於直線$3x-5y+6=0$.

9 過$(-3, -4)$,且垂直於直線$6x-y=1$.

10. 過$(-1, 5)$,且垂直於直線$5y+8=0$.

11 一圓切直線$5x-3y=11$於$(1, -2)$,求中心之軌跡.

12. 過二直線$3x+2y=5$及$x+y+3=0$之交點作一直線使垂直於前一直線,求其方程式. 答: $2x-3y=64$.

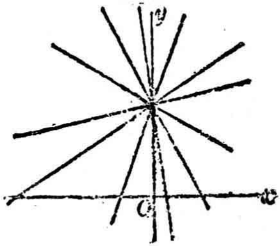
13. 求證直線$x+2y+1=0$, $6x-3y=5$, $y=2x-1$, 及$4x+8y+7=0$成一矩形.

24. 含有未定常數之方程式;曲線之族(family

of curves) 一方程式含有一未定常數,則其所表之曲線之數無限. 此無限數曲線謂之曲線之族.

例如,方程式

$$y=mx+3$$



中 m 之數值未定,則此方程式表一族直線(如圖),皆交 y 軸於(0, 3).故方程式 $y=mx+3$ 乃通過定點(0, 3)之直線之方程式. 倘再有其他一條件,如過其他一定點等,則直線方能決定,因將定點之坐標代入此式,常數 m 之值可因之而定也.

例題. 通過一定點(5, 3),求其一族直線之方程式,求再過(4, 7)之直線方程式.

解. 從公式(8)知此族直線之方程式爲 $y-3=m(x-5)$.

將(4, 7)代入,則得

$$m=-4,$$

故再過(4, 7)之直線方程式爲

$$y-3=-4(x-5).$$

25. 二條件可決定一直線　斜率式之直線方程式爲　$y=mx+b,$

此方程式中含有二常數 m 及 b,故二點,或二條件,決定一直線.

普遍直線方程式爲

$$Ax+By+C=0.$$

驟觀之需三條件方可決定,惟以 A, B, C 中之任一常數除之(祇須不等於零),即得含有兩常數之一方程式,故二條件可決定一直線.

習題十三

求下列直線族之方程式.

1. 平行於 $3x+5y+7=0$.

2 平行於 $y+2x=0$.

3. y 截距爲 2.

4. 斜率爲 $\frac{2}{3}$.

5 垂直於直線 $5x-2y+4=0$.

6. x 截距爲 6.

7. 垂直於直線 $x-3y=6$; 決定其中再過 $(5, -1)$; 之直線方程式.　答: $3x+y=14$.

8. 過 $(2, 1)$; 再決定其中平行於直線 $y=3x+4$ 之直線方程式.

9. 過 $(5, -2)$; 再決定其中垂直於直線 $3x+8y+7=0$ 之直線方程式.

10. 若直線 $y=mx+b$ 通過 $(2, 4)$ 及 $(-3, -5)$, 試決定 m 及 b 之值.

11. 求 A 之值,若直線 $Ax+2y-4=0$, (a) 過 $(2, 1)$; (b) 過 $(1, 2)$; (c) 過 $(0, 3)$; (d) 斜率爲 3; (e) y 截距爲 2.

須有若干點方可決定下列曲線.

12. $3x+2y+c=0$.

13. $Ax+By=0$.

14. $x^2+y^2=2ax$.

13. $y=ax^2+bx+c$.

16. $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$. 答: 5.

17. $y=ax^3+bx^2+cx+d$. 答: 4.

18. 使曲線 $y=ax^2+bx$ 過 $(2, 1)$, $(1, 4)$ 兩點而決定 a, b; 且描寫其曲線. 答: $y=-\frac{7}{2}a^2+\frac{15}{2}x$.

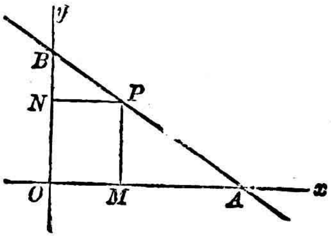
19. 使曲線 $y=ax^3+bx^2+cx+d$ 過點 $(0, 0)$, $(-1, 5)$, $(1, -11)$, $(2, -22)$ 而決定 a, b, c, d; 且描寫其曲線. 答: $y=x^3-3x^2-9x$.

20. 使曲線 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 過 $(-1, 7)$, $(2, 6)$, $(-5, -1)$ 而決定 D, E, F. 答: $x^2+y^2+2x-4y-20=0$.

26. 截距式 (intercept form) 之直線方程式

設一直線在 x 軸上之截距 OA 爲 a, 又在 y 軸上之截距 OB 爲 b. 在直線上任取一點 $P:(x, y)$, 則 $\triangle MAP$ 與 $\triangle OAB$ 相似. 故

$$\frac{MP}{OB}=\frac{MA}{OA},$$



或 $$\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}.$$

即 $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$ **公式(11)**

此式稱爲**截距式**之直線方程式，亦爲重要標準式之一.

〔注意〕 若直線與x軸，或y軸平行，或通過原點，則不能化成此形式.

例題. 化方程式

$$3x-2y+8=0$$

爲截距式.

解. 設 $y=0$，則得x截距爲 $-\frac{8}{3}$；同樣得y截距爲4.故其截距式爲

$$\frac{x}{-\frac{8}{3}}+\frac{y}{4}=1.$$

習題十四

求下列直線之方程式,并描寫其直線.

1. 在 Ox 及 Oy 上之截距爲 5, 3.

2. 截距爲 $-\frac{1}{2}$, -2.

3. 截距爲 $-\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$.

4. 截距爲 $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$.

化下列方程式爲截距式,并描寫其直線.

5. $3x-2y+7=0$.

6. $2x-7y=8$.

7. $x+5y+5=0$.

8. $3x+6y=1$.

9. 若一直線之二截距相等,且過 (3, 2), 求其方程式.

答: $x+y=5$.

10. 一直線之截距之絕對值相等,惟符號則相反;又過 (1, 5), 用二種方法求方程式.

11. 一直線之 y 截距適二倍於 x 截距;又過 (7, 3), 求其方程式.　　答: $2x+y=17$.

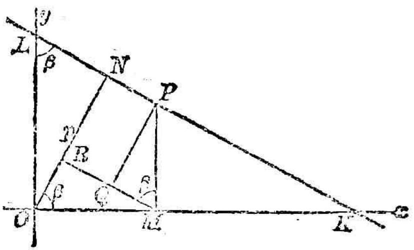
12. 一直線之 x 截距爲其 y 截距之 $\frac{1}{3}$;又過 $(-1, -2)$. 求其方程式.　　答: $3x+y+5=0$.

13. 若直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{-5}=1$ 與直線 $2x+3y=8$ 相交成直角,求 a.　　答: $\frac{10}{3}$

14. 直線 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 經過(3, 2)之條件若何? 過 (x_1, y_1) 若何?

15. 一圓與二直線 $x+3y=3$, $2x+6y+3=0$ 相切. 求其中心之軌跡.

27. 法線式(normal form)之直線方程式. 若已知自原點至一直線之垂線之長為 p, 又此垂線與 Ox 所成之角為 β, 則此直線之方程式為



$$x\cos\beta+y\sin\beta=p \qquad \text{公式(12)}$$

證. 設在直線上任取一點 $P:(x, y)$, 又引如圖之補助線, 則

$$OR+RN=OR+QP=ON.$$

但 $\quad OR=x\cos\beta,\ QP=y\sin\beta,\ ON=p,$

故 $$x\cos\beta+y\sin\beta=p.$$

此方程式稱為法線式之直線方程式

此方程式中 p 之數值常假定為正數, 又 β 為小

於 360° 之正角.

〔注意1〕 若直線通過原點,則 p 為 0. 同時可視為由 LK 線平行移動而成,故 β 角度仍舊存在,惟祇須視為由 x 軸上方移動而來,故 β 乃小於 180° 之正值,故 y 之係數 $\sin\beta$ 常為正.

〔注意2〕 法線式亦為重要標準方程式之一.

欲化一直線方程式

$$Ax+By+C=0 \tag{1}$$

為法線式

$$x\cos\beta+y\sin\beta=p, \tag{2}$$

則因 (1) 及 (2) 兩式表同一直線,故 (1) 式之係數 A, B 及 C 與 (2) 式之係數 $\cos\beta, \sin\beta$ 及 $-p$ 必須成比例. 設其比值為 k, 則

$$\frac{\cos\beta}{A}=k,\ \frac{\sin\beta}{B}=k,\ \frac{-p}{C}=k,$$

故 $$\cos\beta=Ak,\ \sin\beta=Bk,\ p=-kC.$$

因 $$\cos^2\beta+\sin^2\beta=k^2(A^2+B^2).$$

故 $$k^2(A^2+B^2)=1$$

$$k=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

故 $\cos\beta=\dfrac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\beta=\dfrac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$,

$$p=-\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

故所求之方程式爲

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

總上所論,得下之

法則:欲將直線方程式 $Ax+By+C=0$ 化爲法線式,須以 $\pm\sqrt{A^2+B^2}$ 除方程式之各項,又選定符號時須使根號前有與 C 相反之符號.

例題 求與直線 $x-2y+10=0$ 之距離爲 $\sqrt{5}$ 之點之軌跡.

解. 從上述法則,將原方程式化爲法線式,得

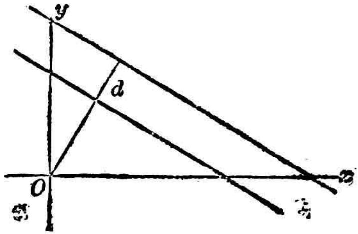
$$-\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}},$$

故從原點至此直線之距離爲 $\dfrac{10}{\sqrt{5}}$. 所求之軌跡爲與所設直線平行之兩直線,又與所設直線之距離爲 $\sqrt{5}$;故原點至此兩直線之距離爲 $\dfrac{10}{\sqrt{5}}\pm\sqrt{5}$. 得所求之直線爲

$$-\frac{x}{\sqrt{5}}+\frac{2y}{\sqrt{5}}=\frac{10}{\sqrt{5}}\pm\sqrt{5},$$

即 $$-x+2y=10\pm5.$$

28. 二平行線間之距離 欲求兩平行線間之距離,祇須將兩直線化成法線式,若兩直線在原點一側,則取其 p 之差,若在原點二側則取其 p 之和



習題十五

1. 化下列方程式爲法線式,又求從原點至各直線之距離:

(a) $3x-4y-8=0$; (b) $4x+y+2=0$;

(c) $2x-3y+6=0$; (d) $y=5$;

(e) $2x+7=0$.

2. 若一直線與原點之距離爲 5, 又從原點所作之垂線與 Ox 所成之角爲 (a) $0°$; (b) $60°$; (c) $90°$. 求其方程式.

3. 一直線與 Ox 成 $45°$ 角, 且與原點之距離爲 3. 求其方程式.

答: $y=x\pm3\sqrt{2}$.

4. 一直線與原點之距離爲 4, 又其斜率爲 -5. 求其方程式.

答: $5x+y=\pm4\sqrt{26}$.

求下列直線之方程式.

5. 平行於 $x+3y+2=0$, 又與原點之距離爲 3.

答: $x+y=\pm3\sqrt{10}$.

6. 平行於 $2x-y=6$, 又與原點之距離 (a) 爲所設直線與

原點距離之半; (b) 三倍於所設直線與原點之距離; (c)較所設直線與原點之距離多 2. 答: (c) $2x-y=\pm(6+2\sqrt{5})$.

7. 平行於 $3x-2y=6$, 且與點 $(5, 3)$ 之距離爲 2.

答: $3a-2y=9\pm2\sqrt{13}$.

8. 求與直線 $4x+3y+6=0$ 之距離爲 4 之點之軌跡.

答: $4x+3y+6=\pm20$.

9. 一圓之半徑爲 $\sqrt{5}$, 又此圓切於直線 $2x-y+3=0$, 求其中心之軌跡.

10. $(0, 5)$ 與 $(3, 1)$ 間之聯結線分爲正方形之一邊,求其他各頂點. 答: $(4, 8)$, $(7, 4)$; $(-4, 2)$, $(-1, -2)$.

11. $(6, 4)$ 與 $(5, 2)$ 間之線分爲三角形之底; 其面積爲 $\frac{5}{2}$, 求第三頂點之軌跡. 答: $2x-y=13$, $2x-y=3$.

12. $(0, 0)$ 與 $(8, -6)$ 間之線分爲等腰三角形之底; 腰長 13. 求第三頂點. 答: $\left(\frac{56}{5}, \frac{33}{5}\right)$; $\left(-\frac{16}{5}, -\frac{63}{5}\right)$.

o**13.** 求兩直線 $2x-5y=3$, $2x-5y=6$ 間之距離.

答: $\frac{3}{29}\sqrt{29}$.

14. 若一正方形之兩邊在直線 $x+y=0$, $x+y+6=0$ 上, 求正方形之面積.

15. 矩形之四邊各在直線 $x-6y+3=0$, $x-6y+1=0$, $6x+y=5$, $12x+2y+3=0$ 上, 求其面積. 答: $\frac{13}{37}$.

16. 以原點爲中心之圓之半徑爲 5. 求與 O 之距離爲 5, 且過 $(11, 2)$ 之直線方程式,然後求從 $(11, 2)$ 所作之切線之方程式. 答: $3x-4y=25$, $7x+24y=125$.

17. 在27節圖內,求 K 及 L 之坐標.不用直線方程式,用三角法從圖直接解之. 答: $K:(p\sec\beta, 0)$ $L:(0, p\csc\beta)$.

18. 用上題所得之結果,根據三角形 KPI 之面積爲0之理.求法線式之公式.

19. 直線 $\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y=p$ 經過 $(2, -5)$,求 p.

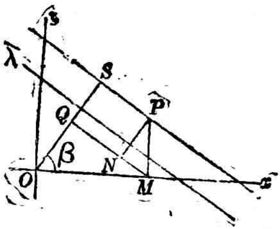
20. 根據 OP 之中點與 O 及 N 等距離之事實,求法線式之公式.

29. 從直線至一點之距離 求從直線

$$Ax+By+C=0 \qquad (\text{圖中之}\lambda)$$

至不在此直線上之任何一點 $P:(x_1, y_1)$ 之距離,其法先將

$$Ax+By+C=0$$



化成法線式

$$x\cos\beta+y\sin\beta=p.$$

引如圖之補助線,則

$$OQ=OM\cos\beta=x_1\cos\beta$$

$$QS=NP=MP\cos(90^\circ-\beta)=MP\sin\beta=y_1\sin\beta,$$

$$OS=x_1\cos\beta+y_1\sin\beta,$$

因之距離 $d=x_1\cos\beta+y_1\sin\beta-p.$ **公式(13 A)**

從27節得從直線

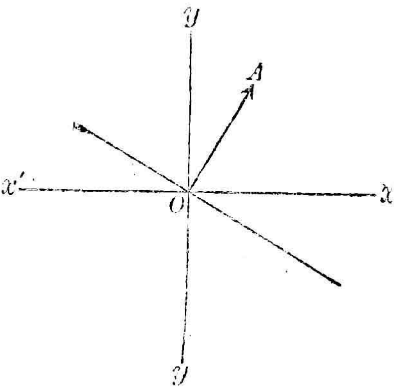
$$Ax+By+C=0$$

至點(x_1, y_1)之距離之公式爲

$$d=\frac{Ax_1+By_1+C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \qquad \text{公式}(13\,B)$$

分母之符號須與 C 之符號相反.若C爲零,則須與B之符號相同.

〔注意〕 如上圖,若 d 爲正數,則所設直線至所設點之方向與原點至所設直線之垂直線方向相同,即 P 與原點在直線兩側;d 爲負數,則相反,即 P 與原點在直線同側.若直線通過原點,則 β 小於 $180°$.故 d 爲正數,則所設直線至所設點



之方向與圖中 OA 相同(向上),即 P 點在直線上方;d 爲負數,則相反(向下),即P點在直線下方.

例題1. 求自直線 $3x-2y+5=0$ 至 $(3, 4)$ 點之距離.

解. $$d=\frac{3\cdot 3-2\cdot 4+5}{-\sqrt{13}}=-\frac{6}{\sqrt{13}}.$$

例題 2. 一動點與點 (3, 1) 及直線 $x+2y-2=0$ 爲等距離,試求其軌跡.

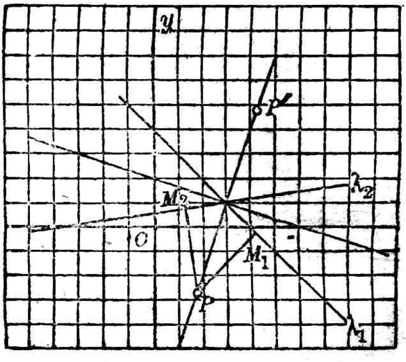
解. 設動點之坐標爲 (x, y), 則

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-1)^2}=\frac{x+2y-2}{\sqrt{5}},$$

平方後整理之,

$$4x^2-4xy+y^2-26x-2y+46=0.$$

例題 3. 求直線 $x+y=2$, 及 $x-7y+2=0$ 所成之角之二等分線之方程式.



解. 角二等分線乃與二邊等距離之點之軌跡. 設 $P:(x,y)$ 爲二等分線上之一點, 則因 P 點之位置對於 λ_1, 或 λ_2 皆與原點在同側, 故 M_1P, M_2P 二垂直線之數值與符號皆等, 又若 P 點在 P' 之位置對於 λ_1, 或 λ_2 皆與原點不在同側, 故其兩垂線之數值與符號亦皆等.

因　$M_1P=\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}}$，$M_2P=\dfrac{-x+7y-2}{5\sqrt{2}}$，

故　P 點之軌跡為

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}=\frac{-x+7y-2}{5\sqrt{2}},$$

即　$$3x-y=4.$$

同理,其他一二等分線之方程式為

$$\frac{x+y-2}{\sqrt{2}}=-\left(\frac{-x+7y-2}{5\sqrt{2}}\right),$$

即　$$x+3y=3.$$

習題十六

求下列各直線至一定點之距離.

1. $(3, 2)$, $x-y=2$.　答: $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

2. $(4, 6)$, $3x-y+3=0$.　答: $-\frac{9}{10}\sqrt{10}$.

3. $(-5, 3)$, $x-4y=0$.　答: $\sqrt{17}$.

4. 用二種方法,求三角形之面積,其頂點為 $(0, 0)$, $(5, 6)$, $(3, 2)$.　答: 4.

5. 求至點 $(1, 1)$ 及直線 $x+2y=0$ 等距離之點之軌跡之方程式.　答: $4x^2-4xy+y^2-10x-10y+10=0$.

6. 求與原點及直線 $x+4y=3$ 等距離之點之軌跡之方程式.　答: $16x^2-8xy+y^2+6x+24y-9=0$.

7. 一圓過 $(0, 0)$, 且切於直線 $2x+3y+1=0$. 求其中心之軌跡.

答: $9x^2-12xy+4y^2-4x-6y=1$.

8. 自原點至一動點之距離常二倍於自直線 $x+y=1$ 至此點之距離. 求其軌跡之方程式.

答: $x^2+4xy+y^2-4x-4y+2=0$.

9. 自直線 $x+y=3$ 至一動點之距離常四倍於自直線 $7x-y+1=0$ 至此點之距離. 求其軌跡之方程式.

答: $33x+y=11,\ 23x-9y+19=0$.

求下列二直線所成之角之二等分線.

10. $2x+y=1,\ x+y=2$. 答: $\dfrac{2x+y-1}{\sqrt{5}}=\pm\left(\dfrac{x+y-2}{\sqrt{2}}\right)$.

11. $3x+y+6=0,\ 2x+6y=5$. 答: $8x+8y+7=0,\ 4x-4y+17=0$.

12. $3x-y=0,\ x+y+1=0$.

答: $(3\pm\sqrt{5})x+(-1\pm\sqrt{5})y\pm\sqrt{5}=0$.

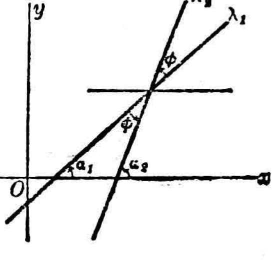
13. $4x-5y=6,\ x+7y=8$.

答: $5\sqrt{2}(4x-5y-6)=\pm\sqrt{41}(x+7y-8)$.

14. 一圓切於 x 軸及直線 $5y=12x$. 求其中心之軌跡.

答: $2x-3y=0,\ 3x+2y=0$.

30. 兩直線所成之角



自一直線 λ_1 至其他一直線 λ_2 所成之角乃指從 λ_1 迄 λ_2 所成之正角(與時針方向相反)而言,如 ϕ. 若僅計角度之大小,則祇言兩直線所成之角.

設λ_1, λ_2與Ox所成之斜角爲α_1, α_2,又自λ_1至λ_2所成之角爲ϕ,則

$$\alpha_2=\alpha_1+\phi,$$

因之 $$\phi=\alpha_2-\alpha_1.$$

$$\tan\phi=\tan(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\tan\alpha_2-\tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1\tan\alpha_2}.$$

設直線之斜率

$$\tan\alpha_1=m_1, \tan\alpha_2=m_2,$$

則 $$\tan\phi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}. \qquad \text{公式(14)}$$

設從λ_2至λ_1之角爲θ,則$\theta=180^\circ-\phi$,

故 $$\tan\theta=\tan(180^\circ-\phi)=-\tan\phi=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}.$$

例題1. 求$3x-y=10$, $2x+y=6$兩直線間所成之角.

解. 化兩直線爲斜率式,則得

$$y=3x-10, \qquad y=-2x+6,$$

故 $$m_1=3, \qquad m_2=-2.$$

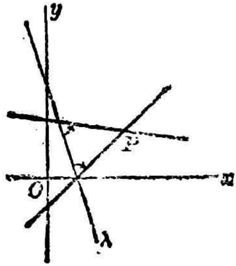
代入公式(14),得

$$\tan\phi=\frac{-2-3}{1-6}=1.$$

故　　　　$\phi=45°.$

例題2. 直線過定點 $P:(5,3)$, 且與直線 $3x+y=6$ 所成之角 $\phi=\tan^{-1}2$. 求其方程式.

解. 若自 $3x+y=6$ 至所求之直線之角爲 ϕ, 則 $\tan\phi=2$, $m_1=-3$, 故得



$$2=\frac{m_2+3}{1-3m_2}.$$

即得　　$m_2=-\frac{1}{7}$,

故所求之直線爲

$$y-3=-\frac{1}{7}(x-5),$$

即　　　　$x+7y=26.$

若自所求之直線至 $3x+y=6$ 之角爲 ϕ, 則

$$2=\frac{-3-m_2}{1-3m_2},$$

故 $m_2=1$, 又所求之直線爲

$$y-3=x-5,$$

即　　　　$x-y=2.$

習題十七

求所設直線間之角.

1. $y=2x-1$, $y=5x+4$. 答: $\tan^{-1}\frac{3}{11}$.

2. $3x-2y=0$, $4x+3y+5=0$. 答: $\tan^{-1}\frac{17}{6}$.

3. $x+4y=5$, $5y=1+3x$. 答: $45°$.

4. $3x+y=6$, $2x-3y+7=0$. 答: $\tan^{-1}\frac{11}{3}$.

5. $2x+3=0$, $3x-5y-5=0$. 答: $\tan^{-1}\frac{5}{3}$.

6. 三角形之三頂點爲 $(3, 4)$, $(2, 3)$ 及 $(1, -2)$, 用公式 $A=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$ (α 爲 b 及 c 邊間之角), 求其面積. 答: 2.

7. 直線過點 $(6, -2)$, 且與直線 $x+6y+5=0$ 所成之角 $\phi=\tan^{-1}3$, 求其方程式. 答: $17x-9y=120$, $19x+3y=108$.

8. 直線過原點,且與直線 $7x+2y=1$ 所成之角 $\phi=\tan^{-1}\frac{1}{3}$ 求其方程式. 答: $19x+13y=0$, $y=23x$.

9. 直線過點 $(9, -6)$ 且與點 $(4, -1)$ 之距離爲1, 求其方程式. 答: $3x+4y=3$, $4x+3y=18$.

10. 聯二點 $(-4, 3)$, 及 $(2, 1)$ 間之線分爲等腰三角形之底;其高爲 $2\sqrt{10}$. 求第三頂點(用30節). 答: $(1, 8)$, $(-3, -4)$.

11. 用法線式解問題10.

12. 等腰直角三角形之直角頂點爲 $(-2, 16)$, 其他一頂點 $(-10, 10)$. 求第三頂點. 答: $(4, 8)$, $(-8, 24)$.

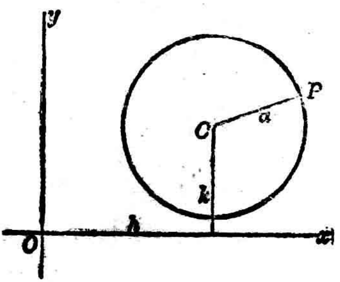
第五章

圓 (Circle)

31. 定義; 標準式. 一動點與一定點依一定距離而動之軌跡曰圓. 定點曰中心, 定距離曰半徑. 過中心之直線, 或過中心而止於圓周之線分曰直徑.

若中心為O, 又半徑為a, 則從定義動點在任何位置時得

$$\sqrt{x^2+y^2}=a;$$



若中心之坐標為(h,k), 又半徑為a, 則

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=a.$$

故中心為$(0,0)$, 半徑為a之圓方程式為

$$x^2+y^2=a^2; \qquad \text{公式 (15 A)}$$

若中心爲(h, k),則其方程式爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2. \qquad \text{公式}(15\,B)$$

此兩方程式爲圓之標準式.

32. **圓之普遍方程式.** 含x, y之普遍二次方程式爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

若 $A=C$ 及 $B=0$, 則爲

$$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0 \qquad \text{公式}(15\,C)$$

以A除此方程式之兩邊,又常數一項移至右邊,然後配成完全平方;則可化爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

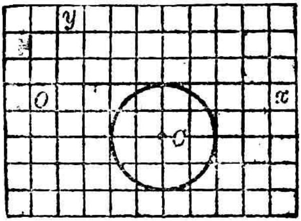
之形式,即爲圓之方程式,故公式$(15\,C)$乃圓之普遍方程式.

其逆,任何圓之方程式可化爲公式$(15\,C)$之形式,(見上節).故得

定理:x, y之二次方程式之x^2與y^2之係數相等,且缺xy項,則此乃一圓;其逆亦真.

例題. 求圓 $4x^2+4y^2-4x+2y+1=0$ 之中心及其半徑.

解. 先將常數項移至右邊，然後以4除之，



即得

$$x^2+y^2-x+\frac{1}{2}y=-\frac{1}{4}.$$

配成完全平方，

$$x^2-x+\frac{1}{4}+y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16},$$

即 $$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}.$$

故中心爲 $C:\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，半徑爲 $\frac{1}{4}$.

〔註〕 若將二次方程式化成公式(15 B)之形式後右邊爲0，即

$$(x-h)^2+(y-k)^2=0,$$

則中心爲 (h, k)，半徑爲0，其軌跡祇爲一點 (h, k)，所謂點圓(point circle)是也.

若右邊爲負數，則此圓稱爲虛圓(imaginary circle).

習題十八

求下列各圓之方程式；且繪其圖形.

1. 中心爲(0, 3)，又半徑爲4.

2. 中心爲 $(-1, -3)$, 又半徑爲 1.

3. 中心爲 $\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$, 又半徑爲 $\frac{1}{6}$.

4. 中心爲 $(2, 5)$, 且切於 x 軸.

5. 中心爲 $(-a, 0)$, 且切於 y 軸.

6. 半徑爲 5, 且切於兩軸.

7. 中心爲 $(3, 3)$, 且過原點.

8. 中心爲 $(5, 2)$, 且過 $(6, -1)$.

9. 直徑之兩端爲 $(2, 2)$ 及 $(0, -5)$.

10. 中心爲 $(3, -4)$, 且切於直線 $2x+5y=15$.

答: $(x-3)^2+(y+4)^2=29$.

11. 應用公式 (15 B), 求適合下列各圓之條件:

(a) 切於 x 軸.

(b) 切於兩軸.

(c) 過原點.

(d) 過原點,且中心在 y 軸上.

(e) 中心在直線 $3x+2y=5$ 上.

(f) 中心在直線 $y=x$ 上, 且過 $(0, 0)$.

描寫下列各圓.

12. $x^2+y^2+4x-8y=0$.

13. $x^2+y^2-6x-2y+9=0$.

14. $x^2+y^2=6x$.

15. $x^2+y^2+5=6y$.

16. 自原點至一動點之距離之平方常等於自直線 $x=k$ 至此點之距離. 求其軌跡,且描寫之. 答: $x^2+y^2+x=k$.

17. 一動點與點 (0,0) 及 (1, 0) 之距離之平方之和爲一常數.求其軌跡之方程式. 答: $2x^2+2y^2-2x+1=k$.

18. 一動點與二定點之距離之平方之和爲一常數,則其軌跡爲一圓.

19. 一動點與點 (1, 0) 之距離常二倍於與點 (3, 5) 之距離.求其軌跡之方程式. 答: $3x^2+3y^2-22x-40y+135=0$.

20. 一動點與二定點間之距離之比值爲 k,則其軌跡成何種曲線? 若 $k=0$, 及 $k=1$ 時如何?

21. 用解析方法求證內接於半圓之角是直角.

22. 求證兩圓 $x^2+y^2-4y-4=0$, $x^2+y^2+2x+10y+8=0$ 相切,且描寫其圖形.

33. 圓之三條件. 在初等幾何學中,知三點決定一圓.在解析幾學,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$$

中含有三個獨立常數 h, k 及 a. 故圓可使適合於三獨立條件,由此三獨立條件卽得三聯立方程式,因之卽可決定常數之值.例如,已知三切線,或已知二點及半徑皆可求得其方程式.惟有時適合於條件之圓多至二個以上者,如切於三已知直線之圓有四是也.

〔注意〕 由上法求圓之方程式有時用公式

(15 B) 有時用公式 (15 C), 有時用特別方法則更爲簡捷.

例題. 求過 $P_1:(1,1)$, $P_2:(2,-1)$, $P_3:(2,3)$ 三點之圓方程式.

解. 設公式 (15 C) 中之 $A=1$, 則得

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

然後將三點之坐標代入, 得三個聯立方程式

$$2+D+E+F=0,$$

$$5+2D-E+F=0,$$

$$13+2D+3E+F=0;$$

解上三方程式可得 D, E 及 F.

別法. 中心必在 P_1P_2 之垂直二等分線上, 其方程式爲

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2},$$

或　$$2x-4y=3;$$

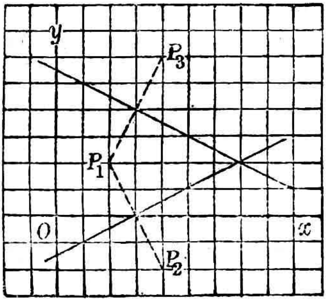
又中心亦必在 P_1P_3 之垂直二等分線上, 其方程式爲

$$2x+4y=11.$$

應用此公式時, A 之值可假定爲1, 因以 A 除之必可使爲1也.

故中心必為此兩垂直二等分線之交點,

即 $\left(\frac{7}{2}, 1\right)$. 半徑乃自 $\left(\frac{7}{2}, 1\right)$ 至任何一已知點之距離,求得為 $\frac{5}{2}$. 從公式 (15 *B*),得圓之方程式為



$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-1)^2=\frac{25}{4},$$

即
$$x^2+y^2-7x-2y+7=0.$$

習題十九

求下列各圓之方程式,且描寫其圖形.

1. 過 $(1, -1)$, $(5, -3)$, $(4, -2)$. 答: $(x-1)^2+(y+6)^2=25$.

2. 過 $(6, -5)$, $(4, -3)$, $(-2, -1)$.

答: $x^2+y^2+4x+22y+25=0$.

D **3.** 外接於以 $(3, 2)$, $(1, -1)$, $(-2, 1)$, 為頂點之三角形.

答: $x^2+y^2-x-3y-4=0$.

4. 過點 $(2, 2)$, $(4, 3)$, 又其中心在 y 軸上.

答: $x^2+y^2-17y+26=0$.

5. 過點 $(1,3)$, $(5,-3)$, 又其中心在直線 $y=2x-10$ 上.

答: $(x-6)^2+(y-2)^2=26$.

6. 切直線 $4x+3y=26$ 於 $(5,2)$, 且過 $(-2,3)$.

答: $x^2+y^2-2x+2y-23=0$.

7. 切直線 $x+y=6$ 於 $(2,4)$, 又半徑爲 $\sqrt{2}$.

答: 中心 : $(1,3)$, $(3,5)$.

8. 用另一方法解問題7.

9. 切於直線 $x=3$, $3x-4y=0$, 又中心在直線 $x+2y=6$ 上.

答: $\left(x-\frac{27}{10}\right)^2+\left(y-\frac{23}{20}\right)^2=\frac{9}{100}$.

10. 內切於以直線 $3x-4y=5$, $4x-3y+10=0$, $y=2$ 所成之三角形內.

答: 中心 : $\left(-\frac{5}{21}, \frac{10}{21}\right)$.

11. 切於直線 $x+2y=4$, $x+2y=2$, $y=2x-5$.

答: 中心 : $(3, 0)$, $\left(\frac{11}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

12. 半徑爲 $\sqrt{10}$, 切於直線 $2x+6y=3$, 又中心在 Ox 上.

答: 中心 $\left(\frac{23}{2}, 0\right)$, $\left(-\frac{17}{2}, 0\right)$.

13. 半徑爲 $2\sqrt{2}$, 又切於直線 $x+y=0$, $x-y=0$.

答: $x^2+y^2\pm 8x+8=0$; $x^2+y^2\pm 8y+8=0$.

14. 半徑爲 $\sqrt{10}$, 且過 $(2,2)$, $(4,4)$.

15. 用本節所述之別法解問題14.

16. 半徑爲 $\sqrt{26}$, 且過 $(1,1)$, $(-7,-5)$. 用各種方法解之.

答: 中心 : $\left(-\frac{12}{5}, -\frac{14}{5}\right)$, $\left(-\frac{18}{5}, -\frac{6}{5}\right)$.

17. 切圓 $x^2+y^2=100$ 於 $(6, -8)$, 又半徑為15.

答: 中心: $(-3, 4)$, $(15, -20)$.

18. 切圓 $x^2+y^2+2x-6y+5=0$ 於 $(1, 2)$, 又過 $(4, -1)$.

答: 中心: $(3, 1)$.

34. 直線與圓,及圓與圓之交點. 一直線與圓之交點可解直線與圓所成之聯立方程式而求之.其法,先由直線方程式解y(或x)代入圓方程式,即得一含x(或y)之二次方程式,解之得x(或y)之值,再代入直線方程式可得y(或x)之值.因直線為一次式,圓為二次式,故其根有兩組,即表二點.若此兩組之數值為相異之實數,則其交點為不同之兩實點;若為相同之實數,則兩交點合而為一,即相切;若為相異之虛數,則不相交矣.

兩圓之交點可解兩圓所成之二次聯立方程式而求之.其法,先消去兩方程式中之x^2及y^2得一一次方程式,再將此一次方程式與其中之任一圓方程式解之,其法與直線相同.

習題二十

求下列曲線之交點.

1. $3x^2+3y^2-6-8y=0,\ 3x+y=6.$ 答：$\left(\frac{9}{5},\frac{3}{5}\right),(1,\ 3).$

2. $x^2+y^2=9,\ x+y=2.$ 答：$(1\pm\frac{1}{2}\sqrt{14},\ 1\mp\frac{1}{2}\sqrt{14}).$

3. $x^2+y^2=8,\ 4x-3y=15.$ 答：虛根

4. $x^2+y^2-2x-4y+1=0,\ x^2+y^2-10x-12y+41=0.$

答：$(3,\ 2),\ (1,\ 4).$

5. $x^2+y^2+x=0,\ 3x^2+3y^2-5x-4y=0.$

答：$(0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right).$

6. $x^2+y^2=13,\ x^2+y^2-3x-2y=0.$ 答：$(3,\ 2).$

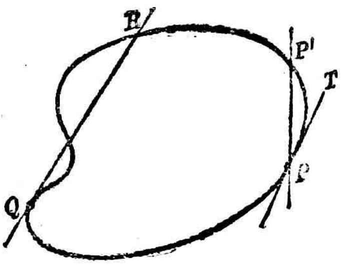
7. 求圓 $x^2+y^2-3x+2y=4$，與兩軸之交點.

答：$(4,\ 0),\ (-1,\ 0);\ (0,\ -1\pm\sqrt{5}).$

8. 求直線 $Ax+By+C=0$ 與圓 $x^2+y^2=a^2$ 交於不同之兩實點之條件. 答：$C^2<a^2(A^2+B^2).$

9. 求兩圓 $(x-h)^2+(y-k)^2=b^2,\ x^2+y^2=a^2$ 交於兩實點之條件.

35. 平面曲線之切線. 若一直線與曲線有二以上之交點，則此直線稱爲曲線之**弦**或**割線**. 或如初等幾何學，曲線上二點間之線分亦曰**弦**.



如圖，設 P 爲曲線上之一定點，P' 爲其相鄰之點，則 PP' 爲曲線之割線. 若 P' 漸移近 P，則 PP' 通常漸近一定位置，如 PT. 此 PT，即 P

與P重合時之PP,稱爲曲線之切線.P稱爲切點.

〔註〕 切線之定義與初等幾何學上之定義不同.初等幾何學上與曲線僅交於一點之直線爲切線,實有欠缺之處,譬如圖之QR線雖與曲線再交於R點而爲過Q之切線是也.

過曲線上任何點之切線之斜率稱爲過此點之曲線之斜率.若兩曲線相交於一點P而過P點之兩曲線之斜率相等(卽有一公共切線),則此兩曲線稱爲相切於P.

過兩曲線之交點各引曲線之切線,其交角稱爲兩曲線之交角.

36. **相切之條件.** 從切線之定義,如一曲線與直線相切,則將曲線及直線之方程式聯立而解之,如是所得二對x,y之值全同,卽兩交點合而爲一.

今以二次方程式所表之曲線而論之.若一直線爲曲線之切線,則從直線方程式求得含有x(或y)之y(或x)值,代入曲線方程式內,卽得一個含x(或y)之等根二次方程式,其形式必爲

$$ax^2+bx+c=0,$$

或

$$ay^2+by+c=0.$$

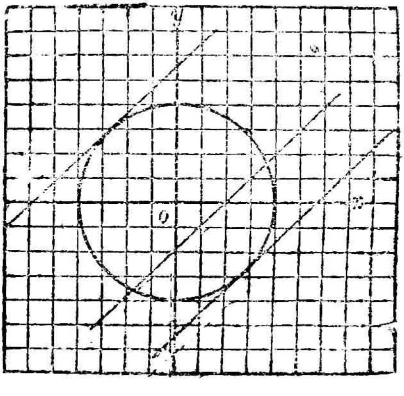
故 $$b^2-4ac=0.$$

其逆，若 $b^2-4ac=0$，則兩交點之橫坐標（或縱坐標）相等，故兩交點重合，必爲相切無疑矣.*

所以 $b^2-4ac=0$ 即爲相切之條件.

37. 一定斜率之切線. 根據上節可得已知斜率之切線方程式

例題. 求與 $y=x-\frac{1}{2}$ 平行之 $x^2+y^2=1$ 之切線.



*若直線與 y 軸平行，則橫坐標雖相等縱坐標未必相等，此逆定理未必爲眞.雖然，倘直線與 y 軸平行，則直線方程式爲 $x=k$ 之形式，以此代入圓方程式求 y 爲等根之條件可也.

解. 平行於 $y=x-\frac{1}{2}$ 之任何直線之方程式必爲

$$y=x+k \tag{1}$$

將 (1) 式之 y 代入圓方程式

$$x^2+y^2=1,$$

則得 $$x^2+(x+k)^2=1,$$

卽 $$2x^2+2kx+k^2-1=0.$$

此方程式之二根卽爲直線與圓之兩交點之橫坐標. 若二根相等, 卽兩交點相合. 故

$$(2k)^2-4\cdot 2(k^2-1)=0,$$

或 $$-k^2+2=0,$$

卽 $$k=\pm\sqrt{2}.$$

故圓之切線爲

$$y=x\pm\sqrt{2}.$$

習題二十一

1. 求圓 $x^2+y^2=17$ 之切線, 使平行於直線 $x+4y=3$.

答: $x+4y=\pm 17$.

2. 求圓 $x^2+y^2=10$ 之切線, 使垂直於直線 $2x-3y=5$.

答: $3x+2y=\pm\sqrt{130}$.

3. 求圓 $2x^2+2y^2=y$ 之切線,使與 Ox 成 45° 角.

答: $4x-4y+1\pm\sqrt{2}=0$.

4. 求圓 $x^2+y^2-4x+6y-4=0$ 之切線,使垂直於直線 $4x+y=0$.　答: $x-4y+3=0$, $x-4y=31$.

5. 求圓 $x^2+y^2+4x-2y-4=0$ 之切線,使平行於 y 軸.

6. 求圓 $x^2+y^2=5$ 之切線,使垂直於直線 $2x+y=3$.

7. 求圓 $2x^2+2y^2=1$ 之切線,使平行於直線 $x-y=2$.

8. 求圓 $x^2+y^2+2x=0$ 之切線,使垂直於直線 $x-2y=6$.

答: $2x+y+2\pm\sqrt{5}=0$.

9. 求圓 $x^2+y^2+10x-6y=2$ 之切線,使平行於直線 $2x-y=0$.

答: $2x-y+13=\pm6\sqrt{5}$.

10. 求圓 $x^2+y^2=20$ 之切線,使通斜率為 2 之直徑之兩端.

11. 證明直線 $4x-3y=17$ 為圓 $x^2+y^2+4x=21$ 之切線.

12. 若圓 $x^2+y^2+2ax=0$ 與直線 $y=x+1$ 相切,求 a.

答; $a=-1\pm\sqrt{2}$.

13. 若圓 $x^2+(y-c)^2=1$ 與直線 $x+2y=0$ 相切,求 c.

答: $\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$.

14. 求兩圓 $x^2+y^2=6x+8y$, $x^2+y^2=25$ 之公切線.

答: $4x-3y=\pm25$.

15. 求兩圓 $x^2+y^2-4x-2y=10$, $4x^2+4y^2-24x-4y-23=0$ 之公切線.　答: $x+2y=4\pm5\sqrt{3}$.

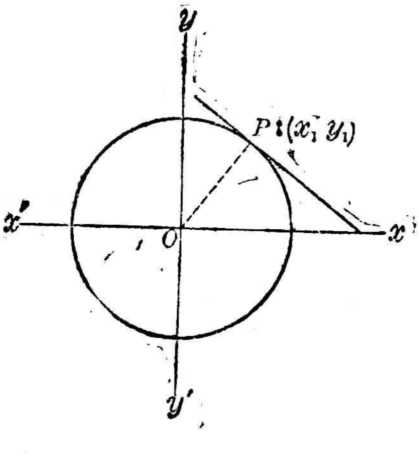
16. 若直線 $Ax+y+2=0$ 與圓 $x^2+y^2=2y$ 相切,求 A.

答: $A=\pm2\sqrt{2}$.

17. 一直線之 y 截距適二倍於 x 截距，且切於此圓 $x^2+y^2+4x=0$. 求直線之方程式. 答: $2x+y+4=\pm4\sqrt{5}$.

18. 一圓之中心爲 $(1, 7)$，且切於其他一圓 $x^2+y^2=2$. 求其方程式. 答: 半徑: $4\sqrt{2}$, $6\sqrt{2}$.

38. 過圓周上一定點(即切點)之切線. 設 $P:(x_1, y_1)$ 爲圓 $x^2+y^2=r^2$ 上之一定點，求過 P 點之切線方程式.



解. OP 之斜率爲 $\frac{y_1}{x_1}$，因切線與過切點之半徑互相垂直，故切線之斜率爲 $-\frac{x_1}{y_1}$. 應用公式(8)得過 P 點之切線方程式爲

$$y-y_1=-\frac{x_1}{y_1}(x-x_1),$$

或
$$x_1x+y_1y=x_1^2+y_1^2$$

因 P 點在圓上，

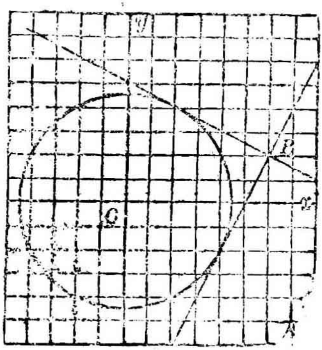
故
$$x_1^2+y_1^2=r^2.$$

故切線之方程式爲

$$\boldsymbol{x_1x+y_1y=r^2} \qquad \textbf{公式(16)}$$

39. 過圓外一定點之切線

例題. 過圓外一點 P:(3, 1), 求圓 $x^2+y^2=5$ 之切線.



解. 過 (3, 1) 點之任何直線之方程式爲

$$y-1=m(x-3), \quad (1)$$

或 $y=mx-3m+1.$

將此 y 值代入圓方程式得

$$x^2+(mx-3x+1)^2=5,$$

整理之得

$$(1+m^2)x^2+2m(-3m+1)x+9m^2-6m-4=0.$$

若$b^2-4ac=0$,則此式之根相等,而(1)式爲圓之切線,即

$$4m^2(-3m+1)^2-4(1+m^2)(9m^2-6m-4)=0.$$

化簡之得

$$2m^2-3m-2=0$$

$$(2m+1)(m-2)=0$$

故 $$m=-\frac{1}{2}\text{ 或 }2,$$

故所求之切線爲

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-3),$$

$$y-1=2(x-3).$$

習題二十二

求過下列各圓上定點之切線.

1. 圓 $x^2+y^2=20$, 定點 $(-2, -4)$. 答: $x+2y+10=0$.

2. 圓 $9a^2+9y^2=5$, 定點 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 答: $3x+6y=5$.

3. 圓 $x^2+y^2=5x$, 定點 $(1, -2)$. 答: $3x+4y+5=0$.

4. 圓 $x^2+y^2+2x-6y+2=0$, 定點 $(1, 1)$. 答: $x=y$.

5. 圓 $x^2+y^2-8y-2=0$, 定點 $(3, 1)$.

6. 圓 $x^2+y^2-x+3y=0$, 定點 $(0,0)$.

求過下列各圓外定點之切線.

7. $x^2+y^2=5$, 定點 $(0, 5)$. 答: $y-5=\pm 2x$.

8. $x^2+y^2=20$, 定點 $(-6, -2)$. 答: $y=2x+10, x+2y+10=0$.

9. $x^2+y^2=1$, 定點 $(3, 1)$. 答: $y=1, 3x-4y=5$.

10. $2x^2+2y^2+8y=1$, 定點 $(0, 4)$. 答: $y=\pm\sqrt{7}x+4$.

11. $3x^2+3y^2+5x-y+2=0$, 定點 $(0,0)$. 答: $(5\pm 4\sqrt{3})x+23y=0$.

12. $x^2+y^2-4x+4y-2=0$, 定點 $(4, 2)$.

答: $x-3y+2=0, 3x+y=14$.

求下列曲線之交角.

13. $4x-y+2=0, 2x^2+2y^2+x=0$. 答: $\phi=\tan^{-1}\frac{1}{4}$.

14. $x^2+y^2-x+3y=4, 3x+y=7$. 答: $\phi=\tan^{-1}\frac{4}{7}$.

15. $x^2+y^2=10, 2x^2+2y^2+5y=5x$. 答: $\phi=\tan^{-1}\frac{1}{2}$.

16. $x^2+y^2=1, x^2+y^2-4x-2y+1=0$. 答: $\frac{1}{2}\pi$.

40. 經過兩曲線交點之曲線. 設任意二曲線之方程式爲

$$u=0, v=0, \tag{1}$$

u, v 各爲含 x, y 之代數式. 若兩曲線之交點爲 P_1, P_2, 等, 又 k 爲任意常數, 則過兩曲線之交點之曲線爲

$$u+kv=0. \tag{2}$$

證. 因 P_1 在曲線 $u=0$ 上，故以 P_1 點之坐標代入 u 中之 x 及 y，其值必爲零. 同理，P_1 點又在曲線 $v=0$ 上，故其坐標代入 v 中之 x 及 y 其值亦必爲零. 故以 P_1 之坐標代入(2)式，得

$$0+k\cdot 0=0,$$

無論 k 爲何數必能適合；故 P_1 點在曲線 $u+kv=0$ 上.

同理，可知(2)式必過所設兩曲線之其他一切交點，故得

定理： **若 $u=0$ 及 $v=0$ 爲相交兩曲線，則**

$$\boldsymbol{u+kv=0} \qquad (3)$$

爲通過兩曲線之交點之一族曲線，此處 k 爲任意常數.

〔註1〕 若兩曲線不相交，即相交於虛點時，在初等幾何學上雖無意義，然在解析幾何學上仍能得過其交點之曲線.

〔註2〕 方程式(3)含有一未定常數，故若再有一條件，即可將曲線決定.

例題. 試求過兩曲線.

$$3x-2y=4,\ x+2y+2=0,$$

交點之直線，又若再經過一點(4, 2)，則其直線如何？

解. 由本節定理,過交點之直線爲

$$3x-2y-4+k(x+2y+2)=0.$$

若再過點(4, 2),則將坐標代入得

$$4+10k=0,\ \ k=-\frac{2}{5},$$

故所求之直線爲

$$3x-2y-4-\frac{2}{5}(x+2y+2)=0,$$

即 $$13x-14y=24.$$

41 經過兩圓交點之圓. 設 $C_1=0$, $C_2=0$ 爲兩圓,則經過兩圓交點之曲線爲

$$C_1+kC_2=0; \tag{1}$$

此式爲二次方程式,故即爲過兩圓交點之圓之方程式.

因三條件決定一圓,今已知過兩圓之兩交點,若再知一條件即可將此圓決定.

例題. 求經過兩圓

$$x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=x$$

交點及一點 $P:\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ 之圓.

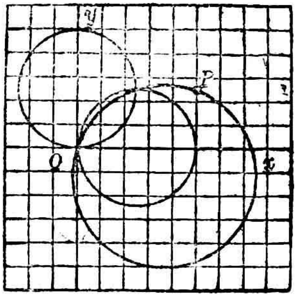
解. 從(1)式知所求之圓爲

$$x^2+y^2-y+k(x^2+y^2-x)=0. \tag{2}$$

若此圓經過$\left(1,\frac{1}{2}\right)$,則將坐標代入得

$$1+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+k\left(1+\frac{1}{4}-1\right)=0$$

因之 $k=-3.$



將此k值代入(2),即得

$x^2+y^2-y-3(x^2+y^2-x)=0$,或$2x^2+2y^2-3x+y=0$,此即所求之圓,

習題二十三

1. 求過二直線$x+y=1$, $2x-y=2$交點之一族直線之方程式.

2. 求第1題中過(2, 1)之直線. 答: $x-y=1.$

3. 求過二直線$2x-3y+8=0$, $y=3x+2$交點之一族直線之方程式.

4. 求第3題中過(1, 4)之直線. 答: $8x-5y+12=0.$

5. 求過直線$3x-y+1=0$, $x+2y+2=0$交點之一族直線之方程式.

6. 求上題中過$(-2, 2)$之直線. 答: $19x+10y+18=0$.

7. 求第5題中平行於y軸之直線,

8. 求第5題中y截距爲2之直線.

9. 求過直線$x-3y=6$, $4x+y=0$之交點及點$(4, 1)$之直線.

答: $37x-46y=102$.

10. 若$C=0$爲一圓, 又$L=0$爲一直線, 則$C+KL=0$之軌跡如何?

求下列各圓之方程式.

11. 過二圓$x^2+y^2-x+y=2$, $x^2+y^2=5$之交點及點$(2, -2)$.

答: $x^2+y^2-3x+3y+4=0$.

12. 過圓$x^2+y^2=25$及直線$3x+4y=1$之交點且過點$(3, 2)$.

13. 過二圓$x^2+y^2=20y$, $2x^2+2y^2+x+y=0$之交點, 且中心在x軸上.

14. 過圓$x^2+y^2-2x=1$及直線$x+2y=3$之交點, 且中心在y軸上.

15. 過二圓$x^2+y^2+1=0$, $x^2+y^2=0$之交點, 又過$(1, 1)$, 且描寫之.

42. 公共弦 (common chord). 設兩圓之方程式爲

$$C_1=0,\ C_2=0.$$

設兩方程式中x^2之係數相等, 若不相等則各以相當數乘之使之相等, 兩式相減得

$$C_1-C_2=0. \tag{1}$$

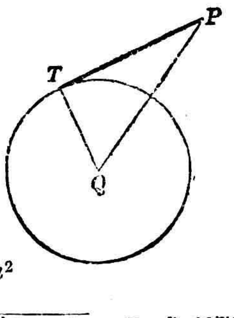
此方程式爲一次方程式，故表一直線．由前節知此乃 $k=-1$ 之一種特殊情形，故實爲通過 $C_1=0$，$C_2=0$ 兩圓交點之直線方程式，即爲兩圓之公共弦．因之，**若將兩圓方程式消去其 x^2，y^2 兩項，即得公共弦之直線方程式**．

43. 切線之長，冪 從圓外一點 P 引圓之切線，若其切點爲 T，則從 P 至 T 之距離稱爲**切線之長**．

若圓之方程式爲

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2,$$

又 P 點之坐標爲 (x_1, y_1)，則在直角三角形 PTQ 中，



$$\overline{PT}^2=\overline{QP}^2-a^2$$

$$=(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-a^2$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{PT=\sqrt{(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-a^2}}. \qquad \text{公式(17)}$$

又 $(x_1-h)^2+(y_1-k)^2-a^2$ 稱 Q 圓關於 P 點之**冪** (power).

44. 等冪線 (line of equal powers). 無論兩圓相交與否，由 42 節必可得一通過兩圓交點之一直線 $C_1-C_2=0$．在此直線上之任何點引兩圓之

切線,由幾何理知其必相等,因之其冪亦等.故此直線稱爲等冪線或根軸(radical axis).公共弦不過爲兩圓相交時等冪線之特殊情形而已.

習題二十四

1. 求二圓 $x^2+y^2-6x+8y=0$, $x^2+y^2=9$ 之公共弦.

答: $6x-8y=9$.

2. 在問題1中,求弦之長. 答: $\frac{3}{5}\sqrt{91}$.

3. 求二圓 $x^2+y^2-8x-3y=2$, $x^2+y^2=10$ 之公共弦.

4. 在問題3中,求弦之長. 答: $\frac{6}{73}\sqrt{5402}$.

5. 求二圓 $2x^2+2y^2+3x+5y=9$, $6x^2+6y^2+11x+13y=23$ 之公共弦. 答: $x-y+2=0$.

6. 若二圓相切,42節(1)式所表者何?

7. 求二圓 $(x-3)^2+(y-2)^2=4$, $x^2+y^2=1$ 之根軸.

8. 求二圓 $2x^2+2y^2-10y+11=0$, $x^2+y^2=x$ 之根軸.

9. 二等圓之根軸何在?用解析方法求之.

10. 求二點圓(卽半徑爲0之圓)之根軸.

11. 用新法求 $(-1, -2)$ 與 $(5, -4)$ 間聯結線分之垂直二等分線.

12. 一三角形之三條垂直二等分線相交於一點.

13. 求過圓上一已知點之切線之法,視此已知點爲點圓由解之.

應用問題13,求作過定圓上一定點之切線.

14. $x^2+y^2=2$ 於 $(-1, 1)$.

15. $x^2+y^2+2x+3y=1$ 於 $(1, -1)$.

16. $2x^2+2y^2-3x-4y-8=0$ 於 $(2, 3)$.

17. $3x^2+3y^2-x-2y=0$ 於 $(0, 0)$.

18. $x^2+y^2=a^2$ 於 (x_1, y_1). 答: $x_1x+y_1y=a^2$.

19. 求從 $(3, 3)$ 至圓 $x^2+y^2=3$ 之切線之長.

20. 求從 $(-1, 0)$ 至圓 $x^2+y^2-2x-6y+6=0$ 之切線之長.

答: 3.

21. 求從 $(0, 0)$ 至圓 $x^2+y^2-3x+5y+8=0$ 之切線之長.

答: $2\sqrt{2}$.

22. 求從 $(-5, 6)$ 至圓 $3x^2+3y^2=4x+5y$ 之切線之長.

答: $\frac{1}{3}\sqrt{519}$.

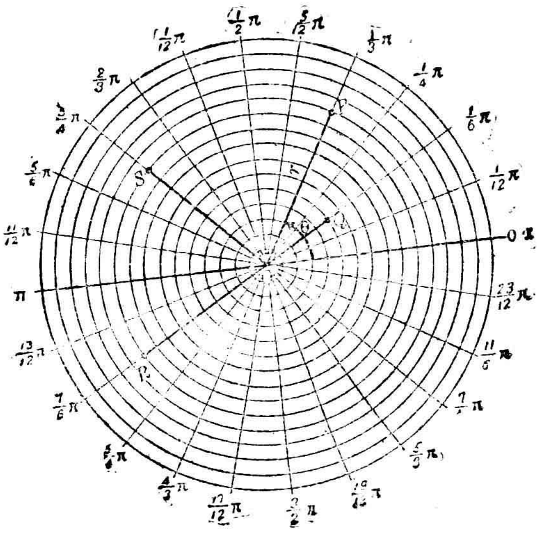
23. 若從二圓外一點至二圓之切線相等,則此點在二圓之等冪線上.由是得求作二圓等冪線之法.此種作圖法是否普遍適用?

24. 一動點 P 至二圓之切線之長成一定比,求證 P 點之軌跡乃過二已知圓之交點(實或虛)之圓.

第六章

極坐標 (Polar coördinates)

45. 極坐標. 一點之位置前曾用此點對於二直交線之距離決定之,即所謂笛卡兒坐標是也在笛卡兒坐標之外,又有所謂極坐標者有時可使問題更爲簡易,玆述如下:



在平面上選一定直線Ox,及Ox上一定點O. P若爲平面上一點,則若已知OP之距離,及OP與Ox所成之角即可決定P點之位置矣.此OP及xOP角稱爲P點之極坐標,OP稱爲**動徑**(radius vector),xOP角稱爲**極角**(polar angle),各以r,θ表之. Ox稱爲**首線**(initial line),或**極軸**(polar axis),O爲**極**(pole)或**原點**(origin).

若一點之極坐標之動徑爲r,極角爲θ,則以$P:(r,\theta)$或僅以(r,θ)表之.極角反時針方向測之爲正,順測爲負;動徑沿極角終邊測之爲正,沿極角終邊過O之延長線測之爲負.如上圖,Q爲$(1,30^\circ)$,R爲$(-2,30^\circ)$,S爲$(-2,-\frac{1}{4}\pi)$.

已知一點之極坐標,欲描寫此點則過O先引一直線使與Ox成已知極角Q,然後在其邊上依相當方向截取動徑r即得.

已知一對極坐標卽可決定一點;若已知一點,則可有種種不同之極坐標.例如,前圖之Q點可以$(1,30^\circ)$,$(-1,210^\circ)$,$(-1,-150^\circ)$或$(1,390^\circ)$等表之.

46. 曲線之描寫. 若一方程式含有r及θ,假定θ之值後,則可計算r.由此可得諸點而描寫曲線,此卽方程式之軌跡是也.

用笛卡兒坐標,則一方程式有一曲線相對照;用極坐標,則因一點可用幾種不同之坐標表之,故一曲線可有幾種不同之方程式.例如,方程 $r=2$, $r=-2$ 實表同一曲線,卽半徑爲2,以 O 爲中心之一圓是也.

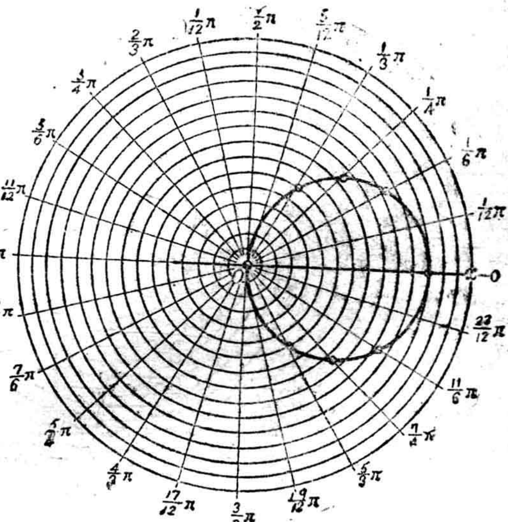
例題 1. 描寫

$$r=2a\cos\theta \text{ 之曲線.}$$

解. 假定 θ 之數值,然後計算 r.

θ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
r	$2a$	$\sqrt{3}a$	$\sqrt{2}a$	a	0	$-a$	$-\sqrt{2}a$	$-\sqrt{3}a$	$-2a$

將所得之諸點描寫之得右圖之曲線,此卽以 a 爲半徑,$(a, 0)$ 爲中心之圓,當於下節證明之.從餘弦函數之性質,



知θ之數值在π與2π之間時,得繪與上同樣之曲線.

例題 2. 描寫.

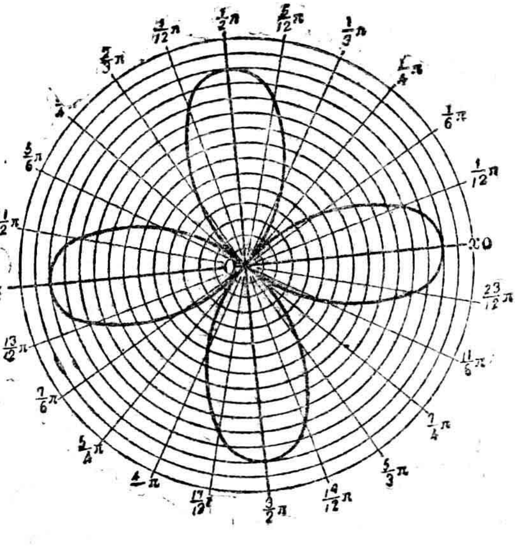
$r=a\cos 2\theta$之曲線.

解

θ	$0°$	$15°$	$22\frac{1°}{2}$	$30°$	$45°$
2θ	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
r	a	$\frac{1}{2}\sqrt{3}a$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}a$	$\frac{1}{2}a$	0

從上表描寫諸點,卽得$0<\theta<45°$間之曲線部份.

θ自$45°$至$90°$,則2θ自$90°$至$180°$.因餘弦函數自$90°$至$180°$之值,與自$0°$至$90°$之值相比較,其大小之次序相反,且符號亦相反.



故祇須將上表第三列之數値反其次序,且各加

一負號卽得.故知其曲線在第三象限,形狀與在第一象限者相同.θ在$90°$以上可依同樣手續而得如右之圖.

習題二十五

畫下列各點.

1. $(2, 60°)$, $(3, 180°)$, $(5, 0°)$. $(-5, 0°)$, $(4, -15°)$, $(-1, 15°)$, $(-1, -45°)$, $(-2, 180°)$, $(0, 90°)$.

2. $\left(a, \frac{1}{3}\pi\right)$, $\left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{4}\pi\right)$, $\left(2a, \frac{1}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a, \frac{2}{3}\pi\right)$, $\left(-\frac{1}{3}a, \frac{3}{4}\pi\right)$, $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}a, \frac{5}{4}\pi\right)$, $\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}a, -\frac{1}{6}\pi\right)$.

描寫下列曲線.

3. $r=a$. **4.** $r=-a$.

5. $\theta=60°$. **6.** $\theta=-\frac{1}{4}\pi$.

7. $r=2\sin\theta$. **8.** $r=-2\sin\theta$.

9. $r=3\sec\theta$. **10.** $r=a\csc\theta$.

11. $r=a\cos^2\theta$. **12.** $r=a\sin^2\theta$.

13. $r=2-\cos\theta$. **14.** $r=3+2\sin\theta$.

15. $r=a(1+\cos\theta)$. **16.** $r=a(1-\sin\theta)$.

17. $r=1-2\cos\theta$. **18.** $r=1+2\sin\theta$.

19. $r=\frac{1}{1-\cos\theta}$. **20.** $r=\frac{1}{1+\sin\theta}$.

21. $r=\frac{a}{2+\cos\theta}$. **22.** $r=\frac{a}{2-\sin\theta}$.

23. $r=a\cos^3\theta$. **24.** $r=a\sin^3\theta$.

25. $r=a\tan\theta$. **26.** $r=a\sin 2\theta$.

27. $r=a\cos 3\theta$.　　28. $r=a\sin 3\theta$.

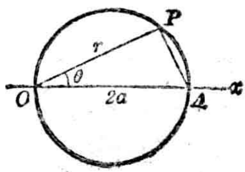
29. $r^2=a^2\cos\theta$.　　30. $r^2=a^2\sin\theta$.

31. $r^2=1+\cos^2\theta$.　　32. $r^2=1+\sin^2\theta$.

33. $r^2=a^2\cos 2\theta$.　　34. $r^2=a^2\sin 2\theta$.

47. 軌跡問題. 用極坐標求軌跡之方程式有時較笛卡兒坐標爲易,且研究其性質時有時亦以極坐標爲便.用極坐標求軌跡之方程式之方法當然與16節及17節所用者相同,即先以$P:(r,\theta)$表曲線上之任意一點,然後由問題之陳述,或軌跡之性質,得一含有r,θ及常數之方程式,此方程式即爲已知軌跡之方程式.

例題. 求半徑爲a,中心爲$(a,0)$之圓之方程式.



解. 設$P:(r,\theta)$爲曲線上任意一點,因$\angle OPA$爲直角,故得

$$\cos\theta=\frac{r}{2a},$$

即 $$r=2a\cos\theta,$$

此即所求之方程式.

習題二十六

求下列軌跡之極方程式.

1. 以 O 爲中心半徑爲5之圓.

2. 首線.

3. 過原點與 Ox 成 30° 角之直線.

4. 半徑爲 a 之圓,切於首線,(a) 在此線上方,(b) 在此線下方.

5. 過 $(a, 0)$,且垂直於首線之直線.

6. 過 (a, π),且垂直於首線之直線.

7. 過 $\left(a, \frac{1}{2}\pi\right)$,且平行於首線之直線.

8. 過 $\left(2, \frac{1}{6}\pi\right)$,且平行於首線之直線.

9. 過 $\left(2, \frac{1}{6}\pi\right)$,且垂直於此點之動徑之直線.

10. 過 $\left(1, \frac{3}{4}\pi\right)$,且垂直於此點之動徑之直線.

11. 過 $\left(2, -\frac{1}{3}\pi\right)$,且垂直於此點之動徑之直線.

12. 半徑爲 a,以 $\left(a, \frac{1}{4}\pi\right)$ 爲中心之圓.

13. 一動點自一已知點及一已知直線等距離.取已知點爲極,自已知點引已知直線之垂線爲極軸,且此垂足之極坐標爲 $(a, 0)$,求動點之軌跡方程式. 答: $r=\dfrac{a}{1+\cos\theta}$.

14. 解問題13,若動點自已知點之距離等於自直線之距離之半.

15. 解問題13,若垂足之極坐標爲 (a, π),

答: $r=\dfrac{a}{1-\cos\theta}$.

16. 解問題13,若已知直線平行於 Ox 且過 $\left(-a, \frac{1}{2}\pi\right)$.

答: $r=\dfrac{a}{1-\sin\theta}$.

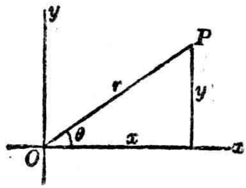
17. 求一動點自首線及 $\left(a, \frac{1}{2}\pi\right)$ 點等距離之軌跡.

答: $r^2\cos^2\theta - 2ar\sin\theta + a^2 = 0.$

18. 求一動點自兩點 $(2a, 0)$, $\left(a, \frac{1}{2}\pi\right)$ 等距離之軌跡.

答: $2r(2\cos\theta - \sin\theta) = 3a.$

48. 極坐標與正坐標之互換. 若極坐標之極與正坐標之原點相合,又首線與 x 軸相合,則任何一點 P 之兩種坐標間有下列之關係.



設 P 點之正坐標為 (x, y),又極坐標為 (r, θ),即得

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \qquad \text{公式 (18 A)}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}, \\ \tan\theta = \dfrac{x}{y}, \end{cases} \qquad \text{公式 (18 B)}$$

應用上公式可將曲線之方程式互換,即從正坐標變換為極坐標,或從極坐標變換為正坐標是也.

例題. 求圓 $x^2+y^2=2ax$ 之極坐標方程式.

解. 用公式 (18 A) 之值代入方程式,得

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 2ar\cos\theta,$$

因 $$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1,$$

故得 $$r=2a\cos\theta.$$

習題二十七

在下列各題中,設極與原點相合,又首線與 x 軸相合.

1. 求下列各點之正坐標 (*a*) $(1,\ 30^\circ)$; (*b*) $\left(-1,\ \frac{1}{4}\pi\right)$; (*c*) $(-2,\ 0)$; (*d*) $(3,\ -60^\circ)$; (*e*) $\left(-2,\ \frac{5}{6}\pi\right)$; (*f*) $(3, 225^\circ)$.

2. 求下列各點之極坐標 (*a*) $(2,\ 2)$; (*b*) $(\sqrt{3},\ -1)$; (*c*) $(0,0)$; (*d*) $(-3,\ -4)$; (*e*) $(-5,\ -5)$.

求下列曲線之極方程式.

3. $y=x$. 4. $x^2+y^2=a^2$.

5. $x^2+y^2+y=0$. 6. $y^2=4ax$.

7. $2xy=a^2$. 答: $r^2\sin 2\theta=a^2$.

8. $x^2-y^2=a^2$. 答: $r^2\cos 2\theta=a^2$.

9. $y=x^3$. 10. $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

求下列曲線之正坐標方程式.

11. $r=a$. 12. $\theta=45^\circ$.

13. $r\sin\theta=1$. 14. $r=\sec\theta\tan\theta$.

15. $r^2\cos 2\theta=a^2$. 16. $r\cos\theta=\sin^2\theta$.

17. $r^2=a^2\sin 2\theta$. 答: $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$.

18. $r=a(1-\cos\theta)$. 答: $(x^2+y^2+ax)^2=a^2(x^2+y^2)$.

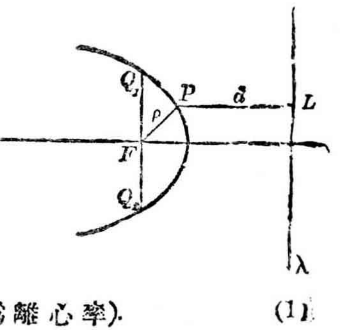
第七章

圓錐曲線 (Conic sections)

I. 總論

43. 定義. 一動點距一定點與一定直線之距離之比爲常數時,則動點之軌跡稱爲圓錐曲線.從立體解析幾何學知一平面與直圓錐之截面常成圓錐曲線,故名.

定點稱爲圓錐曲線之焦點 (focus), 定直線稱爲準線 (directrix), 定比值稱爲離心率 (eccentricity). 如圖,若 F 爲焦點, λ 爲準線, P 爲圓錐曲線上之一點,則由定義得



$$\frac{FP}{LP}=e,$$

或 $$\rho=ed\,(e\text{ 爲離心率}).\qquad(1)$$

自焦點引準線之垂線，則曲線對於此垂線爲對稱，此垂線爲對稱軸. 又若過焦點引準線之平行線則此平行線必與曲線交於二點，如 Q_1 及 Q_2；聯此二點之弦，Q_1Q_2 稱爲**通徑**(latus rectum).

50. 圓錐曲線之分類　圓錐曲線依 e 之數值分爲三類：

若 $e<1$，稱爲**橢圓** (ellipse)；

若 $e=1$，稱爲**拋物線** (parabola)；

若 $e>1$，稱爲**雙曲線** (hyperbola).

橢圓爲一卵形之封閉曲線；拋物線爲一開口之曲線，伸張無限；雙曲線爲兩枝伸張無限之曲線. 此皆可在以後諸節中得之.

橢圓　　拋物線　　雙曲線

本章中祇述圓錐曲線之方程式，及其曲線之描寫；至三種曲線之性質在以後諸章中探討之.

51. 圓錐曲線之方程式 設一圓錐曲線之焦點爲(i, j)，其準線爲

$$x\cos\beta+y\sin\beta=p, \qquad (1)$$

則從公式(13 A)知自直線(1)至動點(x, y)之距離爲$x\cos\beta+y\sin\beta-p$故自49節(1)式得圓錐曲線之方程式爲

$$\sqrt{(x-i)^2+(y-j)^2}=e(x\cos\beta+y\sin\beta-p,)$$

或 $$(x-i)^2+(y-j)^2=e^2(x\cos\beta+y\sin\beta-p)^2.$$

因此式爲二次式,故得重要

定理：任何圓錐曲線之方程式爲二次式.

又本定理之逆亦眞(參閱68節).

習題二十八

求下列圓錐曲線之方程式.

1. 焦點$(0, 0)$，準線$y=3$, $e=\frac{1}{3}$. 答：$9x^2+8y^2+6y=0$.

2. 焦點$(1, 0)$，準線$x+4=0$, $e=\sqrt{2}$. 答 $x^2-y^2+18x+31=0$.

3. 焦點$(-2, 4)$，準線$y=-4$, $e=2$.

   答：$x^2-3y^2+4x-40y-44=0$.

4. 焦點$(1, 1)$，準線$x=0$, $e=\frac{1}{2}$.

   答：$3x^2+4y^2-8x-8y+8=0$.

5. 焦點 $(-1, -3)$, 準線 $2x-y=3$, $e=\frac{2}{3}$

答: $29x^2+16xy+41y^2+138x+246y+414=0$.

6. 焦點 $(-6, 0)$, 準線 $3x-2y+1=0$, $e=3$.

答: $68x^2-108xy+23y^2-102x-36y-459=0$.

7. 一動點自直線 $3x-y=6$ 之距離常二倍於自點 $(2, 4)$ 之距離.求其軌跡之方程式.成何種曲線?

答: $31x^2+6xy+39y^2-124x-332y+764=0$.

8. 若圓錐曲線之準線平行於一坐標軸,則方程式不含 yx 項.試證明之.

9. 一直線與圓錐曲線之交點不能多於二,試證明之.

10. 二圓錐曲線之交點不能多於四,試證明之.

11. 幾點可決定一拋物線?

12. 幾點可決定下列圓錐曲線:

(a) 若已知其焦點?

(b) 若已知其準線?

(c) 若已知其離心率?

(d) 若已知其焦點及其準線?

(e) 若已知其準線之方向?

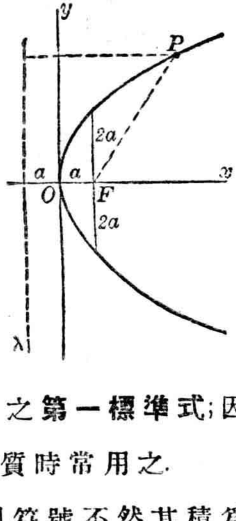
(f) 若已知焦點與準線間之距離?

II. 拋物線

52. 定義 50節所云離心率爲1時,則其圓錐曲線稱爲拋物線,換言之:一動點距一定點與一定直線等距離之軌跡爲拋物線.

過焦點而垂直於準線之直線稱爲拋物線之軸(axis),軸與拋物線之交點,卽焦點與準線距離之中點,稱爲拋物線之**頂點**(vo.tex),自頂點至焦點之距離以文字 a 表之:

53. 以頂點爲原點之拋物線方程式:第一標準式. 設拋物線頂點爲原點,及焦點爲 $(a, 0)$,則其軸爲 x 軸,準線爲 $x=-a$. 若 $P:(x,y)$ 爲曲線上之任意一點,則由定義得 $\sqrt{(x-a)^2+y^2}=a+x$, 整理之爲



$$y^2=4ax. \qquad \text{公式}(19\,A)$$

公式$(19\,A)$稱爲拋物線方程式之**第一標準式**;因形式簡單,故硏究拋物線之性質時常用之.

由此式觀之,知 a 與 x 必須同符號,不然其積爲負,y 爲虛數矣;故因 a 爲正或負,從而知曲線向右或向左方開展.每一 x 之值必有相應之兩 y 值.其絕對值相等,符號相反,x 增大則 y 之兩絕對值亦隨之增大,故此曲線開展至無限遠.

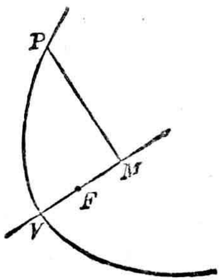
若 $x=a$, 則 $y=\pm 2a$. 故**通徑之長為頂點與焦點間之距離之四倍.**

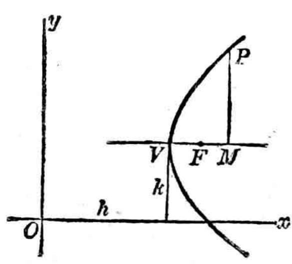
54. 其他標準式.

方程式　$x^2=4ay$　　　　　　　　　公式(19 B)

易知其為一拋物線,頂點在原點,其軸與 y 軸一致.

方程式 $y^2=4ax$ 不僅為軌跡之方程式,且亦表示拋物線之一幾何性質,初不因其位置而異者也.若拋物線之位置如下圖左所示,頂點為 V, 又焦點為 F.





設在曲線上任取一點 P, 引其軸之垂線 MP, 則從第一標準式得

$$\overline{MP}^2=4VF\cdot VM; \qquad (1)$$

即表示拋物線之一幾何性質.

若一拋物線頂點在(h, k)，其軸與Ox平行，焦點在頂點之右相距爲a。設$P:(x, y)$，爲曲線上任意一點，則由(1)式得其方程式爲

$$(y-k)^2=4a(x-h).$$

同理，可得軸與Oy平行之拋物線方程式.

綜合上述理論，可得結果如下；

拋物線頂點在(h, k)，其軸與Ox平行，則其方程式爲

$$(y-k)^2=4a(x-h); \qquad \text{公式}(20\ A)$$

其軸與Oy平行，則爲

$$(x-h)^2=4a(y-k). \qquad \text{公式}(20\ B)$$

若a爲正，則曲線向右或向上方開展；a爲負，則向左或向下方開展.

55. 普遍方程式

$$\text{方程式} \qquad Cy^2+Dx+Ey+F=0 \qquad (1)$$

之兩邊若以C除之，再配成y之完全平方，則可化成

$$(y-k)^2=4a(x-h);$$

同理，方程式

$$Ax^2+Dx+Ey+F=0 \tag{2}$$

可化成

$$(x-h)^2=4a(y-k).$$

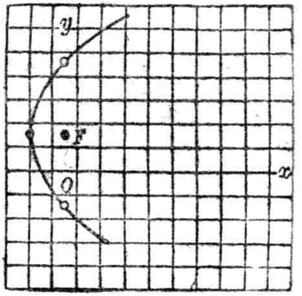
若(1)式中之$D=0$,(2)式中之$E=0$,則俱爲兩平行線之方程式.若視兩平行線爲拋物線之特殊情形,則可得

定理: x,y之普遍二次方程式,若缺xy項,且祇有一變數之平方項,則其方程式爲一拋物線,其軸與一坐標軸平行.

例題. 化$4y^2-24x-12y-15=0$爲標準式,且決定其頂點,并描寫其曲線.

解　方程式之兩邊以4除之,得

$$y^2-6x-3y-\frac{15}{4}=0.$$



移項,且配成完全平方,

$$y^2-3y+\frac{9}{4}=6x+\frac{15}{4}+\frac{9}{4},$$

或 $$\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=6(x+1).$$

故其頂點爲$\left(-1,\frac{3}{2}\right)$,曲線向

右開展，$a=\frac{3}{2}$，畫幾點後描寫曲線得圖如上.

習題二十九

在下列各題中，求頂點，通徑之兩端，及其他幾點，然後描寫曲線，取適當比例尺務使圖形相稱.

1. $y^2=4x$.　　2. $y^2=-\frac{3}{2}x$.

3. $x^2=8y$.　　4. $y+100x^2=0$.

5. $x^2+5y=0$.　　6. $y^2=3(x+2)$.

7. $(y+2)^2=-6(x-1)$.　　8. $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=-\left(y+\frac{3}{4}\right)$.

9. $(y-15)^2=120x$.　　10. $(x-0.1)^2=-0.4(y+0.2)$.

11. $x^2+2x+2y=0$.　　12. $2x^2+4x+2y+5=0$.

13. $y^2+4x+6y+9=0$.　　14. $5x^2-5x+4y+3=0$.

15. $6y^2-x-y+1=0$.　　16. $2x^2+2x+y+1=0$.

17. $y^2-4y+3=0$.　　18. $9x^2+6x+1=0$.

19. 求拋物線 $(y-k)^2=4a(x-h)$ 之焦點，準線，及其通徑之兩端.

描寫下列曲線，且求其交點.

20. $x^2+y^2=2x,\ x^2+2x=3y$,　　答：$(0, 0), (1, 1)$.

21. $x^2-3x-6y+2=0,\ y^2-x-4y+2=0$.

答：$(2, 0), (-1, 1), (-2, 2), (7, 5)$.

22. $x^2+2x=2y,\ y^2+24x=16y$.　答：$(0, 0), (2, 4), (2, 4), (-8, 24)$.

23. 證明54節最末後一句.

24. 若一拋物線之焦點在其準線上，則其軌跡如何.

III. 橢圓

56. 定義; 第一標準式　由50節,若 $e<1$,則圓錐曲線稱爲橢圓.

設 F 爲焦點,又 λ 爲準線.自 F 引準線之垂線則易知其與曲線相交有兩點,*卽 V, V' 是也.此兩點稱爲頂點.又 VV' 之中點稱爲中心 (center).設

$$CV=a, CF=c, CM=d,$$

則由49節(1)式得

$$a-c=e(d-a), a+c=e(d+a).$$

從後式減前式得

$$2c=2ae, \text{卽 } c=ae. \tag{1}$$

兩式相加得

$$2a=2de, \text{卽 } d=\frac{a}{e}. \tag{2}$$

卽自中心至焦點之距離爲 ae,自中心至準線之

* 分 FM 爲二份其比值爲 e,必有內外兩分點.

距離爲 $\frac{a}{e}$.

如下圖,設以橢圓之中心爲原點,焦點爲 $F_1:(ae, 0)$,則準線方程式爲

$$x=\frac{a}{e}.$$

若 $P:(x, y)$ 爲曲線上任意一點,則得

$$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=e\left(\frac{a}{e}-x\right),$$

$$x^2-2aex+a^2e^2+y^2=a^2-2aex+e^2x^2,$$

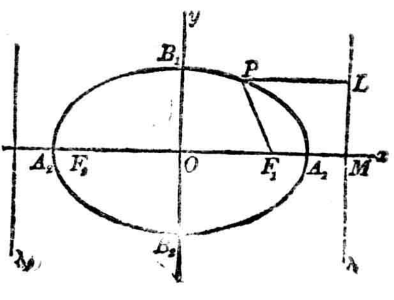
$$x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2),$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

爲簡便計,設 $b^2=a^2(1-e^2)$,則上式化爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \text{公式(21 }A\text{)}$$

此式稱爲橢圓方程式之第一標準式.



從此式得諸性質如下:

(a) 曲線對於 Ox 軸爲對稱,對 Oy 及

原點亦然.因對於 Oy 軸爲對稱,故橢圓亦可看作以第二焦點 $F_2:(-ae,0)$ 及第二準線 $\lambda_2:\left(x, -\frac{a}{e}\right)$ 還定義而成.

(b) 坐標軸上之截距爲 $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$. 如圖中之 $OA_1=a$, $OB_1=b$.

(c) 從第一標準式得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

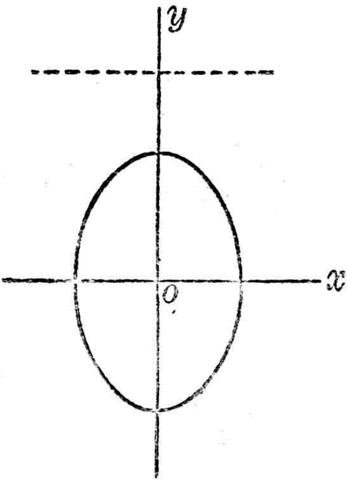
故 x 之絕對值若大於 a, 則 y 爲虛數; 同理, y 之絕對值若大於 b, 則 x 爲虛數.

此曲線之兩對稱軸稱爲此曲線之兩軸, 惟普通以兩對稱軸在曲線內之有限線分 A_2A_1, B_2B_1 稱爲兩軸, 線分 A_2A_1 爲橫軸(transverse axis), 線分 B_2B_1 爲共軛軸 (conjugate axis). 又因 b 小於 a, 故橫軸常稱爲長軸 (major axis), 共軛軸爲短軸 (minor axis).

57. 其他標準式

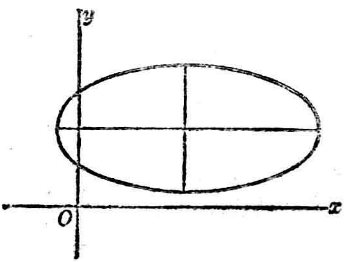
方程式　　$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.\qquad \text{公式}(21B)$$

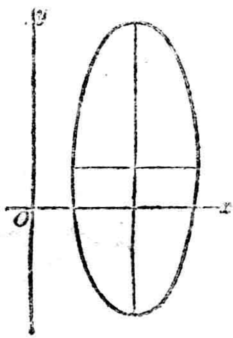
易知其爲一橢圓,中心在原點,長軸與Oy軸相合,短軸與Ox軸相合.



方程式 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$. 公式(22A)

又易知其爲一橢圓,中心爲(h, k),長軸與Ox軸平行.同理,方程式;





$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1,\qquad \text{公式 (22 B)}$$

亦爲一橢圓,其中心爲(h, k),長軸與Oy軸平行.

若已知橢圓之標準式,則觀察方程式即可畫出其中心,及軸之各端,又由上節,因 $b^2=a^2(1-e^2)$ 故得

$$ae=\sqrt{a^2-b^2},$$

即兩焦點在中心兩傍離 $\sqrt{a^2-b^2}$ 之處,

若以 $x=ae$,代入 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 式中,即得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-a^2e^2}=\pm\frac{b^2}{a},$$

故通徑爲 $\frac{2b^2}{a}$. 因之兩通徑之兩端可以畫出;如是可得曲線上之八點,即可大略描寫一橢圓圖形矣.

58. 普遍方程式　若方程式

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

中之 A 與 C 之符號相同,則配成 x 及 y 之完全平方,可化成公式(22 A)或(22 B)之形式,故得

定理:　含 x,y 之二次方程式,若缺 xy 項且 x^2, y^2 之係數之符號相同,則爲一橢圓,其軸與坐標軸平行.

若配成完全平方整理後方程式之右邊為零或負數,則稱為點橢圓或虛橢圓.

例題. 化方程式

$$9x^2+4y^2-36x+8y+31=0$$

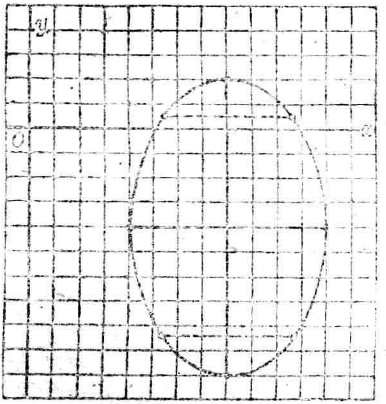
為標準式,且描寫其曲線.

解. 移項後配成完全平方,則得

$$9(x^2-4x+4)+4(y^2+2y+1)=-31+36+4,$$

$9(x-2)^2+4(y+1)^2=9,$

$\dfrac{(x-2)^2}{1}+\dfrac{(y+1)^2}{\frac{9}{4}}=1.$



故知中心為$(2,-1)$,長軸與Oy軸平行,$a=\dfrac{3}{2}$, $b=1$, 中心至焦點之距離為

$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5},$

通徑為$\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{4}{3}$. 得曲線如上圖.

習題二十九

在下列各題中,求中心,焦點,軸之兩端,通徑之兩端,然後描寫曲線.在1—4題中,併求其離心率及準線之方程式.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$

2. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1.$

3. $5x^2+y^2=5.$

4. $\frac{(x-2)^2}{1}+\frac{y^2}{3}=1.$

5. $\frac{(x-6)^2}{100}+\frac{(y+7)^2}{75}=1.$

6. $\frac{x^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{3}=1.$

7. $x^2+2y^2+2x=0.$

8. $2x^2+y^2+4x+2y-1=0.$

9. $2x^2+y^2-8x-8=0.$

10. $2x^2+y^2-4x+2y+1=0.$

11. $4x^2+5y^2+16x-20y+31=0.$ 答: $\frac{(x+2)^2}{\frac{5}{4}}+\frac{(y-2)^2}{1}=1.$

12. $7x^2+8y^2-28x+80y+172=0.$ 答: $\frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y+5)^2}{7}=1.$

13. $16x^2+4y^2-16x-4y-11=0.$ 答: $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{1}+\frac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{4}=1.$

14. $6x^2+4y^2-12x+16y+19=0.$ 答: $\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{3}{4}}=1.$

15. $3x^2+7y^2-12x+28y+19=0.$ 答: $\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{(y+2)^2}{3}=1.$

16. $48x^2+12y^2-48x+12y-1=0.$ 答: $\frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{3}}+\frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{4}{3}}=1.$

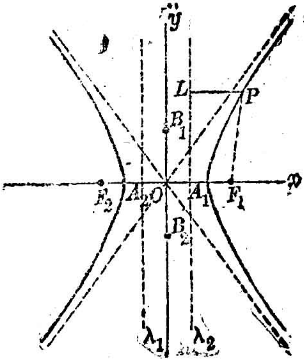
17. 橢圓關於其兩軸爲對稱,試用12節之方法證明之。

IV. 雙曲線

59. 第一標準式 由50節,若 $e>1$ 則圓錐曲線稱爲雙曲線。

與56節同樣得雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$



因 $e>1$, 故 $a^2(1-e^2)$ 爲負數;而 $a^2(e^2-1)$ 則爲正數.

設

$$b^2=a^2(e^2-1),$$

則 b 爲實數,故雙曲線之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad \textbf{公式(23 A)}$$

此式稱爲雙曲線之第一標準式.

從上式得諸性質如下:

(a) 此曲線對於兩坐標軸及原點皆爲對稱,故有兩焦點 $(\pm ae, 0)$, 及兩準線 $x=\pm\frac{a}{e}$.

(b) Ox 軸上之截距爲 $(\pm a, 0)$, Oy 軸上者爲虛數矣.

(c) 此方程式就 y 解之則得

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

從此而知,若 $x^2<a^2$, 即 $-a<x<a$, y 爲虛數.故此曲

線由兩枝不相連續之曲線而成，一在直線 $x=a$ 之右；一在直線 $x=-a$ 之左.

(d) 通徑爲 $\frac{2b^2}{a}$.

此曲線之兩對稱軸稱爲此曲線之軸，一如橢圓，惟普通稱線分 A_2A_1（長爲 $2a$），及線分 B_2B_1（長爲 $2b$）爲兩軸，前者爲橫軸，後者爲共軛軸.（共軛軸雖不與曲線相交，然在理論上佔重要地位.）橫軸之兩端 A_2 及 A_1 稱爲頂點；兩軸之交點稱爲中心.

因 $b^2=a^2(e^2-1)$，故得中心與焦點之距離爲

$$ae=\sqrt{a^2+b^2}.$$

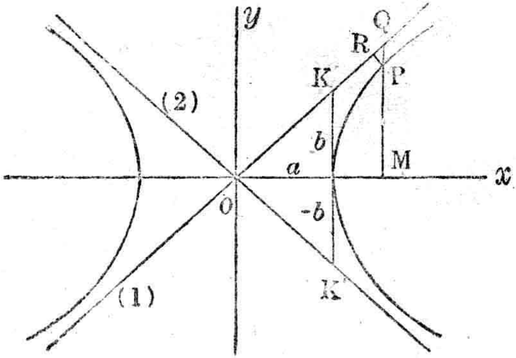
〔注意〕　因 e 值之不同，b 可大於 a，或等於 a，或小於 a.

60.　漸近線(asymptote). 將雙曲線方程式

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

右邊之1易爲零，則爲

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$



又將左邊分解因子,則得

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=0.$$

此方程式實爲二直線,一爲$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$,卽

$$y=\frac{b}{a}x \qquad (1);$$

一爲 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$,卽 $y=-\frac{b}{a}x \qquad (2).$

直線(1)過$K:(a, b)$點及原點.直線(2)過$K':(a, -b)$及原點.

若在雙曲線上任取一點 P, 作縱坐標MP, 且延長之與直線(1)交於Q,則因

$$y=\frac{b}{a}x, \quad 故 \quad MQ=\frac{b}{a}x.$$

又從雙曲線方程式求MP之長,因

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,$$

$$\therefore\quad y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2},$$

$$故\quad MP=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

$$\therefore\quad PQ=MQ-MP=\frac{b}{a}x-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

$$=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2})=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})}{a}$$

$$=\frac{b(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}$$

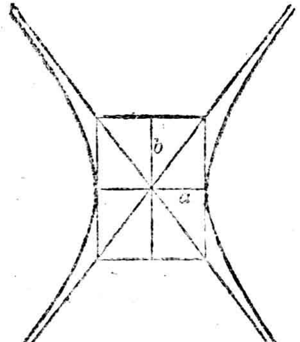
$$=\frac{b[x^2-(x^2-a^2)]}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}$$

$$=\frac{a^2b}{a(x+\sqrt{x^2-a^2})}=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}},$$

$$即\quad PQ=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}。$$

此分數之分子爲常數,故若 OM(即 x)漸漸增大,則 $x+\sqrt{x^2-a^2}$ 之值亦漸漸增大;而 PQ 之值反漸漸減小,OM 無限長時,即曲線距原點無限遠時,

PQ 爲無限小.若自 P 點引(1)線之垂線 PR,則 PQ 爲無限小時, PR 當然亦爲無限小.故曲線離原點愈遠,則曲線與(1)線愈接近,曲線離原點無限遠時與(1)線無限近.(2)線亦然.此(1)與(2)兩直線稱爲此曲線之漸近線.研究雙曲線之性質及描寫雙曲線時,漸近線極有用處.



因爲漸近線之斜率爲 $\pm\frac{b}{a}$,故得結果如下:

雙曲線之漸近線爲一矩形之對角線,此矩形之中心卽雙曲線之中心,其兩邊與雙曲線之兩軸平行且各相等.

描寫雙曲線時,往往先將兩漸近線畫出.然後卽可得其大概矣.

61. 其他標準式

$$\text{方程式}\quad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \qquad \text{公式}(23\,B)$$

易知爲一雙曲線,中心在原點,橫軸之長爲 $2a$,

與 y 軸一致,共軛軸之長爲 $2b$ 與 Ox 軸一致.

若雙曲線之中心爲 (h, k), 橫軸與 Ox 軸平行,則其方程式爲

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-h)^2}{b^2}=1; \qquad \text{公式 (24 A)}$$

若橫軸與 Oy 軸平行,則爲

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1. \qquad \text{公式 (24 B)}$$

學者試自證明之

62. 普遍方程式　若方程式

$$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

中之 A 與 C 符號不同,則配成完全平方後可化成公式 (24 A) 或 (24 B) 之形式.若配成完全平方及整理後右邊爲零,則成

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=0.$$

將此式分解因之,得

$$\left(\frac{x-h}{a}+\frac{y-k}{b}\right)\left(\frac{x-h}{a}-\frac{y-k}{b}\right)=0.$$

此爲相交於 (h, k) 點之二直線,若視相交兩直線爲雙曲線之特殊情形,則得

定理 含x, y之任何二次方程式,若缺xy項,且x^2及y^2兩項之係數符號相反,則爲一雙曲線,且其兩軸各與二坐標軸平行.

例題. 化方程式

$$x^2-2y^2+4x+4y+4=0$$

爲標準式,且描寫其曲線.

解. 配成完全平方,得

$$x^2+4x+4-2(y^2-2y+1)=-4+4-2,$$

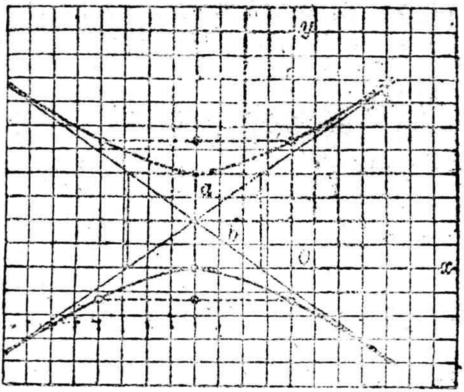
$$(x+2)^2-2(y-1)^2=-2,$$

以-2除其兩邊,

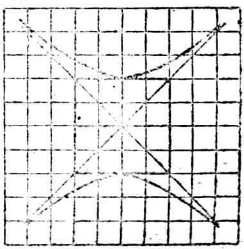
$$\frac{(y-1)^2}{1}-\frac{(x+2)^2}{2}=1.$$

此爲一雙曲線,中心爲$(-2, 1)$,横軸與Oy平行;半軸之長$a=1, b=\sqrt{2}$.兩頂點在中心上或下相距爲1之處,兩焦點在中心上或下相距爲$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3}$之處.通徑爲$\frac{2b^2}{a}=4$,

故通徑之兩端在焦點左或右相距爲2之處.兩漸近線爲以$2a$, $2b$爲兩邊之矩形之對角線.曲線之形狀如下圖所示.



63. 等邊雙曲線 (equilateral hyperbola). 若雙曲線方程式中之a及b相等,則此雙曲線稱爲等邊雙曲線.60節圖中之矩形爲正方形時,兩漸近線相交成直角.故等邊雙曲線亦稱直角雙曲線 (rectangular hyperbola). 因



$ae=\sqrt{a^2+b^2}$,故等邊雙曲線之離心率$e=\sqrt{2}$.又若在普遍方程式中$C=-A$,則爲一等邊雙曲線.

習題十三

在下列各題中,決定其中心,頂點,焦點及通徑之兩端,又

描寫曲綫及漸近綫. 在問題 1—6, 併求其離心率, 準綫及漸近綫之方程式.

1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1.$　　　2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{2a^2}=1.$

3. $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1.$　　　4. $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{5}=1.$

5. $\frac{(x-2)^2}{\frac{9}{4}}-\frac{(y+1)^2}{1}=1.$　　　6. $\frac{y^2}{36}-\frac{(x-4)^2}{64}=1.$

7. $\frac{(y-0{\cdot}3)^2}{1{\cdot}2}-\frac{(x+0{\cdot}4)^2}{0{\cdot}8}=1.$　　　8. $\frac{\left(y+\frac{2}{3}\right)^2}{6}-\frac{\left(x-\frac{7}{6}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1.$

9. $x^2-y^2=2x.$　　　10. $4x^2-y^2+4ay=1.$

11. $5x^2-4y^2+20x-24y-36=0.$　答: $\frac{(x+2)^2}{4}-\frac{(y+3)^2}{5}=1.$

12. $12x^2-4y^2-12x-8y+11=0.$　答: $\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{1}=1.$

13. $9x^2-16y^2-36x+96y+36=0.$　答: $\frac{(y-3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{6}=1.$

14. $4x^2-4y^2-4x+8y-5=0.$　答: $\frac{(x-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{2}}-\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{2}}=1.$

15. $x^2-2y^2+2y=0.$　答: $\frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{\frac{1}{2}}=1.$

16. $x^2-5y^2+4x+10y+2=0.$

17. $y^2=x^2-3x+4.$

18. $x^2-y^2+3x+3y=0.$

19. $4x^2-y^2-2x+3y-2=0.$

20. 雙曲綫不能與其漸近綫相交, 試證明之.

21. 在 9—17 題中, 何者爲直角雙曲綫?

求下列曲綫之交點.

22. $x^2-y^2-2x-4y-4=0,\ x+y+2=0.$

23. $5x^2-3y^2+7=0,\ 7x^2-5x-6y=0.$ 答: $(-1, 2), (2, 3)$.

24. $2x^2-y^2=9,\ x^2+y^2+2y-24=0.$ 答: $(\pm 3, 3), \left(\pm\frac{5}{3}\sqrt{5}, -\frac{13}{3}\right)$.

V. 坐標之轉換

(Coördinate transformation)

64. 緒論 若半徑為 a 之圓,中心之坐標為 (h, k),則其方程式為

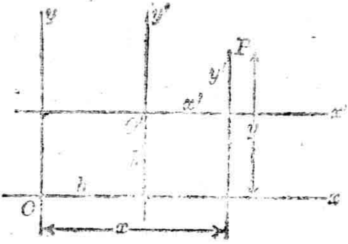
$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2;$$

若其中心之坐標為$(0, 0)$,則其方程式為

$$x^2+y^2=a^2.$$

由是觀之,若圓不以原點為中心,則其方程式繁;若以原點為中心,則其方程式簡.故將原點及坐標軸轉換,則同一曲線可使其方程式由繁化簡,便於研究.

65. 坐標軸之平移 (translation of axes). 將原點及坐標軸移動後,新坐標軸與原坐標軸互相平行,此謂之坐標軸之平移.如圖;設 Ox, Oy 為原坐



標軸, $O'x'$, $O'y'$ 爲新坐標軸,又設新原點對於舊軸之坐標爲(h, k).若P點對於舊軸之坐標爲(x,y),對於新軸之坐標爲(x', y'),則二者間顯見有下述之關係

$$\begin{cases} x = x' + h, \\ y = y' + k. \end{cases} \qquad \text{公式 (25)}$$

欲將關於舊坐標軸之曲線之方程式變成對於新軸之方程式,祇須將舊方程式之x, y以上值代入卽得.經此代入後,曲線對於兩坐標軸之相對地位雖已變化,而曲線之形並未更變,故其性質無異也.

例題. 以原點爲中心,半徑爲a之圓之方程式爲

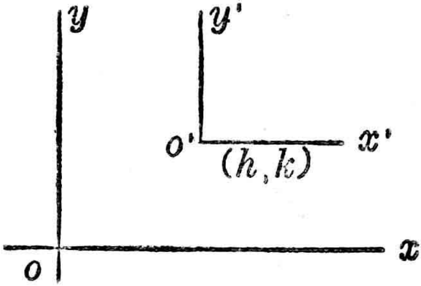
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

則以(h, k)爲中心之圓方程式爲

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a, \text{試證明之.}$$

證. 若以O'爲原點,其圓方程式爲$x^2 + y^2 = a^2$.若將原點移至$O:(-h, -k)$而平移其軸,則更以$x'-h, y'-k$代原方程式中之x, y,得

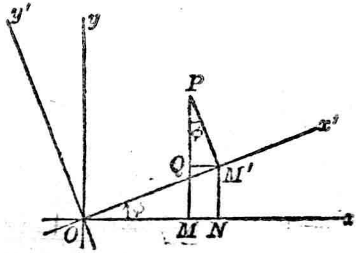
$$(x'-h)^2 + (y'-k)^2 = a^2,$$



即得以(h,k)爲中心之圓方程式.

既得新方程式,則不必用 x', y', 祇須用 x, y 以求簡便.故所求之方程式爲 $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$

66. 坐標軸之迴轉 (rotation of axes) 原點及兩坐標軸間之夾角不變,而將軸繞原點旋轉,謂之坐標軸之迴轉.如圖,設 Ox, Oy 爲原軸,Ox', Oy' 爲新軸,又迴轉角度爲 ϕ, 普通以順時針方向迴轉之角度爲負,逆時針者爲正.設 P 點之舊坐標爲(x,y), 又新坐標爲 (x', y'), 則如上圖得



$$OM=x,\ MP=y,\ OM'=x',\ M'P=y'.$$

今 $$OM=ON-MN$$

$$=ON-QM';$$

同理 $$MP=MQ+QP$$

$$=NM'+QP.$$

故得公式

$$\begin{cases} x=x'\cos\phi-y'\sin\phi, \\ y=x'\sin\phi+y'\cos\phi \end{cases} \qquad \text{公式 (26)}$$

例題 將坐標軸迴轉經 ϕ 角使方程式

$$4x+3y=5 \qquad (1)$$

中之 y 消失.

解 將公式(23)之 x 及 y 代入(1)式得

$$4(x'\cos\phi-y'\sin\phi)+3(x'\sin\phi+y'\cos\phi)=5,$$

或 $$(4\cos\phi+3\sin\phi)x'+(-4\sin\phi+3\cos\phi)y'=5 \qquad (2)$$

欲消失 y, 其係數須等於 0,

即 $$-4\sin\phi+3\cos\phi=0,$$

即 $$\tan\phi=\frac{3}{4},$$

故 $$\sin\phi=\frac{3}{5},\ \cos\phi=\frac{4}{5}.$$

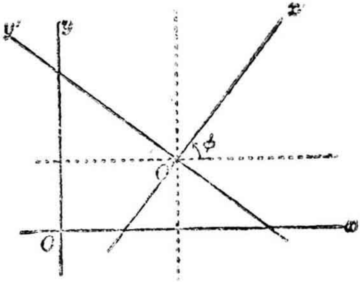
將此值代入(2)式得

$$\left(\frac{16}{5}+\frac{9}{5}\right)x'=5.$$

即　　$x'=1$, 或 $x=1$.

67　坐標軸之平移與迴轉

應用前兩節之方法，可將坐標軸轉換至任何位置．其法，先將坐標軸平移後，再將坐標軸迴轉至所求之位置．



如右圖，舊軸爲 Ox, Oy, 新軸爲 $O'x'$, $O'y'$, 則第一步先平移，將原點自 O 移至 O', 第二步再迴轉角度 ϕ.

若某點對於舊坐標軸之坐標爲 (x, y), 則經平移後之坐標 (x', y') 可由下式求之

$$\begin{cases} x=x'+h \\ y=y'+k \end{cases}$$

若再經迴轉後之坐標爲 x'', y'',

則　$$\begin{cases} x'=x''\cos\phi-y''\sin\phi \\ y'=x''\sin\phi+y''\cos\phi \end{cases}$$

故 $\begin{cases} x = x'' \cos\phi - y'' \sin\phi + h \\ y = x'' \sin\phi + y'' \cos\phi + k \end{cases}$ 公式(27)

〔註〕 坐標軸無論如何轉換,原方程式中之坐標 x, y 僅不過以 x', y' 或 x'', y'' 之一次式代入,故方程式之次數不致增高;倘次數減低,則還回原處必致增高,亦不合理,故坐標轉換後方程式之次數不變

習題三十一

1. 求原軸平移至 $(-2, 5)$ 後 $(2, 3)$, $(5, -2)$ $(0, 0)$ 諸點之坐標.

2. 求原軸平移至 $(3, 4)$ 後 $(3, 4)$, $(-1, -2)$, (x, y) 諸點之坐標.

3. 求原軸平移至 $(2, 3)$ 後直線 $3x-2y=6$ 之方程式.

4. 求原軸平移至 $(0, b)$ 後直線 $y=mx+b$ 之方程式.

5. 求原軸平移至 $(2a, 0)$ 後圓 $x^2+y^2-2ax=0$ 之方程式.

答: $x^2+y^2+2ax=0$.

6. 求原軸平移至 $(2, -5)$ 後曲線 $7x^2+8y^2-28x+80y+172=0$ 之方程式.

答: $7x^2+8y^2=56$.

7. 求原軸平移至 $(2, -2)$ 後曲線 $3x^2+7y^2-12x+28y+19=0$ 之方程式.

答: $3x^2+7y^2=21$.

8. 求原軸平移至 $\left(\frac{1}{2}, -1\right)$ 後曲線 $12x^2-4y^2-12x-8y+11=0$ 之方程式.

答: $3x^2-y^2+3=0$.

9. 平移坐標軸使方程式 $5x^2-4y^2+20x-24y=36$. 中之

次項消失　　答：$5x^2-y^2=20$.

10. 平移坐標軸使方程式 $4x^2-4y^2-4x+8y=5$ 中之一次項消失。

11. 平移坐標軸使方程式 $y^2+3x+2y+4=0$ 中之 y 及常數二項消失.

12. 求原軸迴轉 45° 後 $(1, 3)$ 之坐標.　答：$(2\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

13. 求原軸迴轉 -30° 後 $(2, 4)$ 之坐標.

答：$(\sqrt{3}-2, 1+2\sqrt{3})$.

14. 求原軸迴轉 45° 後直線 $x+y=4$ 之方程式.

15. 求原軸迴轉 45° 後曲線 $2xy=a^2$ 之方程式.

答：$x^2-y^2=a^2$.

16. 求原軸迴轉 $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ 後曲線 $(3x-4y)^2=x$ 之方程式.

17. 求原軸迴轉 β 角後直線 $x\cos\beta+y\sin\beta=p$ 之方程式.

18. 迴轉坐標軸使方程式 $x^2+y^2-2x-2y=0$ 中之 y 項消失。

19. 迴轉坐標軸使方程式 $x^2-2x+4y=0$ 中之 x^2 項消失.

20. 迴轉坐標軸使方程式 $xy+x=1$ 中之 xy 項消失.

21. 迴轉坐標軸使方程式 $x^2-xy=2$ 中之 x^2 項消失.

22. 將原坐標軸迴轉 ϕ 角後方程式 $x^2+y^2=a^2$ 有何變化?

23. 將原軸迴轉後直線方程式之常數項不能消失試證明之.

24. 求原軸平移至 $(3, 4)$, 且迴轉 45° 後 $(3, 4)$, $(-1, -2)$, (x, y) 諸點之坐標.

25. 求原軸平移至 $(2, 3)$, 且迴轉 30° 後 $3x-2y=6$ 之方程式。

26. 求原軸平移至(1, −2), 且迴轉θ°後 $8x^2+24xy+y^2+32x-20y=37$ 之方程式. 若 $\tan\theta=\frac{3}{4}$. 答: $17x^2-8y^2=1$.

27. 將原軸平移或迴轉後方程式之次數不變, 試證明之.

VI 普遍二次方程式

68. 緒論 含x, y之普遍二次方程爲

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

若B等於零, 則缺xy項而爲拋物線, 橢圓, 或雙曲線前已詳述之矣. 若B不爲零, 則將坐標軸變換後研究之, 蓋坐標軸變換後, 雖坐標軸與曲線相互間之位置變化, 而曲線之形並未更變, 且因變換之後方程式由繁化簡便於研究. 故普遍二次方程式通常皆先將坐標軸轉換後研究之.

69. xy項之消滅 將坐標軸迴轉ϕ角, 則普遍二次方程式變成

$$A(x'\cos\phi-y'\sin\phi)^2+B(x'\cos\phi-y'\sin\phi)(x'\sin\phi+y'\cos\phi)+C(x'\sin\phi+y'\cos\phi)^2+D(x'\cos\phi-y'\sin\phi)+E(x'\sin\phi+y'\cos\phi)+F=0. \qquad (1)$$

展開整理後, 若xy項之係數爲零, 則此式不含xy

項，故必 $2A\sin\phi\cos\phi-2C\sin\phi\cos\phi-B\cos^2\phi+B\sin^2\phi=0$. 卽 $(A-C)2\sin\phi\cos\phi=B(\cos^2\phi-\sin^2\phi)$.

因 $2\sin\phi\cos\phi=\sin 2\phi$, $\cos^2\phi-\sin^2\phi=\cos 2\phi$, 故得 $(A-C)\sin 2\phi=B\cos 2\phi$,

或
$$\tan 2\phi=\frac{B}{A-C}$$

因 $\tan 2\phi$ 可爲任何數值，故在 O 與 π 之間而適合此方程式之 2ϕ 之値必可求得，卽坐標軸迴轉相當角度 ϕ（在 0 與 $\frac{\pi}{2}$ 之間）必可使 xy 消滅. 故得

定理： 任何二次方程式必爲一圓錐曲線，曲線之軸與坐標軸所成之 ϕ 角必適合於方程式

$$\tan 2\phi=\frac{B}{A-C}$$

依三角公式 $\cos^2 2\phi=\dfrac{1}{1+\tan^2 2\phi}$,

故得
$$\cos^2 2\phi=\frac{1}{1+\frac{B^2}{(A-C)^2}}=\frac{1}{\frac{(A-C)^2+B^2}{(A-C)^2}}$$
$$=\frac{(A-C)^2}{(A-C)^2+B^2}$$

故 $\cos 2\phi=\pm\sqrt{\dfrac{(A-C)^2}{(A-C)^2+B^2}}$ 從 $\tan 2\phi=\dfrac{B}{A-C}$

知2ϕ所在之象限,倘在第一象限則$\cos 2\phi$爲正,在第二象限則爲負.因之可得:

$$\begin{cases} \sin\phi = \sqrt{\dfrac{1-\cos 2\phi}{2}}, \\ \cos\phi = \sqrt{\dfrac{1+\cos 2\phi}{2}}, \end{cases}$$

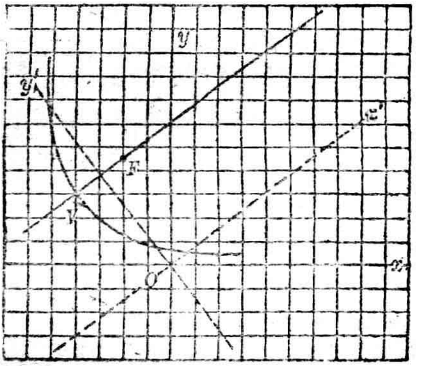
將此值代入原方程式,則即得一不含xy項之新方程式.然後依55, 58及61諸節可判別其爲拋物線或橢圓,或雙曲線矣.

例題. 消滅方程式

$$9x^2-24xy+16y^2-18x-101y+19=0$$

中之xy項且描寫其曲線.

解. $\tan 2\phi = \dfrac{-24}{9-16} = \dfrac{24}{7},$



因之 $\cos 2\phi = \dfrac{7}{25},$

$\sin\phi = \dfrac{3}{5}$; $\cos\phi = \dfrac{4}{5}.$

由公式(26)得,

$x = \dfrac{1}{5}(4x'-3y'),$

$y = \dfrac{1}{5}(3x'+4y'),$

用新坐標軸則方

程式變成

$$25y'^2-75x'-70y'+19=0,$$

化成標準式,則爲

$$\left(y'-\frac{7}{5}\right)^2=3\left(x'+\frac{2}{5}\right).$$

此卽一拋物線,其軸與 Ox' 平行向右開展,其頂點爲 $\left(-\frac{2}{5}, \frac{7}{5}\right)$. x' 軸對於舊軸之斜率爲 $\tan\phi=\frac{3}{4}$;曲線之形如上圖

70. 圓錐曲線種類之判別　普遍二次方程式在未轉換坐標軸以前,亦可根據下述定理判別其種類

定理:　方程式

$$\boldsymbol{Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0}$$

爲一橢圓,若 $B^2-4AC<0$;

爲一拋物線,若 $B^2-4AC=0$;

爲一雙曲線,若 $B^2-4AC>0$.

〔注意〕 $B^2-4AC=0$, 則 $Ax^2+Bxy+Cy^2$ 成一完全平方

證　將前節方程式(1)使 xy 項之係數爲零去括弧而整理之得

$$A'x'^2+C'y'^2+(x',y' \text{ 一次以下各項})=0, \tag{1}$$

$$A'=A\cos^2\phi+C\sin^2\phi+B\sin\phi\cos\phi, \tag{2}$$

$$C'=A\sin^2\phi+C\cos^2\phi-B\sin\phi\cos\phi. \tag{3}$$

若 $A'=0$ 或 $C'=0$，則 (1) 式爲一拋物線(見 55 節)；若 A',C'，爲同符號，則爲一橢圓(見 58 節)；若 A',C' 爲異符號，則爲一雙曲線(見 62 節)。

又若

(2)+(3) 得

$$A'+C'=A+C \tag{4}$$

(2)−(3) 得

$$A'-C'=(A-C)\cos 2\phi+B\sin 2\phi \tag{5}$$

$(3)^2+(5)^2$，得

$$(A'-C')^2=(A-C)^2+B^2 \tag{6}$$

$(4)^2-(6)$ 得

$$A'C'=AC-\left(\frac{B}{2}\right)^2$$

□ A',C' 爲同符號則爲橢圓，故得

$$AC-\left(\frac{B}{2}\right)^2>0 \text{ 時爲橢圓，}$$

即 $\qquad B^2-4AC<0$ 時爲橢圓.

又因 A' 或 C' 爲0時則爲拋物線.故得

$$AC-\left(\frac{B}{2}\right)^2=0 \text{ 時爲拋物線.}$$

即 $$B^2-4AC=0 \text{ 時爲拋物線.}$$

又因 A', C' 爲異符號時爲雙曲線,故得

$$AC-\left(\frac{B}{2}\right)^2<0 \text{ 時爲雙曲線.}$$

即 $$B^2-4AC>0 \text{ 時爲雙曲線.}$$

又若普通二次方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

之左邊可分解成二個一次因子,則此普通二次方程式之軌跡爲二直線(§ 14).

設此二個一次因子一爲 $lx+my+n$, 一爲 $px+qy+r$.

則 $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=(lx+my+n)(px+qy+r).$$

因此式爲恆等式,故得

$$A=lp,\ C=mq,\ F=nr,$$

$$B=lq+mp,\ D=lr+np,\ E=mr+nq.$$

故 $$BDE=2lmnpqr+lp(m^2r^2+n^2q^2)+mq(l^2r^2+n^2p^2)+nr(l^2q^2+m^2p^2).$$

即 $BDE=2ACF+A(E^2-2CF)+C(D^2-2AF)$
$$+F(B^2-2AC),$$

即 $BDE=2ACF+AE^2-2ACF+CD^2-2ACF$
$$+FB^2-2ACF.$$

化簡後,移於左邊,得

$$4ACF+BDE-AE^2-CD^2-FC^2=0.$$

此式即普通二次方程式爲二直線時之條件.

習題三十二

下列方程式爲何種圓錐曲線,轉換坐標軸,消去 xy 項,將所得之式化爲標準式,且描寫其曲線.

1. $2xy+1=0.$ 答: $y^2-x^2=1.$
2. $5x^2-6xy+5y^2=8.$ 答: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1.$
3. $9x^2+24xy+16y^2+90x-130y=0.$ 答: $(x-1)^2=6\left(y+\frac{1}{6}\right).$
4. $11x^2-24xy+4y^2+6x+8y-10=0$ 答: $4y^2-(x-1)^2=1.$
5. $(x-y)^2=2(x+y)$ 答: $y^2=\sqrt{2}\,x.$
6. $2x^2-3xy+2y^2=7.$ 答: $\frac{x^2}{14}+\frac{y^2}{2}=1.$
7. $3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2-8x+8\sqrt{3}\,y+4=0.$ 答: $x^2+4y+1=0.$
8. $5x^2+8xy+5y^2+\sqrt{2}\,x-\sqrt{2}\,y=0$ 答: $9x^2+(y-1)^2=1.$
9. $4xy-3y^2=8.$ 答: $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1.$
10. $19x^2+6xy+11y^2=20.$ 答: $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{2}=1.$

11. 若一二次方程式有 xy 項而祇有一平方項,或有 xy 項而二平方項皆消失,則此二次方程式爲一雙曲線.試證明之.

12. 若二次方程式之 A 與 C 之符號相反,則此式常爲雙曲線.試證明之.

13. 若二次方程式無一次項者,乃以原點爲中心之圓錐曲線.試證明之.有例外否?

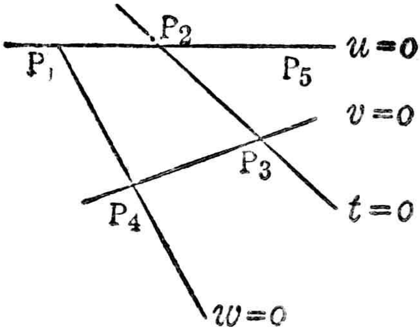
14. 若二次方程式無一次項者,不能爲拋物線,試證明之.

15. 求證方程式 $x^{\frac{1}{2}} \pm y^{\frac{1}{2}} = \pm a^{\frac{1}{2}}$ 乃一拋物線,且描寫其軌跡.

71. 經過五已知點之圓錐曲線　方程式

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

中雖有六個常數 $A, B, C, D, E,$ 及 F, 然以其中之一常數除方程式兩邊,則實際祇有五常數,故已知五點卽可決定此曲線矣.其法將五點之坐標代入方程式,則得五個一次方程式.將此五方程式聯立而解之.卽可求得五個未知數之值,代入原方程式卽得經過五點之圓錐曲線之方程式.



又法　設已知五點為 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, 如圖現暫置一點不論,如 P_5. 作過 P_1, P_2 點之直線方程式

$$u=0, \qquad (1)$$

則 u 當然為 x, y 之一次式. 再作過 P_3, P_4 點之方程式

$$v=0. \qquad (2)$$

同樣再作過 P_1, P_4 之方程式

$$w=0, \qquad (3)$$

及過 P_2, P_3 之方程式

$$t=0, \qquad (4)$$

則

$$uv=0. \qquad (5)$$

爲 (1), (2) 兩直線之方程式;

$$wt=0,\tag{6}$$

爲 (3), (4) 兩直線之方程式; 且 (5), (6) 兩式皆爲二次方程式.

設 k 爲常數, 則

$$uv+kwt=0,$$

爲合 (5), (6) 兩方程式交點之方程式, 卽經過 P_1, P_2, P_3, P_4 四點之方程式. 因此方程式爲二次式, 故爲一圓錐曲線. 若使此方程式經過 P_5, 卽可決定 k 之值, 而得經過 P_1, P_2, P_3, P_4 及 P_5 五點之圓錐曲線之方程式矣.

72. 經過四點之拋物線 若普通二次方程式爲一拋物線, 則 $B^2-4AC=0$, 因之祇須再知四點卽可求此曲線. 又因 $B^2-4AC=0$ 爲二次式, 故所得之拋物線有二, 此二拋物線或爲不同之二曲線, 或爲相同之二曲線, 或爲虛曲線矣.

決定此曲線之方法與前節同, 卽先作方程式

$$uv+kwt=0,$$

然後用 $B^2-4AC=0$ 決定 k 之值.

習題三十三

求下列圓錐曲線之方程式.

1. 過 $(0, 0), (1, 0), (0, 2), (3, 1), (-1, 2)$.

答: $x^2+xy+9y^2-x-18y=0$

2. 過 $(2, 1), (-2, 1), (1, 2), (-1, -2), (-2, -1)$.

3. 過 $(2, 4), (-3, -1), (0, 5), (3, 2), (3, 3)$.

答: $y^2+2x-5y=0$

4. 過 $(0, 0), (1, 3), (-1, 1), (-2, 3), (-4, 8)$.

答: $3x^2+xy-2y=0$

5. 過 $(0, 4), (3, 3), (-3, 3), (-5, -1), (-4, 2)$.

答: $x^2+y^2+2y-24=0$

6. 過 $(5, 3), (-1, 6), (3, 0), (1, 2), (8, 4)$.

答: $153x^2-381xy-314y^2+218x+1859y-2076=0$

7. 拋物線過 $(0, 0), (9, -3), (1, 1), (4, 2)$.

答: $y^2=x$, $x^2-7x+6y=0$.

8. 拋物線過 $(2, 1), (6, 9), (-4, 4), (-12, 36)$.

答: $x^2=4y$, $x^2+2xy+y^2-12x-21y+36=0$.

9. 拋物線過 $(0, 0), (4, 2), (9, -6), (1, 2)$.

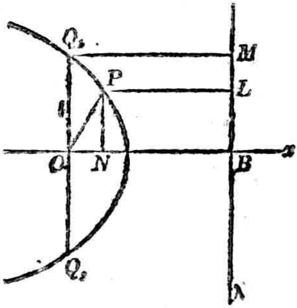
答: $x^2-2xy+y^2-x=0$, $(x-2y)(x-2y+3)=0$.

10. 拋物線過 $(1, 1), (7, -2), (3, 2), (7, 3)$.

答: $y^2-x-y+1=0$, $x^2-2xy+y^2-7x+18y-6=0$.

73. 圓錐曲線之極方程式　以焦點爲極, 從

焦點至準線λ之垂線爲極軸,通徑 Q_1Q_2 (如圖)之長設爲 $2l$,則焦點 O 至準線λ之距離爲 $\frac{l}{e}$,因 Q_1 爲曲線上之一點,依定義得



$$OQ_1 = e \cdot Q_1M,$$

故 $\quad OB = Q_1M = \dfrac{OQ_1}{e} = \dfrac{l}{e}.$

設 $P:(r,\theta)$ 爲曲線上之任意一點,引 PL 垂直於準線

因 $$OP = e \cdot PL,$$

$$\therefore \quad PL = \frac{r}{e}.$$

又因 $$\frac{ON}{OP} = \cos\theta,$$

故 $$ON = r\cos\theta.$$

但 $$ON + PL = OB.$$

故 $$r\cos\theta + \frac{r}{e} = \frac{l}{e}.$$

解 r 得

$$r = \frac{l}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{公式(23)}$$

習題三十四

以焦點爲極,求下列圓錐曲線之極方程式.

1. $e=1$,又準線垂直於Ox,且過$(3,\pi)$. 答: $r=\dfrac{3}{1-\cos\theta}$.

2. $e=\dfrac{1}{2}$,又準線垂直於Ox,且過$(2,0)$. 答: $r=\dfrac{2}{2+\cos\theta}$.

3. $e=4$,又準線平行於Ox,且過$\left(3,\dfrac{1}{2}\pi\right)$. 答: $r=\dfrac{12}{1+4\sin\theta}$.

4. $e=\dfrac{4}{5}$,又準線平行於Ox,且過$\left(2,\dfrac{1}{2}\pi\right)$. 答: $r=\dfrac{8}{5+\sin\theta}$.

5. $e=1$,又準線平行於Ox,且過$\left(5,-\dfrac{1}{2}\pi\right)$. 答: $r=\dfrac{5}{1-\sin\theta}$.

6. $e=\dfrac{3}{2}$,又準線垂直於Ox,且過$(-3,0)$. 答: $r=\dfrac{9}{2-3\cos\theta}$.

7. 將問題1—6中之圓錐曲線分類之.

8. 描寫問題1—4中之圓錐曲線.

9. 求以極爲頂點及$(a,0)$爲焦點之拋物線之極方程式,(a)直接求之,(b)轉換方程式$y^2=4ax$之軸求之.

答: $r\sin\theta\tan\theta=4a$.

第八章

拋物線之續

74. 緒論. 圓錐曲線之方程式及其曲線之描寫在前章中已詳述之矣.玆所述者,乃用解析方法推討其性質;先從拋物線始,爲便利計曲線之性質從方程式

$$y^2=4ax$$

推討得之,因其性質依曲線之形而定,並非由曲線與其坐標軸之地位關係而定也.

習題三十五

求下列拋物線之方程式.

1. 以 O 爲頂點,軸與 Ox 相合,且過 (a) $(-1,\ -6)$; (b) $(4,\ -2)$.
2. 以 O 爲頂點,軸與 Oy 相合,且過 (a) $(2,\ 5)$; (b) $(3,\ -2)$.
3. 以 O 爲頂點,$(0,\ -2)$ 爲焦點.
4. 以 $(2,\ 3)$ 爲頂點,$(6,\ 3)$ 爲焦點.

5. 以$(-1, -2)$為頂點, $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$為焦點.

6. 以$(4, 1)$為頂點 $\left(4, \frac{1}{2}\right)$為焦點.

7. 以$(3, 4)$為頂點, $x=4$為準線.

8. 以$(0, 2)$為頂點, $3x+2=0$為準線.

9. 以$(6, -1)$為頂點, $4y-3=0$為準線.

10. 以$(2, 5)$為頂點,軸平行於Ox,又通徑為3.

11. 以$(1, 6)$為焦點,軸平行於Oy,又通徑為6.

12. 以$(-2, 1)$為頂點,軸平行於Ox, 且過$(2, 2)$.

13. 以$(5, -1)$為頂點,軸平行於Oy. 且過$(-4, -2)$.

14. 頂點在Oy上,軸平行於Ox, 且過$\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $(2, 4)$.

答: $(y-2)^2=2x$; $\left(y-\frac{10}{3}\right)^2=\frac{2}{9}x$

15. 頂點在Ox上,軸平行於Oy, 且過$(3, 1)$, $(5, 9)$.

答: $(x-2)^2=y$; $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}y$

16. 頂點在直線$x=2$上,軸平行於Ox, 通徑為6, 且過$(8, 3)$.

答: $(y-9)^2=6(x-2)$; $(y+3)^2=6(x-2)$.

17. 軸平行於Ox, 通徑為1, 且過$(-2, 1)$, $(13, -2)$.

答: $(y-2)^2=x+3$; $(y+3)^2=-(x-14)$.

18. 以$x=3$為軸,且過$\left(2, -\frac{9}{2}\right)$, $(5, -6)$.

答: $(x-3)^2=-2(y+4)$.

19. 軸平行於Oy, 且過$(0, 0)$, $(1, 3)$, $(4, -2)$.

答: $7x^2-25x+6y=0$

20. 軸平行於 Ox, 且過 $(2, 0)$, $(-1, 1)$, $(-2, 2)$.

答: $y^2-x-4y+2=0$

21. 軸平行於 Ox, 且過 $(-1, 1)$, $(8, 2)$, $(-4, -2)$.

答: $2y^2-x+3y-6=0$.

22. 一圓過 $(2, 1)$ 且切於直線 $x=10$. 求其中心之軌跡.

答: $y^2+16x-2y=95$.

23. 一圓過 $(0, -5)$, $(-3, -4)$ 且切於直線 $y=5$. 求其方程式.

答: $x^2+y^2=25$; $(x+60)^2+(y+180)^2=(185)^2$.

24. 一圓切於其他一圓 $x^2+y^2=16$ 及直線 $x=6$. 求前者中心之軌跡.

答: $y^2=100-20x$; $y^2=4-4x$.

25. 一圓切於直線 $x=2$ 及圓 $x^2+y^2=16$. 求其中心之軌跡, 且描寫其曲線.

答: $y^2=-12(x-3)$; $y^2=4(x-1)$.

在下列各題中, 除已知事實外須再有若干點方可決定一拋物線?說明理由.

26. 已知頂點及準線.

27. 已知頂點及軸.

28. 已知軸之方向.

29. 已知頂點.

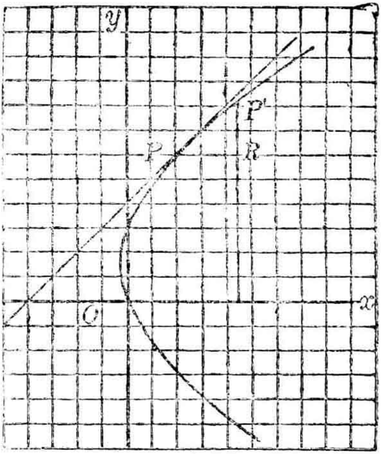
30. 已知其軸.

75. 過曲線上已知點之切線.

例題. 求過拋物線

$$y^2-3x-y+1=0 \tag{1}$$

上一點 $P:(1, 2)$ 之切線



解　在曲線上P點之附近取一點P'，設PR, RP'之長為Δx, Δy*，則P'點之坐標為$(1+\Delta x, 2+\Delta y)$. 因P'亦為曲線上之點，故其坐標必適合方程式(1)，代入即得

$$(2+\Delta y)^2-3(1+\Delta x)-(2+\Delta y)+1=0,$$

簡約之　　$3\Delta y+\overline{\Delta y}^{2}3-\Delta x=0.$

若以Δx除之得

$$3\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y-3=0 \qquad (2)$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$乃割線$PP'$之斜率．假使$\Delta x$漸近於0，即使$P'$漸近於$P$，則$\Delta y$亦漸近於0，因之$\frac{\Delta y}{\Delta x}$漸近於在$P$點之切線之斜率$m$. 因$\Delta y$漸近於0，故$\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y$亦漸近於零，故(2)式為

$$3m-3=0.$$

---

* Δx, Δy讀作 delta x, delta y.

故得　　　　$m=1.$

因之,切線之方程式爲

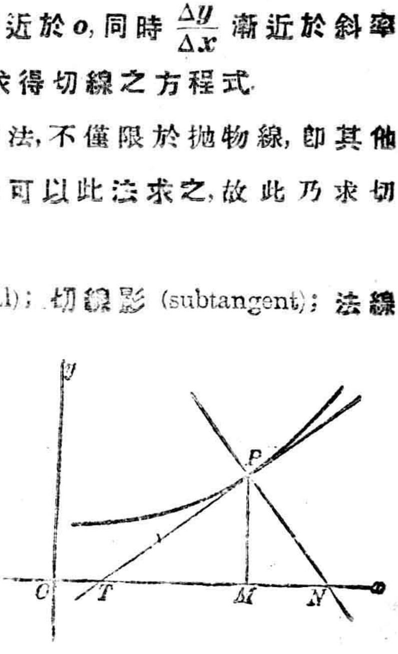
$$y-2=x-1$$

因此求切線之步驟如下:

先求在已知點 $P:(x_1, y_1)$ 之曲線之斜率.其法擇一曲線上鄰近於 P 點之 $P':(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)$,將此 P' 點之坐標代入曲線之方程式而簡約之.以 Δx 除之.使 Δx 漸近於 o,同時 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 漸近於斜率 m.從此得 m,然後求得切線之方程式.

上述求切線之方法,不僅限於拋物線,即其他任何曲線之切線亦可以此法求之,故此乃求切線之普遍方法也.

76. 法線 (normal);切線影 (subtangent);法線影 (subnormal).

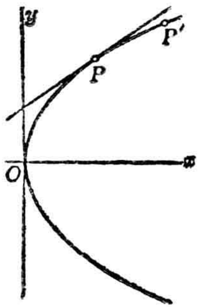


過曲線上一點而垂直於過此點之切線之直線,稱爲曲線過此點之法線.若已知切線之

方程式,則法線之方程式甚易求得.

過一平面曲線上之一點 P 之切線及法線與 x 軸相交於 T 及 N, 又若 M 爲 P 點之縱坐標之足, 則 TM 稱爲 P 點之切線影, 又 MN 稱爲法線影.

77. 拋物線 $y^2=4ax$ 之切線. 設 $P:(x_1, y_1)$ 爲拋物線 $y^2=4ax$ 上之一已知點, 又 $P':(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)$ 爲曲線上鄰近於 P 之一點. 將 P' 之坐標代入方程式, 則得



$$y_1{}^2+2y_1\Delta y+\overline{\Delta y}^2=4ax_1+4a\Delta x. \qquad (1)$$

因 (x_1, y_1) 點在曲線上, 故得

$$y_1{}^2=4ax_1, \qquad (2)$$

代入 (1) 式得

$$2y_1\Delta y+\overline{\Delta y}^2=4a\Delta x,$$

$$2y_1\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y=4a,$$

當 Δx 漸近 0 時, 上式化成

$$2y_1m=4a,$$

即

$$m=\frac{2a}{y_1}.$$

故所求之切線方程式爲

$$y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1),$$

即
$$y_1y-y_1^2=2ax-2ax_1.$$

將(2)式代入得

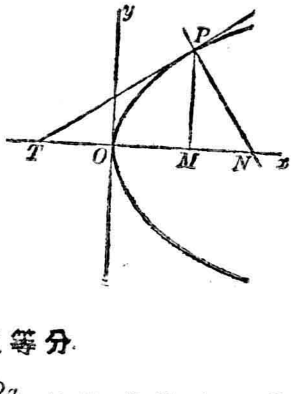
過拋物線 $y^2=4ax$ 上 P 點之切線之方程式為

$$y_1y=2a(x+x_1).\qquad\text{公式 (29)}$$

78. 拋物線之切線影及法線影. 依上節知過拋物線

$$y^2=4ax$$

上 $P:(x_1, y_1)$ 點之切線為



$$y_1y=2a(x+x_1).$$

其 x 截距為

$$OT=-x_1,$$

切線影為

$$TM=2x_1$$

故知切線影適為頂點所二等分.

過 P 點之切線之斜率為 $\frac{2a}{y_1}$；故過 P 點之法線方程式為

$$y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1).$$

此直線之x截距為

$$ON=x_1+2a,$$

故法線影為

$$MN=2a.$$

即法線影為一常數,且等於準線至焦點間之距離.

習題三十六

用75節之方法,求過下列曲線上一定點之切線.在問題1–5各題中,併求其法線,切線影及法線影.

1. $y^2=2x$ 過 $(2,\ -2)$. 答: $x+2y+2=0$.

2. $y^2+x=0$ 過 $(-4,\ 2)$. 答: $x+4y=4$.

3. $x^2+4y=0$ 過 $(-2,\ -1)$.

4. $y=3x^2-x$ 過原點.

5. $y^2+3x+2y=0$ 過 $(-1,\ 1)$. 答: $3x+4y=1$.

6. $(x+1)^2=2(y-3)$ 過 $(1,\ 5)$. 答: $2x-y+3=0$.

7. $2y^2-5x+4y+15=0$ 過 $y=-2$. 答: $5x+4y=7$.

8. $\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=-\left(x+\frac{1}{2}\right)$ 過 $y=0$. 答: $4x-4y+3=0$.

9. $x^2=4ay$ 過 $\left(a,\ \frac{1}{4}a\right)$.

10. $x^2-2xy+y^2+2x+y-6=0$ 過 $(2,\ 2)$. 答: $2x+y=6$.

11. $x^2-4xy+4y^2+2y=0$ 過 $(0,\ 0)$.

12. $(3x-y)^2+2x+y=16$ 過 $(2, 3)$. 答: $4x-y=5$.

13. $y=x^3$ 過 $(2, 8)$. 答: $12x-y=16$.

14. $y=x^3-3x^2+2x-2$ 過 $(1, -2)$. 答: $x+y+1=0$.

15. $y=x^4-x^3$ 過 $(1, 0)$. 答: $x-y=1$.

16. $y=1-2x+3x^2-x^4$ 過 $(1, 1)$. 答: $y=1$.

17. 圓 $x^2+y^2=10$ 過 $(3, 1)$.

18. 用二種方法,求過圓上 $(1, 2)$ 而切於圓 $x^2+y^2-3x+2y-6=0$ 之切線.

求過下列曲線上 (x_1, y_1) 點之切線

19. $x^2=4ay$. 答: $x_1x=2ay+2ay_1$.

20. $y^2+4x-6y+2=0$. 答: $y_1y+2(x+x_1)-3(y+y_1)+2=0$.

21. $2x^2-3x-5y=0$. 答: $4x_1x-3(x+x_1)-5(y+y_1)=0$.

22. $x^2+2xy+y^2+2x=0$. 答: $x_1x+y_1x+x_1y+y_1y+x+x_1=0$.

73. 已知斜率之切線;過曲線外一已知點之切線. 已知斜率 m 而欲求拋物線之切線祇須假定切線方程式爲

$$y=mx+k,$$

然後仿照 37 節方法將相切條件加入,卽可求 k 之值.

例如,設直線

$$y=mx+k \tag{1}$$

既爲

$$y^2=4ax \tag{2}$$

之切線,卽將(1)式之值代入(2)式而整理之得

$$m^2x^2+2(mk-2a)x+k^2=0. \tag{3}$$

因爲相切,故(3)式之兩根相等,故得

$$4(m^2k^2-4amk+4a^2)-4m^2k^2=0,$$

即

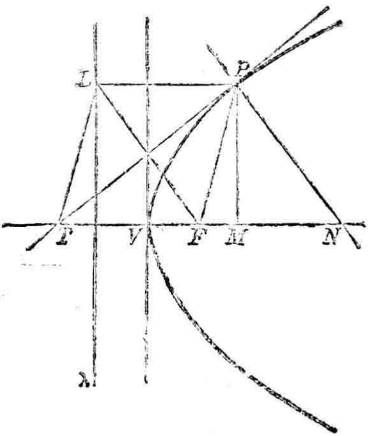
$$k=\frac{a}{m}.$$

故已知斜率 m 拋物線 $y^2=4ax$ 之切線方程式爲

$$y=mx+\frac{a}{m}. \qquad \text{公式}(30)$$

仿照79節之方法,同樣可求過拋物線外一已知點之切線.

以上兩方法不但可用於拋物線,且可普遍應用於任何圓錐曲線.



80. **關於拋物線之二定理.** 由77至79節之結果,可得關於拋物線之二定理如次:

**定理 1: 過拋物線上任何一點之焦半徑(focal radins 即曲線上一點與焦點之聯結

線分）與過此點而與軸平行之直線所成之角適爲過此點之切線所二等分.

如圖,求證 PT 線二等分 $\angle FPL$.

證：　$PL=PF$,　(50節)

$LP=a+x_1$,

又　$TF=TV+VF=VM+VF$

$=x_1+a$,

$\therefore\ PL=FT=FP$.

因之 $TFPL$ 爲一菱形.

故　$\angle LPT=\angle TPF$.

定理 2：由焦點向任一切線所引垂線之垂足必在過頂點之切線上.

如圖,求證 FL 與 PT 之交點在過 V 點之切線上.

證：FL 爲過 $F:(a, 0)$, $L:(-a, y_1)$ 兩點之直線.

故其方程式爲　$y-y_1=\dfrac{0-y_1}{a+a}=(x+a)$. ....(1)

PT 之方程式爲　$y_1y=2a(x+x_1)$. ....(2)

求 (1), (2) 兩直線之交點,得 $x=0$.

故交點,在 y 軸上,即在過 V 點之切線上.

〔註〕因 LF, PT 爲菱形之兩對角線,故 $LF\perp PT$.

習題三十七

求下列切線之方程式.

1. 切於拋物線 $2x^2+3x=3y$, 且平行於直線 $2x+2y=1$.

答: $2x+2y+3=0$.

2. 切於拋物線 $x^2+2y=0$, 且平行於直線 $3x-y=5$.

答: $6x-2y+9=0$.

3. 切於拋物線 $5x^2-x+2y+3=0$, 且垂直於直線 $x+2y+2=0$.

答: $80x-40y=51$.

4. 切於拋物線 $x^2+2x-3y+1=0$, 且垂直於直線 $2x+3y+2=0$.

答: $24x-16y=3$.

5. 切於拋物線 $y^2-6x+5y+1=0$, 且垂直於直線 $x+3y=5$.

答: $24x-8y+5=0$.

6. 切於拋物線 $3y^2-x+7y+5=0$, 且平行於直線 $4x-3y=10$.

答: $192x-144y=325$.

7. 切於拋物線 $4x^2-12xy+9y^2+3x-2y=0$, 且垂直於直線 $2x+3y+5=0$.

答: $3x-2y=0$

8. 切於拋物線 $(2x-y)^2=y$, 且平行於 y 軸.

9. 切於拋物線 $x^2=3y$, 且過點 $(-2, 1)$.

答: $2x+y+3=0$, $2x+3y+1=0$

10. 切於拋物線 $y^2=2x$, 且過點 $(4, 3)$

答: $x-2y+2=0$, $x-4y+8=0$

11. 切於拋物線 $x^2-5x+4y+6=0$, 且過原點.

答: $y=\left(\frac{5}{4}\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)x$.

12. 切於拋物線$2y^2-3x+4y+3=0$, 且過$(11, 4)$.

答: $3x-8y=1$, $3x-32y+95=0$.

13. 切於拋物線$2x^2-4xy+2y^2=x$, 且過$(-2, -2)$.

答: $5x-4y+2=0$, $3x-4y-2=0$.

14. 切於拋物線$(x-y)^2=y$, 且過$(1, 0)$.

答: $4x-5y=4$, $y=0$.

15. 求拋物線之方程式, 以O為頂點, 軸與Ox相合, 且切於直線$y=3x+4$.　答: $y^2=48x$.

16. 求拋物線之方程式, 以O為頂點, 軸與Oy相合, 且切於直線$2x-y=2$.　答: $x^2=2y$.

17. 若拋物線之頂點為$(2, 1)$, 軸與Ox平行, 且切於直線$y=x+1$, 求其方程式.　答: $(y-1)^2=8(x-2)$.

18. 若拋物線以$(-1, 4)$為頂點, 軸平行於Oy, 且切於直線$2x-x+5=0$求其方程式.　答: $(x+1)^2=y-4$.

19. 平行於所設直線, 且切於拋物線之切線祇可有一線, 試證明之.

20. 拋物線之切線不能平行於其軸, 試證明之.

21. 從準線上任一點所引之拋物線之兩切線互相垂直. 試證明之.

22. 試敍述並證明問題21之逆定理.

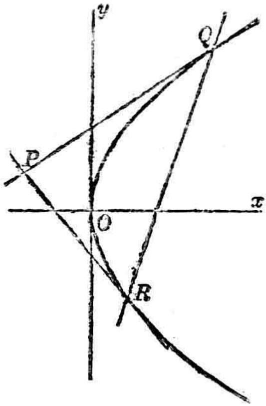
23. 用幾何方法證明本節之定理1.

24. 用幾何方法證明本節之定理2.

25. 用公式(29)證明定理2.

26. 用公式(30)證明定理2.

81. 接觸弦 (chord of contact)　過圓錐曲線外



一點 P 引圓錐曲線之兩切線,通過兩切點之直線稱為曲線關於 P 點之接觸弦

求拋物線關於 $P:(x_1, y_1)$ 點之接觸弦之方法,如右圖,設 QR 為接觸弦又 Q 及 R 點之未知坐標為 (x_2, y_2) 及 (x_3, y_3),則由公式(29)過 Q 點之切線為

$$y_2y=2a(x+x_2),$$

過 R 點之切線為

$$y_3y=2a(x+x_3).$$

由假設,此二切線皆通過 P 點,故將 P 之坐標代入得

$$y_2y_1=2a(x_1+x_2), \tag{1}$$

$$y_3y_1=2a(x_1+x_3). \tag{2}$$

今研究直線

$$y_1y=2a(x+x_1). \tag{3}$$

此直線必通過 Q 點,因若將 Q 點之坐標代入即

得 (1) 式故也.同理知此直線必通過 R 點.故此直線乃所求之接觸弦故曰:

若 $P:(x_1, y_1)$ 爲拋物線

$$y^2=4ax$$

外之一點,則關於 P 點之接觸弦爲

$$y_1y=2a(x+x_1). \qquad \text{公式 (31)}$$

〔註〕 此公式與公式 (29) 外觀上相同,而內容則異.此式中之 x_1, y_1, 乃拋物線外一已知點之坐標,爲接觸弦之方程式.公式 (29) 中之 x_1, y_1 乃拋物線上一已知點之坐標,爲切線之方程式.

習題三十八

1. 依據本節之理論,求作過拋物線 $y^2=4ax$ 外一點切線方程式之法.應用此法,求過 (3, 1) 而切於拋物線 $y^2+8x=0$ 之切線.

答: $y=x-2$, $y=-\frac{2}{3}x+3$

2. 過 (−3, 2), 求拋物線 $3y^2=5x$ 之切線.

答: $5x+6y+3=0$, $x-6y+15=0$.

3. 過 (−4, 2), 求拋物線 $y^2=8x$ 之切線.

答: $x+y+2=0$, $x-2y+8=0$.

4. 過 $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, 求拋物線 $y^2+x=0$ 之切線.

5. 過 (0, 2), 求拋物線 $3y^2+4x=0$ 之切線.

答: $x=0$, $x+6y=12$.

6. 準線上任一點之接觸弦必垂直於此點與焦點之聯結線，試證明之.

7. 準線上任一點之接觸弦必經過焦點.

8. 敘述并證明問題7之逆定理.

9. 通徑之延長線上之一點之接觸弦必過準線與軸之交點.

10. 若p_1及p_2為拋物線外之點，又p_1在p_2之接觸弦上，則p_2在p_1之接觸弦上.

11. 應用問題10，求過拋物線外一點作拋物線切線之法.

82. 圓錐曲線之直徑. 32節曾云圓之直徑乃通過中心之直線. 但依幾何理，一組平行弦俱被直徑所二等分，故直徑之定義亦可改述如次：

一組平行弦之中點之軌跡稱為直徑.

圓錐曲線之直徑之定義乃根據後說：**一組平行弦之中點之軌跡稱為圓錐曲線之直徑.** 雖圓錐曲線之直徑現在不易知其為直線，惟嗣後即可證明其為直線也. 且橢圓及雙曲線之一切直徑皆通過中心，一如圓之直徑.

例題 1. 求拋物線

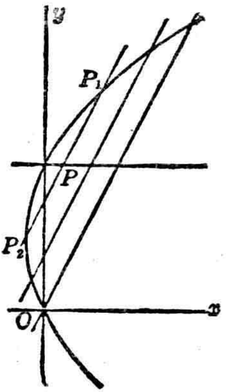
$$y^2-4x-2y=0 \tag{1}$$

二等分斜率為2之諸平行弦之直徑.

解　斜率爲2之一族平行弦之方程式爲

$$y=2x+k. \tag{2}$$

設 $P_1:(x_1, y_1)$ 與 $P_2:(x_2, y_2)$ 爲其中一弦之兩端，又 $P:(x, y)$ 爲其中點．將(2)式之 y 代入(1)式中得



$$4x^2+4kx+k^2-4x-4x-2k=0.$$

或　$$4x^2+(4k-8)x+k^2-2k=0.$$

此方程式之兩根卽爲 x_1, x_2．由二次方程式之理論得

$$x_1+x_2=-\frac{4k-8}{4}=2-k.$$

但因　$$x=\frac{x_1+x_2}{2},$$

$$\therefore\quad x=\frac{1}{2}(2-k). \tag{3}$$

將(2)式中之 k 代入(3)得所求之直徑爲

$$x=\frac{1}{2}(2-y+2x),$$

卽　$$y=2.$$

因此知所有斜率爲2之諸平行弦中點之縱坐

標皆爲2,故知其軌跡爲與x軸平行之一直線,此即直徑是也.

例題 2. 求拋物線

$$y^2+4x-y+1=0 \tag{1}$$

之弦,若此弦適被$(-2,3)$所二等分.

解. 過$(-2,3)$點之任意直線之方程式爲

$$y-3=m(x+2), \tag{2}$$

或
$$x=\frac{y-3-2m}{m}$$

將此值代入(1)式得

$$my^2+4y-12-8m-my+m=0,$$

或
$$my^2+(4-m)y-12-7m=0.$$

此方程式之根卽直線(2)與拋物線(1)之兩交點之縱坐標y_1, y_2,故得

$$3=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=-\frac{1}{2}\left(\frac{4-m}{m}\right),$$

卽
$$m=-\frac{4}{5},$$

故所求之弦之方程式爲

$$y-3=-\frac{4}{5}(x+2).$$

83. **拋物線之直徑.** 拋物線

$$y^2=4ax,$$

設

$$y=mx+k$$

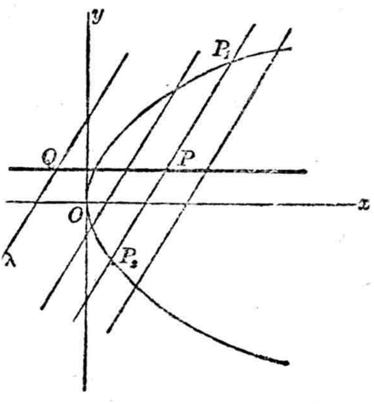
為已知斜率m之一族平行弦.從上節之例題1知二等分此等平行弦之直徑為

$$y=\frac{2a}{m}.\qquad\text{公式(32)}$$

此乃一平行於Ox之直線之方程式.故得

定理:一拋物線之任何一直徑為平行於其軸之一直線.

〔註〕圓之直徑有二義:一為通過中心之直線,一為此直線在圓內之線分.故拋物線之直徑亦有二義:一為平行於軸之直線,一為此直線在曲線內之半直線.驟視之,似祇此第二義為合理,因弦之中點皆在拋物線內.惟從解析方面觀之,則第一義亦為合理.試作一平行弦λ,雖λ與曲線之交點為兩虛點,惟此



兩虛點之中點(圖中之Q)之縱坐標依公式(2)可得一實數,

且亦在二等分平行於λ之弦之直徑上.故拋物線之直徑亦爲一無限直線也.

84. 關於直徑之二定理. 關於拋物線之直徑之二重要定理如下:

定理I: 一直徑端之切線必平行於其所二等分之諸弦.

定理II: 在任何弦之兩端之二切線之交點必在二等分此弦之直徑上.

此二定理亦適用於橢圓及雙曲線.

定理I由學者自證之

欲證明定理II,設拋物線之方程式爲

$$y^2=4ax,$$

又設一已知弦之方程式爲

$$y_1y=2a(x+x_1). \tag{1}$$

由81節,知過此弦兩端之兩切線之交點爲(x_1, y_1).今直線(1)之斜率爲

$$m=\frac{2a}{y_1},$$

故由上節知其相當直徑之方程式爲

$$y=\frac{2a}{\frac{2a}{y_1}}$$

即
$$y=y_1,$$
因此直線經過(x_1, y_1)，本定理已證明之矣

習題三十九

求下列直徑之方程式.

1. 二等分拋物線$y^2=x+3y-4=0$之平行於直線$x+y=5$之諸弦. 　　答: $y+2=0$.

2. 二等分拋物線$2y^2+x-y-2=0$之平行於直線$3x+y=0$之諸弦. 　　答: $3y-1=0$.

3. 二等分拋物線$3y^2-5x+8=0$之垂直於直線$3x-2y=1$之諸弦. 　　答: $4y+5=0$.

4. 二等分拋物線$2y^2+2x-y=1$之一族弦$x-3y=k$. 　　答: $4y+5=0$.

5. 二等分拋物線$x^2=2y$之平行於直線$y=3x+4$之諸弦. 　　答: $x=3$.

6. 二等分拋物線$2x^2-3x+6y=10$之垂直於直線$3x+2y=10$之諸弦. 　　答: $4x+1=0$.

7. 二等分拋物線$2x^2-8x+2y+3=0$之一族弦$y=4x+k$.

8. 二等分拋物線$3x^2-x-2y=0$之平行於直線$2x+2y=1$之諸弦. 　　答: $6x+1=0$.

9. 二等分拋物線$4x^2-4xy+y^2+2x-3y=0$之斜率爲3之諸弦. 　　答: $y=2x+2$.

10. 二等分拋物線$8x^2-6xy+3y^2+4x=0$之斜率爲$-\frac{1}{2}$之一族弦. 　　答: $9y=9x+4$.

11. 二等分拋物線$(x-y)^2=3x$之平行於Ox之諸弦.

答: $2x-2y=3$.

12. 二等分拋物線$(2x-y)^2+x+2y=0$之平行於直線$3x+y=2$之諸弦.

13. 二等分拋物線$x^2=4ay$之斜率為m之諸弦.

答: $x=2am$.

14. 用82節,求圓$x^2+y^2=4x$之直徑,二等分斜率為$-\frac{1}{3}$之諸弦.

15. 83節之定理,若諸平行弦為$x=k$時則如何?

16. 拋物線之直徑皆不垂直於其所二等分之弦,試證明之,且舉其例外

17. 敍述且證明83節之定理之逆定理.

18. 用解析方法證明84節之定理1.

19. 作一拋物線之切線使平行於所設直線.

20. 作拋物線之一弦使被線內之一定點所二等分.

21. 求拋物線$y^2=2x$內被$(3, 1)$所二等分之弦.

答: $x-y=2$.

22. 求拋物線$2y^2+5x=0$內被$(-4, 1)$所二等分之弦.

答: $5x+4y+16=0$.

23. 求拋物線$y^2+4x-4y=4$內被$(0, 3)$所二等分之弦.

答: $2x+y=3$.

24. 在拋物線$x^2+3x-y=0$內,求被$(-1, 0)$所二等分之弦.

答: $y=x+1$.

25. 在拋物線$9x^2-24xy+16y^2-18x-50y+19=0$內,求被$(1, 2)$二等分之弦

答: $24x+5y=34$.

第九章

橢圓及雙曲線之續

85. **緒論** 橢圓與雙曲線皆有中心,惟拋物線獨無,故前兩曲線稱爲有心圓錐曲線 (central conics).

此兩曲線關係非常密切,有許多定理及方法甚爲相似,或竟完全相同,故今合併研究其性質

習題四十

設軸與坐標軸相合,求下列圓錐曲線之方程式.(以第一標準式爲主)

1. 一橢圓,其共軛軸爲8,又二焦點間之距離爲6.

2. 一橢圓,其通徑爲2,又二焦點間之距離爲$2\sqrt{2}$

答: $x^2+2y^2=4.$

3. 一雙曲線,其通徑爲18,又其焦點間之距離爲12.

答: $3x^2-y^2=27$

4. 一圓錐曲線,其離心率爲 $\frac{1}{2}$,又二焦點間之距離爲 5.

答: $3x^2+4y^2=75$.

5. 一圓錐曲線,其離心率爲 $\sqrt{2}$, 又通徑爲 6

6. 一圓錐曲線,其二焦點間之距離爲 6, 又二準線間之距離爲 4.

答: $x^2-2y^2=6$

7. 一橢圓,其二焦點間之距離爲 $4\sqrt{6}$, 又其在軸上之矩形之面積爲 20.

答: $x^2+25y^2=25$

8. 一圓錐曲線,其離心率爲 $\frac{2}{3}$, 又其通徑爲 $\frac{1}{3}$.

答: $100x^2+180y^2=9$

9. 過二點 $(1, -1)$, $(-3, 7)$ 之圓錐曲線.

10. 過二點 $(2, 3)$, $(4, 1)$ 之圓錐曲線.

11. 一橢圓, 過 $(2, 1)$, 且以 $(\pm\sqrt{3}, 0)$ 爲焦點.

答: $x^2+2y^2=6$

12. 一雙曲線,其通徑爲 4, 又其漸近線之斜率爲 $\pm\frac{1}{3}$.

13. 一雙曲線, 以 $(\pm 2, 0)$ 爲焦點, 又漸近線之斜率爲 ± 3,

答: $45x^2-5y^2=18$.

14. 一雙曲線,其離心率爲 $\frac{1}{2}$,又其在軸上之矩形之面積爲 $16\sqrt{3}$.

答: $3x^2+4y^2=24$

15. 一雙曲線,其通徑爲 18, 又其準線間之距離爲 3.

答: $3x^2-y^2=27$.

16. 一橢圓,其通徑爲 1, 又其準線間之距離爲 $\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

答: $a=2$ 或 $-1+\frac{1}{3}\sqrt{21}$.

17. 一橢圓,其準線間之距離爲 $\frac{2}{3}\sqrt{21}$, 又其在軸上之矩形之面積爲 $\frac{8}{7}\sqrt{7}$.　　　　答: $4x^2+7y^2=4$, $x^2+7y^2=2$.

18. 一雙曲線,其準線間之距離爲2, 又其在軸上之矩形等於 8.　　　　答: $x^2-y^2=2$.

19. 若已知圓錐曲線之二焦點及其二軸之長,則可決定其圖形. 試證明之.

20. 以極爲中心, $(ae, 0)$ 爲焦點,又準線過 $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ 而垂直於首線,求圓錐曲線之極方程式.

答: $r^2(1-e^2\cos^2\theta)=a^2(1-e^2)$.

21. 有心圓錐曲線之共軛軸爲其橫軸及其通徑之比例中項. 試證明之

22. 一定長直線上之分點 P 分直線成二線分 a 及 b, 又直線之二端在兩垂直線上運動, 求 P 點之軌跡.

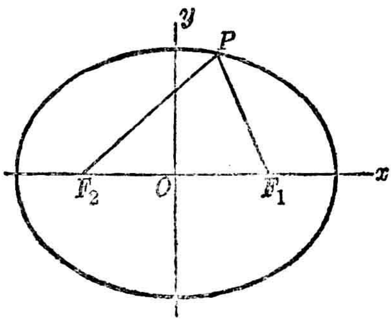
答: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

86. 橢圓之又一定義. 除第七章橢圓之定義外尙有一定義爲學者所常用,述之如下:

一動點與兩定點距離之和爲一常數,則其軌跡爲橢圓. 兩定點爲焦點,常數之值爲橫軸.

欲證明本節所述之定義與第七章所述之定義相同,先證橢圓上任何一點與兩焦點距離之

和爲常數,其次須再證明別無其他曲線有此性質



(I)　設 $P:(x, y)$ 爲橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \tag{1}$$

上任意一點. P 點與焦點 $F_1:(ae, 0)$ 之距離爲

$$F_1P=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+y^2} \tag{2}$$

從(1)式得

$$y^2=a^2-a^2e^2-x^2+e^2x^2.$$

故(2)式爲

$$F_1P=\sqrt{a^2-2aex+e^2x^2},$$

或　　$F_1P=a-ex$*.　　(3)

同理　　$F_2P=a+ex.$　　(4)

---

*參照56節之圖,因準線方程式爲 $x=\frac{a}{e}$, 故橢圓上之各點 $x<\frac{a}{e}$, 卽 $ex<a$

(3)+(4) 即得

$$F_1P+F_2P=2a.$$

(II)　設一動點與其他兩定點距離之和爲一常數時,則動點之軌跡必爲橢圓.

設動點爲 P: (x, y), 定點 F_1: $(ae, 0)$, F_2: $(-ae, 0)$, 又常數爲 $2a$, 則

$$F_1P+F_2P=2a,$$

或 $$\sqrt{(x-ae)^2+y^2}+\sqrt{(x+ae)^2+y^2}=2a.$$

將此無理方程式二次平方而整理之,即得

$$x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2),$$

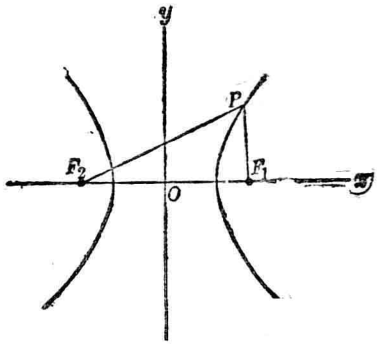
或 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

即已證明矣.

87. 雙曲線之又一定義. 雙曲線一如橢圓,尙有一定義如下:

一動點與兩定點距離之差爲一常數,則其軌跡稱爲雙曲線,兩定點爲焦點,常數之値爲橫軸

仿前節之法證明如次:



(I) 設 P: (x, y) 為雙曲線

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1 \tag{1}$$

上任意一點 P 點與焦點 F_1: $(ae, 0)$ 之距離為

$$F_1P=\sqrt{(x-ae)^2+y^2}$$

$$=\sqrt{x^2-2aex+a^2e^2+y^2} \tag{2}$$

從 (1) 式得

$$y^2=a^2-a^2e^2-x^2+e^2x^2$$

故 (2) 式為

$$F_1P=\sqrt{a^2-2aex+e^2x^2},$$

即 $$F_1P=ex-a^*. \tag{3}$$

---

* 參照 59 節之圖，因準線方程式為 $x=\frac{a}{e}$，故雙曲線上之各點 $x>\frac{a}{e}$，即 $ex>a$.

同理 $$F_2P=ex+a. \tag{4}$$

(4)−(3) 即得

$$F_2P-F_1P=2a$$

(II) 設一動點與其他兩定點距離之差爲一常數時,則動點之軌跡必爲雙曲線

設動點爲 $P:(x, y)$, 定點 $F_1:(ae, 0)$, $F_2:(-ae, 0)$, 又常數爲 $2a$, 則

$$F_2P-F_1P=2a,$$

或 $$\sqrt{(x+ae)^2+y^2}-\sqrt{(x-ae)^2+y^2}=2a.$$

將此無理方程式二次平方而整理之,卽得

$$x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1),$$

卽 $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1.$$

習題四十一

1. 已知橢圓之兩焦點及其橫軸,用直尺及兩脚軌作曲線上之點.

2. 已知雙曲線之兩焦點及其橫軸,用直尺及兩脚軌作曲線上之點.

求下列軌跡之方程式(自3至7)

3. 一動點與兩定點 $(0, 3)$, $(0, -3)$ 距離之和爲8. 用二種方法解之.

4. 一動點與兩定點 $(4, 2)$, $(4, -6)$ 距離之差為 4.

答: $\frac{(y+2)^2}{4}-\frac{(x-4)^2}{12}=1.$

5. 一動點與兩定點 $(-3, 0)$, $(-3, -8)$ 距離之差為 1.

6. 一動點與兩定點 $(3, 6)$, $(-5, 2)$ 距離之差為 2. 用 70 節之法鑑別其軌跡為雙曲線

答: $15x^2+16xy+3y^2-34x-8y-20=0.$

7. 一動點與兩定點 $(0, 0)$, $(4, 2)$ 距離之和為 10.

答: $21x^2-4xy+24y^2-80x-40y-400=0.$

8. 若有心圓錐曲線之二焦點使與原點對稱時,則其方程式無一次項.試證明之.

9. 已知橢圓之兩焦點及曲線上一點,求其兩軸.

10. 已知雙曲線之兩焦點及曲線上一點,求其兩軸.

11. 已知圓錐曲線之一焦點,及與此焦點相應之準線,又曲線上一點,求其兩軸.

12. 已知圓錐曲線之一焦點,及與此焦點相應之準線,及離心率,求其兩軸.

13. 已知雙曲線之兩焦點及其兩漸近線,求頂點.

14. 已知圓錐曲線之中心,兩準線,及其離心率,求其兩軸.

15. 一圓過一定點,且切於一已知圓,求其中心之軌跡,就一定點在已知圓外,圓上,圓內,及其中心上時,分別探討之.

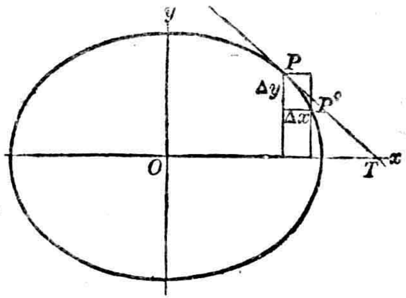
16. 已知橢圓之共軛軸及其曲線上一點,求作其橫軸.(註:方程式 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,可化為 $\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b}=\frac{x}{a}$.)

17. 已知雙曲線之共軛軸及曲線上一點，求作其橫軸.

18. 一圓與兩圓 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-12x=64$ 相切，求其中心之軌跡之方程式.　答: $3x^2+4y^2-18x=81$.

19. 鎗聲與鎗彈擊靶之聲在 P 點可同時聞之. 求 P 點之軌跡.

88. 過已知切點之切線. 若已知切點，仿 75 節之法，可求橢圓及雙曲線之切線，其法如下:



求過橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (1)$$

上 P: (x_1, y_1) 點之切線之方程式.

將 (1) 式去分母化成

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \quad (2)$$

在曲線上取一相鄰點 $P.(x_1+\Delta x, y_1+\Delta y)$，代入 (2) 式得

$$b^2(x_1+\Delta x)^2+a^2(y_1+\Delta y)^2+a^2b^2,$$

或 $$b^2x_1{}^2+2b^2x_1\Delta x+b^2\overline{\Delta x^2}+a^2y_1{}^2+2a^2y_1\Delta y+a^2\overline{\Delta y^2}=a^2b^2. \quad (3)$$

因(x_1, y_1)在曲線上，故得

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2 \tag{4}$$

故(3)式可化爲

$$2b^2x_1\Delta x+b^2\overline{\Delta x^2}+2a^2y_1\Delta y+a^2\overline{\Delta y^2}=0.$$

以Δx除之得

$$2b^2x_1+b^2\Delta x+2a^2y_1\frac{\Delta y}{\Delta x}+a^2\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y=0.$$

使Δx漸近於0，則Δy亦漸近於0. 又設m爲曲線上$P:(x_1, y_1)$點之斜率，卽得

$$2b^2x_1+2a^2y_1m=0,$$

故

$$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1} \tag{5}$$

故得所求切線之方程式爲

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

或

$$b^2x_1x+a^2y_1y=b^2x_1^2+a^2y_1^2.$$

由(4)式，更可化爲

$$b^2x_1x+a^2y_1y=a^2b^2;$$

以a^2b^2除其兩邊，卽得

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad \text{公式(33)}$$

同理,雙曲線之切線方程式爲

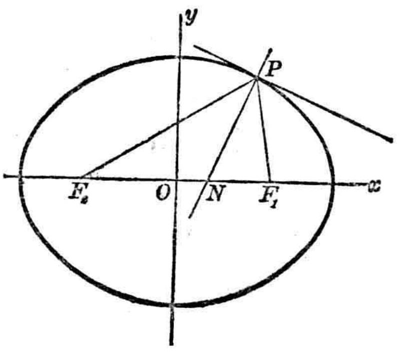
$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1.\qquad\text{公式(34)}$$

89. 有心圓錐曲線之切線之性質. 由前節(5)式知橢圓上P: (x_1, y_1)點之法線爲

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1).$$

其x截距爲

$$ON=\frac{a^2-b^2}{a^2}x_1=e^2x_1.$$



故得

$$NF_1=ae-e^2x_1$$

$$=e(a-ex_1),$$

$$F_2N=ae+e^2x_1$$

$$=e(a+ex_1),$$

因之
$$\frac{NF_1}{F_2N}=\frac{a-ex_1}{a+ex_1},$$

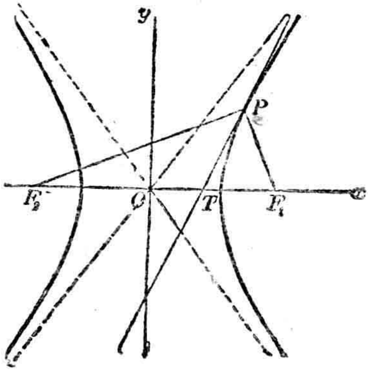
由83節(3),(4)兩式,得

$$\frac{NF_1}{F_2N}=\frac{F_1P}{F_2P}.$$

故法線PN二等分F_2PF_1角.因切線與法線垂直,故得

定理 I: 橢圓之切線將過切點之兩焦半徑所成之角之外角二等分.

關於雙曲線亦有同樣



定理 II: 雙曲線之切線將過切點之兩焦半徑所成之角二等分.

如圖 TP 線將 F_1PF_2 角二等分.

其證明與橢圓相同,學者試自證明之.

90. 已知斜率之切線. 若已知斜率為 m 之直線

$$y=mx+k$$

切於橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

則
$$k=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2};$$

故其切線為

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2},\qquad \text{公式(35)}$$

m為任何數

同理,若雙曲線之方程式為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

則其切線為

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\qquad \text{公式(36)}$$

若$-\frac{b}{a}<m<\frac{b}{a}$時,則因$a^2m^2<b^2$,故雙曲線之切線為虛矣.

習題四十二

用75節之法,求下列切線之方程式.

1. 切於橢圓$4x^2+y^2=8$之$(1,-2)$.

2. 切於橢圓$x^2+3y^2-2x-6y=9$之$(0,3)$.

答: $x-6y+18=0$.

3. 切於雙曲線$2x^2-y^2+4=0$之$(4,6)$.

4. 切於圓錐曲線$x^2-4y^2-5x=6y$之$(0,0)$

答: $5x+6y=0$.

5 切於圓錐曲線$x^2-3y^2-5x+y+28=0$之$(1,3)$

答: $3x+17y=54$.

6. 切於圓錐曲線$x^2-3xy+2y^2+x-2y-2=0$之$(1,0)$.

答: $5y=3x-3$.

7. 切於圓錐曲線 $3x^2+2xy-2x=3$ 之 $(1, 1)$.

答: $3x+y=4$.

8. 切於圓錐曲線 $2x^2-2xy-y^2+3y=0$ 之 $(1, 2)$.

9. 切於圓錐曲線 $xy=3$ 之 (x_1, y_1). 答: $y_1x+x_1y=6$.

10. 若圓錐曲線過原點,則將此曲線方程式中之一次項等於0,即得過此點之切線方程式,試證明之.

11. 知圓錐曲線及其中心,放曲線上任一點,求作切線及法線.

12. 已知一橢圓之一焦點,及其二切線與其切點,試作其曲線.

13. 已知一雙曲線之一焦點,及其二切線與其切點,試作其曲線.

14. 過橢圓之一焦點引任一切線之垂直線必與切點與中心之聯結線交於準線上,試證明之.

15. 過雙曲線之一焦點引任一切線之垂直線必與切點與中心之聯結線交於準線上,試證明之.

用36節之法求下列各切線之方程式.

16. 切於雙曲線 $3x^2-2y^2+5=0$, 且垂直於直線 $4x+2y=3$.

17. 切於橢圓 $x^2+4y^2+4x+6y=0$, 且平行於直線 $2x+3y=1$.

答: $2x+3y=0$, $4x+6y+25=0$.

18. 切於圓錐曲線 $3x^2+y^2=x$, 且平行於直線 $2y=3x$.

答: $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{4}\pm\frac{1}{12}\sqrt{21}$.

19. 切於圓錐曲線 $x^2-2y^2+x-5y-3=0$, 且垂直於直線 $x-y=1$. 答: $x+y+2=0$, $2x+2y+3=0$.

20. 切於圓錐曲線 $3x^2-xy+y^2+x-3y=0$, 且垂直於直線 $3x+y+2=0$. 答: $x=3y$, $11x=33y-100$.

91. 補助圓 (auxiliary circles); **離心角** (eccentric angle). 以橢圓之長軸爲直徑所作之圓稱爲**長補助圓**, 短軸爲直徑者稱爲**短補助圓**.

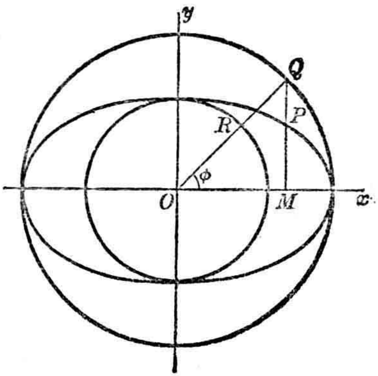
因橢圓方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

故長補助圓之方程式爲

$$x^2+y^2=a^2,$$

又短補助圓之方程式爲



$$x^2+y^2=b^2.$$

若橢圓上一點 $P:(x, y)$, 其縱坐標爲 MP, 延長之使與長補助圓交於 Q 點, 又引直線 OQ, 則 $\angle\phi=\angle MOQ$ 稱爲 P 點之**離心角**.

如上圖,

$$OM=OQ\cos\phi;$$

即

$$x=a\cos\phi.$$

將此x之值代入橢圓方程式,則得

$$y^2=b^2(1-\cos^2\phi),$$

故 $$y=b\sin\phi.$$

92. **參數方程式** (parametric equations). 曲線上之任一點P之坐標x, y各以第三變數k表之,則k稱爲參變數 (parameter), 所得之方程式稱爲參數方程式.例如前節之方程式.

$$\begin{cases} x=a\cos\phi \\ y=b\sin\phi \end{cases} \qquad \text{公式 (37)}$$

卽爲橢圓之參數方程式,而離心角 ϕ 卽爲參變數.

從上兩方程式得

$$\frac{x}{a}=\cos\phi,\ \frac{y}{b}=\sin\phi,$$

故 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\cos^2\phi+\sin^2\phi=1,$$

卽爲普通橢圓方程式矣.

習題四十三

1. 在橢圓 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上,求離心角爲 (a) 30°, (b) 150° 之點.

答：(b) $\left(-\sqrt{3},\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$.

2. 在橢圓 $4x^2+16y^2=1$ 上,求離心角爲 (a) $45°$, (b) $240°$ 之點.

3. 在橢圓 $2x^2+9y^2=18$ 上,求離心角爲 (a) $225°$, (b) $315°$ 之點.

4. 在橢圓 $4x^2+9y^2=36$ 上,求離心角爲 $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ 之點.

求下列各點之離心角.

5. 點$\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$在橢圓 $x^2+3y^2=3$ 上.

6. $x=2$ 諸點在橢圓 $x^2+4y^2=8$ 上.

7. 點$(-3,\ 1)$在橢圓 $x^2+3y^2=12$ 上.

8. 點$\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$在橢圓 $x^2+3y^2=3$ 上.

9. $x=\frac{1}{4}a\tan^2\phi,\ y=a\tan\phi$ 所表者爲何種曲線?

求下列曲線之正坐標方程式.

10. $x=a\sin 2\phi,\ y=a\cos 2\phi$.

11. $x=2t,\ y=t^2$.

12. $x=y+\sin\phi,\ y=\cos^2\phi$.

13. $x=2\cos n\phi,\ y=3\sin n\phi$.

14. $x=3\csc\phi,\ y=4\cot\phi$.

15. $x=at,\ y=b\sqrt{1-t^2}$.

16. $x=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,\ y=\sin^2\alpha$.

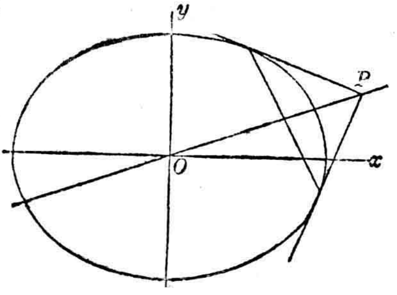
17. $x=a\sec\phi,\ y=b\tan\phi$.

18. 用與91節不同之方法求橢圓上一點之離心角.

19. 已知一橢圓之中心,二軸之方向,及曲線上一點與其離心角,求作其二軸.

20. 求標準式橢圓之切線[公式(33)]之 x 截距;因之求過橢圓上任一點之切線及法線之作法.

93. **接觸弦.** 用81節之同樣方法,得有心圓錐曲線之接觸弦之方程式如下:



關於曲線

$$\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=1$$

外之 $P:(x_1,\ y_1)$ 點之接觸弦爲

$$\frac{x_1x}{a^2}\pm\frac{y_1y}{b^2}=1. \qquad \text{公式(38)}$$

學者試自證明之.

習題四十四

求下列已知圓錐曲線關於已知點之接觸弦之方程式.

1. $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{5}=1$, $(4,\ -1)$.　　2. $\frac{x^2}{18}-\frac{y^2}{4}=1$, $(-6,\ 2)$.

3. $2x^2+2y^2=75$, $(6,\ -2)$.　　4. $3x^2+4y^2=7$, $(1,\ -1)$.

5. 應用接觸弦,求過曲線上 $3x^2-4y^2=8$ 一點 $(4,\ 4)$ 之切線.　　答: $3x-2y=4$, $9x-10y+4=0$.

6. 求橢圓 $10x^2+2y^2=7$ 過 $(-2,\ -1)$ 之切線.

答: $5x-3y+7=0,\ 5x+11y+21=0.$

7. 求雙曲線 $x^2-y^2=1$ 過 $(0,\ -1)$ 之切線.

答: $y=\pm\sqrt{2}x-1.$

8. 求圓 $x^2+y^2=12$ 過 $(0,\ 6)$ 之切線.

9. 若 $P_1,\ P_2$ 二點在有心圓錐曲線之外, 又 P_1 在 P_2 之接觸弦上,則 P_2 在 P_1 之接觸弦上. 試證明之.

10. 過有心圓錐曲線外之一點,求作曲線之切線.

11. 準線上任一點之接觸弦必過焦點試證明之,

12. 證明問題11之逆定理.

13. 準線上任一點之接觸弦必垂直於此點與焦點之聯結線.

14. 證明問題13之逆定理,

15. 若一點在通徑之延長線上,則此點之接觸弦必過準線與軸之交點.

16. 證明問題15之逆定理.

17. 若 $P:(x_1,\ y_1)$ 爲圓 $x^2+y^2=a^2$ 外之一點, 則 P 之接觸弦爲直線 $x_1x+y_1y=a^2$.

18. 若 O 爲圓之中心, P 爲圓外一點. 又 λ 爲 P 之接觸弦, 用幾何方法證明 OP 垂直於 λ.

19. 用解析方法證明問題18.

20. 在問題中,若 K 爲 OP 與 λ 之交點, 用幾何方法證明 $OP\cdot OK=a^2$.

21. 用解析方法證明問題20.

22. 從問題20, 求 P 點之接觸弦之幾何作圖法,且求過 P

點之切線之幾何作圖法.

23. 圓之關於某點之接觸弦必垂直於過此點之直徑,試用幾何及解析方法證明之.

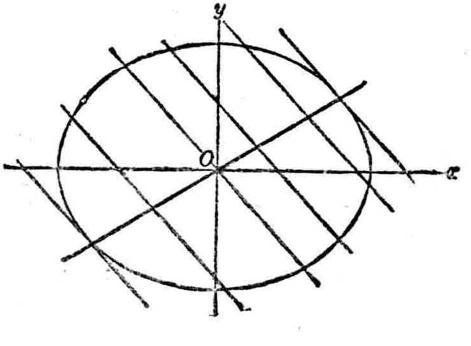
24. 若 P 點之圓 $x^2+y^2=a^2$ 之接觸弦切於圓 $4x^2+4y^2=a^2$, 則 P 在圓 $x^2+y^2=4a^2$ 上,

94. 直徑. 求橢圓

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{1}$$

之直徑之方程式,設其所二等分之弦之斜率爲 m.

設斜率爲 m 之一族平行弦之方程式爲



$$y=mx+k. \tag{2}$$

以(2)式之值代入(1)式中,去分母而整理之,即得

$$(b^2+a^2m^2)x^2+2a^2kmx+a^2k^2-a^2b^2=0$$

設此方程式之兩根爲 x_1, x_2, 則

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{b^2+a^2m^2}.$$

故(2)式所表之任一弦之中點之橫坐標 x 為

$$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$

$$=-\frac{a^2km}{b^2+a^2m^2}$$

將(2)式之 k 值代入,則得

$$x=-\frac{a^2m(y-mx)}{b^2+a^2m^2},$$

即

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x, \qquad \text{公式(39)}$$

此即橢圓直徑之方程式.

同理,若雙曲線為

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

則其直徑為

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x. \qquad \text{公式(40)}$$

故得

定理.　有心圓錐曲線之直徑為通過中心之直線.

95. 關於直徑之二定理.

定理 I: 過圓錐曲線直徑之端之切線必與被二等分之弦平行.

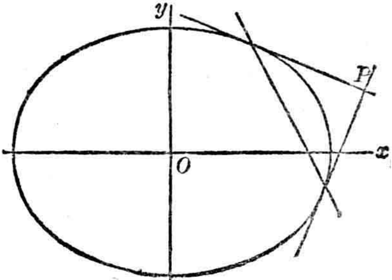
定理 II: 過圓錐曲線任何一弦兩端之二切線之交點必在二等分此弦之直徑上.

定理1學者試自證明之.

若圓錐曲線爲橢圓,則定理II可證明之如下:

設橢圓之方程式爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$



弦之方程式爲

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,$$

此卽點 $P:(x_1, y_1)$ 之接觸弦,故此弦兩端之切線交於 (x_1, y_1),又因此弦之斜率爲

$$m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1};$$

將此值代入公式(38),卽得與此弦相當之直徑之方程式爲

$$y=\frac{y_1}{x_1}x.$$

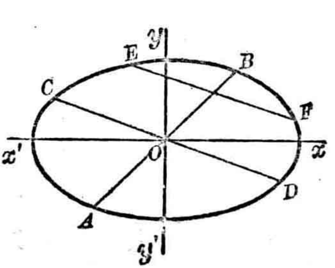
因此直徑通過(x_1,y_1),故此定理已證明之矣.

若為雙曲線,其證明同前.

96. **共軛徑**(conjugate diameters).

定理: 橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$之兩直徑之斜率一為$m_1$,一為$m_2$若$m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}$,則每一直徑必與其他直徑所二等分之弦平行.此兩直徑稱為共軛徑.

證. 設直徑AB, CD之斜率為m_1, m_2; AB所二等分之弦如EF等之斜率為m_a, CD所二等分弦之斜率為m_b.



由公式,(39)知

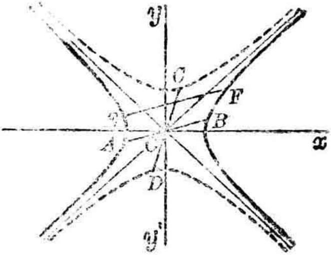
$$m_1=-\frac{b^2}{a^2m_a}.$$

因　　$m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}$,故得

$$m_2=\frac{-\frac{b^2}{a^2}}{-\frac{b^2}{a^2 m_a}}=m_a.$$

故 CD 與 EF 平行. 同理可得 AB 與 CD 所二等分之弦平行.

雙曲線之共軛徑亦可類推. 參照右圖



習題四十五

用82節之法, 求下列直徑之方程式.

1. 橢圓 $3x^2+2y^2=8$ 之直徑二等分 $3x+y=k$ 諸弦.

2. 雙曲線 $x^2-2y^2+4=0$ 之直徑二等分平行於直線 $x+2b=3$ 之諸弦. 答: $x+y=0$.

3. 橢圓 $x^2+2y^2-x-y=0$ 之直徑, 二等分平行於直線 $x-3y=6$ 之諸弦.

4. 圓錐曲線 $3x^2-y^2=x+2y$ 之直徑, 二等分 $2x+3y=k$ 諸弦.

5. 圓錐曲線 $x^2+2y^2+7x+3y-5=0$ 之直徑二等分斜率為 -2 之諸弦. 答: $2x-8y+1=0$.

6. 圓錐曲線 $2x^2-xy=3$ 之直徑, 二等分斜率為3之諸弦. 答: $y=x$.

7 圓錐曲線 $xy=3$ 之直徑, 二等分斜率為 -2 之諸弦. 答: $y=2x$.

8. 圓錐曲線 $3x^2-4xy+2y^2-x-3y+6=0$ 之直徑，二等分平行於 y 軸之諸弦　答：$4x-4y+3=0$.

9. 圓錐曲線 $3x^2-y^2+2x-3y-3=0$ 之直徑二等分平行於共軛軸之諸弦.　答：$2y+3=0$.

在下列各題中，求被已知點二等分之弦.

10. 圓錐曲線 $x^2+2y=8$，點 $(2,\ -1)$.　答：$y=x-3$.

11. 圓錐曲線 $x^2+3y=6$，點 $(1,\ 1)$

12. 圓錐曲線 $2x^2-y^2=16$，點 $(-3,\ 1)$.

13. 圓錐曲線 $4x^2-y^2=9$，點 $(1,\ 2)$.

14. 已知一圓錐曲線，求作其中心.

15. 求作平行於已知直線之有心曲線之切線.

16. 已知有心曲線內之一點，求作被此點所二等分之弦.

17. 一雙曲線之直徑與曲線相交與否，視其所屬諸平行弦中過中心之一弦與曲線不相交，或相交而定，試證明之.

18. 直徑通常與其所屬之平行弦不相垂直.

19. 若 $P:(x_1,\ y_1)$ 爲橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一直徑之一端，求證其共軛徑之兩端爲 $\left(\pm\frac{ay_1}{b},\ \pm\frac{bx_1}{a}\right)$.

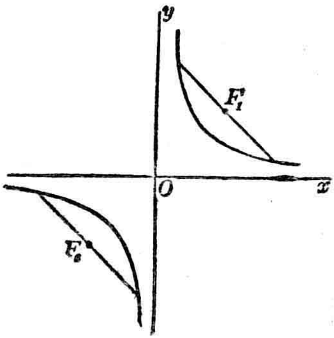
20. 雙曲線之共軛徑有如問題19之性質否?

97. 以漸近線爲坐標軸之等邊雙曲線.　因等邊雙曲線之兩漸近線互相垂直，故可以之爲

坐標軸.從63節,知等邊雙曲線之方程式爲

$$x^2-y^2=a^2.$$

若將原坐標軸迴轉$-45°$,即得以漸近線爲坐標軸之曲線矣.



用公式(26)得

$$\begin{cases} x=x'\cos(-45°)-y'\sin(-45°)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \\ y=x'\sin(-45°)+y'\cos(-45°)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y', \end{cases}$$

代入 $x^2-y^2=a^2$, 則得

$$\left(\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2-\left(-\frac{x'}{\sqrt{2}}+\frac{y'}{\sqrt{2}}\right)^2=a^2,$$

$$\frac{(x'+y')^2}{2}-\frac{(y'-x')^2}{2}=a^2,$$

$$x'^2+2x'y'+y'^2-y'^2+2x'y'-x'^2=2a^2,$$

$$4x'y'=2a^2,$$

即 $$x'y'=\frac{a^2}{2}.$$

因$\frac{a^2}{2}$爲一常數,若以k表之即得

$$xy=k. \qquad \text{公式 (41)}$$

習題四十六

1. 雙曲線 $xy=k$ 在第一及第三或第二及第四象限內,依 k 爲正或負而定.試證明之.

2. 描寫雙曲線 $xy=4$.

3. 描寫雙曲線 $xy+6=0$.

4. 過曲線上點 $(1, -2)$,求雙曲線 $xy+2=0$ 之切線及法線.

答: $y=2x-4,\ 2y=-x-3$.

5. 過曲線上點 $\left(-3, -\frac{1}{2}\right)$,求雙曲線 $2xy=3$ 之切線及法線.

答: $x+6y+6=0,\ 2y=12x+35$.

6. 求雙曲線 $xy=-3$ 之平行於直線 $x-2y+3=0$,之切線.

答: $x=2y\pm 2\sqrt{6}$.

7. 求雙曲線 $xy=6$ 之垂直於直線 $3x-2y=5$,之切線.

8. 過點 $(3, -4)$,求雙曲線 $xy=4$ 之切線.

答: $4x+y=8,\ 4x+9y+24=0$.

9. 過點 $(0, 3)$,求雙曲線 $5xy+6=0$ 之切線.

答: $y=\frac{15}{8}x+3,\ a=0$,

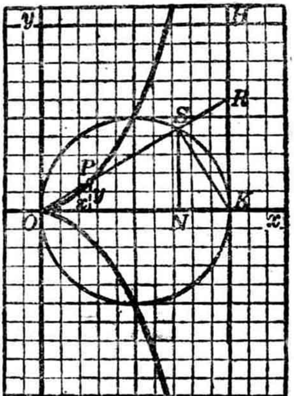
10. 方程式 $x=c\cot\phi,\ y=c\tan\phi$ 乃以漸近線爲坐標軸之等邊雙曲線,試證明之.

第十章

高等平曲線 (Higher plane curves) 及超性曲線 (Transcendent curves)

98. 定義. 前數章所研究之曲線之方程式之次數最高者爲二次.三次以上之方程式之曲線稱爲**高等平曲線**.又方程式中含有超性數,如 $\sin x$, $\log x$, 10^x 等之曲線稱爲**超性曲線**.本章擇其重要者述其大要

99. 蔓狀線 (cissoid).



設 OK 爲以 r 爲半徑之圓之直徑, KH 爲圓上 K 點之切線.又設 OR 爲自 O 點至 KH 上一點 R 之直線,割圓周於 S 點,又在 OR 上取 P 點使 $OP=SR$

OR 繞 O 點周圍迴轉時 P 點之軌跡稱爲**蔓狀線**.

以 Ox, Oy 爲坐標軸, 求蔓狀線方程式之法, 先引 P 點之兩坐標 x, y 又引 SK 及垂直於 Ox 軸之 SN, 則

$$\frac{y}{x}=\frac{NS}{ON} \tag{1}$$

因 $$SR=OP,$$

得 $$NK=x$$

及 $$ON=2r-x.$$

在直角三角形 OSK 中, 由幾何得 NS 爲 ON 與 NK 之比例中項.

故得 $$NS=\sqrt{ON\cdot NK}$$
$$=\sqrt{(2r-x)x}.$$

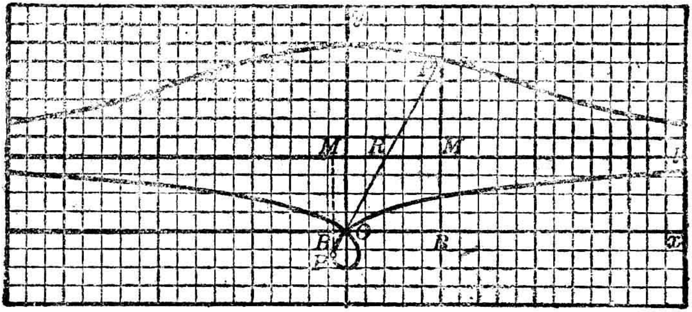
以 ON, NS 之值代入 (1) 式而整理之, 得

$$y^2=\frac{x^3}{2r-x}$$

由此方程式知蔓狀線對於 Ox 軸爲對稱, 且祇在 $0\leqq x<2r$ 之範圍內爲實曲線

100. 蚌線 (conchoid). 若有一直線 OP 繞定點 O 迴轉而與一定直線 l 相交於 R, 又 RP 之長爲

常數 c, 則 P 點之軌跡稱爲蚌線.



欲求蚌線之方程式, 取 O 點爲原點, 使坐標軸 Oy 垂直於 l 直線, 設 O 至 l 直線之距離爲 a, 又 P: (x, y) 爲曲線上任意一點. 引 PB 垂直於 Ox 與 l 交於 M, 則無論 $RP\ (=c)$ 在 l 上方或下方得比例式

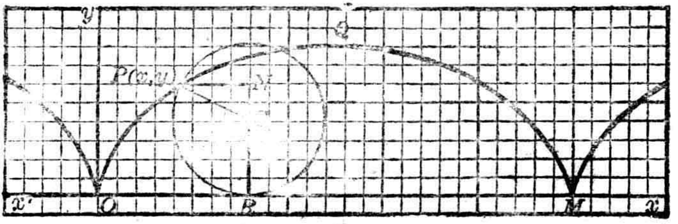
$$OP : RP = BP : MP;$$

即 $$\sqrt{x^2+y^2} : c = y : y-a,$$

或 $$(x^2+y^2)(y-a)^2 = c^2y^2.$$

由方程式知此曲線對於 Oy 爲對稱.

101. 擺線 (cycloid). 一圓在一直線上轉動, 圓周上一定點之軌跡稱爲擺線.



如圖，以Ox為軸，O為原點，即曲線與軸之交點，亦即動圓周上定點與直線相合之點.

設$P:(x,y)$為曲線上一點，r為動圓之半徑，PCR角為θ(用弧度法測之)，則

$$\widehat{PR}=r\theta,\ \text{且}\ \widehat{PR}=OR.$$

故　$$x=OR-PN=r\theta-r\sin\theta.$$

及　$$y=RC+CN=r-r\cos\theta.$$

故得　$$\begin{cases}x=r(\theta-\sin\theta)\\ y=r(1-\cos\theta).\end{cases}$$

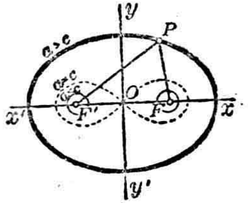
從此兩方程式消去θ，雖可得含x,y之方程式，惟其式甚繁，不如用參數方程式較為簡便.

欲得x截距，則在$y=r(1-\cos\theta)$式中設$y=0$，得$\theta=0, 2\pi, 4\pi,$ ………，然後得$x=0, 2\pi r, 4\pi r,$ ………. 故擺線與x軸相遇之點為$(0,0), (2\pi r,0), (4\pi r,0).$ ………,

習題四十七

1. 求藝狀線之極方程式.

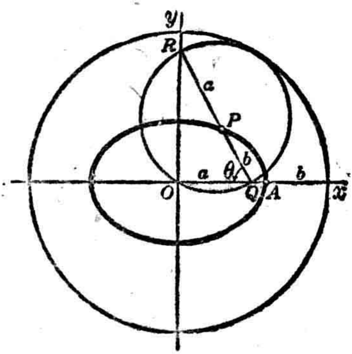
2. 求蚌線之極方程式.



3. 若F及F'爲二定點,a爲一常數,又$F'P\cdot FP=a^2$,求P點之軌跡.

4. 一圓切二平行線於O及B,有弦OR繞O而旋轉與上方之切

線交於A.若作AM使垂直於Ox,又RP垂直於AM,求P點之軌跡.



5. 一圓在定圓內相切而轉動,求圓周上一定點之軌跡.

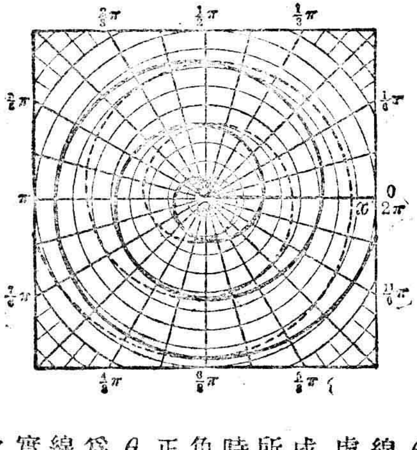
6. 若上題之圓在定圓外則如何?

102. 亞幾默德螺線(spiral of Archimedes).

方程式$\rho=c\theta$之曲線稱爲亞幾默德螺線(c爲常數)。

若 $c=\frac{1}{2}$ 以相當之值代入 θ, 取 π 之近似值爲 $\frac{22}{7}$, 得 ρ 之值如下表, 然後描寫其曲線.

θ	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
ρ	0	0·3	0·5	0·8	1·0	1·3	1·6

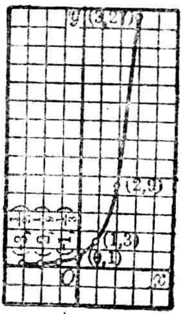


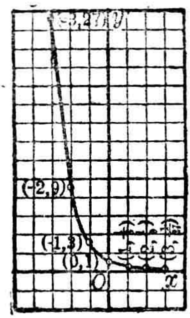
圖中之實線爲 θ 正角時所成, 虛線 θ 爲負角時所成.

103. 指數曲線 (exponential curve). 方程式 $y=ca^x$ 所表之曲線稱爲**指數曲線** (a 爲正常數, c 爲任何常數).

因 $y=a^x$ 與 $y=ca^x$ 兩曲線所不同者祇有後者

之縱坐標爲前者之 c 倍而已，故祇須研究 $y=a^x$ 足矣.





從方程式 $y=a^x$，知此曲線必通過 $(0,1)$，又 x 無論爲何值 y 必爲正數.

若 $a>1$，則 x 增大時，a^x 亦增大，可至無限大；x 減小時，a^x 亦減小，可至無限小.

若 $a<1$ 則 x 增大時，a^x 反減小可至無限小，x 減小時，a^x 反增大，可至無限大.

設 $a=3$，則方程式爲 $y=3^x$，其曲線如上左圖.

設 $x=\frac{1}{3}$，則方程式爲 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$，其曲線如上右圖.

104. 對數曲線 (logarithmic curve) 方程式

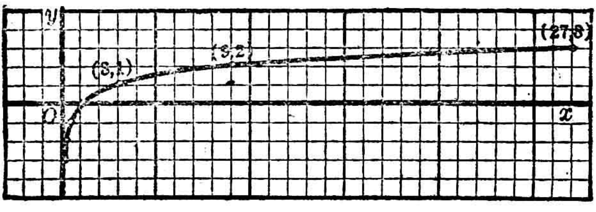
$y=\log_a x$之曲線稱爲對數曲線(a爲任意正常數,通常大於1).

因負數無對數故x常爲正數.

當$x<1$時,則$\log_a x$爲負.例如$\log_{10} 0.01=-2$, $\log_{10} 0.001=-3$.又x減小,則$\log_a x$亦減小,可至無限小;x增大時,$\log_a x$亦增大,可至無限大.

設$a=3$,從下表所得各點可描寫曲線$y=\log_3 x$.

$x=$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$y=$	-2	-1	0	1	2	3

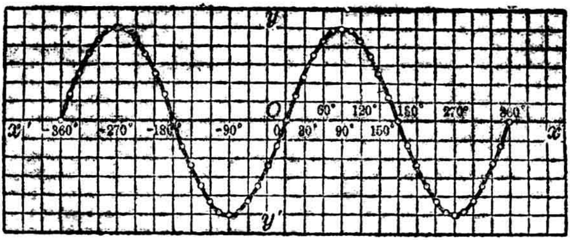


105. **三角曲線**(trigonometric curve) $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$等之曲線稱爲**三角曲線**.今試就$y=\sin x$研究之

以相當之值代x,得y如下表:

x	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
y	0	·26	·50	·71	·87	·97	1	·97	·87	·71	·50	·26	0

x 在 180° 以上, y 之值與 x 在 0° 以上者同,惟符號爲負而已.曲線如下圖所示.



$\sin x$ 之最大值爲 1, 最小值爲 -1. x 自 0° 增至 90°, 則 $\sin x$ 自 0 增至 1; x 自 90° 增至 180°, 則 $\sin x$ 自 1 減至 0.

106. 反三角曲線 (inverse trigonometric curve). 方程式 $y=\sin^{-1}x$, $y=\cos^{-1}x$, $y=\tan^{-1}x$ 等之曲線稱爲**反三角曲線**.

今試就 $y=\sin^{-1}x$ 研究之

因 $y=\sin^{-1}x$, 故得

$x=\sin y$. 以相當之值代 y, 得 x 之值, 然後描寫其曲線得圖如上.

習題四十八

1. 在方程式 $y=2\cdot 7^x$ 中, 若 $x=-2, -1, 0, 1, 2, \frac{10}{3}$, 求 y, 且作其圖解線.

2. 作方程式 $y=e^{2x}$ 之圖解線.

3. 利率 4%, 每年結息一次, 則 x 年後本金一圓之本利合計爲 1.04^x 圓. 作十年內本利合計之增殖圖解線.

4. 作方程式 $y=\log_{10} x$ 之圖解線.

5. 作方程式 $y=\cos x$ 之圖解線.

6. 將方程式 $y=\tan x$ 之圖解線與 $y=\cot x$ 之圖解線比較其相異之點.

附　　錄

公式集

頁數

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ 公式(1)　5

$$\begin{cases} x=\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n} \\ y=\dfrac{ny_1+my_2}{m+n} \end{cases}$$ 公式(2)　9

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2) \\ y=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2) \end{cases}$$ 公式(3)　9

$$m_2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$ 公式(4)　13

$$m_1m_2=-1$$ 公式(5)　14

$$A=\frac{1}{2}\left\{x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right\}$$ 公式(6)　17

$$x=k$$ 公式(7 A)　39

中西名詞對照表

第 一 章

坐標 (Coördinates)
橫坐標 (Abscissa)
縱坐標 (Ordinate)
坐標軸 (Coördinate axes)
x 軸 (x-axis)
y 軸 (y-axis)
原點 (Origin)
象限 (Quadrant)
第一象限 (First quadrant)
第二象限 (Second quadrant)
第三象限 (Third quadrant)
第四象限 (Fourth quadrant)
有向線分 (Directed line segment)
射影 (Projection)
斜角 (Angle of inclination)
斜率 (Slope)

第 二 章

曲線 (Curve)
變數 (Variable)
常數 (Constant)
軌跡 (Locus)
圖解線 (Graph)
截距 (Intercept)
x 截距 (x-intercept)
y 截距 (y-intercept)
對稱 (Symmetry)

第 四 章

斜率式 (Slope form)
曲線之族 (Family of curves)
截距式 (Intercept form)
法線式 (Normal form)

第 五 章

圓 (Circle)

點 圓 (Point circle)

虛 圓 (Imaginary circle)

公 共 弦 (Common chord)

冪 (Power)

等 冪 線 (Line of equal powers)

根 軸 (Radical axis)

第 六 章

極 坐 標 (Polar coördinates)

動 徑 (Radius vector)

極 角 (Polar angle)

首 線 (Initial line)

極 軸 (Polar axis)

極 (Pole)

原 點 (Origin)

第 七 章

圓 錐 曲 線 (Conic sections)

焦 點 (Focus)

準 線 (Directrix)

離 心 率 (Eccentricity)

通 徑 (Latus rectum)

橢 圓 (Ellipse)

拋 物 線 (Parabola)

雙 曲 線 (Hyperbola)

軸 (Axis)

頂 點 (Vertex)

中 心 (Center)

橫 軸 (Transverse axis)

共 軛 軸 (Conjugate axis)

長 軸 (Major axis)

短 軸 (Minor axis)

漸 近 線 (Asymptote)

等 邊 雙 曲 線 (Equilateral hyperbola)

直 角 雙 曲 線 (Rectangular hyperbola)

坐 標 之 轉 換 (Coördinate transformation)

坐 標 軸 之 平 移 (Translation of axes)

坐 標 軸 之 迴 轉 (Rotation of axes)

第 八 章

法 線 (Normal)

切 線 影 (Subtangent)

法線影 (Subnormal)

焦半徑 (Focal radius)

接觸弦 (Chord of contact)

第九章

有心圓錐曲線(Central conics)

補助圓 (Auxiliary circles)

離心角 (Eccentric angle)

參數方程式 (Parametric equations)

參變數 (Parameter)

共軛徑 (Conjugate diameters)

第十章

高等平曲線(Higher plane curves)

超性曲線(Transcendent curves)

蔓狀線 (cissoid)

蚌線 (Conchoid)

擺線 (Cycloid)

亞基默德螺線 (Spiral of Archimedes)

指數曲線 (Exponential curve)

對數曲線 (Logarithmic curve)

三角曲線 (Trigonometric curve)

反三角曲線(Inverse trigonometric curve)