Ис. Ньютонъ

Математическія Начала Натуральной Философіи

Переводъ съ латинскаго
съ примѣчаніями и поясненіями

А. Н. Крылова

Флота Генералъ-Лейтенанта, Заслуженнаго Профессора Николаевской Морской Академіи, Члена-корреспондента Императорской Академіи Наукъ

Книга I

(Отдѣльный оттискъ изъ «Извѣстій» Николаевской Морской Академіи, вып. IV)

ПЕТРОГРАДЪ
Типографія М. М. Стасюлевича. Вас. остр., 5 л., 28
1915

Ис. Ньютонъ

Математическія Начала Натуральной Философіи

ПЕРЕВОДЪ СЪ ЛАТИНСКАГО
СЪ ПРИМѢЧАНІЯМИ И ПОЯСНЕНІЯМИ

А. Н. Крылова

Флота Генералъ-Лейтенанта, Заслуженнаго Профессора Николаевской Морской Академіи, Члена-корреспондента Императорской Академіи Наукъ

Книга I

(Отдѣльный оттискъ изъ «Извѣстій» Николаевской Морской Академіи, вып. IV)

ПЕТРОГРАДЪ
Типографія М. М. Стасюлевича. Вас. остр., 5 л., 28
1915

ТИПОГРАФІЯ М. СТАСЮЛЕВИЧА
В. О. 5 ЛИН. 28
4684

1/3

94

КНИГА ИМЕЕТ

Листов печатных	Выпуск	В перепл. един. соедин. №№ вып.	Таблиц	Карт	Иллюстр.	Служебн. №№	№№ списка и порядковый	197 г.
22		1915 к1		23		4	17п / 52	

Математическія Начала Натуральной Философіи.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

О движеніи тѣлъ.

Книга I.

Предисловіе переводчика.

„Начала Натуральной Философіи“ Ньютона составляютъ незыблемое основаніе Механики, Теоретической Астрономіи и Физики. Лагранжъ назвалъ это сочиненіе „величайшимъ изъ произведеній человѣческаго ума“, поэтому само собою ясна та польза, которую всякій можетъ извлечь изъ изученія этого произведенія.

Сочиненіе Ньютона при жизни автора было издано три раза: въ 1686, 1713 и 1725 г. Затѣмъ было еще пять или шесть изданій на латинскомъ языкѣ. Послѣднее изъ этихъ латинскихъ изданій исполнено въ Глазгоу въ 1871 г. попеченіемъ В. Томсона (Лордъ Кэльвинъ) и Г. Блакбурна.

Всѣ эти латинскія изданія составляютъ теперь своего рода рѣдкость, вмѣстѣ съ тѣмъ принятое въ нихъ старинное начертаніе формулъ и старинный математическій языкъ вносятъ для теперешняго читателя лишнюю трудность въ изученіе сочиненія Ньютона.

На англійскій языкъ „Начала“ переведены, можно сказать, съ подстрочною точностью Моттомъ и изданы въ 1727 году; кромѣ того имѣется ихъ французскій переводъ, исполненный Маркизою Дюшателе съ примѣчаніями Клэро, изданный въ 1759 году, и, наконецъ, нѣмецкій переводъ Вольферса, изданный въ 1871 г.

Уже по времени изданія видно, что англійскій и французскій переводы также составляютъ рѣдкость. Переводъ Вольферса мѣстами неточенъ, причемъ замѣтно, что переводчикъ не ясно понималъ мысль автора, къ тому же примѣчанія, которыми онъ свой переводъ снабдилъ, также мѣстами ошибочны.

Латинскій языкъ недоступенъ бóльшей части слушателей нашей Николаевской Морской Академіи, поэтому, чтобы облегчить имъ возможность ознакомленія съ первоисточникомъ многихъ изъ сообщаемыхъ имъ знаній и чтобы, при упоминаніи имени Ньютона, желающіе могли найти и подлинныя его слова, доказательства и разсужденія, относящіяся къ данному вопросу, я рѣшилъ исполнить русскій переводъ Ньютоновыхъ „Началъ Натуральной Философіи“. Я придерживался латинскаго текста изданія 1871 года и, переведя его сперва почти подстрочно, неоднократно перечитывалъ и исправлялъ этотъ переводъ такъ, чтобы при точномъ сохраненіи не только смысла подлинника, но и самыхъ словъ автора, достигнуть правильности и гладкости русскаго языка и избѣгнуть употребленія латинскихъ словъ вродѣ: импульсъ, эффектъ, фактъ и т. п., которыя отъ написанія ихъ русскими буквами не становятся русскими. Затѣмъ, для еще болѣе тщательной чистки я этотъ переводъ вновь переписалъ самъ для подготовки его къ печати.

Ньютонъ почти всѣ свои разсужденія и доказательства ведетъ геометрически, изъ словъ его предисловія къ первому изданію видно какое значеніе онъ придавалъ точности чертежа. Въ изданіи Томсона и Блакбурна эта точность соблюдена, я постарался ее соблюсти и въ русскомъ переводѣ, для этого я перечертилъ всѣ чертежи тушью въ удвоенномъ масштабѣ, а нѣкоторые пересоставилъ самъ вновь, строго слѣдя за полнымъ ихъ соотвѣтствіемъ тексту. Съ этихъ мною самимъ исполненныхъ чертежей изготовлены фотоцинкографіей уменьшенныя вдвое клише.

Отдѣльныя мѣста текста по сжатости изложенія или особенностямъ бывшихъ въ то время математическихъ пріемовъ требовали нѣкоторыхъ поясненій и толкованій, всѣ эти толкованія помѣщены при самомъ текстѣ въ примѣчаніяхъ, подобно тому, какъ въ латинскомъ трехтомномъ изданіи оо. іезуитовъ Лесёра и Жакье 1760 года. Лишь примѣчаніе къ LXVI предложенію въ виду его значительнаго объема отнесено къ концу первой книги.

Тѣ мѣста подлинника, которыя въ силу особенностей латинскаго языка допускали разное толкованіе, приведены въ примѣчаніяхъ и по-латыни, причемъ я поясняю причины, заставившія меня остановиться на томъ или иномъ ихъ толкованіи.

Его Превосходительство Начальникъ и Конференція Академіи признали, что помѣщеніе русскаго перевода „Ньютоновыхъ Началъ“ въ „Извѣстіяхъ Николаевской Морской Академіи“ соотвѣтствуетъ цѣли этого изданія, и я считаю своимъ долгомъ принести Его Превосходительству Г. И. Шульгину и Конференціи Академіи глубокую благодарность за оказываемое моему труду довѣріе.

А. Крыловъ.

Флота Генералъ-Лейтенантъ, заслуженный профессоръ Николаевской Морской Академіи.

Ис. Ньютонъ.

Математическія начала натуральной философіи.

Предисловіе автора къ первому изданію.

Такъ какъ древніе, по словамъ Паппуса, придавали большое значеніе Механикѣ при изучении природы, то и новѣйшіе авторы, отбросивъ субстанціи и скрытыя свойства, стараются подчинить явленія природы законамъ математики.

Въ этомъ сочиненіи имѣется въ виду тщательное развитіе приложеній математики къ физикѣ [1]).

Древніе разсматривали Механику двояко: какъ *раціональную* (умозрительную), развиваемую точными доказательствами и какъ *практическую*. Къ практической механикѣ относятся всѣ ремесла и производства, именуемыя механическими, отъ которыхъ получила свое названіе и самая *Механика*.

Такъ какъ въ работѣ ремесленники довольствуются лишь малой степенью точности, то образовалось мнѣніе, что Механика тѣмъ и отличается отъ Геометріи, что все вполнѣ точное принадлежитъ къ Геометріи, менѣе точное относится къ Механикѣ. Но погрѣшности заключаются не въ самомъ ремеслѣ или искусствѣ, а принадлежатъ исполнителю работы: — кто работаетъ съ меньшею точностью, тотъ—худшій механикъ, и если бы кто-ни-

---

[1]) При современной терминологіи заглавіе сочиненія Ньютона: «Philosophiae Naturalis Principia Mathematica» наиболѣе точно передается словами «Математическія основанія физики». Терминъ «Натуральная или естественная философія» — Natural Philosophy удержался и до сихъ поръ въ англійской литературѣ, такъ, напр., озаглавлено знаменитое сочиненіе В. Томсона и Тэта.

будь смогъ исполнять работу съ совершеннѣйшею точностью, тотъ и былъ бы наилучшимъ изъ всѣхъ механиковъ.

Однако самое проведеніе прямыхъ линій и круговъ, служащее основаніемъ Геометріи, въ сущности относится къ Механикѣ. Геометрія не учитъ тому *какъ* проводитъ эти линіи, но предполагаетъ (постулируетъ) выполнимость этихъ построеній. Предполагается также, что приступающій къ изученію Геометріи уже ранѣе научился точно чертить круги и прямыя линіи; въ Геометріи показывается лишь какимъ образомъ при помощи проведенія этихъ линій рѣшаются разные вопросы и задачи. Само по себѣ черченіе прямой и круга составляютъ также задачу, но только не геометрическую. Рѣшеніе этой задачи заимствуется изъ Механики, Геометрія учитъ лишь пользованію этими рѣшеніями. Геометрія зато и прославляется, что заимствовавъ извнѣ столь мало основныхъ положеній, она столь многаго достигаетъ.

Итакъ, Геометрія основывается на механической практикѣ и есть не что иное, какъ та часть *общей механики*, въ которой излагается и доказывается искусство точнаго измѣренія. Но такъ какъ въ ремеслахъ и производствахъ приходится по большей части имѣть дѣло съ движеніемъ тѣлъ, то обыкновенно все касающееся лишь величины относится къ Геометріи, все же касающееся движенія—къ Механикѣ.

Въ этомъ смыслѣ *раціональная Механика* есть ученіе о движеніяхъ, производимыхъ какими бы то ни было силами, и о силахъ, требуемыхъ для производства какихъ бы то ни было движеній, точно изложенное и доказанное.

Древними эта часть Механики была разработана лишь въ видѣ ученія о пяти машинахъ [2]) примѣняемыхъ въ ремеслахъ, приэтомъ даже тя-

---

[2]) Слова: «Pars haec mechanicae a veteribus in potentiis quinque ad artes manuales spectantitibus exculta fuit, qui gravitatem (cum potentia manuales non sit) vix aliter quam in ponderibus per potentiis illas movendis considerarunt» представляютъ для перевода ту трудность, что здѣсь слово «potentia» употреблено въ двухъ разныхъ смыслахъ, изъ которыхъ одинъ уже болѣе не употребляется. Сохранившійся смыслъ слова potentia есть сила, мощность и лишь этотъ смыслъ и сохраненъ за этимъ словомъ въ переводѣ Wolfers'а, гдѣ поставлено слово «Krafft» или Маркизы Du Châtelet, гдѣ поставлено слово «puissance», и фраза Ньютона становится совершенно непонятной. Между тѣмъ во времена Ньютона слово potentia употреблялось и какъ равносильное слову «machina»—машина. Такъ, напр., въ Механикѣ Wallis'а, изданной въ 1671 году (Opera omnia Vol. I p. 969) говорится: «in axe cum peritrochio et cognatis p o t e n t i i s quibus eadem est ratio... въ заголовкѣ же: «de axe in peritrochio et machinis cognatis», или далѣе: «Solent autem plerique omnes mechanicorum scriptores «p o t e n t i a m» hanc ad Vectem reducere. Въ текстѣ самихъ Principia въ слѣдствіи 2-омъ законовъ Ньютонъ употребляетъ слова: p o t e n t i i s mechanicis какъ равносильное «machinis mechanicis» чтобы избѣжать частаго повторенія слова «machina».

Основныя машины, разсматривавшіяся древними авторами, суть: vectis—рычагъ, axis in peritrochio—воротъ, trochlea seu polispastus—блокъ, жесть (такъ какъ это не есть усиліе, производимое руками) разсматривалась ими не какъ сила, а лишь какъ грузы, движимые сказанными машинами. Мы же, разсуждая не о ремеслахъ, а объ ученіи о природѣ и слѣдовательно не объ усиліяхъ, производимыхъ руками, а о силахъ природы, будемъ главнымъ образомъ заниматься тѣмъ, что относится къ тяжести, легкости, силѣ упругости, сопротивленію жидкостей и къ тому подобнымъ притягательнымъ или напирающимъ силамъ. Поэтому и сочиненіе это нами предлагается какъ математическія основанія физики. Вся трудность физики, какъ будетъ видно, и состоитъ въ томъ, чтобы по явленіямъ движенія распознать силы природы, а затѣмъ по этимъ силамъ изъяснить остальныя явленія. Для этой цѣли предназначены общія предложенія, изложенныя въ книгахъ первой и второй. Въ третьей же книгѣ мы даемъ примѣръ вышеупомянутаго приложенія, объясняя систему міра, ибо здѣсь изъ небесныхъ явленій, при помощи предложеній, доказанныхъ въ предыдущихъ книгахъ, математически выводятся силы тяготѣнія тѣлъ къ солнцу и отдѣльнымъ планетамъ. Затѣмъ по этимъ силамъ также при помощи математическихъ предложеній выводятся движенія планетъ, кометъ, луны и моря. Было бы желательно вывести изъ началъ механики и остальныя явленія природы разсуждая подобнымъ же образомъ, ибо многое заставляетъ меня предполагать, что всѣ эти явленія обусловливаются нѣкоторыми силами, съ которыми частицы тѣлъ, вслѣдствіе причинъ, покуда неизвѣстныхъ, или стремятся другъ къ другу и сцѣпляются въ правильныя фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются другъ отъ друга. Такъ какъ эти силы неизвѣстны, то до сихъ поръ попытки философовъ объяснить явленія природы и оставались безплодными. Я надѣюсь, однако, что или этому способу разсужденія, или другому болѣе правильному изложенныя здѣсь основанія доставятъ нѣкоторое освѣщеніе.

При изданіи этого сочиненія оказалъ содѣйствіе остроумнѣйшій и во всѣхъ областяхъ науки ученѣйшій мужъ *Эдмундъ Галлей*, который не только правилъ типографскія корректуры и озаботился изготовленіемъ ри-

---

cochlea — винтъ, cuneus — клинъ. Эти-то пять машинъ и подразумѣвалъ Ньютонъ, говоря о «potentiis quinque».

Въ англійскомъ переводѣ Motte'a слово potentia вездѣ переведено словомъ «power», причемъ это англійское слово имѣло тоже двойственное значеніе, какъ то видно, напр., по слѣдующей выпискѣ изъ гл. III Maclaurin. An Account on Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries: «It is distinguished by Sir I. Newton into *practical* and *rational* mechanics; the former treats of the *mechanical powers* viz: the *lever*, the *axis* and *wheel*, the *pulley*, the *wedge* and the *screw* to which the *inclined* plan is to be added and of their various combinations together. Rational Mechanics comprehends the whole theory of motion and shews when the *powers or forces* are given how to determine the motion that are produced by them»... «in tracing the powers that operate in nature from the phenomena we proceed by analysis and deducing the phenomena from the powers or causes that produce them we proceed by synthesis».

сунковъ, но даже по его лишь настоянiямъ я приступилъ и къ самому изданiю. Получивъ отъ меня доказательства вида орбитъ небесныхъ тѣлъ, онъ непрестанно настаивалъ, чтобы я сообщилъ ихъ Королевскому Обществу, которое затѣмъ своимъ благосклоннымъ вниманiемъ и заботливостью заставило меня подумать о выпускѣ ихъ въ свѣтъ. Послѣ того я занялся изслѣдованiемъ неравенствъ движенiя луны, затѣмъ я попробовалъ сдѣлать другiя приложенiя, относящiяся: къ законамъ и измѣренiю силъ тяготѣнiя и другихъ, къ изслѣдованiю вида путей описываемыхъ тѣлами подъ дѣйствiемъ притяженiя слѣдующаго какому-либо закону, къ движенiю многихъ тѣлъ другъ относительно друга, къ движенiю тѣлъ въ сопротивляющейся средѣ, къ силамъ, плотностямъ и движенiямъ среды, къ изслѣдованiю орбитъ кометъ и къ тому подобнымъ вопросамъ; вслѣдствiе этого я отложилъ изданiе до другого времени, чтобы все это обработать и выдать въ свѣтъ совмѣстно.

Все относящееся къ движенiю луны (какъ не совершенное) сведено въ слѣдствiяхъ предложенiя 66-го, чтобы не прибѣгать къ отдѣльнымъ доказательствамъ и къ сложнымъ методамъ несоотвѣтствующимъ важности предмета, а также чтобы не прерывать послѣдовательности прочихъ предложенiй. Кое-что найденное мною впослѣдствiи я предпочелъ вставить, можетъ быть и въ менѣе подходящихъ мѣстахъ, нежели измѣнять нумерацiю предложенiй и ссылокъ. Я усерднѣйше прошу о томъ, чтобы все здѣсь изложенное читалось съ благосклонностью и чтобы недостатки въ столь трудномъ предметѣ не осуждались бы, а пополнялись новыми трудами и изслѣдованiями читателей.

Ис. Ньютонъ.

Дано въ Кэмбриджѣ
въ Коллегiи Св. Троицы
8-го мая 1686 г.

1686

Предисловiе автора ко второму изданiю.

Въ этомъ второмъ изданiи «Началъ» сдѣлано много отдѣльныхъ исправленiй и нѣкоторыя добавленiя. Такъ, во второмъ отдѣлѣ первой книги опредѣленiе силъ, подъ дѣйствiемъ которыхъ тѣла описываютъ заданныя орбиты, изложено болѣе просто и полно. Въ отдѣлѣ четвертомъ второй книги сопротивленiе жидкостей изслѣдуется болѣе точно и теорiя его подтверждается новыми опытами. Въ третьей книгѣ теорiя луны и предваренiе равноденствiй выводятся болѣе полно изъ ихъ началъ, и теорiя кометъ подтверждается примѣрами бо́льшаго числа и болѣе точно вычисленныхъ орбитъ.

Ис. Ньютонъ.

Дано въ Лондонѣ
28-го марта 1713 г.

Предисловіе издателя ко второму изданію.

Ньютоновой философіи новое, столь давно желанное изданіе, теперь во многомъ исправленное и дополненное, предъявляемъ тебѣ, благосклонный читатель. Главнѣйшее содержаніе этого знаменитѣйшаго сочиненія ты можешь усмотрѣть въ приложенныхъ оглавленіяхъ, о добавленіяхъ же и измѣненіяхъ тебѣ указано въ предисловіи автора. Остается лишь кое-что присовокупить относительно самаго метода этой философіи.

Пытавшихся излагать физику можно вообще отнести къ тремъ категоріямъ. Прежде всего выдѣляются приписывавшіе разнаго рода предметамъ спеціальныя скрытыя качества, отъ которыхъ неизвѣстно какимъ образомъ по ихъ мнѣнію и должно было происходить взаимодѣйствіе отдѣльныхъ тѣлъ. Въ этомъ заключалась сущность схоластическихъ ученій, берущихъ свое начало отъ *Аристотеля* и *Перипатетиковъ*. Они утверждали, что отдѣльныя дѣйствія тѣлъ происходятъ вслѣдствіе особенностей самой ихъ природы, въ чемъ же эти особенности состоятъ, тому они не учатъ, слѣдовательно, въ сущности, они ничему не учатъ. Такимъ образомъ все сводилось къ наименованію отдѣльныхъ предметовъ, а не къ самой сущности дѣла и можно сказать, что ими созданъ философскій языкъ, а не самая философія.

Другіе, отбросивъ напрасное нагроможденіе словъ, надѣялись съ большею пользою затратить свой трудъ. Они утверждали, что все вещество во вселенной однородно и что все различіе видовъ, замѣчаемое въ тѣлахъ, происходитъ отъ нѣкоторыхъ простѣйшихъ и доступныхъ пониманію свойствъ частицъ, составляющихъ тѣла. Восходя, такимъ образомъ, отъ болѣе простого къ болѣе сложному, они были бы правы, если бы они на самомъ дѣлѣ приписали этимъ первичнымъ частицамъ лишь тѣ самыя свойства, которыми ихъ одарила природа, а не какія-либо иныя. Но на дѣлѣ они предоставляютъ себѣ право допускать какія имъ вздумается невѣдомые виды и величины частицъ, неопредѣленныя ихъ расположенія и движенія, а также измышлять различныя неощутимыя жидкости, свободно проникающія черезъ поры тѣлъ и обладающія всемогущею тонкостью и скрытыми движеніями.

Такимъ образомъ они предаются фантазіямъ, пренебрегая истинною сущностью вещей, которая конечно не можетъ быть изыскана обманчивыми предположеніями, когда ее едва удается изслѣдовать при помощи точнѣйшихъ наблюденій. Заимствующіе основанія своихъ разсужденій изъ гипотезъ, даже если бы все дальнѣйшее было ими развито точнѣйшимъ образомъ на основаніи законовъ механики, создали бы весьма изящную и красивую басню, но все же лишь басню.

Остается третья категорія — это тѣ, кто является послѣдователями экспериментальной философіи (т.-е. экспериментальнаго метода при изслѣдованіи явленій природы). Они также стремятся вывести причины всего сущаго изъ возможно простыхъ началъ, но они ничего не принимаютъ за начало, какъ только то, что подтверждается совершающимися явленіями. Они не измышляютъ гипотезъ и не вводятъ ихъ въ физику иначе какъ въ видѣ предположеній, коихъ справедливость подлежитъ изслѣдованію. Такимъ образомъ они пользуются двумя методами: аналитическимъ и синтетическимъ. Силы природы и простѣйшіе законы ихъ дѣйствія они выводятъ аналитически изъ какихъ-либо избранныхъ явленій и затѣмъ синтетически получаютъ законы остальныхъ явленій. Вотъ этотъ-то самый лучшій способъ изслѣдованія природы и принятъ преимущественно передъ прочими нашимъ знаменитѣйшимъ авторомъ. Лишь къ этому методу онъ счелъ достойнымъ приложить свои труды для его усовершенствованія и развитія. Онъ же далъ и знаменитѣйшій примѣръ приложенія этого метода, выведя счастливѣйшимъ образомъ изъясненіе системы міра изъ теоріи тяготѣнія. Уже и другими предполагалось или подозрѣвалось существованіе тяготѣнія какъ общаго свойства тѣлъ, но лишь онъ первый и одинъ изъ всѣхъ смогъ доказать его существованіе на основаніи совершающихся явленій и положить въ основу для самыхъ возвышенныхъ изысканій.

Мнѣ конечно извѣстны лица съ видными именами, которыя, страдая нѣкоторыми предразсудками, неохотно соглашаются съ этимъ новымъ началомъ и невѣдомому отдаютъ предпочтеніе передъ твердо установленнымъ. Я не имѣю въ виду вредить ихъ славѣ, а хочу лишь все изложить вкратцѣ, чтобы ты самъ, благосклонный читатель, могъ себѣ составить справедливое сужденіе объ этомъ дѣлѣ.

Чтобы начать разсужденіе съ простѣйшаго и доступнѣйшаго, разсмотримъ въ общихъ чертахъ какова природа силы тяжести на землѣ, чтобы затѣмъ съ бо́льшею увѣренностью перейти къ тѣламъ небеснымъ, столь далеко отъ насъ отстоящимъ. Всѣ философы согласны съ тѣмъ, что всѣ земныя тѣла тяготѣютъ къ землѣ. Уже давно подтверждено многочисленными опытами, что не существуетъ истинно легкихъ тѣлъ. То, что обычно называется легкостью, не есть истинная легкость, а лишь относительная, кажущаяся, происходящая отъ преобладающей тяжести тѣлъ окружающихъ.

Далѣе, если всѣ тѣла тяготѣютъ къ землѣ, то и земля равнымъ образомъ тяготѣетъ ко всѣмъ тѣламъ. Что тяготѣніе между землею и тѣлами есть дѣйствіе взаимное и соотвѣтственно равное, обнаруживается слѣдующимъ разсужденіемъ. Вообразимъ, что весь объемъ земли подраздѣленъ на двѣ какія бы то ни было части, равныя или неравныя между собою, тогда, если бы ихъ тяготѣнія другъ къ другу не были бы между собою равны, то меньшее уступило бы бо́льшему и по соединеніи частей онѣ стали бы двигаться по прямой линіи, уходя въ безконечность, въ ту сторону, куда направлено бо́льшее усиліе, что совершенно противорѣчитъ опыту. Такимъ образомъ тяготѣнія частей другъ къ другу взаимно уравновѣшиваются, т.-е. дѣйствія тяготѣнія взаимны и между собою равны.

Вѣса тѣлъ, равноотстоящихъ отъ центра земли, относятся между собою какъ количества матеріи или массы тѣлъ. Объ этомъ заключаютъ по равенству ускоренія всѣхъ падающихъ подъ дѣйствіемъ вѣса тѣлъ, ибо силы, сообщающія неравнымъ массамъ равныя ускоренія, должны быть пропорціональны массамъ, приводимымъ въ движеніе. Равенство же ускореній всѣхъ падающихъ тѣлъ слѣдуетъ изъ того, что въ *Бойлевой* пустотѣ, т.-е. когда сопротивленіе воздуха устранено, всѣ падающія тѣла проходятъ въ равныя времена равныя пространства. Болѣе же точно это подтверждается опытами надъ маятниками.

Притягательныя силы тѣлъ при равныхъ разстояніяхъ пропорціональны массамъ тѣлъ. Въ самомъ дѣлѣ, какъ тѣла землею, такъ обратно и земля тѣлами притягиваются съ равными усиліями, т.-е. вѣсъ земли на каждомъ изъ этихъ тѣлъ въ отдѣльности, иначе та сила, съ которою земля притягивается этимъ тѣломъ, равенъ вѣсу самого этого тѣла на землѣ, этотъ же вѣсъ пропорціоналенъ массѣ тѣла, слѣдовательно, и та сила, съ которою каждое отдѣльное тѣло притягиваетъ землю, иначе, абсолютная притягательная сила тѣла пропорціональна его массѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что притягательная сила всего тѣла происходитъ и слагается изъ притягательныхъ силъ его частицъ, и когда увеличивается или уменьшается количество вещества, то въ той же пропорціи надлежитъ увеличивать или уменьшать и его притягательную способность. Итакъ, дѣйствіе земли должно разсматривать какъ состоящее изъ дѣйствій отдѣльныхъ частицъ ея, слѣдовательно, и всѣ земныя тѣла взаимно притягиваются съ абсолютными силами, пропорціональными массѣ притягивающаго тѣла. Такова природа силы тяжести на землѣ, разсмотримъ, какова она въ небесномъ пространствѣ.

Всѣми философами признается какъ общій законъ природы, что всякое тѣло удерживаетъ свое состояніе покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія пока оно не будетъ вынуждено приложенными къ нему силами измѣнить это состояніе. Отсюда непосредственно слѣдуетъ, что тѣла, движущіяся по кривымъ линіямъ, т.-е. такъ, что они непрерывно уклоняются отъ прямолинейныхъ касательныхъ къ своимъ орбитамъ, побуждаются совершать свой криволинейный путь какою-либо постоянно дѣйствующей силою. Такъ какъ планеты обращаются по орбитамъ криволинейнымъ, то необходимо существованіе нѣкоторой силы, повторными дѣйствіями которой онѣ непрестанно уклоняются отъ касательныхъ.

Но признаніе этого равносильно признанію и того, что отсюда выводится математическими разсужденіями и что точнѣйшимъ образомъ доказывается, а именно: всякое тѣло, движущееся по какой-либо лежащей въ плоскости кривой такъ, что радіусомъ, проводимымъ къ точкѣ, находящейся въ покоѣ или движущейся какъ бы то ни было, описываются площади, пропорціональныя временамъ, находится подъ дѣйствіемъ силы, направленной къ сказанной точкѣ. Астрономами установлено, что главныя планеты около солнца, спутники же около своихъ главныхъ описываютъ площади, пропорціональныя временамъ, изъ этого слѣдуетъ, что та сила, которая ихъ уклоняетъ отъ прямолинейныхъ касательныхъ и вынуждаетъ описывать криволинейныя орбиты, направлена къ тому тѣлу, которое находится въ центрѣ орбиты. Этой силѣ можетъ быть придаваемо подходящее наименованіе:—по отношенію къ движущемуся тѣлу ее можно назвать центростремительной, по отношенію къ центральному тѣлу притягательной, независимо отъ того, какой бы причинѣ ея происхожденіе ни приписывалось.

Затѣмъ необходимо признать также, какъ доказанное математически, что если нѣсколько тѣлъ обращается равномѣрно по концентрическимъ кругамъ и квадраты временъ обращенія пропорціональны кубамъ разстояній этихъ тѣлъ отъ общаго центра орбитъ, то центростремительныя силы обратно пропорціональны квадратамъ разстояній.

Далѣе, если тѣла обращаются по орбитамъ лишь близкимъ къ круговымъ и вершины (апсиды) орбитъ неподвижны, то опять-таки центростремительныя силы обратно пропорціональны квадратамъ разстояній. Всѣ астрономы согласны между собою въ томъ, что оба эти свойства имѣютъ мѣсто для всѣхъ планетъ.

Такимъ образомъ — центростремительныя силы для всѣхъ планетъ обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до центровъ орбитъ. Если кто возразитъ, что для планетъ, въ особенности же для луны, апсиды не находятся вполнѣ въ покоѣ, но медленно перемѣщаются, то можно отвѣтить, что если принять это медленное перемѣщеніе во вниманіе, то окажется, что центростремительная сила дѣйствительно отступаетъ отъ обратной пропорціональности второй степени разстояній. Это отступленіе можетъ быть найдено математически и окажется весьма незначительнымъ. Такъ даже для луны, для которой оно наибольшее, оно едва повышаетъ вторую степень, пропорціональность силы къ которой въ шестьдесятъ разъ ближе нежели къ третьей. Но болѣе правиленъ другой отвѣтъ, именно: что перемѣщеніе апсидъ происходитъ не отъ отступленія силы отъ обратной пропорціональности второй степени разстоянія, а отъ разнаго рода иныхъ причинъ, что и устанавливается превосходнѣйшимъ образомъ въ этомъ сочиненіи. Слѣдовательно, центростремительныя силы, которыми главныя планеты притягиваются къ солнцу, а спутники къ своимъ главнымъ въ точности обратно пропорціональны квадратамъ разстояній.

Итакъ, въ сказанномъ до сихъ поръ установлено, что планеты удерживаются на своихъ орбитахъ нѣкоторою силою, на каждую изъ нихъ постоянно дѣйствующею, что эта сила направлена къ центру орбиты, что ея напряженіе возрастаетъ при приближеніи къ центру и убываетъ при удаленіи отъ него, и что это возрастаніе происходитъ въ той пропорціи, въ какой убываетъ квадратъ разстоянія, и убываніе силы — въ той пропорціи, въ какой квадратъ разстоянія растетъ. Посмотримъ же теперь, дѣлая сравненіе между центростремительными силами планетъ и силою тяжести, одного ли онѣ рода или нѣтъ. Эти силы будутъ одного рода, если обладаютъ одинаковыми свойствами и слѣдуютъ тѣмъ же самымъ законамъ. Разсмотримъ прежде всего центростремительную силу луны, которая есть ближайшее къ намъ небесное тѣло.

Прямолинейныя пространства, проходимыя тѣлами, пущенными изъ состоянія покоя, въ теченіе заданнаго промежутка времени подъ дѣйствіемъ какихъ бы то ни было силъ, пропорціональны этимъ силамъ, — это слѣдуетъ изъ математическихъ разсужденій. Такимъ образомъ центростремительная сила луны, обращающейся по своей орбитѣ, будетъ такъ относиться къ силѣ тяжести на поверхности земли, какъ пространство, проходимое въ теченіе весьма малаго промежутка времени луною, подъ дѣйствіемъ центростремительной силы при ея паденіи по направленію къ землѣ, вообразивъ, что она лишена кругового движенія, относится къ пространству, проходимому въ теченіе того же малаго промежутка времени тяжелымъ тѣломъ, падающимъ близь поверхности земли подъ дѣйствіемъ своего вѣса. Первое изъ этихъ пространствъ равно синусъ-верзусу дуги, описанной луною за разсматриваемый промежутокъ времени, этимъ и опредѣлится уклоненіе луны отъ касательной, производимое центростремительной силой, и его можно вычислить, зная время обращенія луны и разстояніе ея до центра земли. Второе изъ сказанныхъ пространствъ находится при помощи опытовъ надъ маятниками, какъ это показано Гюйгенсомъ. По производствѣ такого разсчета оказывается, что отношеніе перваго пространства ко второму, иначе центростремительной силы луны, обращающейся по своей орбитѣ къ силѣ тяжести у поверхности земли, равно отношенію квадрата полудіаметра земли къ квадрату полудіаметра орбиты луны. Но таково же отношеніе, какъ это слѣдуетъ изъ изложеннаго выше, и центростремительной силы луны, обращающейся по своей орбитѣ къ таковой же силѣ при движеніи луны у самой поверхности земли. Центростремительная сила у поверхности земли оказывается, такимъ образомъ, равной силѣ тяжести. Слѣдовательно, это не двѣ различныя силы, а та же самая сила, ибо, если бы онѣ были различными, то подъ совокупнымъ ихъ дѣйствіемъ тѣла падали бы на землю вдвое скорѣе, нежели подъ дѣйствіемъ одной только силы тяжести. Такимъ образомъ установлено, что центростремительная сила, которою луна постоянно отклоняется отъ касательной къ своей орбитѣ и вынуждается описывать эту орбиту, есть сила тяжести земли, распространяющаяся до луны.

Распространеніе этой силы на огромныя разстоянія согласуется и съ здравымъ смысломъ, такъ какъ незамѣтно какого-либо ея уменьшенія на вершинахъ даже самыхъ высокихъ горъ. Итакъ, луна тяготѣетъ къ землѣ, значитъ, въ виду взаимности этого дѣйствія и земля съ равною силою тяготѣетъ къ лунѣ; все это обстоятельно доказывается въ разсматриваемомъ сочиненіи, тамъ, гдѣ говорится о приливахъ моря и о предвареніи равноденствій, происходящихъ отъ дѣйствія на землю луны и солнца. Отсюда мы непосредственно заключимъ, по какому закону сила тяжести убываетъ съ возрастаніемъ разстоянія до земли. Дѣйствительно, такъ какъ сила тяжести не отличается отъ центростремительной силы луны, эта же послѣдняя обратно пропорціональна квадратамъ разстояній, то и сила тяжести уменьшается въ томъ же отношеніи.

Перейдемъ теперь къ прочимъ планетамъ. Такъ какъ обращеніе главныхъ планетъ около солнца и обращеніе спутниковъ около Юпитера и Сатурна суть явленія того же рода, какъ и обращеніе луны около земли, то уже доказано, что центростремительныя силы главныхъ планетъ направлены къ центру солнца, а спутниковъ—къ центрамъ Юпитера и Сатурна, подобно тому, какъ эта сила для луны направлена къ центру земли; затѣмъ, такъ какъ, всѣ эти силы обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до центровъ, подобно тому, какъ сила луны обратно пропорціональна квадратамъ разстояній до земли, то необходимо заключить, что всѣ эти силы одной всеобщей природы. Значитъ, какъ луна тяготѣетъ къ землѣ и, обратно, земля къ лунѣ, такъ и всѣ спутники тяготѣютъ къ своимъ главнымъ планетамъ и обратно, главныя планеты къ своимъ спутникамъ, и, наконецъ, всѣ главныя планеты — къ солнцу и солнце къ нимъ.

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ планеты тяготѣютъ къ солнцу и солнце къ нимъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ главныя планеты сопровождаются своими спутниками, то и эти послѣдніе обращаются вокругъ солнца вмѣстѣ съ своими главными, изъ чего и слѣдуетъ, что всякаго рода планеты тяготѣютъ къ солнцу и солнце къ нимъ. Тяготѣніе спутниковъ къ солнцу обстоятельно устанавливается кромѣ этого еще по неравенствамъ въ движеніи луны, которыхъ точнѣйшая теорія, открытая съ удивительною проницательностью, излагается въ третьей книгѣ этого сочиненія.

Распространеніе притягательной силы солнца по всѣмъ направленіямъ на огромныя разстоянія и разсѣяніе ея по всѣхъ частямъ окружающаго его пространства можетъ быть съ ясностью выведено по движенію кометъ, которыя, приходя съ громадныхъ разстояній, доносятся въ сосѣдство съ солнцемъ, иногда настолько близко, что при прохожденіи черезъ перигелій почти касаются поверхности солнца.

Теоріею этихъ свѣтилъ, которую до сихъ поръ тщетно изыскивали астрономы, точнѣйшимъ образомъ подтверждаемую наблюденіями, мы обязаны нашему знаменитѣйшему автору, счастливо ее открывшему. Оказывается, что кометы движутся по коническимъ сѣченіямъ съ фокусомъ въ центрѣ солнца, такъ что радіусы, проводимые въ эту точку, описываютъ площади пропорціональныя временамъ. Изъ этого явленія слѣдуетъ и выводится математически, что силы, удерживающія кометы на ихъ орбитахъ, направлены къ солнцу и обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до его центра. Такимъ образомъ кометы тяготѣютъ къ солнцу и, слѣдовательно, притягательная сила солнца достигаетъ не только до планетъ на извѣстныя разстоянія и приблизительно въ одной плоскости, но распространяется и на кометы въ самыя разнообразныя области небеснаго пространства и на самыя разнообразныя разстоянія. Слѣдовательно, природа тяготѣющихъ тѣлъ такова, что ихъ силы источаются на всякія разстоянія и дѣйствуютъ на всѣ тяготѣющія тѣла, и всѣ планеты и кометы взаимно притягиваются и тяготѣютъ другъ къ другу. Это подтверждается также небезъизвѣстными астрономамъ возмущеніями Юпитера и Сатурна, происходящими отъ ихъ взаимодѣйствія, а также упомянутымъ выше медленнымъ движеніемъ апсидъ, происходящимъ отъ подобной же причины.

Итакъ, можно утверждать, что земля и солнце и всѣ небесныя тѣла, сопровождающія солнце взаимно притягиваются.

Отсюда слѣдуетъ, что и отдѣльныя малѣйшія частицы обладаютъ также притягательными силами, пропорціональными ихъ массамъ, какъ это было показано для тѣлъ земныхъ. Эти силы также будутъ обратно пропорціональны квадратамъ разстояній, ибо математически доказывается, что шары, составленные изъ частицъ, притягивающихся по этому закону, притягиваются по такому же закону.

Предыдущія заключенія основаны на аксіомахъ, которыя не отрицаются ни однимъ философомъ, а именно, что одинаковыя слѣдствія, т.-е. такія, коихъ извѣстныя свойства одинаковы, происходятъ и отъ одинаковыхъ причинъ, и что неизвѣстныя ихъ свойства также одинаковы. Кто, напримѣръ, сомнѣвается въ томъ, что если тяжесть есть причина паденія камня въ *Европѣ*, то такова же причина паденія и въ *Америкѣ*, что если тяготѣніе между камнемъ и землею взаимно въ *Европѣ*, то кто станетъ отрицать, что оно взаимно и въ *Америкѣ?* Если сила притяженія камня и земли слагается въ *Европѣ* изъ силъ притяженія отдѣльныхъ частицъ этихъ тѣлъ, то кто станетъ отрицать, что эта сила также слагается и въ *Америкѣ?* Если притяженіе земли на всякія тѣла распространяется въ Европѣ на всякое разстояніе, то почему бы ему не распространяться также и въ Америкѣ?

На этомъ правилѣ основана вся философія и если его устранить, то ничего нельзя будетъ утверждать вообще. Наблюденіями и опытами познается строеніе отдѣльныхъ вещей, лишь руководствуясь этимъ правиломъ, мы дѣлаемъ заключенія о природѣ вещей вообще.

Такъ какъ всѣ тѣла, находящіяся на землѣ или въ небесныхъ пространствахъ, относительно которыхъ возможно поставить или опыты, или наблюденія, тяготѣютъ взаимно, то можно утверждать, что тяготѣніе есть общее свойство всѣхъ тѣлъ. Подобно тому, какъ нельзя представить себѣ тѣла, которое бы не было протяженнымъ, подвижнымъ и непроницаемымъ, такъ нельзя себѣ представить и тѣла, которое бы не было тяготѣющимъ, т.-е. тяжелымъ.

Если кто станетъ утверждать, что тѣла, составляющія неподвижныя звѣзды, не тяготѣющія, ибо ихъ тяготѣніе не было наблюдаемо, то разсуждая такъ же слѣдовало бы сказать, что эти тѣла и не протяженны и что они не обладаютъ ни подвижностью, ни непроницаемостью, ибо и эти свойства для неподвижныхъ звѣздъ никѣмъ наблюдаемы не были. Что же изъ этого слѣдуетъ?—Или что въ числѣ общихъ свойствъ тѣлъ находится и тяготѣніе, или же, что протяженность, подвижность и непроницаемость также не находятся въ ихъ числѣ, и, слѣдовательно, или, что природа вещей правильно объясняется тяготѣніемъ тѣлъ, или же, что она неправильно объясняется и протяженностью, подвижностью и непроницаемостью.

Я слышу, какъ нѣкоторые осуждаютъ это заключеніе и невѣдомо что бормочатъ о скрытыхъ свойствахъ. Они постоянно твердятъ, что тяготѣніе есть скрытое, сокровенное свойство, скрытымъ же свойствамъ не мѣсто въ философіи. На это легко отвѣтить: сокровенны не тѣ причины, коихъ существованіе обнаруживается наблюденіями съ полнѣйшею ясностью, а лишь тѣ, самое существованіе которыхъ неизвѣстно и ничѣмъ не подтверждается.

Слѣдовательно, тяготѣніе не есть скрытая причина движенія небесныхъ тѣлъ, ибо явленія показываютъ, что эта причина существуетъ на самомъ дѣлѣ. Правильнѣе признать, что къ скрытымъ причинамъ прибѣгаютъ тѣ, кто законы этихъ движеній приписываетъ невѣдомо какимъ вихрямъ нѣкоторой чисто воображаемой матеріи совершенно непостижимой чувствами.

Но можетъ быть тяготѣніе слѣдуетъ признать скрытой причиной и исключить изъ философіи потому, что причина самого тяготѣнія неизвѣстна и никѣмъ не найдена. Кто разсуждаетъ такимъ образомъ, долженъ озаботиться, чтобы не впасть въ такое противорѣчіе, которое рушитъ основанія всей философіи. Причины идутъ неразрывною цѣпью отъ сложнѣйшихъ къ простѣйшимъ и когда достигли до причины самой простой, то далѣе идти некуда. Поэтому простѣйшей причинѣ нельзя дать механическаго объясненія, ибо если бы таковое существовало, то эта причина не была бы простѣйшею. Поэтому если простѣйшія причины называть сокровенными и исключать, то придется исключать и непосредственно отъ нихъ зависящія, затѣмъ и происходящія отъ этихъ послѣднихъ, пока философія окажется свободной и очищенной отъ всякихъ причинъ вообще.

Есть и такое ученіе, въ которомъ утверждаютъ, что тяготѣніе сверхъестественно и называютъ его непрерывнымъ чудомъ, и поэтому считаютъ, что его надо отбросить, ибо въ физикѣ не мѣсто сверхъестественному. Едва ли стоитъ затрачивать трудъ, чтобы опровергать такую нелѣпость, которая низвергаетъ всякую философію вообще. По такому ученію придется или отрицать, что тяготѣніе присуще тѣламъ, чего, однако, утверждать нельзя, или же придется называть это свойство тѣлъ сверхъестественнымъ, ибо его нельзя вывести ни изъ другихъ ихъ свойствъ, ни изъ механическихъ причинъ.

Но непремѣнно должны существовать нѣкоторыя первоначальныя свойства тѣлъ и, слѣдовательно, какъ таковыя, не вытекающія изъ другихъ. Значитъ и всѣ такія свойства пришлось бы считать сверхъестественными и отбросить, спрашивается, какая же послѣ того останется философія?

Нѣкоторымъ вся эта небесная физика еще менѣе нравится, ибо она противорѣчитъ *Декартовымъ* догматамъ и едва ли можетъ быть съ ними согласована. Пусть они остаются при своемъ мнѣніи, но пусть они будутъ справедливы и предоставятъ другимъ такую же свободу, какую они желаютъ, чтобы была предоставлена имъ. Пусть же намъ будетъ предоставлено право придерживаться *Ньютоновой* философіи, которую мы считаемъ болѣе правильной, и признавать истинными причины, подтверждаемыя явленіями, а не такія, которыя выдумываются и ничѣмъ не подтверждаются.

Истинной философіи подобаетъ выводить природу вещей изъ причинъ дѣйствительно существующихъ и изыскивать тѣ законы, которыми Великій творецъ установилъ прекраснѣйшій порядокъ сего міра, а не тѣ, которыми онъ могъ бы это сдѣлать, если бы того пожелалъ. Разумъ допускаетъ, что то же самое слѣдствіе можетъ происходить и отъ нѣсколькихъ причинъ, различныхъ одна отъ другой; но лишь та причина истинная, отъ которой эти слѣдствія на самомъ дѣлѣ происходятъ, прочимъ же нѣтъ мѣста въ истинномъ ученіи о природѣ. Въ часахъ движеніе стрѣлокъ можетъ происходить или отъ подвѣшенныхъ гирь, или отъ заключенной внутри пружины. Если бы кто принялъ часы съ гирями за пружинные и на основаніи этого поспѣшнаго заключенія, сталъ бы объяснять движеніе стрѣлокъ, то его бы осмѣяли. Сперва надлежало бы тщательно изслѣдовать внутреннее устройство машины, чтобы опредѣлить истинное начало производимыхъ ею движеній. Развѣ не слѣдуетъ вынести подобнаго же сужденія о тѣхъ философахъ, которые предполагаютъ, что небесное пространство заполнено тончайшею матеріею, находящеюся въ непрестанномъ вихревомъ движеніи. Если бы имъ даже удалось точнѣйшимъ образомъ удовлетворить своими гипотезами совершающимся явленіямъ, то и тогда нельзя было бы утверждать, что они излагаютъ истинное ученіе о природѣ, и что ими найдена истинная причина движенія небесныхъ тѣлъ, пока они бы не доказали, что предполагаемое ими дѣйствительно существуетъ или, по крайней мѣрѣ, что другого ничего не существуетъ. Поэтому, послѣ того, какъ показано, что тяготѣніе дѣйствительно имѣетъ мѣсто въ природѣ, и послѣ того, какъ показано какимъ образомъ отъ него происходитъ движеніе всѣхъ небесныхъ тѣлъ, то совершенно напрасно и заслуживаетъ лишь осмѣянія возраженіе, что тѣ же движенія слѣдуетъ еще объяснить и вихрями, если бы даже такое объясненіе и оказалось возможнымъ, чего мы, однако, совершенно не допускаемъ.

Мы не допускаемъ возможности объяснить совершающіяся явленія вихрями, потому что это нашимъ авторомъ доказано съ совершеннѣйшею ясностью и полнотою, и надо обладать большою склонностью къ бреднямъ, чтобы напрасно затрачивать трудъ на подновленіе нелѣпѣйшей выдумки и на украшеніе ея новыми поясненіями [3]).

---

[3]) Рѣзкая полемика и всѣ выпады Котеса противъ вихрей направлены не столько противъ *Декарта*, какъ противъ *Лейбница*, который напечаталъ

Если планеты и кометы переносятся вокругъ солнца вихрями, необходимо, чтобы переносимыя тѣла и прилегающія къ нимъ части вихрей, двигались бы съ одинаковыми скоростями и по одинаковымъ направленіямъ и чтобы онѣ обладали одинаковою плотностью, иначе, равными массами при равныхъ объемахъ матеріи. Но установлено, что планеты и кометы при прохожденіи черезъ тѣ же самыя области небеснаго пространства, движутся съ различными скоростями и по различнымъ направленіямъ. Отсюда вытекаетъ необходимое слѣдствіе, что части заполняющей небесныя пространства жидкости, находящіяся въ одинаковомъ удаленіи отъ солнца, несутся въ то же самое время по разнымъ направленіямъ съ различными скоростями, ибо одни направленія и скорости необходимы для переноса планетъ, другія для переноса кометъ. Такъ какъ этого быть не можетъ, то или надо признать, что небесныя тѣла не переносятся матеріей вихрей, или же надо сказать, что ихъ движенія производятся не однимъ и тѣмъ же вихремъ, а многими различными другъ отъ друга, которые блуждаютъ по тому же пространству вокругъ солнца. Спрашивается, если множество вихрей заключается въ томъ же самомъ пространствѣ и эти вихри проникаютъ другъ черезъ друга и обладаютъ разнообразными движеніями, ибо ихъ движенія должны соотвѣтствовать движеніямъ переносимыхъ ими тѣлъ, движеніямъ, совершающимся по коническимъ сѣченіямъ съ чрезвычайною правильностью и притомъ то весьма растянутымъ, то весьма близкимъ къ кругу, то какъ же можетъ быть, что эти вихри сохраняютъ свою цѣлость и въ теченіе вѣковъ не претерпѣваютъ никакихъ возмущеній отъ столкновеній со встрѣчаемой ими матеріей?

Очевидно, что эти вымышленныя движенія вихрей гораздо сложнѣе

въ 1689 году, т.-е. черезъ два года послѣ изданія Ньютоновыхъ Началъ, статью подъ заглавіемъ «Tentamen... astronomiae»... Въ этой статьѣ онъ объясняетъ движеніе небесныхъ тѣлъ не только дѣйствіемъ силы, направленной къ солнцу, но еще и переносомъ ихъ жидкостью, движущейся вмѣстѣ съ ними. Лейбницъ затѣмъ неоднократно возвращался къ этому вопросу, упорствуя въ своемъ заблужденіи. Надо также имѣть въ виду, что второе изданіе «Началъ», редактированное Котесомъ, совпало по времени съ самымъ разгаромъ спора между Ньютономъ и Лейбницемъ объ открытіи исчисленія безконечно малыхъ или метода флюксій по терминологіи Ньютона и дифференціальнаго исчисленія по терминологіи Лейбница.

Въ 1712 году были изданы: «Обмѣнъ письмами»—Commercium epistolicum и «Рецензія» этой книги въ Philosophical Transactions, причемъ послѣдняя была признана Лейбницемъ особенно для него обидной. Обративъ вниманіе на слогъ этой неподписанной рецензіи и сравнивая его съ предисловіемъ къ Началамъ, можно думать, что «рецензія» написана также Котесомъ, тѣмъ болѣе, что нѣкоторыя разсужденія почти буквально повторены и въ предисловіи. Во всякомъ случаѣ, нападки Котеса въ этомъ предисловіи достигли цѣли: въ письмѣ къ аббату Conti отъ 9 апр. 1716 г. Лейбницъ, между прочимъ, пишетъ: «Soit qu'on regarde la préface plaine d'aigreur qu'un autre a mise devant la nouvelle edition de ses Principes»...

Commercium epistolicum, стр. 243, изданіе Briot, 1856 г.

и ихъ гораздо труднѣе объяснить, нежели дѣйствительныя движенія планетъ и кометъ, и мнѣ кажется, что напрасно и вводить ихъ въ философію, такъ какъ всякая причина должна быть проще своего слѣдствія.

Допустимъ свободное пользованіе баснями и пусть кто-либо станетъ утверждать, что всѣ планеты и кометы окружены атмосферами, подобными земной, такое предположеніе представляется гораздо болѣе обоснованнымъ, нежели гипотеза вихрей; затѣмъ онъ станетъ утверждать, что эти атмосферы, по самой своей природѣ, движутся вокругъ солнца и описываютъ коническія сѣченія; очевидно, что такое движеніе гораздо легче себѣ представить, нежели движеніе проникающихъ другъ черезъ друга вихрей, и наконецъ, что планеты и кометы переносятся своими атмосферами вокругъ солнца. Послѣ этого онъ станетъ торжествовать открытіе причины движенія небесныхъ тѣлъ. Кто не согласенъ съ этою баснею, долженъ отвергнуть и басню о вихряхъ, ибо яйцо съ яйцомъ менѣе схоже, чѣмъ гипотеза атмосферъ съ гипотезою вихрей.

Галилей показалъ, что отклоненіе брошеннаго и движущагося по параболѣ камня отъ прямолинейнаго пути происходитъ отъ тяготѣнія камня къ землѣ, т.-е. отъ скрытой причины. Можетъ случиться, что какой-либо другой, болѣе проницательный философъ измыслитъ другую причину. Онъ придумаетъ, что нѣкоторая матерія, не постигаемая ни зрѣніемъ, ни ощущеніемъ, вообще никакими чувствами, заполняетъ пространство, смежное съ поверхностью земли, что эта матерія обладаетъ по различнымъ направленіямъ различными, зачастую противоположными движеніями по параболическимъ линіямъ. Послѣ этого онъ подъ одобреніе толпы такъ объяснитъ отклоненіе камня: движущійся камень плаваетъ въ этой тончайшей жидкости и, слѣдуя ея теченію, не можетъ описывать иного пути, жидкость же движется по параболамъ, слѣдовательно, и камень долженъ двигаться по параболѣ. Кто же послѣ этого не будетъ удивляться остротѣ ума этого философа, объясняющаго механическими причинами, т.-е. матеріей и движеніемъ явленія природы совершенно понятно даже для неученыхъ? Кто же не пожалѣетъ этого простака *Галилея*, который послѣ большихъ математическихъ усилій ввелъ лишь вновь скрытыя свойства, отъ которыхъ философія столь счастливо была избавлена. Однако, стыдно продолжать еще дальше заниматься вздоромъ.

Сущность дѣла состоитъ въ слѣдующемъ: число кометъ громадно, движенія ихъ весьма правильны и слѣдуютъ тѣмъ же законамъ, какъ и движенія планетъ. Онѣ движутся по коническимъ сѣченіямъ и орбиты ихъ весьма растянуты, поэтому онѣ проносятся по всѣмъ частямъ небеснаго пространства и свободно проходятъ черезъ области планетъ, часто попятнымъ движеніямъ. Эти явленія, подтверждаемыя точнѣйшими астрономическими наблюденіями, не могутъ быть объяснены вихрями и никоимъ образомъ не могутъ быть совмѣстными съ планетными вихрями. Вообще движенія кометъ не могутъ имѣть мѣста иначе, какъ, если эта измышленная матерія вихрей не будетъ совершенно удалена изъ небеснаго пространства.

Въ самомъ дѣлѣ, если планеты переносятся вокругъ солнца вихрями, то части вихрей, расположенныя въ смежности съ какою-нибудь планетою, должны быть одной съ нею плотности, какъ уже сказано выше. Такимъ образомъ вся матерія, расположенная по орбитѣ земли, должна имѣть ту же плотность, какъ земля, та же матерія, которая лежитъ между орбитою земли и орбитою Сатурна, должна имѣть или такую же плотность, или бо́льшую, ибо для того, чтобы строеніе вихря могло сохраняться, необходимо, чтобы менѣе плотныя части были ближе къ центру, болѣе плотныя дальше отъ центра. Такъ какъ времена обращенія планетъ находятся въ полукубическомъ отношеніи ихъ разстояній до солнца, то и времена обращенія вихрей должны быть въ такомъ же отношеніи. Отсюда слѣдуетъ, что центробѣжныя силы этихъ частей должны быть обратно пропорціональны квадратамъ разстояній; поэтому массы, болѣе удаленныя отъ центра, побуждаются удалиться отъ него съ меньшею силою, слѣдовательно, если ихъ плотность была бы меньшею, то онѣ по необходимости уступили бы той бо́льшей силѣ, съ которою ближайшія къ центру массы стремятся отъ него удалиться. Слѣдовательно, удаляются отъ центра болѣе плотныя части, приближаются къ центру менѣе плотныя и происходитъ ихъ обмѣнъ мѣстами, пока матерія вихря не расположится такимъ образомъ, чтобы она могла оставаться въ относительномъ покоѣ послѣ того, какъ наступитъ равновѣсіе. Если двѣ жидкости разной плотности находятся въ томъ же сосудѣ, то та жидкость, коей плотность больше, подъ дѣйствіемъ большей силы тяжести стремится къ низшему мѣсту, вслѣдствіе подобной же причины болѣе плотныя части вихря, какъ уже сказано, бо́льшею центробѣжною силою побуждаются занять наиболѣе удаленное отъ центра мѣсто. Такимъ образомъ вся и притомъ значительно бо́льшая часть вихря, расположенная снаружи земной орбиты, будетъ обладать плотностью, а значитъ и силою инерціи на каждый объемъ матеріи не меньшею, нежели плотность и сила инерціи земли.

Слѣдовательно, проходящія черезъ вихрь кометы будутъ встрѣчать громадное сопротивленіе, которое и проявилось бы весьма ощутительно, если только оно не оказалось достаточнымъ, чтобы поглотить и прекратить ихъ движеніе.

Чрезвычайно же правильное движеніе кометъ показываетъ, что онѣ не подвержены даже въ малѣйшей степени ощутительному сопротивленію. Отсюда слѣдуетъ, что кометы совершенно не проникаютъ въ такую среду, которая обладала бы какимъ бы то ни было сопротивленіемъ или какою бы то ни было инерціей, ибо сопротивленіе среды происходитъ какъ отъ инерціи матеріи, составляющей жидкость, такъ и отъ вязкости, т.-е. отъ недостатка скользкости жидкости. Сопротивленіе, происходящее отъ вязкости совершенно ничтожно и едва можетъ быть наблюдаемо въ общеизвѣстныхъ жидкостяхъ, если только онѣ не весьма тягучи, какъ масло или медъ. Сопротивленіе, замѣчаемое въ воздухѣ, водѣ, ртути и подобныхъ нетягучихъ жидкостяхъ, почти полностью перваго рода, его нельзя уменьшить, измѣняя какъ угодно степень тонкости жидкости, но сохраняя ея плотность, которой сказанное сопротивленіе всегда пропорціонально. Все это съ совершеннѣйшею ясностью доказывается нашимъ авторомъ въ его превосходнѣйшей теоріи сопротивленія жидкостей, излагаемой въ этомъ второмъ изданіи его сочиненія нѣсколько болѣе полно, нежели въ первомъ и вполнѣ подтверждаемой опытами надъ падающими тѣлами.

Движущіяся тѣла постепенно сообщаютъ свое движеніе окружающей жидкости и вслѣдствіе этой передачи утрачиваютъ свое первоначальное количество движенія и замедляются. Такимъ образомъ замедленіе пропорціонально сообщаемому жидкости количеству движенія, это же послѣднее при заданной скорости движущагося тѣла пропорціонально плотности жидкости, слѣдовательно, какъ замедленіе такъ и сопротивленіе пропорціональны плотности. Такое замедленіе непремѣнно имѣетъ мѣсто, если только теряемое тѣломъ количество движеніе, не возстановляется притекающей къ нему сзади жидкостью. Но такое возстановленіе можетъ быть лишь тогда, когда давленіе жидкости на тѣло сзади будетъ равно давленію тѣла на жидкость спереди, а это можетъ быть лишь въ томъ случаѣ, когда относительная скорость съ которою жидкость ударяетъ тѣло притекая къ нему сзади равна той скорости, съ которою тѣло ударяетъ жидкость своею переднею частью т.-е. надо чтобы абсолютная скорость притекающей сзади жидкости была вдвое больше скорости сообщаемой ей тѣломъ, а этого быть не можетъ. Такимъ образомъ сопротивленіе жидкости происходящее отъ ея плотности и инерціи не можетъ исчезнуть. Отсюда слѣдуетъ заключить, что жидкость заполняющая небесное пространство не обладаетъ инерціей, ибо она не оказываетъ сопротивленія движущимся въ ней тѣламъ; а если у нея нѣтъ инерціи, то нѣтъ и силы, которая могла бы сообщать движеніе, нѣтъ значитъ и силы, которая могла бы производить какое-либо измѣненіе въ отдѣльномъ тѣлѣ или въ нѣсколькихъ тѣлахъ, значитъ у нея нѣтъ и какихъ-либо проявленій своего присутствія, ибо у нея нѣтъ никакой способности произвести какое-либо измѣненіе въ состояніи тѣлъ. Не слѣдуетъ ли поэтому такую гипотезу, которая совершенно лишена обоснованности, которая даже въ малѣйшей степени не можетъ служить къ объясненію явленій природы, признать нелѣпѣйшею и совершенно недостойной философа [4]).

---

[4]) Въ настоящее время Декартова теорія вихрей нетолько совершенно оставлена, но и совершенно забыта въ физикѣ; во времена же Ньютона и еще лѣтъ двадцать послѣ его смерти, ея упорно придерживались, въ особенности Парижская Академія Наукъ. Предложивъ, напр., на премію вопросъ о теоріи приливовъ, она, раздѣляя въ 1740 году эту премію между сочиненіями Даніила Бернулли, Маклорена и Эйлера, строго математическими и основанными на законѣ тяготѣнія, присоединяла къ нимъ и сочиненіе іезуита аббата Cavaleri основанное на картезіанскихъ воззрѣніяхъ, мотивируя свое рѣшеніе тѣмъ, что Академія не признаетъ возможнымъ отдать предпочтеніе которой-либо изъ двухъ системъ Ньютоновой или Декартовой. Декартовское же объясненіе приливовъ основано на предположеніи, что луна оказывая давленіе на атмосферу заставляетъ воду морей

Предполагающіе, что небесное пространство заполнено жидкостью, полагаютъ, слѣдовательно, что эта жидкость не инертна, а тогда отрицая на словахъ существованіе пустого пространства, они на дѣлѣ его допускаютъ, ибо такого рода жидкость никоимъ образомъ не можетъ быть различена отъ пустоты и весь споръ будетъ идти о словахъ а не о сути дѣла. Въ самомъ дѣлѣ, если есть такіе поклонники матеріи, что они совершенно не допускаютъ существованія пустого пространства, то посмотримъ къ какимъ выводамъ они должны придти. Или имъ придется утверждать, что такое строеніе повсюду заполненнаго міра волею Божіею, было установлено для того, чтобы всѣ дѣйствія въ природѣ совершались при посредствѣ этого тончайшаго эфира, все проницающаго и все заполняющаго; но этого утверждать нельзя, ибо, какъ показано выше на основаніи движенія кометъ, присутствіе этого эфира ничѣмъ не проявляется. Или же они скажутъ, что такое строеніе міра установлено волею Божіею неизвѣстно съ какою цѣлью,—но такого утвержденія быть не должно, ибо и всякое другое строеніе міра можетъ совершенно также быть обосновано, или же наконецъ они скажутъ: волею Божіею все такъ создано въ силу необходимости вызываемой самою природою вещей. Но тогда ихъ надо причислить къ отребью того нечестиваго стада, которое думаетъ что міръ управляется рокомъ, а не провидѣніемъ, и что матерія въ силу своей собственной необходимости всегда и вездѣ существовала, что она безконечна и вѣчна. Но если это допустить, то матерія должна бы быть и повсюду однородной, ибо разнообразіе формъ совершенно не вызывается необходимостью, матерія тогда должна бы быть и неподвижною, ибо если бы она по необходимости двигалась бы по какому-нибудь одному направленію съ какою-нибудь скоростью, то по той-же необходимости она должна бы двигаться и по всякому иному направленію со всякою другою скоростью, а такъ какъ одновременное движеніе по разнымъ направленіямъ съ различными скоростями невозможно, то значитъ матерія должна быть неподвижной. Слѣдовательно, міръ отличающійся прекраснѣйшими формами и разнообразіемъ движеній, могъ произойти не иначе какъ только по свободной волѣ все предопредѣляющаго и всѣмъ управляющаго Божества.

Изъ этого источника и проистекли всѣ тѣ свойства, которыя мы называемъ законами природы, въ которыхъ проявлено много величайшей мудрости, но нѣтъ и слѣдовъ необходимости. Поэтому эти законы надо искать не въ сомнительныхъ допущеніяхъ, а распознавать при помощи наблюденій и опытовъ. Если же кто возомнитъ, что онъ можетъ найти истинныя начала физики и истинные законы природы единственно силою своего ума и свѣтомъ своего разсудка, тотъ долженъ будетъ признать или

подниматься; понятно, что всѣ подобныя разсужденія доказывались діалектикою, и тѣмъ не менѣе ихъ противопоставляли Ньютоновскимъ доказательствамъ, наблюденіямъ и разсчетамъ. Отсюда понятна полемика Котеса и его указаніе на склонность противниковъ Ньютоновой философіи къ бреднямъ что міръ произошелъ въ силу необходимости и что существующіе законы природы явились слѣдствіемъ той же необходимости или же, что мірозданіе установлено по волѣ Бога, и что онъ ничтожнѣйшій человѣчишко (homunculus) самъ бы предвидѣлъ все то, что̀ такъ превосходно создано. Всякая здравая и истинная философія должна основываться на изученіи совершающихся явленій, которое, если мы не будемъ упорствовать, приведетъ насъ къ познанію тѣхъ началъ, въ коихъ съ наибольшею ясностью проявляются высочайшая мудрость и всемогущество всемудрѣйшаго и всемогущаго Творца. Поэтому нельзя отвергать этихъ началъ въ силу того, что нѣкоторымъ людямъ они не нравятся. Эти начала можно называть или чудесами, или скрытыми свойствами, какъ кому угодно,—насмѣшливыя названія не обращаются въ недостатки самого дѣла. Или же придется признать, что философія должна основываться на безбожіи. Ради такихъ людей не стоитъ портить философіи,—порядокъ мірозданія все равно не измѣнится.

Честные и справедливые судьи сами отдадутъ предпочтеніе тому наилучшему способу изслѣдованія природы, который основанъ на опытахъ и наблюденіяхъ. Дѣйствительно, едва ли можно передать словами сколько свѣта, сколько величія въ этомъ превосходномъ сочиненіи нашего знаменитѣйшаго автора. Его величайшій и счастливѣйшій геній разрѣшилъ такія труднѣйшія задачи и достигъ до такихъ предѣловъ, что не было и надежды, что человѣческій умъ въ состояніи до нихъ возвыситься; все это по достоинству составляетъ предметъ восхищенія и преклоненія всѣхъ тѣхъ, кто хотя немного поглубже вникнетъ въ эти изслѣдованія. Такимъ образомъ двери отворены и намъ предоставленъ доступъ къ познанію прекраснѣйшихъ тайнъ природы. Авторомъ открыто и представлено изящнѣйшее строеніе системы міра и если бы теперь вновь ожилъ король *Альфонсъ*, то онъ едва ли бы пожелалъ въ ней большей простоты и стройности. Теперь мы въ состояніи ближе разсматривать величіе природы и предаваясь сладостному созерцанію, въ большей степени преклоняться и почитать Творца и Господа вселенной, а это и есть истинный плодъ философіи. Надо быть слѣпымъ, чтобы изъ прекраснѣйшаго и мудрѣйшаго строенія міра не усмотрѣть величайшей мудрости и благости всемогущаго Творца,—надо быть безумцемъ чтобы этого не признавать.

Поэтому, превосходнѣйшее сочиненіе Ньютона представляетъ вѣрнѣйшую защиту противъ нападокъ безбожниковъ и нигдѣ не найти лучшаго оружія противъ нечестивой шайки, какъ въ этомъ колчанѣ.

Это прежде всего оцѣнилъ и доказалъ въ своихъ ученыхъ рѣчахъ, изданныхъ на англійскомъ и латинскомъ языкахъ, знаменитѣйшій *Ричардъ Бэнтлей*, весьма свѣдущій во всякаго рода наукахъ и ревностный покровитель искусствъ, украшеніе нашего вѣка и нашей Академіи, Коллегіи *Св. Троицы* достойнѣйшій и полновластнѣйшій начальникъ. Ему я весьма многимъ обязанъ, не откажи и ты, благосклонный читатель, ему въ своей благодарности. Онъ съ давнихъ поръ пользовался искреннею дружбою нашего знаменитаго автора (и онъ настолько ее цѣнитъ, что въ своихъ сочиненіяхъ составляющихъ радость ученаго міра, дѣлаетъ это извѣстнымъ и потомству), онъ же способствовалъ какъ его славѣ такъ и распространенію науки. Когда отъ перваго изданія этого сочиненія остались лишь рѣдчайшіе и весьма дорого оплачиваемые экземпляры, онъ самымъ настойчивымъ образомъ, чуть что не порицая, убѣдилъ знаменитаго автора, коего скромность не меньше его учености, позволить ему на свой счетъ и подъ своимъ наблюденіемъ выпустить въ свѣтъ второе изданіе этого сочиненія, пересмотрѣнное и снабженное превосходными дополненіями. Мнѣ же онъ своею властію поручилъ, тѣмъ возложивъ на меня пріятную обязанность, озаботиться, чтобы это изданіе было исправное.

Рожеръ Котесъ.

Членъ коллегіи Св. Троицы и Плюмеевскій
профессоръ астрономіи и опытной физики.

Кэмбриджъ.
12-го мая 1713 г.

Предисловіе автора къ третьему изданію.

Въ этомъ третьемъ изданіи, о которомъ озаботился *Генри Пембертонъ*, д-ръ мед., опытный въ этихъ дѣлахъ человѣкъ, во второй книгѣ кое-что о сопротивленіи жидкостей изложено болѣе полно нежели въ предыдущемъ, и добавлены новые опыты надъ паденіемъ тѣлъ въ воздухѣ. Въ третьей книгѣ разсужденіе о томъ, какимъ образомъ луна удерживается силою тяжести на своей орбитѣ изложено полнѣе и прибавлены новыя наблюденія надъ отношеніемъ діаметровъ Юпитера, произведенныя *Пондомъ*. Добавлены также наблюденія надъ кометой появившейся въ 1680 году, произведенныя *Киркомъ* въ Германіи въ ноябрѣ того года, которыя лишь недавно попали намъ въ руки, и изъ которыхъ явствуетъ насколько точно параболическая орбита соотвѣтствуетъ движенію кометы. Орбита кометы опредѣленная *Галлеемъ* вычислена болѣе точно нежели прежде и притомъ орбита эллиптическая. Оказывается, что движеніе кометы по этой эллиптической орбитѣ на протяженіи девяти знаковъ зодіака, представляется не менѣе точно, чѣмъ движеніе планетъ по ихъ орбитамъ опредѣленнымъ астрономически. Прилагается также орбита кометы 1723 года, вычисленная *Брадлеемъ*, профессоромъ астрономіи въ Оксфордѣ.

Ис. Ньютонъ.

Дано въ Лондонѣ
12-го января 1725—26 г.

Математическія Начала Натуральной Философіи.

Опредѣленія.

Опредѣленіе I.

Количество матеріи (масса) есть мѣра таковой, устанавливаемая пропорціонально плотности и объему ея.

Воздуха двойной плотности въ двойномъ объемѣ въ четверо больше, въ тройномъ въ шестеро. То же относится къ снѣгу или порошкамъ, когда они уплотняются отъ сжатія или таянія. Это же относится и ко всякаго рода тѣламъ, которыя въ силу какихъ бы то ни было причинъ уплотняются. Однако, при этомъ я не принимаю въ разсчетъ той среды, если таковая существуетъ, которая свободно проникаетъ въ промежутки между частицами. Это же количество я подразумѣваю въ дальнѣйшемъ подъ названіями *тѣло* или *масса*. Опредѣляется масса по вѣсу тѣла, ибо она пропорціональна вѣсу, что мною найдено опытами надъ маятниками, произведенными точнѣйшимъ образомъ, какъ о томъ сказано ниже [5]).

---

[5]) Ни одно опредѣленіе Ньютона не вызывало столько критическихъ замѣчаній и столько толкованій, какъ это первое, высказанное такими словами: «quantitas materiae est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim». Въ поясненіи къ этому опредѣленію указывается, что слова «quantitas materiae» — «количество матеріи» равносильны словамъ «corpus» — «тѣло» или «massa». Такимъ образомъ, въ этомъ опредѣленіи слова «количество матеріи» составляютъ какъ бы одно слово, одинъ новый терминъ, который при дальнѣйшемъ развитіи науки не удержался и въ современной терминологіи замѣненъ равносильнымъ ему терминомъ «масса». Словамъ «количество матеріи» теперь придается нѣсколько иной смыслъ, нежели имъ придавалъ Ньютонъ въ своемъ опредѣленіи. То, что теперь разумѣется подъ словами «количество матеріи», онъ просто выражаетъ словомъ «матеріи», замѣнивъ его мѣстоименіемъ ejusdem — таковой. Поэтому

Опредѣленіе II.

Количество движенія есть мѣра таковаго, устанавливаемая пропорціонально скорости и массѣ.

Количество движенія цѣлаго есть сумма количествъ движенія отдѣльныхъ частей его, значитъ для массы вдвое большей при равныхъ скоростяхъ оно двойное, при двойной же скорости четверное [6]).

онъ и въ поясненіи не говоритъ «количество воздуха двойной плотности въ двойномъ объемѣ въ четверо больше», а просто «воздуха».

Необходимо также имѣть въ виду, что въ то время при установленіи мѣры для какой-либо величины устанавливалась лишь ея пропорціональность другимъ величинамъ отъ коихъ эта мѣра зависитъ. Тогда не говорили какъ теперь (когда дѣлается опредѣленное предположеніе о принятой единицѣ мѣры), «площадь прямоугольника *равняется* произведенію изъ его основанія на высоту», а говорили (предполагая единицу мѣры произвольной) «площадь прямоугольника *пропорціональна* его основанію и высотѣ».

До Ньютона понятіе о массѣ не вводилось и разсматривался лишь вѣсъ—pondus тѣла и при старинной терминологіи понятно, что плотность не опредѣлялась какъ масса единицы объема вещества, а говорилось, что плотность тѣла пропорціональна его вѣсу и обратно пропорціональна его объему. Имѣя это въ виду, можно Ньютоново опредѣленіе, придерживаясь теперешней терминологіи, выразить такъ: «масса есть мѣра количества вещества пропорціональная его плотности и объему». Самымъ существеннымъ въ Ньютоновомъ поясненіи вводимаго имъ термина и понятія *масса* есть установленіе *опытнымъ* путемъ пропорціональности между массою тѣла и его вѣсомъ.

[6]) Второе опредѣленіе выражено слѣдующими словами: «quantitas motus est mensura ejusdem orta ex velocitate et quantitate materiae conjunctim», т.-е. оно выражено совершенно подобно первому и имъ вводится новый терминъ «количество движенія», сохранившійся и доселѣ. Слова «orta conjunctim» указываютъ на совмѣстную пропорціональность той величины, которая названа «количество движенія» и которая могла бы быть названа и какимъ-либо однимъ словомъ, какъ, напр., у англичанъ, словомъ «momentum», массѣ и скорости, почему, придерживаясь современной терминологіи, они и переведены словами «устанавливаемая пропорціонально».

Необходимо имѣть въ виду, что высказывая это опредѣленіе, Ньютонъ придаетъ слову «motus»—движеніе не смыслъ названія общеизвѣстнаго явленія, а вводитъ нѣкоторую *новую величину*, имѣющую при разсмотрѣніи этого явленія первенствующее значеніе. Это особенно ясно выступаетъ въ первыхъ словахъ поясненія: «motus totius est summa motuum in partibus singulis, т.-е. переводя буквально «движеніе цѣлаго есть сумма движеній въ отдѣльныхъ частяхъ». Изъ этихъ словъ ясно, что подъ словомъ «motus» онъ разумѣетъ нѣчто измѣримое какъ бы заключающееся или содержащееся въ движущемся тѣлѣ. Вотъ почему эти слова и переведены такъ: «Количество движенія цѣлаго есть сумма количествъ движенія отдѣльныхъ частей его», такъ какъ теперь слову «движеніе» иного смысла, какъ названія самого явленія не придается. До Ньютона, напр., Wallis въ своей «Mechanica sive de Motu» разсматривалъ величину, называемую имъ «mo-

Опредѣленіе III.

Врожденная сила матеріи есть присущая ей способность сопротивленія, по которой всякое отдѣльно взятое тѣло, поскольку оно

---

mentum» или «impedimentum», мѣра которой пропорціональна вѣсу и скорости движущагося тѣла, онъ принимаетъ вмѣстѣ съ тѣмъ эту величину за мѣру «силы движущагося тѣла», ибо этой-то величинѣ пропорціональна способность одного тѣла передавать движеніе другимъ тѣламъ. Терминъ «momentum» удержался въ англійской литературѣ и по настоящее время, но только ему придается не Wallis'овъ, а Ньютоновъ смыслъ.

Механика Wallis'а издана съ 1669 по 1671 годъ и достаточно ее просмотрѣть, чтобы составить себѣ понятіе о томъ, что для этой науки сдѣлано Ньютономъ.

Механика Wallis'а занимаетъ въ первомъ томѣ полнаго собранія его сочиненій стр. 573 — 1063 мелкой убористой печати огромной книги формата въ листъ (in folio). Сперва дается множество опредѣленій, затѣмъ поясняются кинематическія понятія о пройденномъ пути, скорости и соотношеніи между ними, выраженныхъ, по обычаю того времени, пропорціями во множествѣ отдѣльныхъ предложеній. Затѣмъ идетъ рядъ предложеній о соотношеніяхъ между вѣсомъ тѣла и скоростью, сообщаемой ему къ концу одинаковыхъ или различныхъ промежутковъ времени силою, составляющей нѣкоторую опредѣленную долю вѣса, помѣщая тѣло на наклонную плоскость. Затѣмъ излагается ученіе о равновѣсіи вѣсовъ.

Большая часть книги, именно: стр. 645—941, заняты изложеніемъ способовъ вычисленія положенія центра тяжести разнаго рода площадей и объемовъ, составляя такимъ образомъ продолженіе и примѣненіе къ ряду примѣровъ методовъ, изложенныхъ Wallis'омъ въ его «Arithmetica Infinitorum», являющейся какъ бы преддверіемъ къ интегральному исчисленію. Стр. 941—992 заняты ученіемъ о равновѣсіи простѣйшихъ машинъ. Стр. 992—1002 удѣлены ученію о движеніи тѣла подъ дѣйствіемъ своего вѣса, или его доли, при движеніи по наклонной плоскости, причемъ понятіе о массѣ не вводится и движущая сила сравнивается всегда съ вѣсомъ заданнаго тѣла. Остальныя 60 страницъ содержатъ ученіе объ ударѣ тѣлъ и здѣсь въ предложеніи 1-мъ слово momentum поясняется словами «quod ex pondere et celeritate componitur», т.-е. «которое составляется изъ вѣса и скорости» и доказывается законъ сохраненія этого «momentum» при ударѣ тѣлъ. Сочиненіе заканчивается изложеніемъ простѣйшихъ началъ гидростатики. Отсюда видно, что если въ Механикѣ Wallis'а и можно найти основныя понятія кинематики, систематическое и по тогдашнему времени практически достаточное изложеніе статики, то относительно динамики можно сказать, что даже не поставленъ общій ея вопросъ. Можетъ быть это и составляетъ причину, почему Ньютонъ не даетъ опредѣленій ни одного изъ кинематическихъ понятій — онъ предполагаетъ ихъ извѣстными, всю статику онъ излагаетъ мимоходомъ, какъ слѣдствіе второго закона движенія (параллелограмъ силъ) и все его сочиненіе посвящено изложенію Динамики отъ основныхъ ея началъ, имъ данныхъ, до разсмотрѣнія теоріи планетныхъ возмущеній, неравенствъ въ движеніи луны и предваренія равноденствій.

предоставлено самому себѣ, удерживаетъ [7]) *свое состояніе покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія.*

Эта сила всегда пропорціональна массѣ и если отличается отъ инерціи массы [8]), то развѣ только воззрѣніемъ на нее.

Отъ инерціи матеріи происходитъ, что всякое тѣло лишь съ трудомъ выводится изъ своего покоя или движенія. Поэтому «врожденная сила» могла бы быть весьма вразумительно названа «силою инерціи». Эта сила проявляется тѣломъ единственно лишь когда другая сила, къ нему приложенная, производитъ измѣненіе въ его состояніи. Проявленіе этой силы можетъ быть разсматриваемо двояко, и какъ сопротивленіе, и какъ напоръ. Какъ сопротивленіе, поскольку тѣло противится дѣйствующей на него силѣ, стремясь сохранить свое состояніе; какъ напоръ, поскольку то же тѣло, съ трудомъ уступая силѣ сопротивляющагося ему препятствія, стремится измѣнить состояніе этого препятствія. Сопротивленіе приписывается обыкновенно тѣламъ покоющимся, напоръ—тѣламъ движущимся. Но движеніе и покой при обычномъ ихъ разсмотрѣніи различаются лишь въ отношеніи одно къ другому, ибо не всегда находится въ покоѣ то, что таковымъ простому взгляду представляется.

Опредѣленіе IV.

Приложенная сила есть дѣйствіе, производимое надъ тѣломъ, чтобы измѣнить его состояніе покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія.

Сила проявляется единственно только въ дѣйствіи и по прекращеніи дѣйствія въ тѣлѣ не остается. Тѣло продолжаетъ затѣмъ удерживать свое

---

[7]) Какъ въ этомъ опредѣленіи, такъ и при формулировкѣ перваго закона движенія Ньютонъ пользуется глаголомъ «perseverare», включающемъ въ себѣ не только понятіе о сохраненіи чего-либо, но еще и понятія о длительности и упорствѣ такого сохраненія, поэтому слова «perseverare in statu quo» наиболѣе точно передаются словами: «продолжаетъ упорно пребывать въ своемъ состояніи», слова «удерживаетъ свое состояніе» передаютъ короче тѣ же понятія, хотя и съ меньшею силою выраженія. Вообще латынь Ньютона отличается силою выраженій, такъ тутъ сказано perseverare—упорно пребывать, а не manere—пребывать или оставаться, когда говорится, что какое-либо тѣло дѣйствіемъ силы отклоняется отъ прямолинейнаго пути, то употребляется не просто слово deviatur—отклоняются, а retrahitur—оттягивается, про силу не говорится просто, что она прикладывается applicetur къ тѣлу, а imprimitur, т.-е. «вдавливается» или «втискивается» въ тѣло и т. под. Въ переводѣ принята менѣе выразительная, но общеупотребительная теперь терминологія.

[8]) Въ этомъ поясненіи чуть ли не единственный разъ во всей первой книгѣ Principia употреблено слово «massa» именно «inertia massae». Вообще же Ньютонъ пользуется словомъ «corpus»—тѣло и нѣсколько рѣже словами «quantitas materiae».

новое состоянiе вслѣдствiе одной только (силы) инерцiи. Происхожденiе приложенной силы можетъ быть различное отъ удара, отъ давленiя, отъ центростремительной силы.

Опредѣленiе V.

Центростремительная сила есть та, съ которою тѣла къ нѣкоторой точкѣ какъ къ центру отовсюду притягиваются, гонятся или какъ бы то ни было стремятся.

Такова сила тяжести, подъ дѣйствiемъ которой тѣла стремятся къ центру земли; магнитная сила, которою желѣзо притягивается къ магниту и та сила, каковою бы она ни была, которою планеты постоянно отклоняются отъ прямолинейнаго движенiя и вынуждаются обращаться по кривымъ линiямъ. Камень, вращаемый въ пращѣ, стремится удалиться отъ вращающей пращу руки и этимъ своимъ стремленiемъ натягиваетъ пращу тѣмъ сильнѣе, чѣмъ быстрѣе вращенiе, и какъ только ее пустятъ, то камень улетаетъ.

Силу, противоположную сказанному стремленiю, которою праща постоянно оттягиваетъ камень къ рукѣ и удерживаетъ его на кругѣ, т.-е. силу, направленную къ рукѣ или къ центру описываемаго круга я и называю *центростремительной.* Это относится и до всякаго тѣла, движущагося по кругу. Всѣ такiя тѣла стремятся удалиться отъ центра орбиты и если бы не было нѣкоторой силы, противоположной этому стремленiю, которая ихъ и удерживаетъ на ихъ орбитахъ, то они и ушли бы по прямымъ линiямъ, двигаясь равномѣрно. Эту-то силу я и называю центростремительной. Брошенное тѣло, если бы силы тяжести не было, не отклонялось бы къ землѣ, а уходило бы въ небесное пространство по прямой линiи и равномѣрно, если бы не было и сопротивленiя воздуха. Своею тяжестью оно оттягивается отъ прямолинейнаго пути и постоянно отклоняется къ землѣ въ бóльшей или меньшей степени сообразно напряженiю силы тяжести и скорости движенiя. Чѣмъ меньше будетъ отнесенное къ массѣ напряженiе тяжести и чѣмъ больше будетъ скорость, съ которою тѣло брошено, тѣмъ менѣе оно отклонится отъ прямой линiи и тѣмъ дальше отлетитъ.

Если свинцовое ядро, брошенное горизонтально силою пороха изъ пушки, поставленной на вершинѣ горы, отлетитъ по кривой ранѣе, чѣмъ упасть на землю на двѣ мили, то, предполагая, что сопротивленiя воздуха нѣтъ, если его бросить съ двойною скоростью, оно отлетитъ приблизительно вдвое дальше, если съ десятерною, то въ десять разъ. Увеличивая скорость, можно по желанiю увеличить и дальность полета и уменьшать кривизну линiи, по которой ядро движется, такъ что можно бы заставить его упасть въ разстоянiи и десяти градусовъ, и тридцати, и девяносто, можно бы заставить его окружить всю землю или даже уйти въ небесныя пространства и продолжать удаляться до безконечности. Подобно тому, какъ брошенное тѣло можетъ быть отклонено силою тяжести такъ, чтобы описывать орбиту вокругъ земли, такъ и луна или силою тяжести, если она ей подвержена, или же иною силою, которая влечетъ ее къ землѣ, можетъ быть отклоняема отъ прямолинейнаго пути и вынуждена обращаться по своей орбитѣ; безъ такой силы луна не могла бы удерживаться на своей орбитѣ. Если бы эта сила была меньше надлежащей, то она отклоняла бы луну отъ прямолинейнаго пути недостаточно, а если больше надлежащей, то отклонила бы ее болѣе чѣмъ слѣдуетъ и приблизила бы ее отъ орбиты къ землѣ. Слѣдовательно, надо, чтобы эта сила была въ точности надлежащей величины. Дѣло математиковъ найти такую силу, которая въ точности удерживала бы заданное тѣло въ движеніи по заданной орбитѣ съ данною скоростью и наоборотъ, найти тотъ криволинейный путь, на который заданною силою будетъ отклонено тѣло, вышедшее изъ заданнаго мѣста съ заданною скоростью.

Въ центростремительной силѣ различается три рода величинъ: абсолютная, ускорительная и движущая.

Опредѣленіе VI.

Абсолютная величина центростремительной силы есть мѣра большей или меньшей мощности самого источника ея распространенія изъ центра въ окружающее его пространство.

Такъ магнитная сила въ зависимости отъ величины магнита или степени намагничиванія можетъ быть въ одномъ магнитѣ больше, въ другомъ меньше.

Опредѣленіе VII.

Ускорительная [9]) *величина центростремительной силы есть ея мѣра пропорціональная той скорости, которую она производитъ въ теченіе даннаго времени.*

Такъ дѣйствіе того же магнита болѣе сильно на близкомъ разстояніи, слабѣе на дальнемъ, или сила тяжести больше въ долинахъ, слабѣе на вершинахъ высокихъ горъ и еще меньше (какъ впослѣдствіи будетъ по-

---

[9]) Вся первая книга «Началъ» занята почти исключительно ученіемъ о центростремительныхъ силахъ и ихъ дѣйствіяхъ. При этомъ всегда Ньютонъ разсматриваетъ лишь «ускорительную силу» въ данномъ мѣстѣ. При теперешней терминологіи, можно сказать, что въ первой книгѣ имъ изслѣдуются «силы поля» и то, что онъ называетъ ускорительная сила, теперь называется «напряженіе поля» въ данномъ мѣстѣ. Замѣчательно, что Ньютонъ вводя понятіе «ускорительная сила», не пользуется понятіемъ объ ускореніи, а замѣняетъ его скоростью производимою въ продолженіи заданнаго времени. Вообще понятіе ускореніе, какъ оно разумѣется теперь, въ «Началахъ» не примѣняется и подъ словомъ «accelеratio»—ускореніе всегда разумѣется приращеніе скорости въ теченіи заданнаго конечнаго или безконечно-малаго промежутка времени.

казано), на еще бо́льшихъ разстояніяхъ отъ земного шара, въ равныхъ же разстояніяхъ она вездѣ одна и та же, ибо, при отсутствіи сопротивленія воздуха всѣ падающія тѣла (большія или малыя, тяжелыя или легкія), ускоряются ею одинаково.

Опредѣленіе VIII.

Движущая величина центростремительной силы есть ея мѣра пропорціональная количеству движенія, которое ею производится въ теченіе даннаго времени.

Такимъ образомъ вѣсъ бо́льшей массы больше, меньшей меньше; для той же самой массы или для того же самаго тѣла вѣсъ больше вблизи земли меньше въ небесной дали. Эта величина есть направленное къ центру стремленіе всего тѣла, которое и называется его вѣсомъ. Движущая сила распознается по силѣ ей равной и противоположной, которая могла бы воспрепятствовать опусканію тѣла [10]).

Для краткости эти величины силъ можно называть силами движущими, ускоряющими и абсолютными, и для отличія относить ихъ къ самимъ притягиваемымъ къ центру тѣламъ, къ мѣсту тѣлъ, и къ центру силъ, а именно: движущую силу къ тѣлу какъ стремленіе всего тѣла къ центру, причемъ, это полное стремленіе составляется изъ стремленій отдѣльныхъ частицъ тѣла, силу ускорительную къ мѣсту тѣла въ пространствѣ, какъ нѣкоторую способность распространенную центромъ на всѣ мѣста окружающаго пространства и заставляющую приходить въ движеніе тѣла въ этихъ мѣстахъ находящіяся, абсолютную же силу къ самому центру, какъ заключающуюся въ немъ причину, безъ которой движущія силы не распро-

[10]) Давая опредѣленіе понятія «движущая сила», т.-е. того, что теперь зовутъ просто «сила», Ньютонъ обращаетъ вниманіе на способъ ея измѣренія и именно способъ **статическій**, уравновѣшивая другою силою препятствующей движенію къ центру. Въ этихъ немногихъ словахъ и установлена связь между статикою и динамикою при посредствѣ второго закона—сила статически вдвое бо́льшая сообщаетъ и вдвое бо́льшее количество движенія въ заданное время. Замѣчательно также, что нигдѣ Ньютонъ не говоритъ, чтобы сила измѣрялась произведеніемъ изъ массы на ускореніе, но, что движущая сила пропорціональна произведенію изъ ускоряющей и массы, и ускоряющая сила не есть понятіе равнозначущее ускоренію—а какъ уже сказано, напряженію поля въ данномъ мѣстѣ, т.-е. это есть сила дѣйствующая на массу равную единицѣ. Что Ньютонъ, если и не примѣнялъ, то, ясно представлялъ измѣреніе силы при помощи растяженія пружины, или нити, вообще динамометра можно видѣть изъ его поученія въ концѣ этой главы, гдѣ онъ указываетъ какъ различить абсолютное движеніе отъ относительнаго, и приводя опытъ съ шарами, говоритъ: «по натяженію нити (соединяющей шары), можно будетъ узнать ихъ стремленіе удалиться отъ оси вращенія и по нему вычислить количество движенія», т.-е. онъ здѣсь имѣетъ въ виду именно такое «статическое» измѣреніе силы, и по нему находитъ ея дѣйствіе.

странялись бы въ окружающемъ пространствѣ; сказанною причиною можетъ служить или какое-либо центральное тѣло (какъ напр., магнитъ въ центрѣ силъ магнитныхъ, или земля въ центрѣ силъ тяжести), или чтобы-то ни было иное, хотя бы и ни чѣмъ не обнаружимое. Эти понятія должно разсматривать какъ математическія, ибо я еще не обсуждаю физическихъ причинъ и мѣста нахожденія силъ.

Такимъ образомъ, ускорительная сила такъ относится къ движущей, какъ скорость къ количеству движенія. Въ самомъ дѣлѣ, количество движенія пропорціонально скорости и массѣ, движущая же сила пропорціональна ускорительной и массѣ, ибо сумма [11]) дѣйствій ускорительной силы на отдѣльныя частицы тѣла и составляетъ движущую силу его. Поэтому близъ поверхности земли гдѣ ускоряющая сила тяжести для всѣхъ тѣлъ одна и та же, движущая сила тяжести или вѣсъ пропорціоналенъ массѣ тѣла. Если подняться въ такія области гдѣ ускоряющая [12]) сила тяжести будетъ меньше, то и вѣсъ пропорціонально уменьшится, вообще вѣсъ будетъ постоянно пропорціоналенъ массѣ тѣла и ускоряющей силѣ тяжести. Такъ, напр., въ тѣхъ областяхъ пространства, гдѣ ускоряющая сила тяжести вдвое меньше, вѣсъ массы вдвое или втрое меньшей будетъ въ четверо или въ шестеро меньше нежели близъ поверхности земли [13]). Далѣе я придаю тотъ же самый смыслъ названіямъ ускорительные и движущіе притяженія и натиски [14]). Названіе же притяженіе (центромъ), натискъ или стремленіе (къ центру), я употребляю безразлично одно вмѣсто другого, разсматривая эти силы не физически, а математически, поэтому читатель долженъ озаботиться, чтобы въ виду такихъ названій не думать, что я ими хочу опредѣлить самый характеръ дѣйствія или физическія причины происхожденія этихъ силъ, или же приписывать центрамъ (которые суть математическія точки), дѣйствительно и физически силы, хотя я и буду говорить о силахъ центровъ и о притяженіи центрами.

Поученіе.

Въ изложенномъ выше имѣлось въ виду объяснить въ какомъ смыслѣ употребляются въ дальнѣйшемъ менѣе извѣстныя названія. Время, пространство, мѣсто и движеніе составляютъ понятія общеизвѣстныя.

[11]) Отсюда слѣдуетъ, что масса всего тѣла считается равной суммѣ массъ частицъ его.

[12]) Ньютонъ употребляетъ термины «gravitas acceleratrix» и «gravitas motrix», т.-е. ускоряющая тяжесть и движущая тяжесть—современные термины: «напряженіе силы тяжести» и «сила тяжести или вѣсъ».

[13]) Въ этихъ словахъ и устанавливается различіе *вѣса* и массы при пропорціональности ихъ между собою.

[14]) Точный смыслъ латинскаго слова «impulsus» вполнѣ передается словомъ «натискъ», включающемъ въ себѣ какъ понятіе о напряженности такъ и продолжительности дѣйствія.

Однако, необходимо замѣтить, что эти понятія обыкновенно относятся къ тому, что постигается нашими чувствами. Отсюда происходятъ нѣкоторыя неправильныя сужденія, для устраненія которыхъ, несбходимо выше приведенныя понятія раздѣлить на абсолютныя и относительныя, истинныя и кажущіяся, математическія и обыденныя.

Абс истина

I. *Абсолютное, истинное, математическое время* само по себѣ и по самой своей сущности, безъ всякаго отношенія къ чему-либо внѣшнему протекаетъ равномѣрно и иначе называется длительностью.

Относительное, кажущееся или *обыденное время* есть или точная или измѣнчивая, постигаемая чувствами, внѣшняя, совершаемая при посредствѣ какого-либо движенія мѣра продолжительности, употребляемая въ обыденной жизни вмѣсто истиннаго математическаго времени какъ-то: часъ, день, мѣсяцъ, годъ. (скор. свѣта С)

Абс истина! (вечная истина)

II. *Абсолютное пространство* по самой своей сущности безотносительно къ чему бы то ни было внѣшнему остается всегда одинаковымъ и неподвижнымъ.

Относительное есть его мѣра или какая-либо ограниченная подвижная часть, которая опредѣляется нашими чувствами по положенію его относительно нѣкоторыхъ тѣлъ, и которое въ обыденной жизни принимается за пространство неподвижное: такъ, напр., протяженіе пространствъ подземнаго, воздуха или надземнаго опредѣляемыхъ по ихъ положенію относительно земли. По виду и величинѣ абсолютное и относительныя пространства одинаковы, но численно не всегда остаются одинаковыми. Такъ, напримѣръ если разсматривать землю подвижною, то пространство нашего воздуха, которое по отношенію къ землѣ остается всегда однимъ и тѣмъ же, будетъ составлять, то одну часть пространства абсолютнаго, то другую, смотря по тому, куда воздухъ перешелъ, и слѣдовательно, абсолютно сказанное пространство безпрерывно мѣняется.

III. *Мѣсто* есть часть пространства занимаемая тѣломъ, и по отношенію къ пространству бываетъ или абсолютнымъ или относительнымъ. Я говорю «часть пространства», а не положеніе тѣла и не объемлющая его поверхность. Для равнообъемныхъ тѣлъ мѣста равны, поверхности же отъ несходства формы тѣлъ могутъ быть и неравными. Положеніе, правильно выражаясь, не имѣетъ величины, и оно само по себѣ не есть мѣсто, а принадлежащее мѣсту свойство. Движеніе цѣлаго тоже самое что совокупность движеній частей его, т.-е. перемѣщеніе цѣлаго изъ его мѣста то же самое, что совокупность перемѣщеній его частей изъ ихъ мѣстъ, поэтому мѣсто цѣлаго то же самое, что совокупность мѣстъ его частей, и слѣдовательно, оно цѣликомъ внутри всего тѣла.

IV. *Абсолютное движеніе* есть перемѣщеніе тѣла изъ одного абсолютнаго его мѣста въ другое, *относительное* изъ относительнаго въ относительное же. Такъ, на кораблѣ, идущемъ подъ парусами, относительное мѣсто тѣла есть та часть корабля, въ которой тѣло находится, напр., та часть трюма, которая заполнена тѣломъ и которая, слѣдовательно, движется вмѣстѣ съ кораблемъ. Относительный покой есть пребываніе тѣла въ той же самой области корабля или въ той же самой части его трюма.

Истинный покой есть пребываніе тѣла въ той же самой части того неподвижнаго пространства, въ которомъ движется корабль со всѣмъ въ немъ находящимся. Такимъ образомъ, если бы земля на самомъ дѣлѣ покоилась, то тѣло, которое по отношенію къ кораблю находится въ покоѣ, двигалось бы въ дѣйствительности съ тою абсолютною скоростью, съ которою корабль идетъ относительно земли. Если же и сама земля движется, то истинное абсолютное движеніе тѣла найдется по истинному движенію земли въ неподвижномъ пространствѣ и по относительнымъ движеніямъ корабля по отношенію къ землѣ и тѣла по кораблю.

Такъ, если та часть земли, гдѣ корабль находится, движется на самомъ дѣлѣ къ востоку со скоростью 10010 частей, корабль же идетъ къ западу со скоростью 10 частей, морякъ же ходитъ по кораблю и идетъ къ востоку со скоростью одной части, то истинно и абсолютно морякъ перемѣщается въ неподвижномъ пространствѣ къ востоку со скоростью 10001 частей, по отношенію же къ землѣ—на западъ со скоростью 9 частей.

Абсолютное время различается въ Астрономіи отъ обыденнаго солнечнаго времени уравненіемъ времени. Ибо естественныя солнечныя сутки, принимаемыя обыденно за равныя для измѣренія времени, на самомъ дѣлѣ между собою неравны. Это неравенство и исправляется астрономами, чтобы при измѣреніяхъ движеній небесныхъ свѣтилъ примѣнять болѣе правильное время. Возможно, что не существуетъ (въ природѣ) такого равномѣрнаго движенія, которымъ время могло бы измѣряться съ совершенною точностью. Всѣ движенія могутъ ускоряться или замедляться, теченіе же абсолютнаго времени измѣняться не можетъ. Длительность или продолжительность существованія вещей одна и та же, быстры ли движенія (по которымъ измѣряется время), медленны ли, или ихъ совсѣмъ нѣтъ, поэтому она надлежащимъ образомъ и отличается отъ своей, доступнымъ чувствомъ, мѣры, будучи изъ нея выводимой при помощи астрономическаго уравненія. Необходимость этого уравненія обнаруживается какъ опытами съ часами, снабженными маятниками, такъ и по затменіямъ спутниковъ Юпитера.

Какъ неизмѣненъ порядокъ частей времени, такъ неизмѣненъ и порядокъ частей пространства. Если бы онѣ перемѣстились изъ мѣстъ своихъ, то онѣ продвинулись бы (такъ сказать) въ самихъ себя, ибо время и пространство составляютъ какъ бы вмѣстилища самихъ себя и всего существующаго. Во времени все располагается въ смыслѣ порядка послѣдовательности, въ пространствѣ въ смыслѣ порядка положенія. По самой своей сущности они суть мѣста, приписывать же первичнымъ мѣстамъ движенія нелѣпо. Вотъ эти-то мѣста и суть мѣста абсолютныя и только перемѣщенія изъ этихъ мѣстъ составляютъ абсолютныя движенія.

Однако, совершенно невозможно ни видѣть, ни какъ-нибудь иначе различить при помощи нашихъ чувствъ отдѣльныя части этого пространства одну отъ другой и вмѣсто нихъ приходится обращаться къ измѣреніямъ, доступнымъ чувствамъ. По положеніямъ и разстояніямъ предметовъ отъ какого-либо тѣла, принимаемаго за неподвижное, опредѣляемъ мѣста вообще, затѣмъ и о всѣхъ движеніяхъ судимъ по отношенію къ этимъ мѣстамъ, разсматривая тѣла лишь какъ переносящіяся по нимъ. Такимъ образомъ вмѣсто абсолютныхъ мѣстъ и движеній пользуются относительными; въ дѣлахъ житейскихъ это не представляетъ неудобства, въ философскихъ необходимо отвлеченіе отъ чувствъ. Можетъ оказаться, что въ дѣйствительности не существуетъ покоющагося тѣла, къ которому можно было бы относить мѣста и движенія прочихъ.

Абсолютное и относительное движеніе и абсолютный и относительный покой отличаются другъ отъ друга: свойствами, причинами происхожденія и проявленіями.

Свойство покоя состоитъ въ томъ, что тѣла истинно покоющіяся находятся въ покоѣ и другъ относительно друга. Возможно, что какое-нибудь тѣло въ области неподвижныхъ звѣздъ, а можетъ быть и много далѣе, находится въ абсолютномъ покоѣ, но узнать по взаимному положенію тѣлъ въ нашихъ областяхъ не сохраняетъ ли какое-нибудь изъ нихъ постояннаго положенія относительно этого, весьма отдаленнаго, нельзя. Невозможно также опредѣлить истиннаго ихъ покоя по относительному ихъ другъ къ другу положенію.

Свойство движенія состоитъ въ томъ, что части, сохраняющія постоянное положеніе по отношенію къ цѣлому, участвуютъ въ движеніи этого цѣлаго. Такъ, всѣ части вращающихся тѣлъ стремятся удалиться отъ оси вращенія, для движущихся поступательно полное движеніе образуется изъ соединенія отдѣльныхъ частныхъ движеній. Слѣдовательно, когда движутся окружающія тѣла, то движутся и тѣ, которыя по отношенію къ нимъ находятся въ покоѣ, поэтому нельзя опредѣлить истиннаго абсолютнаго движенія по перемѣщеніямъ отъ сосѣднихъ тѣлъ, разсматриваемыхъ какъ неподвижныя. Эти тѣла должны быть дѣйствительно въ покоѣ, а не только приниматься за покоющіяся. Въ противномъ случаѣ всѣ содержащіяся тѣла участвовали бы въ истинныхъ движеніяхъ тѣлъ ихъ окружающихъ и если бы это послѣднее движеніе прекратить, то они оказались бы на самомъ дѣлѣ не въ покоѣ, а лишь представлялись до тѣхъ поръ находящимися въ таковомъ. Окружающія тѣла по отношенію къ содержащимся стоятъ въ томъ же отношеніи, какъ наружная часть цѣлаго къ его внутренней части или какъ скорлупа къ ядру. При движеніи скорлупы движется и ядро, не перемѣщаясь относительно скорлупы, т.-е. движется какъ часть цѣлаго.

Въ тѣсной связи съ предыдущимъ свойствомъ находится такое: тѣло, движущееся въ подвижномъ пространствѣ, участвуетъ и въ движеніи этого пространства, поэтому тѣло, движущееся отъ подвижного мѣста, участвуетъ въ движеніи своего мѣста. Слѣдовательно, всѣ движенія, совершающіяся отъ подвижныхъ мѣстъ, суть лишь составныя части полныхъ абсолютныхъ движеній и всякое полное движеніе составляется изъ движенія тѣла отъ перваго мѣста своего, изъ движенія этого перваго отъ его мѣста и такъ далѣе, пока не достигнемъ до мѣста неподвижнаго, какъ это было пояснено примѣромъ моряка, приведеннымъ выше. Такимъ образомъ полныя абсолютныя движенія могутъ быть опредѣлены не иначе какъ при помощи мѣстъ неподвижныхъ, почему я и относилъ ихъ выше къ мѣстамъ неподвижнымъ, относительныя же движенія—къ мѣстамъ подвижнымъ. Мѣста же неподвижны не иначе, какъ если они изъ вѣчности въ вѣчность сохраняютъ постоянныя взаимныя положенія и, слѣдовательно, остаются всегда неподвижными и образуютъ то, что я называю неподвижнымъ пространствомъ.

Причины происхожденія, которыми различаются истинныя и кажущіяся движенія суть тѣ силы, которыя надо къ тѣламъ приложить, чтобы произвести эти движенія. Истинное абсолютное движеніе не можетъ ни произойти, ни измѣниться иначе какъ отъ дѣйствія силъ, приложенныхъ непосредственно къ самому движущемуся тѣлу, тогда какъ относительное движеніе тѣла можетъ быть и произведено, и измѣнено безъ приложенія силъ къ этому тѣлу, достаточно, чтобы силы были приложены къ тѣмъ тѣламъ, по отношенію къ которымъ это движеніе опредѣляется. Когда эти тѣла будутъ уступать дѣйствію силъ, то будетъ измѣняться и то относительное положеніе, которымъ опредѣляется относительный покой или относительное движеніе. Наоборотъ, истинное движеніе всегда измѣняется отъ приложенія къ тѣлу силъ, относительное же движеніе можетъ при такомъ приложеніи силъ и не измѣняться. Такъ, напримѣръ, если и къ тѣмъ тѣламъ, къ которымъ движеніе заданнаго тѣла относится, будутъ приложены такія силы, что относительное положеніе всѣхъ тѣлъ будетъ сохраняться, то сохранится и относительное движеніе заданнаго тѣла по отношенію къ прочимъ [15]). Такимъ образомъ всякое относительное движеніе можетъ быть измѣняемо такими дѣйствіями, при которыхъ абсолютное движеніе не мѣняется и можетъ сохраняться при такихъ, отъ которыхъ абсолютное измѣняется, такъ что абсолютное движеніе совершенно не зависитъ отъ тѣхъ соотношеній, которыми опредѣляется движеніе относительное.

Проявленія, которыми различаются абсолютное и относительное движеніе, состоятъ въ силахъ стремленія удалиться отъ оси вращательнаго движенія, ибо въ чисто относительномъ вращательномъ движеніи эти силы равны нулю, въ истинномъ же и абсолютномъ онѣ больше или меньше, сообразно количеству движенія. Если на длинной нити подвѣсить сосудъ и вращая его закрутить нить, пока она не станетъ совсѣмъ жесткой, затѣмъ наполнить сосудъ водой и, удержавъ сперва вмѣстѣ съ водою въ покоѣ, пустить, то подъ дѣйствіемъ появляющейся силы сосудъ начнетъ вращаться и это вращеніе будетъ поддерживаться достаточно долго раскручиваніемъ нити. Сперва поверхность воды будетъ оставаться плоской,

[15]) Это свойство относительнаго движенія высказано еще вторичн[illegible] какъ слѣдствіе VI законовъ движенія.

какъ было до движенія сосуда. Затѣмъ сосудъ, силою, постепенно дѣйствующею на воду, заставитъ и ее участвовать въ своемъ вращеніи. По мѣрѣ возрастанія вращенія вода будетъ постепенно отступать отъ середины сосуда и возвышаться по краямъ его, принимая впалую форму поверхности (я самъ это пробовалъ дѣлать); при усиливающемся движеніи она все болѣе и болѣе будетъ подниматься къ краямъ, пока не станетъ обращаться въ одинаковое время съ сосудомъ и придетъ по отношенію къ сосуду въ относительный покой. Этотъ подъемъ воды указываетъ на стремленіе ея частицъ удалиться отъ оси вращенія и по этому стремленію обнаруживается и измѣряется истинное и абсолютное вращательное движеніе воды, которое, какъ видно, во всемъ совершенно противоположно относительному движенію. Въ началѣ, когда относительное движеніе воды въ сосудѣ было наибольшее, оно совершенно не вызывало стремленія удалиться отъ оси—вода не стремилась къ окружности и не повышалась у стѣнокъ сосуда, а ея поверхностъ оставалась плоской и истинное вращательное ея движеніе еще не начиналось. Затѣмъ, когда относительное движеніе уменьшилось, повышеніе ея у стѣнокъ сосуда обнаруживало ея стремленіе удалиться отъ оси и это стремленіе показывало ея постепенно возрастающее истинное вращательное движеніе, и когда оно стало наибольшимъ, то вода установилась въ покоѣ относительно сосуда. Такимъ образомъ это стремленіе не зависитъ отъ движенія воды относительно окружающаго тѣла, слѣдовательно, по такимъ движеніямъ нельзя опредѣлить истиннаго вращательнаго движенія тѣла. Истинное круговое движеніе какого-либо тѣла можетъ быть лишь одно въ полномъ соотвѣтствіи съ силою стремленія его отъ оси, относительныхъ же движеній въ зависимости отъ того, къ чему они относятся, тѣло можетъ имѣть безчисленное множество; но независимо отъ этихъ отношеній эти движенія совершенно не сопровождаются истинными проявленіями, если только это тѣло не обладаетъ кромѣ этихъ относительныхъ и сказаннымъ единственнымъ истиннымъ движеніемъ. Поэтому въ тѣхъ системахъ міра, въ которыхъ предполагается, что наши небесныя сферы обращаются внутри сферы неподвижныхъ звѣздъ и несутъ съ собою планеты, окажется, что отдѣльныя части этихъ сферъ и планеты, покоющіяся относительно своихъ сферъ, на самомъ дѣлѣ движутся, ибо онѣ мѣняютъ относительное положеніе (чего не можетъ быть для тѣлъ, покоющихся абсолютно), вмѣстѣ съ тѣмъ онѣ участвуютъ въ общемъ движеніи несущихъ ихъ сферъ и, значитъ, какъ части вращающагося цѣлаго, стремятся отдалиться отъ оси.

Такимъ образомъ относительныя количества не суть тѣ самыя количества, коихъ имена имъ обычно придаются, а суть лишь результаты измѣреній сказанныхъ количествъ (истинныя или ложныя) постигаемыя чувствами и принимаемыя обычно за самыя количества. Если значеніе словъ опредѣлять по тому смыслу, въ какомъ эти слова обычно употребляются, то подъ названіями время, пространство, мѣсто и движеніе и слѣдуетъ разумѣть эти постижимыя чувствами мѣры ихъ.

Рѣчь стала бы совершенно необычной и чисто математической, если бы подъ этими названіями разумѣть дѣйствительно сами измѣряемыя количества. Поэтому воистину насилуютъ смыслъ Священнаго Писанія тѣ, кто эти слова истолковываютъ въ немъ, какъ самыя количества. Не менѣе того, засоряютъ математику и физику и тѣ, кто смѣшиваетъ самыя истинныя количества съ ихъ отношеніями и ихъ обыденными мѣрами.

Распознаніе истинныхъ движеній отдѣльныхъ тѣлъ и точное ихъ разграниченіе отъ кажущихся весьма трудно, ибо части того неподвижнаго пространства, о которомъ говорилось, и въ которомъ совершаются истинныя движенія тѣлъ, не ощущаются нашими чувствами. Однако это дѣло не вполнѣ безнадежное. Основанія для сужденій можно заимствовать частью изъ кажущихся движеній, представляющихъ разности истинныхъ, частью изъ силъ, представляющихъ причины и проявленія истинныхъ движеній. Такъ, если два шара, соединенные нитью на данномъ другъ отъ друга разстояніи, будутъ обращаться около общаго ихъ центра тяжести, то по натяженію нити можно будетъ узнать стремленіе шаровъ къ удаленію отъ оси вращенія и по нему вычислить угловую его скорость. Если затѣмъ на противоположныя стороны шаровъ заставить дѣйствовать равныя силы, такъ чтобы онѣ или увеличивали или уменьшали круговращательное движеніе, то по увеличившемуся или по уменьшившемуся натяженію нити можетъ быть обнаружено увеличеніе или уменьшеніе скорости движенія, и такимъ образомъ можно будетъ найти тѣ стороны шаровъ, къ которымъ надо приложить силы, чтобы увеличеніе скорости движенія стало наибольшимъ, и значитъ найти тѣ стороны шаровъ, которыя обращены по направленію движенія или по направленію ему обратному. Когда эти переднія и заднія стороны будутъ найдены, то и движеніе будетъ вполнѣ опредѣлено.

Такимъ способомъ могло бы быть опредѣлено количество и направленіе кругового движенія внутри огромнаго пустого пространства, гдѣ не существовало бы никакихъ внѣшнихъ доступныхъ чувствамъ признаковъ, къ которымъ можно было бы относить положенія шаровъ. Если бы въ этомъ пространствѣ кромѣ того находились бы еще нѣкоторыя весьма удаленныя тѣла, сохраняющія относительныя другъ къ другу положенія, подобно тому какъ наши неподвижныя звѣзды, то по перемѣщенію шаровъ относительно этихъ тѣлъ мы не могли бы опредѣлить чему принадлежитъ это перемѣщеніе, тѣламъ или шарамъ. Но если бы мы, опредѣливъ натяженіе нити нашли бы, что это натяженіе какъ разъ соотвѣтствуетъ движенію шаровъ, то мы бы заключили, что движеніе принадлежитъ шарамъ, а не внѣшнимъ тѣламъ, и что эти тѣла находятся въ покоѣ. Такимъ образомъ, по видимому перемѣщенію шаровъ относительно внѣшнихъ тѣлъ мы вывели бы ихъ движеніе. Нахожденіе же истинныхъ движеній тѣлъ по причинамъ ихъ производящимъ, по ихъ проявленіямъ, и по разностямъ кажущихся движеній, и, наоборотъ, нахожденіе по истиннымъ или кажущимся движеніямъ ихъ причинъ и проявленій излагается подробно въ послѣдующемъ. Именно съ этою-то цѣлью и составлено предлагаемое сочиненіе.

Аксіомы или законы движенія.

Законъ I.

Всякое тѣло продолжаетъ удерживаться въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами измѣнять это состояніе [16]).

Брошенное тѣло продолжаетъ удерживать свое движеніе поскольку его не замедляетъ сопротивленіе воздуха и поскольку сила тяжести не по-

---

[16]) Въ виду важности основныхъ законовъ движенія приводимъ и подлинную ихъ формулировку.

Законъ I высказанъ такъ: «Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare».

Законъ II. Mutationem motus proportionalem esse vi motrice impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Законъ III. Actioni contrariam semper et equalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse equales et in partes contrarias dirigi.

Первый законъ представляетъ для точнаго перевода нѣкоторыя затрудненія именно по отношенію къ словамъ «perseverare» и «nisi quatenus». Слово perseverare, какъ уже упомянуто въ прим. 7, включаетъ въ себѣ понятіе о стойкости или упорствѣ въ сохраненіи чего-либо. Но кромѣ того оно можетъ включать и понятіе о длительности сохраненія или пребыванія, и въ этомъ смыслѣ оно или, точнѣе говоря, соотвѣтствующее ему существительное «perseverantia» употреблено Ньютономъ въ поясненіи понятія объ абсолютномъ времени, гдѣ сказано прямо: duratio seu perseverantia existentiae, т.-е. длительность или продолжительность существованія. Сообразно тому, какой смыслъ придать слову perseverare, надо придавать и смыслъ словамъ nisi quatenus, т.-е. ограниченія въ смыслѣ времени или въ смыслѣ количества, и тогда ихъ надо переводить или словами: «до тѣхъ поръ пока» или просто «пока» въ первомъ случаѣ и словами: «кромѣ того поскольку» или просто «поскольку не» во второмъ. Такимъ образомъ въ первомъ толкованіи первый законъ можно перевести такъ: «Всякое тѣло продолжаетъ пребывать въ своемъ состояніи покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія, пока приложенныя буждаетъ это тѣло внизъ. Волчокъ, коего части вслѣдствіе взаимнаго сцѣпленія отвлекаютъ другъ друга отъ прямолинейнаго движенія, не перестаетъ вращаться (равномѣрно) поскольку это вращеніе не замедляется сопротивленіемъ воздуха. Бо̀льшія же массы планетъ и кометъ сохраняютъ свои движенія, какъ поступательныя, такъ и вращательныя, совершающіяся въ пространствахъ менѣе сопротивляющихся дольше.

Законъ II.

Измѣненіе количества движенія пропорціонально приложенной движущей силѣ и происходитъ по направленію той прямой, по которой эта сила дѣйствуетъ.

Если какая-нибудь сила производитъ нѣкоторое количество движенія, то двойная сила произведетъ двойное, тройная — тройное, будутъ ли

силы не понудятъ его измѣнить это состояніе». Во второмъ толкованіи этотъ законъ можно перевести такъ: «Всякое тѣло удерживаетъ свое состояніе покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія, поскольку оно не понуждается приложенными силами измѣнять это состояніе».

Въ первомъ толкованіи будетъ оттѣнено, что одного только времени недостаточно для измѣненія состоянія покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія тѣла, необходимо еще дѣйствіе силы. Во второмъ, что тѣло лишь постольку удерживаетъ свое состояніе покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія поскольку, внѣшнія силы ему въ томъ не препятствуютъ. Въ поясненіи въ первыхъ двухъ примѣрахъ какъ бы оттѣняется второе толкованіе, причемъ въ первомъ повторено выраженіе «perseverant nisi quatenus», въ третьемъ же сказано просто «сохраняютъ»— conservant, и подчеркнута именно длительность этого сохраненія.

Такимъ образомъ латинскій текстъ включаетъ въ себѣ одновременно оба толкованія или оба понятія и словомъ «perseverare» Ньютонъ использовалъ всю силу латинскаго языка. Сочетать совершенно точно въ русскомъ переводѣ оба толкованія я не съумѣлъ, и въ той формулировкѣ, которая дана въ текстѣ, второе толкованіе какъ бы нѣсколько пересиливаетъ.

Какъ при формулировкѣ, такъ и при поясненіи второго закона подразумѣвается, что продолжительность дѣйствія силы или постоянная или одна и та же для сравниваемыхъ силъ. Въ непосредственной связи со вторымъ закономъ находится лемма X, въ которой показывается, что въ предѣлѣ для безконечно-малыхъ промежутковъ времени измѣненія скорости тѣла, а значитъ и количества движенія, производимыя силою, пропорціональны времени, пройденное же тѣломъ по направленію силы пространство пропорціонально квадрату времени. Эта лемма въ связи со вторымъ закономъ и съ понятіемъ объ «ускореніи» въ его теперешнемъ смыслѣ и устанавливаетъ пропорціональность силы ускоренію.

Въ поученіи въ концѣ отдѣла о законахъ движенія Ньютонъ особенно подробно останавливается на третьемъ законѣ, показывая какъ подтвержденія его опытами, такъ и важныя его примѣненія во всѣхъ случаяхъ, гдѣ дѣло идетъ не объ одномъ, а о нѣсколькихъ тѣлахъ, дѣйствующихъ другъ на друга.

онѣ приложены разомъ всѣ вмѣстѣ или же послѣдовательно и постепенно. Это количество движенія, которое всегда происходитъ по тому же направленію какъ и производящая его сила, если тѣло уже находилось въ движеніи при совпаденіи направленій, прилагается къ количеству движенія тѣла, бывшему ранѣе, при противоположности вычитается, при наклонности прилагается наклонно и соединяется съ бывшимъ ранѣе сообразно величинѣ и направленію каждаго изъ нихъ.

Законъ III.

Дѣйствію всегда есть равное и противоположное противодѣйствіе, иначе взаимодѣйствія двухъ тѣлъ другъ на друга между собою равны и направлены въ противоположныя стороны.

Если что-либо давитъ на что-нибудь другое или тянетъ его, то оно само этимъ послѣднимъ давится или тянется. Если кто нажимаетъ пальцемъ на камень, то и палецъ его также нажимается камнемъ. Если лошадь тащитъ камень, привязанный къ канату, то и обратно (если можно такъ выразиться) она съ равнымъ усиліемъ оттягивается къ камню, ибо натянутый канатъ своею упругостью производитъ одинаковое усиліе на лошадь въ сторону камня и на камень въ сторону лошади, и насколько этотъ канатъ препятствуетъ движенію лошади впередъ, настолько же онъ побуждаетъ движеніе впередъ камня. Если какое-нибудь тѣло, ударившись въ другое тѣло, измѣняетъ своею силою его количество движенія на сколько-нибудь, то оно претерпитъ отъ силы второго тѣла въ своемъ собственномъ количествѣ движенія то же самое измѣненіе, но обратно направленное, ибо давленія этихъ тѣлъ другъ на друга постоянно равны. Отъ такихъ взаимодѣйствій всегда происходятъ равныя измѣненія не скоростей, а количествъ движенія, предполагая конечно, что тѣла никакимъ другимъ усиліямъ не подвергаются. Измѣненія скоростей, происходящія также въ противоположныя стороны, будутъ обратно пропорціональны массамъ тѣлъ, ибо количества движенія получаютъ равныя измѣненія. Этотъ законъ имѣетъ мѣсто и для притяженій, какъ это будетъ доказано въ поученіи.

Слѣдствіе I.

При силахъ совокупныхъ тѣло описываетъ діагональ параллелограмма въ то же самое время, какъ его стороны при раздѣльныхъ [17]).

Если тѣло при дѣйствіи въ мѣстѣ A (фиг. 1) одной только силы M перенеслось бы въ продолженіе заданнаго промежутка времени равномѣр-

---

[17]) Формулировка этого слѣдствія представляется при теперешнемъ изложеніи необычной, и доказательство какъ бы ей несоотвѣтствующимъ, ибо въ немъ предполагается, что когда тѣло описываетъ стороны или діагональ параллелограмма, то оно движется равномѣрно, т.-е. силы на него не дѣйствуютъ, а теорема высказана такъ, что можно думать, что стороны и діагональ параллелограмма описываются при продолжающемся дѣйствіи

нымъ движенiемъ изъ A въ B, и если бы при дѣйствiи въ томъ же мѣстѣ одной только силы N оно перенеслось бы изъ A въ C, то при дѣйствiи обѣихъсилъ оно перенесется въ то же самое время изъ A въ D по дiагонали параллелограмма $ABCD$.

Такъ какъ сила N дѣйствуетъ по направленiю прямой AC параллельной BD, то по второму закону эта сила нисколько не измѣнитъ той скорости приближенiя къ прямой BD, которая была произведена первою силою. Слѣдовательно, тѣло въ продолженiе даннаго времени достигнетъ до линiи BD, была ли сила N приложена или нѣтъ. На основанiи такого же

силъ и притомъ силъ какихъ угодно, постоянныхъ или перемѣнныхъ и въ продолженiе какого-угодно, лишь бы во всѣхъ случаяхъ того же самаго промежутка времени. Но необходимо имѣть въ виду второй законъ, по которому скорости, сообщаемыя разными силами тому же тѣлу, пропорцiональны этимъ силамъ и такъ же направлены. Въ то время, когда были изданы «Начала» представленiя скорости въ видѣ отрѣзка прямой не было, почему вмѣсто этого представленiя Ньютонъ и беретъ тѣ пути, которые тѣло могло бы описать въ теченiе нѣкотораго произвольно заданнаго промежутка времени, и вотъ объ этомъ-то времени послѣ прекращенiя дѣйствiя силы и идетъ рѣчь въ теоремѣ. Такимъ образомъ эта теорема при теперешней терминологiи составляетъ не что иное, какъ сложенiе количествъ движенiя по правилу параллелограмма. Первыя слова доказательства также весьма кратки, если развить подробно ихъ смыслъ, то можно бы передать его такъ: «сила M, дѣйствуя одна, могла бы сообщить тѣлу въ продолженiе нѣкотораго промежутка времени t_0 такую скорость, что тѣло, двигаясь затѣмъ изъ точки A съ этою скоростью равномѣрно, прошло бы въ теченiе даннаго промежутка времени T путь AB. Сила N, дѣйствуя одна, могла бы сообщить въ продолженiе того же промежутка t_0 такую скорость, что тѣло, двигаясь затѣмъ съ этою скоростью равномѣрно, прошло бы въ теченiе даннаго промежутка времени T путь AC, тогда если бы на тѣло дѣйствовали одновременно и совмѣстно въ теченiе того же промежутка времени t_0 обѣ силы M и N, то онѣ сообщили бы тѣлу такую скорость, что тѣло, двигаясь затѣмъ съ этою скоростью равномѣрно, прошло бы въ теченiе даннаго промежутка времени T путь AD, представляющiй дiагональ параллелограмма $ABCD$».

Вторая часть доказательства изложена подробно и ею вполнѣ разъясняется смыслъ, который надо придавать какъ теоремѣ, такъ и не вполнѣ ясно выраженной первой части доказательства. Можно думать, что потому и теорема и начало ея доказательства и высказаны такъ неопредѣленно, чтобы побудить читателя прослѣдить доказательство до конца, и самому восполнить краткость формулировки.

Ньютоново доказательство отнюдь не предполагаетъ, что тѣло до дѣйствiя силъ находилось въ покоѣ, въ немъ также не оговорено, въ продолженiе какого промежутка времени силы M и N сообщали тѣлу скорости. Этотъ промежутокъ времени можетъ быть безконечно малъ, все равно сообщенныя скорости будутъ пропорцiональны силамъ, а это значитъ, что силы M и N могутъ быть не только постоянныя, но и перемѣнныя; въ этомъ послѣднемъ случаѣ надо предполагать сказанный промежутокъ безконечно малымъ и переходить къ предѣлу. Здѣсь Ньютонъ на этомъ не останавливается, но дальше въ леммѣ X и въ предложенiи I онъ на это обращаетъ вниманiе.

разсужденія, къ концу того же промежутка времени тѣло должно находиться и гдѣ-либо на прямой CD, слѣдовательно, оно должно быть въ ихъ пересѣченіи D. Переходитъ же оно изъ A въ D прямолинейно на основаніи закона I.

Слѣдствіе II.

Отсюда явствуетъ составленіе силы направленной по AD изъ какихъ-либо двухъ наклоненныхъ другъ къ другу AB и BD и, наоборотъ, разложеніе любой силы направленной по AD на наклонныя AB и BD. Какъ это сложеніе, такъ и разложеніе безпрестанно подтверждаются въ ученіи о машинахъ [18]).

Такъ пусть къ точкамъ M и N (фиг. 2а) колеса, взятымъ на радіусахъ его OM и ON въ неодинаковомъ разстояніи отъ центра, подвѣшены на нитяхъ грузы A и P, и требуется опредѣлить усилія, съ которыми эти грузы стремятся вращать колесо.

Черезъ центръ O проводится прямая KOL перпендикулярно къ нитямъ и пересѣкающая ихъ въ K и L; центромъ O и бо̀льшимъ изъ разстояній OL проводится кругъ пересѣкающій MA въ D и строятся прямыя: DC перпендикулярно къ OD, и AC ей параллельно. Такъ какъ ничто не измѣнится отъ того, будутъ ли точки K, L, D нитей прикрѣплены къ плоскости колеса или нѣтъ, то дѣйствіе грузовъ будетъ одно и то же, подвѣсить ли ихъ въ точкахъ K и L или въ точкахъ D и L. Но если полную величину вѣса груза A представить линіей AD, то этотъ вѣсъ разлагается на силы AC и CD, изъ коихъ AC дѣйствующая по направленію радіуса OD прямо отъ центра не имѣетъ значенія для вращенія колеса, вторая же сила, дѣйствующая перпендикулярно къ радіусу OD, имѣетъ такое же значеніе, какъ если бы она дѣйствовала перпендикулярно радіусу OL равному OD, т.-е. такое же, какъ вѣсъ груза P, если его взять такимъ, чтобы онъ относился къ вѣсу A какъ длина DC къ DA.

Но по подобію треугольниковъ DAC и KOD и равенству OD и OL будетъ:

$$DC : DA = OK : OL$$

слѣдовательно, когда вѣса A и P обратно пропорціональны плечамъ OK и OL, составляющимъ продолженія одно другого, то ихъ дѣйствія равносильны и они будутъ находиться въ равновѣсіи, это и есть извѣстное

[18]) Такъ какъ сообщаемыя въ продолженіе равныхъ промежутковъ времени количества движенія, а для того же самаго тѣла скорости имѣютъ направленія дѣйствующихъ силъ и пропорціональны имъ, въ предыдущемъ же слѣдствіи показано, что эти количества движенія или скорости слагаются по правилу параллелограмма, то, какъ и сказано въ этомъ слѣдствіи, «сложеніе и разложеніе силъ явствуетъ изъ предыдущаго слѣдствія». Заключительныя его слова суть: «ex mechanica», но по дальнѣйшему изложенію и по предисловію автора видно, что подъ этимъ словомъ здѣсь надо разумѣть «ученіе о машинахъ»; а не «механику» вообще.

свойство вѣсовъ, рычага и ворота. Когда который нибудь изъ двухъ грузовъ будетъ больше нежели въ этомъ отношенiи, то и усилiе къ вращенiю колеса будетъ соотвѣтственно больше.

Пусть грузъ p, коего вѣсъ равенъ вѣсу груза P, отчасти подвѣшенъ на нити Np (фиг. 2b), частью же поддерживается наклонною плоскостью G.

Если провести прямыя pN и NH соотвѣтственно перпендикулярно горизонтальной плоскости и плоскости G, то представивъ черезъ pH направленную внизъ силу [19]), равную вѣсу груза p, можно ее разложить на силы pN и HN.

Если плоскость Q, пересѣкающая данную плоскость G по горизонтальной прямой, будетъ взята перпендикулярно направленiю нити pN, и грузъ p поддерживался бы лишь этими двумя плоскостями, то онъ давилъ бы на эти плоскости съ силами pN и HN соотвѣтственно этимъ плоскостямъ перпендикулярными, т.-е. на плоскость Q силою pN и на плоскость G силою HN. Поэтому, если убрать плоскость Q, чтобы грузъ натягивалъ нить, то такъ какъ нить, поддерживая грузъ теперь замѣняетъ убранную прочь плоскость Q, то она будетъ натянута съ тою самою силою pN, которая раньше давила на плоскость. Слѣдовательно, натяженiе этой наклонной нити будетъ такъ относиться къ натяженiю той другой отвѣсной нити NP, какъ длина pN къ pH. Поэтому, если отношенiе вѣса груза p къ вѣсу груза A будетъ равно отношенiю, составленному изъ отношенiя длинъ pH къ pN и обратнаго отношенiя кратчайшихъ разстоянiй отъ центра колеса до нитей подвѣса pN и AM этихъ грузовъ, то ихъ дѣйствiя на колесо будутъ одинаковы и они будутъ взаимно уравновѣшиваться, что̀ всякiй можетъ испытать.

Грузъ p надавливающiй на вышеуказанныя двѣ наклонныя плоскости, находится въ условiяхъ, подобныхъ тѣмъ какъ клинъ, коего грани и были бы эти плоскости, слѣдовательно, можно опредѣлить соотношенiе между силами клина и молота, а именно давленiе на грань Q такъ относится къ силѣ, дѣйствующей на клинъ по направленiю прямой pH отъ вѣса ли его или отъ удара молота, какъ pN относится къ pH, къ давленiю же на вторую грань G, какъ pN къ NH.

---

[19]) При сложенiи и разложенiи силъ по правилу параллелограмма Ньютонъ обыкновенно строитъ лишь стороны той ломанной, коей замыкающая и есть равнодѣйствующая предложенныхъ или искомыхъ силъ. Кромѣ того, онъ часто дѣлаетъ это построенiе гдѣ-нибудь не заботясь о томъ, чтобы стороны и дiагональ параллелограмма сходились именно въ точкѣ приложенiя этихъ силъ, построенiе служитъ ему не для нагляднаго представленiя всѣхъ трехъ элементовъ силы, т.-е. точки приложенiя, величины и направленiя, а лишь для установленiя соотношенiй между величинами составляющихъ и равнодѣйствующей и направленiями ихъ; наконецъ онъ часто дѣлаетъ построенiе такъ, что сила какъ бы направлена къ точкѣ схода сторонъ и дiагонали, а не отъ нея, какъ это принято теперь. Поэтому приведенныя у него построенiя представляются теперь нѣсколько необычными, но само собою очевидно, какъ отъ нихъ перейти къ принятымъ теперь.

Наконецъ и сила винта найдется подобнымъ же разложеніемъ, ибо онъ не что иное какъ клинъ, вгоняемый рычагомъ.

Примѣненіе этого слѣдствія весьма широкое, и благодаря этому широкому примѣненію справедливость его постоянно обнаруживается, ибо отъ вышесказаннаго зависитъ все ученіе о машинахъ разными авторами излагаемое различнымъ образомъ. Пользуясь этимъ же слѣдствіемъ легко выводятся соотношенія между усиліями въ машинахъ составленныхъ изъ колесъ, барабановъ, воротовъ, рычаговъ, блоковъ, натянутыхъ канатовъ и другихъ механизмовъ [20]) и вѣсами грузовъ поднимаемыхъ или прямо, или наклонно, а также силы связокъ приводящихъ въ движеніе кости животныхъ.

Слѣдствіе III.

Количество движенія получаемое беря сумму количествъ движенія, когда они совершаются въ одну сторону и разность, когда они совершаются въ стороны противоположныя, не измѣняется отъ взаимодѣйствія тѣлъ между собою [21]).

Такъ какъ по III-му закону дѣйствіе и противодѣйствіе между собою равны и противоположны, то по II-му закону они производятъ равныя измѣненія количествъ движенія направленныя въ противоположныя стороны. Такимъ образомъ, если движенія двухъ тѣлъ направлены въ одну сторону, то, что приложится къ количеству движенія тѣла идущаго впереди, то вычтется изъ количества движенія тѣла за нимъ слѣдующаго, и сумма количествъ движенія обоихъ тѣлъ останется прежняя. Если же тѣла движутся въ противоположныя стороны, то вычтется поровну изъ количествъ движенія каждаго изъ нихъ, и, слѣдовательно, разность количествъ движенія направленныхъ въ обратныя стороны останется безъ перемѣны.

Пусть масса шара A втрое больше массы шара B и скорость его заключаетъ двѣ части, такихъ, коихъ скорость послѣдующаго за нимъ шара B заключаетъ десять, и движеніе шаровъ происходитъ по той же самой прямой. Количества движенія A и B будутъ относиться какъ 6 къ 10; положимъ, что эти количества соотвѣтственно равны 6 и 10 ча-

---

[20]) Здѣсь словомъ «механизмовъ» переведены слова «potentiis mechanicis» равносильныя словамъ «machinis» и очевидно употребленныя, чтобы избѣжать повторенія этого послѣдняго (см. пр. 2).

[21]) Въ «Началахъ» строго проводится, почти исключительно, чисто геометрическое изложеніе, совершенно избѣгая алгебры, поэтому законъ сохраненія количествъ движенія и высказанъ въ такой формѣ, что словъ «алгебраическая сумма» не встрѣчается. Кромѣ того, какъ теорема. такъ и ея доказательство какъ бы ограничиваютъ этотъ законъ случаемъ движенія двухъ тѣлъ по той же самой прямой. Но сказанное относительно косвеннаго удара, въ особенности же законъ сохраненія движенія центра тяжести показываютъ, что Ньютонъ не ограничивался этимъ частнымъ случаемъ, но счелъ лишь излишнимъ излагать этотъ вопросъ подробнѣе.

стямъ, такъ, что сумма ихъ равна 16. При встрѣчѣ тѣлъ, если тѣло A пріобрѣтетъ количество движенія равное 3, 4 или 5 частямъ, то тѣло B утратитъ столько же частей, и, слѣдовательно, послѣ отраженія тѣло A пойдетъ, имѣя количество движенія равное 9, 10 или 11 частямъ, тѣло же B будетъ имѣть или 7 или 6 или 5 частей, такъ, что сумма все время остается равной 16 какъ и раньше. Если бы тѣло A пріобрѣло 9, 10, 11 или 12 частей, и, слѣдовательно, послѣ встрѣчи шло бы имѣя количество движенія равное 15, 16, 17 или 18, то тѣло B, потерявъ столько же, сколько пріобрѣтено тѣломъ A, или идетъ впередъ съ 1 частью послѣ потери 9, или находится въ покоѣ при потерѣ 10 частей, или же идетъ назадъ потерявъ не только все свое количество движенія, но еще (какъ сказано выше), и одну часть въ добавокъ, или же при потерѣ 12 частей идетъ назадъ съ количествомъ движенія равнымъ 2. Такимъ образомъ суммы количествъ движенія направленныхъ въ ту же сторону какъ $(15+1)$ или $(16+0)$ и разности направленныхъ въ противоположныя какъ $(17-1)$ или $(18-2)$ составляютъ постоянно 16 какъ то было до встрѣчи и отраженія. Найдя количества движенія, которыми обладаютъ тѣла послѣ отраженія, опредѣлимъ и скорости каждаго изъ нихъ, ибо каждая изъ этихъ скоростей такъ относится къ скорости бывшей до удара, какъ количества движенія соотвѣтствующаго тѣла послѣ и до удара. Такъ, напр., для послѣдняго случая тѣла A, коего количество движенія до удара было равно 6 и скорость 2, послѣ же отраженія количество движенія стало 18, то скорость будетъ 6, какъ это слѣдуетъ изъ пропорціи $18:6=6:2$.

Когда тѣла не сферическія или же двигаясь по разнымъ прямымъ соударяются косвенно, и требуется найти количества движенія ихъ послѣ отраженія, то необходимо сперва найти положеніе плоскости, касающейся обоихъ тѣлъ въ точкѣ ихъ встрѣчи, затѣмъ количество движенія каждаго тѣла разложить на два (по слѣд. II), одно перпендикулярно сказанной плоскости, другое ей параллельно. Количества движенія параллельныя плоскости сохранятся безъ измѣненія, ибо взаимодѣйствіе тѣлъ происходитъ по прямой перпендикулярной этой плоскости. Количества же движенія перпендикулярныя получаютъ равныя и противоположныя измѣненія, такъ что сумма этихъ количествъ движенія, когда они направлены въ одну сторону, и разность, когда они направлены въ стороны обратныя, остается тою же самою, какая была до удара. Отъ отраженій подобнаго рода могутъ происходить и вращательныя движенія тѣлъ около ихъ собственныхъ центровъ, но такихъ случаевъ я въ дальнѣйшемъ не разсматриваю и было бы весьма долго излагать все сюда относящееся.

Слѣдствіе IV.

Центръ тяжести системы двухъ или нѣсколькихъ тѣлъ отъ взаимодѣйствія тѣлъ другъ на друга не измѣняетъ ни своего состоянія покоя ни движенія; поэтому центръ тяжести системы всѣхъ дѣй-

ствующихъ другъ на друга тѣлъ (при отсутствіи внѣшнихъ дѣйствій и препятствій), или находится въ покоѣ, или движется равномѣрно и прямолинейно.

Въ самомъ дѣлѣ, если двѣ точки перемѣщаются равномѣрно по прямымъ линіямъ, и разстояніе между ними раздѣляется въ заданномъ отно шеніи, то и точка раздѣла или находится въ покоѣ или движется равномѣрно по прямой. Это будетъ доказано въ леммѣ XXIII и ея слѣдствіи для того случая, когда движеніе обѣихъ точекъ происходитъ въ одной плоскости, такимъ же разсужденіемъ это могло бы быть доказано и для того случая, когда движенія совершаются не въ одной плоскости. Слѣдовательно, если какія-либо тѣла движутся равномѣрно и прямолинейно, то центръ тяжести любой пары ихъ или покоится или движется равномѣрно по прямой, и кромѣ того прямая соединяющая сказанные прямолинейно перемѣщающіеся центры тяжести тѣлъ, раздѣляется общимъ ихъ центромъ тяжести въ постоянномъ отношеніи.

Подобнымъ же образомъ общій центръ тяжести этихъ двухъ тѣлъ и третьяго или покоится, или движется равномѣрно по прямой, ибо и имъ разстояніе между общимъ центромъ тяжести пары тѣлъ и центромъ тяжести третьяго раздѣляется въ постоянномъ отношеніи. Точно также общій центръ тяжести этихъ трехъ тѣлъ и какого-либо четвертаго или покоится, или движется равномѣрно по прямой, ибо и имъ разстояніе между центромъ тяжести системы трехъ тѣлъ и центромъ тяжести четвертаго раздѣляется въ постоянномъ отношеніи и т. д. до безконечности.

Слѣдовательно, въ системѣ тѣлъ между которыми нѣтъ никакихъ взаимодѣйствій, и которыя не подвержены никакимъ внѣшнимъ силамъ, такъ что каждое изъ этихъ тѣлъ въ отдѣльности движется равномѣрно по своему прямолинейному пути, общій центръ тяжести или покоится, или движется равномѣрно и прямолинейно.

Далѣе, такъ какъ въ системѣ двухъ тѣлъ дѣйствующихъ другъ на друга, разстояніе центра тяжести каждаго изъ нихъ до общаго центра тяжести системы обратно пропорціонально массамъ тѣлъ, то относительныя количества движенія, съ которыми оба тѣла или приближаются къ этому центру или отъ него удаляются, между собою равны. Вслѣдствіе этого, сказанный центръ тяжести системы не претерпитъ, отъ происходящихъ въ противоположныхъ направленіяхъ равныхъ измѣненій количествъ движенія, вызываемыхъ дѣйствіемъ тѣлъ другъ на друга, ни ускоренія, ни замедленія въ своемъ движеніи и не измѣнитъ своего состоянія покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія.

Въ системѣ многихъ тѣлъ центръ тяжести любой пары ихъ дѣйствующихъ другъ на друга, не претерпѣваетъ отъ этого взаимодѣйствія никакого измѣненія своего состоянія, общій центръ тяжести остальныхъ тѣлъ, которыхъ это взаимодѣйствіе не касается, тѣмъ болѣе не измѣнитъ своего состоянія. Разстояніе центра тяжести этихъ двухъ тѣлъ до общаго центра тяжести всѣхъ остальныхъ раздѣляется центромъ тяжести всей системы на части обратно пропорціональныя суммамъ массъ взятой пары тѣлъ и всѣхъ прочихъ, т.-е. въ постоянномъ отношеніи. Отсюда слѣдуетъ, что, такъ какъ центръ тяжести двухъ взятыхъ тѣлъ сохраняетъ свое состояніе, то и общій центръ тяжести всей системы его сохраняетъ, и, слѣдовательно, отъ дѣйствія двухъ тѣлъ другъ на друга онъ не измѣняетъ своего состоянія покоя или равномѣрнаго прямолинейнаго движенія. Но въ системѣ многихъ тѣлъ, всѣ дѣйствія между тѣлами состоятъ или изъ взаимодѣйствій одного тѣла на другое, или же они составляются изъ такихъ взаимодѣйствій между двумя тѣлами, и, слѣдовательно, они не вліяютъ на измѣненіе состоянія покоя или движенія центра тяжести этой системы.

Такъ какъ центръ тяжести системы, когда взаимодѣйствій между тѣлами нѣтъ, или покоится, или движется равномѣрно и прямолинейно, то на основаніи сказаннаго выше несмотря на взаимодѣйствія тѣлъ онъ будетъ продолжать все время или покоиться или двигаться равномѣрно и прямолинейно, если только онъ не будетъ выведенъ изъ этого состоянія силами дѣйствующими извнѣ.

Слѣдовательно, по отношенію къ центру тяжести системы нѣсколькихъ тѣлъ имѣетъ мѣсто тотъ же самый законъ сохраненія состоянія покоя или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія какъ и для одного тѣла. Такимъ образомъ поступательное количество движенія отдѣльнаго ли тѣла или системы тѣлъ надо всегда разсчитывать по движенію центра тяжести ихъ [22]).

Слѣдствіе V.

Относительныя движенія другъ по отношенію къ другу тѣлъ заключенныхъ въ какомъ-либо пространствѣ одинаковы покоится ли это пространство или движется равномѣрно и прямолинейно безъ вращенія.

Такъ какъ разности [23]) движеній направленныхъ въ ту же сторону и суммы направленныхъ въ стороны противоположныя одинаковы въ обоихъ

---

[22]) Длиннота доказательства закона сохраненія движенія центра тяжести системы происходитъ единственно отъ того, что не примѣненъ аналитическій способъ, но зато при изложенномъ доказательствѣ ясно видна связь этого закона съ предыдущимъ.

Формулировка предложенія обнимаетъ лишь частный случай общаго закона о движеніи центра тяжести системы тѣлъ, но заключительныя слова доказательства, о разсчетѣ количества движенія, заставляютъ думать, что Ньютону былъ извѣстенъ и этотъ законъ. На это указываютъ также заключительныя слова доказательства пред. LXV, въ которомъ разсматривается движеніе системы многихъ малыхъ тѣлъ около одного большого центральнаго и гдѣ сказано: «центръ тяжести системы будетъ описывать вокругъ большого тѣла коническое сѣченіе и радіусомъ проводимымъ къ этому наибольшему будутъ описываться площади пропорціональныя временамъ».

[23]) Выраженіе «разности какихъ-либо величинъ когда онѣ направлены въ одну сторону или суммы, когда онѣ направлены въ стороны противо-

случаяхъ (какъ это слѣдуетъ изъ условій), всѣ же усилія, съ которыми тѣла дѣйствуютъ другъ на друга при столкновеніяхъ зависятъ лишь отъ этихъ разностей или суммъ, то по II-му закону послѣдствія столкновеній будутъ равныя въ обоихъ случаяхъ, и, слѣдовательно, относительныя движенія останутся въ обоихъ случаяхъ одинаковыми. Это подтверждается обильно опытами. Всѣ движенія на кораблѣ совершаются одинаково, находится ли онъ въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно.

Слѣдствіе VI.

Если нѣсколько тѣлъ движущихся какъ бы то ни было другъ относительно друга будетъ подвержено дѣйствію равныхъ ускоряющихъ силъ направленныхъ по параллельнымъ между собою прямымъ, то эти тѣла будутъ продолжать двигаться другъ относительно друга также какъ если бы сказанныя силы на нихъ не дѣйствовали.

Такъ какъ эти силы, дѣйствуя на всѣ тѣла одинаково (соотвѣтственно массамъ движущихся тѣлъ), и по направленіямъ параллельнымъ будутъ сообщать всѣмъ тѣламъ одинаковыя скорости (по II-му закону), то онѣ ни въ чемъ не измѣнятъ ни положеній, ни движеній тѣлъ другъ относительно друга.

Поученіе.

До сихъ поръ я излагалъ начала принятыя математиками и подтверждаемыя многочисленными опытами. Пользуясь первыми двумя законами и первыми двумя слѣдствіями *Галилей* нашелъ, что паденіе тѣлъ пропорціонально квадрату времени и, что движеніе брошенныхъ тѣлъ происходитъ по параболѣ; это подтверждается опытомъ поскольку такое движеніе не претерпѣваетъ замедленія отъ сопротивленія воздуха. При паденіи тѣла, сила тяжести въ отдѣльные равные между собою весьма малые промежутки времени, дѣйствуя одинаково, сообщаетъ этому тѣлу равныя количества дви-

---

положныя», встрѣчается въ «Началахъ» нѣсколько разъ и по своему смыслу равносильно теперешнему термину «геометрическая разность» какихъ-либо векторіальныхъ величинъ. Когда же говорится: «суммы какихъ-либо величинъ, когда онѣ направлены въ ту же сторону и разности, когда онѣ направлены въ стороны противоположныя», то это равносильно теперешнему термину «геометрическая сумма», и при поясненіи второго закона упомянуто о такомъ геометрическомъ сложеніи количествъ движенія. Въ другихъ случаяхъ такого упоминанія не дѣлается.

Подъ словами «движеніе» здѣсь подразумѣваются перемѣщенія и скорости.

Геометрическія разности, о которыхъ идетъ рѣчь въ этомъ предложеніи суть геометрическія разности перемѣщеній и скоростей всѣхъ тѣлъ системы и одного изъ нихъ, относительно котораго движеніе прочихъ опредѣляется.

женія [24]) и производитъ равныя скорости, слѣдовательно, за все время движенія она сообщаетъ тѣлу полныя количества движенія и скорости пропорціональныя времени. Пространства проходимыя въ пропорціональныя времена будутъ относиться какъ произведенія скорости и времени, т.-е. какъ квадраты времени. Тѣлу, подброшенному вверхъ (вертикально), тяжесть сообщаетъ равномѣрно количества движенія [24]) пропорціональныя времени и уменьшаетъ скорость также пропорціонально времени, такъ, что времена подъема до наибольшей высоты пропорціональны той скорости, которая подлежитъ уничтоженію, самыя же эти высоты пропорціональны скорости и времени, т.-е. пропорціональны квадрату скорости.

Движеніе тѣла брошеннаго по какой-нибудь прямой (наклонной къ горизонту) слагается изъ движенія по этой прямой происходящаго отъ начальнаго толчка и изъ движенія происходящаго отъ силы тяжести. Такъ если бы тѣло A (фиг. 3) въ своемъ движеніи только отъ толчка описало бы въ данное время прямолинейный путь AB; подъ вліяніемъ же только силы тяжести падая внизъ путь AC, то дополнивъ параллелограммъ $ABCD$, получимъ въ точкѣ D мѣсто тѣла въ концѣ разсматриваемаго времени. Кривая AED, описанная тѣломъ есть касающаяся прямой AB въ точкѣ A парабола, ордината коей BD пропорціональна AB^2.

Отъ тѣхъ же законовъ и слѣдствій зависятъ извѣстныя свойства временъ качаній маятниковъ, которыя подтверждаются ежедневнымъ опытомъ съ часами.

Изъ этихъ же двухъ законовъ и изъ третьяго, кавалеръ Хр. *Вренъ*, Іоаннъ *Уаллисъ* S. T. D. *) и Христіанъ *Гюйгенсъ*, величайшіе геометры нашего времени, вывели законы удара и отраженія тѣлъ и почти одновременно сообщили ихъ Королевскому обществу, причемъ ихъ выводы, во всемъ касающемся этихъ законовъ, между собою согласны. По времени обнародованія найденнаго, Уаллисъ былъ первымъ, затѣмъ слѣдовалъ Вренъ, затѣмъ Гюйгенсъ. Справедливость этихъ законовъ была подтверждена Уаллисомъ передъ Королевскимъ обществомъ опытами съ маятниками. Эти опыты были затѣмъ признаны знаменитымъ *Маріотомъ* достойными быть изложенными въ его книгѣ, цѣликомъ посвященной этому предмету. Однако, чтобы результаты такихъ опытовъ въ точности совпадали съ теоріей, необходимо принять во вниманіе какъ сопротивленіе воздуха, такъ и степень упругости соударяющихся тѣлъ.

Пусть шары A и B (фиг. 4) подвѣшаны на равныхъ и параллельныхъ нитяхъ AC, BD изъ точекъ C и D. Опишемъ изъ этихъ точекъ какъ изъ центровъ радіусами BD и AC полуокружности EAF и GBH. Отклонивъ тѣло A до точки R дуги EAF и убравъ тѣло B, пускаемъ A качаться и

---

[24]) Въ текстѣ сказано «vires»—силы, причемъ за «силу тѣла» принимается его количество движенія. Въ переводѣ употребленъ теперешній терминъ.

*) Sacrosanctae Theologiae Doctor—Докторъ Богословія.

замѣчаемъ ту точку V, до которой оно дойдетъ послѣ одного полнаго размаха, тогда RV представляетъ уменьшеніе величины размаха отъ сопротивленія воздуха. Пусть ST есть четвертая часть RV, такъ расположенная по срединѣ этой дуги, чтобы RS и TV были между собою равны, т.-е., чтобы было $RS = TV = \frac{3}{2} ST$, тогда ST представитъ весьма близко вліяніе сопротивленія воздуха при размахѣ отъ S до A. Помѣстимъ тѣло B на его мѣсто; если тѣло A пустить изъ точки S, то можно безъ чувствительной погрѣшности принять, что его скорость при ударѣ въ низшемъ его положеніи будетъ такая же, какъ если бы оно свободно падало въ пустотѣ изъ точки T. Эту скорость можно представить хордой TA, ибо извѣстно, что скорость маятника въ низшей точкѣ его дуги пропорціональна хордѣ дуги его паденія. Пусть послѣ отраженія тѣло A достигаетъ до точки S и тѣло B до точки k. Убравъ тѣло B, опредѣляемъ положеніе такой точки v, изъ которой если пустить тѣло A, то послѣ полнаго размаха оно приходитъ въ r, если тогда взять $st = \frac{1}{4} rv$ и помѣстить точки s и t такъ, чтобы было $rs = tv$, то хорда tA представитъ ту скорость, которую имѣетъ тѣло A послѣ отраженія, ибо t будетъ то истинное и исправленное мѣсто, до котораго могло бы дойти тѣло A при отсутствіи сопротивленія воздуха.

Подобнымъ же образомъ исправляется и мѣсто k, и находится та точка l, до которой дошло бы тѣло B въ пустотѣ. Производя всѣ испытанія такимъ способомъ, мы какъ бы производимъ ихъ въ пустотѣ. Умноживъ затѣмъ массу тѣла A (если можно такъ выразиться) на хорду TA, представляющую его скорость, получимъ его количество движенія въ точкѣ A передъ самымъ моментомъ удара. Затѣмъ умноживъ на tA, получимъ его количество движенія послѣ отраженія. Точно также надо массу тѣла B умножить на хорду Bl, чтобы получить его количество движенія послѣ отраженія. Подобнымъ образомъ находятся количества движенія каждаго изъ двухъ тѣлъ какъ передъ ударомъ, такъ и послѣ отраженія и въ томъ случаѣ, когда они одновременно пускаются изъ разныхъ мѣстъ, послѣ чего и можно сравнивать количества движенія между собою и выводить послѣдствія удара и отраженія.

Производя такимъ образомъ испытанія надъ маятниками длиною 10 футъ и надъ массами равными и неравными и пуская тѣла такъ, чтобы они встрѣчались, пройдя большіе промежутки, напр., 8, 12, 16 футъ, я получалъ съ ошибкою, меньшею 3 дюймовъ въ измѣреніяхъ, что при прямомъ ударѣ между тѣлами измѣненія ихъ количествъ движенія были равны и направлены въ стороны противоположныя, откуда слѣдуетъ, что дѣйствіе и противодѣйствіе между собою равны. Такъ, напр., если тѣло A ударяло по покоющемуся тѣлу B съ количествомъ движенія, равнымъ девяти частямъ и потерявъ семь, продолжало движеніе съ двумя, то тѣло B отскакивало также съ количествомъ движенія, равнымъ семи. Когда тѣла шли другъ другу навстрѣчу, напр., A съ количествомъ движенія равнымъ двѣнадцати и B съ количествомъ движенія равнымъ шести, и если послѣ удара A шло въ обратную сторону съ количествомъ движенія равнымъ двумъ, то B шло въ обратную сторону съ количествомъ движенія равнымъ восьми, т.-е. оба тѣла, какъ показываетъ вычитаніе, измѣняли свое количество движенія на четырнадцать частей. Въ самомъ дѣлѣ, если изъ количества движенія A вычесть двѣнадцать, то останется ноль, по вычетѣ же еще двухъ, получится количество движенія, равное двумъ, направленное въ обратную сторону, также по вычетѣ четырнадцати изъ количества движенія тѣла B, равнаго шести, остается количество движенія, равное восьми, направленное въ обратную сторону.

То же самое происходитъ и при движеніи тѣлъ въ одну сторону: пусть, напр., тѣло A идетъ болѣе быстро и съ количествомъ движенія четырнадцать, B медленнѣе и съ количествомъ движенія равнымъ пяти, если послѣ удара A продолжаетъ идти съ количествомъ движенія пять, то B пойдетъ съ четырнадцатью, получивъ девять частей отъ A.

Подобное соотношеніе имѣетъ мѣсто и въ остальныхъ случаяхъ: полное количество движенія, разсчитываемое взявъ сумму количествъ движенія, когда они направлены въ одну сторону и разность, когда они направлены въ стороны противоположныя, никогда не измѣняется отъ удара при встрѣчѣ тѣлъ.

Ошибки въ одинъ или два дюйма при измѣреніяхъ слѣдуетъ приписать трудности произвести ихъ достаточно точно. Была также трудность и въ томъ, чтобы пустить оба тѣла такъ, чтобы они одновременно приходили въ низшее свое положеніе, а также, чтобы замѣтить мѣста s и k, до которыхъ тѣла поднимались послѣ встрѣчи. Неравномѣрное распредѣленіе плотности и неравномѣрность строенія тѣлъ, происходящія отъ случайныхъ причинъ, приводятъ также къ погрѣшностямъ.

Чтобы опровергнуть возраженіе противъ высказаннаго выше правила, для доказательства котораго эти опыты и производились, будто бы оно предполагаетъ, что тѣла или абсолютно тверды, или вполнѣ упруги, т.-е. такія, какихъ въ природѣ не встрѣчается, добавлю, что описанные опыты удаются какъ съ тѣлами мягкими, такъ и съ жесткими и совершенно не зависятъ отъ степени твердости ихъ. Если это правило прилагать къ тѣламъ не вполнѣ твердымъ, то необходимо лишь уменьшать скорость отраженія сообразно степени упругости тѣлъ.

По теоріи Врена и Гюйгенса тѣла абсолютно твердыя отскакиваютъ одно отъ другого со скоростью, равною скорости встрѣчи. Точнѣе, это слѣдовало бы сказать о тѣлахъ вполнѣ упругихъ. Въ тѣлахъ не вполнѣ упругихъ скорость расхожденія должна быть уменьшаема соотвѣтственно степени упругости. Эта степень упругости (если только тѣла при ударѣ не повреждаются или не претерпѣваютъ удлиненій, какъ бы отъ ударовъ молотомъ) вполнѣ опредѣленная и (какъ мнѣ кажется) производитъ то, что тѣла расходятся съ такою относительною скоростью, которая составляетъ постоянную долю относительной скорости ихъ встрѣчи. Такъ, напр., я производилъ слѣдующіе опыты надъ мячами, плотно смотанными изъ шерсти и сильно затѣмъ обжатыми. Прежде всего пустивъ маятники и опредѣливъ отраженіе, я опредѣлялъ степень упругости, затѣмъ по найденной степени упругости я разсчитывалъ отраженіе для другихъ случаевъ ударовъ и оно согласовалось съ опытомъ:—мячи всегда отскакивали другъ отъ друга съ относительною скоростью, составлявшей отъ скорости ихъ встрѣчи $\frac{5}{9}$ или около того. Почти съ такою же скоростью отскакивали стальные шары, пробковые—съ нѣсколько меньшей, для стеклянныхъ это отношеніе было близко къ $\frac{15}{16}$. Такимъ образомъ третій законъ по отношенію къ удару и отраженію подтверждается теоріей вполнѣ согласующейся съ опытомъ.

Относительно притяженія дѣло можетъ быть изложено вкратцѣ слѣдующимъ образомъ: между двумя взаимно притягивающимися тѣлами надо вообразить помѣщеннымъ какое-либо препятствіе, мѣшающее ихъ сближенію. Если бы одно изъ тѣлъ A притягивалось бы тѣломъ B сильнѣе, нежели тѣло B притягивается тѣломъ A, то препятствіе испытывало бы со стороны тѣла A бóльшее давленіе, нежели со стороны тѣла B и, слѣдовательно, не осталось бы въ равновѣсіи. Преобладающее давленіе вызвало бы движеніе системы, состоящей изъ этихъ двухъ тѣлъ и препятствія въ сторону тѣла B и въ свободномъ пространствѣ эта система, двигаясь ускоренно, ушла бы въ безконечность. Такое заключеніе нелѣпо и противорѣчитъ первому закону, по которому система должна бы оставаться въ своемъ состояніи покоя, или равномѣрнаго и прямолинейнаго движенія. Отсюда слѣдуетъ, что оба тѣла давятъ на препятствіе съ равными силами, а значитъ и притягиваются взаимно съ таковыми же.

Я производилъ подобный опытъ съ магнитомъ и желѣзомъ: если ихъ помѣстить каждый въ отдѣльный сосудъ и пустить плавать на спокойной водѣ, такъ, чтобы сосуды взаимно касались, то ни тотъ, ни другой не приходятъ въ движеніе, но вслѣдствіе равенства взаимнаго притяженія сосуды испытываютъ равныя давленія и остаются въ равновѣсіи.

Подобнымъ образомъ и притяженіе между землею и отдѣльными ея частями взаимно. Вообразимъ, что земля разсѣчена какою-либо плоскостью EG (фиг. 5) на двѣ части EGF и EGJ—притяженія ихъ другъ другомъ будутъ равны. Въ самомъ дѣлѣ, если отсѣчь другою плоскостью HK параллельной EG отъ части EGJ часть HKJ равную EFG, то ясно, что средняя часть $EGKH$ не будетъ испытывать ни отъ одной изъ крайнихъ бóльшаго притяженія, нежели отъ другой и будетъ находиться между ними какъ бы подвѣшенной, оставаясь въ равновѣсіи и покоѣ. Но вся крайняя часть HJK всѣмъ своимъ вѣсомъ давитъ на среднюю $EGHK$ и побуждаетъ ее двигаться въ сторону другой крайней EFG — слѣдовательно, сила, съ которою сумма частей $EGHK$ и HKJ, т.-е. EGJ стремится къ EFG, равна вѣсу (притяженію) части HKJ, т.-е. вѣсу части EFG, слѣдовательно, притяженія другъ къ другу, т.-е. вѣса частей GEF и GEJ другъ на другѣ между собою равны, что я и имѣлъ въ виду показать. Если бы эти вѣса не были между собою равны, то вся земля, плавающая въ свободномъ эфирѣ, уступила бы бо́льшему вѣсу и подъ его дѣйствіемъ ушла бы въ безконечность.

Подобно тому, какъ при ударѣ и отраженіи, тѣла, коихъ скорости обратно пропорціональны массамъ, равнозначущи, такъ и при движеніи механическихъ приборовъ дѣйствующія силы, коихъ скорости, взятыя по направленію самихъ силъ (проекціи скорости точки приложенія каждой силы на направленіе этой силы), обратно пропорціональны этимъ силамъ, равнозначущи между собою и при стремленіи въ противоположныя стороны взаимно уравновѣшиваются. Такимъ образомъ въ стремленіи привести въ движеніе коромысло вѣсовъ равнозначущи грузы обратно пропорціональные, тѣмъ направленнымъ прямо вверхъ или внизъ, скоростямъ, кои они получаютъ при качаніяхъ коромысла, т.-е. грузы поднимающіеся или опускающіеся вертикально равнозначущи, если они обратно пропорціональны разстояніямъ ихъ точекъ подвѣса отъ ребра опоры коромысла. Если же эти грузы поднимаются или опускаются по наклоннымъ плоскостямъ, или по инымъ препятствіямъ, то они равнозначущи, когда они обратно пропорціональны проекціямъ подъема или опусканія на отвѣсное направленіе, т.-е. на направленіе силы тяжести.

Подобно этому въ блокѣ или полиспастѣ усиліе руки, тянущей снасть прямо, удержитъ прямо или наклонно поднимаемый грузъ въ равновѣсіи, если это усиліе будетъ такъ относиться къ вѣсу груза, какъ скорость отвѣснаго подъема груза относится къ скорости руки, тянущей снасть. Въ часахъ и подобныхъ имъ механизмахъ, состоящихъ изъ сцѣпленныхъ между собою колесъ, двѣ силы взаимно противящіяся, т.-е. такія, изъ коихъ одна способствуетъ, другая же сопротивляется движенію, находятся въ равновѣсіи, если эти силы обратно пропорціональны скоростямъ тѣхъ частей колесъ, къ коимъ онѣ приложены. Сила винта, сжимающаго тѣло, такъ относится къ усилію руки, вращающей рукоятку, какъ окружная скорость той точки рукоятки, гдѣ усиліе руки приложено, относится къ скорости поступанія винта противъ сжимаемаго тѣла. Силы, съ коими клинъ раздвигаетъ двѣ части раскалываемаго дерева, такъ относятся къ силѣ молота, бьющаго по клину, какъ скорость перемѣщенія клина въ направленіи дѣйствующей отъ бьющаго его молота силы, относится къ скоростямъ, съ которыми части дерева уступаютъ клину, причемъ эти скорости надо брать по направленіямъ, перпендикулярнымъ къ щекамъ клина. Совершенно подобно соотношеніе между силами и во всякаго рода машинахъ. Дѣйствительность и назначеніе машинъ въ томъ только и состоитъ, чтобы уменьшая скорость увеличивать силу и наоборотъ, ибо во всѣхъ подобнаго рода приборахъ въ сущности рѣшается такая задача:—з а д а н н ы й   г р у з ъ   д в и г а т ь   з а д а н н о ю   с и л о ю   и л и   ж е   з а д а н н о е   с о п р о т и в л е н і е   п р е о д о л ѣ т ь   з а д а н н ы м ъ   у с и л і е м ъ.

Въ самомъ дѣлѣ, если машина будетъ устроена такимъ образомъ, чтобы скорости точекъ приложенія движущей силы и сопротивленія были обратно пропорціональны этимъ силамъ, то движущая сила уравновѣситъ сопротивленіе, при бо́льшемъ же отношеніи скоростей преодолѣетъ его. Если отступленіе отъ пропорціональности скоростямъ будетъ таково, что будутъ преодолѣваться сопротивленія, происходящія отъ тренія соприкасающихся и скользящихъ другъ по другу тѣлъ, отъ сцѣпленія тѣлъ непрерывныхъ и разъединяемыхъ, и отъ подъема грузовъ, то за выключеніемъ всѣхъ этихъ сопротивленій, избыточная сила произведетъ ускореніе пропорціональное ея величинѣ какъ въ частяхъ машины, такъ и въ сопротивляющемся тѣлѣ.

Дальнѣйшее изложеніе ученія о машинахъ сюда не относится, я хотѣлъ лишь показать сколь далеко простирается и сколь благонадеженъ третій законъ движенія. Если дѣйствіе движущей силы оцѣнивать пропорціонально произведенію этой силы и скорости, и подобно этому противодѣйствіе сопротивленій оцѣнивать для каждой части въ отдѣльности пропорціонально произведенію ея скорости и встрѣчаемаго ею сопротивленія, происходящаго отъ тренія, сцѣпленія, вѣса и ускоренія [25]), то во всякой машинѣ дѣйствіе, и противодѣйствіе будутъ постоянно равны и поскольку дѣйствіе передается машиною, и въ концѣ концовъ прилагается къ сопротивляющемуся тѣлу, то это послѣднее его значеніе будетъ обратно значенію противодѣйствія.

---

[25]) Въ этихъ заключительныхъ словахъ поученія можно видѣть не только начало возможныхъ перемѣщеній, въ его всеобъемлющемъ приложеніи къ ученію о равновѣсіи машинъ, т.-е. вообще системъ тѣлъ съ полною связью или одною степенью свободы, но и сущность принципа Даламберта, лишь высказанную въ столь сжатой формѣ, что нуженъ былъ геній Лагранжа, чтобы это общее начало выразить одною математическою формулою, включающей въ себѣ всю статику и динамику.

О движенiи тѣлъ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

ОТДѢЛЪ I.

О методѣ первыхъ и послѣднихъ отношенiй, при помощи котораго послѣдующее доказывается.

Лемма I.

Количества, а также отношенiя количествъ, которыя въ продолженiи любого конечнаго времени постоянно стремятся къ равенству и ранѣе конца этого времени приблизятся другъ къ другу ближе, нежели на любую заданную разность, будутъ въ предѣлѣ равны.

Если это отрицаешь, то пусть они въ предѣлѣ будутъ неравны и ихъ предѣльная разность пусть будетъ D, слѣдовательно, они не могутъ ближе подойти къ равенству какъ до этой заданной разности D, въ противность предположенiю.

Лемма II.

Если въ какую-либо фигуру $AacE$, ограниченную прямыми Aa и AE и кривою acE вписывать любое число параллелограммовъ Ab, Bc, Cd и т. д., имѣющихъ равныя основанiя AB, BC, CD и т. д. и стороны Bb, Cc, Dd и т. д., параллельныя сторонѣ Aa фигуры и дополнить параллелограммы $aKbl$, $blcm$, $cMdm$ и т. д. затѣмъ, уменьшая ширину этихъ параллелограммовъ, увеличивать ихъ число до безконечности, то я утверждаю, что въ предѣлѣ отношенiя вписанной фи-

гуры AKbLcMdD, описанной AalbmcndoE и криволинейной AabcdE другъ къ другу равны единицѣ [26].

Разность вписанной и описанной фигуры есть сумма параллелограммовъ *Kl*, *Lm*, *Mn*, … (фиг. 6), которая (вслѣдствіе равенства всѣхъ основаній) равна прямоугольнику, построенному на одномъ изъ основаній *Kb* и суммѣ высотъ *Aa*, т.-е. прямоугольнику *ABla*. Но этотъ прямоугольникъ, такъ какъ его ширина *AB* уменьшается безконечно, можетъ быть сдѣланъ менѣе любой заданной величины. Слѣдовательно (по леммѣ I), въ предѣлѣ фигура вписанная, фигура описанная и тѣмъ паче заключающаяся между ними криволинейная будутъ между собою равны.

Лемма III.

Предѣльныя отношенія тѣхъ же суммъ параллелограммовъ равны единицѣ и въ томъ случаѣ, когда ширины ихъ AB, BC, CD, … не равны между собою, но всѣ уменьшаются безконечно.

Пусть *AF* равно наибольшей изъ ширинъ и на ней построенъ параллелограммъ *AFaf*. Этотъ параллелограммъ будетъ больше разности фигуры вписанной и фигуры описанной, при безконечномъ же уменьшеніи ширины его площадь можетъ быть сдѣлана менѣе площади любого заданнаго прямоугольника.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ въ предѣлѣ сумма этихъ исчезающихъ параллелограммовъ вполнѣ совпадаетъ съ площадью криволинейной фигуры.

Слѣдствіе 2. Въ еще бóльшей мѣрѣ прямолинейная фигура, ограниченная хордами дугъ *ab*, *bc*, *cd* и т. д. совпадаетъ съ криволинейною фигурою.

Слѣдствіе 3. То же самое относится и къ описанной прямолинейной фигурѣ, ограниченной касательными къ сказаннымъ дугамъ.

---

[26]) Предѣльныя отношенія Ньютонъ называетъ или «primae rationes», т.-е. первыя отношенія, или «ultimae rationes», т.-е. послѣднія отношенія, причемъ первымъ терминомъ онъ пользуется при опредѣленіи предѣла отношенія двухъ безконечно малыхъ величинъ «зарождающихся — nascentium» или «исчезающихъ—evanescentium». Второй терминъ примѣняется безразлично какъ для предѣла отношенія величинъ конечныхъ, такъ и безконечно малыхъ. Когда двѣ величины въ предѣлѣ равны, т.-е. когда ихъ отношеніе въ предѣлѣ равно единицѣ, то употребляется терминъ «sunt ultimo aequales, т.-е., «наконецъ, равны», или «ultimae rationes sunt rationes aequalitatis», т.-е. «послѣднія отношенія суть отношенія равенства». Въ переводѣ всѣ эти термины замѣнены употребляемыми теперь словами «предѣльное отношеніе» или «предѣлъ отношенія». Перемѣнныя величины вообще Ньютонъ называетъ или «неопредѣленными» — «indeterminatae» или «текущими» «fluentes», величины постоянныя всегда называетъ «заданными» или «данными» «datae». Въ переводѣ этотъ терминъ во многихъ мѣстахъ сохраненъ.

Слѣдствіе 4. Поэтому эти двѣ послѣднія фигуры (по отношенію къ периметру acE) въ предѣлѣ не суть прямолинейныя, но составляютъ криволинейный предѣлъ прямолинейныхъ фигуръ.

Лемма IV.

Если въ каждую изъ двухъ фигуръ $AacE$ и $PprT$ вписать (какъ указано выше) рядъ параллелограммовъ такъ, что число ихъ то же самое и если при безконечномъ уменьшеніи ширинъ предѣлы отношеній площадей параллелограммовъ одной фигуры къ параллелограммамъ другой, каждаго къ ему соотвѣтствующему между собою равны, то я утверждаю, что и самыя фигуры $AacE$ и $PprT$ находятся въ томъ же отношеніи.

Въ самомъ дѣлѣ, въ какомъ отношеніи находится каждый изъ параллелограммовъ одной фигуры (фиг. 7) къ ему соотвѣтствующему другой, въ томъ же отношеніи другъ къ другу находятся и суммы всѣхъ ихъ, т.-е. площадь одной фигуры къ площади другой, ибо по леммѣ III предѣлы отношеній площади первой фигуры къ первой суммѣ и площади второй ко второй суммѣ равны единицѣ.

Слѣдствіе. Совершенно такъ же докажется, что если вообще двѣ какого угодно рода величины будутъ раздѣлены на одинаковое число частей и при безконечномъ возрастаніи числа ихъ и уменьшеніи каждой изъ нихъ, отношеніе ихъ соотвѣтственно другъ къ другу, т.-е. первой къ первой, второй ко второй и т. д. остается постояннымъ, то и самыя величины будутъ находиться въ этомъ же отношеніи. Ибо, если въ относящихся къ этой леммѣ фигурахъ взять параллелограммы такъ, чтобы они были пропорціональны сказаннымъ частямъ, то суммы частей будутъ относиться между собою какъ суммы параллелограммовъ и, слѣдовательно, когда число частей и число параллелограммовъ будетъ безконечно возрастать, а самыя части уменьшаться, то предѣльное отношеніе суммъ частей будетъ оставаться равнымъ предѣльному отношенію суммъ параллелограммовъ, это же отношеніе равно отношенію каждаго параллелограмма къ ему соотвѣтствующему, т.-е. (по предположенію) предѣлу отношенія части къ части [27]).

---

[27]) Эта лемма и ея слѣдствіе, составляющія въ теперешнемъ изложеніи основную теорему интегральнаго исчисленія, постоянно примѣняются въ «Началахъ», въ которыхъ аналитическій процессъ интегрированія замѣняется часто сопоставленіемъ той кривой, коей площадь ищется съ другой извѣстной кривой такъ, чтобы площади соотвѣтствующихъ параллелограммовъ (элементы интеграла) находились въ постоянномъ отношеніи. Аналитически этотъ процессъ равносиленъ интегрированію при помощи подстановки.

25-25

Лемма V.

У подобныхъ фигуръ длины соотвѣтствующихъ сторонъ какъ прямолинейныя, такъ и криволинейныя между собою пропорціональны, площади же фигуръ пропорціональны квадратамъ сторонъ.

Лемма VI.

Если какая угодно заданная по положенію дуга ACB стягивается хордою AB и въ какой-либо ея точкѣ A, лежащей въ области непрерывной кривизны проведена касательная AD, продолженная въ обѣ стороны и если точки A и B приближаются другъ къ другу и совпадаютъ, то я утверждаю, что уголъ BAD, заключенный между хордою и касательной, уменьшается безконечно и въ предѣлѣ исчезаетъ.

Ибо если бы этотъ уголъ не исчезалъ, то между дугою ACB и касательной AD заключался бы уголъ, равный нѣкоторому данному прямолинейному углу [т.-е. конечной величины] и, слѣдовательно, кривизна въ точкѣ A не была бы непрерывною въ противность предположенію (фиг. 8).

Лемма VII.

При тѣхъ же предположеніяхъ я утверждаю, что предѣльное отношеніе дуги, хорды и касательной другъ къ другу равно единицѣ.

Когда точка B приближается къ A (фиг. 8), то AB и AD слѣдуетъ разсматривать продолженными до постоянной прямой bd, параллельно которой и проводится сѣкущая BD.

Пусть дуга Acb подобна дугѣ ACB при всякомъ положеніи точки B. При совмѣщеніи точекъ A и B уголъ dAb по предыдущей леммѣ исчезаетъ, слѣдовательно, остающіяся постоянно конечными прямыя Ab и Ad и промежуточная дуга Acb совпадаютъ, и, поэтому, равны между собою, значитъ и постоянно имъ пропорціональныя прямыя AB, AD и промежуточная дуга ACB, исчезающія въ предѣлѣ, будутъ имѣть своимъ предѣльнымъ отношеніемъ единицу.

Слѣдствіе 1. Если черезъ точку B провести прямую BF (фиг. 9) параллельно касательной, пересѣкающую какую-либо прямую AF, проведенную черезъ A въ точкѣ F, то предѣльное отношеніе длины BF къ исчезающей дугѣ ACB равно единицѣ, ибо дополнивъ параллелограммы $AFBD$, видимъ, что BF постоянно равно AD.

Слѣдствіе 2. Если черезъ точки A и B проводить различныя прямыя BE, BD, AF, AG, пересѣкающія касательную AD и параллельную ей BF, то предѣльное отношеніе всѣхъ отрѣзковъ AD, AE, BF, BG, хорды AB и дуги AB другъ къ другу равно единицѣ.

Слѣдствіе 3. Въ виду этого всѣ эти длины при всякомъ разсужденіи о предѣлахъ отношеній могутъ быть взяты одна вмѣсто другой.

Лемма VIII.

Если задана прямая AR и направленіе прямой BR, то хорда AB, дуга ACB и касательная AD образуютъ съ прямыми AR и BR три треугольника RAB, $RACB$, RAD, если затѣмъ точка B будетъ приближаться къ A и совпадетъ съ нею, то я утверждаю, что въ предѣлѣ эти три исчезающіе треугольника между собою равны и предѣльное отношеніе ихъ площадей равно единицѣ.

Ибо когда точка B приближается къ A (фиг. 8), то надо разсматривать, что прямыя AB, AD и AR продолжены до встрѣчи съ постоянною прямою rbd, параллельно которой и проводится RD, дугѣ же ACB строится подобная дуга Acb. Когда точки A и B совпадаютъ, что уголъ bAd исчезаетъ и, слѣдовательно, три остающіеся постоянно конечными треугольники rAb, $rAcb$, rAd совпадаютъ, въ виду чего они подобны и равны. Поэтому и постоянно имъ подобные треугольники RAB, $RACB$, RAD будутъ въ предѣлѣ между собою равны и подобны.

Слѣдствіе. Слѣдовательно, во всѣхъ разсужденіяхъ о предѣлѣ отношеній эти треугольники могутъ быть взяты одинъ на мѣсто другого.

Лемма IX.

Если заданныя по положенію прямая AE и кривая ABC пересѣкаются подъ даннымъ угломъ A и отъ прямой AE проводятся внутри этого угла ординаты BD, CE, пересѣкающія кривую въ точкахъ D и C B, C *и точки B и C совмѣстно приближаются къ A, то я утверждаю, что площади треугольниковъ ABD и ACE будутъ въ предѣлѣ относиться другъ къ другу какъ квадраты сторонъ.*

Какъ и въ предыдущемъ, надо подразумѣвать, что когда точки B и C (фиг. 10) приближаются къ A, то AD продолжается до заданныхъ прямыхъ db и ec, параллельныхъ ординатамъ DB и EC и проведенныхъ такъ, чтобы постоянно было: $AD : AE = Ad : Ae$. До встрѣчи съ этими же прямыми въ точкахъ b и c продолжаются и хорды AB и AC. Проводимъ кривую Abc подобную ABC и касательную Ag къ обѣимъ кривымъ въ точкѣ A. Пусть эта касательная пересѣкаетъ ординаты въ точкахъ F, G, f, g. Сохраняя затѣмъ длину Ae неизмѣнной, приближаемъ точки B и C къ точкѣ A до совмѣщенія съ нею. Такъ какъ въ предѣлѣ уголъ cAg исчезуетъ, то криволинейныя площади Abd, Ace совпадутъ съ прямолинейными Afd, Age, слѣдовательно (по леммѣ V), онѣ будутъ относиться какъ квадраты сторонъ Ad и Ae. Но этимъ площадямъ постоянно пропорціональны площади ABD, ACE и стороны ихъ AD и AE пропорціональны сторонамъ Ad и Ae, слѣдовательно, и площади ABD и ACE будутъ въ предѣлѣ относиться между собою какъ квадратъ сторонъ AD и AE.

Лемма X.

Пространства, описываемыя тѣломъ, находящимся подъ дѣйствіемъ какой-либо конечной силы, будетъ ли эта сила постоянная или же она будетъ непрерывно увеличиваться или уменьшаться, при самомъ началѣ движенія пропорціональны квадратамъ временъ ихъ описанія.

Пусть времена представляются длинами AD, AE (фиг. 10), скорости, производимыя силою—ординатами BD, EC, тогда пространства будутъ пропорціональны площадямъ ABD, ACE, описаннымъ этими ординатами, т.-е. при самомъ началѣ движенія (по леммѣ IX) они пропорціональны квадратамъ AD и AE.

Слѣдствіе 1. Отсюда легко заключить, что когда тѣла описываютъ подобныя части подобныхъ фигуръ, то отклоненія, производимыя дѣйствіемъ какихъ бы то ни было равныхъ силъ подобнымъ образомъ приложенныхъ къ тѣламъ вновь, приблизительно пропорціональны квадратамъ времени; при этомъ эти отклоненія надо измѣрять отъ тѣхъ мѣстъ, въ которыя сказанныя тѣла пришли бы въ теченіе разсматриваемыхъ промежутковъ времени безъ дѣйствія этихъ новыхъ силъ.

Слѣдствіе 2. Отклоненія, производимыя при вышесказанныхъ условіяхъ различными силами, пропорціональны этимъ силамъ и квадратамъ времени.

Слѣдствіе 3. То же самое относится и до пространствъ, описываемыхъ тѣлами подъ дѣйствіемъ различныхъ силъ: въ самомъ началѣ движенія эти пространства также пропорціональны силамъ и квадратамъ времени.

Слѣдствіе 4. Слѣдовательно, силы прямо пропорціональны пространствамъ при самомъ началѣ движенія и обратно пропорціональны квадратамъ времени ихъ описанія.

Слѣдствіе 5. Квадраты времени прямо пропорціональны пройденнымъ пространствамъ и обратно пропорціональны силамъ.

Поученіе.

Если разнаго рода перемѣнныя величины сравниваются между собою и про которую-нибудь изъ нихъ говорятъ, что она прямо или обратно пропорціональна [28]) другой, то смыслъ этого выраженія тотъ, что первая ве-

---

[28]) При изложеніи «Началъ» Ньютонъ, какъ уже сказано, избѣгаетъ пользованія алгеброй, а всецѣло придерживается образца древнихъ авторовъ

личина увеличивается или уменьшается въ томъ же самомъ отношеніи, какъ вторая или какъ величина ей обратная.

Если же про которую-нибудь изъ этихъ величинъ сказано, что она прямо или обратно пропорціональна двумъ или нѣсколькимъ другимъ, то

Евклида и Аполлонія, пользуясь постоянно пропорціями. Въ этомъ поученіи онъ поясняетъ понятіе о прямой и обратной пропорціональности. Это сдѣлано повидимому потому, что въ пятой книгѣ Элементовъ Евклида, гдѣ излагается ученіе о пропорціяхъ между *величинами* (не числовыми ихъ мѣрами) разсматривается пропорціональность четырехъ величинъ (опред. 6). Необходимо также при чтеніи подлинника имѣть въ виду слѣдующіе термины, опредѣленія которыхъ приведены у Евклида (опр. 13 — 17) и которыми Ньютонъ постоянно пользуется. Эти термины относятся къ классификаціи такъ называемыхъ теперь производныхъ пропорцій. Эти термины слѣдующіе: Пусть дана пропорція

$$a : b = c : d.$$

Тогда будетъ:

Permutando или alternando .	$a : c = b : d$
Invertendo	$b : a = d : c$
Componendo	$(a + b) : b = (c + d) : d$
Dividendo или divisim . . .	$(a - b) : b = (c - d) : d$
Convertendo	$a : (a - b) = c : (c - d)$
Mixtim	$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$

Въ то время на классификаціи и терминологію обращалось большое вниманіе и, напр., Wallis въ своей алгебрѣ, изданной въ 1685 г., т.-е. за годъ до Principia, изъ предложенной пропорціи выводитъ 52 съ нею связанныхъ и придаетъ имъ сочетанія предыдущихъ терминовъ.

Ньютонъ также весьма строго придерживается этой терминологіи и если у него встрѣчается пропорція $a : b = c : d$, то онъ не иначе напишетъ пропорцію $(a - b) : b = (c - d) : d$ какъ предпославъ слово divisim.

Такъ какъ эта классификація почти утратилась, то въ переводѣ эти термины по большей части опущены, но при чтеніи подлинника надо ихъ имѣть въ виду, особенно неудачный терминъ divisim или dividendo.

Вообще Ньютонъ, пропорцій въ томъ видѣ, какъ теперь, не пишетъ, всякую линію обыкновенно обозначаетъ двумя буквами и отдѣльныя величины большими буквами.

Пропорціи пишутся словами такъ:

$$A \text{ est ad } B \text{ ut } C \text{ est ad } D,$$

что равносильно нашему

$$A : B = C : D$$

или

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}.$$

Въ переводѣ для наглядности слова замѣнены знаками и принято обычное теперь обозначеніе.

смыслъ этого выраженія тотъ, что первая или увеличивается, или уменьшается въ отношеніи равномъ произведенію отношеній, въ которыхъ прочія или имъ обратныя увеличиваются или уменьшаются.

Такъ, если сказано, что A прямо пропорціонально B и C и обратно пропорціонально D, то смыслъ этого тотъ, что A увеличивается или уменьшается въ томъ же отношеніи, какъ $B \, . \, C \, . \, \frac{1}{D}$, т.-е., что величины A и $\frac{BC}{D}$ находятся другъ къ другу въ постоянномъ отношеніи.

Лемма XI.

Разстояніе отъ конца дуги до касательной проведенной въ ея началѣ при безконечномъ уменьшеніи дуги для всѣхъ кривыхъ, коихъ кривизна въ точкѣ касанія конечная, пропорціонально въ предѣлѣ квадрату ея хорды.

Случай 1. Пусть AB (фиг. 11)—разсматриваемая дуга, AD ея касательная въ началѣ, BD разстояніе точки B до касательной. Проведемъ къ касательной AD и къ хордѣ AB перпендикуляры AG и BG, пересѣкающіеся въ G, пусть затѣмъ точки B, D, G перешли въ b, d, g и пусть, наконецъ, J есть предѣльное положеніе точки G—пересѣченія прямыхъ AG и BG, когда точки B и D сольются съ A.

Очевидно, что разстояніе GJ можетъ быть сдѣлано меньше всякой напередъ назначенной величины.

По свойству круговъ, проходящихъ черезъ точки A, B, G и A, b, g будетъ:

$$AB^2 = AG \, . \, BD \quad \text{и} \quad Ab^2 = Ag \, . \, bd,$$

слѣдовательно,

$$\frac{AB^2}{Ab^2} = \frac{AG}{Ag} \cdot \frac{BD}{bd} \, .$$

Но такъ какъ GJ можетъ быть сдѣлано меньше всякой напередъ заданной величины, то можно сдѣлать такъ, что отношеніе $\frac{AG}{Ag}$ будетъ отличаться отъ единицы менѣе чѣмъ на любую заданную величину, слѣдовательно, и отношеніе $\frac{AB^2}{Ab^2}$ будетъ отличаться отъ $\frac{BD}{bd}$ менѣе чѣмъ на любую заданную величину и, значитъ, по леммѣ I предѣлы отношеній $\frac{AB^2}{ab^2}$ и $\frac{BD}{bd}$ равны.

Случай 2. Положимъ теперь, что BD наклонено къ AD подъ какимъ-либо постояннымъ угломъ, отношеніе BD къ bd будетъ въ предѣлѣ то же самое, т.-е. равно предѣлу отношенія AB^2 къ Ab^2.

Случай 3. Наконецъ, въ томъ случаѣ, когда уголъ D перемѣнный, но прямая BD или проходитъ черезъ постоянную точку, или строится по какому-либо опредѣленному закону, то углы D и d строимые также по одному и тому же закону, при приближеніи точекъ B и D къ точкѣ A стремятся къ равенству и такъ какъ разность ихъ можетъ быть сдѣлана меньше любой напередъ назначенной величины, то эти углы въ предѣлѣ равны и, слѣдовательно, длины BD и bd будутъ находиться попрежнему въ томъ же отношеніи, какъ квадраты хордъ.

Слѣдствіе 1. Такъ какъ тангенсы [29]) AD и Ad дуги AB и Ab и ихъ синусы BC и bc въ предѣлѣ равны хордамъ AB и Ab, то предѣлъ отношеніе ихъ квадратовъ равенъ отношенію затяжекъ BD и bd.

Слѣдствіе 2. Предѣльное отношеніе квадратовъ хордъ и прочихъ упомянутыхъ выше длинъ равно отношенію стрѣлокъ, раздѣляющихъ хорды дугъ пополамъ и проходящихъ по продолженію черезъ постоянную точку, ибо эти стрѣлки пропорціональны затяжкамъ BD и bd.

Слѣдствіе 3. Поэтому стрѣлки пропорціональны квадратамъ временъ описанія ихъ дугъ тѣламъ, движущимся съ постоянною скоростью.

Слѣдствіе 4. Площади прямолинейныхъ треугольниковъ Adb, ADB въ предѣлѣ находятся въ отношеніи кубовъ [30]) сторонъ AD и Ad или въ отношеніи $\left(\frac{DB}{db}\right)^{\frac{3}{2}}$, ибо отношеніе этихъ площадей равно произведенію отношеній [31])

$$\frac{AB}{Ab}\cdot\frac{BD}{bd}.$$

Точно также и треугольники ABC и Abc въ предѣлѣ относятся какъ кубы сторонъ BC и bc.

---

[29]) Отрѣзкамъ AD, Ad, BC и bc приданы названія «тангенсы» и «синусы», которыя бы имъ принадлежали, если бы кривая AB была замѣнена дугою круга, описанною на діаметрѣ AG и дуга кривой Ab — дугою круга, описанною на діаметрѣ Ag, но ясно, что эти термины введены лишь для краткости рѣчи и высказанное свойство принадлежитъ всякой кривой во всякой точкѣ, гдѣ кривизна *конечная*, т.-е. гдѣ длина AJ конечная и положеніе точки J—конца діаметра круга кривизны опредѣленное. Все это затѣмъ подробно оговаривается въ поученіи въ концѣ отдѣла.

Отрѣзокъ BD, заключенный между концомъ дуги и касательной, проведенной въ ея началѣ, названъ: «Subtensa anguli contactus», т.-е. «Затяжка угла соприкосновенія» или «угла касанія». Объ углѣ касанія см. прим. 32.

[30]) Когда величины $a:b=c^2:d^2$, то по старинной терминологіи говорилось, что a находится къ b «*въ удвоенномъ отношеніи* c *къ* d»; если $a:b=c^3:d^3$, то говорилось «въ утроенномъ отношеніи c къ d»; если $a:b=c^{\frac{1}{2}}:d^{\frac{1}{2}}$, то въ «половинномъ отношеніи» и т. под. Всѣ эти выраженія какъ неупотребляемыя теперь и могущія лишь искажать истинный смыслъ, замѣнены современными; поэтому выпущены и заключительныя слова этого слѣдствія: «полуторнымъ отношеніемъ я называю отношеніе половинное отъ утроеннаго, т.-е. отношеніе, составленное изъ простого и половиннаго».—Составнымъ или сложнымъ отношеніемъ называлось произведеніе двухъ отношеній.

[31]) Какъ уже сказано въ «Началахъ», вездѣ примѣняется Эвклидова терминологія и Эвклидовы, а не теперешнія представленія.

Слѣдствіе 5. Такъ какъ въ предѣлѣ DB и db параллельны и длины ихъ пропорціональны квадратамъ абсциссъ Ad и AD, то въ предѣлѣ криволинейныя площади ADB и AdB (по свойству параболы) составляютъ по двѣ трети площадей треугольниковъ ADB и Adb, сегментъ же AB и Ab по одной трети тѣхъ же площадей, слѣдовательно, эти сегменты пропорціональны кубамъ касательныхъ, хордъ и дугъ AB и Ab.

Поученіе.

Во всѣхъ предыдущихъ выводахъ предполагалось, что «уголъ касанія или соприкосновенія» [32]) не безконечно великъ и не безконечно малъ по

---

[32]) «Уголъ соприкосновенія» или «уголъ касанія» (angulus contactus), о которомъ идетъ рѣчь въ леммѣ XI и въ этомъ поученіи есть такой терминъ, который въ наукѣ не удержался, хотя дальнѣйшее развитіе даннаго Ньютономъ способа для точнаго сужденія объ этомъ элементѣ послужило основаніемъ ученіе о соприкосновеніи вообще. Вопросъ объ «углѣ касанія» возникъ по поводу толкованія предложенія 16-го третьей книги элементовъ Эвклида, въ которомъ сказано: «Прямая, проведенная подъ прямымъ угломъ къ діаметру круга въ концѣ этого діаметра лежитъ внѣ круга и въ пространство между этою прямою и окружностью никакая другая прямая не укладывается, или, что то же самое, окружность круга проходитъ между прямою перпендикулярной къ діаметру и прямою, которая составляетъ съ діаметромъ острый уголъ сколь угодно большой или же которая составляетъ съ перпендикуляромъ къ діаметру уголъ сколь угодно малый». Теорема эта устанавливаетъ, какъ видно, что подъ какимъ бы малымъ угломъ DAT (фиг. 14а) къ перпендикуляру къ діаметру AT ни проводить прямую, то всегда найдутся такія части этой прямой, которыя лежатъ внутри окружности. Возникалъ вопросъ, какой смыслъ придавать понятію объ «углѣ между касательной AT и дугою BAC», причемъ не давалось точнаго опредѣленія, что такое подъ этимъ угломъ разумѣютъ. При отсутствіи такого опредѣленія появлялись вопросы вродѣ слѣдующаго: одинаковы ли углы касанія для дуги FAG и для дуги BAC, радіусы коихъ не равны, не составляетъ ли одинъ изъ этихъ угловъ *части* другого, а если онъ есть часть другого, то значитъ оба они не нули [Эвклидово: «точка есть то, чего часть ничто»]. Съ другой стороны каждый изъ этихъ угловъ *меньше* всякаго сколь угодно малаго прямолинейнаго угла, слѣдовательно, онъ нуль и т. д. По этому поводу возникала полемика и Wallis'омъ былъ изданъ обширный трактатъ: «De angulo contactus et angulo Semicirculi», занимающій 60 стр. in folio мелкой печати въ собраніи его сочиненій.

Ньютонъ, указавъ, что для сужденія о болѣе или менѣе «тѣсномъ» касаніи кривыхъ съ прямою или между собою въ данной точкѣ надо разсматривать ординаты CT и EH и ихъ разность CE (фиг. 14 а) и обращать главное вниманіе на *порядокъ* этихъ безконечно малыхъ относительно безконечно малой AT, тѣмъ самымъ обосновалъ какъ ученіе о соприкосновеніи, такъ и о различныхъ порядкахъ безконечно малыхъ величинъ.

Самое ученіе о кривизнѣ излагалось имъ нѣсколько иначе, чѣмъ теперь. Обобщая Эвклидовское опредѣленіе касательной, кругъ кривизны въ данной точкѣ кривой опредѣлялся какъ такой кругъ, между которымъ сравненію съ угломъ касанія круга съ своими касательными, т.-е., что кривизна кривой въ точкѣ A не безконечно малая и не безконечно большая, иначе, что длина AJ конечная. Дѣйствительно можно взять кривую, у которой DB пропорціонально AD^3, въ такомъ случаѣ черезъ точку A нельзя провести круга между кривою и касательной, ибо уголъ касанія для этой кривой въ этой точкѣ безконечно малъ по сравненію съ угломъ касанія для круга. По подобной же причинѣ если DB будетъ пропорціонально AD^4, AD^5, AD^6, AD^7 и т. д., то получится безпредѣльный рядъ такихъ угловъ касанія, изъ которыхъ каждый послѣдующій безконечно малъ по отношенію къ предыдущимъ. Точно также если DB будетъ пропорціонально AD^2, $AD^{\frac{3}{2}}$, $AD^{\frac{4}{3}}$, $AD^{\frac{5}{4}}$ и т. д., то получится другой безпредѣльный рядъ угловъ касанія, изъ которыхъ первый такого же рода, какъ у круга, второй безконечно больше и вообще, всякій послѣдующій безконечно больше предыдущихъ. Но и между любыми двумя изъ этихъ угловъ соприкосновенія можно включить безпредѣльный рядъ другихъ, изъ коихъ каждый послѣдующій будетъ или безконечно больше, или безконечно меньше предыдущаго. Такъ, если между AD^2 и AD^3 включить рядъ: $AD^{\frac{13}{6}}$, $AD^{\frac{11}{5}}$, $AD^{\frac{9}{4}}$, $AD^{\frac{7}{3}}$, $AD^{\frac{5}{2}}$, $AD^{\frac{8}{3}}$, $AD^{\frac{14}{5}}$, $AD^{\frac{17}{6}}$ и т. д. Далѣе между любыми двумя членами этого ряда можно включить новый рядъ промежуточныхъ угловъ безконечно различныхъ между собою. Природа не терпитъ ограниченій.

Доказанное относительно кривыхъ линій и ограниченныхъ ими площадей легко прилагается къ кривымъ поверхностямъ и объемамъ.

Предыдущія леммы приведены, чтобы избѣжать утомительности длинныхъ доказательствъ основываясь по образцу древнихъ на приведеніи къ нелѣпости.

Доказательства дѣлаются болѣе краткими и при помощи способа недѣлимыхъ, но такъ какъ самое представленіе недѣлимыхъ грубовато (durior), то этотъ способъ представляется менѣе геометричнымъ, почему я и предпочелъ сводить доказательства всего послѣдующаго къ предѣламъ суммъ исчезающихъ количествъ и къ предѣламъ ихъ отношеній, поэтому я и предпослалъ сколь можно краткія доказательства свойствъ этихъ предѣ-

---

и данною кривою въ смежности съ этою точкою нельзя провести никакого другого круга. Пусть AT (фиг. 14 b) есть касательная, AF—нормаль, прямая TK параллельная нормали. Строимъ кривую KJF такъ, чтобы было: $TB \cdot TK = AT^2$. Предѣльное положеніе J точки K и есть конецъ діаметра круга кривизны, по кривой же KJF можно судить о «качествѣ кривизны»— qualitas curvaturae, т.-е. объ измѣненіи кривизны въ смежности съ точкою A. Пусть AEJ есть кругъ, описанный на AJ какъ діаметрѣ и положимъ, что кривая KJ внѣ круга тогда будетъ: для круга $TE \cdot TL = AT^2$, но $TL < TK$ значитъ $TE > TB$, т.-е. точка B внѣ круга.

Если бы кривая KJ была внутри круга, то ясно, что TE было бы меньше TB. Очевидно теперь, что проведя кругъ иного діаметра, нежели AJ, мы увидимъ, что ни одна изъ точекъ этого круга не можетъ лежать между кривою и кругомъ AEJ. Въ «Началахъ» мѣра «угла касанія» упоминается при изложеніи примѣра 1-го предложенія X второй книги.

ловъ. Способомъ предѣловъ достигается то же, что и способомъ недѣлимыхъ и послѣ того, какъ его основанія доказаны, мы можемъ имъ пользоваться съ еще бо́льшею увѣренностью. Поэтому если во всемъ послѣдующемъ изложеніи я и разсматриваю какія-либо величины какъ бы состоящими изъ постоянныхъ частицъ, или если я принимаю за прямыя линіи весьма малыя части кривыхъ, то слѣдуетъ разумѣть, что это не недѣлимыя, а исчезающія дѣлимыя величины, что это не суммы и не отношенія опредѣленныхъ конечныхъ частей, а предѣлы суммъ и предѣлы отношеній исчезающихъ величинъ, и сущность этихъ доказательствъ въ томъ и состоитъ, чтобы все приводить къ предыдущимъ леммамъ.

Дѣлаютъ возраженіе, что для исчезающихъ количествъ не существуетъ «предѣльнаго отношенія», ибо то отношеніе, которое они имѣютъ ранѣе исчезанія, не есть предѣльное, послѣ же исчезанія нѣтъ никакого отношенія. Но при такомъ и столь же натянутомъ разсужденіи окажется, что у тѣла, достигающаго какого-либо мѣста, гдѣ движеніе прекращается, не можетъ быть «предѣльной» скорости, ибо та скорость, которую тѣло имѣетъ ранѣе, нежели оно достигло этого мѣста, не есть «предѣльная», когда же достигло, то нѣтъ скорости. Отвѣтъ простой: подъ «предѣльною» скоростью надо разумѣть ту, съ которою тѣло движется, не передъ тѣмъ какъ достигнуть крайняго мѣста, гдѣ движеніе прекращается и не послѣ того, а когда достигаетъ, т.-е. именно ту скорость, обладая которою, тѣло достигаетъ крайняго мѣста и при которой движеніе прекращается. Подобно этому подъ предѣльнымъ отношеніемъ исчезающихъ количествъ должно быть разумѣемо отношеніе количествъ не передъ тѣмъ какъ они исчезаютъ и не послѣ того, но при которомъ исчезаютъ. Точно также и предѣльное отношеніе зарождающихся количествъ есть именно то, съ которымъ они зарождаются. Предѣльная сумма зарождающихся или исчезающихъ количествъ есть та составленная изъ нихъ сумма, когда они увеличиваясь или уменьшаясь только начинаютъ или прекращаютъ быть. Существуетъ такой предѣлъ, котораго скорость въ концѣ движенія можетъ достигнуть, но не можетъ перейти, это и есть предѣльная скорость. Такова же причина существованія предѣла зарождающихся или исчезающихъ количествъ и пропорцій. Когда такой предѣлъ существуетъ и величина его вполнѣ опредѣленная, то его нахожденіе есть задача истинно геометрическая. Все же геометрическое можетъ быть законнымъ образомъ примѣняемо при геометрическихъ изысканіяхъ и доказательствахъ.

Можно возразить, что если существуютъ предѣльныя отношенія исчезающихъ количествъ, то существуютъ и предѣльныя величины ихъ самихъ и, слѣдовательно, всякое количество должно состоять изъ недѣлимыхъ, что опровергнуто Эвклидомъ въ десятой книгѣ элементовъ, въ ученіи о несоизмѣримыхъ величинахъ. На самомъ же дѣлѣ это возраженіе основано на невѣрномъ допущеніи.

Предѣльныя отношенія исчезающихъ количествъ не суть отношенія предѣловъ этихъ количествъ, а суть тѣ предѣлы, къ которымъ при безконечномъ убываніи количествъ приближаются отношенія ихъ и къ которымъ эти отношенія могутъ подойти ближе, нежели на любую напередъ заданную разность, но которыхъ перейти или достигнуть на самомъ дѣлѣ не могутъ ранѣе чѣмъ эти количества уменьшатся безконечно. Дѣло объясняется проще на безконечно большихъ величинахъ. Если двѣ величины, разность которыхъ задана, будутъ обѣ увеличиваться до безконечности, то между ними существуетъ предѣльное отношеніе, которое равно единицѣ, однако, нѣтъ предѣльныхъ значеній для самихъ величинъ, т.-е. такихъ наибольшихъ ихъ значеній, отношеніе которыхъ какъ разъ было бы равно единицѣ. Поэтому если въ послѣдующемъ для простоты рѣчи я буду говорить о величинахъ весьма малыхъ или исчезающихъ, или зарождающихся, то не слѣдуетъ подъ этими словами разумѣть количествъ опредѣленной величины, но надо ихъ разсматривать какъ уменьшающіяся безконечно [33]).

---

[33]) Въ этомъ отдѣлѣ изложены тѣ основныя теоремы о предѣлахъ и безконечно малыхъ, которыя являются главнѣйшими при всякаго рода геометрическихъ приложеніяхъ. Примѣры такихъ приложеній можно найти въ 1-мъ томѣ сочиненія Бертрана Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.

Въ Principia во II отдѣлѣ второй книги даны въ самомъ краткомъ видѣ начала исчисленія флюксій, т.-е. по современной терминологіи производныхъ. Въ введеніи къ трактату «о квадратурѣ кривыхъ», изданному въ 1704 году, Ньютонъ излагаетъ сущность метода флюксій. Такъ какъ ознакомленіе съ воззрѣніями Ньютона можетъ способствовать правильности пониманія нѣкоторыхъ мѣстъ въ «Началахъ», то и приводится переводъ этого введенія.

«Я разсматриваю здѣсь математическія количества не какъ состоящія изъ очень малыхъ постоянныхъ частей, а какъ производимыя непрерывнымъ движеніемъ. Линіи описываются и по мѣрѣ описанія образуются не приложеніемъ частей, а непрерывнымъ движеніемъ точекъ, поверхности — движеніемъ линій, объемы — движеніемъ поверхностей, углы — вращеніемъ сторонъ, времена—непрерывнымъ теченіемъ и т. д.

Такое происхожденіе имѣетъ мѣсто и на самомъ дѣлѣ и въ самой природѣ вещей, и наблюдается ежедневно при движеніи тѣлъ. Подобнымъ образомъ древніе объясняли происхожденіе прямоугольниковъ, ведя подвижныя прямыя линіи по неподвижнымъ.

Замѣчая, что наростающія количества, образующіяся по мѣрѣ наростанія въ равныя времена, сообразно большей или меньшей скорости ихъ наростанія, оказываются бóльшими или меньшими, я изыскивалъ способы опредѣленія самихъ количествъ по той скорости движенія или наростанія, съ которою они образуются.

Назвавъ скорости этихъ движеній или наростаній *флюксіями*, образуемыя же количества *флюентами*, я постепенно пришелъ около 1665 и 1666 годовъ къ методу флюксій, который я прилагаю здѣсь къ квадратурѣ кривыхъ.

Флюксіи приблизительно пропорціональны приращеніямъ флюентъ, образующимся въ равные весьма малые промежутки времени или, точнѣе говоря, находятся въ предѣльномъ отношеніи зарождающихся приращеній и могутъ быть представлены какими угодно линіями этимъ приращеніямъ пропорціональными. Такъ, если площади ABC (фиг. 14c), $ABDG$ описы-

ОТДѢЛЪ II.

О нахожденіи центростремительныхъ силъ.

Предложеніе I. Теорема I.

Площади, описываемыя радіусами, проводимыми отъ обращающагося тѣла къ неподвижному центру силъ, лежатъ въ одной плоскости и пропорціональны временамъ описанія ихъ.

Раздѣлимъ время на равные промежутки и пусть въ теченіе перваго изъ нихъ тѣло по инерціи описываетъ прямую AB (фиг. 12). Если бы оно не подвергалось никакому дѣйствію, то, продолжая идти по прямой, оно

ваются ординатами BC и BD, движущимися равномѣрно по основанію AB, то флюксіи этихъ площадей относятся другъ къ другу, какъ описывающія ординаты BC и BD и могутъ быть представлены этими ординатами, ибо зарождающіяся приращенія площадей пропорціональны этимъ ординатамъ.

Пусть ордината BC изъ своего положенія BC перешла въ какое-нибудь положеніе bc. Дополнивъ параллелограммъ $BCEb$ проводимъ прямую VTH, касающуюся кривой въ точкѣ C и пересѣкающую продолженныя BA и Bc въ V и T, тогда приращенія абсциссы AB, ординаты BC и длины дуги кривой ACc, при этомъ образовавшіяся суть Bb, Ec, Cc; стороны треугольника ECT находятся въ предѣльномъ (первомъ) отношеніи этихъ зарождающихся приращеній, слѣдовательно, флюксіи самихъ AB, BC и AC пропорціональны сторонамъ CE, ET и TC треугольника CET, которыми онѣ и могутъ быть представлены или, что то же самое, — сторонами треугольника VBC ему подобнаго.

То же самое получится если принять флюксіи въ предѣльномъ (послѣднемъ) отношеніи исчезающихъ частей. Проведемъ прямую Cc и продолжимъ ее до K; когда ордината bc будетъ возвращаться къ своему первоначальному положенію BC и когда точки c и C сольются, то прямая CK совпадетъ съ касательной CH и исчезающій треугольникъ CEc въ предѣльномъ (послѣднемъ) своемъ видѣ станетъ подобнымъ треугольнику CET и его исчезающія стороны будутъ въ предѣлѣ относиться другъ къ другу какъ стороны CE, ET, TC треугольника CET, слѣдовательно, въ этомъ же отношеніи находятся и флюксіи линій AB, BC и AC. Если же точки C и c находятся въ какомъ-нибудь маломъ удаленіи другъ отъ друга, то и прямая CK будетъ находиться въ нѣкоторомъ небольшомъ удаленіи отъ касательной. Чтобы прямая CK совпадала съ касательной CH и чтобы получились предѣльныя (послѣднія) отношенія линій CE, Ec и cC, точки C и c должны сойтись и совпасть вполнѣ. Въ математическихъ вопросахъ нельзя пренебрегать даже самыми малыми погрѣшностями.

На основаніи подобнаго же разсужденія, если равномѣрно продвигать кругъ, описанный изъ точки B какъ центра радіусомъ BC такъ, чтобы онъ оставался перпендикулярнымъ къ AB, то флюксія образуемаго объема ABC будетъ пропорціональна площади производящаго круга и флюксія образуемой поверхности пропорціональна окружности производящаго круга, и флюксіи длины дуги кривой AC (т.-е. ихъ произведенію). Ибо въ то время пришло въ c (по 1-му закону), пройдя путь Bc, равный AB и тогда описанныя радіусами AS, BS, cS, проведенными къ центру силъ S пло-

---

какъ объемъ образуется ведя кругъ по абсциссѣ AB, сказанная поверхность образуется ведя окружность этого круга по длинѣ кривой AC.

Вотъ еще два примѣра этого способа.

I. *Прямая PB вращается около заданнаго полюса P и пересѣкаетъ другую заданную по положенію прямую AB, требуется найти отношеніе флюксій прямыхъ AB и PB.*

Пусть прямая PB (фиг. 14d) перешла изъ своего положенія PB въ новое положеніе Pb. Отложивъ по Pb длину равную PB, проводимъ къ AB прямую PD подъ такимъ угломъ bPD, который равенъ углу bBC. По подобію треугольниковъ bBC и bPD приращеніе Bb такъ относится къ приращенію Cb, какъ Pb къ bD. Когда прямая Pb будетъ возвращена въ свое первоначальное положеніе, чтобы приращенія исчезли, то предѣльное (послѣднее) отношеніе приращеній или, что то же, предѣльное отношеніе Pb къ Db обратится въ отношеніе PB къ DB, причемъ уголъ PDB станетъ прямымъ, слѣдовательно, и флюксія AB будетъ относиться къ флюксіи PB какъ PB къ DB.

II. *Прямая PB, вращающаяся около заданнаго полюса P, пересѣкаетъ двѣ другія прямыя AB и AE, заданныя по положенію въ точкахъ B и E, требуется найти отношеніе флюксій этихъ прямыхъ.*

Когда вращающаяся прямая PB (фиг. 14e) перемѣстится изъ своего положенія PB въ положеніе Pb, пересѣкающее заданныя прямыя AB и AE въ точкахъ b и e, то проведя прямую Bc параллельную AE и пересѣкающую Pb въ c получимъ:

$$Bb : Bc = Ab : Ae$$
$$Bc : Ee = PB : PE.$$

Изъ этихъ пропорцій слѣдуетъ:

$$Bb : Ee = Ab \,.\, PB : Ae \,.\, PE.$$

Когда прямая Pb возвратится въ первоначальное свое положеніе PB, то исчезающее приращеніе Bb такъ будетъ относиться къ исчезающему приращенію Ee, какъ $AB \,.\, PB$ относится къ $AE \,.\, PE$, слѣдовательно, въ этомъ же отношеніи будетъ находиться и флюксія прямой AB къ флюксіи прямой AE.

Поэтому, если вращающаяся прямая PB пересѣкаетъ какія-либо заданныя по положенію кривыя въ точкахъ B и E и ставшія теперь подвижными, прямыя AB и AE касаются этихъ кривыхъ въ точкахъ пересѣченія B и E, то флюксія длины дуги кривой, касающейся прямой AB, будетъ такъ относиться къ флюксіи длины дуги кривой, касающейся прямой AE, какъ $AB \,.\, PB$ относится къ $AE \,.\, PE$. То же самое получится даже и въ томъ случаѣ, когда прямая PB будетъ постоянно касаться до какой-либо заданной по положенію кривой въ подвижной точкѣ P.

III. *Количество x течетъ равномѣрно, надо найти флюксію количества x^n.*

Въ то время, какъ количество x при своемъ теченіи обратится въ $x + h$, количество x^n обратится въ $(x + h)^n$, т.-е. по нашему способу разложенія въ безконечные ряды въ $x^n + nhx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} \,.\, h^2 x^{n-2} + \ldots$, прищади ASB и BSc равны. Въ дѣйствительности же, когда тѣло пришло въ B, то пусть на него подѣйствовала центростремительная сила однимъ, но зато большимъ натискомъ [34]), вслѣдствіе котораго тѣло отклонится отъ прямой Ac и будетъ продолжать свой путь по прямой BC. Проведемъ прямую cC параллельно BS до встрѣчи въ точкѣ C съ BC, тогда къ концу второго промежутка времени тѣло (по слѣд. 1 законовъ) придетъ въ точку C, лежащую въ одной плоскости съ треугольникомъ ASB. Проведи SC, по параллельности SB и Cc площади треугольниковъ SBC и SBc будутъ равны между собою, а, слѣдовательно, онѣ равны и площади треугольника SAB.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, увидимъ, что если центростремительная сила дѣйствуетъ послѣдовательно въ точкахъ C, D, E и т. д. и заставляетъ тѣло описывать прямыя CD, DE, EF и т. д., то всѣ эти прямыя будутъ лежать въ одной плоскости и площади треугольниковъ SCD

ращенія h и $nhx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}h^2x^{n-2}+\ldots$ относятся другъ къ другу какъ 1 къ $nx^{n-1}+\frac{n^2-n}{2}hx^{n-2}+\ldots$.

Когда эти приращенія исчезнутъ, то ихъ предѣльное отношеніе будетъ равно отношенію 1 къ nx^{n-1}, поэтому флюксія x такъ относятся къ флюксіи x^n, какъ 1 къ nx^{n-1}.

Разсуждая подобнымъ же образомъ и пользуясь способомъ предѣльныхъ первыхъ и послѣднихъ отношеній, можно составить флюксіи прямыхъ или кривыхъ линій въ любыхъ случаяхъ, а также и флюксіи поверхностей, угловъ и другихъ количествъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ такое установленіе этого анализа надъ количествами конечными и изслѣдованіе предѣльныхъ первыхъ и послѣднихъ отношеній, зарождающихся или исчезающихъ конечныхъ величинъ, согласно съ геометріею древнихъ, и я хотѣлъ показать, что въ методѣ флюксій нѣтъ надобности вводить въ геометрію безконечно малыя фигуры.

Анализъ можетъ вестись надъ какими угодно фигурами конечными или безконечно малыми (infinite parvae), которыя предполагаются подобными исчезающимъ фигурамъ, а также и надъ фигурами, которыя въ способѣ недѣлимыхъ принимаются за безконечно малыя, надо лишь поступать съ должною осмотрительностью.

Нахожденіе флюентъ по ихъ флюксіямъ задача болѣе трудная и первая ступень въ ея рѣшеніи равносильна квадратурѣ кривыхъ, о которой мною же давно написано слѣдующее сочиненіе».

Послѣ этого введенія и слѣдуетъ самое изложеніе трактата «De quadratura curvarum». Въ концѣ этого трактата приложены двѣ таблицы формулъ, отличающихся лишь обозначеніями отъ таблицъ неопредѣленныхъ интеграловъ тѣхъ главнѣйшихъ раціональныхъ и ирраціональныхъ функцій, которыя и теперь составляютъ обычный курсъ основаній интегральнаго исчисленія.

Эти таблицы могутъ въ значительной степени способствовать уясненію того, какія задачи могли быть доводимы вычисленіемъ до конца, основываясь на томъ, что Ньютономъ было *опубликовано*.

[34]) Латинское слово impulsus вполнѣ передается русскимъ словомъ *натискъ*, которое включаетъ въ себѣ какъ понятіе напряженности дѣйствія, такъ и его продолжительности.

и SBC, SDE и SCD, SEF и SDE будутъ между собою равны. Слѣдовательно, въ равныя времена описываются равныя площади, расположенныя въ неподвижной плоскости. Слагая получимъ, что какія угодно суммы этихъ площадей какъ $SADS$ и $SAFS$ будутъ относиться какъ времена ихъ описанія. Увеличивая затѣмъ число треугольниковъ и уменьшая ихъ высоту безконечно, получимъ, что въ предѣлѣ периметръ ADF (по слѣд. 4 леммы 3-ей) будетъ кривою линіей и, слѣдовательно, центростремительная сила, которою тѣло отклоняется все время отъ касательной къ этой кривой, дѣйствуетъ непрестанно, площади же $SADS$ и $SAFS$, описываемыя радіусомъ постоянно пропорціональныя временамъ ихъ описанія будутъ и въ предѣлѣ этимъ временамъ пропорціональны.

Слѣдствіе 1. Скорость тѣла, притягиваемаго къ неподвижному центру въ пространствѣ несопротивляющемся, обратно пропорціональна длинѣ перпендикуляра, опущеннаго изъ центра на касательную къ орбитѣ.

Дѣйствительно, скорости въ точкахъ A, B, C, D, E пропорціональны основаніямъ AB, BC, CD, DE, EF и т. д. Эти же основанія обратно пропорціональны перпендикулярамъ, на нихъ опущеннымъ.

Слѣдствіе 2. Если на хордахъ AB и BC двухъ дугъ, описанныхъ въ равные промежутки времени, построить параллелограммъ $ABCV$ и провести его діагональ BV, то предѣльное ея положеніе, когда сказанныя дуги безконечно уменьшаются, проходитъ черезъ центръ силъ.

Слѣдствіе 3. Если на хордахъ AB и BC, DE и EF дугъ, описанныхъ въ равные промежутки времени, построить параллелограммы $ABCV$, $DEFZ$, то силы, дѣйствующія на тѣло въ B и E, находятся въ предѣльномъ отношеніи діагоналей BV и EZ, при безконечномъ уменьшеніи дугъ. Такъ какъ перемѣщенія BC и EF тѣла слагаются (по слѣд. 1 законовъ) изъ перемѣщеній Bc и BV, EF и EZ и такъ какъ BV равное Cc и EZ равное Ff предыдущаго доказательства происходятъ отъ натисковъ центростремительной силы въ B и E, то сказанныя діагонали этимъ натискамъ пропорціональны.

Слѣдствіе 4. Силы, которыми тѣла въ пространствѣ сопротивленія неоказывающемъ, отклоняются отъ прямолинейнаго движенія и вынуждаются двигаться по кривымъ, относятся между собою какъ направленныя къ центру силъ стрѣлки, проведенныя черезъ середины хордъ дугъ, описанныхъ въ равные промежутки времени, когда эти дуги уменьшаются безконечно. Ибо эти стрѣлки равны половинамъ тѣхъ діагоналей [35]), о которыхъ шла рѣчь въ слѣдствіи 3-мъ.

---

[35]) За промежутки времени, въ продолженіе которыхъ образуются сравниваемыя отклоненія, возьмемъ тѣ, въ которыя тѣло перешло изъ A въ C и изъ D въ F. Для перваго три послѣдовательныя точки троекторіи суть A, B и C, причемъ B будетъ въ предѣлѣ вершиною, лежащею по срединѣ дуги AC, а прямая AC—хордою, тогда очевидно, что AC пересѣкаясь съ VB раздѣляетъ эту послѣднюю постоянно пополамъ, значитъ стрѣлка дуги AC и составитъ въ предѣлѣ половину діагонали BV.

Слѣдствіе 5. Поэтому такія силы такъ относятся къ силѣ тяжести, какъ эти стрѣлки къ перпендикулярнымъ къ горизонту стрѣлкамъ [36]) параболическихъ дугъ, описываемыхъ брошенными тѣлами въ тѣ же промежутки времени.

Такой способъ принятъ сообразно леммѣ X, служащей ему основаніемъ.

Слѣдствіе 6. Все вышеизложенное имѣетъ мѣсто, по слѣдствію V законовъ и въ томъ случаѣ, когда плоскости, въ которыхъ тѣла движутся, не находятся вмѣстѣ съ расположенными въ нихъ центрами силъ въ покоѣ, а движутся равномѣрно и прямолинейно.

Предложеніе II. Теорема II.

Если тѣло движется по какой-либо плоской кривой такъ, что радіусомъ, проведеннымъ къ неподвижной точкѣ или къ точкѣ, движущейся равномѣрно и прямолинейно, описываются площади, пропорціональныя времени, то это тѣло находится подъ дѣйствіемъ центростремительной силы, направленной къ сказанной точкѣ.

Случай 1. Всякое тѣло, движущееся по кривой линіи, отклоняется отъ прямолинейнаго пути нѣкоторой силой на него дѣйствующей (по 1-му закону). Сила эта, отклоняющая тѣло отъ прямолинейнаго пути и побуждающая его въ равныя времена описывать около неподвижной точки S весьма малые треугольники SAB, SBC, SCD и т. д., равные по площади, дѣйствуетъ въ точкѣ B (фиг. 12) по прямой параллельной cC (по предложенію 40-му 1-й книги элементовъ и II закону), т.-е. по линіи BS, въ мѣстѣ C она дѣйствуетъ по линіи параллельной dD, т.-е. по CS и т. д. Итакъ, сила эта постоянно направлена къ сказанной неподвижной точкѣ S.

Случай 2. По 5-му слѣдствію законовъ безразлично, находится ли плоскость, въ которой тѣло описываетъ свою траекторію въ покоѣ или движется вмѣстѣ съ тѣломъ, описываемой кривой и точкою S равномѣрно и прямолинейно.

Слѣдствіе 1. При движеніи тѣла въ пространствѣ или въ средѣ, которыя сопротивленія не оказываютъ, если площади не пропорціональны времени, то сила не направлена къ точкѣ встрѣчи радіусовъ, но уклоняется

[36]) Напряженія поля центростремительной силы сравниваются съ силою тяжести не по ихъ «ускореніямъ», а по производимымъ ими «отклоненіямъ» отъ касательной въ продолженіе безконечно малаго промежутка времени одинаковаго въ обоихъ случаяхъ. Очевидно, что оба способа сравненія силъ равнозначущи, ибо сказанныя отклоненія выражаются такъ:

$$\delta = \frac{1}{2} w \cdot \tau^2 \quad \text{и} \quad \Delta = \frac{1}{2} g \cdot \tau^2.$$

или въ ту сторону, куда движеніе происходитъ, когда описаніе площадей ускоряется, или въ сторону обратную, когда оно замедляется.

Слѣдствіе 2. Если описаніе площадей ускоряется даже въ сопротивляющейся средѣ, то направленіе силы уклоняется отъ точки встрѣчи радіусовъ въ ту сторону, куда движеніе происходитъ.

Поученіе.

Тѣло можетъ находиться подъ дѣйствіемъ нѣсколькихъ силъ, въ такомъ случаѣ смыслъ предложенія тотъ, что сила, составленная изъ всѣхъ ихъ, направлена въ точку S. Если при этомъ которая-нибудь изъ силъ дѣйствуетъ по направленію постоянно перпендикулярному къ той плоскости, въ которой площади описываются, то она заставляла бы тѣло лишь уклоняться отъ этой плоскости, причемъ величина описываемой въ ней площади не увеличивается и не уменьшается, слѣдовательно, при составленіи силъ такая сила можетъ быть отбрасываема.

Предложеніе III. Теорема III.

Тѣло, движущееся вокругъ другого такъ, что площади, описываемыя радіусомъ, проведеннымъ къ центру этого второго тѣла, въ свою очередь движущагося какъ бы то ни было, пропорціональны временамъ, находится подъ дѣйствіемъ силы, слагающейся изъ центростремительной, направленной къ центру этого второго тѣла и полной ускорительной силы, дѣйствующей на это второе тѣло.

Обозначимъ первое тѣло черезъ L, второе черезъ T, тогда (по слѣд. VI законовъ) если бы приложить къ обоимъ тѣламъ силы равныя и противоположныя ускорительной силѣ, дѣйствующей на второе тѣло T, то первое тѣло L будетъ продолжать описывать вокругъ второго тѣла T такія же площади какъ и ранѣе, но тогда сила, которая ранѣе дѣйствовала на тѣло T, будетъ уничтожена силою ей равною и противоположною и, слѣдовательно (по 1-му закону); это второе тѣло T, будучи предоставлено самому себѣ, или покоится, или движется равномѣрно и прямолинейно, первое же тѣло L подъ дѣйствіемъ разности силъ, т.-е. подъ дѣйствіемъ оставшейся силы продолжаетъ описывать около T площади, пропорціональныя времени, слѣдовательно (по теор. II), эта разность силъ направлена ко второму тѣлу T какъ къ центру.

Слѣдствіе 1. Итакъ, если тѣло L, обращаясь около тѣла T, описываетъ проведеннымъ къ нему радіусомъ площади, пропорціональныя времени и если изъ полной силы (или простой, или составленной изъ нѣсколькихъ по правилу параллелограмма), дѣйствующей на тѣло L, отнять (по тому же правилу) полную ускорительную силу, дѣйствующую на второе тѣло, то полная оставшаяся сила, дѣйствующая на первое тѣло, направлена ко второму какъ къ центру.

Слѣдствіе 2. Если сказанныя площади лишь весьма близки къ пропорціональности времени, то и оставшаяся сила направляется лишь весьма близко къ T.

Слѣдствіе 3. Обратно, если оставшаяся сила направляется весьма близко къ T, то и сказанныя площади будутъ весьма близки къ пропорціональности.

Слѣдствіе 4. Если радіусъ, проведенный отъ перваго тѣла L ко второму T, описываетъ площади, совершенно не слѣдующія отношенію временъ, это же второе тѣло или покоится, или движется равномѣрно и прямолинейно, то, или центростремительная сила, направленная на второе тѣло T, равна нулю, или же ея дѣйствіе смѣшивается, слагаясь съ гораздо болѣе мощными дѣйствіями другихъ силъ; полная же сила, составленная изъ всѣхъ дѣйствующихъ на тѣло L силъ, если таковыхъ нѣсколько, направлена къ нѣкоторому другому (подвижному или неподвижному) центру. То же самое имѣетъ мѣсто, когда второе тѣло T движется какъ бы то ни было, предполагая, что за центростремительную силу принимается та, которая остается за вычетомъ полной ускорительной силы, дѣйствующей на это второе тѣло T.

Поученіе.

Такъ какъ равномѣрное описаніе площадей служитъ указателемъ центра, къ которому направляется оказывающая наибольшее вліяніе на движущееся тѣло сила, которою оно и отклоняется отъ прямолинейнаго пути и удерживается на своей орбитѣ, то почему бы не принять въ послѣдующемъ равномѣрное описаніе площадей вообще за признакъ центра, около котораго происходитъ всякое круговое движеніе въ свободномъ пространствѣ?

Предложеніе IV. Теорема IV.

При движеніи тѣлъ, описывающихъ равномѣрно различные круги, центростремительныя силы направлены къ центрамъ этихъ круговъ и пропорціональны квадратамъ описываемыхъ въ одинаковое время дугъ, раздѣленнымъ [37]*) на радіусы круговъ.*

По пред. II и слѣд. 2 пред. I силы направлены къ центрамъ круговъ

[37]) Въ «Началахъ» вездѣ примѣнена старинная геометрическая терминологія, т.-е. не говорится про умноженіе двухъ отрѣзковъ, а про «площадь прямоугольника, получаемаго проведеніемъ одного изъ нихъ по другому», когда же надо произведеніе двухъ отрѣзковъ раздѣлить на третій, то говорится: «приложить (applicare) данную площадь къ заданной длинѣ», въ переводѣ принята общеупотребительная теперь терминологія.

и относятся другъ къ другу какъ синусъ верзусы [38]) (пред. I сл. 4) дугъ, описываемыхъ въ весьма малые равные промежутки времени, т.-е. какъ квадраты этихъ дугъ, раздѣленные на діаметры круговъ (лем. VIII), а такъ какъ эти дуги пропорціональны любымъ дугамъ, описываемымъ въ равные промежутки времени, діаметры же пропорціональны радіусамъ, то и силы относятся между собою какъ квадраты одновременно описываемыхъ дугъ, раздѣленные на радіусы круговъ.

Слѣдствіе 1. Такъ какъ эти дуги пропорціональны скоростямъ тѣлъ, то центростремительныя силы прямо пропорціональны квадратамъ скоростей и обратно пропорціональны радіусамъ круговъ.

Слѣдствіе 2. Такъ какъ времена обращенія пропорціональны: прямо радіусамъ и обратно скоростямъ, то центростремительныя силы прямо пропорціональны радіусамъ и обратно пропорціональны квадратамъ временъ обращенія.

Слѣдствіе 3. Поэтому если времена обращенія равны и, слѣдовательно, скорости пропорціональны радіусамъ, то и силы имъ пропорціональны и наоборотъ.

Слѣдствіе 4. Если времена обращенія и скорости пропорціональны корнямъ квадратнымъ радіусовъ, то центростремительныя силы равны и наоборотъ.

Слѣдствіе 5. Если времена обращенія пропорціональны радіусамъ и, слѣдовательно, скорости равны, то силы обратно пропорціональны радіусамъ и наоборотъ.

Слѣдствіе 6. Если времена обращенія находятся въ полукубическомъ отношеніи радіусовъ, то центростремительныя силы обратно пропорціональны квадратамъ радіусовъ и наоборотъ.

Слѣдствіе 7. Вообще если времена обращенія пропорціональны какой-либо n-ой степени радіусовъ R, т.-е. R^n и, слѣдовательно, скорости обратно пропорціональны степени R^{n-1}, то центростремительныя силы обратно пропорціональны R^{2n-1} и наоборотъ.

Слѣдствіе 8. Все сказанное выше о скоростяхъ, временахъ и силахъ относится и къ тому случаю, когда тѣла описываютъ подобныя части какихъ-либо подобныхъ фигуръ около центровъ, расположенныхъ въ сходственныхъ ихъ точкахъ. Это слѣдуетъ изъ предыдущаго доказательства, распространеннаго на этотъ случай, надо лишь при этомъ вмѣсто равномѣрнаго движенія принимать равномѣрное описаніе площадей и вмѣсто радіусовъ брать разстоянія тѣлъ до центровъ.

Слѣдствіе 9. Изъ того же доказательства вытекаетъ, что длина дуги, описываемой въ какой-либо промежутокъ времени тѣломъ, равномѣрно обращающимся по кругу подъ дѣйствіемъ заданной центростремительной

[38]) Во времена Ньютона и болѣе 150 лѣтъ еще послѣ него разсматривались *тригонометрическія линіи*, а не функціи, т.-е. не отвлеченныя числа, показывающія отношенія этихъ линій къ радіусу, какъ теперь.

силы, есть среднее пропорціональное между діаметромъ круга и путемъ, проходимымъ тѣмъ же тѣломъ въ то же время при свободномъ его паденіи подъ дѣйствіемъ этой силы [39]).

Поученіе.

Случай, указанный въ слѣдствіи 6-мъ, имѣетъ мѣсто для небесныхъ тѣлъ (какъ-то независимо другъ отъ друга отмѣтили *Вренъ, Гукъ* и *Галлей*), поэтому относящееся къ центростремительнымъ силамъ, убывающимъ пропорціонально квадратамъ разстояній отъ центра, я рѣшилъ изложить въ послѣдующемъ подробнѣе.

При помощи предыдущихъ предложеній можетъ также быть выведено отношеніе центростремительной силы къ какой-либо извѣстной силѣ, напр., къ силѣ тяжести. Ибо если тѣло обращается около земли по кругу подъ дѣйствіемъ силы тяжести, то эта сила и есть центростремительная. Ее можно опредѣлить на основаніи слѣд. 9-го по паденію тѣлъ и по времени оборота и величинѣ дуги, описываемой въ заданное время. Такого рода предложеніями *Гюйгенсъ* въ превосходномъ своемъ сочиненіи De Horologio oscillatorio и сопоставилъ силу тяжести съ центробѣжными силами вращающихся тѣлъ.

Все предыдущее можетъ быть доказано и слѣдующимъ образомъ: вообразимъ, что въ кругъ вписанъ правильный многоугольникъ съ любымъ числомъ сторонъ. Тѣло, при своемъ движеніи съ данною скоростью по сторонамъ многоугольника, при каждомъ изъ угловъ будетъ претер-

---

[39]) Обозначая черезъ: R радіусъ круга, s длину дуги, τ разсматриваемый промежутокъ времени и φ центростремительную силу, т.-е. ея ускореніе, имѣемъ по доказанной теоремѣ

$$\varphi = k\frac{s^2}{R} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

гдѣ k нѣкоторая постоянная.

Замѣтивъ, что $s = V.\tau$, гдѣ V скорость тѣла и $V = \frac{2\pi R}{T}$, гдѣ T есть время оборота изъ формулы (*) и получимъ всѣ перечисленныя слѣдствія 1—8.

Слѣдствіе 9 приведено чтобы установить постоянную k въ формулѣ (*); для равномѣрно ускореннаго движенія имѣетъ мѣсто формула $2\delta = \varphi.\tau^2$. кромѣ того $s^2 = 2R.\delta$ при весьма маломъ δ, отсюда $\varphi = \frac{s^2}{R\tau^2} = \frac{V^2}{R}$.

Предполагая теперь промежутокъ времени τ конечнымъ, для свободнаго паденія подъ дѣйствіемъ силы коей ускореніе φ имѣемъ $2h = \varphi.\tau^2$, путь же S пройденный равномѣрно по кругу въ это же время будетъ $S = V.\tau$, слѣдовательно, будетъ вообще:

$$S^2 = 2Rh.$$

пѣвать отраженіе отъ круга; сила, съ которою оно будетъ давить на кругъ при каждомъ отдѣльномъ отраженіи, пропорціональна скорости, слѣдовательно, сумма силъ въ теченіе заданнаго времени будетъ пропорціональна скорости и числу отраженій [40]), т.-е. (при данномъ числѣ сторонъ многоугольника) сила будетъ пропорціональна длинѣ, описанной въ вышеуказанное время, умноженной на отношеніе этой длины къ радіусу, т.-е. будетъ пропорціональна отношенію квадрата этой длины къ радіусу, слѣдовательно, при безконечномъ уменьшеніи сторонъ многоугольника, когда онъ совпадетъ съ кругомъ, сила станетъ пропорціональной отношенію квадрата дуги, описанной въ заданное время къ радіусу. Такова центробѣжная сила, съ которою тѣло давитъ на кругъ, ей равна и противоположна сила, съ которою кругъ отталкиваетъ тѣло къ своему центру.

Предложеніе V. Задача I.

При извѣстной въ любомъ мѣстѣ скорости, съ которою тѣло описываетъ заданную фигуру подъ дѣйствіемъ силъ, направленныхъ къ постоянному центру, найти этотъ центръ.

Пусть три прямыя PT, TQV, VR (фиг. 13), пересѣкающіяся въ точкахъ T и V, касаются данной фигуры въ точкахъ P, Q, R. Къ касательнымъ въ точкахъ P, Q, R возставляются перпендикуляры и по нимъ откладываются длины PA, QB, RC обратно пропорціональныя соотвѣтствующимъ скоростямъ и черезъ точки A, B и C проводятся параллельно касательнымъ прямыя CE, DBE и AD, пересѣкающіяся въ точкахъ D и E. Проведя VE и TD въ точкѣ ихъ пересѣченія S и получимъ требуемый центръ.

Дѣйствительно, перпендикуляры, опущенные на касательную PT и QT изъ центра S обратно пропорціональны скоростямъ, слѣдовательно, по построенію пропорціональны длинамъ PA и QB, т.-е. разстояніямъ точки D до касательныхъ PT и QT. Отсюда легко заключить, что точки T, D, S лежатъ на одной прямой. Подобно этому и точки V, E, S должны лежать на одной прямой, слѣдовательно, искомый центръ S находится въ пересѣченіи прямыхъ TD и VE [41])

---

[40]) Надо воображать многоугольникъ съ весьма большимъ числомъ сторонъ и подъ словами «сумма силъ» надо разумѣть сумму измѣненій количества движенія тѣла происходящихъ въ продолженіи даннаго промежутка времени.

[41]) Аналитическое рѣшеніе этой задачи сводится къ слѣдующему: пусть скорости въ точкахъ P, Q, R соотвѣтственно суть v_1, v_2, v_3 и уравненія касательныхъ $a_i x + b_i y + c_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ тогда координаты центра S (ξ, η) и постоянная площадей σ опредѣляются изъ уравненій:

$$(a_i\xi + b_i\eta + c_i) \, . \, v_i = \sigma \, . \sqrt{a_i^2 + b_i^2} \;\; (i = 1, 2, 3),$$

выражающихъ условіе, что постоянная площадей σ равна произведенію

Предложеніе VI. Теорема V.

Если тѣло, обращаясь по какой бы то ни было орбитѣ около неподвижнаго центра въ пространствѣ не оказывающемъ сопротивленія, описываетъ въ теченіе какого-либо весьма малаго промежутка времени весьма малую дугу, и черезъ середину этой дуги проведена стрѣлка, направленная къ неподвижному центру, то центростремительная сила по серединѣ дуги пропорціональна этой стрѣлкѣ и обратно пропорціональна квадрату времени ея описанія.

Дѣйствительно (слѣд. 4 пред. 1) стрѣлка дуги, описанной въ теченіе заданнаго промежутка времени, пропорціональна силѣ, а такъ какъ при увеличеніи промежутка времени въ какомъ-нибудь отношеніи пройденная дуга увеличится въ томъ же отношеніи, стрѣлка же увеличится въ этомъ отношеніи возвышенномъ во вторую степень (слѣд. 2 и 3 леммы X), слѣдовательно, стрѣлка пропорціональна силѣ и квадрату времени. Отсюда слѣдуетъ, что сила пропорціональна стрѣлкѣ и обратно пропорціональна квадрату времени.

То же самое легко доказывается пользуясь слѣдствіемъ 4-мъ леммы X.

Слѣдствіе 1. Если тѣло P (фиг. 15), обращаясь вокругъ центра S, описываетъ кривую APQ и прямая ZPR касается этой кривой въ точкѣ P и изъ какой-либо точки Q этой кривой весьма близкой къ P проводится прямая QR параллельная SP и на SP опускается перпендикуляръ QT, то центростремительная сила будетъ обратно пропорціональна предѣльной величинѣ, къ которой приближается количество $\frac{SP^2 \cdot QT^2}{QR}$, когда точки P и Q сливаются между собою. Ибо QR равно стрѣлкѣ удвоенной дуги QP, коей середина есть P, удвоенная же площадь треугольника SQP, т.-е $SP \cdot QT$ пропорціональна времени, въ теченіе котораго эта двойная дуга описывается, слѣдовательно, это произведеніе можно ввести въ пропорцію вмѣсто времени.

Слѣдствіе 2. Центростремительная сила обратно пропорціональна предѣлу количества $\frac{SY^2 \cdot PQ^2}{QR}$, гдѣ SY есть перпендикуляръ опущенный изъ центра силъ на касательную PR къ орбитѣ, ибо произведенія

$$SY \cdot QP = SP \cdot QT.$$

Слѣдствіе 3. Если сама орбита круговая или если въ точкѣ P проведенъ къ этой орбитѣ кругъ имѣющій съ нею въ этой точкѣ одинаковую кри-

---

изъ скорости на разстояніе отъ центра до касательной къ траекторіи. Какъ видно эти уравненія первой степени относительно неизвѣстныхъ ξ, η и σ, слѣдовательно, ихъ рѣшеніе не представляетъ затрудненій.

визну и образующій съ нею наименьшій уголъ соприкосновенія (см. прим. 32), и если PV есть хорда этого круга проведенная черезъ центръ силъ, то центростремительная сила будетъ обратно пропорціональна объему $SY^2 . PV$ ибо $PV = \frac{QP^2}{QR}$ по свойству круга кривизны.

Слѣдствіе 4. При тѣхъ же предположеніяхъ центростремительная сила прямо пропорціональна квадрату скорости и обратно пропорціональна сказанной хордѣ, ибо скорость обратно пропорціональна перепендикуляру SY (слѣд. 1 пр. 1).

Слѣдствіе 5. Такимъ образомъ, если дана какая-либо кривая APQ и внутри ея точка S, къ которой постоянно направляется центростремительная сила, то можно найти законъ этой силы, дѣйствіемъ которой тѣло P отклоняется отъ прямолинейнаго пути, удерживается на кривой и вынуждается описывать ее. Для этого надо вычислить или объемъ $\frac{SP^2 . QT^2}{QR}$ или же объемъ $SY^2 . PV$ обратно пропорціональный этой силѣ [42]). Въ слѣдующихъ задачахъ мы даемъ примѣры такого опредѣленія центростремительныхъ силъ.

Предложеніе VII. Задача II.

Тѣло обращается по окружности круга, требуется найти законъ центростремительной силы направляющейся къ какой-либо заданной точкѣ.

Пусть $VQPA$ (фиг. 16) есть окружность круга, S — заданная точка, къ которой какъ къ центру направляется сила, P—движущееся по окруж-

---

[42]) Эта теорема и ея слѣдствія приводятъ къ основной формулѣ служащей для опредѣленія центростремительныхъ силъ. Обозначая черезъ c постоянную площадей, черезъ τ весьма малый промежутокъ времени, въ теченіе котораго тѣло проходить путь PQ, и черезъ φ ускореніе, будемъ имѣть:

$$QR = \frac{1}{2}\varphi . \tau^2$$

и

$$c . \tau = 2SPQ = SP . QT = SY . PQ$$

откуда:

$$\varphi = 2c^2 : \frac{SP^2 . QT^2}{QR} = 2c^2 : \frac{SY^2 . PQ^2}{QR} = \frac{2c^2}{SY^2 . PV} \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

Это и есть формула Ньютона.

Обозначимъ черезъ ρ радіусъ кривизны въ точкѣ P и черезъ ω уголъ PSY тогда, полагая $SY = p$ и $SP = r$, будемъ имѣть: $PV = 2\rho\cos\omega$; $p = r\cos\omega$ и слѣдовательно,

$$\varphi = \frac{2c^2}{p^2 . 2\rho\cos\omega} = \frac{c^2 . r}{\rho . p^3} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (2)$$

Duhamel въ Methodes dans les sciences du raisonnements t. IV, стр. 276.

ности тѣло, Q — близкое къ нему мѣсто въ которое бы оно перешло, PRZ касательная въ точкѣ P. Черезъ точку S проводимъ хорду PV, проведя діаметръ VA, соединяемъ PA, на SP опускаемъ перпендикуляръ QT, коего продолженіе пересѣкаетъ касательную въ точкѣ Z. Черезъ Q проводимъ хорду LR параллельную PS, пересѣкающую касательную въ точкѣ R и кругъ въ точкѣ L. Изъ подобія треугольниковъ ZQR, ZTP, VPA, слѣдуетъ:

$$RP^2 : QT^2 = AV^2 : PV^2,$$

по свойству же круга

$$RP^2 = QR \,.\, RL,$$

слѣдовательно,

$$QT^2 = \frac{QR \,.\, RL \,.\, PV^2}{AV^2}.$$

Умножимъ обѣ части этого равенства на $\frac{SP^2}{QR}$ и такъ какъ P и Q сливаются то вмѣсто RL напишемъ PV, тогда получимъ:

$$\frac{QT^2 \,.\, SP^2}{QR} = \frac{SP^2 \,.\, PV^3}{AV^2}.$$

Слѣдовательно (слѣд. 1 и 5, пред. VI), центростремительная сила обратно пропорціональна $\frac{SP^2 \,.\, PV^3}{AV^2}$, а такъ какъ AV^2 есть величина постоянная, то эта сила обратно пропорціональна произведенію квадрата разстоянія на кубъ хорды.

То же самое иначе.

На продолженіе касательной PR опускается перпендикуляръ SY, тогда по подобію треугольниковъ SYP, VPA будетъ:

$$AV : PV = SP : SY,$$

обращаетъ вниманіе, что формула Ньютона равносильна такъ называемой формулѣ Бине, которою пользуются теперь. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ точку S за полюсъ, какую-нибудь прямую, напр., SA за полярную ось, тогда, полагая уголъ $ASP = \theta$, будетъ

$$p = r\cos\omega = r^2 \,.\, \frac{d\theta}{ds}; \quad \rho = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}} = \frac{\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^3}{r^3\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\}}$$

подставляя въ формулу (2) имѣемъ

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\}.$$

Это и есть формула Бине. Но такъ какъ Ньютонъ при изложеніи «Началъ» не пользуется аналитической геометріей и избѣгаетъ примѣненій исчисленія флюксій, въ которомъ выраженіе для кривизны у него имѣется, то онъ и ограничивается формулами (1), выражая ихъ пропорціями, и не приводя коефиціента пропорціональности $2c^2$.

слѣдовательно,

$$SY = \frac{PV \,.\, SP}{AV}$$

и

$$SY^2 \,.\, PV = \frac{SP^2 \,.\, PV^3}{AV^2}$$

центростремительная сила (по слѣд. 3 и 4 пред. VI) обратно пропорціональна $\frac{SP^2 \,.\, PV^3}{AV^2}$, а такъ какъ AV^2 есть величина постоянная, то эта сила обратно пропорціональна [43]) $SP^2 \,.\, PV^3$.

Слѣдствіе 1. Если заданная точка S, къ которой постоянно направляется сила, лежитъ на окружности этого круга, скажемъ въ V, то центростремительная сила будетъ обратно пропорціональна пятой степени разстоянія SP.

Слѣдствіе 2. Сила, которая можетъ заставить тѣло P обращаться по кругу $APTV$ (фиг. 17) около центра силъ S, такъ относится къ другой силѣ, которая могла бы заставить то же тѣло обращаться по тому же кругу, но около другого центра силъ R, какъ $RP^2 \,.\, SP$ относится къ SG^3, причемъ SG есть отрѣзокъ прямой параллельной PR заключенный между точкою S и касательной къ кругу проведенной въ точкѣ P. По построенію видно, что первая сила такъ относится ко второй какъ $RP^2 \,.\, PT^3 : SP^2 \,.\, PV^3$ или какъ $RP^2 \,.\, SP : \frac{SP^3 \,.\, PV^3}{PT^3}$ но изъ подобія треугольниковъ SPG и TPV слѣдуетъ $SG = \frac{PV \,.\, SP}{PT}$ и значитъ предыдущее отношеніе равно

$$\frac{RP^2 \,.\, SP}{SG^3}.$$

Слѣдствіе 3. Сила, могущая заставить тѣло P обращаться по какой-либо орбитѣ вокругъ центра силъ S, такъ относится къ силѣ, могущей заставить то же тѣло P въ такое же время обращаться по той же орбитѣ, какъ $SP \,.\, RP^2$ относится къ SG^3, ибо силы для сказанной орбиты и для ея круга кривизны во всякой точкѣ P равны.

Предложеніе VIII. Задача III.

Тѣло движется по полукругу PQA, требуется найти законъ центростремительной силы, которая могла бы производить такое дви-

---

[43]) Этотъ результатъ непосредственно получается изъ формулы $\varphi = \frac{c^2 r}{\rho \cdot p^3}$ ибо въ данномъ случаѣ $\rho = R$, $p = r\cos\omega$; $PV = 2R\cos\omega$, слѣдовательно,

$$\varphi = \frac{c^2 r}{R \,.\, r^3 \cos^3\omega} = 8c^2 R^2 \,.\, \frac{1}{r^2} \,.\, \frac{1}{PV^3}.$$

женіе, будучи направленной къ столь отдаленной точкѣ S, что всѣ прямыя PS, QS и пр. можно считать между собою параллельными.

Черезъ центръ полукруга C (фиг. 18) проводимъ діаметръ перпендикулярный къ сказаннымъ параллельнымъ и пересѣкающій ихъ въ M, N, и соединяемъ CP.

Изъ подобныхъ треугольниковъ CPM, PZT, RZQ слѣдуетъ:

$$CP^2 : PM^2 = RP^2 : QT^2$$

по свойству же круга:

$$RP^2 = QR \,.\, (RN + QN)$$

или въ предѣлѣ, когда точки P и Q совпадутъ

$$RP^2 = 2PM \,.\, QR.$$

Слѣдовательно, будетъ

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{2PM^3}{CP^2}$$

и

$$\frac{QT^2 \,.\, SP^2}{QR} = \frac{2PM^3 \,.\, SP^2}{CP^2}$$

т.-е. (по слѣд. 1 и 5 пред. VI) искомая центростремительная сила обратно пропорціональна $\frac{2PM^3 \,.\, SP^2}{CP^2}$ или отбрасывая постоянную величину $\frac{2SP^2}{CP^2}$ обратно пропорціональна PM^3. То же самое легко получается изъ предыдущаго предложенія.

Предложеніе IX. Задача IV.

Тѣло обращается по спирали PQ, пересѣкающей всѣ радіусы SP, SQ и т. д. подъ заданнымъ угломъ, требуется найти законъ центростремительной силы направленной къ центру спирали.

Будемъ брать весьма малый уголъ PSQ (фиг. 19) постоянно одной величины, тогда въ виду постоянства всѣхъ угловъ фигура $SPRQT$ при всякомъ положеніи точки P будетъ постоянна по виду (т.-е. будетъ оставаться подобной) и значитъ отношеніе $\frac{QT}{QR}$ будетъ постоянное, слѣдовательно, $\frac{QT^2}{QR}$ будетъ пропорціонально QT, а такъ какъ отношеніе QT къ SP также постоянное, то QT пропорціонально SP, слѣдовательно и $\frac{QT^2}{QR}$ пропорціонально SP. При измѣненіи угла PSQ, отрѣзокъ QR будетъ измѣняться пропорціонально квадрату PR или QT (лемма XI), слѣдовательно, отношеніе $\frac{QT^2}{QR}$ останется безъ измѣненія, т.-е., по прежнему пропорціональнымъ SP. Поэтому $\frac{QT^2 . SP^2}{QR}$ будетъ пропорціонально SP^3, и слѣдовательно (пред. VI сл. 1 и 5), центростремительная сила обратно пропорціональна кубу разстоянія SP.

То же самое иначе.

Перпендикуляръ SY опущенный на касательную и хорда PV круга кривизны спирали въ точкѣ P находятся въ постоянномъ отношеніи къ разстоянію SP, поэтому $SY^2 . PV$ пропорціонально SP^3, что обратно пропорціонально центростремительной силѣ (VI, 2, 3).

Лемма XII.

Всѣ параллелограммы построенные на сопряженныхъ діаметрахъ заданнаго эллипса или гиперболы равны между собою по площади.

Установлено въ ученіи о коническихъ сѣченіяхъ.

Предложеніе X. Задача V.

Тѣло обращается по эллипсу требуется найти законъ центростремительной силы направленной къ центру эллипса.

Пусть CA и CB (фиг. 20) полуоси эллипса, PG и DK два сопряженныхъ его діаметра, PF, QT перпендикуляры къ этимъ діаметрамъ, Qv ордината къ діаметру PG. Дополнимъ параллелограмъ $QvPR$, по теоріи коническихъ сѣченій имѣемъ

$$Qv^2 = \frac{CD^2}{PC^2} . Pv . vG$$

по подобію треугольниковъ QvT и PCF будетъ

$$Qv^2 = \frac{QT^2 . PC^2}{PF^2},$$

слѣдовательно, будетъ

$$vG = \frac{QT^2 . PC^4}{PF^2 . CD^2 . Pv}.$$

Вмѣсто Pv можно написать QR, вмѣсто $CD . PF$ равное ему произведеніе $BC . AC$ и въ предѣлѣ $2PC$ вмѣсто vG, тогда получимъ:

$$\frac{QT^2 . PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 . AC^2}{PC},$$

слѣдовательно (VI, 5), центростремительная сила обратно пропорціональна $\frac{2BC^2 . AC^2}{PC}$, а такъ какъ $2BC^2 . AC^2$ есть величина постоянная, то центростремительная сила обратно пропорціональна $\frac{1}{PC}$, т.-е. прямо пропорціональна разстоянію [44]) до центра PC.

То же самое иначе.

На прямой PG по другую сторону отъ точки T возьми точку u такъ чтобы было $Tu = Tv$, затѣмъ возьми uV такъ чтобы было $uV : vG = DC^2 : PC^2$, а такъ какъ по свойствамъ коническихъ сѣченій:

$$Qv^2 : Pv \,.\, vG = DC^2 : PC^2$$

то будетъ

$$Qv^2 = Pv \,.\, uV.$$

Сложивъ почленно это равенство съ слѣдующимъ:

$$(Pv + 2vT)\, Pv = Pv \,.\, uP$$

получимъ:

$$PQ^2 = Pv \,.\, PV.$$

Слѣдовательно, кругъ касающійся коническаго сѣченія въ точкѣ P и проходящій черезъ точку Q пройдетъ и черезъ точку V. При совпаденіи точекъ P и Q отношеніе $uV : vG$ равное отношенію $DC^2 : PC^2$ обратится въ отношеніе $PV : PG$, т.-е. $PV : 2PC$, и слѣдовательно, будетъ $PV = \frac{2DC^2}{PC}$. Поэтому сила заставляющая тѣло обращаться по эллипсу будетъ обратно пропорціональна $\frac{2DC^2 \,.\, PF^2}{PC}$, а такъ какъ произведеніе $2DC^2 \,.\, PF^2$ постоянное, то эта сила прямо пропорціональна PC.

---

[44]) Отнесемъ эллипсъ къ его сопряженнымъ діаметрамъ CP и CD, длины коихъ обозначимъ черезъ a_1 и b_1 и уголъ между ними черезъ α, тогда будетъ

$$Qv^2 = y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2); \quad QT^2 = Qv^2 \,.\, \sin^2\alpha; \quad QR = a_1 - x$$

и тогда выраженіе $\varphi = \frac{2c^2 \,.\, QR}{QT^2 \,.\, PC^2}$ даетъ:

$$\varphi = \frac{2c^2 \,.\, (a_1 - x)}{a_1^2 \,.\, y^2 \sin^2\alpha} = \frac{2c^2 (a_1 - x)}{b_1^2 (a_1^2 - x^2) \,.\, \sin^2\alpha} = \frac{2c^2}{b_1^2 \,.\, \sin^2\alpha \,.\, (a_1 + x)} = \frac{2c^2 \,.\, a_1^2}{a_1^2 b_1^2 \sin^2\alpha \,.\, (a_1 + x)}.$$

Но $a_1^2 b_1^2 \,.\, \sin^2\alpha = a^2 b^2$, гдѣ a и b полуоси эллипса, вмѣстѣ съ тѣмъ въ предѣлѣ будетъ $x = a_1 = CP$ поэтому въ предѣлѣ

$$\varphi = \frac{c^2}{a^2 b^2} \,.\, a_1 = \frac{c^2}{a^2 b^2} \,.\, CP.$$

Обозначая черезъ $2p = \frac{2b^2}{a}$ параметръ эллипса можемъ написать

$$\varphi = \frac{c^2}{pa^3} \,.\, CP \quad \ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

Слѣдствіе 1. Итакъ, въ этомъ случаѣ сила пропорціональна разстоянію до центра эллипса, и наоборотъ, если сила пропорціональна разстоянію, то тѣло будетъ двигаться по эллипсу, коего центръ совпадаетъ съ центромъ силъ, или же въ частномъ случаѣ по кругу, въ который эллипсъ можетъ обратиться.

Слѣдствіе 2. Времена обращеній совершающихся около того же центра по любымъ эллипсамъ между собою равны. Дѣйствительно, эти времена обращенія равны между собою для эллипсовъ подобныхъ (IV, 3, 8); для эллипсовъ же имѣющихъ общую большую ось эти времена прямо пропорціональны площадямъ эллипсовъ и обратно пропорціональны площадямъ описываемымъ въ одинаковые постоянные промежутки времени, иначе прямо пропорціональны малымъ осямъ и обратно пропорціональны скоростямъ при проходѣ черезъ главныя вершины, т.-е. прямо пропорціональны малымъ полуосямъ и обратно пропорціональны ординатамъ проведеннымъ черезъ ту же самую точку общей большой оси ихъ, частное же отъ дѣленія этихъ отношеній, равныхъ между собою, равно единицѣ.

Поученіе.

Если эллипсъ при безконечномъ удаленіи центра обратится въ параболу и тѣло будетъ двигаться по этой параболѣ, то сила, направленная къ безконечно удаленному центру станетъ постоянною. Это есть теорема *Галлилея.*

Если (при измѣненіи наклоненія сѣкущей конусъ плоскости) параболическое сѣченіе превратится въ гиперболическое, то тѣло будетъ двигаться по этой гиперболѣ, если замѣнить центростремительную силу центробѣжною. Подобно тому, какъ для круга или эллипса если сохранять времена оборота, то силы направленныя къ его центру остаются пропорціональными разстоянію, въ какомъ бы отношеніи ни увеличивались или не уменьшались ординаты или не мѣнялся уголъ ихъ наклоненія къ оси абсциссъ проходящей черезъ центръ, точно также и для всякихъ кривыхъ вообще, если ординаты увеличиваются или уменьшаются въ какомъ угодно отношеніи или измѣняется уголъ ихъ наклоненія, но время оборота сохраняется, то силы направленныя къ центру лежащему на оси абсциссъ будутъ пропорціональны разстояніямъ до него для всѣхъ точекъ лежащихъ на той же самой ординатѣ.

ОТДѢЛЪ III.

О движеніи тѣлъ по эксцентричнымъ коническимъ сѣченіямъ.

Предложеніе XI. Задача VI.

Тѣло обращается по эллипсу, требуется опредѣлить законъ центростремительной силы, направленной къ фокусу эллипса.

Пусть S (фиг. 21) есть фокусъ эллипса. Проводимъ SP, пересѣкающую діаметръ DK въ точкѣ E и ординату Qv въ точкѣ x и дополняемъ параллелограммъ $QxPR$, тогда окажется, что EP равно большой полуоси AC эллипса, ибо если провести изъ другого фокуса H прямую HJ параллельно EC, то по равенству CS и CH будутъ равны ES и EJ, слѣдовательно, $PE = \frac{1}{2}(PS + PJ)$, но такъ какъ HJ параллельно PR и углы JPR и HPZ равны, то $PJ = PH$, сумма же $PS + PH = 2AC$.

На SP опустимъ перпендикуляръ QT и обозначимъ параметръ эллипса черезъ L такъ, что $L = 2\frac{BC^2}{AC}$ имѣемъ:

$$L \,.\, QR : L \,.\, Pv = QR : Pv, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

но $QR = Px$, изъ подобія же треугольниковъ Pxv и PCE слѣдуетъ:

$$Px : Pv = PE : PC,$$

значитъ

$$QR : Pv = AC : PC,$$

но

$$L \,.\, Pv : Gv \,.\, Pv = L : Gv. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

и

$$Gv \,.\, vP : Qv^2 = PC^2 : CD^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

При совмѣщеніи точекъ Q и P будетъ (л. VII, 2)

$$Qx = Qv$$

и, слѣдовательно, въ предѣлѣ будетъ:

$$Qx^2 : QT^2 = Qv^2 : QT^2 = EP^2 : PF^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2 \text{ (л. XII)}.$$

Итакъ:

$$Qv^2 : QT^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : CB^2 \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

По перемноженіи пропорцій (1), (2), (3) и (4) получится:

$$L \,.\, QR : QT^2 = AC \,.\, L \,.\, PC^2 \,.\, CD^2 : PC \,.\, Gv \,.\, CD^2 \,.\, CB^2 =$$
$$= 2CB^2 \,.\, PC^2 \,.\, CD^2 : PC \,.\, Gv \,.\, CD^2 \,.\, CB^2 = 2PC : Gv,$$

слѣдовательно, въ предѣлѣ будетъ:

$$L \,.\, QR = QT^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

По умноженіи этого равенства на $\frac{SP^2}{QR}$ получимъ

$$\frac{SP^2 \,.\, QT^2}{QR} = L \,.\, SP^2 \,.\quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Слѣдовательно (VI, 1, 5), центростремительная сила обратно пропорціональна $L \,.\, SP^2$, т.-е. обратно пропорціональна [45]) квадрату разстоянія SP.

---

[45]) Пользуясь обычнымъ теперь обозначеніемъ эту часть доказательства можно провести такъ:

$$QR = Px = \frac{a}{a_1} \,.\, Pv = \frac{a}{a_1}(a_1 - x),$$

гдѣ

$$AC = a, \quad CP = a_1, \quad CD = b_1, \quad Cv = x, \quad RP = Qv = y, \quad PCZ = \alpha.$$

Затѣмъ изъ подобія треугольниковъ QxT и EPF:

$$QT = \frac{Qx \,.\, PF}{PE} = \frac{Qv \,.\, PT}{a} = y \,.\, \frac{a_1 \sin\alpha}{a}.$$

Но по уравненію эллипса, отнесенному къ сопряженнымъ діаметрамъ CD и CP.

$$Qv^2 = y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - x^2),$$

слѣдовательно,

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{b_1^2 \sin^2\alpha}{a^2} \cdot \frac{a_1^2 - x^2}{a_1 - x} \cdot \frac{a_1}{a} = \frac{a_1 b_1^2 \sin^2\alpha}{a^3}(a_1 + x).$$

Въ предѣлѣ, когда точка Q совмѣстится съ точкою P, будетъ:

$$a_1 + x = 2a_1,$$

кромѣ того, по свойству сопряженныхъ діаметровъ

$$a_1^2 b_1^2 \sin^2\alpha = a^2 b^2,$$

слѣдовательно,

$$\frac{QT^2}{QR} = \frac{2b^2}{a} = \text{постоянной} = 2p$$

и получится:

$$\frac{\varphi}{2c^2} = \frac{QR}{QT^2 \,.\, SP^2} = \frac{1}{2p} \cdot \frac{1}{SP^2},$$

т.-е.

$$\varphi = \frac{c^2}{p} \cdot \frac{1}{SP^2},$$

гдѣ c есть постоянная площадей и $2p$ параметръ эллипса.

То же самое иначе.

Сила, направленная къ центру эллипса и такая, что подъ ея дѣйствіемъ тѣло P описывало бы этотъ эллипсъ, пропорціональна CP — разстоянію тѣла до центра. Проведемъ CE параллельно касательной PR—сила, подъ дѣйствіемъ которой тѣло могло бы описывать эллипсъ, направленная въ какую-либо точку S, будетъ пропорціональна $\frac{PE^3}{SP^2}$ (VII, 3), гдѣ E есть пересѣченіе CE и SP.

Когда S есть фокусъ эллипса, то длина PE есть величина постоянная, слѣдовательно, сила будетъ тогда обратно пропорціональна SP^2.

Для гиперболы и параболы можно бы было и здѣсь поступить съ тою же краткостью, съ которою разсмотрѣна задача пятая, но въ виду важности настоящей задачи для дальнѣйшихъ приложеній, не мѣшаетъ эти два случая подтвердить отдѣльными самостоятельными доказательствами.

Предложеніе XII. Задача VII.

Тѣло движется по гиперболѣ; требуется найти законъ центростремительной силы, направленной къ фокусу этой кривой.

Пусть CA и CB (фиг. 22) полуоси гиперболы, PG и KD, два сопряженныхъ діаметра, PF перпендикуляръ къ діаметру KD и Qv ордината къ діаметру PG. Проводимъ SP пересѣкающую діаметръ DK въ E и ординату Qv въ x и дополняемъ параллелограммъ $QRPx$. Длина PE оказывается равной дѣйствительной полуоси AC гиперболы, ибо если провести изъ другого фокуса гиперболы прямую HJ параллельную CE, то по равенству SC и CH будутъ равны ES и EJ, слѣдовательно, $PE = \frac{1}{2}(PJ - PS) = \frac{1}{2}(PH - PS) = AC$ такъ какъ по параллельности HJ и PR и равенству угловъ JPR и HPZ разстояніе $PJ = PH$.

На SP опускается перпендикуляръ QT, обозначивъ черезъ L параметръ гиперболы, т.-е. величину $2\frac{BC^2}{AC}$ имѣемъ:

$$L \,.\, QR : L \,.\, Pv = QR : Pv = Px : Pv \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (1)$$

По подобію же треугольниковъ Pxv и PEC будетъ:

$$Px : Pv = PE : PC = AC : PC.$$

Точно также будетъ:

$$L \,.\, Pv : Gv \,.\, Pv = L : Gv \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

и по свойству гиперболы

$$Gv \,.\, Pv : Qv^2 = PC^2 : CD^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (3)$$

Въ предѣлѣ (л. VII сл. 2), когда точки P и Q совмѣстятся, будетъ:

$$Qv^2 : Qx^2 = 1$$

и въ слѣдствіи пропорціи $Qx^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2$ будетъ:

$$Qv^2 : QT^2 = PE^2 : PF^2 = AC^2 : PF^2 = CD^2 : BC^2 \text{ (л. XII)} \quad . \quad . \quad (4)$$

По перемноженіи пропорцій 1, 2, 3, 4 получится:

$$L \,.\, QR : QT^2 = AC \,.\, L \,.\, PC^2 \,.\, CD^2 : PC \,.\, Gv \,.\, CD^2 \,.\, BC^2,$$

но

$$L \,.\, AC = 2BC^2,$$

слѣдовательно, будетъ:

$$L \,.\, QR : QT^2 = 2PC : Gv.$$

Но въ предѣлѣ при совпаденіи точекъ Q и P величины Gv и $2PC$ станутъ равными, значитъ будетъ:

$$L \,.\, QR = QT^2 \,.\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Умноживъ это равенство на $\frac{SP^2}{QR}$ получимъ:

$$\frac{QT^2 \,.\, SP^2}{QR} = L \,.\, SP^2,$$

которое показываетъ (VI, 1, 5), что центростремительная сила обратно пропорціональна $L \,.\, SP^2$, т.-е. обратно пропорціональна квадрату разстоянія [46]) SP.

То же самое иначе.

Уже была найдена сила, направленная къ центру гиперболы, она оказалась пропорціональной разстоянію PC, слѣдовательно (VII, 3), сила, направленная къ фокусу S, будетъ пропорціональна $\frac{PE^3}{SP^2}$; такъ какъ PE постоянная, то сила обратно пропорціональна SP^2.

Подобнымъ же образомъ найдется, что тѣло подъ дѣйствіемъ такой же силы, но центробѣжной, будетъ описывать другую вѣтвь гиперболы.

---

[46]) Сохраняя обозначенія прим. 45, увидимъ, что для гиперболы выкладка остается совершенно такою же какъ для эллипса, съ тою лишь разницею, что будетъ:

$$Qv^2 = y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}(x^2 - a_1^2)$$

и

$$Pv = x - a_1.$$

Лемма XIII.

Параметръ параболы, относящійся къ какой-либо вершинѣ, равенъ учетверенному разстоянію этой вершины до фокуса.

Слѣдуетъ изъ теоріи коническихъ сѣченій [47]).

Лемма XIV.

Перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса параболы на касательную къ ней, есть среднее пропорціональное между разстояніями отъ фокуса до точки касанія и до главной вершины параболы.

Пусть AP (фиг. 23) есть парабола, S ея фокусъ, A—главная вершина, P точка касанія, PO ордината этой точки, PM касательная пересѣкающая ось въ точкѣ M и SN перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на касательную. Проведемъ AN, тогда по равенству $MS=SP$, $NP=MN$, $MA=AO$ прямыя AN и OP между собою параллельны и треугольникъ SAN прямоугольный при A и подобенъ равнымъ треугольникамъ SNM и SNP, слѣдовательно,

$$SP:SN=SN:SA,$$

что и требовалось доказать.

---

[47]) Уравненіе параболы, отнесенной къ касательной и діаметру съ ней сопряженному есть

$$y^2=2p_1x.$$

Входящая въ это уравненіе величина $2p_1$ и есть «параметръ, относящійся къ вершинѣ, совпадающей съ точкою касанія». Чтобы получить геометрическое представленіе этой линіи, стоитъ только замѣтить, что параметръ есть длина хорды, проведенной черезъ фокусъ параллельно оси ординатъ. Такъ какъ для фокуса S (фиг. 23) абсцисса $MS=SP$, по свойству касательной, то полагая $SP=r$ имѣемъ для соотвѣтствующей ординаты

$$y^2=2p_1r=p_1{}^2,$$

значитъ

$$p_1=2r$$

и, слѣдовательно, параметръ

$$2p_1=4r=4SP.$$

Если черезъ точку P провести прямую параллельно оси до пересѣченія ея съ направляющей параболы, то эта длина равна SP, т.-е. составитъ $\frac{1}{4}$ параметра, соотвѣтствующаго этой побочной вершинѣ, совершенно такъ же какъ SA составляетъ $\frac{1}{4}$ главнаго параметра.

Слѣдствіе 1. $SP^2 : SN^2 = SP : SA.$

Слѣдствіе 2. Такъ какъ SA постоянное, то SN^2 пропорціонально PS.

Слѣдствіе 3. Геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ фокуса на касательныя къ параболѣ, есть прямая AN—касательная къ параболѣ въ главной вершинѣ.

Предложеніе XIII. Задача VIII.

Тѣло движется по параболѣ, требуется найти законъ центростремительной силы, направленной къ фокусу этой кривой.

Сохранимъ построеніе предыдущей леммы и пусть P (фиг. 24) мѣсто тѣла на параболѣ, изъ Q его мѣста, куда бы оно перешло въ ближайшее время, проводятся: прямыя QR параллельно и QT перпендикулярно къ SP и Qv параллельная касательной въ точкѣ P и пересѣкающая діаметръ PG въ точкѣ v и радіусъ SP въ точкѣ x. Такъ какъ треугольникъ xPv подобенъ треугольнику SPM, въ послѣднемъ же стороны SP и SM равны, то и въ первомъ $Px = Pv = QR$.

По свойству параболы

$$Qv^2 = 4PS \,.\, Pv = 4PS \,.\, QR,$$

ибо по леммѣ XIII, $4PS$ равно параметру, относящемуся къ вершинѣ P или діаметру Pv. При совмѣщеніи точекъ P и Q отношеніе длинъ Qv и Qx въ предѣлѣ равно единицѣ (л. VII, 2) и, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ будетъ:

$$Qx^2 = 4PS \,.\, QR.$$

По подобію же треугольниковъ QxT и SPN будетъ:

$$Qx^2 : QT^2 = PS^2 : SN^2 = PS : SA \quad \text{(л. XIV, 1)}$$

или

$$Qx^2 : QT^2 = 4PS \,.\, QR : 4SA \,.\, QR$$

и значитъ

$$QT^2 = 4SA \,.\, QR \quad \text{(Эвкл. Эл. кн. V, пр. IX)}. \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

По умноженіи этого равенства на $\frac{SP^2}{QR}$ получится [48])

$$\frac{SP^2 \,.\, QT^2}{QR} = 4SA \,.\, SP^2,$$

---

[48]) Для параболы эта часть доказательства можетъ быть проведена такъ: въ предѣлѣ

$$Qx^2 = Qv^2 = \frac{QT^2}{\sin^2\alpha} = 4PS \,.\, QR,$$

слѣдовательно,

$$\frac{QT^2}{QR} = 4PS \,.\, \sin^2\alpha,$$

слѣдовательно (VI, 1, 5), центростремительная сила обратно пропорціональна $4SA \,.\, SP^2$, т.-е. по постоянству $4SA$ обратно пропорціональна квадрату разстоянія.

Слѣдствіе 1. Изъ послѣднихъ трехъ предложеній слѣдуетъ, что если какое-нибудь тѣло P выходитъ изъ мѣста P, по направленію прямой PR съ какою-либо скоростью и находится подъ дѣйствіемъ центростремительной силы обратно пропорціональной квадратамъ разстояній до центра S, то это тѣло будетъ двигаться по коническому сѣченію, коего фокусъ лежитъ въ центрѣ силъ и наоборотъ; ибо при заданныхъ: фокусѣ, точкѣ касанія, положеніи касательной можно построить лишь одно коническое сѣченіе, имѣющее въ этой точкѣ заданную кривизну. Кривизна же найдется по заданной скорости и извѣстной центростремительной силѣ: подъ дѣйствіемъ той же центростремительной силы и при той же скорости не могутъ быть описываемы двѣ различныя орбиты, касающіяся другъ друга.

Слѣдствіе 2. Если скорость, съ которою тѣло выходитъ изъ мѣста P, такова, что въ теченіе весьма малаго промежутка времени оно прошло бы отрѣзокъ PR, центростремительная же сила въ теченіе того же времени могла бы заставить тѣло пройти путь QR, то сказанное тѣло будетъ двигаться по такому коническому сѣченію, коего главный параметръ равенъ предѣлу отношенія $\frac{QT^2}{QR}$ при безконечномъ уменьшеніи длинъ QT и QR (См. фор. 5 доказательствъ предложеній XI, XII и XIII). Въ этомъ слѣдствіи я отношу кругъ къ эллипсамъ и исключаю тотъ случай, когда тѣло падаетъ къ центру по прямой линіи.

Предложеніе XIV. Теорема VI.

Если нѣсколько тѣлъ обращаются около общаго центра силъ, причемъ центростремительныя силы обратно пропорціональны квадрату разстоянія до центра, то главные параметры орбитъ пропорціональны

гдѣ α есть уголъ между касательной въ точкѣ P и осью. Изъ треугольниковъ PSN и ASN имѣемъ

$$SN = PS \,.\, \sin\alpha; \qquad AS = SN \,.\, \sin\alpha = PS \,.\, \sin\alpha = \frac{p}{2},$$

гдѣ $2p$ главный параметръ, значитъ

$$\frac{QT^2}{QR} = 2p = L$$

и

$$\frac{QT^2}{QR} \,.\, SP^2 = 2p \,.\, SP^2 = 4AS \,.\, SP^2.$$

квадратамъ площадей, описываемыхъ проведенными къ тѣламъ радіусами въ одно и то же время [49]).

Параметръ $L=\frac{QT^2}{QR}$ предполагая, что точки P и Q (фиг. 25) сливаются (XIII,-2). Но отрѣзочекъ QR пропорціоналенъ центростремительной силѣ, т.-е. обратно пропорціоналенъ SP^2, слѣдовательно, $\frac{QT^2}{QR}$ будетъ пропорціонально $QT^2 . SP^2$, т.-е. параметръ L пропорціоналенъ квадрату площади $QT . SP$.

Слѣдствіе. Такъ какъ полная площадь эллипса пропорціональна произведенію его полуосей, то она пропорціональна произведенію корня квадратнаго изъ параметра умноженному на время оборота, ибо эта площадь пропорціональна площади $QT . SP$, описываемой въ заданный промежутокъ времени, умноженной на время оборота.

---

[49]) Теоремы предложеній XIV, XV и XVI непосредственно вытекаютъ изъ выраженій

$$\varphi=\frac{2c^2}{SP^2}\cdot\frac{QR}{QT^2}, \qquad \frac{QT^2}{QR}=2p=\frac{2b^2}{a}, \qquad c=\frac{2\pi ab}{\tau},$$

въ которыхъ c есть постоянная площадей, $2p=L$—параметръ, a—большая и b—малая полуоси эллипса, τ—время оборота

Изъ этихъ формулъ слѣдуетъ:

$$\varphi=\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{PS^2},$$

слѣдовательно,

$$\frac{c^2}{p}=K=\text{постоянной},$$

отсюда:

$$c=\sqrt{\frac{K}{2}}\,.\sqrt{2p} \quad \text{(пред. XIV)},$$

$$K=\frac{c^2}{p}=\frac{4\pi^2 . a^2 . b^2}{\tau^2 . \frac{b^2}{a}}=\frac{4\pi^2 . a^3}{\tau^2},$$

слѣдовательно,

$$\tau=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}\,.\,a^{\frac{3}{2}} \ \dots \ \text{(пред. XV)}.$$

Наконецъ

$$c=v\,.\,SY,$$

значитъ

$$v=\frac{c}{SY}=\sqrt{\frac{K}{2}}\,.\,\frac{\sqrt{2p}}{SY} \ \dots \ \text{(пред. XVI)}.$$

Предложеніе XV. Теорема VII.

При тѣхъ же предположеніяхъ утверждаю, что времена оборотовъ по эллипсамъ относятся между собою какъ большія полуоси въ степени $\frac{3}{2}$.

Такъ какъ малая ось есть среднее пропорціональное между большою осью и параметромъ, то произведеніе осей пропорціонально корню изъ параметра и большой оси въ степени $\frac{3}{2}$, но это же произведеніе пропорціонально (XIV, слѣд.) корню квадратному изъ параметра, умноженному на время оборота, по сокращеніи корня изъ параметра останется, что время оборота пропорціонально степени $\frac{3}{2}$ большой оси.

Слѣдствіе. Отсюда слѣдуетъ, что времена оборотовъ по эллипсамъ равны временамъ оборотовъ, по кругамъ коихъ діаметры равны большимъ осямъ эллипсовъ.

Предложеніе XVI. Теорема VIII.

При тѣхъ же предположеніяхъ, если черезъ мѣсто тѣла на его орбитѣ провести къ ней касательную и опустить на нее изъ фокуса перпендикуляръ, то скорость тѣла прямо пропорціональна корню квадратному изъ параметра орбиты и обратно пропорціональна этому перпендикуляру.

Если изъ фокуса опущенъ перпендикуляръ SY (фиг. 26) на касательную PR къ орбитѣ, то надо доказать, что скорость тѣла будетъ обратно пропорціональна корню квадратному изъ величины $\frac{SY^2}{L}$.

Скорость эта пропорціональна весьма малой дугѣ PQ, описываемой въ заданный весьма малый промежутокъ времени, т.-е. (л. VII) пропорціональна длинѣ касательной PR, а такъ какъ

$$PR : QT = SP : SY,$$

то скорость пропорціональна величинѣ $\frac{QT \cdot SP}{SY}$, но $QT \cdot SP$ пропорціонально площади, описываемой въ заданный промежутокъ времени, которая (XIV) пропорціональна корню квадратному изъ параметра.

Слѣдствіе 1. Главные параметры пропорціональны квадрату произведенія скорости на перпендикуляръ SY.

Слѣдствіе 2. Скорости тѣлъ въ ихъ наименьшемъ и наибольшемъ разстояніяхъ отъ фокуса находятся въ обратномъ отношеніи разстояній до фокуса и въ прямомъ отношеніи корней квадратныхъ изъ параметровъ, ибо при этихъ положеніяхъ тѣлъ перпендикуляры на касательныя и суть самыя разстоянія тѣлъ до фокуса.

Слѣдствіе 3. Слѣдовательно, при движеніи тѣла по коническому сѣченію скорость въ наибольшемъ или наименьшемъ разстояніи отъ фокуса относится къ скорости движенія по кругу, радіусъ коего равенъ этому разстоянію какъ корень квадратный изъ параметра относится къ корню изъ діаметра круга, т.-е. къ корню изъ удвоеннаго разстоянія упомянутаго выше [50]).

Слѣдствіе 4. Для тѣла, обращающагося по эллипсу, скорость въ среднемъ разстояніи отъ фокуса та же самая, какъ и для тѣла, обращающагося по кругу того же радіуса, т.-е. (IV, 6) обратно пропорціональна корню квадратному изъ разстоянія, ибо для этихъ положеній перпендикуляры равны длинѣ малой полуоси, которая есть среднее пропорціональное между большою полуосью и полупараметромъ, произведеніе корня изъ параметра на обратную величину перпендикуляра и даетъ величину обратную корню изъ разстоянія [51]).

Слѣдствіе 5. Для той же кривой или даже для различныхъ кривыхъ, но у которыхъ параметры равны, скорость тѣла обратно пропорціональна разстоянію отъ фокуса до касательной.

Слѣдствіе 6. Для параболы скорость обратно пропорціональна корню квадратному изъ разстоянія тѣла до фокуса, для эллипса она измѣняется болѣе, для гиперболы менѣе, нежели въ этомъ отношеніи. Ибо (л. XIV, 2) для параболы перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на касательную,

---

[50]) Такъ какъ $\varphi = \frac{K}{r^2}$, гдѣ r есть разстояніе тѣла до центра, при движеніи же по кругу въ томъ же разстояніи должно быть:

$$\varphi = \frac{V_0^2}{r},$$

то

$$V_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{r}}.$$

При прохожденіи черезъ главныя вершины скорость по коническому сѣченію

$$v = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{r}$$

отсюда

$$v : V_0 = \sqrt{2p} : \sqrt{2r}.$$

[51]) Въ этомъ случаѣ $SY = b$, слѣдовательно,

$$v = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{b} = \sqrt{\frac{K}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{2b^2}{a}}}{b} = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{a}} = V_0 \text{ (при } r = a).$$

пропорціоналенъ корню квадратному изъ разстоянія. Для гиперболы перпендикуляръ измѣняется менѣе, для эллипса болѣе, нежели этотъ корень [52]).

Слѣдствіе 7. Для параболы скорость тѣла въ какомъ-либо разстояніи отъ фокуса относится къ скорости тѣла, обращающагося въ томъ же разстояніи по кругу какъ $\sqrt{2}$ относится къ 1. Для эллипса это отношеніе менѣе, для гиперболы болѣе. Ибо по слѣд. 2 этой теоремы скорость въ вершинѣ параболы находится въ этомъ отношеніи, по 6-му же слѣдствію этой теоремы и по пред. IV это отношеніе сохраняется для всѣхъ разстояній. Такимъ образомъ для параболы скорость повсюду равна скорости на кругѣ половиннаго разстоянія, для эллипса скорость менѣе, для гиперболы болѣе [53]).

Слѣдствіе 8. Скорость тѣла, обращающагося по любому коническому сѣченію, такъ относится къ скорости обращенія по кругу, радіусъ котораго равенъ половинѣ параметра сѣченія, какъ этотъ радіусъ относится къ перпендикуляру, опущенному изъ фокуса на касательную къ сѣченію. Явствуетъ изъ слѣдствія 5-го.

---

[52]) Въ леммѣ XIV показано, что перпендикуляръ на касательную къ параболѣ

$$SN = \sqrt{SA \,.\, SP} = \frac{1}{2}\sqrt{2p} \,.\, \sqrt{r}\,,$$

гдѣ $2p$ параметръ и $r = SP$. Для эллипса перпендикуляръ измѣняется между предѣлами $a + c$ и $a - c$ или между предѣлами $a(1 + e)$ и $a(1 - e)$ и значитъ отношеніе наибольшаго его значенія къ наименьшему есть $\frac{1+e}{1-e}$ гдѣ $c = ae$ эксцентрилитетъ эллипса. Это есть вмѣстѣ съ тѣмъ и отношеніе наибольшаго разстоянія къ наименьшему и очевидно, что $\frac{1+e}{1-e} > \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, т.-е. перпендикуляръ измѣняется въ болѣе широкихъ предѣлахъ, нежели корень изъ разстоянія.

Для гиперболы перпендикуляръ остается всегда конечнымъ, разстояніе же можетъ измѣняться до безконечности.

[53]) Скорость при движеніи по коническому сѣченію выражается (прим. 49) формулою

$$v = \sqrt{\frac{K}{2}} \,.\, \frac{\sqrt{2p}}{SY}.$$

Для параболы

$$SY = SN = \frac{1}{2}\sqrt{2p} \,.\, \sqrt{r}$$

и, слѣдовательно, скорость

$$v = \sqrt{2} \,.\, \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{r}} = \sqrt{2} \,.\, V_0,$$

гдѣ V_0—скорость движенія по кругу въ разстояніи r.

Скорость движенія при параболѣ болѣе скорости движенія по эллипсу

Слѣдствіе 9. Такъ какъ (IV, 6) скорость обращенія по упомянутому въ предыдущемъ слѣдствіи кругу находится къ скорости обращенія по какому-либо кругу въ обратномъ отношеніи корней квадратныхъ изъ разстояній, то отношеніе скорости обращенія по коническому сѣченію къ скорости обращенія по кругу въ томъ же разстояніи равно отношенію средней пропорціональной между этимъ общимъ разстояніемъ и половиною параметра къ перпендикуляру, опущенному изъ фокуса на касательную къ коническому сѣченію.

Предложеніе XVII. Задача IX.

Предполагая, что центростремительная сила обратно пропорціональна квадратамъ разстояній мѣстъ до центра и что абсолютная величина этой силы извѣстна, требуется найти кривую, которую опишетъ тѣло, выходящее изъ заданнаго мѣста съ заданною скоростью.

Пусть центростремительная сила, направленная къ точкѣ S (фиг. 27) такова, что тѣло p обращаясь по заданной орбитѣ pq имѣетъ извѣстную скорость въ заданной точкѣ p. Изъ мѣста P по направленію PR выходитъ другое тѣло P, имѣя заданную скорость. Центростремительная сила уклоняетъ его отъ прямой PR и заставляетъ двигаться по коническому сѣченію PQ, которое касается прямой PR въ точкѣ P.

Пусть прямая pr касается орбиты pq въ точкѣ p, если вообразить перпендикуляры, опущенные изъ точки S на касательную pr и PR, то (XVI, 1) параметръ искомаго сѣченія находится къ параметру заданной орбиты въ отношеніи квадратовъ произведеній скоростей и перпендикуляровъ, слѣдовательно, этотъ параметръ опредѣлится [54]).

и менѣе, нежели по гиперболѣ (см. доказат. предл. XVII), слѣдовательно, критеріи орбитъ суть:

$$\text{Эллипсъ} \quad \frac{v}{V_0} < \sqrt{2}$$

$$\text{Парабола} \quad \frac{v}{V_0} = \sqrt{2}$$

$$\text{Гипербола} \quad \frac{v}{V_0} > \sqrt{2}\,,$$

причемъ

$$V_0 = \frac{\sqrt{K}}{\sqrt{r}}.$$

K—постоянная, опредѣляющая «абсолютную силу центра».

[54]) Заданіе орбиты, описываемой тѣломъ, точки на ней и скорости въ этой точкѣ опредѣляетъ «абсолютную силу центра» какъ то слѣдуетъ изъ формулъ, приведенныхъ въ прим. 49 и выражающихъ уравненіями высказанное въ «Началахъ» пропорціями и словами. Какъ показано въ пр. 49

Пусть L есть параметръ искомаго сѣченія, сверхъ того для этого сѣченія извѣстенъ и фокусъ S. Дополненіе угла RPS до двухъ прямыхъ будетъ уголъ RPH, слѣдовательно, будетъ извѣстно положеніе прямой PH, на которой находится второй фокусъ H. Опустивъ изъ фокуса S на PH перпендикуляръ SK, вообразимъ, что построена малая полуось BC.

Кромѣ того будетъ:

$$SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2 = SP^2 - 2KP \,.\, PH + PH^2 =$$
$$= (SP + PH)^2 - L(SP + PH) = SP^2 + 2SP \,.\, PH + PH^2 - L(SP + PH).$$

Отсюда слѣдуетъ:

$$L \,.\, (SP + PH) = 2SP \,.\, PH + 2KP \,.\, PH$$

иначе

$$(SP + PH) : PH = 2(SP + KP) : L,$$

слѣдовательно, PH будетъ извѣстно какъ по величинѣ, такъ и по положенію.

Затѣмъ если окажется, что скорость тѣла въ точкѣ P будетъ такова, что параметръ L будетъ меньше, нежели $2(SP + KP)$, то PH расположится по ту же сторону отъ касательной PR, какъ и прямая PS и значитъ искомая кривая будетъ эллипсъ, который и опредѣлится по фокусамъ S и H и по большой оси $SP + PH$. Если же скорость тѣла будетъ такова, что параметръ L окажется равнымъ $2(SP + KP)$, то длина PH будетъ безконечной и, слѣдовательно, кривая будетъ параболой, которой ось SH параллельна PK и, слѣдовательно, извѣстна. Если же тѣло выходитъ изъ точки P съ еще бо́льшею скоростью, то длину PH придется откладывать по другую сторону касательной и тогда окажется, что касательная проходитъ между фокусами, т.-е. кривая будетъ гиперболой, коей дѣйствительная ось равна разности SP и PH и значитъ будетъ извѣстна. Если тѣло будетъ двигаться по коническому сѣченію, опредѣляемому какъ здѣсь показано, то въ пред. XI, XII и XIII доказано, что центростремительная сила будетъ обратно пропорціональна квадратамъ разстояній тѣла до центра силъ S и, слѣдовательно, кривая PQ представитъ дѣйствительно ту, которую тѣло будетъ описывать подъ дѣйствіемъ сказанной силы, выйдя изъ заданной точки съ заданной скоростью.

величина $\frac{c^2}{p}$, гдѣ c есть постоянная площадей и $2p$ параметръ орбиты есть величина постоянная, поэтому, обозначая какъ въ текстѣ черезъ L параметръ искомой орбиты черезъ V и H скорость и длину перпендикуляра изъ фокуса на касательную и черезъ l, v, h соотвѣтствующія величины для данной орбиты, будемъ имѣть пропорцію $\frac{V^2H^2}{L} = \frac{v^2h^2}{l}$, изъ которой и найдется L.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ для всякаго коническаго сѣченія по заданной главной вершинѣ D, параметру L и фокусу S, второй фокусъ H найдется взявъ

$$DH : DS = L : (4DS - L),$$

ибо пропорція

$$(SP + PH) : PH = 2(SP + KP) : L$$

въ разсматриваемомъ случаѣ, т.-е. когда точка P находится въ D, будетъ

$$(DS + DH) : DH = 4DS : L,$$

изъ которой слѣдуетъ:

$$DS : DH = (4DS - L) : L.$$

Слѣдствіе 2. Отсюда слѣдуетъ, что если задается скорость въ главной вершинѣ D, то орбита находится проще, а именно, взявъ параметръ такъ, чтобы его отношеніе къ удвоенному разстоянію DS было равно квадрату отношенія заданной скорости къ скорости обращенія по кругу въ разстояніи DS (пр. XVI, 3), затѣмъ опредѣливъ DH по пропорціи

$$DH : DS = L : (4DS - L).$$

Слѣдствіе 3. Если тѣло, движущееся по коническому сѣченію будетъ сбито съ своей орбиты какимъ-либо натискомъ, то можно опредѣлить ту орбиту [55]), по которой оно будетъ затѣмъ продолжать свой путь. Ибо совокупивъ количество движенія, которое тѣло имѣло съ тѣмъ, которое ему сообщено натискомъ, получимъ количество движенія, которымъ тѣло послѣ натиска будетъ обладать въ данномъ мѣстѣ по направленію заданной по своему положенію прямой.

Слѣдствіе 4. Если же тѣло непрерывно возмущается какою-либо внѣшнею силою, то его путь можетъ быть найденъ приближенно опредѣляя тѣ измѣненія, которыя производитъ сила въ какихъ-либо точкахъ и разсчитывая измѣненія для промежуточныхъ мѣстъ по ряду пропорцій.

Поученіе.

Если тѣло P подъ дѣйствіемъ центростремительной силы, направленной въ данную точку R (фиг. 28), движется по периметру какого-либо заданнаго коническаго сѣченія, коего центръ есть C и требуется найти

---

[55]) Въ этомъ слѣдствіи и въ слѣдующемъ указывается общій ходъ разсчета (по крайней мѣрѣ числового) возмущенія, производимаго, напр., планетой на комету, т.-е. по производимому измѣненію скорости по величинѣ и направленію и измѣненіямъ положенія опредѣлять измѣненія элементовъ орбиты.

Дальнѣйшее развитіе этого замѣчанія дано въ прим. 116 въ концѣ первой книги.

законъ центростремительной силы, то надо провести прямую CG параллельную радіусу RP и пересѣкающую касательную PG въ G, тогда искомая сила (X, 1 и поуч. и VII, 3) будетъ пропорціональна $\frac{CG^3}{RP^2}$.

ОТДѢЛЪ IV.

Объ опредѣленіи эллиптическихъ, параболическихъ и гиперболическихъ орбитъ при заданномъ фокусѣ [56]).

Лемма XV.

Если изъ обоихъ фокусовъ S и H эллипса или гиперболы провести къ какой-либо точкѣ V двѣ прямыя SV и HV, изъ коихъ вторая равна главной оси кривой, т.-е. той, на которой расположены фокусы, и изъ середины T первой прямой SV возставить къ ней перпендикуляръ TR, то онъ будетъ касаться кривой, и наоборотъ, если этотъ перпендикуляръ касается кривой по HV равно главной оси [57]).

Пусть пересѣченіе перпендикуляра съ прямою HV (фиг. 29) или ея продолженіемъ есть R, проведемъ SR, по равенству $TS = TV$ будутъ равны

---

[56]) Этотъ отдѣлъ и слѣдующій чисто геометрическіе и заключаютъ въ себѣ рѣшеніе задачъ объ опредѣленіи коническихъ сѣченій по даннымъ ихъ точкамъ или касательнымъ. Въ предложеніи XLI третьей книги, въ которомъ изложенъ способъ опредѣленія орбитъ кометъ, Ньютонъ говоритъ: «я пробовалъ рѣшать разными способами эту задачу, которая весьма трудна, для этого я и рѣшилъ задачи приведенныя въ первой книгѣ, но затѣмъ я пришелъ къ болѣе простому рѣшенію излагаемому ниже». Такимъ образомъ все содержащееся въ отдѣлахъ IV и V не находитъ дальнѣйшихъ непосредственныхъ приложеній въ «Началахъ», и эти два вводные отдѣла, представляя интересъ съ точки зрѣнія Геометріи, не представляютъ такового для Механики или Физики.

Приводя рѣшеніе этихъ задачъ, Ньютонъ всегда поступаетъ такъ: онъ описываетъ то построеніе, которое для рѣшенія задачи слѣдуетъ выполнить и затѣмъ предпославъ фразу: «dico factum» — «утверждаю что сдѣлано» доказываетъ справедливость даваемаго имъ рѣшенія. Анализа задачи приводящаго къ описываемому построенію не дается.

[57]) Эта лемма включена повидимому потому, что у Аполлонія дается совершенно иной способъ построенія касательной не пользуясь свойствами фокусовъ и направляющаго круга.

Для дальнѣйшихъ задачъ необходимо постоянно имѣть въ виду, что геометрическое мѣсто точекъ V для эллипса и гиперболы есть кругъ описанный изъ другого фокуса H какъ изъ центра радіусомъ равнымъ длинѣ главной оси (направляющій кругъ). Геометрическое мѣсто точекъ T есть также кругъ описанный на главной оси какъ на діаметрѣ, это послѣднее свойство указано въ теоремахъ 49 и 50 III-й книги Аполлонія.

и длины SR и RV и углы TRS и TRV, слѣдовательно, точка R лежитъ на коническомъ сѣченіи и перпендикуляръ TR касается этого сѣченія и обратно.

Предложеніе XVIII. Задача X.

При заданныхъ фокусѣ и длинѣ главной оси построить эллипсы и гиперболы, проходящіе черезъ данныя точки и касающіеся данныхъ прямыхъ.

Пусть S (фиг. 30), есть данный фокусъ, AB длина главной оси, P точка черезъ которую кривая должна проходить, и TR прямая которой она должна касаться. Центромъ P и радіусомъ равнымъ $AB - SP$ для эллипса и $AB + SP$ для гиперболы проводится кругъ HG. На касательную TR опускается перпендикуляръ ST и продолжается до V такъ чтобы было $TV = ST$. Точкою V какъ центромъ и радіусомъ AB описывается кругъ FH. Такимъ образомъ, когда задано двѣ точки P и p или двѣ касательныя TR и tr или же точка P и касательная TR, то будетъ проведено два круга.

Пусть H ихъ пересѣченіе, по фокусамъ S и H и длинѣ AB главной оси и строится кривая, которая и есть искомая. Ибо эта кривая (такъ какъ $SP + PH$ для эллипса и $HP - SP$ для гиперболы равно оси) проходитъ черезъ точку P, по предыдущей же леммѣ она касается прямой TR.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, покажемъ, что она проходитъ или черезъ обѣ точки P и p или будетъ касаться двухъ прямыхъ TR и tr.

Предложеніе XIX. Задача XI.

При данномъ фокусѣ опредѣлить параболу, проходящую черезъ заданныя точки или касающуюся заданныхъ прямыхъ.

Пусть S (фиг. 31) фокусъ, P точка, TR касательная къ искомой кривой. Центромъ P и радіусомъ PS описывается кругъ FG, изъ фокуса на касательную опускается перпендикуляръ и продолжается до V такъ, чтобы было $TV = ST$. Подобнымъ же образомъ надо построить и второй кругъ fg, когда дана другая точка p или найти вторую точку v, когда дана другая касательная tr. Затѣмъ надо провести прямую JF [58]), которая, или касается обоихъ круговъ FG и fg, когда даны двѣ точки P и p, или проходитъ черезъ точки V и v, когда даны двѣ касательныхъ TR и tr, или которая проходитъ черезъ точку V и касается круга FG, когда даны

[58]) Въ леммѣ XIV показано, что геометрическое мѣсто основаній перпендикуляровъ опущенныхъ изъ фокуса на касательныя къ параболѣ есть касательная въ ея вершинѣ, отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто точекъ V симметричныхъ съ фокусомъ, относительно касательной есть направляющая параболы.

точка P и касательная TR. На прямую FJ опускается перпендикуляръ SJ, и раздѣляется въ точкѣ K пополамъ. По оси SK и вершинѣ K строится парабола, которая и есть искомая. Ибо такая парабола по равенству SK и JK, SP и FP проходитъ черезъ точку P, и по равенству ST и TV и по перпендикулярности ST и TR касается (лем. XIV, 3) до прямой TR.

Предложеніе XX. Задача XII.

При заданномъ фокусѣ построить коническое сѣченіе проходящее черезъ заданныя точки или касащееся данныхъ по положенію прямыхъ и подобное данному.

Случай 1. При данномъ фокусѣ S (фиг. 32) требуется построить кривую ABC проходящую черезъ двѣ данныя точки B и C. Такъ какъ эта кривая должна быть подобна данной, то извѣстно отношеніе ея главной оси къ разстоянію между фокусами. Въ этомъ отношеніи возьми длины KB къ BS и LC къ CS, опиши два круга, и къ общей къ нимъ касательной [59]) KL проведи черезъ S перпендикуляръ SG и разсѣки его въ точкахъ A и a такъ чтобы было

$$GA : AS = Ga : aS = KB : BS$$

по оси Aa и вершинамъ A, a и строй кривую, она и есть искомая. Пусть H есть второй фокусъ построенной кривой, такъ какъ

$$GA : AS = Ga : aS$$

то будетъ и

$$(Ga - GA) : (aS - AS) = GA : AS$$

т.-е.

$$Aa : SH = GA : AS$$

т.-е. отношеніе большой оси къ разстоянію между фокусами будетъ заданное и, слѣдовательно, построенная кривая будетъ подобна данной, и такъ какъ отношенія $KB : BS$ и $LC : CS$ равны предыдущему, то эта кривая пройдетъ черезъ точки B и C, какъ это слѣдуетъ изъ ученія о коническнхъ сѣченіяхъ.

Случай 2. При заданномъ фокусѣ S (фиг. 33) требуется построить кривую касающуюся прямыхъ TR и tr и подобную данной. Изъ фокуса на касательныя опускаются перпендикуляры ST и St и продолжаются до V и v такъ чтобы было $TV = ST$ и $tv = St$. Черезъ середину O прямой Vv проводится къ ней перпендикуляръ OH, неопредѣленно продолженный, продолженная прямая VS разсѣкается въ точкахъ K и k такъ чтобы было

$$VK : KS = Vk : kS = a : c$$

---

[59]) Эта прямая есть направляющая эллипса или гиперболы. Зная фокусъ и направляющую и получимъ кривую.

гдѣ a есть длина главной оси искомой кривой и c разстояніе между фокусами ея. На діаметрѣ Kk строится кругъ [60]) пересѣкающій OH въ точкѣ H, послѣ чего по фокусамъ S и H и главной оси VH строится кривая, которая и будетъ искомой. Ибо если раздѣлить Kk въ точкѣ X пополамъ и провести HX, HS, HV, Hv и такъ какъ по построенію

$$VK : KS = Vk : kS$$

слѣдовательно, и

$$(VK + Vk) : (KS + kS) = (Vk - VK) : (kS - KS)$$

т.-е.

$$2VX : 2KX = 2KX : 2SX$$

иначе

$$VX : HX = HX : SX$$

то треугольники VXH и HXS подобны и, слѣдовательно, будетъ:

$$VH : SH = VX : XH = VK : KS$$

т.-е. отношеніе главной оси искомой кривой къ разстоянію между фокусами какъ разъ требуемое, а такъ какъ кромѣ того: VH и vH равны между собою и главной оси, прямыя же VS и vS раздѣляются перпендикулярами къ нимъ TR и tr пополамъ, то проведенная кривая касается этихъ послѣднихъ (лемма XV).

Случай 3. При заданномъ фокусѣ надо построить такую кривую, которая касалась бы прямой TR въ данной точкѣ R (фиг. 34) и была бы подобна данной кривой. На прямую TR опускается перпендикуляръ ST и продолжается до V такъ чтобы было $TV = ST$. Неопредѣленно продолженная прямая VS разсѣкается въ точкахъ k и K такъ чтобы было

$$VK : SK = Vk : Sk = a : c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

На діаметрѣ Kk описывается кругъ [61]) пересѣкающій продолженную прямую VR въ точкѣ H. По фокусамъ S и H и по главной оси VH

---

[60]) Точки v и V принадлежатъ направляющему кругу, слѣдовательно, фокусъ H лежитъ на перпендикулярѣ возставленномъ изъ средины хорды vV. Кромѣ того, такъ какъ отношеніе разстояній точки H до точекъ S и V должно быть равно отношенію $c : a$, т.-е. задано, то точка H должна лежать на кругѣ построенномъ на Kk какъ на діаметрѣ, ибо этотъ кругъ есть геометрическое мѣсто такихъ точекъ, отсюда и слѣдуетъ построеніе данное въ текстѣ.

[61]) Точка V принадлежитъ направляющему кругу, значитъ второй фокусъ H лежитъ на прямой VR. Кромѣ того отношеніе $VH : SH = a : c$, т.-е. постоянное, слѣдовательно, точка H лежитъ и на кругѣ Kk—отсюда и слѣдуетъ построеніе данное въ текстѣ.

строится кривая, которая и будетъ искомой. Ибо изъ пропорціи (*) подобно тому какъ при доказательствѣ второго случая слѣдуетъ пропорція

$$VH : SH = VK : SK = a : c.$$

показывающая, что кривая подобна заданной, и такъ какъ прямая TR раздѣляетъ уголъ VRS пополамъ, то она касается кривой въ точкѣ R.

Случай 4. При заданномъ фокусѣ S (фиг. 35) требуется построить кривую APB, касающуюся прямой TR, проходящую черезъ точку P не лежащую на этой прямой и подобную данной кривой apb, коей главная ось ab и фокусы s и h.

На касательную опускается перпендикуляръ ST и продолжается до точки V такъ чтобы было $TV = ST$, и строятся углы hsq и shq соотвѣтственно равные угламъ VSP и SVP. Центромъ q и радіусомъ который такъ относится къ ab какъ SP къ VS, описывается кругъ, пересѣкающій кривую apb въ p. Соединивъ sp проводятъ SH такъ чтобы было

$$SH : sh = SP : sp$$

и чтобы уголъ $PSH = psh$ и $VSH = psq$, послѣ чего по фокусамъ S и H и главной оси AB равной VH и строится кривая, которая и есть искомая. Ибо если провести sv такъ, чтобы было

$$sv : sp = sh : sq$$

и чтобы уголъ $vsp = hsq$ и $vsh = psq$, тогда треугольники svh и spq и VSP и hsq будутъ подобны и будетъ:

$$vh : pq = sh : sq = VS : SP = ab : pq,$$

слѣдовательно,

$$vh = ab.$$

Далѣе по подобію треугольниковъ VSH и vsh будетъ:

$$VH : SH = vh : sh = ab : sh,$$

т.-е. отношеніе оси VH къ фокусному разстоянію SH построенной кривой равно таковому же отношенію для заданной apb, слѣдовательно, эти кривыя подобны. Кромѣ того, кривая APB пройдетъ черезъ точку P, ибо треугольникъ PSH подобенъ треугольнику psh, а такъ какъ VH равно главной оси и VS перпендикулярною къ ней TR раздѣляется пополамъ, то TR касается построенной кривой [62]).

---

[62]) Точка V принадлежитъ направляющему кругу, слѣдовательно, второй фокусъ H лежитъ на кругѣ описанномъ изъ точки V какъ центра. Если вообразить, что построенъ треугольникъ SQP подобный VSH такъ чтобы уголъ при P былъ равенъ углу при V и значитъ

$$SQ : SH = SP : SV = QP : VH$$

то въ этомъ треугольникѣ стороны SQ и QP будутъ оставаться постоян-

Лемма XVI.

Изъ трехъ заданныхъ точекъ провести къ четвертой незаданной три прямыя такъ, чтобы ихъ разности были или заданныя или равны нулю.

Случай 1. Пусть A, B, C (фиг. 36) три заданныя точки и Z искомая четвертая. Такъ какъ разность $BZ - AZ$ задана, то точка Z будетъ находиться на гиперболѣ, коей фокусы суть A и B и коей ось равна сказанной разности. Пусть эта ось есть MN. Возьми точку P такъ чтобы было:

$$PM : MA = MN : AB$$

возставь перпендикуляръ PR и проведи ZR перпендикулярно къ PR, тогда по свойству гиперболы будетъ:

$$ZR : AZ = MN : AB.$$

Кромѣ того точка Z лежитъ и на другой гиперболѣ коей фокусы суть A и C и главная ось коей равна разности $CZ - AZ$, слѣдовательно, можно провести прямую QS перпендикулярно къ AC, подобно тому какъ проведена прямая PR, т.-е. что разстоянія точки Z гиперболы до этой прямой QS будетъ находиться въ постоянномъ отношеніи къ разстоянію этой точки до фокуса, т.-е. будетъ

$$ZS : AZ = (CZ - AZ) : AC,$$

но величина $CZ - AZ$ заданная. Слѣдовательно, будутъ извѣстны отношенія ZR и ZS къ AZ, а значитъ и другъ къ другу. Пусть прямыя RP и SQ пересѣкаются въ точкѣ T, тогда проведя TZ и TA получимъ фигуру $TRZS$ извѣстную по своему виду и прямую TZ опредѣленную по своему положенію, кромѣ того будутъ извѣстны длина TA и уголъ ATZ, а такъ какъ извѣстно отношеніе AZ, а значитъ и TZ, къ ZS, то будетъ извѣстно и отношеніе AZ къ TZ, слѣдовательно, будетъ извѣстенъ и треугольникъ ATZ, коего вершина Z и есть искомая точка.

ными, когда точка H будетъ перемѣщаться по кругу, вмѣстѣ съ тѣмъ уголъ VSH будетъ равенъ углу QSP, слѣдовательно, если точку Q соединить съ H, то полученный треугольникъ HSQ будетъ подобенъ треугольнику VSP.

Ньютонъ и строитъ сперва треугольникъ shq, подобный SHQ, тогда точка p, сходственная съ точкою P, должна лежать: на кругѣ, описанномъ изъ q какъ изъ центра радіусомъ $qp = ab \cdot \frac{SP}{SV}$ и на заданной кривой. Послѣ того какъ эта точка p сходственная съ точкою P найдена искомая кривая строится безъ всякихъ затрудненій.

Какъ видно рѣшеніе этой задачи выполняется при помощи пересѣченія круга и кривой второго порядка, т.-е. вообще циркулемъ и линейкой невыполнимо.

Случай 2. Если двѣ изъ трехъ линій, скажемъ AZ и BZ, равны, то прямую TZ надо провести такъ, чтобы она раздѣляла AB пополамъ и затѣмъ разыскать треугольникъ ATZ какъ и раньше.

Случай 3. Если всѣ три разстоянія равны, то точка Z лежитъ въ центрѣ круга проведеннаго черезъ точки A, B и C.

Эта задача рѣшена въ книгѣ *Аполлонія* «О касаніяхъ» возстановленной *Віеттомъ* [63]).

Предложеніе XXI. Задача XIII.

При заданномъ фокусѣ провести коническое сѣченіе проходящее черезъ заданныя точки и касающееся заданныхъ прямыхъ.

Пусть заданы фокусъ S, точка P, касательная TR, требуется найти второй фокусъ H (фиг. 37). На касательную опускается перпендикуляръ ST и продолжается до Y такъ чтобы было $TY = ST$, то YH будетъ равно главной оси. Длина SP будетъ равна разности между разстояніемъ HP и главною осью. Такимъ образомъ если будетъ задано нѣсколько касательныхъ или нѣсколько точекъ то получатся или такія разстоянія какъ YH или такія какъ PH, проведенныя отъ такихъ точекъ какъ Y или P къ искомой точкѣ H; эти разстоянія или должны быть равны главной оси или же должны отличаться отъ нея на извѣстныя длины какъ SP, и которыя поэтому или равны между собою или же извѣстны разности ихъ по-парно. По предыдущей леммѣ, слѣдовательно, найдется второй фокусъ H, и послѣ того какъ этотъ второй фокусъ найденъ, то станетъ извѣстной и длина главной оси, которая будетъ YH или $SP + PH$ для эллипса, или же $SP - PH$ для гиперболы, и кривая будетъ опредѣлена.

---

[63]) Эта лемма заключаетъ знаменитую задачу о построеніи круга касательнаго къ тремъ даннымъ кругамъ. Задача эта была предложена Віеттомъ Адріану Римлянину, въ отвѣтъ на задачу послѣдняго о рѣшеніи нѣкотораго уравненія 45-й степени. Віеттъ сразу замѣтилъ происхожденіе уравненія—именно, что оно относились къ опредѣленію хорды угла составляющаго $\frac{1}{45}$ даннаго, на основаніи чего и далъ полное рѣшеніе. Адріанъ рѣшая предложенную ему задачу опредѣлялъ положеніе центра искомаго круга при помощи пересѣченія двухъ гиперболъ, на что Віеттъ ему написалъ: «Dum circulum per hyperbolas tangis, rem acu non tangis». Ньютонъ въ своемъ *анализѣ* задачи также пользуется свойствами гиперболы, но замѣтивъ, что эти гиперболы имѣютъ по-парно общій фокусъ, онъ приводитъ разысканіе точекъ ихъ пересѣченія къ построеніямъ выполнимымъ при помощи циркуля и линейки, и этимъ какъ бы показываетъ, что можно «rem acu tangere» пользуясь и гиперболами. Прямыя RP и SQ, которыя строятся какъ вспомогательная въ Ньютоновомъ рѣшеніи суть направляющія гиперболъ, и все сводится къ опредѣленію точки пересѣченія T этихъ направляющихъ.

Поученіе.

Когда кривая гипербола, то такъ какъ она должна служить траекторіей движущагося тѣла, то вторую ея вѣтвь я не включаю, ибо тѣло на эту вторую вѣтвь при своемъ движеніи перейти не можетъ.

Случай когда задаются три точки рѣшается проще такъ: Пусть даны точки B, C, D (фиг. 38). Продолжаемъ прямыя BC и CD до E и F такъ чтобы было:

$$BE : CE = SB : SC$$
$$CF : DF = SC : SD$$

на прямую EF, если нужно продолженную, опускаются перпендикуляры SG, BH и на неопредѣленно продолжеиной SG берутся точки A и a такъ чтобы было:

$$GA : AS = Ga : aS = HB : BS$$

тогда A и a будутъ главными вершинами и Aa главною осью кривой, которая въ случаѣ если GA будетъ больше, равна, или меньше нежели AS будетъ эллипсъ, парабола или гипербола, и тогда точка a въ первомъ случаѣ должна лежать по ту же сторону отъ прямой GF съ точкою A, во-второмъ случаѣ эта точка удаляется въ безконечность, въ третьемъ она лежитъ по другую сторону GF.

Дѣйствительно, если на GF опустить перпендикуляры CJ, DK то будетъ:

$$CJ : HB = CE : BE = SC : SB,$$

слѣдовательно,

$$CJ : SC = HB : SB = GA : SA.$$

Точно также докажется, что KD къ SD находится въ томъ же отношеніи. Слѣдовательно, точки B, C, D лежатъ на коническомъ сѣченіи, построенномъ при фокусѣ S такъ, что разстоянія его точекъ до фокуса и до прямой GF находятся въ постоянномъ отношеніи.

Знаменитѣйшій геометръ De la Hire въ своемъ сочиненіи о коническихъ сѣченіяхъ въ кн. VIII, предложеніе XXV даетъ рѣшеніе этой задачи почти не отличающееся отъ изложеннаго [64]).

---

[64]) Задача, общій ходъ рѣшенія которой указанъ въ этомъ предложеніи заключаетъ въ себѣ въ сущности четыре задачи. Построить коническое сѣченіе, когда даны фокусъ и

1⁰) три касательныхъ;
2⁰) двѣ касательныхъ и точка внѣ ихъ;
3⁰) одна касательная и двѣ точки внѣ ея;
4⁰) три точки.

Рѣшеніе первой очевидно—кругъ проходящій черезъ основанія перпендикуляровъ опущенныхъ изъ фокуса на касательныя описанъ на глав-

ОТДѢЛЪ V.

О нахожденіи орбитъ, когда ни одного фокуса не задано [65]).

Лемма XVII.

Если изъ произвольной точки P коническаго сѣченія провести къ сторонамъ любого четырехъугольника $ABCD$, вписаннаго въ это сѣченіе,

---

ной оси какъ діаметрѣ. Стоитъ его провести и задача рѣшена. Или, слѣдуя общему пріему: кругъ проходящій черезъ три точки такія какъ Y, т.-е. симметричныя съ фокусомъ относительно касательныхъ есть направляющій кругъ, его центръ есть второй фокусъ и радіусъ большая ось. Этотъ случай какъ разъ и указанъ въ сл. 3-мъ леммы XVI, т.-е. когда всѣ три разстоянія равны.

Вторая задача представляетъ также простой частный случай общей. Замѣтивъ, что двѣ точки такія какъ Y, обозначимъ ихъ Y_1 и Y_2 принадлежатъ направляющему кругу, проводимъ къ прямой Y_1Y_2 перпендикуляръ изъ ея середины — второй фокусъ H лежитъ на этомъ перпендикулярѣ. Взявъ разстояніе SP данной точки до заданнаго фокуса и описавъ точкою Y_1 какъ центромъ и радіусомъ SP кругъ заключаемъ, что точка H лежитъ въ равномъ разстояніи отъ этого круга и точки P, т.-е. она лежитъ въ центрѣ круга проходящаго черезъ P и касающагося даннаго. Такимъ образомъ задача сведена къ построенію круга имѣющаго свой центръ на данной прямой, проходящаго черезъ данную точку и касающагося даннаго круга, что рѣшается весьма просто.

Третья задача требуетъ примѣненія леммы XVI въ общемъ видѣ.

Четвертая рѣшается по второму пріему болѣе просто нежели по общему способу, причемъ для полученія точки F можно замѣтить, что въ силу пропорціи $CF:FD = SC:SD$ эта точка лежитъ въ пересѣченіи хорды DC и равнодѣлящей внѣшняго противолежащаго сторонѣ CD угла треугольника CSD.

[65]) Этотъ отдѣлъ, подобно предыдущему, имѣетъ исключительно геометрическое значеніе; въ немъ даются рѣшенія слѣдующихъ задачъ о построеніи коническихъ сѣченій по даннымъ:

1°) пяти точкамъ;
2°) четыремъ точкамъ и одной касательной;
3°) тремъ точкамъ и двумъ касательнымъ;
4°) двумъ точкамъ и тремъ касательнымъ;
5°) одной точкѣ и четыремъ касательнымъ;
6°) пяти касательнымъ.

Эти шесть случаевъ являются исчерпывающими по отношенію къ заданію только точекъ и касательныхъ. При рѣшеніи этихъ задачъ Ньютонъ не пользуется ни теоремою Паскаля, ни теоремою Дезарга, хотя эти теоремы были въ то время уже извѣстны.

Кромѣ этихъ шести, рѣшаются еще двѣ задачи, а именно:

а) построить коническое сѣченіе, равное и подобное данному такъ, чтобы тремя заданными прямыми отъ него отсѣкались заданные смежные сегменты;

четыре прямыя PQ, PR, PS, PT *подъ заданными углами къ сторонамъ* AB, CD, AC, DB *четырехъугольника, если надо, продолженнымъ, то произведенія* $PQ \cdot PR$ *и* $PS \cdot PT$ *отрѣзковъ, проведенныхъ къ противоположнымъ сторонамъ, находятся въ постоянномъ отношеніи* [66]).

Случай 1. Положимъ сперва, что прямыя, проводимыя къ противоположнымъ сторонамъ, параллельны другимъ сторонамъ четырехъугольника, т.-е. PQ и PR параллельны AC (фиг. 39), PS и PT параллельны AB и сверхъ того пусть и стороны AC и BD параллельны между собою.

Прямая, раздѣляющая пополамъ эти параллельныя стороны, раздѣлитъ пополамъ и RQ; пусть O есть середина RQ, тогда PO будетъ ординатою при этомъ діаметрѣ. Если продолжить PO до точки K такъ, чтобы было $OK = OP$, то OK будетъ также ординатою при томъ же діаметрѣ. Такъ какъ точки A, B, P, K находятся на коническомъ сѣченіи и PK пересѣкаетъ AB подъ постояннымъ угломъ, то по предложеніямъ: 17, 19, 21, 23, III книги Аполоніевыхъ коническихъ сѣченій отношеніе $PQ \cdot QK$ къ $AQ \cdot QB$ будетъ постоянное [67]). Но $QK = PR$, ибо взявъ почленно разность равенствъ: $OK = OP$ и $OQ = OR$ получимъ $OK - OQ = OP - OR$ т.-е. $QK = PR$, слѣдовательно, произведенія $PQ \cdot QK = PQ \cdot PR$, поэтому произведеніе

б) построить коническое сѣченіе, подобное данному такъ, чтобы оно четырьмя данными прямыми разсѣкалось на части, подобныя даннымъ и подобнымъ образомъ съ ними расположенныя.

Для рѣшенія этихъ двухъ задачъ дается сперва рѣшеніе двухъ вспомогательныхъ задачъ—именно:

в) построить треугольникъ, равный и подобный данному такъ, чтобы его вершины лежали на трехъ заданныхъ по положенію прямыхъ;

г) построить четырехъугольникъ, подобный данному такъ, чтобы его вершины лежали на четырехъ заданныхъ по положенію прямыхъ.

[66]) Аналитически это свойство коническихъ сѣченій доказывается, какъ извѣстно, весьма просто. Обозначая черезъ α, β, γ, δ первыя части уравненій прямыхъ AB, BC, CD, AD, написанныхъ въ нормальномъ видѣ, имѣемъ общее уравненіе коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ точки A, B, C D:

$$\alpha\gamma - k\beta\delta = 0,$$

гдѣ k есть постоянная. Это и доказываетъ лемму XVII и XVIII.

Но Ньютонъ намѣренно не пользуется аналитической геометріей и въ концѣ леммы XIX прямо говоритъ, что онъ даетъ рѣшеніе задачи древнихъ «о четырехъ линіяхъ» «non calculus sed compositio geometrica». По поводу этой задачи надо замѣтить, что именно ее Декартъ взялъ какъ примѣръ, чтобы показать приложеніе своего способа рѣшенія геометрическихъ задачъ «вычисленіемъ», причемъ онъ добавляетъ, что «древніе не исписали бы столько толстыхъ книгъ, если бы знали изложенныя имъ начала аналитическаго рѣшенія геометрическихъ задачъ».

[67]) Для круга эти произведенія, какъ отрѣзковъ хордъ, будутъ между собою равны, спроектируемъ этотъ кругъ на плоскость, получится эллипсъ, отрѣзки хордъ умножатся на постоянные множители, значитъ отношеніе произведеній, бывшихъ для круга равными, станетъ постояннымъ. Если

$PQ \cdot PR$ находится въ постоянномъ отношенiи къ произведенiю $AQ \cdot QB$, это же послѣднее равно $PS \cdot PT$.

Случай 2. Когда противоположныя стороны четырехъугольника AC и BD (фиг. 40) между собою не параллельны, проведи Bd параллельно AC, и пусть точки ея пересѣченiя съ прямою ST и съ кривою суть t и d. Проведи: Cd, пересѣкающую PQ въ r, и DM, параллельную PQ и пересѣкающую Cd въ M и AB въ N. Тогда по подобiю треугольниковъ BTt и BDN будетъ по замѣнѣ Bt равной ей PQ:

$$PQ : Tt = DN : NB.$$

Также, замѣнивъ AQ равной ему PS, будетъ:

$$Rr : PS = DM : AN.$$

По перемноженiи этихъ пропорцiй, получится:

$$PQ \cdot Rr : Tt \cdot PS = DN \cdot DM : NB \cdot AN.$$

По доказанному для случая (1) будетъ:

$$PQ \cdot Pr : PS \cdot Pt = DN \cdot DM : NB \cdot AN.$$

Вычитая, получимъ:

$$PQ \cdot PR : PS \cdot PT = DN \cdot DM : NB \cdot AN = \text{постоянной}.$$

Случай 3. Наконецъ, если всѣ четыре прямыя PQ, PR, PS, PT (фиг. 41) не параллельны сторонамъ AC и AB, но наклонены къ нимъ подъ какимъ-либо угломъ, проведи Pq, Pr параллельно AC и Ps, Pt параллельно AB;

вмѣсто проекцiй взять перспективу, то легко убѣдиться въ справедливости этого свойства и для любого коническаго сѣченiя.

Аналитически это свойство доказывается также весьма просто: пусть

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

коническое сѣченiе, отнесенное, напр., къ осямъ AB и PQ. Дѣлая

$$y = 0,$$

получимъ

$$x_1 x_2 = AQ \cdot QB = \frac{F}{A}.$$

Дѣлая

$$x = 0,$$

получимъ

$$y_1 y_2 = PQ \cdot QK = \frac{F}{C}$$

отношенiе

$$y_1 y_2 : x_1 x_2 = A : C.$$

Если переносить оси параллельно, то ни A, ни C не мѣняются, и значитъ отношенiе разсматриваемыхъ произведенiй отрѣзковъ остается постояннымъ.

такъ какъ въ треугольникахъ PQq, PRr, PSs, PTt углы будутъ постоянные, то и отношеніе сторонъ PQ къ Pq, PR къ Pr, PS къ Ps и PT къ Pt будутъ постоянны, слѣдовательно, будутъ постоянны и отношенія $PQ \,.\, PR$ къ $Pq \,.\, Pr$ и $PS \,.\, PT$ къ $Ps \,.\, Pt$, по доказанному же выше отношеніе $Pq \,.\, Pr : Ps \,.\, Pt$ постоянное, слѣдовательно, постоянно и отношеніе $PQ \,.\, PR$ къ $PS \,.\, PT$.

Лемма XVIII.

При тѣхъ же предположеніяхъ, если произведенія отрѣзковъ $PQ \,.\, PR$ и $PS \,.\, PT$, заключенныхъ между точкою P и сторонами четырехъугольника $ABCD$, находятся въ постоянномъ отношеніи, то точка P лежитъ на коническомъ сѣченіи, описанномъ около этого четырехъугольника.

Вообрази, что черезъ точки A, B, C, D (фиг. 42) и какое-нибудь одно изъ безчисленнаго множества положеній точекъ P, скажемъ p, проведено коническое сѣченіе, я утверждаю, что точка P лежитъ на немъ. Если отрицаешь, соедини AP, которая тогда пересѣчетъ это коническое сѣченіе въ какой-либо другой точкѣ, а не въ P, скажемъ въ b. Слѣдовательно, если изъ точекъ p и b провести къ сторонамъ четырехъугольника подъ заданными углами прямыя pq, pr, ps, pt и bk, bn, bf, bd, то будетъ

$$bk \,.\, bn : bf \,.\, bd = pq \,.\, pr : ps \,.\, pt = PQ \,.\, PR : PS \,.\, PT.$$

По подобію же четырехъугольниковъ $bkAf$ и $PQAS$

$$bk : bf = PQ : PS$$

и, слѣдовательно, по раздѣленіи предыдущей пропорціи на эту будетъ

$$bn : bd = PR : PT,$$

слѣдовательно, четырехъугольники $Dnbd$ и $DRPT$, коихъ углы равны, будутъ подобны, и поэтому ихъ діагонали Db и DP должны совпадать. Слѣдовательно, точка b упадетъ въ пересѣченіе прямыхъ AP и DP, т.-е. совпадаетъ съ точкою P. Такимъ образомъ гдѣ бы ни была взята точка P, удовлетворяющая условіямъ теоремы, она упадетъ на проведенное коническое сѣченіе.

Слѣдствіе. Если три прямыхъ PQ, PR, PS, проведенныя изъ какой-либо точки P къ заданнымъ по положенію прямымъ AB, CD и AC подъ данными углами, каждая къ каждой таковы, что отношеніе произведенія $PQ \,.\, QR$ къ PS^2 постоянное, то точка P, изъ которой прямыя проводятся, находится на коническомъ сѣченіи, касающемся прямыхъ AB и CD въ точкахъ A и C, и обратно.

Ибо если прямая BD будетъ приближаться къ совпаденію съ AC, причемъ положеніе трехъ прочихъ прямыхъ AB, CD, AC сохраняется, то отрѣзокъ PT будетъ приближаться къ совпаденію съ PS, и произведеніе

$PS \,.\, PT$ обратится въ PS^2, прямыя же AB и CD, которыя пересѣкали кривую въ точкахъ A и B, C и D, при совпаденіи этихъ точекъ уже не будутъ сѣкущими, а обратятся въ касательныя.

Поученіе.

Словамъ «коническое сѣченіе» въ предыдущей леммѣ придается широкій смыслъ, т.-е. въ нихъ включаются какъ прямолинейныя сѣченія конуса плоскостью, проходящей черезъ вершину его, такъ и круговыя его сѣченія плоскостью, параллельною основанію. Дѣйствительно, если точку p взять на прямой, проходящей черезъ A и D или C и B, то коническое сѣченіе обратится въ двѣ прямыя, изъ которыхъ одна есть та, на которой берется точка p, другая же есть та, которая проходитъ черезъ прочія двѣ точки. Если сумма двухъ противоположныхъ угловъ четырехъугольника равна двумъ прямымъ угламъ и линіи PQ, PR, PS, PT проводятся или перпендикулярно, или, вообще, подъ однимъ и тѣмъ же угломъ къ сторонамъ и произведенія $PQ \,.\, PR$ и $PS \,.\, PT$ равны, то сѣченіе будетъ кругъ. То же самое будетъ и въ томъ случаѣ, когда эти четыре прямыя проводятся подъ какими угодно углами и произведеніе двухъ отрѣзковъ PQ и PR такъ относится къ произведенію PS и PT двухъ другихъ отрѣзковъ, какъ произведеніе синусовъ угловъ S и T, ими составляемыхъ съ соотвѣтствующими сторонами, относится къ произведенію синусовъ угловъ R и Q, составляемыхъ первыми. Въ остальныхъ случаяхъ мѣстомъ точекъ P будетъ служить одна изъ тѣхъ трехъ кривыхъ, которыя обыкновенно называются коническими сѣченіями. Вмѣсто четырехъугольника $ABCD$ можно брать и такой четырехъугольникъ, коего стороны между собою пересѣкаются на манеръ діагоналей. Наконецъ, изъ четырехъ точекъ A, B, C, D одна или двѣ могутъ удаляться въ безконечность; въ этомъ случаѣ стороны фигуры, сходившіяся въ этихъ точкахъ, становятся между собою параллельными, и коническое сѣченіе, проходя черезъ прочія точки, удаляется въ безконечность въ направленіи параллельныхъ сторонъ четырехъугольника.

Лемма XIX.

Найти такую точку P, изъ которой если провести четыре прямыхъ PQ, PR, PS, PT, каждую соотвѣтственно подъ заданнымъ угломъ къ одной изъ четырехъ данныхъ по положенію прямыхъ AB, CD, AC, BD, то произведенія $PQ \,.\, PR$ и $PS \,.\, PT$ будутъ находиться въ данномъ отношеніи.

Пусть прямыя AB и CD (фиг. 43), къ которымъ проводятся отрѣзки PQ и PR, образующіе одно изъ произведеній, пересѣкаются съ двумя другими данными прямыми въ точкахъ A, B, C, D. Черезъ которую-нибудь изъ этихъ точекъ A проводится произвольно прямая AH, на которой желательно чтобы лежала точка P; пусть эта прямая пересѣкаетъ соотвѣтственно BD въ H, CD въ J; такъ какъ всѣ углы фигуры заданы, то будутъ извѣстны отношенія PQ къ PA и PA къ PS, слѣдовательно, и отношеніе PQ къ PS. Раздѣляя на это отношеніе заданное отношеніе произведеній $PQ \,.\, PR$ къ $PS \,.\, PT$, получимъ отношеніе PR къ PT, тогда, зная отношенія PJ къ PR, PT къ PH, найдемъ отношеніе PJ къ PH, а слѣдовательно, и точку P.

Слѣдствіе 1. Къ геометрическому мѣсту точекъ P можно построить и касательную въ какой-нибудь данной точкѣ, напр., D. Ибо, когда точки P и D по приближеніи другъ къ другу сливаются, т.-е. когда прямая AH проходитъ черезъ точку D, хорда PD обращается въ касательную. Предѣльное отношеніе исчезающихъ длинъ JP и PH найдется для этого случая по прежнему, поэтому если провести прямую CF параллельно AD и разстояніе CF раздѣлить точкою E въ вышенайденномъ предѣльномъ отношеніи, то DE и будетъ требуемой касательной, ибо CF и предѣльное положеніе JH параллельны и въ точкахъ P и E раздѣляются на части пропорціональныя.

Слѣдствіе 2. Поэтому геометрическое мѣсто точекъ P можетъ быть опредѣлено слѣдующимъ образомъ: черезъ которую-нибудь изъ точекъ A, B, C, D, напр., A (фиг. 44) проводится касательная AE къ искомому мѣсту и черезъ другую точку B проводится прямая BF, параллельная касательной, и по леммѣ XIX находится точка F, въ которой она пересѣкаетъ мѣсто. Если, раздѣливъ BF въ точкѣ G пополамъ, провести прямую AG, то BF будетъ хордою, сопряженною съ діаметромъ AG.

Пусть прямая AG пересѣкаетъ мѣсто въ точкѣ H, тогда длина AH будетъ длиною діаметра: соотвѣтствующій ему параметръ есть $\frac{BG^2 \,.\, AH}{AG \,.\, GH}$. Если AG не пересѣкаетъ мѣста, т.-е. длина AH безконечна, то мѣсто точекъ P есть парабола, и ея параметръ при діаметрѣ AG будетъ $\frac{BG^2}{AG}$.

Когда же прямая AG пересѣкаетъ мѣсто, то оно будетъ гиперболою, если точки A и H располагаются по одну сторону отъ BG, и эллипсомъ, если точка G лежитъ между A и H. Если, кромѣ того, уголъ AGB прямой и $BG^2 = AG \,.\, GH$, то получится кругъ.

Въ этой леммѣ, какъ видно, изложено рѣшеніе задачи древнихъ о четырехъ линіяхъ. Задача эта была предложена *Эвклидомъ*, продолжена *Аполоніемъ*, и такое рѣшеніе, какъ приведенное выше, т.-е. исполняемое геометрическими сопоставленіями, а не аналитическимъ разсчетомъ и изыскивалось древними [68]).

---

[68]) Какъ уже упомянуто въ пр. 66, именно эту задачу взялъ Декартъ какъ примѣръ приложенія алгебраическаго способа рѣшенія геометрическихъ вопросовъ. Объяснивъ построеніе корней квадратнаго уравненія, онъ говоритъ: «всѣ задачи элементарной геометріи могутъ быть рѣшены, дѣлая

Лемма XX.

Если двѣ противоположныя вершины A и P параллелограмма $ASPQ$ лежатъ на коническомъ сѣченіи и стороны его AQ и AS, сходящіяся въ одной изъ этихъ вершинъ A, по продолженіи пересѣкаютъ это коническое сѣченіе въ точкахъ B и C; если затѣмъ эти точки соединить съ какою-либо пятою точкою D, лежащей на сѣченіи, прямыми CD и BD и продолжить эти прямыя до пересѣченія въ точкахъ R и T съ двумя другими сторонами PQ и PS параллелограмма, то отрѣзки PR и PT будутъ находиться въ постоянномъ отношеніи. И обратно, если эти отрѣзки находятся въ постоянномъ отношеніи, то точка D лежитъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ точки A, B, C, P.

Случай 1. Соединивъ BP и CP (фиг. 45), проводятъ изъ точки D прямую DG параллельно AB и DE параллельно AC, пусть первая пересѣкаетъ прямыя PB, PQ, CA въ точкахъ H, J, G, вторая пересѣкаетъ PC, PS, AB въ точкахъ F, K, E. По леммѣ XVII отношеніе произведеній $DE \,.\, DF$ къ $DG \,.\, DH$ постоянное.

Но

$$PQ : DE = PQ : JQ = PB : HB = PT : DH,$$

слѣдовательно,

$$PQ : PT = DE : DH \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Также

$$PR : DF = RC : DC = PS : DG,$$

откуда

$$PR : PS = DF : DG \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

перемножая пропорціи (1) и (2), имѣемъ:

$$PQ \,.\, PR : PS \,.\, PT = DE \,.\, DF : DG \,.\, DH = \text{постоянной},$$

но длины PQ и PS заданы, слѣдовательно, отношеніе PR къ PT постоянное.

лишь эти немногія построенія, объясненныя въ предыдущихъ четырехъ примѣрахъ. Мнѣ кажется, что это не было замѣчено древними, ибо они не стали бы затрачивать трудъ на писаніе столькихъ толстыхъ книгъ, въ которыхъ самый порядокъ предложеній показываетъ, что они не имѣли истиннаго способа, чтобы ихъ всѣ находить, а что они собирали лишь тѣ предложенія, на которыя случайно нападали». Ньютонъ же ставилъ геометрическое разсужденіе гораздо выше алгебраическаго, и весьма возможно, что его замѣчаніе относится къ этимъ словамъ Декарта, хотя самъ Ньютонъ большую часть своего сочиненія «Arithmetica Universalis» посвящаетъ рѣшенію геометрическихъ вопросовъ при помощи алгебры.

Случай 2. Если положить, что отрѣзки PR и PT находятся въ заданномъ отношеніи, то восходя въ разсужденіи, подобномъ предыдущему, получимъ, что отношеніе произведенія $DE \cdot DF$ къ $DG \cdot DH$ будетъ постоянное, слѣдовательно (л. XVIII), точка D лежитъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ A, B, C, P.

Слѣдствіе 1. Если провести прямую BC, пересѣкающую PQ въ r, и на PT взять Pt такъ, чтобы было:

$$Pt : Pr = PT : PR,$$

то прямая Bt будетъ касательной къ коническому сѣченію въ точкѣ B. Ибо, если вообразить, что точка D приближаясь сливается съ B, т.-е. что исчезающая хорда BD обращается въ касательную BT, то CD и BT совпадутъ съ CB и Bt.

Слѣдствіе 2. Обратно, если Bt — касательная и если въ точкѣ D коническаго сѣченія сходятся прямыя BD и CD, то будетъ:

$$PR : PT = Pr : Pt,$$

и, наоборотъ, если

$$PR : PT = Pr : Pt,$$

то BD и CD сходятся въ точкѣ D, лежащей на коническомъ сѣченіи.

Слѣдствіе 3. Два коническихъ сѣченія не могутъ пересѣкаться другъ съ другомъ въ бо́льшемъ числѣ точекъ, нежели четыре. Ибо, если бы это было возможно и два коническихъ сѣченія проходили бы черезъ пять точекъ A, B, C, P, O, тогда, если прямая BD пересѣкаетъ эти кривыя въ точкахъ D и d и прямая PQ пересѣкаетъ прямую Cd въ q, будетъ

$$PR : PT = Pq : PT,$$

т.-е.

$$PR = Pq,$$

что противно предположенію.

Лемма XXI.

Если около данныхъ точекъ B и C, какъ полюсовъ, вращаются двѣ подвижныя и неограниченныя прямыя BM и CM такъ, что точка ихъ пересѣченія M описываетъ прямую линію, и двѣ другія, также неограниченныя прямыя BD и CD проводятся такъ, что онѣ составляютъ при точкамъ B и C съ первыми постоянные углы MBD и MCD, то точка ихъ пересѣченія D описываетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки B и C. Обратно, если точка D пересѣченія прямыхъ BD и CD лежитъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ заданныя точки A, B, C, и уголъ DBM постоянно равенъ заданному углу ABC, *уголъ же DCM постоянно равенъ углу ACB, то точка M лежитъ на постоянной прямой.*

Положимъ, что на прямой MN (фиг. 46) взята точка N, и когда подвижная точка M совпадаетъ съ N, то точка D совпадаетъ съ неподвижною точкою P. Соединивъ CN, BN, CP, BP, проводятъ изъ точки P прямыя PT и PR, пересѣкающія BC и CD въ точкахъ T и R и составляющія уголъ BPT, равный углу BNM, и уголъ CPR, равный углу CNM. Такъ какъ по условію уголъ $MBD = NBP$ и $MCD = NCP$, то по отнятіи общихъ угловъ NBD и NCD останутся углы $NBM = PBT$ и $NCM = PCR$, вслѣдствіе чего треугольникъ NBM съ BPT и треугольникъ NCM съ PCR подобны. Слѣдовательно, будетъ:

$$PT : NM = PB : NB$$
$$PR : NM = PC : NC$$

точки же B, C, N, P неподвижны. Отсюда слѣдуетъ, что отрѣзки PT и PR находятся въ постоянномъ отношеніи и точка D пересѣченія подвижныхъ прямыхъ BT и CR лежитъ на коническомъ [69]) сѣченіи (л. XX), проходящемъ черезъ точки B, C, P.

Обратно пусть подвижная точка D (фиг. 47) лежитъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ заданныя точки B, C, A, и уголъ $DBM = ABC$ и $DCM = ACB$ при всякомъ положеніи точки D. Пусть точка D послѣдовательно совпадаетъ съ двумя неподвижными точками P и p, причемъ точка M соотвѣтственно занимаетъ положенія N и n. Проведемъ черезъ N и n прямую — эта прямая будетъ геометрическимъ мѣстомъ точекъ M.

Ибо, если допустить, что точка M упала внѣ этой прямой и двигалась бы по какой-либо кривой, то точка D описывала бы коническое сѣченіе, проходящее черезъ пять данныхъ точекъ A, B, C, p, P. Но по только-что доказанному точка D описываетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ тѣ же пять точекъ, когда точка M перемѣщается по прямой. Такимъ образомъ оказалось бы, что два коническихъ сѣченія проходятъ

---

[69]) На Ньютоновомъ чертежѣ нѣтъ того параллелограмма, къ которому относится лемма XX, или, лучше сказать, есть лишь его вершина P, лежащая на коническомъ сѣченіи. Противоположная вершина S получается вообразивъ, что точка M удаляется въ безконечность и стороны BM и CM становятся параллельными прямой MN, а значитъ и между собою, тогда сторона BS приметъ положеніе, параллельное прямой PT, и сторона CS положеніе, параллельное прямой PR, въ чемъ легко убѣдиться, разсчитавъ углы, составляемые направленіями этихъ линій съ какимъ-нибудь заданнымъ направленіемъ, напр., NM. Пусть, напр., NB составляетъ уголъ α, направленіе BP составитъ уголъ $\alpha + 180° - \beta$, гдѣ $\beta = NBP$, и направленіе PT уголъ $\alpha + 180° - \beta + 180° - \alpha = 360° - \beta$, т.-е. уголъ $NLT = \beta$ и слѣдовательно, BS параллельно PT.

Также увидимъ, что CS параллельно PR.

черезъ тѣ же самыя пять точекъ, что противорѣчитъ сл. 3 л. XX. Слѣдовательно, допущеніе, что точка M перемѣщается по кривой, нелѣпо.

Предложеніе XXII. Задача XIV.

Провести коническое сѣченіе черезъ пять заданныхъ точекъ.

Пусть даны пять точекъ A, B, C, P, D (фиг. 48). Изъ одной изъ нихъ A къ двумъ другимъ B и C, принимаемымъ за полюсы, проведи прямыя AB и AC и черезъ четвертую точку P проведи прямыя TPS и PRQ, имъ параллельныя. Изъ обоихъ полюсовъ B и C проведи къ точкѣ D неограниченныя прямыя BDT и CRD, пересѣкающія соотвѣтственно предыдущія двѣ въ точкахъ T и R, послѣ чего, проводя прямую tr, параллельную TR, отсѣкай длины Pt и Pr, пропорціональныя PT и PR. Проводя черезъ ихъ концы t и r прямыя Bt и Cr къ полюсамъ B и C, и будешь получать въ ихъ пересѣченіи точки d, лежащія на искомой кривой. Ибо по лем. XX, точка d лежитъ на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ A, B, C, P, и когда линіи Rr и Tt исчезаютъ, то точка d совпадаетъ съ D, слѣдовательно, это коническое сѣченіе проходитъ черезъ пять заданныхъ точекъ A, B, C, P, D.

То же самое иначе.

Изъ заданныхъ точекъ соедини три которыя-нибудь A, B, C попарно прямыми и около двухъ изъ нихъ B и C (фиг. 49), какъ полюсовъ, вращай углы ABC и ACB. Сперва приложи стороны BA и CA къ точкѣ D, затѣмъ къ точкѣ P и отмѣть точки M и N пересѣченія двухъ другихъ сторонъ BL, CL. Проведи прямую MN и вращай углы около ихъ вершинъ B и C, такъ чтобы пересѣченіе сторонъ CL и BL или BM и CM, получающееся, напр., въ m, постоянно располагалось бы на прямой MN, тогда пересѣченіе сторонъ BA, CA или BD, CD, которое соотвѣтственно m будетъ въ d, опишетъ требуемую кривую $PADdB$. Ибо точка d по леммѣ XXI находится на коническомъ сѣченіи, проходящемъ черезъ B и C, когда же точка m будетъ поочередно совпадать съ точками L, M, N, то точка d будетъ совпадать съ точками A, D, P, слѣдовательно, и будетъ описано коническое сѣченіе, проходящее черезъ пять точекъ A, B, C, P, D.

Слѣдствіе 1. Можно провести касательную къ искомой кривой въ какой-либо заданной точкѣ B, вообразивъ, что точка d приближается къ B и сливается съ нею, тогда прямая Bd и обратится въ искомую касательную [70]).

---

[70]) Когда точка d въ предѣлѣ совпадетъ съ B, то лучъ Cd сольется съ прямой CB, слѣдовательно, построивъ уголъ LCm_1, равный углу ACB, получимъ положеніе точки m_1 на прямой MN, соединивъ Bm_1 и построивъ уголъ m_1Bd, равный ABC, и получимъ искомую касательную Bd_1.

Слѣдствіе 2. Затѣмъ могутъ быть найдены центръ, діаметры и параметръ кривой какъ указано въ слѣд. 2 леммы XIX [71]).

Поученіе.

Первое построеніе выполняется проще, соединивъ BP и отложивъ по ней, а если нужно, по ея продолженію, длину Bp такъ, чтобы было

$$Bp : BP = PR : PT,$$

и проводя затѣмъ черезъ p (фиг. 48) прямую, параллельную SPT, надо брать на ней длину pe равную Pr, и отмѣчать точку пересѣченія d прямыхъ Be, Cr. Ибо по равенству отношеній

$$Pr : Pt = PR : PT = pB : PB = pe : Pt$$

будетъ

$$Pr = pe.$$

По этому способу точки кривой можно строить весьма быстро, если только не будетъ предпочтено построить кривую механически по второму способу [72]).

Предложеніе XXIII. Задача XV.

Провести коническое сѣченіе, проходящее черезъ четыре заданныя точки и касающееся данной прямой.

Случай 1. Пусть дана касательная HB (фиг. 50), точка касанія B и три другія точки C, D, P. Соедини BC проведи PS параллельно BH и

---

[71]) Построивъ въ точкѣ B касательную Bd_1, проводимъ черезъ точку C прямую, этой касательной параллельную, и строимъ точку, лежащую на этой прямой. Соединивъ средину полученной хорды съ точкою B, будемъ имѣть хорду, сопряженную съ діаметромъ, и одинъ изъ концовъ діаметра, т.-е. будемъ какъ разъ въ условіяхъ леммы XIX.

[72]) Построеніе коническаго сѣченія, проходящаго черезъ пять данныхъ точекъ, производится также, какъ извѣстно, при помощи теоремы Паскаля, которая даетъ возможность по даннымъ пяти точкамъ построить искомую шестую, принадлежащую коническому сѣченію, пользуясь только линейкою. Ньютоновы же построенія требуютъ и циркуля, ибо приходится строить или углы, равные даннымъ, или пропорціональные отрѣзки, и оно окажется сложнѣе Паскалевскаго, если не прибѣгнуть во второмъ способѣ къ шаблонамъ, воспроизводящимъ данные углы, коихъ вершины находились бы въ заданныхъ точкахъ C и B. Это повидимому и рекомендуетъ Ньютонъ словами «описать кривую механически». Дѣйствительно, если воспользоваться двумя такими шаблонами, вырѣзанными изъ картона или твердой бумаги, то построеніе ряда точекъ кривой исполняется весьма быстро, въ чемъ каждый можетъ самъ убѣдиться.

Нѣсколько иное рѣшеніе этой задачи, основанное на свойствѣ, доказанномъ въ прим. 67, объясняется Ньютономъ въ его «Arithmetica Universalis», задача LIX.

PQ параллельно BC и дополни параллелограммъ $BSPQ$. Проведи BD, пересѣкающую SP въ T, и CD, пересѣкающую PQ въ R, послѣ чего проводя какую-либо прямую tr параллельно TR, отсѣкающую отъ PQ и PS длины Pr и Pt, пропорціональныя PR и PT, соединяй Cr и Bt,—въ ихъ пересѣченіи d получишь точку, лежащую на искомой кривой (л. XX).

То же самое иначе.

Пусть около полюса B (фиг. 51) вращается уголъ CBH постоянной величины и около точки C прямая CD, продолженная въ обѣ стороны. Отмѣть точки M и N, въ которыхъ сторона BC пересѣкаетъ сказанную вращающуюся прямую CD, когда первая сторона угла BH пересѣкаетъ ее по очереди въ P и въ D. Если затѣмъ вращать сказанный уголъ и лучъ CP или CD такъ, чтобы вторая сторона угла пересѣкалась съ этимъ лучемъ на прямой MN, то пересѣченіе первой его стороны съ этимъ лучемъ и будетъ давать точку D, описывающую требуемую кривую. Ибо, если при построеніи предыдущей задачи точка A, приближаясь, достигнетъ B, то линіи CA и CB, совпадутъ и предѣльное положеніе AB и будетъ касательною BH, и данное выше общее построеніе обратится въ указанное здѣсь. Пересѣченіе стороны BH съ лучемъ опишетъ поэтому коническое сѣченіе, проходящее черезъ точки C, D, P и касающееся прямой BH въ точкѣ B.

Случай 2. Пусть заданы четыре точки B, C, D, P (фиг. 52), лежащія внѣ касательной HJ. Проведи прямыя BD и CP, пересѣкающіяся въ G и пересѣкающія касательную въ H и J. Пусть точка A раздѣляетъ касательную такъ, что

$$HA : JA = \sqrt{CG . GP} \; . \; \sqrt{BH . HD} : \sqrt{DG . GB} \; . \; \sqrt{PJ . JC},$$

то точка A будетъ точкою касанія. Ибо, если прямая HX, параллельная PJ, пересѣкаетъ кривую въ точкахъ X и Y, то по свойству коническихъ сѣченій точка касанія A будетъ такъ расположена, что [73])

$$HA^2 : AJ^2 = [XH . HY : BH . HD] \; . \; [BH . HD : PJ . JC],$$

но отношеніе

$$XH . HY : BH . HD = CG . GP : DG . GB.$$

Послѣ того, какъ точка касанія найдена, кривая можетъ быть построена, какъ показано въ случаѣ 1. Точку A можно брать или между точками H и J, или же внаружи, слѣдовательно, искомыхъ кривыхъ можетъ быть построено двѣ.

---

[73]) Это свойство доказано въ прим. 67. Стоитъ только вообразить, что одна изъ осей касается кривой, то оба корня станутъ равными и произведеніе отрѣзковъ сѣкущей замѣнится квадратомъ длины касательной.

Предложеніе XXIV. Задача XV.

Провести коническое сѣченіе, проходящее черезъ три заданныя точки и касающееся двухъ данныхъ прямыхъ.

Пусть даны касательныя HJ и KL и точки B, C, D (фиг. 53). Черезъ которыя-нибудь двѣ изъ нихъ B и D проведи прямую, пересѣкающую касательныя въ точкахъ K и H. Затѣмъ черезъ точки C и D проведи прямую, пересѣкающую касательныя въ J и L, проведенныя прямыя разсѣки въ точкахъ R и S такъ, чтобы было:

$$HR : KR = \sqrt{BH \,.\, HD} : \sqrt{BK \,.\, KD}$$

и

$$JS : LS = \sqrt{CJ \,.\, JD} : \sqrt{CL \,.\, LD},$$

причемъ точки сѣченія можно брать какъ между точками K и H, J и L, такъ и внѣ ихъ. Проведи затѣмъ RS, пересѣкающую касательныя въ A и P, точки A и P и будутъ точками касанія. Ибо, если предположить, что A и P суть точки касанія заданныхъ касательныхъ, что черезъ точку J, лежащую на касательной HJ, проведена прямая JY, параллельная другой касательной, и что эта прямая пересѣкаетъ кривую въ точкахъ X и Y, и что на этой прямой взята длина $JZ = \sqrt{JX \,.\, JY}$, то по свойству коническихъ сѣченій [74]) будетъ:

$$JX \,.\, JY : LP^2 = JZ^2 : LP^2 = CJ \,.\, JD : CL \,.\, LD = SJ^2 : SL^2,$$

слѣдовательно:

$$JZ : LP = SJ : SL,$$

что показываетъ, что точки S, P, Z лежатъ на одной прямой.

Такъ какъ касательныя сходятся въ точкѣ G, то по свойству коническихъ сѣченій будетъ:

$$JX \,.\, JY : JA^2 = JZ^2 : JA^2 = GP^2 : GA^2,$$

т.-е.

$$JZ : JA = GP : GA$$

и, слѣдовательно, точки P, Z, A лежатъ на одной прямой, значитъ и точки P, S, A лежатъ на одной прямой. Подобнымъ же образомъ докажется, что точки P, R, A также лежатъ на одной прямой, слѣдовательно, точки ка-

---

[74]) См. прим. 67 и 73.

санія P и A лежатъ на прямой RS. Послѣ того, какъ эти точки будутъ найдены, кривая можетъ быть построена подобно тому, какъ въ первомъ случаѣ предыдущей задачи.

Въ этомъ предложеніи и во второмъ случаѣ предыдущаго предложенія построенія остаются одинаковыми, пересѣкаетъ ли прямая XY кривую въ точкахъ X и Y на самомъ дѣлѣ или нѣтъ, ибо эти построенія не зависятъ отъ этого пересѣченія. Но доказательство велось въ предположеніи, что сказанная прямая кривую дѣйствительно пересѣкаетъ, въ случаѣ, если такого пересѣченія нѣтъ, то, какъ уже сказано, построеніе остается безъ измѣненія, на подробномъ же доказательствѣ я, краткости ради, останавливаться не буду.

Лемма XXII.

Преобразовать фигуры въ другія фигуры такого же рода.

Пусть преобразуемая фигура есть HGJ (фиг. 54). Проводятся двѣ параллельныя прямыя AO и BL, пересѣкающія заданную по положенію третью AB въ точкахъ A и B. Изъ произвольной точки G фигуры проводится ея ордината GD, параллельная AO, до пересѣченія съ данной прямою AB (осью абсциссъ). Затѣмъ изъ какой-либо точки O, взятой на прямой AO, проводится прямая OD, соединяющая точку O съ точкою D, основаніемъ ординаты GD. Пусть эта прямая OD пересѣкаетъ заданную прямую BL въ точкѣ d. Изъ этой точки проводится прямая dg, составляющая съ BL заданный уголъ, и на ней откладывается такая длина dg, что

$$dg : Od = DG : OD,$$

тогда точка g новой фигуры hgi и будетъ соотвѣтствовать точкѣ G старой.

Такимъ образомъ каждая отдѣльная точка первой фигуры даетъ соотвѣтствующую ей точку новой. Если вообразить, что точка G, перемѣщаясь непрерывнымъ образомъ, проходитъ послѣдовательно черезъ всѣ точки первой фигуры, то и точка g также непрерывно пройдетъ черезъ всѣ точки новой фигуры и опишетъ ее. Будемъ для различія называть ординаты DG—старыми, ординаты dg—новыми, абсциссы AD—старыми, абсциссы ad—новыми, O—полюсомъ, OD—сѣкущимъ лучемъ, OA—основаніемъ старыхъ ординатъ и Oa (дополняющую параллелограммъ $OABa$)—основаніемъ новыхъ ординатъ.

Я утверждаю, что когда точка G описываетъ прямую то и точка g также описываетъ прямую, соотвѣтствующую первой. Когда точка G описываетъ коническое сѣченіе, то и точка g также описываетъ коническое сѣченіе. Къ коническимъ сѣченіямъ я причисляю и кругъ. Если точка G описываетъ кривую третьяго порядка, то и точка g описываетъ кривую третьяго же порядка, то же самое относится и до кривыхъ высшихъ порядковъ—кривыя, описываемыя точками G и g будутъ всегда одного и того же порядка. Дѣйствительно имѣемъ:

$$ad : OA = Od : OD = dg : DG = AB : AD$$

слѣдовательно, будетъ [75]):

$$AD = \frac{OA \cdot AB}{ad}$$

и

$$DG = \frac{OA \cdot dg}{ad}.$$

Слѣдовательно, если точка G описываетъ прямую линiю и, значитъ, въ уравненiи, выражающемъ зависимость между абсциссою AD и ординатою DG, перемѣнныя AD и DG заключаются лишь въ первой степени, то подставивъ въ это уравненiе вмѣсто AD и DG ихъ выраженiя, приведенныя выше, получимъ новое уравненiе, въ которомъ новая абсцисса ad и новая ордината dg будутъ входить лишь въ первой степени и другъ на друга не помноженными, поэтому это уравненiе будетъ представлять прямую линiю. Если же AD и DG или которая-нибудь одна изъ этихъ перемѣнныхъ входятъ въ составъ перваго уравненiя во второй степени, то и степень второго уравненiя относительно ad и dg будетъ также вторая. То же самое относится и до уравненiй третьей или вообще любой высшей степени—всегда степень первоначальнаго уравненiя относительно перемѣнныхъ AD и DG и степень преобразованнаго относительно перемѣнныхъ ad и dg будутъ одинаковы и, слѣдовательно, кривыя, представляющiя геометрическiя мѣста точекъ G и g, будутъ одного и того же порядка.

Я утверждаю, кромѣ того, что если какая-либо прямая касается первоначальной кривой, то прямая, представляющая преобразованiе этой

---

[75]) При обычныхъ теперь обозначенiяхъ преобразованiе Ньютона выражается слѣдующими формулами.

Пусть будетъ:

$$AD = x, \quad DG = y; \quad OA = a, \quad AB = b;$$
$$ad = x_1, \quad dg = y_1;$$

тогда будетъ:

$$x = \frac{ab}{x_1}; \qquad y = \frac{by_1}{x_1}.$$

Эти формулы становятся особенно просты, если взять $a = b$, тогда будетъ:

$$x = \frac{a^2}{x_1}; \qquad y = \frac{ay_1}{x_1}.$$

Это есть такъ называемое теперь *взаимное* преобразованiе, которое теперь выполняется обыкновенно аналитически, Ньютонъ же предлагая его далъ и соотвѣтствующее геометрическое истолкованiе.

прямой, касается преобразованной кривой, и наоборотъ. Ибо, если двѣ точки первой кривой сближаются и въ предѣлѣ совпадаютъ, то и соотвѣтствующія имъ точки на новой кривой также сближаются и совпадаютъ въ предѣлѣ, слѣдовательно, прямыя, проходящія черезъ эти точки, одновременно обращаются въ касательныя къ своимъ кривымъ.

Можно было бы дать предыдущимъ утвержденіямъ доказательства болѣе геометрическаго характера, но я стремлюсь къ краткости [76]).

Итакъ, если надо преобразовать прямолинейную фигуру, то достаточно перенести точки пересѣченія прямыхъ, ее образующихъ, и черезъ полученныя точки провести прямыя, если-же надо преобразовать криволинейную фигуру, то надо переносить тѣ точки, касательныя и иныя прямыя, коими кривая линія вполнѣ опредѣляется.

Эта лемма служитъ для рѣшенія трудныхъ геометрическихъ задачъ, преобразуя заданныя фигуры въ другія простѣйшія; такъ, напр., сходящіяся прямыя линіи можно преобразовать въ параллельныя, взявъ за ось первоначальныхъ ординатъ какую-нибудь прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія данныхъ прямыхъ, при такомъ выборѣ преобразованіе точки ихъ пересѣченія удалится въ безконечность, прямыя же нигдѣ не встрѣчающіяся, между собою параллельны. Послѣ того какъ для преобразованной фигуры задача будетъ рѣшена, стоитъ только преобразовать ее обратно въ первоначальную, чтобы получить требуемое рѣшеніе для этой послѣдней.

Эта лемма полезна также при рѣшеніи задачъ, приводящихъ къ уравненіямъ третьей или четвертой степени, коихъ рѣшенія получаются пересѣченіемъ коническихъ сѣченій, ибо если получатся два такихъ сѣченія, то задачу слѣдуетъ сперва преобразовать такъ, чтобы одно изъ этихъ сѣченій было эллипсъ, который затѣмъ легко преобразуется въ кругъ. При рѣшеніи же задачъ второй степени, приводящихъ къ пересѣченію прямой и коническаго сѣченія, это послѣднее преобразуется въ кругъ [77]).

---

[76]) Изъ этихъ словъ видно, что Ньютонъ доказательства геометрическія при изложеніи «Началъ» предпочиталъ алгебраическимъ и съ намѣреніемъ избѣгалъ этихъ послѣднихъ, можетъ быть сообразуясь съ общимъ состояніемъ науки, и съ пріемами преподаванія того времени, а также и съ состояніемъ алгебры, въ которой тогда еще не утратились громоздкія обозначенія словами вмѣсто знаковъ, особенно для показателей; между тѣмъ какъ геометрія, доведенная до высокой степени совершенства еще древними, составляла главнѣйшій и, можно сказать, почти единственный предметъ математическаго образованія.

[77]) Задачи, приводящія къ уравненіямъ второй степени, построеніе коихъ выполнимо при помощи пересѣченій круговъ и прямыхъ линій (циркулемъ и линейкой), назывались «задачами плоскими» — problemata plana. Задачи же, приводившія къ уравненіямъ третьей и четвертой степени, требовавшія построенія коническихъ сѣченій и опредѣленія ихъ пересѣченій, назывались «задачами пространственными» — problemata solida. Ньютонъ пользуется этою терминологіею, въ переводѣ она замѣнена современною.

Предложеніе XXV. Задача XVII.

Провести коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ заданныя точки и касающееся трехъ данныхъ по положенію прямыхъ.

Черезъ точку пересѣченія двухъ изъ заданныхъ касательныхъ (фиг. 55) и черезъ точку пересѣченія третьей касательной съ прямою, проходящей черезъ двѣ заданныя точки, проведи неограниченную прямую и, принявъ ее за ось ординатъ (старыхъ), преобразуй фигуру въ новую по предыдущей леммѣ. Въ новой фигурѣ сказанныя двѣ касательныя будутъ между собою параллельны, третья же касательная будетъ параллельна прямой, проходящей черезъ двѣ заданныя точки Пусть hi, kl сказанныя двѣ параллельныя касательныя, ik третья касательная, hl прямая, ей параллельная, проходящая черезъ тѣ двѣ точки a и b, черезъ которыя требуется провести коническое сѣченіе на преобразованной фигурѣ.

Пусть hi, ik, kl разсѣкаются точками c, d, e такъ, что:

$$hc : \sqrt{ah \,.\, hb} = ci : id = ke : kd = (hi + kl) : [ik + \sqrt{ah \,.\, hb} + \sqrt{al \,.\, lb}],$$

то точки c, d, e и будутъ точки касанія.

Дѣйствительно, по свойству коническихъ сѣченій будетъ:

$$hc^2 : ah \,.\, hb = ci^2 : di^2 = ke^2 : kd^2 = el^2 : al \,.\, lb$$

слѣдовательно будетъ:

$$hc : \sqrt{ah \,.\, hb} = ci : di = ke : kd = el : \sqrt{al \,.\, lb}\,,$$

взявъ отношеніе суммы предыдущихъ $(hc + ci + ek + kl)$ равной $(hi + kl)$ къ суммѣ послѣдующихъ, получимъ, что разсматриваемыя отношенія равны отношенію

$$(hi + kl) : (ik + \sqrt{ah \,.\, hb} + \sqrt{al \,.\, lb})$$

Воспользовавшись этою пропорціей, опредѣлимъ положенія точекъ касанія на новой фигурѣ; перенеся ихъ обратнымъ преобразованіемъ на первоначальную, пользуясь задачею XIV и опредѣлимъ искомую кривую. Необходимо имѣть въ виду, что когда точки a, b лежатъ обѣ между точками h и l, то точки c, d, e надо брать между точками h, i, k, l, когда же онѣ лежатъ внѣ h и l, то и c, d, e надо брать внѣ. Если же одна изъ точекъ a или b лежитъ между точками h и l, другая же внѣ, то задача невозможна.

Предложеніе XXVI. Задача XVIII.

Провести коническое сѣченіе, проходящее черезъ заданную точку и касающееся четырехъ заданныхъ по положенію прямыхъ.

Черезъ точку пересѣченія любыхъ двухъ изъ заданныхъ касательныхъ и черезъ точку пересѣченія двухъ другихъ проводится неограниченная прямая, которая и принимается за ось ординатъ первоначальной фигуры, которая затѣмъ и преобразуется въ новую. Въ этой новой касательныя, пересѣкавшіяся на старой, въ точкахъ, лежащихъ на оси ординатъ, станутъ попарно параллельными, пусть онѣ будутъ hi и kl; ik и hl (фиг. 56), образуя параллелограммъ $hikl$, и пусть p есть точка этой новой фигуры, соотвѣтствующая заданной точкѣ старой. Черезъ центръ параллелограмма O проводится прямая pq, и по ней откладывается $oq = op$, точка q будетъ также лежать на искомомъ коническомъ сѣченіи. Обратнымъ преобразованіемъ эта точка переносится на первоначальную фигуру, на которой тогда будутъ извѣстны двѣ точки, и она опредѣлится какъ показано въ задачѣ XVII.

Лемма XXIII.

Если по даннымъ по положенію прямымъ AC и BD отъ заданныхъ на нихъ точекъ A и B откладывать перемѣнныя длины AC и BD, находящіяся въ постоянномъ отношеніи, и соединяющую ихъ прямую CD разсѣкать точкою K также въ постоянномъ отношеніи, то геометрическое мѣсто точекъ K есть прямая линія.

Пусть E (фиг. 57) есть точка встрѣчи прямыхъ AC и BD, и на прямой BE берется G такъ, чтобы было:

$$BG : AE = BD : AC$$

и откладывается длина FD, равная EG, т.-е. постоянная, тогда по построенію будетъ

$$EC : GD = EC : EF = AC : BD,$$

т.-е. это отношеніе постоянное и треугольникъ EFC сохраняетъ свой видъ.

Пусть CF раздѣляется точкою L такъ что

$$CL : CF = CK : CD$$

такъ какъ послѣднее отношеніе задано, то треугольникъ EFL сохраняетъ свой видъ и слѣдовательно точки L будутъ располагаться на прямой EL, положеніе которой извѣстно. Соедини LK, треугольники CLK и CFD будутъ подобны, и такъ какъ отношеніе LK къ FD и длина FD извѣстны, то найдется и LK.

Взявъ $EH = LK$, получимъ параллелограммъ $ELKH$, слѣдовательно точка K располагается на постоянной сторонѣ HK этого параллелограмма [78]).

Слѣдствіе. Такъ какъ видъ фигуры $EFLC$ сохраняется, то отношеніе длинъ EF, EL, EC, иначе, длинъ GD, HK, EC другъ къ другу остается постояннымъ.

---

[78]) Аналитически эта лемма доказывается весьма просто. Примемъ

Лемма XXIV.

Если коническое сѣченіе касается трехъ прямыхъ, изъ коихъ двѣ параллельны и положеніе ихъ задано, то полудіаметръ кривой, параллельный этимъ двумъ касательнымъ, есть среднее пропорціональное между отрѣзками ихъ, заключенными между точками касанія и точками пересѣченія съ третьей касательной.

Пусть AF и GB (фиг. 58) двѣ параллельныя прямыя, касающіяся сѣченія ADB въ точкахъ A и B; EF третья касательная въ точкѣ J, пересѣкающая первыя двѣ въ F и G, и пусть CD есть полудіаметръ, параллельный касательнымъ, тогда;

$$AF:CD = CD:BG.$$

Ибо, если сопряженные діаметры AB и DM пересѣкаютъ касательную FG въ точкахъ E и H и другъ друга въ C, то дополнивъ параллелограммъ $JKLC$, по свойству коническихъ сѣченій имѣемъ:

$$EC:CA = CA:CL$$

слѣдовательно будетъ также:

$$(EC - CA):(CA - CL) = EA:AL = EC:CA$$

и затѣмъ

$$(EA + AL):(EC + CA) = EL:CB = EC:CA.$$

По подобію же треугольниковъ: EAF, ELJ, ECH, EBG будетъ:

$$AF:LJ = CH:BG$$

и по свойству коническихъ сѣченій:

$$LJ:CD = CD:CH,$$

точку E за начало координатъ, BD за ось x-овъ, AC за ось y-ковъ и пусть:

$$AE = a, \quad EB = b, \quad AC:BD = n; \quad KD:CD = k.$$

Возьмемъ $BD = \xi$, тогда $AC = n\xi$ и координаты точекъ C и D будутъ:

$$C\ldots 0 \text{ и } a + \xi; \quad D\ldots b + \xi,\ 0$$

слѣдовательно координаты x и y точки K суть

$$x = (b + \xi)(1 - k); \quad y = k(a + n\xi),$$

т.-е. y и x линейныя функціи произвольнаго параметра ξ, слѣдовательно геометрическое мѣсто точекъ K есть прямая линія.

значитъ будетъ [79]):

$$AF:CD = CD:BG.$$

Слѣдствіе 1. Если двѣ касательныя FG и PQ пересѣкаютъ параллельныя касательныя AF и BG въ F и G, P и Q и другъ друга въ O, то будетъ [80]):

$$AF:BQ = AP:BG = FP:QG = OF:OG,$$

Слѣдствіе 2. Отсюда слѣдуетъ, что точка пересѣченія прямыхъ PG и FQ проведенныхъ черезъ точки P и G, F и Q лежитъ на прямой ACB, проходящей черезъ центръ кривой и точки касанія.

---

[79]) Пусть уравненіе коническаго сѣченія, отнесеннаго къ его сопряженнымъ діаметрамъ есть:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

и на немъ взята точка $x_1\ y_1$. Уравненіе касательной въ этой точкѣ есть

$$\frac{x_1}{a^2}\xi+\frac{y_1}{b_2}\eta-1=0.$$

Дѣлая въ этомъ уравненіи сперва $\eta=+b$, затѣмъ $\eta=-b$, получимъ соотвѣтствующія отрѣзки касательныхъ, параллельныхъ оси x.

$$\xi_1\frac{x_1}{a^2}=1-\frac{y_1}{b}$$

$$\xi_2\frac{x_1}{a^2}=1+\frac{y_1}{b}.$$

Перемноживъ эти равенства и замѣтивъ, что

$$1-\frac{y_1^2}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2},$$

получимъ по сокращеніи

$$\xi_1\xi_2=a^2,$$

что и доказываетъ лемму для эллипса. Совершенно также она докажется и для гиперболы.

[80]) Въ самомъ дѣлѣ:

$$AF=\frac{CD^2}{BG};\quad BQ=\frac{CD^2}{AP},$$

слѣдовательно:

$$AF:BQ=AP:BG=(AP-AF):(BG-BQ)=PF:GQ,$$

но

$$PF:GQ=OF:OG,$$

ибо, треугольники POF и GOQ подобны.

Лемма XXV.

Если четыре неопредѣленно продолженныя стороны параллелограмма касаются коническаго сѣченія и пересѣкаются какою-либо пятою касательной, то между отрѣзками двухъ смежныхъ сторонъ параллелограмма, заключенными между двумя противуположными вершинами и сѣкущей, имѣетъ мѣсто слѣдующее соотношеніе: отрѣзокъ такъ относится къ своей сторонѣ, какъ часть смежной стороны, заключенная между точкою ея касанія и третьей стороной, относится ко второму отрѣзку.

Пусть стороны ML, JK, KL, MJ параллелограмма $MLJK$ (фиг. 59) касаются коническаго сѣченія въ точкахъ A, B, C, D, и пятая касательная FQ пересѣкаетъ эти стороны въ точкахъ F, Q, H, K. Разсматривая отрѣзки ME и KQ сторонъ MJ и KJ или же отрѣзки KH и MF сторонъ KL и ML, надо доказать, что будетъ:

$$ME : MJ = BK : KQ$$

и

$$KH : KL = AM : MF.$$

По слѣдствію 1 предыдущей леммы будетъ:

$$ME : EJ = AM : BQ = BK : BQ$$

слѣдовательно:

$$ME : (ME + EJ) = BK : (BK + BQ)$$

т.-е.:

$$ME : MJ = BK : KQ,$$

точно также:

$$KH : HL = BK : AF = AM : AF$$

слѣдовательно:

$$KH : (HL - KH) = AM : (AF - AM)$$

т.-е.:

$$KH : KL = AM : MF.$$

Слѣдствіе 1. Если извѣстенъ параллелограммъ $JKLM$, описанный около коническаго сѣченія, то будутъ извѣстны и равныя между собою произведенія $KQ \, . \, ME$ и $KH \, . \, MF$. Равенство этихъ произведеній слѣдуетъ изъ подобія треугольниковъ KQH и MFE.

Слѣдствіе 2. Если провести шестую касательную eq, пересѣкающую касательныя KJ и MJ въ точкахъ q и e, то произведенія

$$KQ \, . \, ME = Kq \, . \, Me,$$

слѣдовательно, будетъ:

$$KQ : Me = Kq : ME = (KQ - Kq) : (ME - Me) = Qq : eE.$$

Слѣдствіе 3. Отсюда слѣдуетъ, что прямая, проведенная черезъ середины прямыхъ Eq и eQ, проходитъ черезъ центръ кривой, ибо въ силу пропорціи

$$Qq : Ee = KQ : Me,$$

эта прямая проходитъ черезъ середины прямыхъ Eq, eQ и MK (лем. XXIII). Середина же MK есть центръ кривой.

Предложеніе XXVII. Задача XIX.

Провести коническое сѣченіе, касающееся пяти данныхъ по положенію прямыхъ.

Пусть даны по положенію касательныя: ABG, BCF, GCD, FDE, EA (фиг. 60). Раздѣли діагонали AF и BE четыреугольника $ABFE$, образованнаго какими-нибудь четырьмя изъ данныхъ касательныхъ, въ точкахъ M и N пополамъ; прямая MN (л. XXV, 3), проведенная черезъ эти середины пройдетъ черезъ центръ кривой. Раздѣли затѣмъ пополамъ діагонали BD и GF какого-нибудь другого четыреугольника $BGDF$, образованнаго другими четырьмя касательными, прямая PQ, проходящая черезъ середины P и Q діагоналей, пройдетъ черезъ центръ кривой, который поэтому и получится въ пересѣченіи PQ и MN. Пусть онъ будетъ въ O. Проведи прямую KL параллельно одной изъ касательныхъ, напр., BC такъ, чтобы центръ O лежалъ на серединѣ разстоянія между ними, то проведенная прямая есть также касательная къ кривой. Пусть точки ея пересѣченія съ двумя другими касательными GCD и FDE суть L и K. Черезъ точки пересѣченія C и K, F и L этихъ непараллельныхъ касательныхъ CL, FK съ параллельными CF, KL проведи прямыя CK и FL, пересѣкающіяся въ R, прямая OR пересѣчетъ параллельныя касательныя CF и KL въ точкахъ касанія. Это слѣдуетъ изъ леммы XXIV сл. 2. Такимъ же способомъ можно найти точки касанія и прочихъ касательныхъ и затѣмъ по построенію задачи XIV описать и самую кривую.

Поученіе.

Задачи, въ которыхъ задаются или центры или ассимптоты, заключаются въ предыдущихъ. Ибо когда даны точки и касательныя вмѣстѣ съ центромъ, то тѣмъ самымъ задается еще столько же точекъ или касательныхъ, расположенныхъ въ одинаковомъ разстояніи по другую сторону отъ центра. Ассимптоту можно также считать за касательную, и ея безконечно удаленную точку (если можно такъ выразиться) за точку касанія.

Вообрази, что точка касанія какой-либо касательной удаляется въ безконечность, то эта касательная и обратится въ ассимптоту, и построенія предыдущихъ задачъ обратятся въ построенія при заданной ассимптоты.

Послѣ того какъ фигура описана, можно найти ея оси и фокусы слѣдующимъ образомъ: въ построеніи и чертежѣ леммы XXI сдѣлай такъ, чтобы стороны BP и CP подвижныхъ угловъ PBN и PCN (фиг. 61), коихъ пересѣченіемъ описывается кривая, стали бы между собою параллельны, если, сохраняя такое взаимное расположеніе этихъ сторонъ, вращать углы около ихъ полюсовъ B и C, то вторыя ихъ стороны CN и BN опишутъ точкою своего пересѣченія k кругъ [81]) $BGKC$. Пусть центръ этого круга есть O. Изъ этого центра опусти на ту прямую MN, по которой велась точка пересѣченія сторонъ при описаніи коническаго сѣченія, перпендикуляръ OH, пересѣкающій кругъ въ точкахъ K и L. Когда углы занимаютъ такое положеніе, что ихъ пересѣкающіяся стороны CK и BK сходятся въ точкѣ K, ближайшей къ прямой MN, то направленія CP, BP первыхъ сторонъ угловъ параллельны большой оси коническаго сѣченія,

---

[81]) Это поученіе составляетъ дополненіе къ леммѣ XXI, въ которой дано «органическое построеніе»—descriptio organica коническихъ сѣченій. Положимъ сперва, что кривая есть гипербола (ниже будетъ показано, при какомъ условіи это имѣетъ мѣсто), тогда нетрудно построить направленія ея ассимптотъ, ибо, очевидно, что эти направленія суть тѣ, при которыхъ точка пересѣченія лучей удаляется въ безконечность и лучи становятся параллельными. Положимъ сперва, что лучи, направляясь параллельно, лежатъ по ту же сторону хорды CB и что точка N на прямой MN есть точка пересѣченія ведущихъ сторонъ угловъ при этомъ ихъ положеніи, тогда, проведя черезъ N прямую NH, параллельную CP и BP, видимъ, что уголъ $CNB = \alpha + \beta$, слѣдовательно точка N лежитъ на сегментѣ, вмѣщающемъ этотъ уголъ $\gamma = \alpha + \beta$.

Если же второе ассимптотическое направленіе располагается такъ, что прямыя CP и BP, идутъ по разныя стороны хорды BC, то уголъ $CMB = \pi - (\alpha + \beta)$ т.-е. сегментъ CMB дополняетъ предыдущій до полнаго круга.

Такимъ образомъ точки пересѣченія M и N ведущей прямой съ кругомъ, вмѣщающимъ на хордѣ BC уголъ $\alpha + \beta$, даютъ положенія ведущихъ сторонъ, соотвѣтствующія направленіямъ ассимптотъ. Такъ какъ направленія осей раздѣляютъ уголъ между ассимптотами пополамъ, то этимъ направленіямъ будутъ соотвѣтствовать на кругѣ середины дугъ MN, т.-е. *концы K и L діаметра перпендикулярнаго къ прямой MN*. Направленіе лучей, соотвѣтствующее пересѣченію ведущихъ сторонъ въ точкѣ K даетъ направленіе одной оси, соотвѣтствующее точкѣ L—другое. При этомъ то направленіе, которое раздѣляетъ пополамъ тотъ уголъ между ассимптотами, въ которомъ лежитъ кривая, даетъ главную ось, т.-е. ту, на которой лежатъ фокусы.

Когда прямая MN пересѣкаетъ кругъ, то кривая есть гипербола, ибо ея ассимптоты вещественныя. Когда же MN круга не пересѣкаетъ, то кривая есть эллипсъ, но такъ какъ построеніе направленій осей *не зависитъ* отъ того, пересѣкается ли MN съ кругомъ или нѣтъ, то оно остается безъ измѣненій. Если MN касается круга, то кривая есть парабола.

перпендикулярныя же имъ—малой. Обратное имѣетъ мѣсто, если взять болѣе отдаленную точку L. По извѣстному положенію [82]) центра кривой найдутся и ея оси, послѣ же того какъ оси найдены, получаются и фокусы.

Кромѣ того отношеніе квадратовъ [83]) осей другъ къ другу равно отношенію KH къ LH, слѣдовательно легко построить кривую, подобную данной и проходящую черезъ четыре заданныя точки. Ибо, если двѣ изъ данныхъ точекъ принять за полюсы, то третья дастъ подвижные углы PCK, PBK, когда же эти углы извѣстны, то можно провести кругъ $BGKC$. Затѣмъ, такъ какъ видъ кривой заданъ, то будетъ извѣстно отношеніе OH къ OK, т.-е. самое OH. Если изъ центра O радіусомъ OH описать другой кругъ, то касательнная къ этому кругу, проведенная черезъ точку пересѣченія сторонъ CK и BK, при томъ положеніи подвижныхъ угловъ, при которомъ ихъ первыя стороны CP и BP проходятъ черезъ четвертую изъ данныхъ точекъ, и будетъ тою прямою MN, при помощи которой строится кривая.

Обратно, можно въ данное коническое сѣченіе вписать четыреугольникъ, подобный данному (за исключеніемъ нѣкоторыхъ случаевъ невозможности).

Есть и еще леммы, при помощи которыхъ можно строить коническія сѣченія заданнаго вида по заданнымъ точкамъ и касательнымъ. Напримѣръ, лемма такого рода: если черезъ заданную точку проводить прямую пересѣкающую данное коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ, и разстояніе

---

[82]) Центръ найдется по пересѣченію двухъ діаметровъ; для того же, чтобы построить діаметръ, стоитъ только, взявъ какую-нибудь хорду кривой, проходящую черезъ одинъ изъ полюсовъ, напр., C, провести черезъ точку B лучъ, ей параллельный, и построить точку кривой, лежащую на этомъ лучѣ. Прямая, проходящая черезъ середины параллельныхъ хордъ и есть діаметръ.

Удобнѣе всего за направленіе этихъ двухъ діаметровъ брать опредѣленныя, какъ показано выше, направленія, которыя параллельны осямъ, тогда само собою получается прямоугольникъ, вписанный въ кривую, а такъ какъ отношеніе между длинами осей извѣстно (см. пр. 83), то найдутся и самыя оси.

[83]) Соединимъ точку B съ точкой N, тогда уголъ $KBN = 2\delta$ есть уголъ между ассимптотами, пусть R есть радіусъ круга, тогда

$$KN = 2R \,.\, \sin\delta; \qquad KH = KN \,.\, \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = 2R \,.\, \sin^2\delta$$

$$LN = 2R\sin\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right); \quad LH = LN \,.\, \cos\delta = 2R \,.\, \cos^2\delta,$$

но отношеніе осей

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\delta,$$

слѣдовательно

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{KH}{LH}\,.$$

между этими двумя точками раздѣлить пополамъ, то точка дѣленія опишетъ коническое сѣченіе, подобное данному, и оси его будутъ параллельны осямъ даннаго.

Но я перейду къ болѣе полезнымъ.

Лемма XXVI.

Расположить вершины треугольника, по виду и величинѣ равнаго заданному такъ, чтобы каждая изъ нихъ лежала на одной изъ трехъ заданныхъ непараллельныхъ прямыхъ.

Пусть даны по положенію три неограниченныя прямыя AB, AC, BC (фиг. 62), и требуется расположить заданный треугольникъ DEF такъ, чтобы его вершина D лежала на прямой AB, вершина E на прямой AC и вершина F на BC. Опиши около DE, DF, EF три сегмента DRE, DGF, EMF вмѣщающихъ углы соотвѣтственно равные BAC, ABC, ACB. Эти сегменты надо описывать по такую сторону прямыхъ DE, DF и EF, чтобы послѣдовательность буквъ $DRED$ была бы одинаковой съ послѣдовательностью $BACB$; $DGFD$ одинаковою съ $ABCA$ и $EMFE$ одинаковою съ $ACBA$. Эти сегменты дополняются до полныхъ круговъ. Пусть первые два круга пересѣкаются въ точкѣ G и пусть P и Q центры ихъ. Соединивъ PG, PQ возьми Ga такъ, чтобы было:

$$Ga : AB = PG : PQ$$

и точкою G какъ центромъ и радіусомъ Ga, опиши кругъ пересѣкающій первый кругъ DGE въ точкѣ a. Проведи затѣмъ aD пересѣкающую второй кругъ DFG въ b и aE пересѣкающую третій кругъ въ c. Остается построить фигуру $ABCdef$ равную и подобную фигурѣ $abcDEF$ и задача будетъ рѣшена.

Дѣйствительно, проведемъ Fc пересѣкающую aD въ n и соединимъ aG, bG, QG, QD, PD. По построенію уголъ $EaD = CAB$; $acF = ACB$, поэтому треугольники anc и ABC имѣютъ соотвѣтственно равные углы. Слѣдовательно, уголъ anc или FnD равенъ ABC, значитъ и углу FbD, что показываетъ, что точка n совпадаетъ съ точкою b.

Уголъ GPQ, равный половинѣ угла при центрѣ GPD, равенъ углу при окружности GaD, и уголъ GQP равный половинѣ центральнаго угла GQD равенъ дополненію до двухъ прямыхъ угла при вершинѣ GbD значитъ равенъ углу Gba, и треугольники GPQ и Gab между собою подобны, и

$$Ga : ab = GP : PQ = Ga : AB \text{ (по построенію)},$$

слѣдовательно, ab равно AB, поэтому треугольники abc и ABC, о которыхъ доказано что они подобны, вмѣстѣ съ тѣмъ и равны. Такъ какъ сверхъ сего вершины D, E, F треугольника DEF лежатъ на сторонахъ ab,

ac, bc треугольника abc, то можно построить фигуру $ABCdef$ равную и подобную фигурѣ $abcDEF$ и задача будетъ рѣшена.

Слѣдствіе. Подобнымъ же способомъ можно провести прямую такъ что ея отрѣзки, заключенные между тремя другими прямыми, будутъ заданной длины. Вообрази, что вершина D треугольника DEF упадаетъ на сторону EF и что его стороны составляютъ продолженіе одна другой, такъ, что этотъ треугольникъ обратился въ прямую линію, коей отрѣзокъ данной длины DE долженъ заключаться между заданными прямыми AB и AC, и отрѣзокъ заданной же длины DF между прямыми AB и BC. Примѣнивъ къ этому случаю указанное построеніе и получимъ рѣшеніе задачи.

Предложеніе XVIII. Задача XX.

Провести коническое сѣченіе заданнаго вида и величины такъ, чтобы заданныя его части заключались бы между тремя данными по положенію прямыми.

Пусть требуется построить кривую равную и подобную данной DEF такъ, чтобы тремя заданными прямыми AB, AC, BC она разсѣкалась бы на части равныя и подобныя заданнымъ DE и EF (фиг. 63).

Проведи прямыя DE, EF, DF и построй треугольникъ равный и подобный DEF такъ, чтобы его вершины лежали соотвѣтственно на прямыхъ AB, AC, BC, что выполняется по леммѣ XXVI, затѣмъ, опиши около этого треугольника заданную кривую.

Лемма XXVII.

Построить четыреугольникъ заданнаго вида такъ, чтобы его вершины лежали соотвѣтственно на четырехъ заданныхъ прямыхъ, которыя не сходятся въ одну точку и не всѣ между собою параллельны.

Пусть четыре прямыя ABC, AD, BD, CE (фиг. 64) заданы по положенію и пусть первая изъ нихъ пересѣкаетъ вторую въ A, третью въ B, четвертую въ C, требуется построить четыреугольникъ $fghi$ подобный $FGHJ$, такъ, чтобы вершина угла f равнаго F лежала на прямой ABC, три же остальныя вершины угловъ g, h, i равныхъ угламъ G, H, J лежали бы соотвѣтственно на прямыхъ AD, BD, CE.

Соедини FH и опиши на FG, FH, FJ сегменты FSG, FTH, FVJ, которые вмѣщаютъ углы соотвѣтственно равные угламъ BAD, CBD и ACE образуемымъ заданными прямыми. Эти сегменты надо описывать съ той стороны прямыхъ FG, FH, FJ, чтобы буквы $FSGF$, $FTHF$, $FVJF$ шли соотвѣтственно въ той же послѣдовательности, какъ $BADB$, $CBDC$, $ACEA$. Сегменты дополняются до полныхъ круговъ, пусть P есть центръ перваго круга FSG и Q—второго FTH. Проведя и продолживъ въ обѣ стороны прямую PQ, возьми на ней QR такъ, чтобы было

$$QR : PQ = BC : AB,$$

причемъ QR надо откладывать въ такую сторону отъ Q, чтобы порядокъ буквъ P, Q, R былъ одинаковъ съ порядкомъ буквъ ABC. Центромъ R и радіусомъ RF описывается четвертый кругъ FNc пересѣкающій третій FVJ въ точкѣ c. Соедини Fc, пересѣкающую первый кругъ въ a, второй въ b, проведи aG, bH, cJ, тогда можно построить фигуру $ABCfghi$ подобную фигурѣ $abcFGHJ$, четыреугольникъ $fghi$ и будетъ требуемый.

Пусть первые два круга FSG, FTH пересѣкаются въ K; соедини PK, QK, RK, aK, bK, cK и продолжи QP до L. Углы FaK, FbK, FcK имѣющія свои вершины на окружностяхъ равны половинамъ центральныхъ угловъ FPK, FQK, FRK, слѣдовательно, они равны угламъ LPK, LQK, LRK, и фигура $PQRK$ равноугольна и подобна фигурѣ $abcK$, поэтому

$$ab : bc = PQ : QR = AB : BC,$$

кромѣ того, по построенію углы FaG, FbH, FcJ соотвѣтственно равны fAg, fBh, fCi. Слѣдовательно, по фигурѣ $abcFGHJ$ можетъ быть закончена подобная ей фигура $ABCfghi$, послѣ чего и получится четыреугольникъ $fghi$ подобный $FGHJ$, расположенный такъ, что его вершины лежатъ на четырехъ заданныхъ прямыхъ ABC, AD, BD, CE.

Слѣдствіе. Пользуясь этимъ построеніемъ можно провести прямую такъ, что ея отрѣзки заключающіеся въ опредѣленномъ порядкѣ между четырьмя заданными прямыми будутъ находиться въ данномъ другъ къ другу отношеніи. Пусть углы FGH, GHJ увеличиваются до тѣхъ поръ пока прямыя FG, GH, HJ составятъ продолженіе одна другой, выполнивъ описанное выше построеніе для этого случая, получимъ такую прямую $fghi$, части которой fg, gh, hi заключенныя между заданными по положенію прямыми AB и AD, AD и BD, BD и CE будутъ относиться другъ къ другу, какъ длины FG, GH, HJ и будутъ сохранять ту же самую послѣдовательность.

Но эта задача можетъ быть рѣшена проще, слѣдующимъ образомъ: продолжи AB до K и BD до L (фиг. 65) такъ, чтобы было:

$$BK : AB = HJ : GH$$

и

$$DL : BD = GJ : FG$$

и проведи KL, пересѣкающую CE въ i.

Продолжи iL до M такъ, чтобы было:

$$LM : iL = GH : HJ$$

и проведи MQ параллельную LB и пересѣкающую AD въ g, затѣмъ gi

пересѣкующую AB и BD въ f и h. Прямая gi и есть искомая. Пусть Mg пересѣкаетъ прямую AB въ Q, и AD пересѣкаетъ прямую KL въ S, прямая же AP проведена параллельно BD и пересѣкаетъ iL въ P, тогда будетъ:

$$gM : Lh = gi : hi = Mi : Li = GJ : HJ = AK : BK = AP : BL.$$

Пусть DL разсѣкается точкою R такъ, что отношеніе $DL : RL$ равно предыдущимъ, тогда будетъ:

$$DL : RL = gS : gM = AS : AP = DS : DL = AP : BL,$$

и слѣдовательно, будетъ

$$gS : Lh = AS : BL = DS : RL$$

откуда слѣдуетъ

$$(BL - RL) : (Lh - BL) = (AS - DS) : (gS - AS),$$

т.-е.

$$BR : Bh = AD : Ag = BD : gQ,$$

вмѣстѣ съ тѣмъ

$$BR : BD = Bh : gQ = fh : fg.$$

Но по построенію, линія BL раздѣлялась точками D и R въ томъ же отношеніи какъ длина FJ точками G и H, такъ что

$$BR : BD = FH : FG,$$

слѣдовательно, и

$$fh : fg = FH : FG,$$

и такъ какъ

$$gi : hi = Mi : Li = GJ : HJ,$$

то линіи FJ и fi разсѣкаются точками G и H, g и h подобнымъ образомъ.

При выполненіи построенія этой задачи, послѣ того какъ будетъ проведена прямая LK, пересѣкающая CE въ i, слѣдуетъ продолжить iE до V, такъ, чтобы было

$$EV : Ei = FH : HJ$$

и провести Vf параллельно BD. Та же прямая получится, если изъ центра i радіусомъ JH описать кругъ пересѣкающій BD въ X и продолжить iX до Y такъ, чтобы было $iY = JF$ и провести Yf параллельно BD.

Другія рѣшенія этой задачи дали Вренъ [84]) и Уаллисъ.

---

[84]) Построеніе данное Wrenn'омъ приведено въ моей статьѣ «Опредѣленіе орбитъ планетъ и кометъ по малому числу наблюденій». Извѣстія Николаевской Морской Академіи. Вып. 1.

Предложеніе XXIX. Задача XXI.

Провести коническое сѣченіе даннаго вида, которое разсѣкалось бы четырьмя заданными прямыми на части заданныя по послѣдовательности расположенія, виду и пропорціи.

Пусть требуется построить коническое сѣченіе, которое было бы подобно данному $FGHJ$ (фиг. 66), и котораго части были бы подобны и пропорціональны частямъ FG, GH, HJ и располагались бы въ томъ же порядкѣ между заданными прямыми AB и AD, AD и BD, BD и CE. Послѣ проведенія прямыхъ FG, GH, HJ и FJ построй (л. XXVII) четыреугольникъ $fghi$ подобный $FGHJ$, такъ, чтобы его вершины лежали на заданныхъ прямыхъ AB, AD, BD, CE въ указанномъ порядкѣ и около этого четыреугольника опиши коническое сѣченіе подобное данному. Оно и будетъ требуемое.

Поученіе.

Построеніе этой задачи можетъ быть выполнено и слѣдующимъ образомъ: послѣ проведенія FG, GH, HJ, FJ (фиг. 67), продолжи GF въ сторону V, проведи FH, JG и построй уголъ $CAK = FGH$ и $DAL = VFH$. Пусть прямыя AK и AL пересѣкаютъ прямую BD въ K и L, проведи KM и LN такъ, чтобы уголъ AKM равнялся GHJ и уголъ ALN равнялся FHJ и чтобы было:

$$KM : AK = HJ : GH \quad \text{и} \quad LN : AL = HJ : FH.$$

Прямыя AK, KM, AL, LN проводятся въ такую сторону отъ линій AD, AK, AL, чтобы буквы $CAKMC$, $ALKA$, $DALND$ слѣдовали бы въ той же круговой послѣдовательности какъ буквы $FGHJF$. Прямая MN, проходящая черезъ M и N пересѣкаетъ прямую CE въ i. Построй уголъ iEP равный JGF и возьми PE такъ, чтобы было:

$$PE : Ei = FG : GJ.$$

Черезъ точку P проведи PQf, составляющую съ прямой ADE уголъ PQE равный FJG и пересѣкающую прямую AB въ f. Соедини fi, при этомъ PE и PQ надо проводить въ такую сторону отъ прямыхъ CE и PE чтобы круговая послѣдовательность буквъ $PEiP$ и $PEQP$ была одинаковой съ послѣдовательностью $FGHJF$. Если на прямой fi построить соблюдая послѣдовательность буквъ четыреугольникъ $fghi$ подобный $FGHJ$ и описать кривую подобную данной, то задача и будетъ рѣшена.

Однако, достаточно объ опредѣленіи орбитъ. Остается показать какимъ образомъ опредѣляется движеніе по найденнымъ орбитамъ.

ОТДѢЛЪ VI.

Объ опредѣленіи движенія по заданнымъ орбитамъ.

Предложеніе XXX. Задача XXII.

Опредѣлить мѣсто тѣла движущагося по заданной параболической траекторіи въ данный моментъ времени.

Пусть S фокусъ, A (фиг. 68) главная вершина параболы, и пусть произведеніе $4AS \,.\, M$ равно площади APS описанной радіусомъ SP послѣ прохожденія тѣла черезъ вершину, или же той площади, которую ему предстоитъ описать для достиженія вершины. Величина этой площади опредѣляется по времени, коему она пропорціональна.

Раздѣли AS въ точкѣ G пополамъ и возставь перпендикуляръ GH равный $3M$, центромъ H и радіусомъ HS опиши кругъ пересѣкающій параболу въ точкѣ P; эта точка и есть искомое мѣсто тѣла. Ибо, если на ось опустить перпендикуляръ PO и провести PH, то будетъ:

$$\begin{aligned} PH^2 &= AG^2 + GH^2 = (AO - AG)^2 + (PO - GH)^2 = \\ &= AO^2 + PO^2 - 2AO \,.\, AG - 2GH \,.\, PO + AG^2 + GH^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$2GH \,.\, PO = AO^2 + PO^2 - 2AO \,.\, AG = AO^2 + \frac{3}{4} PO^2.$$

Вмѣсто AO^2 напиши $AO \,.\, \frac{PO^2}{4AS}$, тогда раздѣливъ на $3PO$ и умноживъ на $2AS$, получишь:

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} GH \,.\, AS &= \frac{1}{6} AO \,.\, PO + \frac{1}{2} AS \,.\, PO = \\ &= \frac{AO + 3AS}{6} \,.\, PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \,.\, PO = \\ &= \text{площ. } (APO - SPO) = \text{площ. } APS. \end{aligned}$$

Но

$$GH = 3M,$$

слѣдовательно,

$$\frac{4}{3} GH \,.\, AS = 4AS \,.\, M,$$

т.-е. отсѣченная площадь и есть какъ разъ требуемая.

Слѣдствіе 1. Отношеніе GH къ AS равно отношенію промежутка времени, въ теченіе котораго тѣло описало дугу AP, къ промежутку времени въ теченіе котораго оно описывало дугу AK, заключенную между вершиною A и перпендикуляромъ къ оси, проведеннымъ черезъ фокусъ [85]).

Слѣдствіе 2. Если постоянно проводить кругъ ASP, проходящій черезъ движущееся тѣло P, то скорость точки H такъ относится къ скорости тѣла при прохожденіи черезъ вершину A, какъ 3 къ 8 и, слѣдовательно, въ этомъ же отношеніи находится длина GH къ той длинѣ, которую тѣло за время своего движенія отъ A къ P могло бы пройти двигаясь равномѣрно [86]), съ тою скоростью, которую оно имѣло въ вершинѣ A.

Слѣдствіе 3. Обратно можно найти время, въ продолженіе котораго тѣло описало какую-либо заданную дугу AP; соедини AP и изъ середины этой прямой возставь перпендикуляръ, онъ пересѣчетъ GH въ точкѣ H.

Лемма XXVIII.

Не существуетъ такой замкнутой овальной кривой, для которой площадь, отсѣкаемая произвольно проводимыми прямыми опредѣлялась бы въ общемъ видѣ уравненіями съ конечнымъ числомъ членовъ и конечной степени.

Пусть внутри овала взята какая-нибудь точка, около которой какъ около полюса равномѣрно вращается прямая линія и, одновременно, изъ

---

[85]) Пусть время описанія дуги AP есть t_1, дуги AK ... t_0, тогда обозначая черезъ $2c$ постоянную площадей имѣемъ:

$$GH = \frac{3ct_1}{4AS},$$

слѣдовательно

$$\frac{GH}{AS} = \frac{3ct_1}{4AS^2}.$$

Но площадь

$$ASK = ct_0 = \frac{2}{3} AS \,.\, SK = \frac{4}{3} AS^2.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\frac{GH}{AS} = \frac{t_1}{t^0}.$$

[86]) Скорость точки H равна

$$\frac{GH}{t_1} = \frac{3c}{4AS},$$

но

$$2c = v_0 \,.\, AS,$$

гдѣ v_0 есть скорость тѣла въ точкѣ A, слѣдовательно

$$\frac{GH}{t_1} = \frac{3}{8} v_0.$$

полюса выходитъ точка и движется по этой прямой со скоростью, пропорціональной квадрату длины отрѣзка этой прямой, заключеннаго внутри овала между полюсомъ и периметромъ. При такомъ движеніи точка описываетъ спираль изъ безчисленнаго множества оборотовъ. Если бы часть площади овала отсѣкаемая сказанной прямой, могла бы быть найдена при помощи алгебраическаго уравненія съ конечнымъ числомъ членовъ, то при помощи того же уравненія нашлось бы и разстояніе точки спирали до полюса, которое этой площади пропорціонально; слѣдовательно, всѣ точки спирали могли бы быть найдены при помощи конечнаго алгебраическаго уравненія, поэтому и точки пересѣченія съ какою-угодно заданной по положенію прямой, опредѣлялись бы при помощи алгебраическаго уравненія конечной степени. Но всякая неопредѣленно продолженная прямая пересѣкаетъ спираль въ безконечномъ числѣ точекъ, уравненіе же, помощью котораго находятся точки пересѣченія двухъ линій доставляетъ ихъ всѣми своими корнями и въ томъ же числѣ, слѣдовательно степень уравненія должна быть такою же, каково число точекъ пересѣченія.

Такъ, напримѣръ, два круга пересѣкаются въ двухъ точкахъ и каждая изъ нихъ находится не иначе, какъ при помощи уравненія второй степени, которымъ опредѣляется, вмѣстѣ съ нею, и вторая точка пересѣченія. Два коническихъ сѣченія могутъ пересѣкаться въ четырехъ точкахъ и, эти точки, вообще, нельзя найти иначе, какъ при помощи уравненія четвертой степени, которымъ онѣ всѣ опредѣляются совмѣстно. Это происходитъ потому, что если бы искать каждое изъ этихъ пересѣченій въ отдѣльности, то такъ какъ для нихъ для всѣхъ условія однѣ и тѣ же, то и вычисленіе для каждаго пересѣченія будетъ то же самое, поэтому и получится одно и то же окончательное уравненіе, которое должно доставлять всѣ пересѣченія совмѣстно, полно и безразлично. Такимъ образомъ, пересѣченія коническаго сѣченія и кривой третьяго порядка, такъ какъ ихъ можетъ быть шесть, доставляются совмѣстно уравненіемъ шестой степени, пересѣченія двухъ кривыхъ третьяго порядка, которыхъ можетъ быть девять, доставляются уравненіемъ девятой степени. Если бы это могло быть иначе, то всѣ задачи, приводящія къ уравненіямъ третьей степени можно было бы сводить на задачи плоскія, т.-е. рѣшаемыя при помощи уравненій первой и второй степени. Всѣ же задачи высшихъ степеней къ задачамъ третьей степени. Здѣсь я говорю о кривыхъ неприводимыхъ, ибо, если уравненіе, опредѣляющее кривую можетъ быть приведено къ уравненію низшей степени, то эта кривая не простая, а составленная изъ двухъ или нѣсколькихъ, которыхъ пересѣченія и могутъ быть находимы въ отдѣльности для каждой. Такимъ образомъ, пересѣченія двухъ прямыхъ и коническаго сѣченія доставляются всегда уравненіями второй степени, трехъ прямыхъ и неприводимой кривой третьяго порядка — уравненіями третьей степени, четырехъ прямыхъ и неприводимой кривой четвертаго порядка — уравненіемъ четвертой степени и т. д. до безконечности.

Слѣдовательно, безчисленное множество точекъ пересѣченія прямой и спирали, такъ какъ эта кривая простая и неприводимая, потребуютъ для своего опредѣленія уравненія съ безконечнымъ числомъ корней и безконечно большой степени, которое могло бы доставить всѣ пересѣченія совмѣстно, ибо для всѣхъ для нихъ одинъ и тотъ же законъ и одно и то же вычисленіе. Если изъ полюса опустить на сказанную сѣкущую перпендикуляръ и вращать его вмѣстѣ съ сѣкущей около полюса, то пересѣченія спирали будутъ переходить одно въ другое, то которое было первымъ или ближайшимъ къ основанію перпендикуляра, черезъ одинъ оборотъ, станетъ вторымъ, послѣ двухъ оборотовъ — третьимъ и т. д., между тѣмъ самое уравненіе не иначе можетъ измѣниться, какъ только отъ измѣненія величины тѣхъ количествъ, которыми опредѣляется положеніе самой сѣкущей. А такъ какъ послѣ каждаго полнаго оборота эти количества принимаютъ свои прежнія значенія, то и уравненіе вновь принимаетъ свой первоначальный видъ, и, слѣдовательно, будучи единственнымъ и оставаясь неизмѣннымъ, должно доставить всѣ точки пересѣченія въ безконечномъ числѣ, слѣдовательно оно должно имѣть безчисленное число корней. Итакъ, нельзя опредѣлить, вообще, пересѣченія прямой и спирали при помощи конечнаго уравненія, поэтому и не существуетъ замкнутаго овала, коего площадь, отсѣкаемая произвольно взятою прямой, могла бы выражаться въ общемъ видѣ при помощи такихъ уравненій.

Подобнымъ же разсужденіемъ, взявъ за разстояніе между полюсомъ и подвижною точкою описывающею спираль, длину пропорціональную отсѣкаемой части периметра овала, можно доказать, что длина периметра не можетъ быть найдена вообще при помощи уравненій конечной степени. Подъ замкнутымъ оваломъ я здѣсь разумѣю такія кривыя, которыя не касаются сопряженныхъ съ ними кривыхъ уходящихъ въ безконечность.

Слѣдствіе. Такимъ образомъ, для эллипса площадь описываемая радіусомъ проводимымъ изъ фокуса къ движущемуся тѣлу, не можетъ быть получена по данному времени при помощи конечнаго алгебраическаго уравненія, и поэтому не можетъ быть опредѣлена пересѣченіемъ эллипса съ геометрически раціональной (алгебраической) кривой. Я называю геометрически раціональными (алгебраическими) кривыми такія всѣ точки коихъ опредѣляются при помощи длинъ, опредѣляемыхъ въ свою очередь алгебраически уравненіями, т.-е. при помощи сложныхъ и составныхъ отношеній между длинами. Прочія же кривыя (какъ спирали, квадратрисы, трохоиды) я называю геометрически ирраціональными (трансцендентными), подобно тому какъ длины, называются ариѳметически раціональными, если онѣ относятся другъ къ другу какъ цѣлое число къ цѣлому, если же такого отношенія не существуетъ — то ариѳметически ирраціональными, какъ о томъ сказано въ X-й книгѣ элементовъ.

Отсѣченіе же отъ эллипса площади пропорціональной времени при помощи геометрически ирраціональной кривой исполняется слѣдующимъ образомъ.

Предложеніе XXXI. Задача XXIII.

Найти мѣсто, занимаемое движущимся по эллиптической траекторіи тѣломъ въ данный моментъ времени.

Пусть A (фиг. 69), есть главная вершина эллипса, S фокусъ, O центръ, P искомое мѣсто тѣла.

Продолжи OA до G такъ, чтобы было:

$$OG : OA = OA : OS,$$

возставь перпендикуляръ GH и точкою O какъ центромъ и радіусомъ OG, опиши кругъ GEF и вообрази, что по линейкѣ GH какъ по основанію катится колесо GEF, вращаясь при этомъ около своей оси O, точка A взятая внутри его описываетъ при этомъ трохоиду ALJ. Возьми длину GK, составляющую отъ длины обода колеса такую же долю, какъ время, въ продолженіе котораго тѣло переходитъ изъ A въ P отъ времени полнаго оборота по эллипсу. Возставь перпендикуляръ KL пересѣкающій трохоиду въ L и проведи прямую LP параллельно KG, въ точкѣ P ея пересѣченія съ эллипсомъ и получится требуемое мѣсто тѣла.

Радіусомъ OA опиши полукругъ изъ точки O какъ центра и пусть его пересѣченіе съ прямою LP, если нужно продолженной есть Q. Соедини SQ и OQ и пусть OQ пересѣкаетъ кругъ EFG въ точкѣ F, изъ фокуса опусти на эту же прямую перпендикуляръ SR. Площадь APS пропорціональна площади AQS, т.-е. разности площадей сектора AQO и треугольника OQS, т.-е. пропорціональна разности произведеній

$$\frac{1}{2} OQ \,.\, (\smile AQ) - \frac{1}{2} OQ \,.\, RS,$$

т.-е. разности $\smile AQ - RS$, ибо $\frac{1}{2} OQ$ есть величина постоянная.

Такъ какъ слѣдующія отношенія между собою равны:

$$SR : QN = OS : OA = OA : OG = \smile AQ : \smile GF =$$
$$= (\smile AQ - SR) : (\smile GF - QN),$$

то эта площадь APS пропорціональна GK, т.-е. разности между дугою GF и длиною QN представляющей синусъ [87]) дуги AQ.

Поученіе.

Впрочемъ, въ виду трудности построенія трохоиды, предпочтительнѣе на дѣлѣ примѣнять слѣдующее приближенное рѣшеніе.

---

[87]) Пусть $OG = R$, $OA = r$, уголъ $AOQ = \theta$, тогда ординатѣ LK трохоиды соотвѣтствуетъ абсцисса

$$GK = R\theta - r\sin\theta = \smile GF - QN.$$

Сперва надо опредѣлить уголъ B и длину L (фиг. 70), такъ, чтобы было:

$$B = 57^\circ{,}29578 \,.\, \frac{SH}{AB} \quad \text{и} \quad L = OA \,.\, \frac{AB}{SH},$$

гдѣ AB есть большая ось эллипса, OA большая полуось, SH разстояніе между фокусами.

Послѣ того какъ эти величины найдены задача рѣшается слѣдующимъ анализомъ. При помощи какого-либо построенія, или же сдѣлавъ какое-нибудь исходное предположеніе, находимъ мѣсто P тѣла близкое истинному его мѣсту p. Проведя ординату PR, по пропорціональности осямъ эллипса находимъ ординату RQ описаннаго круга AQB. Эта ордината есть синусъ угла AOQ при радіусѣ OA, она пересѣкаетъ эллипсъ въ точкѣ P. Для угла AOQ достаточно найти приближенное значеніе грубымъ вычисленіемъ.

Кромѣ того, извѣстенъ уголъ пропорціональный времени, т.-е. такой, который такъ относится къ четыремъ прямымъ, какъ время описанія дуги Ap къ времени полнаго обращенія по эллипсу. Пусть этотъ уголъ есть N. Затѣмъ надо взять углы D и E такъ, чтобы было:

$$D = B \,.\, \sin AOQ \quad \text{и} \quad E = (N - AOQ + D) \,.\, \frac{L}{L - AO \,.\, \cos AOQ}.$$

Затѣмъ углы F и G такъ, чтобы было:

$$F = B \,.\, \sin(AOQ + E) \quad \text{и} \quad G = \frac{N - AOQ - E + F}{L - AO \,.\, \cos(AOQ + E)} \,.\, L.$$

Затѣмъ углы H и J:

$$H = B \sin(AOQ + E + G) \quad \text{и} \quad J = \frac{N - AOQ - E - G - H}{L - AO \cos(AOQ + E + G)} \,.\, L.$$

и продолжать такимъ образомъ до безконечности. Уголъ AOq опредѣлится по формулѣ:

$$AOq = AOQ + E + G + J + \ldots$$

Послѣ чего исправленное мѣсто p найдется по его абсциссѣ Or и ординатѣ pr, которыя суть:

$$Or = OA \,.\, \cos AOq; \quad pr = qr \,.\, \frac{OC}{OA} = OC \,.\, \sin AOq.$$

Рядъ $AOQ + E + G + J$ сходится настолько быстро, что едва ли когда-нибудь понадобится идти въ немъ далѣе второго члена E. Это вычисленіе [88]) основано на томъ, что площадь APS пропорціональна раз-

---

[88]) Пріемъ, примѣняемый здѣсь Ньютономъ для рѣшенія Кэплерова уравненія, есть какъ разъ тотъ, который имъ предложенъ для рѣшенія

ности между дугою AQ и перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ фокуса на радіусъ OQ.

Подобнымъ же вычисленіемъ рѣшается задача и для гиперболы. Пусть ея центръ O, вершина A, фокусъ S, ассимптота OK.

Извѣстна площадь, пропорціональная времени, которую и требуется отсѣчь. Пусть эта площадь есть A (фиг. 71).

Дѣлается исходное предположеніе о положеніи прямой SP, отсѣкающей площадь ASP, близкую къ требуемой. Проводятъ OP и затѣмъ AJ и PK параллельныя второй ассимптотѣ. По таблицѣ логариѳмовъ находится площадь $AJPK$ и равная ей площадь AOP, вычтя которую изъ площади треугольника OPS, получаемъ площадь APS. Раздѣливъ удвоенную разность площади A и площади APS, т.-е. величину $2(APS-A)$ или $2(A-APS)$ на разстояніе SN фокуса до касательной PT въ точкѣ P, получимъ длину хорды PQ. Вмѣстивъ эту хорду между A и P, если площадь APS больше A, и на продолженіи дуги AP, если меньше, получимъ въ точкѣ Q болѣе точное мѣсто. Повторяя это вычисленіе, будемъ получать это мѣсто все болѣе и болѣе точно.

Вышеприведенными вычисленіями задача рѣшается аналитически вообще. Но для цѣлей Астрономіи удобнѣе слѣдующій частный пріемъ. Пусть OA, OB, OD (фиг. 72) полуоси эллипса, L его параметръ и D раз-

---

численныхъ уравненій вообще, т.-е. когда извѣстно приближенное значеніе $u=u_1$ корня уравненія $f(u)=N$, то болѣе точное значеніе $u_2=u_1+\delta_1$ найдется, взявъ

$$\delta_1=\frac{N-f(u_1)}{f'(u_1)}.$$

Для Кэплерова уравненія $u-\varepsilon\sin u=N$ будетъ:

$$\delta_1=\frac{N-u_1+\varepsilon\sin u_1}{1-\varepsilon\cos u_1}.$$

Это и есть формула Ньютона, если ее написать при помощи теперешнихъ обозначеній, и числителя и знаменателя дроби $\frac{L}{L-AO\cos AOQ}$ раздѣлить на L и замѣтить, что $\frac{AO}{L}=\varepsilon$ и уголъ $AOQ=u_1$. По поводу этого рѣшенія знаменитый Adams говоритъ: «Если погрѣшность приближеннаго значенія величины u_α будетъ порядка i относительно малой величины ε, принимаемой за малую перваго порядка, то погрѣшность величины $u_{\alpha+1}$ будетъ порядка $i_1=2i+1$, погрѣшность слѣдующаго приближенія $u_{\alpha+2}$ будетъ $2i_1+1=4i+3$ и т. д., такъ что порядокъ малости погрѣшности болѣе чѣмъ удваивается при каждомъ приближеніи. Этимъ объясняется огромное преимущество (immense advantage) этого способа передъ разложеніемъ въ ряды по степенямъ ε, когда требуется весьма большая точность результата, ибо при рядахъ прибавленіе одного члена повышаетъ порядокъ погрѣшности лишь на одну единицу». J. C. Adams. Scientific Papers vol I. стр. 290.—On Newton's Solution of Kepler's problem.

ность между половиною малой оси и половиною параметра. Сперва надо найти углы Y и Z по формуламъ [89]).

$$\sin Y = \frac{1}{2}\,\frac{D(OA+OD)}{AB^2}, \qquad \sin Z = \frac{2D\,.\,SH}{3AO^2}.$$

---

[89]) Въ «Началахъ» принята, само собою разумѣется, старинная астрономическая терминологія, нѣсколько отличающаяся отъ современной.

Какъ извѣстно, примѣняемыя теперь основныя формулы эллиптическаго движенія планетъ слѣдующія: пусть S есть центръ солнца, O—центръ орбиты, тогда уголъ $ASP = v$, считаемый въ сторону движенія планетъ отъ перигелія, т.-е. ближайшей къ солнцу вершины A, называется «истинной аномаліей», описанный изъ точки O радіусомъ OA кругъ—эксцентрическимъ кругомъ, уголъ $AOQ = u$—эксцентрическою аномаліей, наконецъ, пропорціональный времени уголъ $N = \frac{2\pi t}{\tau}$—средней аномаліей, разстояніе $SP = r$—радіусомъ векторомъ, $OA = a$—большая полуось, отношеніе $\frac{OS}{OA} = e$—эксцентриситетъ. Эти величины связаны слѣдующими соотношеніями:

$$r = a(1 - e\cos u) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

$$u - e\sin u = N = nt \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}u = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}v \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (3)$$

которыя разлагаются въ ряды по степенямъ e и даютъ:

$$u = N + e\sin N + \frac{e^2}{1.2.2}.\,2\sin 2N + \frac{e^3}{1.2.3.2^2}[3^2\sin 3N - 3\sin N] + \ldots$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - e\cos N - \frac{e^2}{2}\cos 2N - \frac{e^3}{1.2.2^2}(3\cos 3N - 3\cos N) - \ldots$$

$$v = N + \left[2e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{96}e^6 \ldots\right]\sin N + \left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6 \ldots\right)\sin 2N +$$
$$+ \left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \ldots\right)\sin 3N + \ldots$$

(Laplace, Mécanique Celeste, Livre II, § 22).

Но Ньютонъ слѣдуетъ старинной астрономической практикѣ, которая удержалась до Лапласа, именно, аномаліи считались не отъ перигелія, а отъ афелія, т.-е. отъ дальнѣйшей отъ солнца точки B, соотвѣтственно чему формулы (1), (2) и (3) требуютъ замѣны въ нихъ угловъ u, v и N черезъ углы $\pi - u_1$, $\pi - v_1$ и $\pi - N_1$ и принимаютъ видъ:

$$r = a(1 + e\cos u_1)$$
$$u_1 + e\sin u_1 = N_1$$
$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_1 = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}.\operatorname{tg}\frac{1}{2}u_1.$$

Разность $v_1 - N_1$ называется уравненіемъ центра и для приближеннаго полученія истинной аномаліи, проводили изъ второго фокуса эллипса лучъ BJ, составляющій уголъ $BHJ = N_1$, точка J пересѣченія этого луча съ эллипсомъ и давала приближенное мѣсто планеты. Ньютонъ приводитъ

Послѣ того какъ эти углы найдены, мѣсто тѣла опредѣлится такъ: возьми уголъ T, пропорціональный времени описанія дуги BP, или какъ его называютъ среднее движеніе, и разсчитай уголъ V — первое уравненіе средняго движенія такъ, чтобы было:

$$V = Y \cdot \sin 2T$$

и уголъ X—второе уравненіе средняго движенія

$$X = Z \cdot \sin^3 T$$

сумма угловъ $T + V + X$, если уголъ T острый, или же разность $T + X - V$, когда уголъ T тупой, т.-е. больше прямого, но меньше двухъ прямыхъ, представитъ уравненное среднее движеніе, коему и возьми равный уголъ BHP, тогда, если HP пересѣкаетъ эллипсъ въ точкѣ P, то прямая SP и отсѣчетъ площадь BSP, весьма близкую къ искомой пропорціональной времени. Такой способъ, какъ видно, достаточно простъ, ибо для весьма малыхъ угловъ V и X, выраженныхъ, если угодно, въ секундахъ, достаточно найти первыя двѣ или три цифры. Этотъ способъ достаточно точенъ для теоріи планетъ, ибо даже для орбиты Марса, коего наибольшее уравненіе центра равно 10°, ошибка едва достигаетъ $1''$. Послѣ того, какъ найденъ уголъ BHP уравненнаго средняго движенія, найдутся тотчасъ же по извѣстнымъ способамъ уголъ истиннаго движенія BSP и разстояніе SP.

Однако достаточно о движеніи тѣлъ по кривымъ. Можетъ оказаться, что тѣло и прямо падаетъ къ центру или по прямой удаляется отъ него, къ изложенію ученія о такихъ движеніяхъ я и перехожу.

ОТДѢЛЪ VII.

О прямолинейномъ движеніи тѣлъ къ центру или отъ центра.

Предложеніе XXXII. Задача XXIV.

Предполагая, что центростремительная сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія мѣста до центра, опредѣлить пространства, проходимыя тѣломъ въ заданное время при прямолинейномъ его паденіи къ центру.

Случай 1. Если тѣло не падаетъ прямо къ центру, то оно описываетъ (XIII, 1) нѣкоторое коническое сѣченіе, коего фокусъ лежитъ въ центрѣ силъ. Пусть это сѣченіе есть $APPB$ и его фокусъ S (фиг. 73 а).

разложеніе уравненія центра при старинныхъ обозначеніяхъ. Такъ какъ эти формулы теперь не примѣняются, то выводъ ихъ не приводится; этотъ выводъ, хотя довольно сложнымъ геометрическимъ путемъ, можно найти въ изданіи «Principia» Le Seur и Jacquier, и болѣе простой въ Miscellaneous Tracts by Thomas Simpson стр. 46.

Во-первыхъ, разсмотримъ тотъ случай, когда эта кривая эллипсъ. На большой его оси AB опишемъ полукругъ ADB и черезъ падающее тѣло проведемъ перпендикуляръ DPC къ оси, и прямыя DS и PS; площади ASD и ASP пропорціональны и между собою, и времени. Сохраняя ось AB, будемъ уменьшать ширину эллипса, площадь ASD будетъ оставаться пропорціональной времени. Пусть эта ширина уменьшается до безконечности, тогда орбита APB совпадетъ съ осью AB, тѣло будетъ падать по прямой AC, фокусъ S совпадетъ съ вершиною B и площадь ABD станетъ пропорціональной времени. Поэтому пространство AC, проходимое въ теченіе заданнаго времени тѣломъ, падающимъ прямо, получится, взявъ вмѣсто времени пропорціональную ему площадь ABD и опустивъ изъ точки D перпендикуляръ на AB.

Случай 2. Если сказанная кривая гипербола, то на ея оси BA описывается равнобокая гипербола BED (фиг. 73 b), и такъ какъ площади CSP, $CBfP$, $SPfB$ относятся соотвѣтственно къ площадямъ CSD, $CBED$, $SDEB$ какъ ординаты CP къ CD, площадь же $SPfB$ пропорціональна времени, въ теченіе котораго тѣло описываетъ дугу BfP, то и площадь $SDEB$ пропорціональна времени. При безконечномъ уменьшеніи параметра гиперболы RPB и сохраненіи неизмѣнности ея главной оси AB, дуга PB совпадетъ съ прямою CB, фокусъ S—съ вершиною B и прямая SD—съ прямою BD, слѣдовательно, площадь $BDEB$ будетъ пропорціональна времени, въ продолженіе котораго тѣло при прямолинейномъ паденіи опишетъ путь CB.

Случай 3. Разсуждая подобнымъ же образомъ и для того случая, когда кривая RPB парабола (фиг. 73 c), описываемъ при той же вершинѣ другую параболу, которая остается постоянной; при уменьшеніи до нуля параметра той параболы, по которой движется тѣло P, причемъ это движеніе обратится въ прямолинейное по прямой CB, площадь параболическаго сегмента $BDEB$ будетъ пропорціональна времени [90]), въ продолженіе котораго тѣло падаетъ съ C въ S или въ B.

---

[90]) Задача о прямолинейномъ движеніи тѣла, притягиваемаго къ неподвижному центру силою обратно пропорціональною разстоянію, разсматривается весьма подробно какъ предѣльный случай движенія по коническому сѣченію, благодаря этому Ньютонъ избѣгаетъ необходимости исполнять аналитически тѣ квадратуры, къ которымъ задача приводитъ, а получаетъ ихъ геометрическое представленіе.

Въ предложеніи 39-мъ данъ общій способъ рѣшенія при помощи квадратуръ задачи о прямолинейномъ движеніи тѣла подъ дѣйствіемъ какой угодно центральной силы, причемъ устанавливается и законъ живыхъ силъ, а въ предложеніи 40-мъ дается и общее алгебраическое выраженіе этого закона.

Чтобы яснѣе видѣть связь рѣшенія, даваемаго Ньютономъ, съ теперешнимъ, обозначимъ черезъ x разстояніе тѣла до центра въ моментъ t, черезъ a разстояніе въ моментъ $t=t_0$, черезъ v_0 скорость въ этотъ мо-

Предложеніе XXXIII. Теорема IX.

Принимая найденное выше, утверждаю, что скорость падающаго тѣла въ любомъ мѣстѣ C такъ относится къ скорости тѣла, описы-

---

ментъ и черезъ μ^2 коеффиціентъ притяженія, такъ что притяженіе центромъ выражается формулой $-\frac{\mu^2}{x^2}$, тогда по закону живыхъ силъ будетъ

$$v^2 - v_0^2 = 2\mu^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right)$$

или

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} + v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Смотря по знаку величины $v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a}$ могутъ быть три случая:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} < 0 & \text{(движеніе эллиптическое)} \\ 2) & v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} = 0 & \text{(} \quad \text{»} \quad \text{параболическое)} \\ 3) & v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} > 0 & \text{(} \quad \text{»} \quad \text{гиперболическое).} \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (A)$$

Возьмемъ первый случай и пусть

$$v_0^2 - \frac{2\mu^2}{a} = -\frac{2\mu^2}{b},$$

слѣдовательно,

$$b > 0,$$

уравненіе (1) напишется

$$v^2 = 2\mu^2\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{b}\right) = \frac{dx^2}{dt^2},$$

слѣдовательно, будетъ

$$\sqrt{2b} \, . \, \mu \, . \, dt = \frac{dx}{-\sqrt{\frac{b}{x} - 1}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Сообразуясь съ фигурою (73 а), сдѣлаемъ

$$x = \frac{1}{2} b(1 + \cos 2u) = b \cos^2 u,$$

такъ что

$$dx = -b \sin 2u \, . \, du; \quad \sqrt{\frac{b}{x} - 1} = \operatorname{tg} u$$

и уравненіе (2) будетъ

$$\sqrt{\frac{2}{b}} \, \mu dt = \cos^2 u \, . \, du = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u) du$$

пусть при

$$t = 0, \quad x = b, \quad v = 0, \quad u = 0$$

тогда будетъ

$$\frac{2\sqrt{2}\mu}{\sqrt{b}} \, . \, t = u + \frac{1}{2} \sin 2u$$

вающаго около центра B кругъ радіуса BC, какъ корень квадратный изъ разстоянія AC тѣла до второй вершины круга или равнобочной гиперболы относится къ корню квадратному изъ главной полуоси кривой.

или умноживъ обѣ части на $\frac{b^2}{4} = R^2$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\mu \, . \, b^{\frac{3}{2}} . \, t = R^2 u + \frac{1}{2} R^2 \sin 2u = \text{площади } ABD, \quad . \; . \; . \; . \quad (3)$$

т.-е. время t пропорціонально площади ABD и мѣсто тѣла въ этотъ моментъ есть C.

Для параболы будетъ

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} = \frac{dx^2}{dt^2},$$

т.-е.

$$\sqrt{2}\mu \, . \, dt = -\sqrt{x}\, dx,$$

$$\sqrt{2}\mu \, . \, t = \frac{2}{3}\left(a^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Дѣлая $x = 0$, получимъ время паденія изъ точки C, разстояніе коей до центра $BC = a$:

$$\sqrt{2}\mu \, . \, t = \frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}},$$

если уравненіе параболы BED есть

$$y^2 = 2px,$$

то дѣлая

$$x = a$$

имѣемъ

$$y = CD = \sqrt{2p} \, . \, \sqrt{a}$$

и очевидно, что время t пропорціонально площади BED.

Для гиперболы будетъ

$$v_0{}^2 - \frac{2\mu^2}{a} > 0.$$

Полагая

$$v_0{}^2 - \frac{2\mu^2}{a} = \frac{2\mu^2}{b},$$

получимъ

$$v^2 = 2\mu^2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b}\right)$$

и точка A, въ которой $v = 0$, соотвѣтствуетъ абсциссѣ $x = -b$ и лежитъ по другую сторону отъ центра O гиперболы. Уравненіе (2) будетъ:

$$\sqrt{2b}\mu \, . \, dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{b}{x} + 1}}.$$

Полагая соотвѣтственно тому, какъ для эллипса

$$x = \frac{b}{2}(Ch 2u - 1),$$

Раздѣливъ общую ось AB фигуры RPB и DEB въ точкѣ O (фиг. 74) пополамъ, проводимъ касательную PT къ кривой RPB въ точкѣ P и опу-

---

будемъ имѣть

$$dx = b \,.\, Sh2u \,.\, du, \qquad \frac{b}{x} + 1 = \frac{1 + Ch2u}{Ch2u - 1} = \frac{Ch^2u}{Sh^2u},$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{2b} \,.\, \mu \,.\, dt = 2bSh^2u \,.\, du = b(Ch2u - 1) \,.\, du.$$

Отсюда слѣдуетъ

$$\sqrt{2b}\mu \,.\, t = \frac{b}{2} Sh2u - bu$$

или по умноженіи на $\frac{b}{4}$

$$\frac{\sqrt{2}}{4} b^{\frac{3}{2}} \mu \,.\, t = \frac{b^2}{8} \,.\, Sh2u - \frac{b^2}{4} \,.\, u = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right) . \left(\frac{b}{2} \,.\, Sh2u\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 . \, 2u =$$
$$= OBD - OBED = BEDB \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Ибо по уравненію гиперболы

$$CD = \frac{b}{2} Sh2u,$$

слѣдовательно,

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2} Sh2u = \frac{1}{2} OB \,.\, CD = \text{площ. } OBD$$

и

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)^2 . \, 2u = \text{площ. } OBED.$$

Критерій для различія вида орбитъ дается въ предложеніи 37 въ нѣсколько иной формѣ, нежели указано выше, ибо вмѣсто коеффиціента притяженія вводится та скорость V_0, съ которою тѣло подъ дѣйствіемъ даннаго центра могло бы описывать кругъ даннаго радіуса.

За этотъ радіусъ принимается начальное разстояніе a, такъ что будетъ

$$\frac{\mu^2}{a^2} = \frac{V_0^2}{a},$$

т.-е.

$$\mu^2 = V_0^2 a$$

и тогда условія А перепишутся такъ:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) & \frac{v_0^2}{V_0^2} < 2 & \text{движеніе эллиптическое} \\ 2) & \frac{v_0^2}{V_0^2} = 0 & \text{» параболическое} \\ 3) & \frac{v_0^2}{V_0^2} > 2 & \text{» гиперболическое.} \end{array}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; A'$$

Полагая

$$\frac{v_0^2}{V_0^2} = n$$

скаемъ на эту касательную, пересѣкающую ось въ точкѣ T, изъ фокуса S перпендикуляръ SY и проводимъ BQ перпендикулярно оси.

Пусть параметръ кривой RPB есть L. Уже установлено (XVI, 9), что скорость тѣла, движущагося вокругъ центра силъ S, при проходѣ черезъ точку P такъ относится къ скорости тѣла, описывающаго около того же центра кругъ радіуса SP какъ $\sqrt{\frac{1}{2} L \,.\, SP} : SY$. По свойству коническихъ сѣченій:

$$AC \,.\, CB : CP^2 = 2AO : L,$$

слѣдовательно,

$$L = \frac{2CP^2 \,.\, AO}{AC \,.\, CB},$$

можемъ написать формулу

$$v_0{}^2 - \frac{2\mu^2}{a} = - \frac{2\mu^2}{b},$$

такъ

$$n - 2 = -2\frac{a}{b},$$

но

$$SA = b, \quad SG = a, \quad GA = b - a \text{ (фиг. 80)},$$

такъ что при Ньютоновомъ обозначеніи дѣйствительно будетъ:

$$n = \frac{2GA}{SA} = \frac{GA}{\frac{1}{2} SA} = \frac{v_0{}^2}{V_0{}^2}.$$

Это и есть предложеніе XXXVII.

Имѣя въ виду эти формулы и значеніе величины $b = SA$ на фигурахъ 77, 78, 79 и 80 и $b = BA$ на фигурахъ 73 a, 73 b, 74, нетрудно сопоставить каждое изъ этихъ предложеній съ аналитическимъ процессомъ, примѣняемымъ при рѣшеніи этой задачи теперешними способами.

Такъ предложеніе 33 выражаетъ законъ живыхъ силъ, именно, дѣлая $BA = b$, $BC = x$ и $\frac{\mu^2}{x^2} = \frac{V^2}{x}$, гдѣ черезъ V обозначена скорость, съ которою тѣло могло бы описывать кругъ въ разстояніи x отъ центра, изъ формулы

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} - \frac{2\mu^2}{b}$$

получаемъ

$$v^2 = 2V^2\left(1 - \frac{x}{b}\right) = 2V^2 \,.\, \frac{AC}{BC},$$

что и высказано въ этомъ предложеніи.

Предложеніе 34 выражаетъ этотъ законъ для параболы ($b = \infty$)

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{x} = 2V^2.$$

Предложеніе 35 даетъ выраженіе множителя, стоящаго передъ временемъ t въ фор. (3, 4, 5).

т.-е. сказанныя скорости относятся другъ къ другу какъ $\sqrt{\frac{CP^2 . AO . SP}{AC . CB}} : SY$. Но по свойству коническихъ сѣченій:

$$CO : BO = BO : TO = (CO \pm BO) : (TO \pm BO) = BC : BT.$$

Составивъ вновь производную пропорцію, имѣемъ:

$$(CO \pm BO) : BO = CT : BT$$

или

$$AC : AO = CP : BQ,$$

слѣдовательно,

$$\frac{CP^2 . AO . SP}{AC . CB} = \frac{BQ^2 . AC . SP}{AO . BC}.$$

Пусть ширина CP кривой RPB неопредѣленно уменьшается, такъ что въ предѣлѣ точка P совпадаетъ съ C, точка S съ B, прямая SP съ BC, прямая SY съ BQ, скорость тѣла, падающаго прямо къ центру будетъ относиться къ скорости тѣла, описывающаго кругъ радіусомъ BC, какъ $\sqrt{\frac{BQ^2 . AC . SP}{AO . BC}} : SY$. Но въ предѣлѣ отношеніе $BQ : SY$ и отношеніе $SP : BC$ равны 1, слѣдовательно, въ предѣлѣ выше приведенное отношеніе скорости будетъ равно

$$\sqrt{\frac{AC}{AO}} = \sqrt{AC} : \sqrt{\frac{1}{2} AB}.$$

Слѣдствіе 1. При совпаденіи точекъ B и S будетъ

$$TC : TS = AC : AO.$$

Слѣдствіе 2. Тѣло, обращающееся по кругу въ заданномъ разстояніи отъ центра при измѣненіи направленія его движенія прямо отъ центра, удалится отъ него до двойного своего разстоянія.

Предложеніе XXXIV. Теорема X.

Если кривая BED парабола, то скорость падающаго тѣла въ любомъ мѣстѣ C равна скорости, съ которою тѣло можетъ описывать около центра B кругъ радіусомъ $\frac{1}{2} BC$, двигаясь равномѣрно.

Въ точкѣ P (фиг. 75) скорость тѣла, движущагося по параболѣ RPB, описанной около центра силъ S, равна скорости тѣла, описывающаго около S кругъ, радіусъ коего $\frac{1}{2} SP$ (XVI, 7). При безпредѣльномъ уменьшеніи ширины параболы, ея дуга PfB приближается и въ предѣлѣ совпадаетъ съ прямою BC, радіусъ SP совпадаетъ съ разстояніемъ BC, фокусъ S — съ вершиною B, отсюда и слѣдуетъ высказанная теорема.

Предложеніе XXXV. Теорема XI.

При тѣхъ же предположеніяхъ утверждаю, что площадь DES, описываемая перемѣннымъ радіусомъ SD, равна площади, которую описало бы въ то же самое время тѣло, равномѣрно обращающееся около центра S по кругу, коего радіусъ равенъ половинѣ параметра кривой DES.

Вообрази, что тѣло C (ф. 76 и 77) въ теченіе весьма малаго промежутка времени прошло при своемъ паденіи весьма малый путь Cc и въ то же самое время другое тѣло K, обращающееся равномѣрно около центра S по кругу OKk, описало дугу Kk. Возставь перпендикуляры CD, cd, пересѣкающіе кривую DES въ D и d, соедини SD, Sd, SK, Sk и проведи Dd, пересѣкающую ось AS въ точкѣ T, и опусти на нее перпендикуляръ SY.

Случай 1. Когда описываемая кривая DES есть кругъ или равнобочная гипербола, то, раздѣливъ ея ось AS точкою O пополамъ, получимъ длину SO, равную полупараметру.

Такъ какъ:

$$TC : TD = Cc : Dd$$

и

$$TD : TS = CD : SY,$$

то будетъ:

$$TC : TS = CD \,.\, Cc : SY \,.\, Dd.$$

По предложенію XXXIII сл. 1

$$TC : TS = AC : AO,$$

предполагая при этомъ, что берется предѣльное отношеніе, когда точки D и d совпадаютъ. Слѣдовательно,

$$AC : SK = CD \,.\, Cc : SY \,.\, Dd \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

Но въ точкѣ C отношеніе скорости падающаго тѣла къ скорости тѣла, описывающаго около центра S кругъ радіуса SC равно $\sqrt{AC} : \sqrt{AO}$ или что тоже $\sqrt{AC} : \sqrt{SK}$ (XXXIII). Скорость тѣла, описывающаго кругъ радіуса SC, относится къ скорости тѣла, описывающаго кругъ радіуса SK, какъ $\sqrt{SK} : \sqrt{SC}$ (IV, 6). Слѣдовательно, скорость падающаго тѣла относится къ скорости движенія по кругу OKk, какъ $\sqrt{AC} : \sqrt{SC}$, но это отношеніе есть вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе отрѣзочка Cc къ весьма малой дугѣ Kk, итакъ:

$$Cc : Kk = \sqrt{AC} : \sqrt{SC} = AC : CD,$$

слѣдовательно,

$$Cc \,.\, CD = AC \,.\, Kk$$

и въ слѣдствіи пропорціи (*)

$$AC : SK = AC \,.\, Kk : SY \,.\, Dd,$$

отсюда

$$SK \,.\, Kk = SY \,.\, Dd,$$

слѣдовательно, и

$$\frac{1}{2} SK \,.\, Kk = \frac{1}{2} SY \,.\, Dd,$$

т.-е. площадка KSk = площадкѣ SDd.

Такимъ образомъ въ отдѣльные безконечно малые промежутки времени описываются такія безконечно малыя площадки, что при уменьшеніи ихъ величины и возрастаніи числа, предѣлъ ихъ отношенія равенъ единицѣ, поэтому (л. IV, слѣд.) и полныя площади, совмѣстно образуемыя, равны.

Случай 2. Въ томъ случаѣ, когда кривая DES (фиг. 78) парабола, получится какъ и выше:

$$CD \,.\, Cc : SY \,.\, Dd = TC : TS = 2 : 1,$$

откуда

$$\frac{1}{4} CD \,.\, Cc = \frac{1}{2} SY \,.\, Dd.$$

Но скорость падающаго тѣла въ точкѣ C равна скорости равномѣрнаго движенія по кругу радіуса $\frac{1}{2} SC$ (XXXIV), отношеніе же этой послѣдней къ скорости движенія по кругу радіуса SK, т.-е. отношеніе отрѣзочка Cc къ дугѣ Kk (IV, 6) равно отношенію

$$\sqrt{SK} : \sqrt{\frac{1}{2} SC} = SK : \frac{1}{2} CD,$$

вслѣдствіе чего

$$\frac{1}{2} SK \,.\, Kk = \frac{1}{4} CD \,.\, Cc = \frac{1}{2} SY \,.\, Dd,$$

т.-е. какъ и выше площадь KSk = площади SDd.

Предложеніе XXXVI. Задача XXV.

Опредѣлить время паденія тѣла изъ заданной точки A.

На діаметрѣ AS (фиг. 79), представляющемъ начальное разстояніе тѣла, опиши точкою S какъ центромъ, полукругъ ADS и другой полукругъ ему равный. Изъ мѣста тѣла C въ разсматриваемый моментъ возставь ординату CD, соедини SD и построй секторъ OSK, коего площадь была бы равна площади ASD. Изъ пред. XXXV слѣдуетъ, что при паденіи тѣло опишетъ пространство AC въ то же самое время, въ какое другое тѣло, равномѣрно вращающееся около центра S, можетъ описать дугу OK.

Предложеніе XXXVII. Задача XXVI.

Опредѣлить время восходящаго или нисходящаго движенія тѣла, брошеннаго изъ заданнаго мѣста вверхъ или внизъ.

Пусть тѣло выходитъ изъ заданнаго мѣста G (фиг. 80) по направленію GS съ какою-либо заданною скоростью.

Возьми длину GA въ отношеніи къ $\frac{1}{2}AS$, равномъ отношенію квадрата данной скорости къ квадрату такой постоянной скорости, съ которою тѣло могло бы обращаться по кругу даннаго раріуса GS. Если это отношеніе равно 2, то точка A безконечно удалена, и надо строить параболу съ вершиною S, осью SG и произвольнымъ параметромъ. Это слѣдуетъ изъ пр. XXXIV. Если это отношеніе меньше 2, надо строить на оси SA кругъ, если больше 2, то равнобочную гиперболу (XXXIII). Затѣмъ изъ центра S радіусомъ, равнымъ половинѣ параметра, описывается кругъ HkK и изъ начальнаго мѣста G движущагося тѣла, и изъ любого другого его мѣста C возставляются перпендикуляры GJ, CD, пересѣкающіе коническое сѣченіе или кругъ въ точкахъ J и D. Соединивъ SJ, SD, построй секторы HSK, HSk соотвѣтственно равные площадямъ сегментовъ $SEJS$ и $SEDS$, по пр. XXXV тѣло описываетъ путь GC въ то же самое время, какъ тѣло K дугу Kk.

Предложеніе XXXVIII. Теорема XII.

Предполагая, что центростремительная сила пропорціональна разстоянію мѣста до центра, я утверждаю, что для падающаго тѣла времена, скорости и пройденныя пространства соотвѣтственно пропорціональны дугамъ, ихъ синусамъ и синусамъ верзусамъ.

Пусть тѣло падаетъ изъ какого-либо мѣста A (фиг. 81) по прямой AS. Изъ центра силъ S, радіусомъ AS описывается четверть круга AE, пусть CD есть синусъ какой-либо дуги AD, то тѣло A въ продолженіе времени AD при своемъ паденіи пройдетъ пространство AC и въ точкѣ C будетъ обладать скоростью CD.

Это предложеніе доказывается на основаніи предложенія X тѣмъ же способомъ, какимъ пр. XXXII доказано исходя изъ пред. XI.

Слѣдствіе 1. Отсюда видно, что времена, въ продолженіе которыхъ одно тѣло падая изъ точки A достигаетъ центра S, другое же равномѣрно обращаясь по кругу, описываетъ его четверть ADE, между собою равны.

Слѣдствіе 2. Поэтому времена паденія любого тѣла изъ любого мѣста на тотъ же центръ равны между собою, ибо времена обращенія (IV, 3) равны.

Предложеніе XXXIX. Задача XXVII.

Предполагая центростремительную силу какою угодно и допуская квадратуру кривыхъ, требуется опредѣлить какъ скорость движущагося прямо къ центру или отъ центра тѣла въ любой точкѣ, такъ и время, въ теченіе котораго оно приходитъ въ какое-либо мѣсто и обратно.

Изъ какой-либо заданной точки A прямой $ADEC$ падаетъ тѣло E. Изъ всякой точки E его пути возставляется перпендикуляръ EG (фиг. 82), по коему откладывается длина EG пропорціональная величинѣ центростремительной силы, дѣйствующей въ этой точкѣ E и направленной къ центру C, пусть кривая BFG проходитъ черезъ мѣста точекъ G, причемъ въ началѣ движенія EG совпадаетъ съ перпендикуляромъ AB, тогда скорость въ какой-угодно точкѣ E будетъ пропорціональна сторонѣ квадрата равномѣрнаго съ криволинейною площадью $ABGE$.

Беря на прямой EG длину EM обратно пропорціональную сторонѣ сказаннаго квадрата строится кривая, на которой постоянно лежитъ точка M. Эта кривая будетъ имѣть прямую AB своею ассимптотою. Время въ теченіи котораго падающее тѣло проходитъ путь AE будетъ пропорціонально площади $ABTVME$.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на прямой AE какую-нибудь весьма малую длину DE постоянной величины, и пусть DLF есть положеніе прямой EMG, когда тѣло проходитъ черезъ D; если центростремительная сила такова, что сторона квадрата равномѣрнаго площади $ABGE$ пропорціональна скорости падающаго тѣла, то сама эта площадь будетъ пропорціональна квадрату скорости, т.-е. если скорость въ точкахъ D и E обозначить соотвѣтственно черезъ V и $V+J$, то площадь $ABFD$ будетъ пропорціональна V^2, площадь же $ABGE$ будетъ пропорціональна $V^2+2JV+J^2$, и, слѣдовательно, разность этихъ площадей $DFGE$ пропорціональна $2VJ+J^2$ и длина $\frac{DFGE}{DE}$ пропорціональна $\frac{2VJ+J^2}{DE}$, т.-е. разсматривая предѣльныя отношенія зарождающихся количествъ—длина DF пропорціональна $\frac{2V \cdot J}{DE}$, а значитъ и половинѣ этой величины, т.-е. $\frac{V \cdot J}{DE}$. Но время въ теченіе котораго тѣло при своемъ паденіи описываетъ отрѣзокъ DE прямо пропорціонально его длинѣ и обратно прпорціонально скорости, вмѣстѣ съ тѣмъ сила прямо пропорціональна приращенію скорости J и обратно пропорціональна времени, т.-е. если брать лишь предѣльныя отношенія зарождающихся количествъ, то сила пропорціональна $J \cdot \frac{V}{DE}$, т.-е. длинѣ DF. Слѣдовательно, сила пропорціональная длинѣ DF или DG заставляетъ тѣло падать со скоростью пропорціональной сторонѣ квадрата равномѣрнаго съ площадью $ABGE$.

Далѣе, такъ какъ время, въ продолженіе котораго описывается весьма малый отрѣзочекъ DE постоянной длины, обратно пропорціонально скорости, т.-е. обратно пропорціонально сторонѣ квадрата равномѣрнаго съ $ABFD$, то пусть DL, а значитъ и зарождающаяся площадь $DLME$, обратно пропорціональна сказанной сторонѣ, тогда промежутокъ времени на описаніе отрѣзочка DE будетъ пропорціоналенъ площадкѣ $DLME$, слѣдовательно, сумма всѣхъ такихъ промежутковъ, т.-е. полное время паденія отъ A до E пропорціонально [91]) суммѣ всѣхъ площадокъ, т.-е. полной площади $ATVME$ (лем. IV).

Слѣдствіе 1. Если P есть то мѣсто, изъ котораго тѣло должно начать падать, чтобы, находясь подъ дѣйствіемъ постоянной и извѣстной центростремительной силы (за которую обыкновенно принимаютъ силу тяжести), пріобрѣсть, придя въ точку D скорость равную скорости въ той же точкѣ другого тѣла падающаго какъ бы то ни было, надо взять по перендикуляру DF длину DR такъ относящуюся къ DF какъ сказанная постоянная сила относится къ перемѣнной, дѣйствующей въ точкѣ D и дополнить прямоугольникъ $PDRQ$; отрѣзавъ площадь $ABFD$ равную площади этого прямоугольника и получимъ въ A то мѣсто, изъ котораго тѣло должно начать падать. Ибо если дополнить прямоугольникъ $DRSE$, то такъ какъ площадь $ABFD$ относится къ площади $DFGE$ какъ V^2 къ $2VJ$, т.-е. какъ $\frac{1}{2}V$ къ J, т.-е. какъ половина полной скорости къ ея приращенію при паденіи тѣла подъ дѣйствіемъ перемѣнной силы, такъ и площадь $PQRD$ относится къ площади $DRSE$ какъ половина полной скорости къ приращенію ея при движеніи тѣла подъ дѣйствіемъ постоянной силы. Но эти приращенія (по равенству весьма малыхъ промежутковъ времени въ продолженіи коихъ они происходятъ), пропорціональны дѣйствующимъ силамъ ихъ производящимъ, т.-е. ординатамъ DF и DR, слѣдовательно, пропорціональны и безконечно-малымъ площадкамъ $DFGE$ и $DRSE$, поэтому и полныя площади $ABFD$ и $PQRD$ будутъ относиться какъ половины полныхъ скоростей, и, слѣдовательно, по равенству скоростей эти площади между собою равны.

---

[91]) Это предложеніе заключаетъ законъ живыхъ силъ для прямолинейнаго движенія. Необходимо также обратить вниманіе на представленіе работы площадью діаграммы, а также на выраженіе «сила пропорціональна $\frac{J.V}{DE}$» здѣсь J есть приращеніе скорости въ продолженіе безконечно малаго промежутка времени, DE путь пройденный въ этотъ промежутокъ, т.-е. при теперешнихъ обозначеніяхъ:

$$J = dV, \quad DE = dx = Vdt, \quad \frac{JV}{DE} = \frac{V.dV}{dx} = \frac{dV}{dt},$$

т.-е. при Ньютоновой терминологіи сила пропорціональна флюксіи скорости, но Ньютонъ нигдѣ не вводитъ понятія и термина «ускореніе» въ теперешнемъ его смыслѣ, а всегда разсматриваетъ безконечно малое приращеніе скорости, которое часто называетъ accelerátio.

Слѣдствіе 2. Если тѣло изъ какой-либо точки D бросается съ заданной скоростью вверхъ или внизъ и задается законъ центростремительной силы, то скорость этого тѣла любой точкѣ e опредѣляется проведя ординату eg и взявъ эту скорость въ такомъ отношеніи къ скорости въ точкѣ D въ какомъ сторона квадрата равномѣрнаго съ площадью прямоугольника $PQRD$, увеличенною или уменьшенною на площадь $DFge$, смотря по тому, мѣсто e ниже или выше D, находится къ сторонѣ квадрата равномѣрнаго просто съ прямоугольникомъ $PQRD$.

Слѣдствіе 3. Соотвѣтствующее время найдется проводя ординату em обратно пропорціональную сторонѣ квадрата равномѣрнаго съ площадью $PQRD \pm DFge$, и беря искомое время, въ теченіе котораго тѣло пройдетъ путь De въ такомъ отношеніи ко времени паденія другого тѣла движущагося подъ дѣйствіемъ постоянной силы, изъ точки P въ точку D, въ какомъ криволинейная площадь $DLme$ находится къ площади прямоугольника $2PD \cdot DL$.

Ибо время паденія тѣла подъ дѣйствіемъ постоянной силы изъ точки P въ точку D такъ относится ко времени паденія изъ P въ E какъ $\sqrt{PD} : \sqrt{PE}$, т.-е. (при безконечно малой величинѣ отрѣзочка DE) въ отношеніи PD къ $PD + \frac{1}{2}DE$ или $2PD$ къ $2PD + DE$ или взявъ разностную пропорцію, увидимъ, что это время такъ относится ко времени описанія отрѣзочка DE какъ $2PD$ относится къ DE или какъ прямоугольникъ $2PD \cdot DL$ относится къ площади $DLME$. Вмѣстѣ съ тѣмъ время, въ продолженіе коего второе тѣло проходитъ путь DE, такъ относится ко времени, въ теченіи коего подъ дѣйствіемъ перемѣнной силы оно проходитъ путь De, какъ площадь $DLME$ къ площади $DLme$, слѣдовательно, первое время относится ко второму какъ площадь $2PD \cdot DL$ къ площади $DLme$.

ОТДѢЛЪ VIII.

О нахожденіи орбитъ, по которымъ обращаются тѣла подъ дѣйствіемъ какихъ-угодно центростремительныхъ силъ.

Предложеніе XL. Теорема XIII.

Если тѣло подъ дѣйствіемъ какой-угодно центростремительной силы движется какъ бы то ни было, другое же тѣло движется прямолинейно, прямо къ центру или отъ центра, и скорости обоихъ тѣлъ въ нѣкоторомъ ихъ положеніи, въ которомъ они равно удалены отъ центра силъ, равны, то эти скорости будутъ равны и во всякихъ другихъ положеніяхъ обоихъ тѣлъ, равно удаленныхъ отъ центра.

Пусть одно тѣло движется изъ точки A (фиг. 83) къ центру C по прямой линіи, другое же изъ точки V по какой-либо кривой $VJKk$. Опишемъ изъ точки C произвольными радіусами CD и CE два концентрическихъ круга DJ и KE, пересѣкающихъ прямую AC въ точкахъ D и E, кривую же въ точкахъ J и K. Проведемъ CJ и пусть N есть точка пересѣченія CJ къ EK, опустимъ изъ этой точки нормаль NT. Положимъ теперь, что разность радіусовъ CD и CE, т.-е. ED или JN весьма мала и что скорости обоихъ тѣлъ, когда одно изъ нихъ въ D, другое въ J равны. Такъ какъ разстояніе $CD = CJ$, то и центростремительныя силы въ точкахъ D и J равны. Представимъ эти силы равными отрѣзочками DE и JN. Силу JN разложимъ (сл. 2 зак.) на двѣ NT и JT. Сила NT, дѣйствуя перпендикулярно пути JTK тѣла, не будетъ измѣнять величины скорости тѣла, а будетъ лишь уклонять его отъ прямолинейнаго пути и заставлять, непрерывно отступая отъ касательной къ орбитѣ, описывать криволинейный путь $JTKk$. Вся эта сила и поглощается на производство этого дѣйствія. Вторая же сила JT, дѣйствующая по направленію движенія тѣла, будетъ цѣликомъ его ускорять и въ теченіе заданнаго, весьма малаго, промежутка времени произведетъ приращеніе [92]) скорости пропорціональное своей величинѣ, поэтому приращеніе скорости тѣлъ въ точкахъ D и J происходящія въ продолженіе равныхъ, весьма малыхъ, промежутковъ времени будутъ пропорціональны длинамъ DE и JT (при этомъ предполагается, что берутся лишь начальныя предѣльныя отношенія длинъ DE, JN, JK, JT, NT), при неравныхъ же промежуткахъ времени приращенія скорости будутъ пропорціональны этимъ длинамъ и самымъ промежуткамъ времени. Но промежутки времени, въ продолженіе которыхъ проходятся пути DE и JK по равенству скоростей пропорціональны пройденнымъ путямъ DE и JK, слѣдовательно приращенія скорости при пробѣгѣ тѣломъ длинъ DE и JK, относятся между собою какъ произведенія $DE^2 : JT . JK$. Произведеніе же $JT . JK = JN^2 = DE^2$, слѣдовательно, происходящія при переходѣ тѣлъ отъ D до J и отъ E до K приращенія скорости равны, значитъ и скорости въ точкахъ E и K будутъ равны. Разсуждая такимъ же образомъ, убѣдимся, что эти скорости окажутся равными и для всѣхъ послѣдующихъ положеній тѣлъ, равноотстоящихъ отъ центра.

Совершенно также тѣла, обладающія равными скоростями и движущіяся отъ центра, будутъ при равныхъ разстояніяхъ одинаково замедляться и скорости ихъ будутъ оставаться равными.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если одно тѣло качается, будучи подвѣшено на нити или же вынуждается какимъ-нибудь совершенно гладкимъ и скользкимъ препятствіемъ двигаться по кривой линіи, другое же тѣло движется свободно, приближаясь или удаляясь отъ центра по прямой линіи, и скорости обоихъ тѣлъ въ какомъ-либо одинаковомъ разстояніи ихъ отъ центра

---

[92]) Въ текстѣ «Началъ» вездѣ приращенія скорости называются «ускореніями» — acceleratio, но чтобы точно передать смыслъ, пришлось слово «ускореніе», какъ имѣющее теперь совершенно иное значеніе, замѣнить современнымъ терминомъ «приращеніе скорости».

равны, то эти скорости останутся между собою равными и на любыхъ равныхъ разстояніяхъ. Ибо натяженіе нити или упоръ абсолютно скользкаго препятствія оказываютъ то же самое дѣйствіе, какъ и поперечная слагающая сила NT—тѣло отъ этого дѣйствія не ускоряется и не замедляется, а лишь побуждается уклоняться отъ прямолинейнаго пути.

Слѣдствіе 2. Пусть P есть наибольшее разстояніе отъ центра, на которое можетъ удаляться качающееся или обращающееся по какой-либо траекторіи тѣло, если бы его въ какой-либо ея точкѣ подбросить прямо отъ центра съ тою скоростью, которою оно въ этой точкѣ обладаетъ, пусть A есть разстояніе какой-либо другой точки орбиты, и пусть центростремительная сила пропорціональна какой-либо степени A^{n-1}, коей показатель $n-1$ есть любое число n, уменьшенное на 1, то при всякомъ разстояніи A скорость тѣла будетъ пропорціональна $\sqrt{P^n - A^n}$, ибо скорость прямолинейнаго движенія къ центру или отъ центра пропорціональна этой величинѣ, какъ показано въ предложеніи XXXIX [93]).

Предложеніе XLI. Задача XXVIII.

Предполагая центростремительную силу какою-угодно и допуская квадратуру кривыхъ, требуется найти какъ траекторію, по которой будетъ двигаться тѣло, такъ и законъ его движенія по найденной траекторіи.

Пусть какая-либо сила направлена къ центру C (фиг. 84) и требуется найти траекторію $VJKk$.

Точкою C какъ центромъ и начальнымъ радіусомъ CV описывается кругъ RV, тѣмъ же центромъ и двумя какими-либо произвольными радіусами JD и KE описываются круги, пересѣкающіе траекторію въ точкахъ

---

[93]) Въ этой теоремѣ законъ живыхъ силъ распространенъ на любое движеніе подъ дѣйствіемъ центральной силы, и въ слѣдствіи 2-омъ дается и алгебраическое выраженіе этого закона для случая притяженія пропорціональнаго $(n-1)^{ой}$ степени разстоянія, причемъ n можетъ быть *какое-угодно*. Въ самомъ дѣлѣ, при современныхъ обозначеніяхъ, имѣемъ

$$v^2 = -\frac{2\mu^2}{n} r^n + h,$$

гдѣ h произвольная постоянная. Ньютонъ ее опредѣляетъ изъ условія, что при разстояніи $r = r_0$ скорость $v = 0$, значитъ будетъ

$$v^2 = \frac{2\mu^2}{n}\left(r^n{}_0 - r^n\right)$$

или дѣлая принятыя въ текстѣ обозначенія $r_0 = P$, $r = A$, и, замѣчая, что $\sqrt{\frac{2}{n}}\mu$ есть постоянный коэффиціентъ, получимъ, что скорость v пропорціональна $\sqrt{P^n - A^n}$.

J и K, прямую же CV въ точкахъ D и E. Проведи прямую $CNJX$, пересѣкающую круги KE, VR, въ N и X, а также прямую CKY, пересѣкающую кругъ RV въ Y. Пусть точки J и K весьма близки другъ къ другу и пусть тѣло переходитъ изъ V черезъ J и K въ k. Возьмемъ точку A такъ, что если тѣло начало бы изъ нея падать къ центру, то придя въ D, оно обладало бы такою же скоростью, какою обладаетъ движущееся по орбитѣ тѣло въ J. Сохраняя обозначенія предл. XXXIX, получимъ, что отрѣзочекъ JK, проходимый въ продолженіе постояннаго, весьма малаго, промежутка времени пропорціоналенъ скорости, а, слѣдовательно, сторонѣ квадрата, равномѣрнаго съ площадью $ABFD$. Площадь треугольника JCK пропорціональна тому же промежутку времени, слѣдовательно KN обратно пропорціально разстоянію CJ, т.-е. если взять какую-либо постоянную величину Q и обозначить длину CJ черезъ A, то KN будетъ пропорціонально $\frac{Q}{A}$. Обозначимъ это количество черезъ Z и положимъ, что величина Q выбрана такъ, что при какомъ-нибудь одномъ положеніи тѣла

$$\sqrt{ABFD} : Z = JK : KN$$

то и при всякомъ его положеніи будетъ

$$\sqrt{ABFD} : Z = JK : KN$$

и, значитъ

$$ABFD : Z^2 = JK^2 : KN^2$$

отсюда

$$(ABFD - Z^2) : Z^2 = JN^2 : KN^2$$

слѣдовательно,

$$\sqrt{ABFD - Z^2} : Z = JN : KN$$

и, такъ какъ

$$Z = \frac{Q}{A},$$

то будетъ:

$$A \, . \, KN = \frac{Q \, . \, JN}{\sqrt{ABFD - Z^2}}$$

Но такъ какъ

$$YX \, . \, XC : A \, . \, KN = CX^2 : A^2$$

то

$$YX \, . \, XC = \frac{Q \, . \, JN \, . \, CX^2}{A^2 \sqrt{ABFD - Z^2}}.$$

Слѣдовательно, если по перпендикуляру DF откладывать длины Db и Dc, соотвѣтственно равныя

$$\frac{Q}{2\sqrt{ABFD - Z^2}}$$

и

$$\frac{Q \cdot CX^2}{2A^2\sqrt{ABFD - Z^2}}$$

и провести кривая ab и ac, на которыхъ постоянно лежатъ точки b и c, затѣмъ изъ точки V возставить къ прямой AC перпендикуляръ Va, ограничивающій криволинейныя площади $VDba$, $VDca$ и провести ординаты Ez и Ex, то такъ какъ

$$Db \,.\, JN = DczE = \frac{1}{2} \; A \,.\, KN = JKC$$

$$Dc \,.\, JN = DexE = \frac{1}{2} YX \,.\, XC = XCY,$$

т.-е. что безконечно малыя приращенія площадей $VDba$ и VJC, а именно $DbzE$ и JCK, и приращенія площадей $VDca$ и VCX, а именно $DcxE$ и XCY соотвѣтственно равны, то и самыя эти площади равны, т.-е. будетъ

$$VDba = VJC \quad \text{и} \quad VDca = VCX$$

а такъ какъ площадь VJC пропорціональна времени, то и $VDba$ будетъ пропорціональна времени. Слѣдовательно, если задать время, протекшее послѣ прохожденія тѣла черезъ точку V, то будетъ извѣстна и пропорціональная ему площадь $VDba$, слѣдовательно найдется разстояніе CD или CJ тѣла до центра, а также и площадь $VDca$ или равный ей секторъ VCX, или, что тоже, соотвѣтствующій ему уголъ VCJ. Когда же извѣстны уголъ VCJ и разстояніе CJ, то извѣстно и мѣсто J, въ которомъ тѣло находится въ разсматриваемый моментъ времени [94]).

Слѣдствіе 1. На основаніи вышеизложеннаго можно находить весьма просто наибольшія и наименьшія удаленія тѣла отъ центра, т.-е. вершины (апсиды) его орбиты. Въ самомъ дѣлѣ вершины суть тѣ точки, въ которыхъ проходящая черезъ центръ прямая нормальна къ траекторіи VJK,

---

[94]) Въ этой задачѣ дается общій способъ опредѣленія движенія тѣла подъ дѣйствіемъ центральной силы, причемъ этотъ способъ лишь съ внѣшней стороны и обозначеніями отличается отъ теперешняго.

Въ самомъ дѣлѣ, будемъ пользоваться обычными теперь обозначеніями, пусть $CJ = r$ и уголъ $VCJ = \theta$, начальное разстояніе $CV = r_0$ и начальная скорость v_0, притягательная сила $\mu^2 f(r)$, тогда по закону живыхъ силъ будетъ

$$v^2 = v_0^2 + 2\mu^2 \int_{r_0}^{r} f(r)dr \quad . \; . \; , \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Ньютонъ беретъ разстояніе $CA = a$ такъ, чтобы было

$$v_0^2 = 2\mu^2 \int_{a}^{r_0} f(r)dr$$

а это будетъ тамъ, гдѣ прямыя JK и JN между собою равны, слѣдовательно, тамъ, гдѣ площадь $ABFD$ равна Z^2.

Слѣдствіе 2. Легко находится также и уголъ KJN, подъ которымъ траекторія пересѣкается, въ любомъ мѣстѣ, съ прямою JC, по извѣстному разстоянію JC, стоитъ только взять синусъ этого угла, равнымъ отношенію

и поэтому будетъ

$$v^2 = 2\mu^2 \int_a^r f(r)dr = \omega(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

т.-е. v^2 пропорціонально площади $ABFD$.

Съ другой стороны по закону площадей будетъ

$$r^2 d\theta = cdt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

или

$$rd\theta = \frac{c}{r} \,.\, dt \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3')$$

но величина $rd\theta = KN$ и, слѣдовательно, равенство $Z = \frac{Q}{A}$ при нашихъ обозначеніяхъ равносильно равенству

$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r} = Z.$$

При теперешнихъ обозначеніяхъ пишутъ

$$v^2 dt^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = \omega(r) dt^2$$

и исключая dt на основаніи равенства (3), выражающаго законъ площадей, получаютъ:

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4} = \left[\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}\right] d\theta^2,$$

откуда

$$d\theta = \frac{c}{r^2} \,.\, \frac{dr}{\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

и затѣмъ

$$r^2 d\theta = cdt = \frac{cdr}{\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}}$$

т.-е.

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\omega(r) - \frac{c^2}{r^2}}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Равенство (4) и написано у Ньютона такъ:

$$XY \,.\, XC = \frac{Q \,.\, JN \,.\, CX^2}{A^2\sqrt{ABFD - Z^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Въ самомъ дѣлѣ:

KN къ JK, т.-е. отношенію Z къ сторонѣ квадрата равномѣрнаго съ площадью $ABFD$.

Слѣдствіе 3. Если принявъ точку C (фиг. 85) за центръ и точку V за главную вершину, описать какое-либо коническое сѣченіе VRS и въ какой-либо его точкѣ R провести къ нему касательную, пересѣкающую продолженіе оси въ точкѣ T и, соединивъ CR, провести прямую CP такъ, чтобы было $CP=CT$, и чтобы уголъ VCP былъ пропорціоналенъ сектору VCR, то если къ центру направлена сила обратно пропорціональная кубу разстояній и тѣло выходитъ изъ точки V со скоростью, направленной по прямой перпендикулярной CV, то это тѣло будетъ двигаться по траекторіи VPQ, представляющей геометрическое мѣсто точекъ P. Поэтому, если коническое сѣченіе гипербола, то тѣло приближается къ центру, если эллипсъ, то удаляется и уходитъ въ безконечность. Наоборотъ, если тѣло выходитъ изъ точки V съ какою бы то ни было скоростью, то, сообразно тому, начинаетъ ли оно наискосокъ удаляться отъ центра или приближаться къ центру, фигура VRS будетъ или эллипсъ или гипербола, и траекторія можетъ быть найдена, увеличивая или уменьшая уголъ VCP въ нѣкоторомъ заданномъ отношеніи. При измѣненіи силы изъ центростремительной въ центробѣжную, тѣло будетъ косвенно удаляться отъ центра по траекторіи VPQ, которая получится, беря уголъ VCP пропорціонально эллиптическому сектору VRC, длину же CP, равною длинѣ CT какъ и раньше. Все это слѣдуетъ изъ предыдущаго предложенія и можетъ быть найдено при помощи квадратуры нѣкоторой кривой, которую въ виду достаточной ея легкости я для краткости опускаю [95]).

$$XY=XC\,.\,d\theta,\quad JN=dr,\quad Q=c,\quad \frac{c}{r}=Z$$

и

$$ABFD=2\mu^2\int_a^r f(r)dr=\omega(r)$$

ясно, что формулы (4) и (6) отличаются лишь обозначеніями.

Вмѣсто формулы (5) Ньютонъ беретъ формулу

$$\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}cdt=\frac{cdr}{2\sqrt{\omega(r)-\frac{c^2}{r^2}}}\quad\ldots\ldots\quad(7)$$

выражающую пропорціональность площади сектора VJC времени. Понятно, что знаки интеграловъ у Ньютона замѣнены площадями соотвѣтствующихъ кривыхъ.

[95]) Такъ какъ въ этомъ случаѣ будетъ

$$\omega(r)=\pm\mu^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a^2}\right)$$

сообразно тому, притягательная или отталкивательная сила, то квадратуры упоминаемыя въ этомъ слѣдствіи, выражаемыя формулами (4) и (5) прим. 94,

Предложенie XLII. Задача XXIX.

При заданномъ законѣ центростремительной силы требуется опредѣлить движенiе тѣла, выходящаго изъ заданнаго мѣста съ заданною по величинѣ и направленiю скоростью.

Сохраняя все такъ, какъ въ предыдущихъ трехъ предложенiяхъ, положимъ, что тѣло выходитъ изъ заданнаго мѣста J (фиг. 86), по направленiю отрѣзочка JK съ такою скоростью, которую другое тѣло падая подъ дѣйствiемъ постоянной центростремительной силы изъ точки P, прiобрѣло бы придя въ D, и пусть эта постоянная сила такъ относится къ силѣ дѣйствующей на первое тѣло въ точкѣ J, какъ DR къ DF. Пусть тѣло пришло

легко выполняются. Необходимо при этомъ замѣтить, что въ таблицѣ формулъ, приложенныхъ къ сочиненiю Ньютона «De quadratura curvarum» находятся всѣ типичные интегралы простѣйшихъ алгебраическихъ функцiй, выражающiеся въ конечномъ видѣ, и показаны способы разложенiя въ ряды для не выражающихся въ конечномъ видѣ.

Движенiе тѣла надъ дѣйствiемъ силы, обратно пропорцiональной кубу разстоянiя подробно изслѣдовано Котесомъ въ его «Harmonia Mensurarum».

Но чтобы получить эти результаты проще, можно воспользоваться формулою

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2}\left\{\frac{1}{r} + \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2}\right\}$$

приведенной въ прим. 42.

Полагая $\frac{1}{r} = \sigma$ и обозначая коеффицiентъ притяженiя черезъ μ^2 будемъ имѣть уравненiе

$$c^2\sigma + c^2\sigma'' = \mu^2\sigma$$

иначе

$$\sigma'' + \frac{c^2 - \mu^2}{c^2}\sigma = 0,$$

откуда слѣдуетъ

(1) $\sigma = \frac{1}{r} C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta$ если $c^2 - \mu^2 > 0$ и $c^2 - \mu^2 = n^2c^2$

(2) $\sigma = \frac{1}{r} C_1 e^{k\theta} + C_2 e^{-k\theta}$ если $c^2 - \mu^2 < 0$ и $\mu^2 - c^2 = k^2c^2$,

причемъ постоянныя произвольныя опредѣляются по начальнымъ условiямъ, въ подробное разсмотрѣнiе чего входить не будемъ.

Нетрудно видѣть, что траекторiя, указываемая въ текстѣ, относится къ этимъ типамъ. Въ самомъ дѣлѣ, для случая эллипса вообразимъ, что изъ центра C радiусомъ CV описанъ кругъ и пусть точкѣ R эллипса на этомъ кругѣ соотвѣтствуетъ точка R_1, тогда площади эллиптическаго и кругового секторовъ VCR и VCR_1 будутъ находиться въ постоянномъ отношенiи, значитъ и уголъ $VCP = \theta$ будетъ находиться въ постоянномъ въ точку k. Точкою C какъ центромъ и радіусомъ Ck, опишемъ кругъ ke, пересѣкающій прямую PD въ e и проведемъ ординаты eg, ev, ew кривыхъ BFg, abv, acw. По заданнымъ прямоугольнику $PDRQ$ и закону центростремительной силы дѣйствующей на первое тѣло найдется кривая BFg, по построенію задачи XXVII и по ея слѣдствію 1. Затѣмъ, по заданному углу CJK будетъ извѣстно начальное отношеніе безконечно малыхъ JK и KN, слѣдовательно, по построенію задачи XXVIII найдется количество Q, а значитъ и кривыя abv и acw, слѣдовательно, по истеченіи какого-либо заданнаго времени $Dbve$, найдется какъ разстояніе тѣла Ce или Ck, такъ и площадь $Dcwe$, равная площади сектора XCy, значитъ найдется и уголъ JCk, т.-е. и то мѣсто k, въ которое тѣло пришло [96]).

Во всѣхъ этихъ предложеніяхъ предполагается, что центростремительная сила измѣняется при удаленіи отъ центра по любому закону, какой кому угодно будетъ вообразить, но при одинаковыхъ отъ центра разстояніяхъ она должна быть вездѣ одна и та же [97]).

отношеніи къ углу $VCR_1 = \omega$; пусть будетъ $\omega = n\theta$. Очевидно, что подкасательная CT для круга и эллипса одна и та же:

$$CI = \frac{CV}{\cos\omega},$$

полагая

$$CV = a$$

получаемъ уравненіе траекторіи

$$r = \frac{a}{\cos n\theta},$$

заключающееся въ форм. (1) при

$$C_1 = a \quad \text{и} \quad C_2 = 0.$$

Точно также для гиперболы увидимъ, что траекторіи, даваемыя построеніемъ Ньютона, заключаются въ форм. (2).

Траекторію форм. (1) Ньютонъ даетъ еще и въ сл. 6, предложенія XLIV, указывая и болѣе простое и очевидное построеніе формулы

$$r = \frac{a}{\cos n\theta} = \frac{a}{\cos\omega}.$$

[96]) Въ этой теоремѣ выясняется главнымъ образомъ какъ опредѣляется величина μ^2, въ выраженіи притягательной силы и постоянная площадей c, что необходимо для примѣненія формулъ предыдущей задачи, чтобы отъ пропорцій перейти къ уравненіямъ, въ которыхъ «коэффиценты пропорціональности» извѣстны.

[97]) Этою оговоркою устанавливается, что законъ живыхъ силъ примѣнимъ лишь для силъ «центральныхъ», какъ ихъ называютъ теперь, т.-е. зависящихъ только отъ разстоянія до центра.

Однако, до сихъ поръ движенiе тѣлъ по неподвижнымъ орбитамъ разсмотрѣно достаточно, остается еще немного кое-чего добавить о движенiи тѣлъ по орбитамъ, обращающимся около центра силъ.

ОТДѢЛЪ IX.

О движенiи тѣлъ по подвижнымъ орбитамъ и о перемѣщенiи апсидъ.

Предложенiе XLIII. Задача XXX.

Требуется заставить тѣло двигаться по заданной вращающейся около центра силъ траекторiи одинаково съ другимъ тѣломъ движущимся по такой же покоющейся траекторiи.

Пусть по заданной неподвижной орбитѣ VPK (фиг. 87), обращается тѣло P, двигаясь отъ V къ K. Изъ центра C проводится прямая Cp равная CP, такъ, чтобы уголъ VCp ею составляемый съ прямою CV былъ постоянно пропорцiоналенъ углу VCP, тогда площадь описываемая прямою Cp будетъ такъ относиться къ площади VCP описываемой одновременно съ нею прямою CP, какъ угловая скорость описывающей прямой Cp къ скорости прямой CP, т.-е. какъ уголъ VCp къ углу VCP, т.-е. будетъ въ постоянномъ отношенiи къ этой послѣдней, слѣдовательно, площадь VCp будетъ пропорцiональна времени.

Такимъ образомъ, площадь описываемая прямою Cp на неподвижной плоскости пропорцiональна времени, слѣдовательно, тѣло при дѣйствiи надлежащей центростремительной силы, можетъ двигаться такъ, чтобы постоянно совпадать съ точкою p, описывая на неподвижной плоскости по вышеприведенному закону ту же кривую какъ и эта точка.

Пусть уголъ VCu равенъ углу PCp и длина Cu равна длинѣ CV, тогда фигура uCp будетъ равна фигурѣ VCP и тѣло находящееся постоянно въ p будетъ двигаться по вращающейся кривой uCp и опишетъ на ней дугу up въ то же самое время, въ какое другое тѣло P описываетъ равную и подобную дугу на неподвижной кривой VPK.

Поэтому стоитъ только опредѣлить (VI, 5) центростремительную силу, подъ дѣйствiемъ которой, тѣло могло бы описывать на неподвижной плоскости ту кривую, которую описываетъ на ней точка p и задача будетъ рѣшена.

Предложенiе XLIV. Теорема XIV.

Разность силъ, заставляющихъ двигаться одно тѣло по неподвижной орбитѣ, другое по такой же орбитѣ но равномѣрно вращающейся *обратно пропорціональна третьей степени разстоянія этихъ тѣлъ до центра.*

Пусть части up и pk (фиг. 88 а), вращающейся орбиты соотвѣтственно подобны и равны частямъ VP, PK орбиты неподвижной, причемъ разстояніе PK точекъ P и K предполагается весьма малымъ. Изъ точки k опускается на прямую pC перпендикуляръ kr и продолжается до точки m такъ, чтобы было

$$mr : kr = \angle VCp : \angle VCP.$$

Такъ какъ постоянно разстоянія $PC = pC$ и $KC = kC$, то и приращенія длинъ PC и pC будутъ постоянно между собою равны, поэтому, если движеніе тѣлъ P и p разложить (сл. 2, зак.), на два изъ которыхъ одно направлено къ центру, т.-е. по прямымъ PC и pC, другое же къ этимъ линіямъ, соотвѣтственно перпендикулярно, то перемѣщенія по направленію къ центру будутъ между собою равны, перпендикулярныя же перемѣщенія будутъ относиться другъ къ другу какъ угловыя перемѣщенія прямыхъ Cp и CP, т.-е. какъ углы VCp и VCP, поэтому въ продолженіе того времени, въ которое тѣло вслѣдствіе обоихъ своихъ движеній переходитъ въ точку K, тѣло p, сдѣлавъ равное перемѣщеніе по направленію къ центру C, придетъ къ концу того же промежутка времени куда-нибудь на прямую mkr, проходящую черезъ k и перпендикулярную къ pC, вслѣдствіе же поперечнаго перемѣщенія удалится отъ прямой pC на величину, которая такъ относится къ поперечному перемѣщенію тѣла P, какъ поперечныя скорости этихъ тѣлъ, а такъ какъ поперечное перемѣщеніе тѣла P есть kr, то поперечное перемѣщеніе mr тѣла p опредѣлится пропорціей

$$mr : kr = \angle VCp : \angle VCP.$$

Слѣдовательно, по прошествіи сказаннаго промежутка времени тѣло p оказалось бы въ точкѣ m. Такъ оно бы и было если бы тѣла P и p двигались одинаково по прямымъ pC и PC, т.-е. находились бы подъ дѣйствіемъ равныхъ силъ направленныхъ по этимъ прямымъ. Но если взять уголъ pCn такъ, чтобы было:

$$\angle pCn : \angle pCk = \angle VCp : \angle VCP$$

и

$$nC = nK,$$

то въ точкѣ n получится то истинное мѣсто тѣла p, куда оно на самомъ дѣлѣ приходитъ. Отсюда видно, что если уголъ pCn больше угла pCk, т.-е. когда орбита upk вращается въ ту же сторону какъ и радіусъ PC или въ сторону обратную, но со скоростью болѣе нежели въ два раза превосходящею скорость радіуса CP, то тѣло p находится подъ дѣйствіемъ силы *большей* нежели тѣло P и—подъ дѣйствіемъ силы меньшей нежели тѣло P, когда орбита вращается въ сторону обратную со скоростью меньшею, нежели удвоенная скорость радіуса CP. Разность силъ пропорціональна тому разстоянію mn между тѣми мѣстами тѣла p, на которое оно въ продолженіе заданнаго промежутка времени перемѣщается подъ дѣйствіемъ силы.

Центромъ C и радіусомъ Cn или Ck описывается кругъ пересѣкающій продолженія прямыхъ mr и nm въ точкахъ s и t, тогда будетъ:

$$mn : mk = ms : mt,$$

слѣдовательно,

$$mn = \frac{mk \,.\, ms}{mt},$$

такъ какъ при постоянной величинѣ промежутка времени площади pCk и pCn также постоянны, то длины kr и mr, а также и ихъ разность и сумма обратно пропорціональны разстоянію pC, слѣдовательно, произведеніе $mk \,.\, ms$ обратно пропорціонально квадрату разстоянія pC. Но mt пропорціонально $\frac{1}{2}\, mt$, т.-е. разстоянію pC, слѣдовательно, величина $\frac{mk \,.\, ms}{mt}$, т.-е. отрѣзочекъ mn обратно пропорціональна кубу разстоянія pC. Всѣ эти отношенія суть предѣльныя, поэтому и пропорціональная величинѣ mn разность силъ обратно пропорціональна кубу [98]) разстоянія pC.

---

[98]) Обозначая черезъ τ безконечно-малый промежутокъ времени и черезъ φ ускореніе той силы, отъ дѣйствія которой происходитъ отклоненіе mn будемъ имѣть

$$mn = \frac{1}{2}\,\varphi \,.\, \tau^2,$$

пусть для площадей VCp и VCP соотвѣтствующія постоянныя суть c_1 и c и разстояніе $Cp = CP = A$, тогда будетъ

$$kr = \frac{c_1\tau}{A}; \quad mr = \frac{c\tau}{A}; \quad mt = 2pC = 2A.$$

Затѣмъ:

$$ms = kr + mr = \frac{(c_1 + c)\tau}{A}; \quad mk = mr - rk = \frac{(c_1 - c)}{A}\,\tau,$$

слѣдовательно,

$$mn = \frac{1}{2}\,\varphi\tau^2 = \frac{c_1^{\,2} - c^2}{2A^3} \,.\, \tau^2.$$

Ньютонъ полагаетъ

$$c_1 : c = G : F, \text{ т.-е. } c_1 = c \,.\, \frac{G}{F}$$

на основаніи этого будетъ

$$\varphi = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \cdot \frac{c^2}{A^3} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

причемъ c есть постоянная площадей для *неподвижной* орбиты.

Величинѣ $\frac{c^2}{A^3}$ въ сл. 1 придается механическое толкованіе, именно, *Слѣдствіе 1.* Разность силъ въ точкахъ P и p или въ точкахъ K и k такъ относится къ силѣ, подъ дѣйствіемъ которой тѣло могло бы обращаясь по кругу придти изъ R въ K въ то же самое время, въ которое двигаясь по неподвижной орбитѣ оно описываетъ дугу PK, какъ безконечно малый отрѣзочекъ mn относится къ синусъ верзусу безконечно малой дуги RK, т.-е. какъ

$$\frac{mk \cdot ms}{mt} : \frac{rk^2}{2Ck},$$

т.-е. въ предѣлѣ какъ $mk \cdot ms : rk^2$.

Слѣдовательно, если уголъ

$$VCP : Vcp = F : G,$$

то предыдущее отношеніе будетъ

$$(G^2 - F^2) : F^2.$$

Поэтому, если изъ центра C радіусомъ CP или Cp описать секторъ, равный площади VCP, описываемой радіусомъ CP, то разность силъ, дѣйствующихъ на тѣла P и p и заставляющихъ первое изъ нихъ описывать неподвижную орбиту, второе—подвижную, такъ относится къ такой центростремительной силѣ, подъ дѣйствіемъ которой любое изъ этихъ тѣлъ, двигаясь равномѣрно по кругу, описывало бы его радіусомъ въ одинаковое время секторъ, коего площадь равна площади VPC какъ $(G^2 - F^2) : F^2$, ибо сказанный секторъ и площадь pCk относятся другъ къ другу какъ времена описанія ихъ.

Слѣдствіе 2. Если орбита VPK есть эллипсъ, коего фокусъ C и дальняя вершина V, и берется равный и подобный ему эллипсъ upk такъ, чтобы было постоянно

$$pC = PC$$

и

$$\angle VCp : \angle VCP = G : F,$$

разстояніе же PC или pC обозначить черезъ A и параметръ эллипса че-

---

какъ такой силы подъ дѣйствіемъ которой тѣло можетъ двигаться по кругу равномѣрно причемъ постоянная площадей равна c; въ самомъ дѣлѣ для такого кругового движенія будетъ

$$\varphi_0 = \frac{V^2}{A} \text{ и } c = VA,$$

слѣдовательно,

$$\varphi_0 = \frac{c^2}{A^3}$$

и значитъ

$$\varphi = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \cdot \varphi_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

резъ $2R$, то сила, подъ дѣйствіемъ которой тѣло можетъ обращаться по подвижному эллипсу, будетъ пропорціональна количеству

$$\frac{F^2}{A^2}+(G^2-F^2)\cdot\frac{R}{A^2}$$

и наоборотъ [99]). Дѣйствительно, если силу, подъ дѣйствіемъ которой тѣло обращается по неподвижному эллипсу, выразить количествомъ $\frac{F^2}{A^2}$, тогда сила, дѣйствующая въ точкѣ V будетъ $\frac{F^2}{CV^2}$. Сила же, подъ дѣйствіемъ которой тѣло при разстояніи CV могло бы двигаться по кругу съ такою же скоростью, какую имѣетъ тѣло, движущееся по эллипсу въ вершинѣ V, такъ относится къ силѣ, дѣйствующей въ этой вершинѣ, какъ полупараметръ эллипса къ полудіаметру CV круга и, слѣдовательно, составитъ $F^2\cdot\frac{R}{CV^2}$, сила же, относящаяся къ ней какъ $(G^2-F^2):F^2$ составитъ $(G^2-F^2)\cdot\frac{R}{CV^3}$, но эта послѣдняя сила (по сл. 1) равна разности силъ, дѣйствующихъ въ точкѣ V на тѣло P, движущееся по неподвижному эллипсу VPK и на p, движущееся по подвижному эллипсу upk.

Но такъ какъ при разстояніи A эта разность относится къ таковой же при разстояніи CV какъ $\frac{1}{A^3}:\frac{1}{CV^3}$, то она составитъ $(G^2-F^2)\cdot\frac{R}{A^3}$ и приложится къ той силѣ $\frac{F^2}{A^2}$, подъ дѣйствіемъ которой тѣло обращается по неподвижному эллипсу, такъ что полная сила, которая можетъ заставить тѣло обращаться по подвижному эллипсу upk въ такое же время, какъ предыдущая по неподвижному составитъ:

$$\frac{F^2}{A^2}+(G^2-F^2)\cdot\frac{R}{A^3}.$$

---

[99]) Въ прим. 45 приведено выраженіе силы обратно пропорціональной квадрату разстояній, подъ дѣйствіемъ которой тѣло описываетъ коническое сѣченіе

$$\varphi_1=\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{SP^2}=\frac{c^2}{p}\cdot\frac{1}{A^2}.$$

Но въ данномъ случаѣ полагается

$$p=R,$$

значитъ будетъ

$$\varphi_1=\frac{c^2}{R}\cdot\frac{1}{A^2},$$

слѣдовательно,

$$\varphi+\varphi_1=\frac{G^2-F^2}{F^2}\cdot\frac{c^2}{A^3}+\frac{c^2}{R}\cdot\frac{1}{A^2}=\frac{c^2}{R.F^2}\cdot\left[\frac{F^2}{A^2}+\frac{(G^2-F^2)R}{A^3}\right].$$

Это и есть формула сл. 2, ибо $\frac{c^2}{RF^2}$ есть постоянная.

Слѣдствіе 3. Такимъ же образомъ получится, что если неподвижная орбита VPK есть эллипсъ, коего центръ C совпадаетъ съ центромъ силъ C, подвижная же орбита upk равна и подобна неподвижной и $2R$ есть параметръ этого эллипса, $2T$ его большая ось и отношеніе $VCp : VCP = G : F$, то силы, подъ дѣйствіемъ коихъ одно тѣло будетъ обращаться по неподвижному эллипсу, другое въ то же самое время по подвижному относятся [100]) между собою какъ:

$$F^2 \cdot \frac{A}{T^3} : \left[\frac{F^2 . A}{T^3} + (G^2 - F^2) . \frac{R}{A^3}\right].$$

Слѣдствіе 4. Вообще если наибольшее удаленіе CV тѣла обозначить черезъ T, радіусъ кривизны орбиты VPK въ точкѣ V обозначить черезъ R и центростремительную силу, подъ дѣйствіемъ которой тѣло могло бы описывать какую-либо неподвижную траекторію положить для точки V, равной $K \cdot \frac{F^2}{T^2}$, во всякомъ же другомъ мѣстѣ P обозначить черезъ X, разстояніе CP обозначить черезъ A и взять попрежнему $G : F = VCp : VCP$, то центростремительная сила, подъ дѣйствіемъ которой тѣло могло бы обращаться по той же траекторіи upk, но равномѣрно вращающейся, описывая ее въ одинаковое время, будетъ выражаться [101]) суммою

$$X + (G^2 - F^2) . R . \frac{K}{A^3}.$$

Слѣдствіе 5. Когда движеніе тѣла по какой-либо неподвижной орбитѣ

---

[100]) На основаніи формулы (*) прим. (44) будемъ имѣть:

$$\varphi_1 = \frac{c^2 . A}{RT^3},$$

слѣдовательно, будетъ:

$$\varphi + \varphi_1 = \frac{G^2 - F^2}{F^2} \cdot \frac{c^2}{A^3} + \frac{c^2 A}{RT^3} = \frac{c^2}{RF^2}\left[\frac{F^2 . A}{T^3} + (G^2 - F^2) \cdot \frac{R}{A^3}\right].$$

[101]) При сдѣланныхъ обозначеніяхъ полагая скорость тѣла въ точкѣ V, равной v, будемъ имѣть:

$$\frac{v^2}{R} = \frac{K . F^2}{T^2}$$

и

$$c = v . T,$$

слѣдовательно, будетъ:

$$c^2 = K . F^2 . R$$

и

$$\varphi = (G^2 - F^2) . \frac{R . K}{A^3},$$

а такъ какъ $\varphi_1 = X$, то и получится приведенная въ текстѣ формула.

задано, то можно увеличивать или уменьшать угловое его движенiе около центра силъ въ заданномъ отношенiи и находить новыя неподвижныя орбиты, по которымъ тѣло будетъ обращаться подъ дѣйствiемъ новыхъ центростремительныхъ силъ.

Слѣдствiе 6. Если провести неограниченную прямую VP (фиг. 88 b) перпендикулярно къ заданной по положенiю прямой CV и соединяя CP откладывать равную ей длину Cp, подъ угломъ VCp къ прямой CV, находящимся къ углу VCP въ постоянномъ отношенiи, то сила, подъ дѣйствiемъ которой тѣло p можетъ двигаться по этой кривой Vpk будетъ обратно пропорцiональна кубу разстоянiя Cp, ибо тѣло по прямой VP можетъ двигаться по инерцiи безъ дѣйствiя какой-либо силы. Слѣдовательно, когда приложенная сила, направленная къ центру обратно пропорцiональна кубу разстоянiя CP или Cp, то по только-что доказанному прямолинейное движенiе обратится въ криволинейное по Vpk. Эта кривая Vpk одинакова съ тою VPQ, которая найдена выше (XLI, 3) и по которой, какъ тамъ указано, тѣло подъ дѣйствiемъ такого рода силы движется косвенно удаляясь отъ центра.

Предложенiе XLV. Задача XXXI.

Требуется опредѣлить движенiе вершинъ (апсидъ) орбитъ весьма близкихъ къ кругу.

Эта задача рѣшается вычисленiемъ, распоряжаясь такъ, чтобы орбита, описываемая на неподвижной плоскости, движущимся по неподвижному эллипсу тѣломъ приближалась по своему виду къ той, движенiе вершинъ которой ищется и опредѣляя затѣмъ вершины этой описываемой на неподвижной плоскости орбиты. Орбиты же получаются одинаковаго вида, если при сравненiи центростремительныхъ силъ, подъ дѣйствiемъ которыхъ онѣ описываются, окажется, что эти силы при одинаковыхъ разстоянiяхъ между собою пропорцiональны.

Пусть точка V есть дальняя вершина орбиты, обозначимъ черезъ A разстоянiе CP или Cp, черезъ T наибольшее разстоянiе CV, черезъ X разность разстоянiй $CV-CP$. Сила, подъ дѣйствiемъ которой тѣло можетъ двигаться по вращающемуся около своего центра C эллипсу, выражается (XLIV, 2) такъ:

$$\frac{F^2}{A^2}+(G^2-F^2)\cdot\frac{R}{A^3}=\frac{AF^2+R(G^2-F^2)}{A^3}.$$

Подставляя въ числителѣ $T-X$ вмѣсто A получимъ:

$$\frac{TF^2-XF^2+R(G^2-F^2)}{A^3}\quad\ldots\ldots\ldots\ (*)$$

Также и выраженiе всякой другой центростремительной силы надо привести къ виду дроби, коей знаменатель былъ бы A^3, послѣ чего собравъ подобные члены, положить, что числитель этой дроби и дроби (*) пропорціональны [102]). На примѣрахъ дѣло становится очевиднымъ.

Примѣръ 1. Положимъ, что центростремительная сила постоянная, т.-е. пропорціональная $\frac{A^3}{A^3}$ или написавъ въ числителѣ $T-X$ вмѣсто A

$$\frac{T^3-3T^2X+3TX^2+X^3}{A^3}.$$

Собирая и сравнивая члены, содержащіе и несодержащіе букву X, имѣемъ пропорцію

$$\{R(G^2-F^2)+TF^2\}:T^3=-F^2X:[-3T^2X+3TX^2+X^3]$$
$$=-F^2:[-3T^2+3TX+X^2],$$

такъ какъ орбита предполагается весьма близкой къ кругу, то въ предѣлѣ когда она сольется съ кругомъ, надо взять $R=T$ и X безконечно малымъ и предѣльныя отношенія будутъ:

$$RG^2:T^3=-F^2:-3T^2$$

или

$$G^2:T^2=F^2:3T^2,$$

---

[102]) Это мѣсто высказано столь кратко, что для правильнаго его пониманія надо сперва прочесть указанные примѣры и тогда обнаружится, что предлагаемое правило можно высказать подробнѣе такъ: для орбиты, весьма близкой къ кругу, описываемой подъ дѣйствіемъ заданной центростремительной силы, надо представить выраженіе, показывающее зависимость этой силы отъ разстоянія A въ видѣ дроби, знаменатель которой A^3. Въ числителѣ полученной дроби написать $T-X$ вмѣсто A и разложить его въ рядъ по степенямъ буквы X. Пусть полученное разложеніе будетъ

$$M+NX+PX^2+\ldots$$

или что то же

$$M+X(N+PX+\ldots)$$

Условіе пропорціональности этой дроби и дроби (*) будетъ:

$$[R(G^2-F^2)+TF^2]:M=-F^2:(N+PX+\ldots)$$

Такъ какъ орбита весьма близка къ кругу, то въ предѣлѣ будетъ $T=R$ и $X=0$; обозначая черезъ M_0 и N_0 величины, въ которыя обратятся M и N, когда будетъ въ нихъ положено $T=R$, получимъ

$$RG^2:M_0=-F^2:N_0.$$

Откуда и найдется искомое отношеніе

$$\frac{G^2}{F^2}=-\frac{M_0}{N_0}\cdot\frac{1}{R}.$$

т.-е.

$$G^2 : F^2 = 1 : 3$$

и значитъ

$$G : F = VCp : VCP = 1 : \sqrt{3}.$$

Такъ какъ тѣло при движенiи по неподвижному эллипсу при переходѣ отъ дальней до ближней вершины описываетъ уголъ VCP (если можно такъ выразиться) въ $180°$, то другое тѣло, движущееся по подвижному эллипсу, а значитъ и по той неподвижной орбитѣ, о которой идетъ рѣчь, при переходѣ отъ дальней до ближней вершины опишетъ уголъ VCp равный $\frac{180°}{\sqrt{3}}$. Это происходитъ отъ подобiя орбиты, описываемой тѣломъ подъ дѣйствiемъ постоянной центростремительной силы и орбиты, которую описываетъ тѣло на неподвижной плоскости, совершая обороты по вращающемуся эллипсу. При помощи вышеуказаннаго приведенiя членовъ подобiе орбитъ достигается не вообще, а лишь въ томъ случаѣ, когда онѣ обѣ весьма близки къ кругу. Итакъ, тѣло, обращающееся подъ дѣйствiемъ постоянной центростремительной силы по орбитѣ весьма близкой къ кругу, будетъ описывать между дальнею и ближнею вершиною уголъ при центрѣ въ $\frac{180°}{\sqrt{3}} = 103°55'23''$, т.-е. при переходѣ тѣла изъ дальней вершины въ ближнюю радiусъ, проведенный къ тѣлу, описываетъ этотъ уголъ, затѣмъ при переходѣ отъ ближней вершины до дальней опять описывается этотъ уголъ и т. д. до безконечности.

Примѣръ 2. Положимъ, что центростремительная сила пропорцiональна какой-либо $(n-3)^{ей}$ степени разстоянiя A, т.-е. A^{n-3} или $\frac{A^n}{A^3}$ причемъ показатели n и $n-3$ могутъ быть какiя угодно числа [103]) положительныя, отрицательныя цѣлыя или дробныя, рацiональныя или иррацiональныя. При разложенiи числителя дроби A^n или $(T-X)^n$ по нашему ряду получимъ:

$$(T-X)^n = T^n - nT^{n-1} \cdot X + \frac{n^2-n}{2} \cdot T^{n-2} \cdot X^2 + \ldots$$

При сличенiи этихъ членовъ съ членами числителя дроби (*):

$$R(G^2 - F^2) + TF^2 - F^2X$$

---

[103]) Обобщенiе понятiя о степени и ея показателѣ на какiя угодно числа принадлежитъ Ньютону. Слѣдуетъ также обратить вниманiе на то, что разложенiе величины $(T-X)^n$ по формулѣ «бинома», которую онъ называетъ «нашъ рядъ», пишется для *всякаго* показателя n. Указанiя какимъ образомъ такiя разложенiя производить находятся въ сочиненiи Ньютона: «Analysis per aequationes numero terminorum infinitas», которое было сообщено въ рукописи Барроу въ 1669 году, но не было издано до 1711 года. Это есть одинъ изъ примѣровъ, гдѣ Ньютонъ пользуется въ своихъ «Началахъ» математическими методами ему извѣстными, но не опубликованными.

получимъ:

$$[R(G^2 - F^2) + TF^2] : T^n = - F^2 : \left[-nT^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} \cdot T^{n-2} \cdot X + \ldots \right],$$

переходя къ предѣлу когда орбиты круговыя будемъ имѣть:

$$RG^2 : T^n = F^2 : nT^{n-1}$$

или

$$G^2 : T^{n-1} = F^2 : nT^{n-1}.$$

Откуда слѣдуетъ

$$G^2 : F^2 = 1 : n$$

и значитъ:

$$G : F = VCp : VCP = 1 : \sqrt{n}.$$

Такъ какъ при движеніи по эллипсу уголъ VCP, описываемый при переходѣ отъ дальней вершины до ближней, составляетъ $180°$, то уголъ VCp между апсидами орбиты, весьма близкой къ кругу описываемой подъ дѣйствіемъ центростремительной силы, пропорціональной степени $n - 3$ разстоянія, т.-е. A^{n-3} составитъ $\frac{180°}{\sqrt{n}}$. По повтореніи этого угла тѣло перейдетъ изъ ближней вершины опять въ дальнюю и т. д. до безконечности. Такимъ образомъ если центростремительная сила пропорціональна первой степени разстоянія, т.-е. A или $\frac{A^4}{A^3}$, то $n = 4$ и $\sqrt{n} = 2$ и уголъ между вершинами равенъ $90°$, такъ что тѣло, совершивъ четверть оборота, придетъ изъ дальней вершины въ ближнюю, по совершеніи еще одной четверти опять въ дальнюю и т. д. поочередно до безконечности. Это подтверждается также пред. X, ибо подъ дѣйствіемъ такой силы тѣло описываетъ неподвижный эллипсъ, коего центръ совпадаетъ съ центромъ силъ.

Когда сила обратно пропорціональна разстоянію, т.-е. $\frac{1}{A}$ или $\frac{A^2}{A^3}$, то $n = 2$ и разстояніе между вершинами составитъ

$$\frac{180°}{\sqrt{2}} = 127°16'45'',$$

поэтому тѣло, обращающееся подъ дѣйствіемъ такой силы, будетъ переходить отъ одной вершины къ другой постоянно повторяя этотъ уголъ.

Далѣе, если центростремительная сила будетъ обратно пропорціональна $A^{-\frac{11}{4}}$ или $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^3}$, то

$$n = \frac{1}{4}, \quad \sqrt{n} = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{180°}{\sqrt{n}} = 360°,$$

поэтому тѣло, выйдя изъ дальней вершины, будетъ все время приближаться къ центру и, совершивъ полный оборотъ, придетъ въ ближнюю вершину, затѣмъ будетъ все время удаляться отъ центра и совершивъ полный оборотъ придетъ опять въ дальнюю вершину и т. д. до безконечности.

Примѣръ 3. Пусть m и n суть два какіе угодно заданныхъ показателя, b и c два какихъ-либо числа, положимъ, что центростремительная сила пропорціональна

$$\frac{bA^m + cA^n}{A^3},$$

т.-е.

$$\frac{b(T-X)^m + c(T-X)^n}{A^3},$$

разложеніе въ сходящійся рядъ будетъ:

$$\frac{bT^m + cT^n - X(mbT^{m-1} + ncT^{n-1}) + X^2\left[\frac{m^2-m}{2}.bT^{m-1} + \frac{n^2-n}{2}cT^{n-2}\right] + \ldots}{A^3}$$

по приведеніи и сличеніи членовъ получимъ:

$$[R(G^2 - F^2) + TF^2] : [bT^m + cT^n] = -F^2 : [-mbT^{m-1} - ncT^{n-1} + \ldots]$$

и по переходѣ къ предѣлу, когда орбита весьма близка къ кругу, получимъ;

$$G^2 : (bT^m + cT^n) = F^2 : (mbT^{m-1} + ncT^{n-1})$$

и значитъ будетъ

$$G^2 : F^2 = (bT^m + cT^n) : (mbT^{m-1} + ncT^{n-1}),$$

принявъ въ этой пропорціи CV, т.-е. T за 1, имѣемъ:

$$G : F = VCp : VCP = \sqrt{b+c} : \sqrt{mb+nc} = 1 : \sqrt{\frac{mb+nc}{b+c}}.$$

Такъ какъ уголъ VCP между дальней и ближней вершиною при движеніи по эллипсу составляетъ 180°, то уголъ VCp между вершинами при движеніи тѣла по орбитѣ, весьма близкой къ кругу, подъ дѣйствіемъ центростремительной силы, пропорціональной величинѣ $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$, равенъ

$$\sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}} \cdot 180^\circ.$$

Разсуждая совершенно также, увидимъ, что когда центростремительная сила пропорціональна $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, то уголъ между вершинами будетъ

$$\sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}\,180^\circ.$$

Подобнымъ же образомъ задача рѣшается и въ болѣе трудныхъ случаяхъ: величина, которой пропорціональна центростремительная сила, должна быть разлагаема въ рядъ и должна имѣть своимъ знаменателемъ A^3. Затѣмъ, въ числителѣ члены не содержащіе буквы X и содержащіе таковую полагаются пропорціональными $R(G^2-F^2)+F^2T$ и $-F^2X$, отбросивъ уничтожающіеся члены и замѣнивъ T черезъ 1 и получимъ отношеніе G къ F.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если центростремительная сила пропорціональна какой-либо степени разстоянія, то эту степень можно опредѣлить по движенію апсидъ и наоборотъ. Именно, если полное угловое перемѣщеніе тѣла, послѣ котораго оно возвращается вновь въ ту же вершину, такъ относится къ полному его обороту или 360°, какъ число m къ n, разстояніе же обозначить черезъ A, то сила пропорціональна A^p, причемъ показатель степени p равенъ $\frac{n^2}{m^2}-3$, какъ это доказано во второмъ примѣрѣ.

Отсюда слѣдуетъ, что сила эта не можетъ уменьшаться при удаленіи отъ центра въ отношеніи бо̀льшемъ нежели кубъ разстоянія, ибо тѣло обращающееся подъ дѣйствіемъ силы обратно пропорціональной кубу разстоянія если начнетъ, послѣ прохожденія черезъ вершину, приближаться къ центру, описывая ту кривую, о которой сказано въ пр. XLI сл. 3, то оно никогда не дойдетъ до ближней вершины, т.-е. до наименьшаго разстоянія, но будетъ постоянно приближаться къ центру. Если же оно пройдя вершину, начнетъ хотя бы ничтожно удаляться, то оно будетъ продолжать удаляться въ безконечность никогда не достигая дальней вершины и будетъ описывать ту кривую, о которой сказано какъ въ вышеупомянутомъ слѣдствіи пр. XLI, такъ и въ сл. 6 пр. XLIV. Подобно этому, когда сила убываетъ при удаленіи отъ центра въ отношеніи бо̀льшемъ нежели кубъ разстоянія, то тѣло пройдя вершину, если начнетъ приближаться или удаляться отъ центра, то и будетъ или приближаться, пока не достигнетъ центра или же будетъ удаляться въ безконечность.

Если же сила при увеличеніи разстоянія отъ центра или убываетъ въ отношеніи меньшемъ куба разстоянія или возрастаетъ съ разстояніемъ въ какомъ угодно отношеніи, то тѣло приближается къ центру лишь до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ ближней вершины; и обратно, если тѣло переходитъ отъ одной вершины къ другой, поочередно приближаясь и удаляясь отъ центра не достигая его, то сила или возрастаетъ вмѣстѣ съ разстояніемъ отъ центра или же убываетъ, но въ отношеніи меньшемъ куба разстояній; приэтомъ чѣмъ чаще тѣло переходитъ изъ одной вершины въ другую, тѣмъ болѣе отступаетъ пропорціональность силы отъ указанной кубичной.

Такъ, если тѣло проходитъ черезъ дальнюю вершину черезъ каждые 8, 4, 2, или $1\frac{1}{2}$ полныхъ оборота, поочередно приближаясь и удаляясь отъ центра, т.-е. если $\frac{m}{n}$ равно или 8, 4, 2, или $1\frac{1}{2}$, то $\frac{n^2}{m^2}-3$ будетъ соотвѣтственно: $\frac{1}{64}-3$, $\frac{1}{16}-3$, $\frac{1}{4}-3$, $\frac{4}{9}-3$ и сила будетъ пропорціональна или $A^{\frac{1}{64}-3}$, или $A^{\frac{1}{16}-3}$, $A^{\frac{1}{4}-3}$, $A^{\frac{4}{9}-3}$, т.-е. обратно пропорціональна $A^{3-\frac{1}{64}}$, $A^{3-\frac{1}{16}}$, $A^{3-\frac{1}{4}}$, $A^{3-\frac{4}{9}}$. Если тѣло послѣ каждаго оборота будетъ возвращаться въ ту же самую вершину, которая слѣдовательно, остается неподвижной такъ, что $\frac{m}{n}=1$, то будетъ

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{-2}=\frac{1}{A^2},$$

т.-е. сила обратно пропорціональна квадрату разстоянія, какъ это уже показано выше.

Если же тѣло возвращается въ ту же самую вершину послѣ $\frac{3}{4}$ или $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ полнаго оборота, то $\frac{m}{n}$ равно или $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$ или $\frac{1}{4}$ и значитъ $A^{\frac{n^2}{m^2}-3}$ будетъ или $A^{\frac{16}{9}-3}$ или $A^{\frac{9}{4}-3}$, A^{9-3}, A^{16-3}, т.-е. сила будетъ или обратно пропорціональна $A^{\frac{11}{9}}$, или $A^{\frac{3}{4}}$ или же она будетъ прямо пропорціональна A^6 или A^{13}. Поэтому, если тѣло при переходѣ изъ дальней вершины въ дальнюю же дѣлаетъ сверхъ полнаго оборота еще 3°, иначе за время полнаго оборота тѣла эта вершина перемѣщается въ сторону движенія на 3°, то будетъ

$$m:n=363:360=121:120,$$

и, слѣдовательно,

$$A^{\frac{n^2}{m^2}-3}=A^{-\frac{29523}{14641}},$$

т.-е. сила обратно пропорціональна $A^{\frac{29523}{14641}}$ или приблизительно $A^{2\frac{4}{243}}$, слѣдовательно, въ этомъ случаѣ центростремительная сила убываетъ въ отношеніи немного большемъ нежели квадратъ разстоянія, но это отношеніе въ $59\frac{3}{4}$ раза ближе къ квадрату нежели къ кубу.

Слѣдствіе 2. Такимъ образомъ, если тѣло подъ дѣйствіемъ силы обратно пропорціональной квадрату разстоянія обращается по эллипсу, имѣющему свой фокусъ въ центрѣ силъ, и къ этой центростремительной силѣ или будетъ прибавлена, или отъ нея будетъ отнята какая-либо внѣшняя сила, то можно найти (по пр. 3) движеніе апсидъ, происходящее отъ этой внѣшней силы и наоборотъ. Такъ, если сила, вслѣдствіе которой тѣло движется по эллипсу пропорціональна $\frac{1}{A^2}$, отнимаемая же внѣшняя сила пропорціональна разстоянію, т.-е. выражается формулою cA такъ, что остающаяся сила будетъ пропорціональна $\frac{A-cA^4}{A^3}$, то при обозначеніяхъ примѣра (3) будетъ:

$$b=1,\quad m=1,\quad n=4,$$

и значитъ, угловое разстояніе между апсидами будетъ:

$$\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}\,180^\circ.$$

Положимъ, что эта внѣшняя сила въ 357,45 раза слабѣе нежели сила заставляющая тѣло описывать эллипсъ *), т.-е. возьмемъ $c=\frac{100}{35745}$, то при $A=T=1$ будетъ

$$180^\circ\sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}=180^\circ\sqrt{\frac{35645}{35345}}=180^\circ{,}7623=180^\circ45'44'',$$

т.-е. тѣло пройдя черезъ дальнюю вершину и описавъ по орбитѣ уголъ въ $180^\circ45'44''$ придетъ въ ближнюю вершину, по удвоеніи же этого угла опять вернется въ дальнюю вершину, слѣдовательно, перемѣщеніе дальней вершины за одинъ оборотъ составитъ $1^\circ31'28''$. Движеніе апсидъ луны приблизительно вдвое быстрѣе.

О движеніи тѣлъ по такимъ орбитамъ, коихъ плоскости проходятъ черезъ центръ силъ сказаннаго достаточно. Остается опредѣлить движеніе тѣлъ въ плоскостяхъ, не проходящихъ черезъ центръ силъ. Авторы, разсматривающіе движеніе тяжелыхъ тѣлъ, разбираютъ обыкновенно восходящее и нисходящее движеніе по заданнымъ наклоннымъ плоскостямъ какъ косвенное такъ и прямое, соотвѣтственно этому слѣдуетъ разсмотрѣть и движеніе тѣлъ подъ дѣйствіемъ силъ направленныхъ къ постоянному центру, происходящее въ плоскостяхъ не проходящихъ черезъ этотъ центръ. Мы будемъ предполагать, что эти плоскости совершенно гладки и скользки, такъ, что онѣ нисколько не замедляютъ движенія. Кромѣ того, при слѣдующихъ ниже доказательствахъ вмѣсто тѣхъ плоскостей, на которыя опираются тѣла, касаясь ихъ, будемъ брать плоскости имъ параллельныя, по которымъ движутся центры тѣлъ, описывая при этомъ движеніи нѣкоторыя орбиты. Такимъ же образомъ мы будемъ затѣмъ разсматривать и движеніе тѣлъ по кривымъ поверхностямъ.

---

*) Въ такомъ отношеніи находится такъ называемая постоянная часть возмущающей силы солнца къ силѣ притяженія луны землею.

ОТДѢЛЪ X.

О движенiи тѣлъ по заданнымъ поверхностямъ и о колебательномъ движенiи подвѣшенныхъ тѣлъ.

Предложенiе XLVI. Задача XXXII.

Предполагая, что центростремительная сила какая угодно, и, что даны центръ силъ и плоскость въ которой обращается тѣло, и допуская квадратуру кривыхъ, требуется опредѣлить движенiе тѣла выходящаго изъ даннаго мѣста съ заданною скоростью направленной по прямой, лежащей въ вышеупомянутой заданной плоскости.

Пусть S (фиг. 89), есть центръ силъ, SC кратчайшее его разстоянiе до данной плоскости, P мѣсто, изъ котораго тѣло выходитъ по направленiю прямой PZ, Q какое-либо мѣсто тѣла, PQR траекторiя тѣла, лежащая въ заданной плоскости. Если, проведя CQ и QS отложить по QS длину SV пропорцiональную центростремительной силѣ дѣйствующей на тѣло по направленiю QS и провести VT параллельную CQ и пересѣкающую SC въ точкѣ T, то сила SV разложится [104]) на силы ST и TV, изъ коихъ ST, дѣйствуя на тѣло перпендикулярно плоскости не оказываетъ влiянiя на его движенiе въ этой плоскости. Вторая же сила TV, дѣйствуя въ самой плоскости, притягиваетъ тѣло прямо къ точкѣ C лежащей въ этой плоскости, и, слѣдовательно, заставитъ тѣло двигаться въ этой плоскости такъ, какъ будто бы силы ST нѣтъ, а тѣло подъ дѣйствiемъ силы TV движется въ свободномъ пространствѣ. Когда же задана центростремительная сила, подъ дѣйствiемъ которой тѣло движется въ свободномъ пространствѣ, то (XLII) опредѣляются какъ траекторiя PQR описываемая тѣломъ, такъ и то мѣсто Q, въ которомъ тѣло находится въ любой заданный моментъ времени, а также и скорость тѣла въ этомъ мѣстѣ Q.

Предложенiе XLVII. Теорема XV.

Если центростремительная сила пропорцiональна разстоянiю тѣла до центра, то всѣ тѣла обращающiяся по какимъ угодно плоскостямъ

---

[104]) Въ прим. 19 уже было указано, что при разложенiи силъ, Ньютонъ не заботится о томъ чтобы равнодѣйствующая и составляющiя были приложены именно къ той точкѣ на чертежѣ, на которую онѣ дѣйствуютъ; онъ дѣлаетъ это построенiе или въ сторонѣ или гдѣ удобнѣе для хода разсужденiй, ибо построенiе параллелограмма должно ему лишь дать отношенiе между равнодѣйствующей и составляющими и указать направленiя ихъ.

описываютъ эллипсы, причемъ времена обращенія одинаковы, тѣла же движущіяся прямолинейно колеблясь взадъ и впередъ совершаютъ каждое полное колебаніе въ продолженіе того же періода.

При сохраненіи обозначеній предыдущаго предложенія, окажется, что такъ какъ сила SV притягивающая обращающееся въ плоскости PQR тѣло Q къ центру S пропорціональна разстоянію SQ, то, по пропорціональности SV и SQ, TV и CQ, и сила TV, лежащая въ заданной плоскости и притягивающая тѣло Q къ центру C, пропорціональна разстоянію CQ. Слѣдовательно, силы, съ которыми тѣла обращающіяся въ плоскости PQR притягиваются къ точкѣ C, при равныхъ разстояніяхъ равны тѣмъ силамъ, съ которыми эти тѣла при такихъ же разстояніяхъ притягиваются къ центру S, поэтому эти тѣла будутъ двигаться по такимъ же кривымъ въ любой плоскости PQR около точки C, какъ въ свободномъ пространствѣ около точки S, слѣдовательно (X, 2 и XXXVII, 2), они въ одинаковое время будутъ описывать въ этой плоскости эллипсы около точки C, а также и совершать колебанія по прямымъ линіямъ проходящимъ черезъ эту точку и лежащимъ въ данной плоскости.

Поученіе.

Вышеизложенному сродственно колебательное движеніе тѣлъ по кривымъ поверхностямъ. Вообрази, что на плоскости описана кривая линія, и, что она обращается около какой-либо оси, лежащей въ этой плоскости и проходящей черезъ центръ силъ, при такомъ вращеніи кривая произведетъ нѣкоторую кривую поверхность. Если тѣло движется такъ, что его центръ все время находится въ этой поверхности, и колеблясь взадъ и впередъ не выходитъ изъ плоскости проходящей черезъ ось, то тѣло будетъ двигаться по той кривой, вращеніемъ которой образована поверхность, поэтому въ такихъ случаяхъ достаточно разсмотрѣть движеніе тѣла по этой кривой.

Предложеніе XLVIII. Теорема XVI.

Если колесо стоитъ на наружной поверхности шара подъ прямымъ угломъ къ ней, и вращаясь около своей оси катится по большому кругу шара, то длина криволинейнаго пути описаннаго какою-либо точкою обода колеса, считая отъ того положенія этой точки, когда оно ею касалось шара, такъ относится къ удвоенному синусу верзусу половины той дуги, которой за это время колесо прикасалось къ шару, какъ сумма діаметровъ шара и колеса относится къ полудіаметру шара.

Предложенiе XLIX. Теорема XVII.

Если колесо стоитъ на внутренней поверхности шара подъ прямымъ угломъ къ ней, и вращаясь около своей оси катится по большому кругу шара, то длина криволинейнаго пути описаннаго какою-либо точкою обода колеса, считая отъ того положенiя этой точки, когда оно ею касалось шара, такъ оносится къ удвоенному синусу верзусу половины той дуги, которой за это время колесо прикасалось къ шару, какъ разность дiаметровъ шара и колеса относится къ полудiаметру шара.

Пусть ABL (фиг. 90) шаръ, C его центръ, BPV колесо на немъ стоящее, E центръ колеса, B точка касанiя, P заданная точка на ободѣ колеса.

Вообрази, что это колесо катится по большому кругу ABL отъ A черезъ B къ L и при этомъ такъ вращается, что дуги AB и PB постоянно между собою равны, и, что точка P заданная на ободѣ колеса описываетъ криволинейный путь AP, если, вмѣстѣ съ тѣмъ, AP есть и полная длина описаннаго точкою P пути, то будетъ

$$AP : 2\,\text{sin vers}\left(\frac{1}{2}PB\right) = 2CE : CB.$$

Пусть прямая CE или ея продолженiе пересѣкаетъ ободъ въ точкѣ V, проведи CP, BP, EP, VP и опусти на продолженiе CP перпендикуляръ VF; пусть точка H есть пересѣченiе касательныхъ PH и VH проведенныхъ къ ободу въ точкахъ P и V, G точка пересѣченiя PH и VF и прямыя GJ и HK перпендикулярны къ PV. Точкою C какъ центромъ и произвольнымъ радiусомъ опиши кругъ пересѣкающiй прямую CP въ n, ободъ колеса BP въ o и путь точки P, т.-е. кривую AP въ m. Точкою V какъ центромъ и радiусомъ Vo опиши кругъ пересѣкающiй продолженiе VP въ точкѣ q. Такъ какъ колесо постоянно вращается при своемъ перемѣщенiи около точки касанiя B, то очевидно, что прямая BP нормальна къ кривой AP, и, слѣдовательно, прямая VP касается этой кривой въ точкѣ P. Радiусъ круга nom возьми почти равнымъ разстоянiю CP, тогда по подобiю безконечно-малой фигуры $Pnomq$ и фигуры $PFGVJ$ предѣльное отношенiе исчезающихъ отрѣзковъ Pm, Pn, Po, Pq, т.-е. отношенiе совмѣстныхъ одновременныхъ приращенiй длины кривой AP, прямой CP, дуги круга BP и прямой VP будетъ то же самое какъ прямыхъ: PV, PF, PG и PJ. Но такъ какъ прямыя VF и VH соотвѣтственно перпендикулярны къ CF и CV, то уголъ $HVC = VCF$ и $VHG = CEP$, ибо въ четыреугольникѣ $VHEP$ углы P и V прямые, слѣдовательно, треугольники VHG и CEP подобны, и значитъ:

$$EP : CE = HG : HV = HG : HP = KJ : KP,$$

откуда

$$(CE \mp EP) : CE = (KJ \mp KP) : KP,$$

или удвоивъ послѣдующіе члены:

$$CB : 2CE = PJ : PV = Pq : Pm.$$

Такимъ образомъ уменьшеніе длины VP, т.-е. приращеніе длины $BV-VP$ находится въ постоянномъ отношеніи къ приращенію длины кривой AP, равномъ отношенію CB къ $2CE$, поэтому (л. IV, слѣд.) и самыя длины образуемыя этими приращеніями находятся въ томъ же отношеніи. Но при радіусѣ BV, отрѣзокъ VP есть косинусъ угла $BVP = \frac{1}{2} BEP$, поэтому $BV-VP$ есть синусъ верзусъ этого угла, и, слѣдовательно, въ сказанномъ колесѣ коего радіусъ есть $\frac{1}{2}BV$, величина $(BV-VP)$ есть удвоенный синусъ верзусъ дуги $\frac{1}{2}BP$, почему и будетъ:

$$AP : 2 \operatorname{sin vers} \left(\frac{1}{2} PB\right) = 2CE : CB.$$

Для различія будемъ называть кривыя AP соотвѣтственно циклоидами наружною и внутреннею.

Слѣдствіе 1. Если описать полную циклоиду ASL и въ точкѣ S раздѣлить ее пополамъ, то такъ какъ VP есть удвоенный синусъ угла VBP при радіусѣ EB, то будетъ

$$SP : VP = 2CE : CB,$$

т.-е. дуга SP находится къ длинѣ VP въ томъ же постоянномъ отношеніи, какъ и дуга AP къ синусъ верзусу половины дуги BP.

Слѣдствіе 2. Длина полупериметра AS циклоиды, равна длинѣ такой прямой, которая такъ относится къ діаметру колеса BV какъ $2CE$ къ CB.

Предложеніе L. Задача XXXIII.

Устроить такъ, чтобы подвѣшенное тѣло колебалось по заданной циклоидѣ.

Внутри шара, описаннаго изъ центра C (фиг. 91), задана циклоида QRS, середина коей въ R, концы же ея Q и S находятся въ этихъ точкахъ поверхности шара. Проведи CR раздѣляющую дугу QS въ точкѣ O пополамъ и продолжи ее до A такъ, чтобы было

$$CA : CO = CO : CR.$$

Изъ центра C радіусомъ CA опиши наружный шаръ DAF и пусть внутри его колесомъ, коего радіусъ AO, описаны двѣ полуциклоиды AQ и AS, касающіяся внутренняго шара въ точкахъ Q и S и пересѣкающія наружный шаръ въ точкѣ A. Пусть изъ этой точки A на нити APT, длина коей AR, подвѣшено тѣло T, качающееся между полуциклоидами такъ, что какъ только маятникъ отклонится отъ отвѣса AR, то нить верхнею своею частью наложится на ту полуциклоиду APS, въ сторону которой движеніе происходитъ, и будетъ ее огибать какъ препятствіе, остальная же часть нити PT, не касающаяся циклоиды, останется растянутой въ прямую линію, тогда тѣло T и будетъ колебаться по заданной циклоидѣ QRS.

Пусть нить PT пересѣкаетъ циклоиду QRS въ T, кругъ QOS въ V, проведи CV и изъ крайнихъ точекъ P и T прямой части нити возставь перпендикуляры BP и TW, пересѣкающіе CV въ точкахъ T и W. Изъ построенія и одинаковаго образованія кривыхъ AS и SR слѣдуетъ, что эти перпендикуляры отрѣзаютъ отъ CV длины VB и VW, равныя діаметрамъ колесъ OA и OR. Кромѣ того

$$TP : VP = BW : BV = (AO + OR) : AO = (AC + CO) : AC = 2CE : CB$$

ибо

$$CA : CO = CO : CR = AO : OR.$$

Но такъ какъ VP есть удвоенный синусъ угла VBP при радіусѣ $\frac{1}{2} BV$, то по слѣд. 1 пр. XLIX, длина прямолинейной части нити равна длинѣ дуги PS циклоиды, вся же длина нити равна длинѣ дуги APS, т.-е. длинѣ AR (пр. XLIX, 2). Поэтому, если длина нити остается постоянно равной AR, то точка T будетъ двигаться по заданной циклоидѣ QRS.

Слѣдствіе. Нить AR равна длинѣ полуциклоиды AS и, слѣдовательно, такъ относится къ полудіаметру AC наружнаго шара, какъ длина подобной ей полуциклоиды SR къ полудіаметру CO внутренняго шара.

Предложеніе LI. Теорема XVIII.

Если центростремительная сила повсюду направлена къ центру шара C и пропорціональна разстоянію до центра, тѣло же находится подъ дѣйствіемъ только этой силы и колеблется (какъ описано выше) по дугѣ циклоиды QRS, то время каждаго его размаха одно и то же, независимо отъ величины размаха.

На касательную TW (фиг. 92) къ циклоидѣ опускается перпендикуляръ CX, и проводится прямая CT. Центростремительная сила, дѣйствующая на тѣло T, которая пропорціональна разстоянію CT и направлена по этой прямой, разлагается (сл. 2, Зак.) на силы, направленныя по CX и TX.

Первая изъ этихъ силъ, какъ направленная прямо по нити PT, лишь натягиваетъ эту нить и вполнѣ уничтожается ея сопротивленіемъ, не производя болѣе никакого дѣйствія. Вторая же сила TX, дѣйствуя на тѣло по касательной къ циклоидѣ въ сторону къ X, ускоряетъ движеніе тѣла по этой кривой. Очевидно, что ускореніе (приращеніе скорости) [105]) тѣла въ продолженіе каждаго отдѣльнаго, весьма малаго, промежутка времени будетъ пропорціонально этой ускоряющей силѣ, т.-е. длинѣ TX. Но такъ какъ

$$TX : TW = WV : CV,$$

послѣднее же отношеніе постоянное, ибо CV и WV заданы, то сказанная сила пропорціональна TW, т.-е. пропорціональна (XLIX, 1) длинѣ дуги TR циклоиды. Слѣдовательно, для двухъ маятниковъ APT и Apt, отклоненныхъ отъ отвѣса на различныя величины и пущенныхъ одновременно приращенія скорости будутъ постоянно пропорціональны дугамъ TR и tR, которыя имъ остается описать до вершины R циклоида. Но весьма малые пути, описанные въ тотъ же, весьма малый, промежутокъ времени при самомъ началѣ движенія, пропорціональны приращеніямъ скорости за этотъ промежутокъ времени, т.-е. пропорціональны полнымъ начальнымъ отклоненіямъ маятниковъ отъ вершины R, поэтому и остающіяся по прошествіи этого промежутка отклоненія будутъ пропорціональны начальнымъ. Приращенія скорости въ теченіе второго такого же промежутка времени, пропорціональныя этимъ отклоненіямъ, т.-е. остающимся до вершины дугамъ, будутъ, слѣдовательно, пропорціональны начальнымъ дугамъ, значитъ и пути, пройденные въ продолженіе второго промежутка времени, и остающіяся послѣ того дуги будутъ пропорціональны начальнымъ отклоненіямъ и т. д. во все время движенія.

Итакъ, приращенія скорости въ отдѣльные, весьма малые, равные между собою промежутки времени, а, слѣдовательно, и самая скорость изъ этихъ приращеній образуемая, а также и длины пути, какъ пройденныя за все разсматриваемое время, такъ и остающіяся до вершины R циклоиды относятся другъ къ другу, какъ начальныя отклоненія. Поэтому остающіяся дуги, какъ находящіяся въ постоянномъ отношеніи исчезаютъ одновременно, т.-е. оба маятника одновременно проходятъ черезъ отвѣсную линію AR. Если движеніе обратить, то восхожденіе маятниковъ по той же дугѣ

---

[105]) Здѣсь слово «accerelatio» употреблено такъ что его можно было бы перевести и словомъ ускореніе въ его теперешнемъ значеніи, именно сказано: «manifestum est quod corporis acceleratio, huic vi acceleratrici proportionnalis, sit singulis momentis ut longitudo TX»... т.-е. «очевидно, что услореніе тѣла, пропорціональное этой ускоряющей силѣ, будетъ въ отдѣльные моменты пропорціонально длинѣ TX». Но изъ конца доказательства видно, что и здѣсь, какъ и вездѣ въ «Началахъ» слову «acceleratio» придавалось значеніе—приращеніе скорости и слову momentum—не моментъ, а весьма малый промежутокъ времени.

циклоиды отъ низшаго ихъ положенія R въ тѣхъ же самыхъ мѣстахъ будетъ замедляться тѣми же самыми силами, которыми ихъ нисхожденіе ускорялось, ясно поэтому, что скорости какъ нисходящаго, такъ и восходящаго, движенія при тѣхъ же отстояніяхъ отъ вершины для каждаго маятника равны, значитъ равны и продолжительности этихъ движеній; а такъ какъ обѣ части циклоиды RS и RQ, расположенныя по обѣ стороны отъ отвѣса, подобны и равны, то оба маятника будутъ совершать какъ свои полные такъ и половинные размахи въ одинаковое время.

Слѣдствіе. Сила, ускоряющая въ какомъ-либо мѣстѣ T тѣло при его движеніи по циклоидѣ, такъ относится къ полному вѣсу [106]) этого тѣла въ верхнемъ его положеніи S или Q, какъ дуга циклоида TR къ ея полной длинѣ SR или QR.

Предложеніе LII. Задача XXXIV.

Опредѣлитъ скорости маятниковъ въ каждомъ мѣстѣ и времена какъ полныхъ размаховъ, такъ и частей ихъ.

Произвольною точкою G (фиг. 93), какъ центромъ и радіусомъ GH, равнымъ длинѣ дуги RS циклоиды опиши полукругъ, раздѣляемый радіусомъ GK пополамъ, и пусть къ центру G притягиваетъ такая центростремительная сила, пропорціональная разстоянію отъ центра, которая на периметрѣ HJK равна силѣ, дѣйствующей на поверхности шара OS по направленію къ его центру. Пусть одновременно съ тѣмъ, какъ маятникъ T пускается изъ верхняго своего положенія S, другое тѣло L падаетъ изъ H въ G. Такъ какъ дѣйствующія на маятникъ и на тѣло L силы пропорціональны отклоненіямъ TR и LG и въ началѣ равны, то, когда TR и LG равны, и силы въ мѣстахъ T и L равны. Отсюда слѣдуетъ, что оба тѣла пройдутъ въ одинаковое время послѣ начала движенія одинаковыя длины ST и HL, находясь постоянно и въ дальнѣйшемъ подъ дѣйствіемъ равныхъ силъ, они все время будутъ двигаться одинаково, описывая равной длины пути.

Вслѣдствіе этого (XXXVIII) время, въ продолженіе котораго маятникъ опишетъ дугу ST, такъ относится ко времени полнаго его размаха, какъ дуга HJ, пропорціональная времени, въ продолженіе коего тѣло H переходитъ въ L, относится къ полуокружности HKM, которая пропорціональна времени перехода тѣла изъ H въ M.

Точно также скорость маятника въ точкѣ T такъ относится къ его скорости въ низшей точкѣ R (иначе скорость тѣла H въ точкѣ L относится къ его скорости въ точкѣ G, т.-е. весьма малое приращеніе длины HL къ весьма малому приращенію длины HG, причемъ оба они соотвѣтствуютъ

---

[106]) Здѣсь подъ словомъ «вѣсъ тѣла» разумѣется та сила, съ которою оно притягивается къ центру C.

одинаковымъ, весьма малымъ, приращеніямъ дугъ HJ и HK, возрастающихъ равномѣрно) какъ ордината LJ къ радіусу GK, т.-е какъ

$$\sqrt{SR^2 - TR^2} : SR.$$

Но такъ какъ при какихъ-угодно размахахъ въ равныя времена описываются дуги, пропорціональныя полной величинѣ размаховъ, то на основаніи приведеннаго выше найдутся при заданномъ времени скорости и описанныя дуги при какой угодно величинѣ размаховъ. Это и требовалось, прежде всего, опредѣлить.

Положимъ теперь, что маятники колеблются по различнымъ циклоидамъ, описаннымъ около различныхъ шаровъ, причемъ абсолютная сила центровъ также различная, тогда, если обозначить черезъ V абсолютную силу [107]) котораго-нибудь изъ шаровъ QOS, то ускоряющая сила, дѣйствующая на маятникъ на поверхности этого шара, направленная къ его центру, будетъ пропорціональна разстоянію CO тѣла до центра и абсолютной силѣ шара V, т.-е. произведенію $V \cdot CO$. Поэтому отрѣзочекъ HY, описываемый въ продолженіе постояннаго промежутка времени, подъ дѣйствіемъ ускорительной силы $V \cdot CO$ будетъ пропорціоналенъ этой силѣ, и если возставить перпендикуляръ YZ, пересѣкающій окружность въ Z, то HZ представитъ этотъ заданный промежутокъ времени. Но весьма малая дуга HZ пропорціональна

$$\sqrt{GH \cdot HY}$$

т.-е.

$$\sqrt{GH \cdot CO \cdot V}$$

поэтому время полнаго размаха по циклоидѣ QRS (такъ какъ оно пропорціонально полуокружности HKM, представляющей это время и обратно пропорціонально HZ, представляющей постоянный промежутокъ) будетъ прямо пропорціонально GH и обратно пропорціонально

$$\sqrt{GH \cdot CO \cdot V},$$

---

[107]) Это есть чуть ли не единственное мѣсто въ «Началахъ», гдѣ вводится въ вычисленіе абсолютная сила центра, т.-е. величина аналогичная величинѣ μ^2 въ теперешней формулѣ

$$F = \mu^2 r,$$

когда хотятъ написать выраженіе силы, пропорціональной разстоянію r. Обыкновенно Ньютонъ обходилъ введеніе этого множителя тѣмъ, что сравнивалъ разсматриваемую силу съ такою, подъ дѣйствіемъ которой тѣло описывало бы равномѣрнымъ движеніемъ около заданнаго центра кругъ даннаго радіуса въ извѣстное время.

или по равенству GH и SR оно пропорціонально

$$\sqrt{\frac{SR}{CO \cdot V}}$$

или (пр. L)

$$\sqrt{\frac{AR}{AC \cdot V}}.$$

Такимъ образомъ, времена качаній маятниковъ по любымъ циклоидамъ, и для любыхъ шаровъ, съ какими-угодно абсолютными притягательными силами, прямо пропорціональны корнямъ квадратнымъ, изъ длинъ нитей подвѣса, и обратно пропорціональны корнямъ квадратнымъ разстояній точекъ подвѣса до центровъ шаровъ и ихъ абсолютной силѣ.

Слѣдствіе 1. На основаніи сказаннаго могутъ быть сравниваемы времена качаній, паденія и обращенія тѣлъ. Такъ если взять діаметръ колеса, производящаго циклоиду внутри шара, равнымъ радіусу шара, то эта циклоида обратится въ прямую линію, проходящую черезъ центръ шара и колебаніе превратится въ прямолинейное паденіе къ центру и затѣмъ поднятіе по этой же прямой отъ центра. Слѣдовательно, можно найти какъ время паденія изъ любого мѣста до центра шара, такъ и равное ему время описанія четверти окружности на любомъ разстояніи отъ центра шара, при равномѣрномъ около него обращеніи тѣла; а именно это время (по изложенному во второмъ случаѣ) такъ относится къ времени полуразмаха по какой-либо циклоидѣ QRS, какъ

$$1 : \sqrt{\frac{AR}{AC}}.$$

Слѣдствіе 2. Отсюда же слѣдуютъ и выводы, данные *Вренномъ* и *Гюйгенсомъ* относительно обыкновенной циклоиды. Ибо, если увеличивать діаметръ шара до безконечности, то его поверхность обратится въ плоскость и центростремительная сила будетъ дѣйствовать повсюду одинаково и перпендикулярно къ этой плоскости и наша циклоида превратится въ обыкновенную. Въ этомъ случаѣ длина дуги циклоиды, заключенная между сказанною плоскостью и производящею точкою равна учетверенному синусъ верзусу половины дуги обвода колеса, заключенной между этою плоскостью и производящею точкой, какъ это нашелъ *Вреннъ*.

Маятникъ, подвѣшенный между двумя такими циклоидами, колеблется по циклоидѣ имъ равной и подобной въ равныя времена независимо отъ величины размаховъ, какъ это доказалъ Гюйгенсъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ высота паденія тяжелаго тѣла въ продолженіе одного размаха будетъ та, которая найдена Гюйгенсомъ [108]).

---

[108]) Чтобы получить теперешнюю формулу для циклоидальнаго маятника, т.-е.

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

Доказанныя же нами предложенія болѣе близко соотвѣтствуютъ истинному строенію земли, такъ, когда колесо катится по большому ея кругу,

---

гдѣ l длина маятника, т.-е. $l = AR$ и g ускореніе силы тяжести, необходимо сопоставить сказанное здѣсь съ заключительною частью доказательства, гдѣ приведено выраженіе

$$\sqrt{\frac{AR}{AC \cdot V}},$$

коему время размаха пропорціонально, а также что это время пропорціонально полуокружности HMK и обратно пропорціонально HZ.

Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ безконечно малый промежутокъ времени $\tau = \frac{1}{n}$ секунды, тогда будетъ:

$$T : \tau = HKM : HZ = \pi \cdot GH : \sqrt{2GH \cdot HY} = \pi \sqrt{\frac{GH}{2HY}}.$$

Но $GH = SR$ и по слѣд. пр. 50-го будетъ:

$$SR : OC = AR : AC = GH : OC,$$

т.-е.

$$GH = \frac{OC \cdot AR}{AC}$$

и по подстановкѣ

$$T = \pi \cdot \tau \cdot \sqrt{\frac{OC}{2AC} \cdot \frac{AR}{HY}}.$$

Но HY есть путь, пройденный въ промежутокъ τ подъ дѣйствіемъ силы, пропорціональной $CO \cdot V$, пусть ускореніе этой силы есть φ, значитъ

$$\varphi = k \cdot V \cdot OC,$$

гдѣ k постоянный коефиціентъ.

Причемъ въ предѣлѣ, когда OC неопредѣленно возрастаетъ, то $\varphi = g$, гдѣ g есть ускореніе силы тяжести. Такимъ образомъ будетъ

$$HY = \frac{1}{2} \varphi \cdot \tau^2 = \frac{1}{2} k \cdot V \cdot OC \cdot \tau^2$$

и подставляя, получимъ

$$T = \pi \sqrt{\frac{AC}{OC} \cdot \frac{AR}{k \cdot V \cdot OC}}$$

въ предѣлѣ будетъ

$$\frac{AC}{OC} = 1$$

и

$$k \cdot V \cdot OC = g,$$

слѣдовательно

$$T = \pi \sqrt{\frac{AR}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Это и есть формула Гюйгенса, написанная теперешними обозначеніями.

гвозди на его ободѣ описываютъ наружныя циклоиды. Маятники, чтобы всѣ ихъ колебанія были изохронны, должны быть подвѣшены внутри земли, въ рудникахъ и пещерахъ, и должны колебаться по внутреннимъ циклоидамъ, ибо тяготѣніе (какъ будетъ показано въ книгѣ третьей) при возвышеніи надъ поверхностью земли убываетъ пропорціонально квадратамъ разстояній, подъ поверхностью же лишь пропорціонально разстоянію.

Предложеніе LIII. Задача XXXV.

Допуская квадратуру кривыхъ найти силы, подъ дѣйствіемъ которыхъ тѣла совершаютъ изохронныя колебанія по заданной кривой.

Пусть тѣло колеблется по какой-либо заданной кривой $STRQ$ (фиг. 94), ось коей AR проходитъ черезъ центръ силъ C. Проведя касательную TX къ кривой въ точкѣ T занимаемой тѣломъ откладываемъ по ней длину TY равную длинѣ дуги TR. Длина же этой дуги [109]) находится по обыкновеннымъ способамъ при помощи квадратуры кривыхъ. Изъ точки Y проводится перпендикуляръ YZ къ касательной, проведя CT, пересѣкающую этотъ перпендикуляръ въ точкѣ Z, получимъ длину TZ пропорціональную центростремительной силѣ.

Ибо если силу, съ которою тѣло T притягивается къ C представить длиною TZ ей пропорціональной, то эта сила можетъ быть разложена на двѣ TY и YZ, изъ коихъ YZ дѣйствуя на тѣло по направленію нити PT не измѣняетъ ни въ чемъ его движенія, другая же сила TY цѣликомъ или ускоряетъ или замедляетъ его движеніе по кривой. Такъ какъ эта сила пропорціональна отклоненію TR, то и ускоренія или замедленія при двухъ разной величины размахахъ качаній будутъ пропорціональны этимъ отклоненіямъ и значитъ обѣ эти дуги будутъ описываться въ одинаковое время.

---

[109]) Уже въ упомянутомъ въ пр. 103 сочиненіи «Analysis» и т. д. данъ способъ нахожденія длины дугъ кривыхъ, равносильный разложенію въ рядъ выраженія производной дуги по степенямъ абсциссы или другой перемѣнной независимой и интегрированію членовъ этого ряда. Въ сочиненіи же Methodus Fluxionum дается въ сущности теперешній способъ, основанный на интегрированіи выраженія $ds = \sqrt{1 + y'^2} \, . \, dx$ и поясняется рядомъ примѣровъ. (Prob. XII. Determinare curvarum longitudinem — опредѣлить длину кривыхъ). Когда было написано это сочиненіе точныхъ указаній нѣтъ, хотя извѣстно что уже въ 1666 году, т.-е. за 20 лѣтъ до изданія «Началъ» Ньютонъ владѣлъ методомъ флюксій. Его трактатъ о квадратурѣ кривыхъ былъ изданъ въ 1704 году. Методъ же флюксій лишь въ 1736 году, т.-е. черезъ 9 лѣтъ послѣ его смерти. Но въ введеніи къ этому сочиненію сказано: «я счелъ не лишнимъ составить эту книгу для студентовъ математиковъ» (tyronum geometrarum) такъ, что возможно, что это сочиненіе и много раньше было извѣстно ученикамъ Ньютона, ибо иначе выраженіе «обыкновенными способами» не могло быть понятнымъ читателямъ того времени.

Тѣла же описывающія одновременно пропорціональныя части цѣлаго опишутъ и цѣлое въ одинаковое время.

Слѣдствіе 1. Если тѣло T (фиг. 95) висящее на прямолинейной нити изъ центра A описываетъ дугу круга $STRQ$, и находится подъ дѣйствіемъ нѣкоторой силы направленной внизъ, и такъ относящейся къ постоянной силѣ тяжести какъ дуга TR къ ея синусу TN, то времена размаховъ будутъ постоянны. По параллельности TZ и AR треугольники ATN и ZTY подобны, поэтому

$$TZ : AT = TY : TN,$$

т.-е. если представить постоянную силу тяжести заданною длиною AT, то сила TZ производящая изохронныя колебанія будетъ такъ относиться къ силѣ тяжести AT, какъ дуга AR равная TY относится къ своему синусу TN.

Слѣдствіе 2. Вслѣдствіе этого, въ часахъ, если бы силы приложенныя отъ механизма къ маятнику такъ бы слагались съ силою тяжести, что полная направленная внизъ сила была бы пропорціональна величинѣ $\frac{TR \cdot AR}{TN}$, то колебанія маятника были бы изохронны.

Предложеніе LIV. Задача XXXVI.

Допуская квадратуру криволинейныхъ фигуръ найти время восходящаго или нисходящаго движенія тѣла подъ дѣйствіемъ какой-угодно центростремительной силы по какой-угодно кривой расположенной въ плоскости проходящей черезъ центръ силъ.

Пусть тѣло опускается изъ какого-нибудь мѣста S (фиг. 96), по какой-либо кривой $STtR$ лежащей въ плоскости, проходящей черезъ центръ силъ C. Проведи CS и раздѣли ее на безконечное множество равныхъ частей, и пусть Dd есть одна изъ этихъ частей. Точкою C какъ центромъ и радіусами CD и Cd опиши круги пересѣкающіе кривую $STtR$ въ точкахъ T и t. По извѣстному закону центростремительной силы и разстоянію CS съ котораго тѣло начинаетъ падать, найдется его скорость въ любомъ удаленіи CT отъ центра (пр. XXXIX). Время же, въ продолженіе котораго тѣло пройдетъ безконечно-малый путь Tt, пропорціонально длинѣ этого отрѣзочка, т.-е. секансу угла tTC и обратно пропорціонально скорости. Пусть ордината DN перпендикулярная къ прямой CS въ точкѣ D пропорціональна этому времени, то, такъ какъ Dd постоянна, прямоугольникъ $Dd \cdot DN$, т.-е. площадь $DNnd$ будетъ также пропорціональна этому времени, слѣдовательно, если PNn есть та кривая, на которой постоянно лежитъ точка N, и которая имѣетъ своею ассимптотою прямую SQ перпендикулярную къ прямой CS, то площадь ея $SQPND$ будетъ пропорціональна времени, въ продолженіе котораго тѣло опускаясь, пройдетъ по кривой путь ST, и значитъ, когда эта площадь будетъ найдена, то найдется и время.

Предложенiе LV. Теорема XIX.

Если тѣло движется по какой-либо поверхности вращенiя, ось которой проходитъ черезъ центръ силъ, и изъ мѣста тѣла опускается на ось перпендикуляръ, которому черезъ какую-либо постоянную точку оси проводится равная и параллельная прямая, то я утверждаю, что эта прямая описываетъ площадь пропорцiональную времени.

Пусть BKL (фиг. 97) есть поверхность вращенiя, T тѣло по ней обращающееся, STR траекторiя, которую оно по ней описываетъ, S начало траекторiи, OMK ось поверхности, TN опущенный изъ мѣста тѣла на ось перпендикуляръ, OP — равная и параллельная ему прямая проведенная черезъ данную на оси точку O, AP проекцiя траекторiи описываемая на плоскости AOP точкою P, A начало этой проекцiи соотвѣтствующее точкѣ S, TC прямая проведенная изъ тѣла къ центру, TG длина пропорцiональная центростремительной силѣ, TM нормаль къ поверхности, TJ длина пропорцiональная давленiю производимому тѣломъ на поверхность, а значитъ, и обратно поверхностью на тѣло въ направленiи къ M, PTF прямая параллельная оси проведенная черезъ тѣло, JH и FG перпендикуляры опущенные на эту параллельную. Я утверждаю, что описанная отъ начала движенiя радiусомъ OP площадь AOP пропорцiональна времени.

Сила TG разлагается (по сл. 2 зак.) на силы TF и FG и сила TJ на силы TH и JH. Силы TF и FH дѣйствующiя по линiи PF перпендикулярно плоскости AOP измѣняютъ лишь движенiе тѣла перпендикулярное этой плоскости. Слѣдовательно, его движенiе параллельно плоскости AOP, т.-е. движенiе точки P описывающей проекцiю траекторiи AP въ этой плоскости остается такимъ, какъ если бы силы TF и HT были уничтожены и на тѣло дѣйствовали бы только силы FG и HJ, значитъ это движенiе таково, какъ будто бы само тѣло находилось въ плоскости AOP подъ дѣйствiемъ центростремительной силы направленной къ центру O и равной суммѣ силъ FG и HJ и описывало бы кривую AP. Но подъ дѣйствiемъ такой силы описываются площади пропорцiональныя времени (I).

Слѣдствiе. На основанiи такого же разсужденiя можно доказать, что если тѣло, находящееся подъ дѣйствiемъ силъ направленныхъ къ двумъ или нѣсколькимъ центрамъ лежащимъ на одной прямой OC, описываетъ какую-либо кривую ST, то площадь AOP пропорцiональна времени.

Предложенiе LVI. Задача XXXVII.

Допуская квадратуру криволинейныхъ фигуръ, требуется найти траекторiю, описываемую тѣломъ по поверхности вращенiя, когда оно пущено изъ заданнаго на ней мѣста съ данною скоростью по данному *направленію, и когда на него дѣйствуетъ по заданному закону центростремительная сила направленная къ центру лежащему на оси вращенія.*

Сохранивъ построенія и обозначенія предыдущаго предложенія, положимъ, что тѣло T (фиг. 97) выходитъ изъ заданной точки S по направленію касательной къ искомой траекторіи STR, проекція которой на плоскости AOP есть AP. По извѣстной скорости тѣла въ разстояніи SC найдется его скорость въ любомъ разстояніи TC. Въ теченіе весьма малаго постояннаго промежутка времени тѣло пройдетъ съ этою скоростью весьма малую длину Tt по своей траекторіи. Пусть Pp есть проекція длины Tt на плоскость AOP. Соедини Op, и пусть эллипсъ pQ есть проекція на плоскость AOP кружечка описаннаго изъ точки T какъ центра радіусомъ Tt по поверхности. Такъ какъ величина и разстояніе TN или OP этого кружечка отъ оси OC извѣстны, то и эллипсъ pQ будетъ извѣстенъ по своему виду и величинѣ, а также будетъ извѣстно и положеніе прямой OP. Такъ какъ площадь POp должна быть пропорціональна времени, и, слѣдовательно, находится по заданному времени, то будетъ извѣстенъ уголъ POp, и слѣдовательно, найдется точка p пересѣченія эллипса и прямой Op, а также и уголъ OPp, подъ которымъ проекція траекторіи APp пересѣкаетъ прямую OP. Отсюда (сообразуясь съ пр. XLI и его слѣд. 2) легко видѣть способъ опредѣленія кривой APp. Затѣмъ изъ отдѣльныхъ точекъ проекціи возставляются перпендикуляры, которые своимъ пересѣченіемъ съ поверхностью и дадутъ точки траекторіи [110]).

---

[110]) Описанный въ этомъ доказательствѣ способъ для приведенія задачи къ квадратурамъ равносиленъ теперешнему, но изложенъ настолько своеобразно, что этого сразу не видно. При нашихъ теперешнихъ обозначеніяхъ разсужденіе Ньютона можетъ быть изложено такъ.

Ось вращенія OC принимаемъ за ось Z-овъ, плоскость къ ней перпендикулярную за плоскость r, θ, прямую OA за полярную ось. Тогда поверхность задается уравненіемъ вида

$$z = f(r) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

гдѣ $f(r)$ есть заданная функція перемѣнной

$$r = OP.$$

По закону живыхъ силъ будетъ

$$v^2 = v_0^2 + F(\rho),$$

гдѣ $F(\rho)$ есть извѣстная функція разстоянія $CT = \rho$ тѣла T до центра C, составленіе такой функціи показано въ пред. XL. Но полагая $OC = a$, будетъ

$$\rho^2 = (z - a)^2 + r^2.$$

Для точекъ лежащихъ на данной поверхности $z = f(r)$, и, слѣдовательно $\rho = f_1(r)$, и v^2 будетъ функціей только r, пусть

ОТДѢЛЪ XI.

О движенiи тѣлъ взаимно притягивающихся центростремительными силами.

До сихъ поръ я излагалъ ученiе о движенiи тѣлъ притягиваемыхъ къ неподвижному центру, каковое едва ли существуетъ въ природѣ. Притяженiя всегда происходятъ къ тѣламъ и по третьему закону дѣйствiя тѣлъ притягивающихъ и притягиваемыхъ всегда взаимны и равны, поэтому, если тѣлъ два, то ни притягивающее ни притягиваемое не могутъ оста-

---

$$v^2 = \omega(r) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Съ другой стороны по закону площадей

$$r^2 d\theta = c dt. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

гдѣ c — постоянная площадей.

Наконецъ, «отрѣзочекъ пути Tl на поверхности» при нашемъ обозначенiи есть дифференцiалъ дуги ds траекторiи равный $v\,.\,dt$. Его проекцiя Pp на плоскости AOP есть

$$Pp^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

значитъ

$$Tl^2 = ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 = \{[f'(r)]^2 + 1\}\, dr^2 + r^2 d\theta^2 = f_2(r)\,.\,dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

причемъ функцiя $f_2(r)$ будетъ извѣстна.

Такимъ образомъ, на основанiи равенства

$$ds^2 = v^2 dt^2,$$

получится

$$f_2(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 = \omega(r) dt^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Это и есть «маленькiй эллипсъ» на плоскости AOP искать его пересѣченiе p съ прямою Op такъ, чтобы площадь POp была пропорцiональна времени — значитъ исключить изъ уравненiй (3) и (4) величину dt получится:

$$f_2(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 = \omega(r)\,.\,\frac{c^2}{r^4}\,.\,d\theta^2$$

или

$$f_2(r) dr^2 = \left(\omega(r)\frac{c^2}{r^4} - r^2\right) d\theta^2,$$

т.-е. получится выраженiе вида

$$d\theta = \varphi(r)\,.\,dr$$

и «квадратура» дастъ уравненiе проекцiи траекторiи на плоскости AOP.

ваться въ покоѣ, но по сл. 4 законовъ, оба какъ бы притягиваясь къ своему общему центру тяжести будутъ обращаться около него. Если же тѣлъ нѣсколько, то, будучи притягиваемы однимъ какимъ-либо тѣломъ, и они его притягиваютъ, если же кромѣ того всѣ эти тѣла притягиваются взаимно, то они должны такъ двигаться другъ относительно друга, что общій ихъ центръ тяжести или находится въ покоѣ, или движется равномѣрно и прямолинейно.

По этой причинѣ я перехожу теперь къ изложенію ученія о движеніи тѣлъ притягивающихся взаимно, разсматривая центростремительную силу какъ притяженіе, хотя слѣдовало бы, если выражаться физически, именовать ее болѣе правильно, напоромъ. Но теперь мы занимаемся математикой, и оставляя въ сторонѣ физическіе споры, будемъ пользоваться болѣе обычнымъ названіемъ, чтобы быть понятнѣе читателямъ математикамъ.

Предложеніе LVII. Теорема XX.

Два взаимно притягивающихся тѣла описываютъ и около своего общаго центра тяжести и другъ около друга подобныя траекторіи.

Дѣйствительно, разстоянія тѣлъ отъ ихъ общаго центра тяжести обратно пропорціональны ихъ массамъ, слѣдовательно, отношеніе этихъ разстояній постоянно, значитъ, постоянно и отношеніе каждаго изъ нихъ къ полному разстоянію между тѣлами. Кромѣ того, эти разстоянія обращаются около своего общаго конца съ одинаковымъ угловымъ движеніемъ, вслѣдствіе чего не наклоняясь другъ къ другу, располагаются постоянно по одной прямой.

Прямыя же линіи, отношеніе длинъ коихъ постоянно, и которыя поворачиваются около своихъ концовъ на равные углы, описываютъ вокругъ этихъ концовъ на плоскостяхъ, находящихся съ ними вмѣстѣ въ покоѣ или движущихся безъ вращенія, подобныя фигуры. Слѣдовательно, фигуры описанныя сказанными разстояніями подобны между собою.

Предложеніе LVIII. Теорема XXI.

Если два тѣла притягиваются взаимно съ какою бы то ни было силою, и поэтому обращаются около своего общаго центра тяжести, то я утверждаю, что подъ дѣйствіемъ такой же силы каждое тѣло можетъ описывать вокругъ другого неподвижнаго фигуру равную и подобную тѣмъ, которыя они описываютъ другъ около друга.

Пусть тѣла S и P (фиг. 98), обращаются около своего общаго центра тяжести C, идя отъ S къ T и отъ P къ Q.

Изъ произвольно взятой постоянной точки s проводимъ прямыя sp и sq равныя и параллельныя ST и TQ, кривая pqv описываемая точкою p при ея обращеніи будетъ равна и подобна кривымъ описываемымъ тѣлами

S и P другъ около друга, и вслѣдствіи этого подобна кривымъ ST и PQV описываемымъ этими тѣлами около ихъ общаго центра тяжести C (пр. LVII); это происходитъ потому, что отношенія SC, CP, SP, sp другъ къ другу остаются постоянными.

Случай 1. Центръ тяжести C системы, по 4 сл. законовъ или находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно. Положимъ сперва, что онъ въ покоѣ. Вообрази, что въ точкахъ s и p помѣщены два тѣла, одно неподвижное въ s и другое подвижное p, соотвѣтственно равные и подобные тѣламъ S и P. Пусть прямыя PR и pr касаются кривыхъ PQ и pq въ точкахъ P и p и прямыя CQ и sq продолжены до встрѣчи съ ними соотвѣтственно въ R и r. По подобію фигуръ $CPRQ$ и $sprq$ будетъ:

$$RQ : rq = CP : sp,$$

т.-е. отрѣзочки RQ и rq находятся въ постоянномъ отношеніи. Поэтому, если бы та ускорительная сила [111]) съ которою тѣло P притягивалось къ тѣлу S, а слѣдовательно, и къ промежуточному центру C, находилась бы въ этомъ же отношеніи къ той ускорительной силѣ, съ которою тѣло p притягивается къ s, то эти силы въ равные, весьма малые промежутки времени отклонили бы тѣла P и p отъ касательныхъ PR и pr соотвѣтственно на величины RQ и rq пропорціональныя силамъ, и, слѣдовательно, подъ дѣйствіемъ такой силы тѣло p обращалось бы по кривой pqv подобной кривой PQV, по которой обращается тѣло P подъ дѣйствіемъ пропорціональной ей ускорительной силы, и времена обращеній обоихъ тѣлъ были бы при этомъ одинаковы.

Но такъ какъ эти силы не находятся въ отношеніи $CP : sp$, а въ виду равенства и подобія тѣлъ s и p тѣламъ S и P и равенства разстояній SP и sp, и силы дѣйствующія на тѣла p и P между собою равны, то въ равные промежутки времени оба эти тѣла будутъ отклоняться отъ касательныхъ на равныя величины, и поэтому, чтобы тѣло p отклонилось на бо̀льшую величину rq, необходимо и бо̀льшее время въ отношеніи корней квадратныхъ самихъ отклоненій (л. X), ибо при самомъ началѣ движенія пространства пропорціональны квадрату времени. Положивъ, что скорость тѣла p относится къ скорости тѣла P какъ $\sqrt{sp} : \sqrt{CP}$, т.-е. какъ времена, которыя находятся въ этомъ же отношеніи, получимъ описанныя дуги pq и PQ пропорціональныя самимъ разстояніямъ sp и CP. Такимъ образомъ, тѣла P и p притягиваемыя равными силами, описываютъ около неподвижныхъ центровъ C и s подобныя фигуры PQV и pqv, причемъ, послѣдняя подобна и равна фигурѣ описываемой тѣломъ P вокругъ подвижного тѣла S.

---

[111]) Въ текстѣ сказано просто «vires» — силы, но такъ какъ подъ этимъ словомъ здѣсь разумѣются тѣ ускоренія, которыя тѣла P и p подъ дѣйствіемъ силъ получаютъ, то и добавлено слово «ускорительныя», чтобы быть ближе къ тексту, нежели замѣнивъ слово силы словами «сообщаемыя тѣламъ ускоренія», какъ это бы слѣдовало при теперешней терминологіи.

Случай 2. Положимъ теперь, что центръ тяжести C системы тѣлъ перемѣщается равномѣрно и прямолинейно вмѣстѣ съ тѣмъ пространствомъ, въ которомъ тѣла движутся, тогда (сл. 6 зак.) всѣ движенія въ такомъ пространствѣ будутъ происходить также какъ и раньше, слѣдовательно, тѣла будутъ описывать другъ около друга такія же кривыя какъ и раньше, и значитъ, эти фигуры будутъ равны и подобны фигурѣ pqv.

Слѣдствіе 1. Два тѣла притягивающіяся пропорціонально разстоянію описываютъ (пред. X) около центра тяжести системы и другъ около друга одноцентренные эллипсы, и обратно: если тѣлами описываются такія кривыя, то силы пропорціональны разстоянію.

Слѣдствіе 2. Два тѣла притягивающіяся съ силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія между ними описываютъ (XI, XII, XIII) и около общаго центра тяжести системы и другъ около друга коническія сѣченія, имѣющія своимъ фокусомъ ту точку, около которой кривая описывается, и обратно: если тѣлами описываются такія кривы, то силы обратно пропорціональны квадратамъ разстояній.

Слѣдствіе 3. Два тѣла обращающіяся (подъ дѣйствіемъ какой угодно силы) около общаго центра тяжести описываютъ радіусами проведенными какъ къ этому центру, такъ и другъ къ другу площади пропорціональныя временамъ.

Предложеніе LIX. Теорема XXII.

Время обращенія каждаго изъ двухъ тѣлъ S и P около ихъ общаго центра тяжести находится въ отношеніи равномъ корню квадратному изъ отношенія массы S къ суммѣ массъ $S+P$ ко времени обращенія одного изъ нихъ P вокругъ другого S, принимаемаго за неподвижное, по кривой равной и подобной той, которую тѣла описываютъ другъ около друга.

Изъ доказательства предыдущаго предложенія слѣдуетъ, что отношеніе временъ, въ продолженіе которыхъ описываются произвольныя, весьма малыя, подобныя дуги PQ и pq равно корню квадратному изъ отношенія разстояній $CP:SP$ или CP къ sp, т.-е. равно

$$\sqrt{\frac{S}{S+P}}.$$

Отсюда слѣдуетъ, что и времена описанія полныхъ кривыхъ находятся въ томъ же постоянномъ отношеніи, т.-е.

$$\sqrt{\frac{S}{S+P}}.$$

Предложенie LX. Теорема XXIII.

Если два тѣла S и P притягиваясь съ силою обратно пропорцiональною квадрату разстоянiя обращаются около общаго центра тяжести, то большая ось эллипса описываемаго однимъ изъ этихъ тѣлъ P вокругъ другого S, находится къ большой оси того эллипса, который могъ бы быть описанъ тѣмъ же тѣломъ P около тѣла S остающагося неподвижнымъ, въ отношенiи равномъ отношенiю суммы массъ $(S+P)$ къ первому изъ двухъ среднихъ пропорцiональныхъ между этою суммою и массою тѣла S (т.-е. $\sqrt[3]{S.(S+P)^2}$, иначе сказанное отношенie равно корню кубичному [112]) изъ отношенiя суммы массъ къ массѣ S).

Если бы описываемые эллипсы были между собою равны, то по предыдущей теоремѣ времена обращенiя находились бы въ отношенiи равномъ

$$\sqrt{\frac{S}{S+P}},$$

поэтому, если уменьшить въ этомъ отношенiи время оборота по второму эллипсу, то эллипсы сдѣлаются равными, но (XV) большая ось эллипса уменьшится при этомъ въ отношенiи составляющемъ степень $\frac{2}{3}$ предыдущаго, т.-е. въ отношенiи

$$\sqrt[3]{\frac{S}{S+P}},$$

т.-е. эта ось будетъ относиться къ большой оси перваго эллипса какъ

$$\sqrt[3]{S(S+P)^2}:(S+P),$$

и наоборотъ, большая ось эллипса описываемаго около подвижного тѣла такъ относится къ большой оси описываемой около неподвижнаго какъ

$$(S+P):\sqrt[3]{S(S+P)^2}=\sqrt[3]{S+P}:\sqrt[3]{S}.$$

---

[112]) Если составить такъ называемую непрерывную пропорцiю:

$$(S+P):X=X:Y=Y:S,$$

то X есть первое изъ двухъ среднихъ пропорцiональныхъ между $S+P$ и S, Y—второе.

Изъ этихъ пропорцiй слѣдуетъ:

$$X^2=Y.(S+P) \text{ и } Y^2=X.S.$$

Откуда

$$X^3=S.(S+P)^2$$

или

$$X=\sqrt[3]{S.(S+P)^2}.$$

Предложенiе LXI. Теорема XXIV.

Если два тѣла притягивающiяся взаимно съ какою-угодно силою, но не подверженныя дѣйствiю никакихъ другихъ силъ, движутся какъ бы то ни было, то ихъ движенiе будетъ то же самое если они, не дѣйствуя другъ на друга, притягивались бы третьимъ тѣломъ находящимся въ общемъ ихъ центрѣ тяжести съ такою же силою. Зависимость этой притягательной къ центру тяжести силы отъ разстоянiя до него будетъ такою же какъ и первой силы отъ полнаго разстоянiя между тѣлами.

Притяженiе этихъ двухъ тѣлъ другъ другомъ направлено по прямой ихъ соединяющей, слѣдовательно, къ общему центру тяжести ихъ, т.-е. какъ будто бы оно происходило отъ промежуточнаго тѣла.

Такъ какъ отношенiе разстоянiй каждаго тѣла до ихъ общаго центра тяжести къ разстоянiю между ними остается постояннымъ, то будетъ оставаться постояннымъ и отношенiе любыхъ степеней этихъ разстоянiй; а также и отношенiе какого-угодно количества составленнаго изъ одного изъ этихъ разстоянiй, и заданныхъ величинъ къ количеству совершенно также составленному изъ второго разстоянiя и величинъ, также заданныхъ и находящихся къ предыдущимъ въ сказанномъ постоянномъ отношенiи этихъ разстоянiй. Поэтому, если одно тѣло будетъ притягиваться другимъ прямо или обратно пропорцiонально разстоянiю между ними или вообще пропорцiонально какой-либо степени разстоянiя, или же наконецъ, какому-либо иному количеству какъ бы то ни было выводимому изъ заданныхъ величинъ и этого разстоянiя, то и та сила, съ которою то же тѣло притягивается къ общему центру тяжести, будетъ или прямо или обратно пропорцiональна разстоянiю притягиваемаго тѣла до общаго центра тяжести, или пропорцiонально той же степени этого разстоянiя или же наконецъ, количеству, выводимому подобно вышеупомянутому изъ этого разстоянiя и заданныхъ величинъ. Это и значитъ, что зависимость притягательной силы отъ разстоянiя въ обоихъ случаяхъ одна и та же.

Предложенiе LXII. Задача XXXVIII.

Опредѣлить движенiе двухъ тѣлъ притягивающихся обратно пропорцiонально квадрату разстоянiя между ними и пущенныхъ изъ заданныхъ мѣстъ безъ скорости.

По предыдущей теоремѣ оба тѣла будутъ двигаться такъ, какъ будто бы они притягивались третьимъ, находящимся въ общемъ центрѣ тяжести, который по предположенiю въ началѣ находился въ покоѣ, и, слѣдовательно (4 сл. зак.) и все время будетъ оставаться въ покоѣ. Такимъ образомъ, стоитъ только опредѣлить движеніе тѣлъ (задача XXV), притягиваемыхъ этимъ центромъ, то получится и движеніе тѣлъ, притягивающихся другъ къ другу.

Предложеніе LXIII. Задача XXXIX.

Опредѣлить движеніе двухъ тѣлъ притягивающихся обратно пропорціонально квадрату разстоянія и пущенныхъ изъ заданныхъ мѣстъ по даннымъ направленіямъ съ заданными скоростями.

По извѣстнымъ начальнымъ количествамъ движенія тѣлъ найдется и равномѣрное движеніе ихъ общаго центра тяжести, а значитъ и равномѣрное и прямолинейное движеніе пространства одинаковое съ движеніемъ сказаннаго центра тяжести, а также и начальныя скорости каждаго изъ тѣлъ, относительно этого пространства. Послѣдующее затѣмъ движеніе тѣлъ будетъ происходить въ этомъ подвижномъ пространствѣ (сл. 5 зак. и теор. XXIV) также какъ если бы оно было неподвижно и тѣла притягивались бы не другъ другомъ а третьимъ тѣломъ, находящимся въ центрѣ тяжести. Слѣдовательно, движеніе каждаго тѣла въ отдѣльности въ этомъ подвижномъ пространствѣ опредѣлится по задачамъ IX и XXVI, какъ движеніе тѣла, пущеннаго изъ заданнаго мѣста по данному направленію съ заданною скоростью, и находящагося подъ дѣйствіемъ центростремительной силы направленной къ сказанному центру. Къ этому движенію надо затѣмъ приложить выше найденное равномѣрное движеніе системы, состоящей изъ подвижного пространства и тѣлъ въ немъ обращающихся, послѣ чего и получится абсолютное движеніе тѣлъ въ пространствѣ неподвижномъ.

Предложеніе LXIV. Задача XL.

Требуется опредѣлить движеніе тѣлъ, притягивающихся взаимно съ силами пропорціональными разстояніямъ.

Положимъ сперва, что тѣлъ два T и L (фиг. 99), и центръ тяжести ихъ D, каждое изъ нихъ описываетъ около этого центра тяжести эллипсъ съ центромъ въ точкѣ D, размѣры этого эллипса опредѣляются по пред. XXI.

Пусть третье тѣло S притягиваетъ первыя два T и L съ ускорительными силами ST и SL и взаимно притягивается ими. Сила ST разлагается (сл. 2 зак.) на силы SD и DT и сила SL на силы SD и DL. Силы DT и DL пропорціональны ихъ суммѣ TL, т.-е. той силѣ, съ которою притягиваются другъ къ другу тѣла T и L. Приложивъ къ силѣ притяженія тѣла T тѣломъ L составляющую DT его притяженія тѣломъ S и къ силѣ притяженія тѣла L тѣломъ T—составляющую DL его притяженія тѣломъ S, получимъ попрежнему силы направленныя по прямой TL пропорціональныя этой длинѣ, но бо̀льшія нежели раньше, слѣдовательно (IV, 1 и 8), эти тѣла будутъ попрежнему описывать эллипсы но болѣе быстро. Остающіяся ускорительныя силы SD и SD, коимъ соотвѣтствуютъ движущія силы $T \,.\, SD$ и $L \,.\, SD$ пропорціональныя массамъ тѣлъ, направленныя по прямымъ TJ и LK параллельнымъ SD, заставляютъ оба тѣла не измѣняя своего относительнаго положенія одинаково перемѣщаться къ прямой JK проведенной черезъ середину тѣла S перпендикулярно SD. Если же этому движенію воспрепятствовать, придавъ системѣ тѣлъ L и T съ одной стороны и тѣлу S съ другой надлежащія скорости, то они будутъ обращаться около общаго центра тяжести системы C. При этомъ движеніи тѣло S, такъ какъ оно притягивается суммою движущихъ силъ $T \,.\, SD$ и $L \,.\, SD$ т.-е. силою пропорціональной растоянію SC, будетъ описывать эллипсъ около точки C, и по пропорціональности SC и DC точка D будетъ описывать подобный ему эллипсъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ тѣла T и L притягиваемыя соотвѣтственно движущими силами $T \,.\, SD$ и $L \,.\, SD$ по прямымъ параллельнымъ TJ и LK будутъ продолжать (сл. 5 и 6 зак.), описывать свои эллипсы около точки D какъ и раньше.

Если прибавится четвертое тѣло V, то разсуждая подобнымъ же образомъ, заключимъ, что точка C будетъ описывать эллипсъ около общаго центра тяжести всей системы B, причемъ прежнія движенія тѣлъ T, L, S около центровъ D и C останутся, но ускорятся. Подобнымъ же способомъ можно будетъ присоединять и бо̀льшее число тѣлъ. Такъ происходитъ дѣло и тогда, когда тѣла T и L притягиваютъ другъ друга съ бо̀льшею или меньшею ускорительною силою пропорціональною разстояніямъ, нежели они притягиваютъ другія тѣла. Если же взаимныя ускорительныя притяженія всѣхъ тѣлъ другъ къ другу пропорціональны произведеніямъ разстояній на массы притягивающихъ тѣлъ, то изъ предыдущаго легко заключить, что всѣ тѣла описываютъ около общаго центра тяжести различные эллипсы въ неподвижной плоскости и съ одинаковымъ временемъ обращенія [113]).

---

[113]) Въ самомъ дѣлѣ, положимъ для простоты письма, что тѣлъ три; пусть массы ихъ m_1, m_2, m_3, координаты $x_1 y_1 z_1$, $x_2 y_2 z_2$, $x_3 y_3 z_3$, коеффиціентъ притяженія k^2. За начало координатъ возьмемъ центръ тяжести системы такъ, что будетъ:

$$\begin{aligned} m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 &= 0 \\ m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 &= 0 \\ m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \quad (1)$$

Уравненія движенія точки m_1 будутъ

$$\begin{aligned} x''_1 &= k^2[m_2(x_2 - x_1) + m_3(x_3 - x_1)] \\ y''_1 &= k^2[m_2(y_2 - y_1) + m_3(y_3 - y_1)] \\ z''_1 &= k^2[m_2(z_2 - z_1) + m_3(z_3 - z_1)] \end{aligned} \quad \dots\dots \quad (2)$$

На основаніи уравненій (1) ихъ можно написать такъ:

Предложеніе LXV. Теорема XXV.

Нѣсколько тѣлъ притягивающихся обратно пропорціонально квадратамъ разстояній могутъ двигаться другъ относительно друга по эллипсамъ, описывая радіусами проведенными къ фокусу площади весьма близкія къ пропорціональности времени.

Въ предыдущемъ предложеніи показанъ тотъ случай, когда движеніе нѣсколькихъ тѣлъ происходитъ точно по эллипсамъ. Чѣмъ болѣе законъ дѣйствія силъ отступаетъ отъ указаннаго въ томъ предложеніи, тѣмъ болѣе возмущаются тѣлами ихъ взаимныя движенія, и когда притяженіе обратно пропорціонально квадрату разстояній, то тѣла не могутъ вообще въ точ-

---

$$\left.\begin{aligned} x''_1 + k^2 M x_1 &= 0 \\ y''_1 + k^2 M y_1 &= 0 \\ z''_1 + k^2 M z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

гдѣ

$$M = m_1 + m_2 + m_3.$$

Изъ уравненій (3) слѣдуетъ, полагая $k^2 M = \lambda^2$:

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 \cos\lambda t + C_2 \sin\lambda t \\ y_1 &= C_3 \cos\lambda t + C_4 \sin\lambda t \\ z_1 &= C_5 \cos\lambda t + C_6 \sin\lambda t \end{aligned} \quad \dots\dots\dots \quad (4)$$

гдѣ C_1, C_2, $C_3 \dots C_6$ постоянныя произвольныя, опредѣляемыя начальными условіями относящимися къ точкѣ m_1.

Исключеніе изъ этихъ уравненій величинъ $\cos\lambda t$ и $\sin\lambda t$ даетъ уравненіе вида

$$A x_1 + B y_1 + C z_1 = 0 \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

гдѣ A, B, C суть соотвѣтствующіе миноры опредѣлителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & C_1 & C_2 \\ y_1 & C_3 & C_4 \\ z_1 & C_5 & C_6 \end{vmatrix}$$

Затѣмъ, найдя изъ первыхъ двухъ изъ уравненій (4) величины $\cos\lambda t$ и $\sin\lambda t$ и составивъ сумму ихъ квадратовъ, получимъ

$$(C_4 x_1 - C_2 y_1)^2 + (C_3 x_1 - C_1 y_1)^2 = (C_1 C_4 - C_2 C_3)^2 \quad \dots \quad (6)$$

Уравненія (5) и (6) показываютъ, что точка m_1 движется по постоянному эллипсу коего центръ находится въ началѣ координатъ и коего плоскость есть (5).

Уравненія (4) показываютъ, что для каждой точки будетъ то же самое и такъ какъ λ не зависитъ отъ № точки, то время оборота $\tau = \frac{2\pi}{\lambda}$ этихъ точекъ по своимъ эллипсамъ для всѣхъ точекъ одно и то же.

ности двигаться по эллипсамъ, развѣ только когда сохраняется нѣкоторая пропорція между разстояніями [114]). Но въ слѣдующихъ случаяхъ они лишь немного уклоняются отъ эллипсовъ.

Случай 1. Положимъ, что нѣсколько малыхъ тѣлъ обращается около какого-нибудь одного большого, въ различныхъ отъ него разстояніяхъ, и, что они притягиваются другъ къ другу пропорціонально своимъ массамъ.

Общій центръ тяжести всей системы (сл. 4 зак.) или находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно. Вообразимъ, что мелкія тѣла настолько малы, что большое тѣло никогда не удаляется сколь-нибудь значительно отъ этого центра, такъ, что можно безъ чувствительной погрѣшности принять, что это большое тѣло или находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно, тогда малыя тѣла будутъ обращаться около большого по эллипсамъ и радіусы къ нему проводимые будутъ описывать площади пропорціональныя времени постольку, поскольку не происходитъ отклоненій, вызываемыхъ или отклоненіемъ большого тѣла отъ общаго центра тяжести системы, или же отъ взаимодѣйствій малыхъ тѣлъ другъ на друга. Но массы малыхъ тѣлъ можно уменьшать настолько, что эти отклоненія и эти взаимодѣйствія станутъ меньше любой, назначенной величины, т.-е. настолько, что орбиты такъ приблизятся къ эллипсамъ и площади къ пропорціональности времени, что погрѣшности будутъ меньше любой, напередъ заданной величины.

Случай 2. Вообразимъ, что система многихъ малыхъ тѣлъ обращающихся вышеописаннымъ образомъ около большого, или просто, что система двухъ тѣлъ обращающихся другъ около друга, перемѣщается равномѣрно и прямолинейно, и, что въ то же время эти тѣла подвергаются дѣйствію еще гораздо бóльшаго тѣла, находящагося весьма далеко въ сторонѣ. Такъ какъ равныя ускорительныя силы, дѣйствующія на всѣ тѣла по парал-

---

[114]) Въ этомъ предложеніи Ньютонъ ставитъ задачу о движеніи многихъ тѣлъ, далеко еще окончательно не рѣшенную и до сихъ поръ. Простѣйшій случай этой задачи, есть такъ называемая, задача трехъ тѣлъ, и замѣчаніе Ньютона какъ бы заставляетъ думать, что онъ уже намѣчалъ тѣ случаи, когда задача рѣшается.

Tisserand разобравъ въ гл. VIII перваго тома своей Mécanique Celeste изслѣдованія Лагранжа о задачѣ трехъ тѣлъ въ § 58 говоритъ: «Какъ видно, точное интегрированіе дифференціальныхъ уравненій, задачи трехъ тѣлъ, извѣстно въ томъ случаѣ, когда ихъ взаимныя разстоянія сохраняютъ постоянныя отношенія другъ къ другу; этотъ случай подраздѣляется на два: когда три тѣла все время находятся въ вершинахъ равносторонняго треугольника, и когда они постоянно остаются на одной прямой. Насколько намъ извѣстно это единственные случаи, въ которыхъ задача могла быть рѣшена; аналитическія ея трудности не могли быть превзойдены даже, когда три тѣла предполагаются постоянно на одной прямой, если не дѣлать допущенія, что разстоянія между ними находятся въ постоянномъ другъ къ другу отношеніи». Principia изданы въ первый разъ въ 1686 г. Небесная Механика Тиссерана въ 1889.

лельнымъ направленіямъ не измѣняютъ ни относительныхъ положеній, ни относительныхъ движеній тѣлъ, а производятъ лишь совокупное перемѣщеніе всей системы, то очевидно, что отъ притяженія этимъ большимъ тѣломъ, не произойдетъ никакихъ измѣненій въ относительныхъ другъ къ другу движеніяхъ притягиваемыхъ малыхъ тѣлъ, кромѣ тѣхъ измѣненій, которыя вызываются или неравенствомъ ускорительныхъ силъ этого притяженія, или же отступленіемъ ихъ отъ параллельности. Предположимъ, что притяженія всѣхъ тѣлъ большимъ обратно пропорціональны квадратамъ разстояній; если увеличить разстояніе этого большого тѣла настолько, чтобы разности его разстояній до малыхъ тѣлъ и разности въ направленіяхъ этихъ прямыхъ, были меньше напередъ назначенныхъ величинъ, то относительныя движенія малыхъ тѣлъ сохранятся и отступленія въ нихъ будутъ меньше любой величины. Вмѣстѣ съ тѣмъ въ виду малости ихъ взаимныхъ разстояній, вся ихъ система будетъ притягиваться на манеръ одного тѣла, и, слѣдовательно, двигаться подъ дѣйствіемъ этого притяженія большимъ тѣломъ подобно одному тѣлу, т.-е. центръ тяжести [115]) системы будетъ описывать около большого тѣла коническое сѣченіе (гиперболу или параболу при слабомъ притяженіи, эллипсъ при болѣе сильномъ), и радіусомъ, проводимымъ къ большому тѣлу будутъ описываться площади пропорціональныя времени, причемъ не будетъ иныхъ погрѣшностей, кромѣ весьма малыхъ происходящихъ отъ разстояній между тѣлами, и которыя можно уменьшить сколько угодно.

Разсуждая подобнымъ же образомъ, можно переходить къ болѣе сложнымъ случаямъ до безконечности.

Слѣдствіе 1. Во второмъ случаѣ, чѣмъ ближе большое тѣло будетъ находиться къ системѣ двухъ или многихъ тѣлъ, тѣмъ болѣе будутъ возмущаемы относительныя движенія частей системы, какъ отъ того, что наклоненія прямыхъ проводимыхъ отъ этого большого тѣла къ прочимъ становятся больше, такъ и потому, что больше будутъ и отступленія въ пропорціональности.

Слѣдствіе 2. Возмущенія будутъ еще больше, если предположить, что ускорительныя силы притяженія частей системы къ этому наибольшему тѣлу не находятся въ обратномъ отношеніи квадратовъ разстояній до него, въ особенности если отступленія отъ этого отношенія будутъ болѣе значительны нежели отступленія въ пропорціяхъ разстояній малыхъ тѣлъ до большого. Ибо, если ускорительная сила дѣйствующая равномѣрно и по прямымъ параллельнымъ не возмущаетъ относительныхъ движеній, то ясно, что возмущенія происходящія отъ неравномѣрности этого дѣйствія будутъ больше или меньше, сообразно бо́льшей или меньшей неравномѣрности. Избытки бо́льшихъ натисковъ дѣйствуя на одни тѣла и не дѣйствуя на

---

[115]) Это и есть то мѣсто, на которое указано въ пр. 22, и на основаніи, котораго можно думать, что Ньютону былъ извѣстенъ и общій законъ движенія центра тяжести системы.

прочія, очевидно будутъ измѣнять ихъ относительныя положенія, и эти возмущенія прилагаясь къ возмущеніямъ, происходящимъ отъ непараллельности направленій дадутъ и бо́льшія полныя возмущенія.

Слѣдствіе 3. Отсюда слѣдуетъ, что если части сказанной системы движутся по эллипсамъ или кругамъ безъ замѣтныхъ возмущеній, то, очевидно, что система или совершенно не подвержена ускоряющимъ силамъ направленнымъ къ другимъ тѣламъ, или же подвержена дѣйствію такихъ силъ, коихъ направленія параллельны и величины равны.

Предложеніе LXVI. Теорема XXVI.

Если три тѣла притягиваются взаимно съ силами обратно пропорціональными квадратамъ разстояній и оба меньшихъ обращаются вокругъ третьяго наибольшаго, то площади, описываемыя радіусомъ, проводимымъ отъ средняго и ближайшаго къ наибольшему, будутъ ближе къ пропорціональности временамъ и его траекторія ближе къ эллипсу, въ фокусѣ коего сходятся эти радіусы, когда это наибольшее тѣло будетъ двигаться подъ дѣйствіемъ сказанныхъ притяженій, нежели въ томъ случаѣ, когда оно, не испытывая притяженій отъ малыхъ тѣлъ, оставалось бы въ покоѣ или же будучи притягиваемо или значительно сильнѣе, или значительно слабѣе, совершало бы или гораздо бо́льшія, или гораздо меньшія движенія.

Это свойство почти само собою вытекаетъ изъ 2-го слѣдствія предыдущаго предложенія, но его можно вывести съ бо́льшею полнотою и отчетливостью слѣдующимъ образомъ.

Случай 1. Пусть оба меньшихъ тѣла P и S (фиг. 100) обращаются въ одной плоскости вокругъ бо́льшаго T, причемъ P описываетъ внутреннюю орбиту PAB, S—внѣшнюю ESE.

Пусть SK есть среднее разстояніе тѣла P до S, представимъ этою же длиною и ускорительную силу притяженія тѣла P тѣломъ S. Возьмемъ длину SL такъ, чтобы было:

$$SL : SK = SK^2 : SP^2,$$

то эта длина представитъ ускорительную силу притяженія тѣломъ S тѣла P при произвольномъ удаленіи SP. Проведи PT и параллельную ей LM, которая пересѣчетъ ST въ M. Притяженіе SL разложится (сл. 2 зак.) на притяженія SM и LM.

Такимъ образомъ на тѣло P будутъ дѣйствовать три ускорительныя силы: *первая сила* направлена къ T и происходитъ отъ взаимнаго притяженія тѣлъ P и T. Подъ дѣйствіемъ одной этой силы тѣло P должно бы описывать вокругъ тѣла T, неподвижнаго ли, или движущагося подъ вліяніемъ этого притяженія, эллипсъ, фокусъ котораго находится въ центрѣ тѣла T и радіусъ PT описывалъ бы площади, пропорціональныя временамъ. Это слѣдуетъ изъ пр. XI и сл. 2 и 3, теор. XXI. *Вторая сила* есть притяженіе LM, направленное также отъ P къ T; слагаясь съ первою силою, она не производитъ нарушенія пропорціональности площадей времени (т. XXI, сл. 3). Но такъ какъ эта сила не находится въ обратной пропорціональности квадрату разстоянія PT, то по соединеніи съ предыдущей, она даетъ силу, отступающую отъ такой пропорціональности, въ тѣмъ бо́льшей мѣрѣ, чѣмъ больше отношеніе этой второй силы къ первой, при равныхъ прочихъ условіяхъ.

Но такъ какъ (XI и сл. 2 т. XXI) сила, подъ дѣйствіемъ которой тѣло описываетъ эллипсъ вокругъ фокуса T, должна быть направленной въ эту точку и быть обратно пропорціональной квадрату разстоянія PT до нея, составленная же сила отъ этой пропорціи отступаетъ, то она заставитъ и орбиту PAB отклониться отъ эллиптической формы съ фокусомъ въ точкѣ T, и это отклоненіе будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ больше отношеніе второй силы LM къ первой, при равенствѣ прочихъ условій.

Наконецъ, *третья сила*, дѣйствуя на тѣло P по прямой параллельной ST, при сложеніи съ предыдущими даетъ равнодѣйствующую, которая уже не направлена болѣе отъ P къ T, но которая тѣмъ болѣе отступаетъ отъ этого направленія, чѣмъ болѣе отношеніе этой третьей силы къ первымъ двумъ, при прочихъ равныхъ условіяхъ; отъ этого при движеніи тѣла P радіусъ PT не будетъ уже описывать площади пропорціональныя времени, и отступленіе отъ этой пропорціональности будетъ тѣмъ значительнѣе, чѣмъ больше отношеніе третьей силы къ первымъ двумъ. Кромѣ того, указанное выше уклоненіе орбиты PAB отъ эллиптической формы, при дѣйствіи этой третьей силы еще возрастетъ по двумъ причинамъ — во-первымъ, потому, что полная сила не направлена отъ P къ T и во-вторыхъ, что она не обратно пропорціональна квадрату разстоянія PT.

Принимая все это въ соображеніе, видно, что площади будутъ тогда ближе всего къ пропорціональности, когда третья сила, при сохраненіи величины первыхъ двухъ, будетъ наименьшая, и орбита PAB будетъ тогда ближе всего подходить къ эллиптической формѣ, когда и вторая, и третья сила будутъ наименьшія при сохраненіи величины первой силы.

Представимъ длиною SN ускорительную силу притяженія тѣла T тѣломъ S, тогда если бы притяженія SM и SN были равны, то дѣйствуя одинаково на тѣла P и T и по направленіямъ параллельнымъ, эти силы не измѣняли бы относительнаго положенія тѣлъ P и T и ихъ относительныя движенія остались бы тѣми же самыми, если бы обѣ эти силы были уничтожены (сл. 4 зак.). Поэтому, когда притяженіе SN меньше притяженія SM, то оно уничтожитъ часть его, равную SN, останется часть MN, которою и будетъ возмущаться какъ пропорціональность площадей времени, такъ и эллиптическая форма орбиты. Точно также, когда притяженіе SN будетъ больше SM, то возмущеніе пропорціональности и формы будетъ происходить только отъ разности MN. Такимъ образомъ отъ дѣйствія притяженія SN предыдущая третья сила SM сводится къ силѣ MN, первая же и вторая сила остаются безъ измѣненія. Поэтому пропорціональность площадей времени и приближеніе орбиты къ эллиптической формѣ соблюдаются точнѣе тогда, когда сила MN или равна нулю, или наименьшая; это же имѣетъ мѣсто тогда, когда ускорительныя силы притяженій тѣлъ P и T тѣломъ S приближаются сколь возможно къ равенству, т.-е. когда притяженіе SN не равно ни нулю и не меньше наименьшаго изъ притяженій SM, но лежитъ посерединѣ между наибольшимъ и наименьшимъ значеніями SM, т.-е. или немного болѣе, или немного менѣе притяженія SK.

Случай 2. Положимъ теперь, что меньшія тѣла P и T обращаются около бóльшаго T въ различныхъ плоскостяхъ. Сила LM, дѣйствуя по направленію прямой PT, лежащей въ плоскости орбиты PAB будетъ оказывать то же самое дѣйствіе, какъ и раньше и не будетъ выводить тѣло P изъ плоскости его орбиты. Вторая же сила NM, дѣйствуя по направленію параллельному прямой ST (слѣдовательно, по направленію наклонному къ плоскости PAB, когда тѣло S находится внѣ линіи узловъ), произведетъ кромѣ указаннаго выше возмущенія въ движеніи по долготѣ еще и возмущеніе въ широтѣ, выводя тѣло изъ плоскости его орбиты. Это возмущеніе при какомъ-либо заданномъ относительномъ положеніи тѣлъ P и T будетъ пропорціонально производящей его силѣ MN и, слѣдовательно, будетъ наименьшимъ, когда сила MN будетъ наименьшею, т.-е. (какъ уже изложено выше) когда притяженіе SN или немного болѣе, или немного менѣе притяженія SK.

Слѣдствіе 1. Отсюда легко заключить, что при обращеніи нѣсколькихъ малыхъ тѣлъ P, S, R ... около большаго T, движеніе ближайшаго тѣла P будетъ въ меньшей степени возмущаться притяженіями прочихъ, когда это наибольшее тѣло T сообразно величинѣ ускорительныхъ силъ, притягивается и возмущается прочими тѣлами, а также и эти прочія другъ другомъ.

Слѣдствіе 2. Въ системѣ трехъ тѣлъ T, P, S, въ которой притяженія любыхъ двухъ третьимъ обратно пропорціональны квадратамъ разстояній, тѣло P описываетъ радіусомъ PT около тѣла T площади болѣе быстро близъ соединенія A и противостоянія B, нежели близъ квадратуръ C и D. Ибо всякая сила, дѣйствующая на тѣло P и не дѣйствующая на тѣло T, и не направленная по прямой PT ускоряетъ или замедляетъ описаніе площадей сообразно тому, направлена ли она въ сторону движенія или въ сторону ему встрѣчную. Такова сила MN, при переходѣ тѣла P отъ C къ A она направлена въ сторону движенія и ускоряетъ его, затѣмъ отъ A до D — противъ движенія и замедляетъ его, затѣмъ отъ D до B по движенію и, наконецъ, отъ B до C противъ движенія.

Слѣдствіе 3. Изъ того же разсужденія слѣдуетъ, что при прочихъ одинаковыхъ условіяхъ тѣло P быстрѣе движется въ соединеніи и противостояніи, нежели въ квадратурахъ.

Слѣдствіе 4. Орбита тѣла P при прочихъ равныхъ условіяхъ въ квадратурахъ имѣетъ бóльшую кривизну, нежели въ соединеніи и въ противостояніи, ибо тѣло, болѣе быстро движущееся, менѣе отклоняется отъ своего прямого пути, кромѣ того сила KL или MN въ соединеніяхъ и противостояніяхъ направлена обратно той силѣ, которою тѣло P притягивается къ тѣлу T и, слѣдовательно, уменьшаетъ эту силу, тѣло же P менѣе отклоняется отъ прямого пути тамъ, гдѣ оно менѣе сильно притягивается тѣломъ T.

Слѣдствіе 5. Поэтому тѣло P при прочихъ равныхъ условіяхъ отходитъ болѣе далеко отъ тѣла T въ квадратурахъ, нежели въ соединеніяхъ и противостояніяхъ. Такъ это происходитъ, если не принимать въ разсчетъ эксцентричности движенія. Если же орбита тѣла P эксцентричная, то ея эксцентриситетъ (какъ будетъ подробнѣе выяснено въ слѣдствіи 9) становится наибольшимъ, когда апсиды совпадаютъ съ сизигіями, поэтому можетъ случиться, что тѣло, придя въ дальнюю вершину, будетъ въ сизигіяхъ находиться отъ тѣла T въ бóльшемъ удаленіи, нежели въ квадратурахъ.

Слѣдствіе 6. Центростремительная сила центральнаго тѣла T, которою тѣло P удерживается на своей орбитѣ, въ квадратурахъ отъ прибавленія силы LM увеличивается, въ сизигіяхъ же отъ отнятія силы KL уменьшается. Самая величина силы KL измѣняется такъ, что сказанное уменьшеніе больше, нежели увеличеніе. Упомянутая центростремительная сила пропорціональна радіусу TP (IV, 2) и обратно пропорціональна квадрату времени обращенія, какъ видно произведеніе этихъ двухъ отношеній отъ присоединенія силы KL должно уменьшаться, т.-е. если радіусъ орбиты сохраняетъ свою величину, то время обращенія должно увеличиться и притомъ какъ корень квадратный изъ того отношенія, въ которомъ возросла сила. Когда же сказанный радіусъ увеличивается, то и время обращенія также увеличивается, но въ отношеніи бóльшемъ, нежели степень $\frac{3}{2}$ радіуса (сл. 6, IV). Когда же сказанный радіусъ уменьшается, то и время обращенія уменьшается, но опять-таки въ отношеніи бóльшемъ нежели степень $\frac{3}{2}$ радіуса.

Если бы притягательная сила центральнаго тѣла постепенно убывала, то тѣло P, все менѣе и менѣе притягиваемое, непрерывно удалялось бы отъ центра T и наоборотъ, если бы эта сила увеличивалась, то это тѣло приближалось бы къ центру T. Поэтому, когда производимое весьма удаленнымъ тѣломъ S дѣйствіе, на величину котораго уменьшается эта сила, будетъ попеременно возрастать и убывать, то соотвѣтственно будетъ поперемѣнно возрастать и убывать радіусъ PT, время же обращенія будетъ возрастать или убывать какъ произведеніе отношенія степеней $\frac{3}{2}$ радіусовъ на отношеніе корней квадратныхъ силы центральнаго тѣла, къ которой придана или изъ которой вычтена величина дѣйствія весьма удаленнаго тѣла S.

Слѣдствіе 7. Изъ предыдущаго слѣдуетъ, что главная ось или линія апсидъ эллипса, описываемаго тѣломъ P, будетъ также перемѣщаться попеременнымъ угловымъ движеніемъ; но такъ какъ угловое перемѣщеніе по движенію тѣла P преобладаетъ надъ встрѣчнымъ, то общее перемѣщеніе будетъ въ сторону движенія тѣла P. Дѣйствительно, сила, съ которою тѣло P побуждается къ тѣлу T въ квадратурахъ, гдѣ сила MN равна нулю, слагается изъ силы LM и притяженія тѣла T. Сила LM при увеличеніи разстоянія PT увеличивается приблизительно въ томъ же отношеніи, какъ это разстояніе, вторая же сила уменьшается пропорціонально квадрату разстоянія, поэтому сумма этихъ силъ убываетъ въ отношеніи меньшемъ, нежели квадратъ разстояній и, слѣдовательно (XLV, 1), дальняя вершина будетъ перемѣщаться въ сторону противъ обращенія тѣла P. Въ соединеніи же и въ противостояніи сила, съ которою тѣло P побуждается къ тѣлу T, равна разности между притягательною силою тѣла T и силою KL, разность же эта, въ виду того, что сила KL возрастаетъ приблизительно пропорціонально PT, убываетъ болѣе быстро, нежели квадратъ разстоянія PT, слѣдовательно (XLV, 1), вершина будетъ перемѣщаться въ сторону движенія. Въ положеніяхъ между квадратурами и сизигіями перемѣщеніе вершины зависитъ отъ обѣихъ причинъ и поэтому будетъ прямое или попятное, смотря по тому, которая причина преобладаетъ. Такъ какъ сила KL въ сизигіяхъ почти вдвое больше, нежели сила LM въ квадратурахъ, то преобладающее значеніе имѣетъ сила KL и вершина будетъ перемѣщаться прямымъ движеніемъ.

Справедливость какъ этого слѣдствія, такъ и предыдущаго можетъ быть установлена и проще, разсматривая, что система двухъ тѣлъ P и T какъ бы окружена многими тѣлами S, S, S ..., расположенными повсюду по орбитѣ ESE; отъ притяженія этихъ тѣлъ дѣйствіе тѣла T повсюду уменьшается, слѣдовательно, оно убываетъ болѣе быстро, нежели въ отношеніи квадратовъ разстояній.

Слѣдствіе 8. Такъ какъ прямое или попятное перемѣщеніе апсидъ зависитъ отъ того, происходитъ ли убываніе центростремительной силы въ бо́льшемъ или въ меньшемъ отношеніи, нежели квадратъ разстоянія PT когда тѣло переходитъ отъ ближней вершины къ дальней и отъ того, какъ происходитъ подобное же ея возрастаніе при переходѣ тѣла отъ дальней вершины въ ближнюю, то это перемѣщеніе апсидъ будетъ наиболѣе быстрымъ тамъ, гдѣ отношеніе силы въ дальней вершинѣ къ силѣ въ ближней вершинѣ наиболѣе уклоняется отъ обратнаго отношенія квадратовъ разстояній. Очевидно, что когда апсиды находятся въ своихъ сизигіяхъ, то вслѣдствіе отнятія силы KL или $NM - LM$ они перемѣщаются прямымъ движеніемъ болѣе быстро, въ квадратурахъ же они перемѣщаются отъ прибавленія силы LM попятнымъ движеніемъ и медленнѣе. Отъ большой продолжительности времени, въ теченіе котораго совершается какъ болѣе быстрое прямое перемѣщенiе такъ болѣе медленное попятное, это неравенство достигаетъ весьма значительной величины.

Слѣдствiе 9. Если тѣло притягивается къ какому-либо центру обратно пропорцiонально квадрату разстоянiя и обращается вокругъ этого центра по эллипсу, и если при переходѣ отъ дальней вершины къ ближней сила возрастаетъ при приближенiи къ центру отъ прибавленiя нѣкоторой новой силы быстрѣе, нежели убываетъ квадратъ разстоянiй, то очевидно, что тѣло подъ дѣйствiемъ этой новой силы будетъ приближаться къ центру ближе, нежели въ томъ случаѣ, когда на него дѣйствовала только сила обратно пропорцiональная квадрату разстоянiя; слѣдовательно, оно будетъ описывать орбиту, лежащую внутри эллипса и въ ближней вершинѣ будетъ находиться въ болѣе близкомъ разстоянiи отъ центра, нежели ранѣе, значитъ, отъ прибавленiя этой новой силы орбита станетъ болѣе эксцентричной. Если затѣмъ при переходѣ тѣла отъ ближней вершины къ дальней сила возрастаетъ въ той же постепенности, въ какой она до того убывала, то тѣло вернется къ своему первоначальному удаленiю, поэтому, если сила убываетъ болѣе быстро, то тѣло, будучи притягиваемо къ центру силъ слабѣе, удалится отъ него на бóльшее разстоянiе и эксцентриситетъ орбиты еще возрастетъ. Въ виду этого, если при каждомъ обращенiи пропорцiя увеличенiя или уменьшенiя центростремительной силы по сравненiю съ квадратами разстоянiй будетъ возрастать, то эксцентриситетъ орбиты будетъ увеличиваться, и наоборотъ, при уменьшiи этой пропорцiи онъ будетъ убывать. Такимъ образомъ въ системѣ трехъ тѣлъ T, P, S, когда апсиды орбиты PAB находятся въ квадратурахъ, сказанная пропорцiя возрастанiя и убыванiя наименьшая, когда же апсиды въ сизигiяхъ, то она наибольшая. Когда апсиды въ квадратурахъ, то пропорцiя вблизи апсидъ меньше, когда онѣ въ сизигiяхъ, то больше, нежели вторая степень разстоянiй. Отъ этой бóльшей пропорцiи происходитъ, какъ уже сказано, прямое перемѣщенiе апсидъ. Если же разсмотрѣть пропорцiю возрастанiя или убыванiя силы при полномъ переходѣ отъ одной апсиды до другой, то она окажется въ общемъ меньше пропорцiи квадратовъ разстоянiй. Когда апсиды находятся въ квадратурахъ отношенiе величины силы въ ближней вершинѣ къ ея величинѣ въ дальней вершинѣ меньше, нежели отношенiе квадрата разстоянiя дальней вершины къ квадрату разстоянiя ближней до фокуса эллипса; когда же апсиды въ сизигiяхъ, то отношенiе величины силы въ ближней вершинѣ къ величинѣ силы въ дальней вершинѣ больше, нежели отношенiе квадратовъ разстоянiй. Это происходитъ потому, что въ квадратурахъ силы LM прилагаются къ притягательной силѣ тѣла T и даютъ въ суммѣ силы, находящiяся въ меньшемъ отношенiи, въ сизигiяхъ же силы KL вычитаются изъ притяженiя тѣла T, и оставляютъ разности, находящiяся въ бóльшемъ отношенiи. Поэтому при переходѣ отъ одной вершины къ другой пропорцiя измѣняемости силы наименьшая въ квадратурахъ, наибóльшая въ сизигiяхъ, и при перемѣщенiи апсидъ изъ квадратуръ въ сизигiи эта пропорцiя постоянно возрастаетъ, слѣдовательно, возрастаетъ и экцентриситетъ эллипса, при перемѣщеніи же отъ сизигій къ квадратурамъ сказанная пропорція постоянно убываетъ, и эксцентриситетъ уменьшается.

Слѣдствіе 10. Чтобы изучить законъ отклоненій по широтѣ, вообразимъ, что плоскость орбиты EST остается неизмѣнной; изъ разсмотрѣнія указанной выше общей причины возмущеній слѣдуетъ, что изъ двухъ силъ NM и ML, являющихся этою причиною, сила ML дѣйствующая въ плоскости орбитъ PAB не производитъ возмущеній по широтѣ. Что же касается силы MN, то когда узлы находятся въ сизигіяхъ, сила эта также дѣйствуетъ въ плоскости орбиты и не возмущаетъ движенія по широтѣ, когда же узлы находятся въ квадратурахъ, то возмущенія наибольшія, и эта сила такъ отвлекаетъ тѣло P отъ его орбиты, что при переходѣ тѣла отъ квадратуръ къ сизигіямъ наклонность орбиты уменьшается, при переходѣ же тѣла отъ сизигій къ квадратурамъ—увеличивается. Отъ такого дѣйствія возмущающей силы происходитъ измѣненіе наклонности такъ, что когда тѣло находится въ сизигіяхъ, наклонность оказывается наименьшею, когда же тѣло подходитъ къ узлу, то наклонность возвращается приблизительно къ своей прежней величинѣ.

Когда узлы находятся въ октантахъ послѣ квадратуръ, т.-е. между C и A, D и B, то разсуждая подобно изложенному можно заключить, что при переходѣ тѣла отъ того или другого узла до девятидесятаго отъ него градуса наклонность орбиты постоянно убываетъ, затѣмъ на протяженіи ближайшихъ 45° до ближайшей квадратуры наклонность увеличивается, затѣмъ на протяженіи слѣдующихъ 45° до ближайшаго узла убываетъ. Отсюда видно, что убываніе больше, нежели возрастаніе и поэтому наклонность въ послѣдующемъ узлѣ меньше, нежели въ предыдущемъ. Разсуждая, подобнымъ же образомъ, убѣдимся, что когда узлы находятся въ другихъ октантахъ, т.-е. между A и D или между B и C, то наклонность будетъ увеличиваться. Слѣдовательно наибольшаго своего значенія наклонность достигаетъ, когда узлы находятся въ сизигіяхъ. При переходѣ же узловъ отъ сизигій къ квадратурамъ наклонность при каждомъ прохожденіи тѣла черезъ узлы уменьшается и становится наименьшей, когда сами узлы находятся въ квадратурахъ, тѣло же — въ сизигіяхъ. Затѣмъ наклонность къ той же постепенности возрастаетъ, какъ она раньше убывала и, когда узлы возвратятся въ положеніе близкое къ ихъ сизигіямъ наклонность вернется къ своему первоначальному значенію.

Слѣдствіе 11. Когда узлы находятся въ своихъ въ квадратурахъ, то тѣло P при переходѣ отъ узла C черезъ соединеніе A къ узлу D отклоняется возмущающею силою въ сторону къ S, при переходѣ же отъ узла D черезъ противостояніе B къ узлу C оно отклоняется въ сторону обратную, поэтому на всемъ протяженіи отъ узла C до непосредственной близости къ узлу D тѣло отклоняется отъ своей орбиты въ одну сторону и, слѣдовательно, придя въ этотъ узелъ, оно будетъ находиться въ наибольшемъ удаленіи отъ первоначальной плоскости CD и значитъ пройдетъ черезъ плоскость EST не въ точкѣ D—узлѣ плоскости CD, но въ точкѣ, которая продвинута въ сторону тѣла S, слѣдовательно новое положеніе узла смѣстилось навстрѣчу движенія тѣла P. По этой причинѣ при каждомъ оборотѣ тѣла узлы будутъ продолжать перемѣщаться въ ту же сторону. Итакъ, когда узлы находятся въ квадратурахъ, то они постоянно перемѣщаются на встрѣчу движенію тѣла; въ сизигіяхъ, когда движеніе по широтѣ не возмущается, узлы неподвижны; въ промежуточныхъ положеніяхъ, гдѣ предыдущія условія ослаблены, узлы перемѣщаются медленнѣе; слѣдовательно, вообще, узлы перемѣщаются въ сторону, обратную движенію, оставаясь при нѣкоторыхъ обращеніяхъ неподвижными.

Слѣдствіе 12. Всѣ описанныя въ предыдущихъ слѣдствіяхъ отступленія немного болѣе въ соединеніяхъ тѣлъ P и S, нежели въ ихъ противостояніяхъ, вслѣдствіе большей величины силъ NM и ML производящихъ эти отступленія.

Слѣдствіе 13. Такъ какъ причины явленій, указанныхъ въ предыдущихъ слѣдствіяхъ не зависятъ отъ величины тѣла S, то все предыдущее имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда величина тѣла S такова, что около него будетъ обращаться система двухъ тѣлъ P и T. Но такъ какъ при увеличеніи тѣла S увеличивается и его притягательная сила, отъ которой собственно и происходятъ возмущенія тѣла P, то всѣ эти возмущенія при равныхъ разстояніяхъ будутъ больше въ этомъ послѣднемъ случаѣ, нежели въ томъ, когда тѣло S обращается около системы двухъ тѣлъ P и T.

Слѣдствіе 14. Такъ какъ силы NM и ML, когда тѣло S весьма отдаленное, приблизительно пропорціональны силѣ SK и отношенію силы PT къ ST, т.-е. когда задано какъ разстояніе PT, такъ и абсолютная сила тѣла S, эти возмущающія силы обратно пропорціональны ST^3. Но силы NM и ML составляютъ причины всѣхъ возмущеній и всѣхъ явленій, о которыхъ сказано въ предыдущихъ слѣдствіяхъ, то ясно что, при сохраненіи системы тѣлъ T и P и измѣненіи лишь разстоянія ST и абсолютной силы тѣла S, всѣ сказанныя проявленія приблизительно прямо пропорціональны абсолютной силѣ тѣла S и обратно пропорціональны кубу разстоянія ST. Поэтому, когда система тѣлъ T и P обращается около весьма удаленнаго тѣла S, то силы NM и ML и ихъ дѣйствія будутъ (сл. 2 и 6 пр. IV) обратно пропорціональны квадрату времени обращенія. Наконецъ, если величина тѣла S пропорціональна его абсолютной силѣ, то возмущающія силы MN и ML и ихъ дѣйствія будутъ прямо пропорціональны кубу видимаго діаметра тѣла S, усматриваемаго съ тѣла T и, наоборотъ, ибо это отношеніе то же самое, какъ обратное отношеніе куба разстояній.

Слѣдствіе 15. Поэтому, если сохраняя видъ и соотношенія, а также и взаимное наклоненіе орбитъ ESE и PAB, измѣнять лишь ихъ размѣры и при этомъ или сохранять или измѣнять въ какомъ-либо постоянномъ отношеніи абсолютныя силы тѣлъ S и T, то всѣ силы (т.-е. притяженіе тѣломъ T, дѣйствіемъ котораго тѣло P уклоняется отъ своего прямолинейнаго пути и вынуждается описывать свою орбиту PAB и сила тѣла S, которою это тѣло P отклоняется отъ своей орбиты) будутъ дѣйствовать все время подобнымъ образомъ и въ подобной пропорціи, такъ что всѣ ихъ проявленія будутъ подобны и пропорціональны своимъ временамъ, т.-е. всѣ линейныя отклоненія будутъ пропорціональны діаметрамъ орбитъ, всѣ угловыя будутъ одинаковы и времена подобныхъ линейныхъ отклоненій или равныхъ угловыхъ будутъ пропорціональны временамъ обращенія по орбитамъ.

Слѣдствіе 16. Слѣдовательно, если заданы видъ и взаимныя наклоненія орбитъ и измѣняются какъ бы то ни было массы тѣлъ, силы и разстоянія, то по извѣстнымъ въ какомъ-либо случаѣ отклоненіямъ и ихъ періодамъ можно вывести весьма близко величины отклоненій и ихъ періоды для всякаго другого случая по слѣдующему способу.

Силы MN и ML при сохраненіи всего остального пропорціональны радіусу TP и производимыя ими дѣйствія (по слѣд. 2 л. X) пропорціональны этимъ силамъ и квадратамъ времени дѣйствія ихъ, т.-е. квадрату времени обращенія тѣла P.

Въ такой пропорціи находятся линейныя величины отклоненій тѣла P, слѣдовательно угловыя уклоненія, усматриваемыя изъ центра T (т.-е. перемѣщенія апсидъ и узловъ, а также и видимыя уклоненія по широтѣ и долготѣ) будутъ при всякомъ обращеніи тѣла P приблизительно пропорціональны квадрату періода этого обращенія. Соединяя это отношеніе съ отношеніями сл. 14, получимъ, что въ системѣ тѣлъ T, P, S, въ которой тѣло P обращается около ближайшаго къ нему тѣла T, это же послѣднее обращается около весьма отдаленнаго тѣла S, угловыя отклоненія тѣла P, усматриваемыя изъ центра тѣла T будутъ въ каждомъ отдѣльномъ обращеніи тѣла P прямо пропорціональны квадрату періода тѣла P и обратно пропорціональны квадрату періода обращенія тѣла T. Слѣдовательно, среднее движеніе вершинъ (апсидъ) будетъ находиться въ постоянномъ отношеніи къ среднему движенію узловъ, ибо каждое изъ этихъ движеній въ отдѣльности прямо пропорціонально квадрату періода обращенія тѣла P и обратно пропорціонально квадрату періода обращенія тѣла T. Движенія вершины и узловъ не измѣняются чувствительнымъ образомъ отъ увеличенія или уменьшенія эксцентриситета и наклонности орбиты PAB, если только эти измѣненія не слишкомъ велики [116]).

---

[116]) Въ этомъ LXVI предложеніи и въ его слѣдствіяхъ Ньютонъ указываетъ общій характеръ возмущеній, движенія близкаго къ круговому одного тѣла вокругъ другого (луна около земли) дѣйствіемъ третьяго, отъ нихъ весьма далекаго (солнца). Это предложеніе служитъ основаніемъ теоріи луны, излагаемой Ньютономъ въ третьей книгѣ, поэтому мы остановимся на его поясненіи нѣсколько подробнѣе, давъ аналитическое развитіе выраженій тѣхъ измѣненій элементовъ орбиты, для которыхъ въ текстѣ дано лишь построеніе, и общее указаніе. Но такъ какъ это примѣчаніе слишкомъ обширно, оно отнесено къ концу первой книги.

Слѣдствіе 17. Такъ какъ длина LM иногда больше, иногда меньше радіуса PT, то среднее значеніе этой силы можетъ быть представлено длиною радіуса PT, и отношеніе этой силы къ средней величинѣ SK или SN силы SP (вмѣсто SN можно брать и ST) будетъ равно отношенію длины PT къ длинѣ ST. Но отношеніе средней величины силы SN или ST, которою тѣло T удерживается на своей орбитѣ при обращеніи вокругъ тѣла S, къ той силѣ, которою тѣло P удерживается на своей орбитѣ при обращеніи его вокругъ тѣла T, равно произведенію отношенія $\frac{ST}{PT}$ на квадратъ отношенія періода обращенія тѣла P вокругъ тѣла T къ періоду обращенія тѣла T около S. Отсюда по равенству отношеній слѣдуетъ, что средняя величина силы LM относится къ той силѣ, которою тѣло P удерживалось бы на своей орбитѣ при обращеніи вокругъ T (т.-е. къ такой силѣ, подъ дѣйствіемъ которой тѣло P могло бы обращаться съ тѣмъ же періодомъ около точки T въ заданномъ разстояніи PT) какъ квадраты вышеупомянутыхъ періодовъ. Такимъ образомъ по извѣстнымъ періодамъ обращенія и разстоянію PT найдется средняя величина силы LM, послѣ же того, какъ эта величина найдена, опредѣлится и приближенная величина силы MN по пропорціи длинъ PT и MN.

Слѣдствіе 18. Вообразимъ, что по тѣмъ же законамъ, какъ тѣло P обращается вокругъ тѣла T, около этого же тѣла T обращается и нѣсколько жидкихъ тѣлъ, находящихся отъ него въ одинаковомъ удаленіи, и что затѣмъ эти жидкія тѣла отъ взаимнаго сближенія слились въ одно жидкое круговое кольцо концентричное съ тѣломъ T. Отдѣльныя части кольца, слѣдуя въ своихъ движеніяхъ законамъ движенія тѣла P, будутъ приближаться къ тѣлу T и двигаться быстрѣе въ своихъ соединеніяхъ съ тѣломъ S, нежели въ квадратурахъ. Узлы этого кольца, т.-е. точки пересѣченія его съ плоскостью орбиты тѣла S или T, находятся въ стояніяхъ въ сизигіяхъ, внѣ же сизигій узлы движутся попятно и скорость этого движенія въ квадратурахъ наибóльшая. Наклоненіе кольца будетъ измѣняться и его ось при каждомъ оборотѣ будетъ совершать колебанія, по совершеніи же кольцомъ полнаго оборота эта ось возвратится къ своему прежнему положенію, отступая отъ него лишь постолько, насколько она отнесена вслѣдствіе прецессіи узловъ.

Слѣдствіе 19. Вообрази теперь, что тѣло T имѣетъ форму шара и состоитъ изъ вещества не жидкаго, что оно увеличено и распространено до сказаннаго кольца, что по обводу этого тѣла сдѣлана выемка, заполненная водою, и что это тѣло равномѣрно вращается около своей оси, дѣлая оборотъ въ такое же время, какъ время обращенія сказаннаго кольца. Жидкость, то ускоряясь, то замедляясь, будетъ обладать въ сизигіяхъ бóльшею скоростью, въ квадратурахъ меньшею, нежели поверхность шара, и поэтому будетъ попеременно въ своей выемкѣ то приливать, то отливать, подобно морю. При обращеніи же около шара, коего центръ въ покоѣ, когда нѣтъ притяженія тѣла S, вода не имѣла бы ни приливовъ, ни отливовъ.

Въ такихъ условіяхъ находится также шаръ, движущійся равномѣрно по прямой линіи и въ то же время вращающійся около своего центра (сл. 5 зак.), а также и шаръ, отвлекаемый равномѣрно (т.-е. постоянною силою) отъ своего прямолинейнаго пути (сл. 6 зак.). Но если приблизить тѣло S, то отъ неравномѣрнаго его притяженія вода будетъ возмущаться, приэтомъ притяженіе ближайшихъ частей воды будетъ больше, дальнѣйшихъ слабѣе. Сила LM, дѣйствуя на воду внизъ (къ центру тѣла T) въ квадратурахъ, заставила бы ее опускаться на всемъ протяженіи до сизигій, сила же KL, дѣйствуя на воду вверхъ, заставила бы ее, противодѣйствуя ея опусканію, подниматься на всемъ протяженіи до квадратуръ, такъ происходило бы приливное и отливное движеніе, если бы оно не замедлялось треніемъ и направляющимъ вліяніемъ береговъ выемки.

Слѣдствіе 20. Если кольцо затвердѣетъ и размѣры шара уменьшатся, то приливное движеніе прекратится, но колебательное движеніе наклонности оси и прецессія узловъ сохранятся. Пусть шаръ вращается вмѣстѣ съ кольцомъ около той же самой оси, время обращенія шара и кольца одно и то же, и поверхность шара прилегаетъ къ внутренней поверхности кольца и съ нею связана неразрывно, тогда шаръ будетъ участвовать въ движеніяхъ кольца, будетъ колебаться вмѣстѣ съ нимъ, и узлы будутъ отступать. Шаръ, какъ будетъ сказано ниже, самъ по себѣ безразличенъ къ воспріятію усилій, кольцо, окружающее шаръ, должно имѣть наибо́льшій уголъ наклоненія, когда его узлы въ сизигіяхъ, слѣдовательно, при переходѣ узловъ къ сизигіямъ оно побуждается измѣнять свое наклоненіе и отъ этого побужденія будетъ сообщаться движеніе всему шару. Шаръ будетъ сохранять сообщенное ему движеніе до тѣхъ поръ, пока кольцо, подъ вліяніемъ противоположнаго дѣйствія, это движеніе поглотитъ и затѣмъ сообщитъ новое движеніе въ противоположную сторону, по этой причинѣ наибо́льшее движеніе въ сторону уменьшенія наклоненія будетъ когда узлы въ квадратурахъ и наименьшій уголъ наклоненія, когда, они въ октантахъ послѣ квадратуръ. Затѣмъ наибо́льшее движеніе по возстановленію наклонности будетъ въ сизигіяхъ, наибо́льшій ея уголъ въ ближайшихъ къ нимъ октантахъ. Въ совершенно подобныхъ условіяхъ находится и шаръ, не имѣющій кольца, но который въ экваторіальныхъ областяхъ или нѣсколько вздутъ и шире, нежели у полюсовъ, или состоитъ изъ вещества болѣе плотнаго. Избытокъ вещества въ экваторіальной области и замѣняетъ собою кольцо.

Если предположить, что центростремительная сила шара какимъ бы то ни было образомъ увеличена такъ, что всѣ его части стремятся внизъ подобно тяжелымъ тѣламъ на землѣ, то явленія, изложенныя въ этомъ и въ предыдущемъ слѣдствіяхъ отъ этого почти не измѣнятся, а лишь мѣста наибо́льшей и наименьшей высоты воды будутъ другія. Въ настоящемъ случаѣ вода будетъ оставаться на своей орбитѣ, удерживаясь не центробѣжной силой, но выемкою, въ которой она течетъ. Кромѣ того сила LM дѣйствуетъ на воду внизъ съ наибо́льшимъ напряженіемъ въ квадратурахъ, сила $KL = NM - LM$ дѣйствуетъ на нее вверхъ съ наибо́льшимъ напряженіемъ въ сизигіяхъ. Соединенное дѣйствіе этихъ силъ въ октантахъ предшествующихъ сизигіямъ перестаетъ быть направленнымъ внизъ и начинаетъ направляться вверхъ; въ октантахъ послѣ сизигій оно перестаетъ быть направленнымъ вверхъ и начинаетъ направляться внизъ, поэтому наибо́льшая высота воды должна бы находиться приблизительно въ октантахъ послѣ сизигій, наименьшая въ октантахъ послѣ квадратуръ поскольку восходящее и нисходящее движеніе воды, вызываемое дѣйствіемъ этихъ силъ, сохраняется нѣсколько долѣе вслѣдствіе инерціи и прекращается нѣсколько ранѣе вслѣдствіе препятствій въ выемкѣ.

Слѣдствіе 21. Причина, вслѣдствіе которой избыточное количество вещества на экваторѣ заставляетъ узлы отступать, заставитъ скорость отступанія при увеличеніи этого избытка увеличиваться, при уменьшеніи уменьшаться и при отсутствіи прекратиться. Если же снять вещества болѣе, нежели его было въ избыткѣ, т.-е. если шаръ сдѣлать по экватору или вдавшимся внутрь, или менѣе плотнымъ, нежели у полюсовъ, то движеніе узловъ обратится въ прямое.

Слѣдствіе 22. Слѣдовательно, и обратно по движенію узловъ можно судить о строеніи шара, а именно если мѣста полюсовъ на шарѣ сохраняются и движеніе узловъ попятное, то по экватору имѣется избытокъ вещества, если же это движеніе прямое—то недостатокъ. Вообрази сперва совершенно однородный и правильный шаръ, покоющійся въ свободномъ нространствѣ, пусть затѣмъ отъ дѣйствія какого-либо натиска, произведеннаго наклонно къ его поверхности, шаръ пришелъ въ движеніе, и что затѣмъ онъ продолжаетъ это частію вращательное, частію прямолинейное движеніе. Такъ какъ такой шаръ совершенно безразличенъ ко всякой оси, проходящей черезъ его центръ и не отдаетъ предпочтенія какой-либо оси или какому-либо ея положенію передъ всякимъ другимъ, то очевидно, что ни своей оси, ни ея наклоненія (т.-е. направленія въ пространствѣ) онъ заключающейся въ немъ самомъ силой измѣнить не можетъ. Пусть этотъ шаръ подвергается еще какому-нибудь новому наклонному натиску въ той же части своей поверхности, какъ и прежде, такъ какъ отъ того раньше или позднѣе будетъ произведенъ натискъ, дѣйствіе его не измѣняется, то ясно, что эти два натиска, будучи приложены послѣдовательно, произведутъ то же самое количество движенія, какъ и при совмѣстномъ и одновременномъ ихъ приложеніи, т.-е. то же самое, какъ если бы на шаръ подѣйствовала одна сила, составленная по 2-му слѣд. зак. изъ обѣихъ, слѣдовательно, получится одно простое движеніе около оси, имѣющей постоянное наклоненіе. Совершенно то же относится и до второго натиска, произведеннаго въ какомъ-либо иномъ мѣстѣ не лежащемъ на экваторѣ перваго движенія, также и до перваго натиска, если его произвести въ какомъ-нибудь мѣстѣ, не лежащемъ на экваторѣ движенія, произведеннаго вторымъ натискомъ безъ перваго, поэтому, если оба натиска будутъ произведены въ двухъ разныхъ мѣстахъ, то они произведутъ такое же вращательное движеніе, какъ если бы ихъ приложить одновременно и совмѣстно въ точкѣ пересѣченія экваторовъ движеній, производимыхъ каждымъ изъ нихъ порознь. Поэтому правильный и однородный шаръ не удерживаетъ нѣсколькихъ различныхъ движеній, но всѣ движенія, ему сообщенныя, слагаются въ одно и поскольку шаръ предоставленъ самому себѣ, онъ будетъ обладать только однимъ простымъ и равномѣрнымъ вращеніемъ около одной оси, сохраняющей все время неизмѣнное направленіе, и ни отъ центростремительной силы, ни отъ скорости поступательнаго движенія направленіе оси измѣняться не можетъ. Если вообразить, что плоскостью, проходящей черезъ его центръ и черезъ центръ силъ, шаръ раздѣленъ на два полушарія, то эта сила будетъ дѣйствовать на оба полушарія одинаково и поэтому такая сила не можетъ сообщить шару никакого вращательнаго движенія. Но если гдѣ-нибудь между полюсомъ и экваторомъ добавить нѣкоторое новое количество вещества, собраннаго какъ бы въ видѣ горы, то оно нарушитъ правильность движенія шара и будетъ производить по его поверхности перемѣщеніе полюсовъ, которые будутъ описывать по поверхности шара круги около первоначальнаго своего мѣста. Величина этого перемѣщенія полюсовъ не можетъ быть устранена иначе, какъ помѣстивъ сказанную гору или въ одномъ изъ полюсовъ, въ каковомъ случаѣ (сл. 21) узлы экватора будутъ перемѣщаться прямымъ движеніемъ, или же на экваторѣ, въ каковомъ случаѣ по указанной въ слѣд. 20 причинѣ узлы будутъ отступать, или же, наконецъ, прибавивъ новое количество вещества по другую сторону оси, которымъ сказанная гора уравновѣшивалась бы при движеніи, въ каковомъ случаѣ узлы будутъ перемѣщаться или прямымъ, или попятнымъ движеніемъ, смотря по тому, будутъ ли прежняя гора и это вновь прибавленное вещество ближе къ полюсу или къ экватору.

Предложеніе LXVII. Теорема XXVII.

Предполагая, что законы притяженія тѣ же, утверждаю, что наружное тѣло S описываетъ радіусами, проведенными къ центру тяжести O двухъ внутреннихъ тѣлъ P и T, площади, болѣе близкія къ пропорціональности и орбиту, болѣе близкую къ эллипсу, имѣющему свой фокусъ въ сказанномъ центрѣ, нежели оно описывало бы около срединнаго и наибольшаго тѣла T.

Притяженія тѣла S (фиг. 101) къ тѣламъ T и P по соединеніи и составляютъ полную силу, дѣйствующую на тѣло S. Эта сила направляется ближе къ центру тяжести O тѣлъ T и P, нежели къ бо́льшему изъ тѣлъ T и ближе къ обратной пропорціональности квадрату разстоянія SO до этого центра тяжести, нежели квадрату разстоянія ST; на основаніи этого высказанное утвержденіе легко устанавливается.

Предложенiе LXVIII. Теорема XXVIII.

Предполагая законы притяженiй тѣми же самыми, утверждаю, что внѣшнее тѣло S описываетъ радiусами, проведенными къ центру тяжести внутреннихъ тѣлъ P и T, площади, болѣе близкiя къ пропорцiональности времени и орбиту, болѣе близкую къ эллипсу, имѣющему фокусъ въ этомъ центрѣ тяжести, если срединное и наибóльшее тѣло такъ же какъ и прочiя тѣла, приводится этими притяженiями въ движенiе, нежели въ томъ случаѣ, когда это тѣло не подвергаясь притяженiю, остается въ покоѣ или подвергаясь гораздо болѣе сильному или гораздо болѣе слабому притяженiю, возмущается въ гораздо бóльшей или гораздо меньшей степени.

Это можно было бы доказать почти такимъ же образомъ, какъ и предложенiе LXVI, но болѣе сложнымъ разсужденiемъ, которое поэтому опускаю. Достаточно будетъ оцѣнить это дѣло такъ: изъ доказательства предыдущаго предложенiя слѣдуетъ, что тотъ центръ, къ которому направляется дѣйствующее на тѣло S (фиг. 101) составное притяженiе двухъ прочихъ, ближе къ ихъ центру тяжести, нежели къ наибóльшему изъ тѣлъ. Если бы этотъ центръ притяженiя двухъ тѣлъ совпадалъ съ ихъ центромъ тяжести и общiй центръ тяжести всѣхъ трехъ тѣлъ находился бы въ покоѣ, то тѣло S съ одной стороны и сказанный центръ тяжести двухъ прочихъ описывали бы въ точности эллипсы вокругъ общаго центра тяжести всей системы, находящагося въ покоѣ. Это слѣдуетъ изъ пр. LVIII сл. 2 по сопоставленiи его съ доказаннымъ въ предложенiяхъ LXIV и LXV. Поэтому эллиптическое движенiе возмущается отчасти отъ несовпаденiя центра тяжести двухъ тѣлъ съ тѣмъ центромъ, къ которому притягивается тѣло S. Если же, кромѣ того, сообщить еще движенiе и центру тяжести всей системы, то возмущенiе еще увеличится. Поэтому возмущенiе наименьшее, когда общiй центръ тяжести въ покоѣ, а это будетъ, когда срединное и наибóльшее тѣло притягивается по тѣмъ же законамъ, какъ и прочiя; возмущенiе всегда будетъ больше, когда общiй центръ тяжести всѣхъ трехъ тѣлъ, вслѣдствiе уменьшенiя движенiй тѣла T, начнетъ двигаться и будетъ все болѣе и болѣе перемѣщаться.

Слѣдствiе. Отсюда можно заключить, что когда нѣсколько меньшихъ тѣлъ обращаются около наибóльшаго, то описываемыя орбиты ближе подходятъ къ эллиптическимъ и описанiе площадей совершается болѣе равномѣрно, когда эти тѣла взаимно притягиваются съ ускорительными силами прямо пропорцiональными ихъ абсолютнымъ силамъ и обратно пропорцiональными квадратамъ разстоянiя и оттого возмущаются. Фокусъ всякой орбиты надо брать въ общемъ центрѣ тяжести всѣхъ внутреннихъ тѣлъ (т.-е. фокусъ первой и самой внутренней орбиты надо брать въ центрѣ тяжести наибольшаго и самого внутренняго тѣла, фокусъ второй орбиты въ центрѣ тяжести двухъ внутреннихъ тѣлъ, фокусъ третьей орбиты въ центрѣ тяжести трехъ внутреннихъ и т. д.), при такомъ условіи возмущенія будутъ меньше нежели въ томъ случаѣ, когда самое внутреннее тѣло было бы въ покоѣ и его бы взять за общій фокусъ всѣхъ орбитъ.

Предложеніе LXIX. Теорема XXIX.

Въ системѣ многихъ тѣлъ A, B, C, D и т. д., если какое-либо тѣло A притягиваетъ всѣ прочія съ ускорительными силами обратно пропорціональными квадратамъ разстояній до этого притягивающаго тѣла, если также и второе тѣло B притягиваетъ всѣ прочія тѣла A, C, D и т. д. съ силами обратно пропорціональными квадратамъ разстояній до этого притягивающаго тѣла, то абсолютныя силы притягивающихъ тѣлъ A и B будутъ относиться другъ къ другу какъ массы соотвѣтствующихъ тѣлъ, коимъ эти силы принадлежатъ.

По предположенію ускорительныя силы притяженія всѣхъ тѣлъ B, C, D... тѣломъ A при равныхъ ихъ разстояніяхъ до него между собою равны, точно также всѣ ускорительныя силы притяженія прочихъ тѣлъ тѣломъ B при равныхъ ихъ до него разстояніяхъ между собою равны. Но абсолютная сила притяженія тѣла A такъ относится къ абсолютной силѣ притяженія тѣла B, какъ ускорительная сила притяженія всѣхъ тѣлъ тѣломъ A относится къ таковой же для тѣла B при равныхъ удаленіяхъ отъ этихъ тѣлъ. Въ такомъ же отношеніи находится и ускорительная сила притяженія тѣла B тѣломъ A къ ускорительной силѣ притяженія тѣла A тѣломъ B. Но это послѣднее отношеніе равно отношенію массы [117]) тѣла A къ массѣ тѣла B ибо движущія силы, которыя по опредѣленіямъ 2, 7 и 8 пропорціональны ускорительнымъ силамъ и массамъ притягиваемыхъ тѣлъ по 3-му закону между собою равны. Слѣдовательно, абсолютная притягательная сила тѣла A относится къ абсолютной притягательной силѣ тѣла B какъ масса тѣла A къ массѣ тѣла B.

Слѣдствіе 1. Такимъ образомъ, если каждое изъ тѣлъ системы A, B, C, D и т. д. въ отдѣльности притягиваетъ всѣ прочія съ ускорительными силами обратно пропорціональными квадратамъ разстояній до притягивающаго тѣла, то абсолютныя силы всѣхъ этихъ тѣлъ будутъ пропорціональны ихъ массамъ.

Слѣдствіе 2. Въ силу такого же разсужденія можно заключить, что если отдѣльныя тѣла системы A, B, C, D... разсматриваемыя порознь

---

[117]) Въ текстѣ сказано: «ut massa corporis A ad massam corporis B»— это есть одно изъ немногихъ мѣстъ въ «Началахъ», гдѣ употребленъ терминъ «massa corporis» — «масса тѣла» а не просто «corpus» — «тѣло» для выраженія того же самаго понятія.

притягиваютъ всѣ прочія тѣла съ ускорительными силами, которыя пропорціональны или прямо или обратно какой-угодно степени разстоянія до притягивающаго тѣла или слѣдуютъ вообще какому-угодно закону въ зависимости только отъ разстоянія до притягивающаго тѣла, то абсолютныя силы этихъ тѣлъ пропорціональны ихъ массамъ.

Слѣдствіе 3. Въ системѣ тѣлъ, въ которой силы убываютъ пропорціонально квадратамъ разстояній, и меньшія тѣла обращаются съ возможною точностью по эллипсамъ, имѣющимъ своимъ фокусомъ центръ наибольшаго тѣла, описывая радіусами проведенными къ этому фокусу площади, весьма близкія къ пропорціональности временамъ, абсолютныя силы тѣлъ относятся между собою или въ точности или весьма близко какъ массы тѣлъ и наоборотъ. Это слѣдуетъ изъ слѣдствій предложенія LXVIII и слѣд. 1 этого предложенія.

Поученіе.

Эти предложенія приводятъ къ пропорціональности между центростремительными силами и массами тѣхъ центральныхъ тѣлъ, къ которымъ эти силы направляются. Но разумно и такое предположеніе, что силы, которыя направляются къ какому-либо тѣлу, зависятъ и отъ его величины и отъ его природы, какъ это имѣетъ мѣсто для магнитовъ. Когда встрѣчаются подобные случаи, то притяженія тѣлъ надо разсчитывать, приписывая отдѣльнымъ частицамъ соотвѣтствующія силы и составляя сумму силъ. Подъ словомъ «притяженіе» я разумѣю здѣсь вообще какое бы то ни было стремленіе тѣлъ къ взаимному сближенію, происходитъ ли это стремленіе отъ дѣйствія самихъ тѣлъ, которыя или стараются приблизиться другъ къ другу, или которыя приводятъ другъ друга въ движеніе посредствомъ испускаемаго ими эфира, или, если это стремленіе вызывается эфиромъ или воздухомъ или вообще какою-либо средою, матеріальною или нематеріальною, заставляющей погруженныя въ нее тѣла приводить другъ друга въ движеніе. Въ этомъ же смыслѣ я употребляю и слово «натискъ» или «напоръ», изслѣдуя въ этомъ сочиненіи не виды силъ и физическія свойства ихъ, а лишь ихъ величины и математическія соотношенія между ними, какъ объяснено въ опредѣленіяхъ. Математическому изслѣдованію подлежатъ величины силъ и тѣ соотношенія, которыя слѣдуютъ изъ произвольно поставленныхъ условій. Затѣмъ, обращаясь къ физикѣ надо эти выводы сопоставить съ совершающимися явленіями, чтобы распознать, какія же условія относительно силъ соотвѣтствуютъ отдѣльнымъ видамъ обладающихъ притягательною способностью тѣлъ. Послѣ того, какъ это сдѣлано, можно будетъ съ большею увѣренностью разсуждать о родахъ силъ, ихъ причинахъ и физическихъ между ними соотношеніяхъ. Итакъ, разсмотримъ съ какими силами должны дѣйствовать другъ на друга тѣла сферической формы, составленныя вышеуказаннымъ образомъ изъ частицъ, и какія движенія отъ этого должны происходить.

ОТДѢЛЪ XII.

О притягательныхъ силахъ сферическихъ тѣлъ.

Предложеніе LXX. Теорема XXX.

Если къ отдѣльнымъ точкамъ сферической поверхности направлены равныя центростремительныя силы убывающія въ отношеніи квадратовъ разстояній до этихъ точекъ, то частица [118]) *помѣщенная внутри этой поверхности отъ такихъ силъ ни въ какую сторону притяженія не испытываетъ.*

Пусть $HJKL$ (фиг. 102) сказанная сферическая поверхность, P частица внутри ея находящаяся; проведемъ черезъ P двѣ прямыя HK и JL, заключающія весьма малыя дуги HJ, KL такъ какъ треугольники HPJ и LPK (л. VII сл. 3) подобны, то эти весьма малыя дуги будутъ пропорціональны разстояніямъ HP и PL, и весьма малыя части сферической поверхности прилегающія къ HJ и KL и ограниченныя прямыми проведенными черезъ точку P будутъ находиться въ отношеніи квадратовъ длинъ PH и PK, слѣдовательно, силы притяженія этихъ малыхъ частей поверхности на точку P между собою равны, ибо эти силы прямо пропорціональны этимъ частямъ поверхности и обратно пропорціональны квадратамъ разстояній. Эти же два отношенія по перемноженіи даютъ 1, слѣдовательно, эти притяженія направленныя въ противоположныя стороны взаимно уничтожаются. Изъ этого разсужденія слѣдуетъ, что притяженіе всей сферической поверхности, какъ состоящее изъ противоположныхъ элементовъ уничтожается, слѣдовательно, частица P ни въ какую сторону этимъ притяженіемъ къ движенію не побуждается.

---

[118]) Подъ словомъ «точки» (puncta) сферической поверхности надо разумѣть безконечно-малые элементы этой поверхности, причемъ притяженіе каждымъ элементомъ предполагается пропорціональнымъ его площади, такъ что притяженія элементами равными по площади равны — это и выражается словами: «къ отдѣльнымъ точкамъ поверхности направляются равныя центростремительныя силы.

Когда же говорится о «точкахъ» тѣла, то надо разумѣть безконечно-малые элементы его объема, и притяженіе принимать пропорціональнымъ величинѣ этого объема (для однородныхъ тѣлъ).

Притягиваемую массу Ньютонъ обозначаетъ словомъ «corpusculum» — тѣльце; въ переводѣ принято слово «частица», «тѣло» или «масса», причемъ надо имѣть въ виду, что размѣры этой притягиваемой частицы предполагаются безконечно-малыми, такъ что при теперешней терминологіи эти слова равносильны термину «матеріальная точка».

Предложеніе LXXI. Теорема XXXI.

При тѣхъ же предположеніяхъ утверждаю, что частица находящаяся внѣ сферической поверхности притягивается къ центру сферы съ силою обратно пропорціональною квадрату ея разстоянія до центра сферы.

Пусть $AHKB$, $ahkb$ (фиг. 103) двѣ равныхъ сферическихъ поверхности описанныхъ изъ центровъ S и s на діаметрахъ AB и ab, P и p частицы лежащія на продолженіи этихъ діаметровъ. Проведемъ черезъ P и p прямыя PHK, PJL, phk, pil, отсѣкающія отъ большихъ круговъ AHB и ahb равныя дуги HK и hk, JL и il и опустимъ на эти прямыя перпендикуляры SD и sd, SE и se, JR и ir, изъ коихъ SD и sd пересѣкаютъ PL и pl въ F и f. Опустимъ также на діаметры перпендикуляры JQ и iq. Когда углы DPE и dpe безконечно-малые, то въ виду равенствъ $DS=ds$ и $ES=es$ длины PE съ PF и pe съ pf и отрѣзочки DF съ df можно счесть за равные, ибо предѣльныя ихъ отношенія при совмѣстномъ исчезаніи угловъ DPE и dpe равны единицѣ. На основаніи этого будетъ:

$$PJ:PF=RJ:DF,$$
$$pf:pi=df:ri=DF:ri.$$

Отсюда:

$$PJ\,.\,pf:PF\,.\,pi=Ri:ri=\smile HJ:\smile hi \text{ (сл. 3, л. VII)} \quad \ldots \quad (1)$$

Съ другой стороны:

$$PJ:PS=JQ:SE,$$
$$ps:pi=se:iq=SE:iq.$$

Откуда:

$$PJ\,.\,ps:PS\,.\,pi=JQ:iq \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

По перемноженіи пропорцій (1) и (2) получится:

$$PJ^2\,.\,pf\,.\,ps:pi^2\,.\,PF\,.\,PS=(\smile JH)\,.\,JQ:(\smile ih)\,.\,iq,$$

послѣднее же отношеніе равно отношенію частей сферическихъ поверхностей (шаровыхъ поясовъ) описываемыхъ дугами JH и ih при обращеніи полукруговъ AKB и akb около діаметровъ AB и ab. Силы же, съ которыми отдѣльные элементы этихъ поясовъ притягиваютъ къ себѣ частицы P и p по предположенію пропорціональны величинѣ этихъ элементовъ и обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до нихъ, т.-е. относятся другъ къ другу какъ $pf\,.\,ps:PF\,.\,PS$. Но эти силы такъ относятся къ своимъ составляющимъ (сл. 2 зак.) направленнымъ по прямымъ PS и ps къ центрамъ шаровъ какъ $PJ:PQ$ и какъ $pi:pq$, т.-е. въ виду подобія треугольниковъ PJQ и PSF, piq и psf какъ $PS : PF$ и какъ $ps : pf$. Отсюда слѣдуетъ, что притяженіе частицы P къ центру S относится къ притяженію p къ s какъ

$$\frac{PF \cdot pf \cdot ps}{PS} : \frac{pf \cdot PF \cdot PS}{ps} = \frac{ps^2}{PS^2}.$$

На основаніи такого же разсужденія и притяженія поясовъ описанныхъ дугами KL и kl находятся другъ къ другу въ томъ же отношеніи $ps^2 : PS^2$, слѣдовательно, въ этомъ же отношеніи будутъ находиться и притяженія всѣхъ шаровыхъ поясовъ, на которые разобьется каждая изъ сферическихъ поверхностей если брать постоянно

$$sd = SD \quad \text{и} \quad se = SE.$$

Слагая, получимъ, что и силы притяженія упомянутыхъ частицъ P и p цѣлымя сферическими поверхностями будутъ находиться въ томъ же отношеніи.

Предложеніе LXXII. Теорема XXXII.

Если къ отдѣльнымъ точкамъ какого-угодно шара направляются равныя центростремительныя силы, убывающія пропорціонально квадратамъ разстояній до этихъ точекъ и задается плотность шара и отношеніе его діаметра къ разстоянію частицы до его центра, то я утверждаю, что частица притягивается пропорціонально полудіаметру шара.

Вообрази, что двѣ частицы, каждая въ отдѣльности, притягиваются двумя шарами, одна однимъ другая другимъ, что разстояніе частицъ пропорціональны діаметрамъ соотвѣтствующихъ шаровъ, и, что эти шары раздѣлены подобнымъ образомъ на весьма малые элементарные объемы подобнымъ образомъ расположенные относительно притягиваемыхъ частицъ, тогда отношеніе притяженія одной частицы къ отдѣльнымъ элементамъ притягивающаго ее шара къ притяженію другой частицы къ соотвѣтствующимъ элементамъ другого шара равно произведенію прямого отношенія этихъ элементарныхъ объемовъ на обратное отношеніе квадратовъ разстояній до нихъ. Но эти элементарные объемы пропорціональны полнымъ объемамъ самихъ шаровъ, т.-е. кубамъ діаметровъ, разстоянія же по условію пропорціональны діаметрамъ, поэтому, произведеніе вышеупомянутыхъ прямого и обратнаго отношеній равно отношенію діаметровъ.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если частицы обращаются по кругамъ вокругъ шаровъ, состоящихъ изъ вещества притягивающаго одинаково, и разстоянія частицъ до центровъ шаровъ пропорціональны діаметрамъ, то времена обращенія равны.

Слѣдствіе 2. Обратно, если времена обращенія равны, то разстоянія пропорціональны діаметрамъ. Оба эти слѣдствія имѣютъ мѣсто на основаніи слѣдствія 3 предл. IV.

Слѣдствіе 3. Если къ отдѣльнымъ точкамъ двухъ какихъ угодно тѣлъ, между собою подобныхъ, однородныхъ и одинаковой плотности, направляются равныя центростремительныя силы, убывающія пропорціонально квадратамъ разстояній, то силы, съ которыми этими тѣлами притягиваются частицы сходственнымъ образомъ расположенныя, пропорціональны линейнымъ размѣреніямъ тѣлъ.

Предложеніе LXXIII. Теорема XXXIII.

Если къ отдѣльнымъ точкамъ какого-либо шара направляются равныя центростремительныя силы, убывающія пропорціонально квадратамъ разстояній до точекъ, то я утверждаю, что частица, находящаяся внутри шара, притягивается пропорціонально ея разстоянію до центра шара.

Пусть въ шарѣ $ABCD$ (фиг. 104), описанномъ изъ центра S, помѣщена частица P. Вообрази, что изъ центра S радіусомъ SP описана внутренняя сферическая поверхность $PEQF$. Очевидно (по пр. LXX), что концентрическія сферическія поверхности, изъ которыхъ состоитъ слой $AEBF$, представляющій разность объемовъ шаровъ $ABCD$ и $PEQF$, не оказываютъ на частицу P никакого дѣйствія, ибо ихъ притяженія уравновѣшиваются. Остается только притяженіе внутренняго шара, которое по пр. LXXII пропорціонально разстоянію PS.

Поученіе.

Поверхности, изъ коихъ слагаются тѣла, надо здѣсь разумѣть не какъ поверхности чисто математическія, а какъ чрезвычайно тонкіе сферическіе слои, коихъ толщина какъ бы равна нулю, точнѣе говоря, какъ слои исчезающей толщины, изъ которыхъ въ предѣлѣ состоитъ шаръ, когда число этихъ слоевъ увеличивается, толщина же ихъ уменьшается до безконечности.

Подобно этому, подъ словомъ точки, изъ которыхъ разсматриваются какъ бы состоящими линіи, поверхности и тѣла, надо разумѣть равныя между собою частицы пренебрежимо малой величины.

Предложеніе LXXIV. Теорема XXXIV.

При тѣхъ же предположеніяхъ утверждаю, что частица, расположенная внѣ шара, притягивается съ силою обратно пропорціональною квадрату ея разстоянія до центра шара.

Ибо если разсматривать, что шаръ состоитъ какъ бы изъ безчисленнаго множества концентрическихъ слоевъ, то притяженіе каждаго слоя обратно пропорціонально квадрату разстоянія частицы до центра шара (LXXI). Слагая, получимъ, что и сумма этихъ притяженій, т.-е. полное притяженіе частицы шаромъ слѣдуетъ той же пропорціи.

Слѣдствіе 1. Поэтому въ равныхъ разстояніяхъ отъ центровъ однородныхъ шаровъ притяженія пропорціональны объемамъ этихъ шаровъ, ибо по пред. LXXII, когда разстоянія пропорціональны діаметрамъ шаровъ, то силы притяженія пропорціональны этимъ же діаметрамъ. Если бо́льшее разстояніе уменьшить въ этомъ отношеніи, послѣ чего разстоянія станутъ равными, то сила притяженія увеличится въ отношеніи равномъ второй степени предыдущаго и, слѣдовательно, притяженія шаровъ будутъ относиться другъ къ другу какъ кубы діаметровъ, т.-е. какъ объемы шаровъ.

Слѣдствіе 2. При любыхъ разстояніяхъ притяженія шаровъ пропорціональны объемамъ шаровъ, раздѣленнымъ на квадраты разстояній.

Слѣдствіе 3. Если частица, находящаяся внѣ однороднаго шара, притягивается силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія до его центра и шаръ состоитъ изъ притягивающихъ частицъ, то сила притяженія каждой частицы убываетъ пропорціонально квадрату разстоянія до этой частицы.

Предложеніе LXXV. Теорема XXXV.

Если къ отдѣльнымъ точкамъ заданнаго шара направляются равныя центростремительныя силы, убывающія пропорціонально квадратамъ разстояній до этихъ точекъ, то я утверждаю, что любой такой шаръ притягивается первымъ съ силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія между центрами шаровъ.

Притяженіе каждой отдѣльной частицы обратно пропорціонально квадрату ея разстоянія до центра притягивающаго шара (LXXIV) и, слѣдовательно, такое же, какъ будто бы оно происходило отъ одной частицы, помѣщенной въ центрѣ шара. Полное же притяженіе всего шара такое же, какъ и обратное ему притяженіе сказанной частицы, если разсматривать, что она притягивается каждою частицею второго шара съ такою же силою, съ какою она сама притягиваетъ эту частицу. Но это притяженіе частицы шаромъ обратно пропорціонально квадрату ея разстоянія до центра шара, слѣдовательно, и равное ему притяженіе шаровъ слѣдуетъ той же пропорціи.

Слѣдствіе 1. Притяженія шарами другихъ однородныхъ шаровъ пропорціональны объемамъ [119]) (массамъ) притягивающихъ шаровъ, раздѣленнымъ на квадраты разстояній ихъ центровъ до центровъ притягиваемыхъ шаровъ.

---

[119]) Въ текстѣ сказано: «ut sphaerae», что можно перевести и словами «пропорціональны объемамъ шаровъ» или «массамъ шаровъ».

Слѣдствіе 2. То же самое имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда притягиваемый шаръ самъ притягиваетъ. Такъ какъ отдѣльныя его точки притягиваютъ отдѣльныя точки другого съ тою же самою силою, съ какою сами притягиваются ими, ибо по 3-му закону во всякомъ притяженіи одинаково побуждается какъ точка притягиваемая, такъ и притягивающая, то и будутъ образовываться двѣ взаимныя притягательныя силы, сохраняющія ту же пропорцію.

Слѣдствіе 3. Все, что было доказано выше относительно движенія тѣлъ вокругъ фокуса коническихъ сѣченій, имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда въ фокусѣ находится притягивающій шаръ и тѣла движутся внѣ шара.

Слѣдствіе 4. Все же доказанное относительно движенія тѣлъ вокругъ центра коническихъ сѣченій имѣетъ мѣсто, когда движеніе совершается внутри шара.

Предложеніе LXXVI. Теорема XXXVI.

Если плотность и притягательная сила вещества неоднороднаго шара при переходѣ отъ его центра къ поверхности измѣняются какъ угодно, въ равныхъ же удаленіяхъ отъ центра повсюду одни и тѣ же, притягательная же сила кажой отдѣльной точки убываетъ пропорціонально квадратамъ разстояній до притягиваемаго тѣла, то я утверждаю, что полная сила, съ которою такой шаръ притягиваетъ другой такой же, обратно пропорціональна квадрату разстоянія между центрами шаровъ.

Пусть AB, CD, EF (фиг. 105) суть какіе-либо шары одноцентренные и одинаковой плотности, то прилагая внутренніе къ наружнымъ, получимъ шаръ, плотность вещества котораго возрастаетъ по направленію къ центру, вычитая же ихъ, получимъ шаръ, коего плотность убываетъ къ центру. Такіе шары каждый въ отдѣльности по пр. LXXV притягиваютъ любые другіе однородные шары GL, JK, LM съ силою обратно пропорціональною квадрату разстоянія SP между центрами. Слагая или вычитая, получимъ, что сумма или разность сказанныхъ притяженій будетъ находиться въ томъ же отношеніи, т.-е., что полныя силы, съ которыми притягиваются шары AB и GH, составленные изъ суммъ или разностей концентрически однородныхъ шаровъ, находятся въ сказанномъ отношеніи. Увеличивая число концентрическихъ шаровъ до безконечности такъ, чтобы плотность вмѣстѣ съ притягательною силою возрастала или убывала по какому угодно закону отъ поверхности къ центру и заполняя матеріей, не обладающей притягательной силой, тѣ мѣста, гдѣ плотность оказалась бы отрицательной, получимъ шаръ любого желаемаго строенія. Притяженіе такимъ шаромъ другого, подобнымъ же образомъ составленнаго, будетъ попрежнему на основаніи разсужденія изложеннаго выше, обратно пропорціонально квадрату разстоянія между ихъ центрами.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если нѣсколько подобнаго рода шаровъ притягиваются взаимно, то ускорительныя силы притяженія каждымъ отдѣльнымъ шаромъ другого будутъ, въ равныхъ отъ центра разстояніяхъ, пропорціональны массамъ притягивающихъ шаровъ.

Слѣдствіе 2. При различныхъ же разстояніяхъ эти силы пропорціональны массамъ, раздѣленнымъ на квадраты разстояній до центровъ.

Слѣдствіе 3. Движущія силы притяженій, иначе вѣса одного шара на другомъ при равныхъ разстояніяхъ между центрами, будутъ пропорціональны произведеніямъ массъ притягивающаго и притягиваемаго шара.

Слѣдствіе 4. При неравныхъ разстояніяхъ эти силы прямо пропорціональны сказанному произведенію массъ и обратно пропорціональны квадратамъ разстояній.

Слѣдствіе 5. То же самое имѣетъ мѣсто и тогда, когда притяженіе происходитъ отъ того, что оба шара одарены притягательною способностью и дѣйствуютъ взаимно другъ на друга. Ибо притяженіе будетъ образовываться обѣими силами и пропорція останется прежней.

Слѣдствіе 6. Если шары такого рода обращаются около другихъ таковыхъ же, каждый порознь около другого ему соотвѣтствующаго, находящагося въ покоѣ, и разстоянія между центрами шаровъ, покоющихся и обращающихся, пропорціональны діаметрамъ покоющихся, то времена обращенія будутъ одинаковы.

Слѣдствіе 7. Наоборотъ, если времена обращенія равны, то разстоянія пропорціональны діаметрамъ.

Слѣдствіе 8. Все доказанное выше относительно движенія тѣлъ вокругъ фокусовъ коническихъ сѣченій имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда въ фокусахъ помѣщаются шары описаннаго выше вида и строенія.

Слѣдствіе 9. То же будетъ и тогда, когда обращающіяся тѣла суть также притягивающіе шары описаннаго вида и строенія.

Предложеніе LXXVII. Теорема XXXVII.

Если къ отдѣльнымъ точкамъ шаровъ направляются центростремительныя силы, пропорціональныя разстояніямъ точекъ до притягиваемыхъ тѣлъ, то я утверждаю, что полное взаимное притяженіе двухъ такихъ шаровъ пропорціонально разстоянію между центрами ихъ.

Случай 1. Пусть $AEBF$ (фиг. 106) шаръ, S его центръ, P притягиваемая частица, $PASB$ ось шара, проходящая черезъ центръ частицы, EF и ef двѣ плоскости, перпендикулярныя къ оси, равноудаленныя отъ центра шара и пересѣкающія шаръ, G, g точки пересѣченія оси и этихъ плоскостей, H любая точка плоскости EF.

Сила, съ которою точка H дѣйствуетъ на частицу P, пропорціональна разстоянію PH, слѣдовательно, ея слагающая, направленная къ центру S по прямой PG, пропорціональна длинѣ PG, значитъ притяженіе всѣхъ точекъ плоскости EF, т.-е. полная сила притяженія частицы P этою плоскостью по направленію къ центру S, пропорціональна длинѣ PG, умноженной на число точекъ, т.-е. пропорціональна объему цилиндра, коего основаніе равно EF и высота PG. Подобно этому и притяженіе частицы P плоскостью ef, направленное къ центру S, пропорціонально произведенію площади cf на длину Pg, т.-е. и произведенію равной ей площади EF на длину Pg. Сумма силъ, происходящихъ отъ обѣихъ плоскостей, будетъ пропорціональна площади EF, умноженной на сумму $PG+Pg$, т.-е. величинѣ $2EF \cdot PS$ или $(EF+ef) \cdot PS$. Разсуждая такимъ же образомъ, получимъ, что силы, происходящія отъ всѣхъ прочихъ сѣченій шара, равноудаленными отъ центра плоскостями, пропорціональны суммѣ площадей этихъ сѣченій, умноженныхъ на разстояніе PS, т.-е. пропорціональны массѣ всего шара и разстоянію PS.

Случай 2. Если частица P притягиваетъ шаръ $AEBF$, то разсуждая подобнымъ же образомъ докажемъ, что сила, съ которою этотъ шаръ ею притягивается, пропорціональна разстоянію PS.

Случай 3. Пусть второй шаръ состоитъ изъ безчисленнаго множества такихъ частицъ какъ P; такъ какъ сила, съ которою каждая отдѣльная его частица притягивается къ центру перваго шара, пропорціональна массѣ этого шара и разстоянію до его центра S, то это притяженіе такое же, какое происходило бы отъ одной частицы, расположенной въ этомъ центрѣ S. Полная сила, съ которою притягиваются всѣ частицы второго шара, т.-е. сила, съ которою притягивается этотъ второй шаръ, та же самая какъ если бы это притяженіе происходило отъ одной частицы, помѣщенной въ центрѣ перваго шара, поэтому это притяженіе пропорціонально разстоянію между центрами шаровъ.

Случай 4. Если оба шара притягиваютъ другъ друга, то и обѣ соединенныя силы слѣдуютъ той же пропорціи.

Случай 5. Положимъ теперь, что частица p расположена внутри шара $AEBF$. Такъ какъ сила притяженія частицы p плоскостью ef пропорціональна произведенію $ef \cdot pg$, и обратно ей направленная сила притяженія плоскостью EF пропорціональна произведенію $EF \cdot pg$, то сила, составленная изъ этихъ двухъ пропорціональна разности этихъ произведеній, иначе суммѣ двухъ равныхъ площадей сѣченія на полуразность разстояній, т.-е. пропорціональна произведенію этой суммы на разстояніе pS частицы до центра шара. Совершенно также притяженіе всѣхъ такихъ сѣченій, какъ EF и ef во всемъ шарѣ, т.-е. притяженіе всего шара пропорціонально суммѣ всѣхъ площадей, т.-е. массѣ всего шара и разстоянію pS частицы до его центра.

Случай 6. Если изъ безчисленнаго множества частицъ, такихъ какъ p составляется новый шаръ, расположенный внутри перваго $AEBF$ (фиг. 107), то подобно предыдущему можно доказать, что притяженіе, какъ простое однимъ шаромъ другого, такъ и взаимное ихъ другъ другомъ, пропорціональны разстоянію pS между центрами шаровъ.

Предложеніе LXXVIII. Теорема XXXVIII.

Если плотность и притягательная сила вещества не однороднаго шара при переходѣ отъ его центра къ поверхности измѣняются какъ угодно, въ равныхъ же удаленіяхъ отъ центра повсюду одинаковы, притяженіе же всякой точки пропорціонально разстоянію притягиваемаго тѣла до нея, то я утверждаю, что сила, съ которою два шара такого рода притягиваютъ другъ друга, пропорціональна разстоянію между центрами ихъ.

Это предложеніе можно доказать на основаніи предыдущаго совершенно такъ же, какъ предложеніе 76-ое доказано на основаніи 75-го.

Слѣдствіе. Доказанное выше въ предложеніяхъ 10-мъ и 64-мъ о движеніи тѣлъ вокругъ центра коническихъ сѣченій имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда всѣ притяженія происходятъ отъ шаровъ, описанныхъ выше свойствъ и притягиваемыя тѣла также шары такихъ же свойствъ.

Поученіе.

Я далъ изложеніе двухъ замѣчательнѣйшихъ случаевъ притяженія, а именно когда центростремительныя силы или убываютъ пропорціонально квадратамъ разстояній, или же возрастаютъ пропорціонально разстояніямъ. Вслѣдствіе такихъ притяженій тѣла въ обоихъ случаяхъ обращаются по коническимъ сѣченіямъ и полныя составныя притяженія тѣлъ шаровой формы слѣдуетъ тѣмъ же законамъ возрастанія или убыванія при удаленіи отъ центра, какъ и силы между двумя частицами, что достойно того чтобы быть замѣченнымъ. Разбирать въ подробностяхъ прочіе случаи, приводящіе къ менѣе изящнымъ выводамъ было бы длинно. Я предпочитаю ихъ объять и опредѣлить всѣ совмѣстно слѣдующимъ общимъ методомъ [120]).

Лемма XXIX.

Если изъ центра S описать какой-либо кругъ AEB и изъ центра P два круга EF и ef, пересѣкающіе первый въ точкахъ E и e прямую же PS въ F и f и на PS опустить перпендикуляры ED и ed, то я

[120]) Въ предыдущихъ предложеніяхъ ученіе о притяженіи шаровъ изложено чисто геометрически — общій методъ, на который указывается въ этомъ поученіи, примѣняемый въ дальнѣйшемъ, состоитъ въ приведеніи задачи по квадратурамъ.

утверждаю, что если разстоянiе между дугами EF и ef уменьшать до безконечности, то предѣльное отношенiе исчезающихъ длинъ Dd и Ff равно отношенiю PE къ PS.

Ибо, если прямая Pe (фиг. 108) пересѣкаетъ дугу EF въ q и прямая Ee, которая совпадаетъ съ исчезающей дугой Ee, по продолженiи пересѣкаетъ прямую PS въ T и изъ точки S опускается на PE нормаль SG, то по подобiю треугольниковъ DTE, dTe, DES будетъ:

$$Dd : Ee = DT : TE = DE : ES$$

и по подобiю треугольниковъ Eeq, ESG (л. VIII и сл. 3 л. VII) будетъ:

$$Ee : eq = Ee : Ff = ES : SG$$

по перемноженiи этихъ пропорцiй получается:

$$Dd : Ff = DE : SG$$

откуда по подобiю треугольниковъ PDE и PGS слѣдуетъ:

$$Dd : Ff = DE : SG = PE : PS.$$

Предложенiе LXXIX. Теорема XXXIX.

Если площадь $EFef$, коей ширина Ff уменьшаясь до безконечности почти исчезаетъ, описываетъ при своемъ обращенiи около оси PS сферическое выпукло-вогнутое тѣло, и къ отдѣльнымъ равнымъ его частицамъ направляются равныя центростремительныя силы, то я утверждаю, что это тѣло притягиваетъ массу, находящуюся въ точкѣ P съ силою, пропорцiональною произведенiю $DE^2 \cdot Ff$ и той силѣ, съ которою заданная частица тѣла, будучи помѣщена въ Ff, притягивала бы массу P.

Разсмотримъ сперва силу притяженiя сферической поверхности, образуемой вращенiемъ дуги FE (фиг. 109). Пусть эта дуга пересѣкается прямою de въ r, тогда элементъ Er произведетъ при вращенiи шаровой поясъ, поверхность коего при заданномъ радiусѣ PE пропорцiональна Dd, какъ это доказано *Архимедомъ* въ книгѣ «*О шарѣ и цилиндрѣ*». Силы притяженiя элементовъ поверхности этого пояса, направленныя по производящимъ конуса PE или Pr, пропорцiональны поверхности пояса, т.-е. длинѣ Dd, составляющiя же этихъ силъ по направленiю PS меньше самихъ силъ въ отношенiи $\frac{PD}{PS}$, т.-е. эти составляющiя пропорцiональны $PD \cdot Dd$. Вообразивъ, что линiя DF раздѣлена на безчисленное множество равныхъ частей, изъ коихъ какая-нибудь обозначена черезъ Dd, тогда и поверхность EF разобьется на столько же равныхъ поясовъ, коихъ сила притяженія будетъ пропорціональна суммѣ всѣхъ произведеній $PD \cdot Dd$, эта же сумма равна

$$\frac{1}{2} PF^2 - \frac{1}{2} PD^2,$$

т.-е.

$$\frac{1}{2} DE^2,$$

значитъ сказанное притяженіе пропорціонально DE^2.

Если поверхность FE умножить на высоту Ff, то получится, что притяженіе массы P объемомъ $EFef$ пропорціонально $DE^2 \cdot Ff$, преполагая, что когда задана частица Ff, то задана и сила, съ которою она дѣйствуетъ на массу P, если же эта сила не задается, то притяженіе тѣла $EFef$ будетъ пропорціонально произведенію $DE^2 \cdot Ff$ и той силѣ, съ которою частица Ff притягиваетъ массу P.

Предложеніе LXXX. Теорема LX.

Если къ отдѣльнымъ частицамъ шара ABE, коего центръ S, направляются равныя центростремительныя силы и къ оси шара AB, на коей лежитъ масса P, проводятся въ точкахъ D перпендикуляры DE, пересѣкающіе поверхность шара въ E и по нимъ откладываются длины DN, пропорціональныя величинѣ $\frac{DE^2 \cdot PS}{PE}$ и силѣ, съ которою частица шара, лежащая на оси въ разстояніи PE, дѣйствуетъ на массу P, то я утверждаю, что полная сила притяженія массы P шаромъ пропорціональна площади ANB, ограниченной осью AB и кривою ANB, на которой постоянно лежитъ точка N.

Сохраняя обозначенія и построенія предыдущихъ леммы и теоремы, вообрази, что ось шара AB (фиг. 110) раздѣлена на безчисленное множество равныхъ частей Dd, и что шаръ раздѣленъ на такое же число выпукло вогнутыхъ слоевъ $EFfe$ и проведи перпендикуляръ dn.

По предыдущей теоремѣ сила, съ которою слой $EFfe$ притягиваетъ массу P, пропорціональна $DE^2 \cdot Ff$ и силѣ притяженія одной частицы при разстояніи PE или PF. Но по послѣдней леммѣ имѣемъ:

$$Dd : Ff = PE : PS,$$

слѣдовательно,

$$Ff = \frac{PS \cdot Dd}{PE}$$

и

$$DE^2 \cdot Ff = Dd \cdot \frac{DE^2 \cdot PS}{PE},$$

значитъ притяженіе слоя $EFfe$ пропорціонально величинѣ $\frac{DE^2 . PS}{PE} . Dd$ и силѣ притяженія одной частицы при разстояніи PF, т.-е. по предположенію величинѣ $DN . Dd$, представляющей исчезающую площадку $DNnd$. Слѣдовательно, притяженіе массы P всѣми слоями пропорціонально суммѣ площадокъ $DNnd$, т.-е. всей площади ANB.

Слѣдствіе 1. Такъ, напримѣръ, если центростремительная сила къ отдѣльнымъ частицамъ одна и та же при всякомъ разстояніи, и ордината DN берется пропорціональной $\frac{DE^2 . PS}{PE}$, то полная сила будетъ пропорціональна площади ANB.

Слѣдствіе 2. Если центростремительная сила къ каждой отдѣльной частицѣ обратно пропорціональна разстоянію ея до притягиваемой массы P, то взявъ ординату DN пропорціонально $\frac{DE^2 . PS}{PE^2}$, получимъ, что притяженіе массы P шаромъ будетъ пропорціонально площади ANB.

Слѣдствіе 3. Если центростремительная сила къ каждой отдѣльной частицѣ будетъ обратно пропорціональна кубу разстоянія ея до притягиваемой массы P, то взявъ ординату DN пропорціонально $\frac{DE^2 . PS}{PE^4}$, получимъ, что притяженіе этой массы шаромъ будетъ пропорціонально площади ANB.

Слѣдствіе 4. Вообще, если центростремительная сила, направляющаяся къ каждой отдѣльной частицѣ шара обратно пропорціональна величинѣ V и ордината DN пропорціональна $\frac{DE^2 . PS}{PE} . \frac{1}{V}$, то полное притяженіе массы P шаромъ будетъ пропорціонально площади ANB.

Предложеніе LXXXI. Задача XLI.

Сохраняя предыдущія обозначенія, требуется измѣрить площадь ANB.

Изъ точки P (фиг. 111) проводится къ шару касательная PH, изъ точки H на ось опускается перпендикуляръ HJ и длина PJ раздѣляется точкою L пополамъ, тогда будетъ (пр. XII, 2-ой книги элем.):

$$PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PS . SD,$$

но по подобію треугольниковъ SPH и SHJ

$$SE^2 = SH^2 = PS . SJ,$$

слѣдовательно,

$$PE^2 = PS(PS + SJ + 2SD) = PS(2LS + 2SD) = PS(PS + 2LD),$$

а такъ какъ

$$DE^2 = SE^2 - SD^2 = SE^2 - LS^2 + 2SL . LD - LD^2 =$$
$$= 2SL . LD - LD^2 - AL . LB,$$

ибо

$$LS^2 - SE^2 = LS^2 - SA^2 = AL \,.\, LB \text{ (пр. VI, 2-ой кн. эл.),}$$

написавъ вмѣсто DE^2 вышеприведенную равную ему величину, получимъ:

$$\frac{DE^2 \,.\, PS}{PE} \cdot \frac{1}{V} = DN = \frac{2SL \,.\, LD \,.\, PS}{PE \,.\, V} - \frac{LD^2 \,.\, PS}{PE \,.\, V} - \frac{AL \,.\, LB \,.\, PS}{PE \,.\, V}.$$

Поставивъ въ это послѣднее выраженіе вмѣсто V обратную величину центростремительной силы и вмѣсто PE его величину $\sqrt{2PS \,.\, LD}$, то каждый изъ трехъ членовъ предыдущаго выраженія, по представленіи его ординатою отдѣльной кривой, дастъ такую площадь, которая находится по обыкновеннымъ правиламъ [121]).

---

[121]) Этою теоремою устанавливается выраженіе слагающей притяженія того элементарнаго объема, на которые шаръ разбивается, по оси направленной отъ притягиваемой точки къ центру шара, чтобы свести такимъ образомъ вычисленіе этого притяженія къ квадратурамъ.

Обозначая черезъ q плотность, черезъ r разстояніе PE до притягиваемой точки отъ притягивающей частицы dm, черезъ $f(\rho)$ силу притяженія между двумя массами равными 1 при разстояніи ρ и полагая: $PS = l$, $AS = SB = a$, $DE = y$ и $Ff = dr$, и обозначая черезъ X полное притяженіе на 1 массы въ точкѣ P, можемъ написать на основаніи доказаннаго въ теоремѣ

$$dX = \pi q \,.\, y^2 \,.\, dr \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

и слѣдовательно

$$X = \pi q \,.\, \int_{l-a}^{l+a} y^2 dr \quad \ldots, \ldots \ldots \quad (2)$$

Выраженіе y^2 въ функціи r и преобразованіе его къ новой перемѣнной производится въ теоремѣ XL. Даваемыя здѣсь формулы можно получить нѣсколько иначе: величина $DE = y$ есть высота треугольника PES, поэтому обозначивъ его площадь черезъ Q, имѣемъ

$$2Q = PS \,.\, DE = l \,.\, y$$

съ другой стороны

$$\begin{aligned} 16Q^2 &= (l + a + r)(l + a - r)[r + (l - a)] \,.\, [r - (l - a)] \\ &= [(l + a)^2 - r^2] \,.\, [r^2 - (l - a)^2] \end{aligned}$$

слѣдовательно, будетъ

$$y^2 = \left[\frac{(l+a)^2}{2l} - \frac{r^2}{2l}\right] \cdot \left[\frac{r^2}{2l} - \frac{(l-a)^2}{2l}\right]$$

и значитъ

$$X = \pi q \int_{l-a}^{l+a} \left[\frac{(l+a)^2}{2l} - \frac{r^2}{2l}\right] \cdot \left[\frac{r^2}{2l} - \frac{(l-a)^2}{2l}\right] f(r) \,.\, dr \quad \ldots \quad (3)$$

Ньютонъ вводитъ новую перемѣнную

Примѣръ 1. Сила притяженія отдѣльной частицы обратно пропорціональна разстоянію.

Въ этомъ случаѣ вмѣсто V надо въ выраженіе DN написать PE и, затѣмъ, вмѣсто PE^2 величину $2PS \,.\, LD$ будемъ имѣть:

$$DN = SL - \frac{1}{2} LD - \frac{AL \,.\, LB}{2LD}.$$

$$x = \frac{r^2}{2l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

тогда полагая для краткости

$$\frac{(l+a)^2}{2l} = H; \qquad \frac{(l-a)^2}{2l} = h \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

будемъ имѣть:

$$X = \pi q \,.\, \int\limits_h^H [H - x] \,.\, [x - h] \,.\, \frac{l}{r} \,.\, f(r) dx$$

$$= \pi q \,.\, \int\limits_h^H \left[(H+h) \,.\, x \,.\, \frac{l}{r} \,.\, f(r) - H \,.\, h \,.\, \frac{l}{r} f(r) - \frac{x^2 \,.\, l}{r} \,.\, f(r) \right] dx \quad . \quad (6)$$

Это и есть та формула, которая дана въ текстѣ. Въ самомъ дѣлѣ, по построенію фиг. 111 имѣемъ

$$PH^2 = PS^2 - SH^2 = l^2 - a^2; \qquad PS = \frac{PH^2}{PS} = \frac{l^2 - a^2}{l}$$

значитъ:

$$PL = LJ = \frac{l^2 - a^2}{2l}; \quad LS = PS - PL = \frac{l^2 + a^2}{2l}$$

$$LA = LS - AS = \frac{(l-a)^2}{2l} = h; \quad LB = LA + AB = \frac{(l+a)^2}{2l} H \quad . \quad . \quad (7)$$

и въ предложеніи LXXXI показано, что

$$PE^2 = 2PS \,.\, LD$$

иначе

$$r^2 = 2l \,.\, LD \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

что по счисленіи съ формулою (4) показываетъ, что

$$x = LD$$

слѣдовательно:

$$(H + h)x = 2SL \,.\, LD; \quad x^2 = LD^2; \quad H \,.\, h = AL \,.\, LB$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ при сдѣланномъ обозначеніи

$$\frac{1}{V} = f(r); \quad PS = l; \quad PE = r.$$

Примѣры пред. LXXXI состоятъ въ вычисленіи интеграла (6) при разныхъ заданіяхъ функціи $f(r)$. Множителя πq Ньютонъ не пишетъ, ибо вычисляетъ лишь величину, пропорціональную притяженію.

Возьми вмѣсто DN удвоенную его величину

$$2SL - LD - \frac{AL \,.\, LB}{LD}$$

тогда: часть $2SL$ полной ординаты DN при проведенiи ея по основанiю AB опишетъ площадь прямоугольника $2SL \,.\, AB$; перемѣнная часть LD при проведенiи ея вдоль по AB непрерывнымъ движенiемъ такъ, чтобы эта ордината была постоянно нормальна къ AB и длина ея постоянно равнялась бы разстоянiю LD ея основанiя до точки L, опишетъ площадь $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$, т.-е площадь $SL \,.\, AB$; третья часть $\frac{AL \,.\, LB}{LD}$ при проведенiи вдоль по AB отъ A до B, опишетъ гиперболическую площадь, которая по вычитанiи изъ площади $SL \,.\, AB$ и доставитъ искомую площадь ANB. Отсюда слѣдуетъ такое построенiе: въ точкахъ L, A и B (фиг. 112) возставь перпендикуляры Ll, Aa, Bb и отложи $Aa = LB$, $Bb = LA$ и черезъ точки a и b проведи гиперболу ab съ ассимптотами Ll и LB, хорда ab и замкнетъ искомую площадь $acba = ANB$.

Примѣръ 2. Если сила притяженiя отдѣльныхъ частицъ обратно пропорцiональна кубу разстоянiя или, что то же самое отношенiю этого куба къ какой-либо заданной площади, то вмѣсто V подставь $\frac{PE^3}{2SA^2}$ и вмѣсто PE^2 $2PS \,.\, LD$, тогда DN будетъ пропорцiонально

$$\frac{SL \,.\, AS^2}{PS \,.\, LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{AL \,.\, LB \,.\, AS^2}{2PS \,.\, LD^2},$$

а такъ какъ

$$AS^2 = PS \,.\, SJ,$$

то DN будетъ пропорцiонально

$$\frac{LS \,.\, SJ}{LD} - \frac{1}{2} SJ - \frac{AL \,.\, LB \,.\, SJ}{2LD^2}.$$

По проведенiи этихъ трехъ частей ординаты DN вдоль по прямой AB отъ A до B, первая часть $\frac{LS \,.\, SJ}{LD}$ произведетъ гиперболическую площадь, вторая дастъ прямоугольникъ $\frac{1}{2} AB \,.\, SJ$, третья дастъ площадь:

$$\frac{AL \,.\, LB \,.\, SJ}{2} \,.\, \left[\frac{1}{LA} - \frac{1}{LB}\right] = \frac{1}{2} \,.\, AB \,.\, SJ.$$

Вычтя изъ первой площади вторую и третью, получимъ искомую площадь ANB. Отсюда слѣдуетъ такое построенiе: въ точкахъ L, A, S, B (фиг. 113) возставь перпендикуляры: Ll, Aa, Ss, Bb, изъ коихъ Ss равенъ SJ, послѣ чего черезъ точку S проведи гиперболу asb, имѣющую ассимптотами Ll и LB и пересѣкающую перпендикуляры Aa и Bb въ точкахъ a и b; по вычитанiи изъ гиперболической площади $AasbB$ площади прямоугольника $2AS \,.\, SJ$ и останется искомая площадь ANB.

Примѣръ 3. Если центростремительная сила къ отдѣльнымъ частицамъ шара убываетъ пропорціонально четвертой степени разстоянія до частицы, то написавъ $\frac{PE^4}{2AS^3}$ вмѣсто V и $\sqrt{2PS \cdot LD}$ вмѣсто PE, получимъ, что ордината DN пропорціональна величинѣ

$$\frac{SJ^2 \cdot SL}{\sqrt{2 \cdot SJ} \cdot \sqrt{LD^3}} - \frac{SJ^2}{2\sqrt{2SJ} \cdot \sqrt{LD}} - \frac{SJ^2 \cdot AL \cdot LB}{2\sqrt{2 \cdot SJ}} \cdot \frac{1}{\sqrt{LD^5}},$$

отдѣльные члены которой произведутъ площади:

$$\frac{2SJ^2 \cdot SL}{\sqrt{2 \cdot SJ}}\left[\frac{1}{\sqrt{LA}} - \frac{1}{\sqrt{LB}}\right] - \frac{SJ^2}{\sqrt{2SJ}}\left[\sqrt{LB} - \sqrt{LA}\right] -$$

$$- \frac{SJ^2 \cdot AL \cdot LB}{3\sqrt{2 \cdot SJ}}\left[\frac{1}{LA^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{LB^{\frac{3}{2}}}\right],$$

что по надлежащемъ упрощеніи даетъ

$$\frac{2SJ^2 \cdot LS}{LJ} - SJ^2 - SJ^2 - \frac{2SJ^3}{3LJ} = \frac{4SJ^3}{3LJ}.$$

Слѣдовательно, полное притяженіе массы P шаромъ пропорціонально $\frac{SJ^3}{PJ}$, т.-е. обратно пропорціонально $PS^3 \cdot PJ$.

Подобнымъ же образомъ могло бы быть найдено и притяженіе массы, лежащей внутри шара, но это дѣлается проще при помощи слѣдующей теоремы.

Предложеніе LXXXII. Теорема XLI.

Если для шара, коего центръ S и радіусъ SA, взять разстоянія SJ и SP такъ, чтобы было $SJ : SA = SA : SP$, то отношеніе притяженія шаромъ внутренней точки J къ притяженію внѣшней точки P, равно произведенію отношенія $\sqrt{SJ} : \sqrt{SP}$ на корень квадратный изъ отношенія притяженій точекъ P и J центромъ шара [122]).

По этой теоремѣ, если притяженія отдѣльныхъ частицъ шара обратно пропорціональны разстоянію, то отношеніе силы, съ которою масса, помѣщенная въ J (фиг. 114) притягивается шаромъ, къ той силѣ, съ которою она имъ притягивалась бы, будучи помѣщенной въ P, равно

$$\frac{\sqrt{SJ}}{\sqrt{SP}} \cdot \frac{\sqrt{SP}}{\sqrt{SJ}} = 1,$$

т.-е. эти притяженія равны.

Подобнымъ же образомъ увидимъ, что когда притяженіе частицъ

---

[122]) Эта теорема послужила В. Томсону (лорду Кэльвину) основаніемъ того преобразованія, которое имъ названо «построеніемъ электрическаго изображенія», именно такъ имъ названа точка J по отношенію къ точкѣ P и обратно.

обратно пропорціонально квадратамъ разстояній, то отношеніе притяженія въ точкѣ J къ притяженію въ точкѣ P равно отношенію SP къ SA. Если притяженіе частицъ обратно пропорціонально кубу разстояній, то отношеніе притяженія въ точкѣ J къ притяженію въ точкѣ P равно $SP^2 : SA^2$. Если притяженіе частицъ обратно пропорціонально четвертой степени разстояній, то сказанное отношеніе равно $SP^3 : SA^3$; но для этого послѣдняго случая уже было найдено, что притяженіе на точку P обратно пропорціонально $SP^3 . PJ$, слѣдовательно притяженіе на точку J будетъ обратно пропорціонально $SA^3 . PJ$, т.-е. обратно пропорціонально PJ, ибо SA постоянно. Подобнымъ образомъ надо поступать и для всякаго другого случая.

Теорема эта доказывается такъ: сохраняя прежнія построенія и предполагая, что притягиваемая масса помѣщена въ P, было найдено, что ордината DN пропорціональна $\frac{DE^2 . PS}{PE . V}$. Поэтому, если провести JE, то, когда притягиваемая масса будетъ помѣщена въ J, сказанная ордината будетъ пропорціональна $\frac{DE^2 . JS}{JE . V}$. Предположимъ, что притягательныя силы частицъ шара, исходящія изъ какой-либо его точки E въ разстояніяхъ JE и PE относятся между собою какъ $PE^n : JE^n$, то сказанныя ординаты будутъ соотвѣтственно пропорціональны:

$$\frac{DE^2 . PS}{PE . PE^n}$$

и

$$\frac{DE^2 . JS}{JE . JE^n},$$

коихъ отношеніе равно:

$$PS . JE . JE^n : JS . PE . PE^n,$$

но такъ какъ, въ виду пропорціи

$$SJ : SE = SE : SP,$$

треугольники SPE и SEJ подобны, то

$$JE : PE = JS : SE = JS : SA \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

и предыдущее отношеніе по замѣнѣ произведенія $PE . JS$ равнымъ ему произведеніемъ $JE . SA$ обратится въ такое:

$$PS . JE^n : SA . PE^n,$$

но отношеніе

$$PS : SA = \sqrt{PS} : \sqrt{JS}$$

и отношеніе

$$JE^n : PE^n,$$

въ виду пропорціи (*) равно корню квадратному изъ отношенія силъ въ разстоянія PS и JS. Слѣдовательно, ординаты DN, а значитъ и площади кривыхъ ANB, коимъ притяженія пропорціональны, будутъ находиться въ этомъ отношеніи.

Предложеніе LXXXIII. Задача XLII.

Найти силу, съ которою масса, помѣщенная въ центрѣ шара, притягивается его сегментомъ.

Пусть P (фиг. 115) есть масса, помѣщенная въ центрѣ шара, $RBSD$ сегментъ этого шара, заключенный между плоскостью RSD и частью шаровой поверхности RBS. Пусть DB пересѣкается съ шаровой поверхностью EFG, описанной изъ центра P въ точкѣ F, такъ что сегментъ раздѣляется на части $BREFGS$ и $FEDG$. Пусть, кромѣ того, эта поверхность не математическая, а физическая, имѣющая весьма малую толщину h, то объемъ такого слоя (по доказанному Архимедомъ) будетъ пропорціоналенъ $PF \,.\, DF \,.\, h$. Положимъ, кромѣ того, что притяженіе частицъ шара обратно пропорціонально n-ой степени разстоянія, тогда по пред. LXXIX притяженіе массы P этимъ слоемъ будетъ пропорціонально $\frac{DE^2 \,.\, h}{PF^n}$, т.-е. количеству

$$\left[\frac{2DF}{PF^{n-1}} - \frac{DF^2}{PF^n}\right] . \, h.$$

Пусть ордината FN умноженная на h пропорціональна предыдущей величинѣ, тогда криволинейная площадь, происходящая отъ продвиженія ординаты FN по длинѣ DB, будетъ пропорціональна полной силѣ притяженія массы P сегментомъ $RBSD$.

Предложеніе LXXXIV. Задача XLIII.

Найти силу, съ которою притягивается масса, расположенная на оси сегмента внѣ его центра, этимъ сегментомъ.

Пусть масса P (фиг. 116 л. 19), лежащая на оси ADB притягивается сегментомъ EBK. Изъ центра P радіусомъ PE опиши шаровую поверхность EFK, которая раздѣлитъ сегментъ на двѣ части $EBKFE$ и $EFKDE$. Притяженіе первой части найдется по пред. 81, второй—по предл. 83; ихъ сумма и будетъ притяженіе сегмента.

Поученіе.

Послѣ объясненія притяженія тѣлъ сферическихъ слѣдовало бы перейти къ законамъ притяженія другихъ тѣлъ, составленныхъ изъ притягивающихъ частицъ подобно тому, какъ это предполагалось выше, но подробное разсмотрѣніе такого вопроса имѣетъ лишь малое отношеніе къ цѣли этого сочиненія. Достаточно будетъ привести лишь нѣкоторыя общія предложенія о притягательныхъ силахъ тѣлъ подобнаго рода и о движеніяхъ, отъ этихъ силъ происходящихъ, въ виду нѣкоторыхъ ихъ примѣненій въ физикѣ.

ОТДѢЛЪ XIII.

О притяженіи тѣлъ не сферическихъ.

Предложеніе LXXXV. Теорема XLII.

Если притяженіе испытываемое притягиваемымъ тѣломъ при непосредственномъ соприкосновеніи съ притягивающимъ много сильнѣе, нежели при самомъ малѣйшемъ промежуткѣ ихъ раздѣляющемъ, то силы частицъ притягивающаго тѣла при увеличеніи разстоянія до притягиваемаго убываютъ быстрѣе, нежели въ отношеніи квадратовъ разстояній.

Ибо если силы убываютъ пропорціонально квадратамъ разстоянія до частицъ, то притяженіе сферическимъ тѣломъ обратно пропорціонально квадрату разстоянія притягиваемаго тѣла до центра сферы (пр. 74), поэтому это притяженіе при соприкосновеніи возрастетъ лишь едва-едва замѣтно. Это возрастаніе будетъ еще меньше, когда притяженіе при удаленіи притягиваемаго тѣла убываетъ въ меньшемъ отношеніи нежели квадраты разстояній. Такимъ образомъ, высказанное предложеніе имѣетъ мѣсто для притягивающихъ шаровъ. То же относится и до полыхъ шаровъ при притяженіи ими внѣшнихъ тѣлъ, и въ еще большей степени до притяженія тѣлъ находящихся внутри полостей, ибо въ этомъ случаѣ, притяженія по противоположности уничтожаются (пр. 70), и, слѣдовательно, даже при соприкосновеніи равны нулю. Поэтому, если для такихъ сплошныхъ или полыхъ шаровъ отнимать какія-либо части сколько-нибудь отстоящія отъ мѣста прикосновенія или прилагать къ нимъ другія части, то можно по произволу измѣнять форму притягивающихъ тѣлъ, добавленіе или отнятіе такихъ частей, такъ какъ онѣ находятся въ нѣкоторомъ удаленіи отъ мѣста касанія не будетъ чувствительно измѣнять избытка притяженія происходящаго отъ прикосновенія, такимъ образомъ предложеніе имѣетъ мѣсто и для тѣлъ любой формы.

Предложеніе LXXXVI. Теорема XLIII.

Если притягательныя силы частицъ составляющихъ притягивающее тѣло при удаленіи притягиваемаго убываютъ пропорціонально *третьей или еще высшей степени разстоянія, то при соприкосновеніи притяженіе будетъ гораздо сильнѣе, нежели когда оба тѣла раздѣлены хотя бы самымъ малымъ промежуткомъ.*

Изъ рѣшенія примѣровъ 2-го и 3-го задачи XLI слѣдуетъ, что при приближеніи притягиваемой массы къ шару составленному изъ такихъ частицъ, притяженіе возрастаетъ до безконечности. Сопоставляя подобно предыдущему эти примѣры и теорему XLI можно заключить, что это относится и до притяженія выпукло вогнутыми сферическими слоями и полыми сферами, находятся ли тѣла внѣ или внутри этихъ полостей. Прибавляя или отнимая отъ этихъ шаровъ или шаровыхъ слоевъ притягивающую матерію внѣ мѣста ихъ прикосновенія съ притягиваемою массою, можно придать притягивающимъ тѣламъ любую форму, слѣдовательно, высказанное предложеніе относится ко всякому тѣлу.

Предложеніе LXXXVII. Теорема XLIV.

Если два между собою подобныхъ тѣла состоятъ изъ однородно притягивающаго вещества и притягиваютъ двѣ массы, которыя пропорціональны массамъ самихъ тѣлъ и расположены по отношенію къ нимъ сходственнб, то полныя ускорительныя притяженія этихъ массъ къ соотвѣтствующимъ тѣламъ будутъ относиться между собою какъ ускорительныя притяженія ихъ къ отдѣльнымъ частицамъ, массы коихъ пропорціональны массамъ притягивающихъ тѣлъ, и которыя расположены въ нихъ сходственнымъ образомъ.

Вообразивъ, что тѣла разбиты на элементы, массы коихъ пропорціональны массамъ тѣлъ и расположеніе которыхъ сходственно, увидимъ, что притяженіе производимое какою либо частицею одного тѣла такъ относится къ притяженію, производимому соотвѣтствующей ею частицею другого тѣла, какъ притяженіе всякой другой частицы перваго тѣла къ притяженію ей соотвѣтствующей частицы второго, поэтому, слагая, получимъ, что и полныя притяженія тѣлъ находятся въ этомъ же отношеніи.

Слѣдствіе 1. Поэтому, если притяженія частицъ тѣлъ при увеличеніи разстояніи до притягиваемой массы убываютъ пропорціонально какой-либо степени разстоянія, то ускорительныя притяженія ея самими тѣлами будутъ пропорціональны ихъ массамъ и обратно пропорціональны той же степени разстоянія. Такимъ образомъ, если силы притяженія частицъ убываютъ пропорціонально квадрату разстояній, массы же тѣлъ пропорціональны A^3 и B^3, т.-е. кубамъ разстояній A и B притягиваемыхъ массъ до сходственныхъ частицъ тѣлъ, то ускорительныя притяженія будутъ пропорціональны $\frac{A^3}{A^2}$ и $\frac{B^3}{B^2}$, т.-е. пропорціональны A и B.

Если притяженіе частицъ убываетъ пропорціонально третьей степени разстоянія, то полныя притяженія будутъ пропорціональны $\frac{A^3}{A^3}$ и $\frac{B^3}{B^3}$, т.-е. будутъ между собою равны.

Если силы убываютъ пропорціонально четвертой степени разстоянія, то полныя притяженія будутъ пропорціональны $\frac{A^3}{A^4}$ и $\frac{B^3}{B^4}$, т.-е. обратно пропорціональны A и B и т. д.

Слѣдствіе 2. Отсюда обратно, по притяженіямъ производимымъ подобными тѣлами на массы подобнымъ образомъ расположенныя, можно вывести законъ убыванія притягательной силы частицъ въ зависимости отъ разстоянія, если только это убываніе будетъ прямо или обратно пропорціонально какой-либо степени разстоянія.

Предложеніе LXXXVIII. Теорема XLV.

Если притягательныя силы отдѣльныхъ равныхъ частицъ какого-либо тѣла, пропорціональны разстояніямъ мѣстъ до нихъ, то притягательная сила всего тѣла направляется къ его центру тяжести и равна притягательной силѣ шара состоящаго изъ равнаго количества того же вещества и имѣющаго свой центръ въ центрѣ тяжести сказаннаго тѣла.

Пусть частицы A и B (фиг. 117) тѣла $RSTV$ притягиваютъ массу Z съ такими силами, которыя, когда массы частицъ A и B равны, относятся между собою какъ AZ къ BZ, когда же массы частицъ не равны, то, какъ произведенія этихъ массъ на вышеупомянутыя разстоянія. Представимъ эти силы самими этими произведеніями $A \,.\, AZ$ и $B \,.\, BZ$, соединимъ AB и раздѣлимъ эту прямую въ точкѣ G такъ, чтобы было:

$$AG : BG = B : A \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

тогда G есть центръ тяжести частицъ A и B.

Сила $A \,.\, AZ$ разлагается (сл. 2 зак.) на силы $A \,.\, GZ$ и $A \,.\, AG$, сила $B \,.\, BZ$ на силы $B \,.\, GZ$ и $B \,.\, BG$; но силы $A \,.\, AG$ и $B \,.\, BG$ на основаніи пропорціи (*) между собою равны, и будучи, направлены въ обратныя стороны взаимно уничтожаются. Остаются силы $A \,.\, GZ$ и $B \,.\, GZ$ направленныя отъ Z къ G. Онѣ слагаются въ одну $(A+B)GZ$, направленную къ G, т.-е. въ такую силу, какъ если бы обѣ притягивающія частицы были помѣщены въ центрѣ тяжести ихъ G, образуя здѣсь шаръ.

На основаніи такого же разсужденія если добавить третью частицу C, то ея сила по соединеніи съ силою $(A+B)GZ$ направленной въ G, образуетъ силу, направленную къ общему центру тяжести сказаннаго шара G и частицы C, т.-е. къ центру тяжести всѣхъ трехъ частицъ A, B и C, и будетъ равна силѣ, которая происходила бы, если бы въ этомъ общемъ центрѣ тяжести помѣстить центръ шара образованнаго изъ всѣхъ трехъ частицъ. Продолжая такимъ образомъ до безконечности заключимъ, что полная сила притяженія всѣхъ частицъ образующихъ тѣло $RSTV$ будетъ такая же, какъ если бы сохранивъ положеніе центра тяжести придать этому тѣлу форму шара.

Слѣдствіе. Движеніе притягиваемаго тѣла Z будетъ то же самое, какъ если бы тѣло $RSTV$ было сферической формы, поэтому, если это послѣднее находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно, то притягиваемое тѣло Z будетъ описывать эллипсъ, коего центръ находится въ центрѣ тяжести притягивающаго тѣла.

Предложеніе LXXXIX. Теорема XLVI.

Если имѣется нѣсколько тѣлъ, состоящихъ изъ равныхъ частицъ, коихъ притягательныя силы пропорціональны разстояніямъ до нихъ, то полное притяженіе какой-либо массы этими тѣлами направлено къ ихъ общему центру тяжести и такое же какъ если бы всѣ эти тѣла слить въ одинъ шаръ, сохраняя положеніе общаго ихъ центра тяжести.

Это предложеніе можетъ быть доказано совершенно такъ же какъ предыдущее.

Слѣдствіе. Слѣдовательно, движеніе притягиваемаго тѣла будетъ то же самое, какъ если бы притягивающія тѣла были слиты въ одинъ шаръ сохранивъ положеніе цента тяжести, поэтому, когда этотъ центръ тяжести системы притягивающихъ тѣлъ или находится въ покоѣ или движется равномѣрно и прямолинейно, то притягиваемое тѣло будетъ описывать эллипсъ, коего центръ находится въ сказанномъ центрѣ тяжести системы притягивающихъ тѣлъ.

Предложеніе XC. Задача XLIX.

Предполагая, что къ отдѣльнымъ точкамъ круга направлены равныя центростремительныя силы, возрастающія или убывающія въ какой-либо зависимости отъ разстоянія, требуется найти силу, съ которою притягивается масса, помѣщенная гдѣ-нибудь на прямой перпендикулярной къ плоскости круга и проходящей черезъ его центръ.

Вообразимъ, что изъ центра A (фиг. 118) какимъ-либо радіусомъ AD описанъ кругъ въ плоскости, перпендикулярной къ прямой AP и требуется найти ту силу, съ которою масса P притягивается этимъ кругомъ.

Проведемъ изъ какой-либо точки E круга прямую PE, на прямой PA отложимъ длину $PF = PE$ и по ординатѣ FK отложимъ длину пропорціональную той силѣ, съ которою точка E притягиваетъ массу P. Пусть JKL

есть та кривая, на которой постоянно лежитъ точка K и которая пересѣкаетъ плоскость круга въ L. На AP беремъ длину $PH = PD$ и проводимъ перпендикуляръ, пересѣкающій сказанную кривую въ точкѣ J, тогда притяженіе массы P кругомъ пропорціонально произведенію площади $ALJH$ на разстояніе AP. Въ самомъ дѣлѣ возьмемъ на AE весьма малую длину Ee, проведемъ Pe и возьмемъ PC и Pf равными Pe; по предположенію длина FK пропорціональна той силѣ, съ которою масса P притягивается къ точкѣ E кольца, коего ширина eE и которое описано изъ A какъ изъ центра радіусомъ AE, поэтому элементарная сила притяженія массы P къ центру A будетъ пропорціональна $FK \cdot \frac{AP}{PE}$, сила же притяженія этой массы всѣмъ кольцомъ будетъ пропорціональна произведенію его площади на $FK \cdot \frac{AP}{PE}$; но площадь кольца пропорціональна $AE \cdot Ee$, а такъ какъ

$$PE : AE = Ee : CE,$$

то

$$AE \cdot Ee = PE \cdot CE = PE \cdot Ff,$$

слѣдовательно, притяженіе массы P кольцомъ по направленію къ A пропорціонально

$$PE \cdot Ff \cdot \frac{AP \cdot FK}{PE},$$

т.-е.

$$Ff \cdot FK \cdot AP,$$

иначе произведенію [123]) площадки $FKkf$ на разстояніе AP; поэтому сумма притяженій массы P всѣми кольцами, составляющими кругъ, описанный радіусомъ AD изъ центра A, будетъ пропорціональна площади $AHJKL$, умноженной на длину AP.

Слѣдствіе 1. Такъ, если притяженіе точкою E обратно пропорціонально квадрату разстоянія, т.-е. если FK пропорціонально $\frac{1}{PF^2}$, то пло-

---

[123]) Полагая, что законъ притяженія выражается формулою $f(r)$, гдѣ $r = PE$ и обозначая черезъ q поверхностную плотность, получимъ, что слагающая притяженія отъ элементарнаго кольца выражается формулою

$$dX = 2\pi q \cdot h \cdot f(r) dr,$$

гдѣ

$$h = AP,$$

дѣлая еще

$$PD = FH = H,$$

будемъ имѣть

$$X = 2\pi q \cdot h \cdot \int_h^H f(r) \cdot dr \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

щадь $AHJKL$ будетъ пропорціональна $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$ и притяженіе круга пропорціонально $1 - \frac{PA}{PH}$, т.-е. $\frac{AH}{PH}$.

Слѣдствіе 2. Вообще, если притяженіе точекъ въ разстояніи D обратно пропорціонально какой-либо степени D^n, т.-е. FK пропорціонально $\frac{1}{D^n}$, слѣдовательно, площадь $AHJKL$ пропорціональна

$$\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}},$$

то притяженіе массы P кругомъ будетъ пропорціонально

$$\frac{1}{PA^{n-2}} - \frac{PA}{PH^{n-1}}.$$

Слѣдствіе 3. Если діаметръ круга увеличивается до безконечности и показатель степени n больше 1, то притяженіе массы безконечною плоскостью обратно пропорціонально PA^{n-2}, ибо членъ $\frac{PA}{PH^{n-1}}$, въ этомъ случаѣ исчезаетъ.

Предложеніе XCI. Задача XLV.

Найти притяженіе массы, помѣщенной на оси тѣла вращенія этимъ тѣломъ, когда къ отдѣльнымъ его точкамъ направляются равныя центростремительныя силы, убывающія по какому-либо закону въ зависимости отъ разстоянія.

Пусть масса P (фиг. 119), лежащая на оси тѣла вращенія $DECG$, притягивается имъ. Пересѣки это тѣло какою-либо плоскостью, перпендикулярной къ оси и пусть кругъ RFS есть полученное сѣченіе, по его радіусу FS въ какой-либо плоскости, проведенной черезъ ось, возьми длину FK пропорціональную той силѣ, съ которою масса P притягивается этимъ кругомъ (пр. XC). Точка K расположится на кривой LKJ, пересѣкающей плоскости крайнихъ круговъ AL и BJ въ точкахъ L и J.

Притяженіе массы P тѣломъ вращенія $DECG$ будетъ пропорціонально площади $LKJBA$.

Слѣдствіе 1. Поэтому, когда тѣло—цилиндръ, происходящій отъ обращенія прямоугольника $ADEB$ (фиг. 120) около оси AB и притяженіе его отдѣльныхъ точекъ обратно пропорціональны квадратамъ разстояній до нихъ, то притяженіе массы P этимъ цилиндромъ пропорціонально

$$(AB - PE + PD),$$

ибо въ этомъ случаѣ (1, XC) ордината FK пропорціональна $1 - \frac{PF}{PR}$; при проведенiи 1 по основанiю AB получается площадь $1 \, . \, AB$. Вторая часть $\frac{PF}{PR}$ при проведенiи по длинѣ PB даетъ площадь $1 \, . \, (PE - AD)$, что легко получить квадратурою кривой LKJ; та же часть $\frac{PF}{PR}$ по проведенiи по длинѣ PA даетъ площадь $(PD - AD) \, . \, 1$, слѣдовательно, при проведенiи по AB опишется площадь, равная разности

$$(PE - AD) \, . \, 1 - (PD - AD) \, . \, 1,$$

т.-е.

$$1 \, . \, (PE - PD),$$

вычтя которую изъ площади $AB \, . \, 1$ и получимъ, что площадь $LABJ$ равна

$$1 \, . \, (AB - PE + PD),$$

слѣдовательно, сила пропорцiональна [124])

$$(AB - PE + PD).$$

---

[124]) Притяженiе кругомъ, представляющимъ сѣченiе тѣла вращенiя, точнѣе говоря, слоемъ, заключеннымъ между двумя безконечно близкими кругами, находится по фор. (1) прим. 123, и высказываемая теорема при принятомъ теперь обозначенiи приводитъ къ слѣдующей формулѣ.

Пусть ρ есть плотность (объемная) тѣла вращенiя:

$$PA = a, \quad PB = b, \quad PF = x, \quad PR = X,$$

полагая

$$Q = 2\pi x \int_x^X f(r) dr = FK \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

будемъ имѣть, такъ какъ $q = \rho \, . \, dx$, притяженiе

$$F = \rho \int_a^b Q \, . \, dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Такъ, для цилиндра будетъ при $f(r) = \frac{k}{r^2}$

$$Q = 2\pi k x \int_x^X \frac{1}{r^2} \, dr = 2\pi k x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{X} \right) = 2\pi k \left[1 - \frac{x}{X} \right] = 2\pi k \left[1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right],$$

гдѣ $c = AD$ есть радiусъ цилиндра и значитъ полное притяженiе будетъ

$$F = 2\pi k \int_a^b \left[1 - \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \right] dx = 2\pi k \left\{ (b - a) - \frac{b}{\sqrt{c^2 + b^2}} + \frac{a}{\sqrt{c^2 + a^2}} \right\},$$

т.-е. F пропорцiонально

$$(AB - PE + PD).$$

Слѣдствіе 2. Такимъ же образомъ можно вычислить силу, съ которою сфероидъ $AGBC$ притягиваетъ массу P, расположенную на его оси AB. Пусть $NKRM$ есть такое коническое сѣченіе, коего ордината ER, перпендикулярная къ PE, равна при всякомъ ея положеніи отрѣзку PD, проводимому къ точкѣ пересѣченія D этой ординаты со сфероидомъ. Изъ вершинъ сфероида A и B проводятся перпендикуляры AK и BM, соотвѣтственно равные AP и BP, пересѣкающіе сказанное коническое сѣченіе въ K и M (фиг. 121). Проведя KM, отсѣчемъ отъ него площадь $KMRK$.

Пусть S есть центръ сфероида, SC его большая полуось, тогда отношеніе силы, съ которою точка P притягивается сфероидомъ къ силѣ притяженія шаромъ, описаннымъ на діаметрѣ AB, равно отношенію:

$$\frac{AS \cdot SC^2 - KMRK \cdot PS}{PS^2 + SC^2 - AS^2} : \frac{AS^3}{3PS^2}.$$

Основываясь на разсчетахъ подобнаго же рода, можно найти и притяженіе сегментомъ сфероида [125]).

---

[125]) Приводимая въ этомъ слѣдствіи формула для притяженія эллипсоида вращенія на точку, лежащую на оси вращенія, можетъ быть получена слѣдующимъ образомъ: обозначимъ разстояніе PD черезъ X тогда на основаніи фор. (2) будетъ

$$F = 2\pi k \int_{l-a}^{l+a} \left[1 - \frac{x}{X}\right] dx = 4\pi k \left[a - \int_{l-a}^{l+a} \frac{x}{X}\, dx\right],$$

гдѣ

$$PA = l - a, \quad SA = SB = a, \quad PS = l, \quad PE = x.$$

На основаніи уравненія эллипса при $SC = b$ будетъ

$$X^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x^2 + \frac{2b^2 l}{a^2} x - \frac{b^2}{a^2}(l^2 - a^2),$$

сдѣлавъ для сокращенія письма

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^2}; \quad B = \frac{b^2 l}{a^2}; \quad C = -\frac{b^2}{a^2}(l^2 - a^2)$$

и все свелось къ вычисленію интеграла

$$\int_{l-a}^{l+a} \frac{x}{X}\, dx.$$

Интегралъ $\int \frac{x}{X}\, dx$ Ньютонъ приводитъ къ вычисленію интеграла $\int X dx$, въ самомъ дѣлѣ будетъ:

$$\int X dx = xX - \int \frac{Ax + B}{X} x dx = xX - \int \frac{Ax^2 + Bx}{X} dx =$$
$$= xX - \int \frac{X^2 - Bx - C}{X} \cdot dx = xX - \int X dx + \int \frac{Bx + C}{X} dx.$$

Откуда

Слѣдствіе 3. Когда притягиваемая масса лежитъ внутри сфероида на его оси, то притяженіе ея пропорціонально разстоянію до его центра. Это

$$2\int X dx = xX + B\int \frac{x dx}{X} + C\int \frac{dx}{X} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Но

$$\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{A}\int \frac{Ax+B}{X} dx - \frac{B}{A}\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{A} X - \frac{B}{A}\int \frac{dx}{X} \quad . \quad . \quad (2)$$

подставляя въ фор. (1) получимъ:

$$\int \frac{x}{X} dx = \frac{2B}{B^2-AC}\int X dx - \frac{Bx+C}{B^2-AC} . X \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Подставляя въ эту формулу предѣлы $(l+a)$ и $(l-a)$ и обозначая черезъ S площадь $MRKAB$, такъ что

$$S = \int_{l-a}^{l+a} X . dx$$

замѣнивъ A, B и C ихъ величинами и замѣтивъ, что при

$$x = l - a$$

будетъ и

$$X = l - a$$

и что при

$$x = l + a$$

будетъ и

$$X = l + a,$$

получимъ

$$\left| \frac{(Bx+C)X}{B^2-AC} \right|_{l-a}^{l+a} = \frac{2a(l^2+a^2)}{l^2-a^2+b^2}$$

и

$$F = 4\pi k\left[a - \frac{l . S}{l^2-a^2+b^2} + \frac{a(l^2+a^2)}{l^2-a^2+b^2}\right] = 4\pi k\, \frac{ab^2 - l(S-2al)}{l^2-a^2+b^2},$$

но

$$S - 2al = MRKAB - ABMK = KMRK = S_1,$$

а такъ какъ притяженіе шара, описаннаго на діаметрѣ AB, есть

$$F_0 = \frac{4}{3}\, \frac{\pi a^3 k}{l^2},$$

то и будетъ

$$F : F_0 = \frac{ab^2 - lS_1}{l^2-a^2+b^2} : \frac{a^3}{3l^2}$$

это и есть приведенная въ текстѣ формула.

По поводу этой формулы замѣтимъ, что, какъ видно изъ сочиненія Ньютона «Du curvatura curvarum» ему было извѣстно не только геометрическое, но и аналитическое представленіе интеграловъ, содержащихъ корень квадратный изъ трехчлена второй степени относительно независимой перемѣнной.

легко можно получить слѣдующимъ разсужденіемъ и притомъ находится ли притягиваемая точка на оси или нѣтъ.

Пусть $AGOF$ (фиг. 122) есть притягивающій сфероидъ, S его центръ, P притягиваемая точка. Проведемъ черезъ эту точку P полудіаметръ SPA и еще двѣ какихъ бы то ни было прямыхъ DE и FG, пересѣкающихъ сфероидъ въ точкахъ D, E, F и G и пусть PCM и HLN представляютъ двѣ сфероидическихъ поверхности, лежащихъ внутри данной, одноцентренныхъ и подобныхъ ей, причемъ первая изъ нихъ проходитъ черезъ точку P и пересѣкаетъ прямыя DE, FG въ точкахъ B и C, вторая же пересѣкаетъ эти прямыя въ точкахъ H, K, J, L. Всѣ эти сфероиды имѣютъ общую ось и отрѣзки прямыхъ, заключенные между ними, будутъ соотвѣтственно равны, а именно:

$$DP = BE, \quad FP = CG, \quad DH = EJ, \quad FK = LG,$$

ибо прямыя DE, PB и HJ раздѣляются пополамъ въ тѣхъ же точкахъ, какъ FG, PC и KL. Вообрази теперь, что DPF и EPG представляютъ два противоположныхъ конуса, описанныхъ безконечно малыми углами DPF и EPG и что линіи DH и EJ также безконечно малыя, тогда вырѣзаемыя этими конусами части $DHFK$ и $GEJL$ поверхностей сфероидовъ будутъ пропорціональны квадратамъ разстояній до точки P и въ виду равенства длинъ DH и EJ оказываютъ на эту точку равныя притяженія. На основаніи этого, если объемы DPF и $EGCB$ подраздѣлить безчисленнымъ множествомъ подобныхъ, одноцентренныхъ и имѣющихъ ту же ось сфероидическихъ поверхностей на элементарные объемы, то всѣ они попарно притягиваютъ точку P съ равными силами въ противоположныя стороны, слѣдовательно, силы притяженія конуса DPF и коническаго сегмента $EGCB$ между собою равны и будучи направлены въ противоположныя стороны взаимно уничтожаются, это относится, значитъ, и до всей матеріи, расположенной внѣ внутренняго сфероида $PCBM$, которая такимъ образомъ на точку P притяженія не оказываетъ. Слѣдовательно, точка P притягивается только внутреннимъ сфероидомъ $PCBM$ и по сл. 3 пр. 72 сила этого притяженія такъ относится къ притяженію точки A всѣмъ сфероидомъ $AGOD$, какъ разстояніе PS къ AS.

Предложеніе XCII. Задача XLVI.

Найти законъ убыванія центростремительныхъ силъ, направленныхъ къ отдѣльнымъ частицамъ заданнаго притягивающаго тѣла.

Изъ заданнаго тѣла надо сдѣлать шаръ или цилиндръ, или иное тѣло правильной формы, для котораго законъ полной силы притяженія, находящійся въ соотвѣтствіи съ закономъ убыванія притяженія отдѣльной частицею могъ бы быть найденъ по пред.: 80, 81, 91. Произведя затѣмъ испытанія, опредѣляютъ притяженіе тѣла въ различныхъ разстояніяхъ, найденный по этимъ опредѣленіямъ законъ притяженія къ цѣлому тѣлу доставитъ и искомый законъ притяженія его частицами.

Предложеніе XCIII. Теорема XLVII.

Если тѣло, ограниченное съ одной стороны плоскостью, съ прочихъ же сторонъ неограниченное и простирающееся до безконечности, состоитъ изъ равныхъ частицъ, одинаково притягивающихъ, причемъ притяженіе ихъ убываетъ пропорціонально какой-либо степени разстоянія бо̀льшей, нежели вторая и какая-либо масса, лежащая гдѣ угодно относительно граничащей плоскости притягивается этимъ тѣломъ, то это притяженіе при удаленіи отъ плоскости убываетъ пропорціонально степени разстоянія тѣла до плоскости на три единицы меньшей той, пропорціонально которой убываетъ притяженіе отдѣльныхъ частицъ тѣла.

Случай 1. Пусть LGl есть плоскость, ограничивающая тѣло, которое расположено отъ нея въ сторону J и подраздѣлено на слои безчисленнымъ множествомъ плоскостей: mHM, nJN, oKO (фиг. 123) и т. д., параллельныхъ плоскости GL и масса C лежитъ внѣ притягивающаго тѣла. Проведемъ прямую $CGHJ$ перпендикулярно сказаннымъ плоскостямъ и пусть притяженіе частицъ обратно пропорціонально степени n разстоянія не меньшей 3, тогда по сл. 3 пр. 90 сила притяженія массы C какою-либо плоскостью mHM обратно пропорціональна CH^{n-2}. Возьми въ плоскости mHM длину HM обратно пропорціональную CH^{n-2}, тогда сила притяженія плоскостью mHM будетъ пропорціональна этой длинѣ HM. Подобнымъ же образомъ и по другимъ плоскостямъ откладываются длины GL, JN, KO и пр., обратно пропорціональныя CG^{n-2}, CJ^{n-2}, CK^{n-2} и т. д.—притяженія этихъ плоскостей будутъ пропорціональны соотвѣтствующимъ длинамъ, значитъ сумма этихъ притяженій будетъ пропорціональна суммѣ этихъ длинъ, т.-е. площади $GLOK$, продолженной до безконечности въ сторону OK. Эта же площадь (по извѣстнымъ способамъ квадратуръ) обратно пропорціональна CG^{n-3}, слѣдовательно, и притяженіе всего тѣла обратно пропорціонально этой величинѣ.

Случай 2. Если же масса C (фиг. 124) лежитъ внутри тѣла, то отложивъ длину CK, равную CG и проведя плоскость oKO, отсѣчемъ такую часть $LGloKO$ тѣла, ограниченную параллельными плоскостями lGL, oKO, которая на массу C притяженія не оказываетъ, ибо дѣйствія противоположныхъ частей этого отсѣченнаго тѣла взаимно уравновѣшиваются, слѣдовательно, масса C притягивается только тѣломъ, лежащимъ за плоскостью OK, сила же этого притяженія, по доказанному для 1-го случая обратно пропорціональна CK^{n-3}, т.-е. CG^{n-3}, ибо $CG = CK$.

Слѣдствіе 1. Поэтому если тѣло $LGJN$ ограничено съ обѣихъ сторонъ плоскостями LG и JN, простирающимися до безконечности, то его притяженіе найдется вычтя изъ полнаго притяженія неограниченнаго тѣла $LGKO$, притяженія его части $NJKO$ также простирающейся безконечно въ сторону KO.

Слѣдствіе 2. Если притяженіе этой второй части тѣла по сравненію съ первой будетъ ничтожно мало и его отбросить, то притяженіе первой части при увеличеніи разстоянія будетъ измѣняться приблизительно пропорціонально CG^{n-3}.

Слѣдствіе 3. Поэтому, если какое-либо конечное тѣло, ограниченное съ одной стороны плоскостью, притягиваетъ частицу въ области близъ средины этой плоскости и разстояніе отъ частицы до плоскости чрезвычайно мало по сравненію съ размѣрами тѣла, тѣло же это само состоитъ изъ одинаковыхъ частицъ, коихъ притяженіе убываетъ пропорціонально какой-либо степени разстоянія выше четвертой, то притяженіе всего тѣла убываетъ пропорціонально степени вышесказаннаго малаго разстоянія на три единицы меньшей, нежели та степень, коей обратно пропорціонально притяженіе частицы.

Это утвержденіе не относится къ тѣлу, коего частицы притягиваютъ обратно пропорціонально кубу разстоянія, ибо въ этомъ случаѣ притяженіе упомянутой во 2-мъ слѣдствіи второй неограниченной части тѣла безконечно больше притяженія первой его части ограниченной съ двухъ сторонъ.

Поученіе.

Если какое-либо тѣло притягивается перпендикулярно данной плоскости и требуется опредѣлить его движеніе, когда законъ притяженія заданъ, то задача рѣшается, опредѣляя (пр. XXXIX) движеніе тѣла, падающаго прямо на эту плоскость и слагая (сл. 2 зак.) это движеніе съ равномѣрнымъ движеніемъ, параллельнымъ этой плоскости.

Наоборотъ, если требуется найти законъ притяженія къ плоскости по перпендикулярному къ ней направленію при условіи, чтобы притягиваемое тѣло двигалось по заданной кривой, то задача рѣшается, поступая подобно тому, какъ въ задачѣ 3-ей.

Это послѣднее опредѣленіе можетъ быть упрощено, разлагая ординаты въ сходящіеся ряды. Такъ, если къ оси A подъ какимъ-либо угломъ проводятся ординаты B, коихъ длины пропорціональны какой-либо степени $A^{\frac{m}{n}}$ абсциссъ и требуется опредѣлить такую силу, направленную по ординатамъ или въ сторону къ оси абсциссъ или въ сторону обратную, которая заставила бы тѣло двигаться по кривой, проходящей черезъ концы ординатъ, то положивъ, что абсцисса получаетъ какое-либо весьма малое приращеніе α, разлагаемъ ординату $(A+\alpha)^{\frac{m}{n}}$ въ безконечный рядъ

$$A^{\frac{m}{n}}+\frac{m}{n}A^{\frac{m-n}{n}}.\alpha+\frac{m^2-mn}{2n^2}A^{\frac{m-2n}{n}}.\alpha^2+\ldots$$

и принимаемъ, что сила пропорціональна тому члену, гдѣ α содержится во второй степени, т.-е.

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}} \alpha^2,$$

такъ что искомая сила пропорціональна

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} A^{\frac{m-2n}{n}}$$

или, что то же

$$\frac{m^2 - mn}{2n^2} B^{\frac{m-2n}{m}}.$$

Такъ, если ордината описываетъ параболу, то

$$m = 2 \quad \text{и} \quad n = 1$$

и сила будетъ пропорціональна B^0, т.-е. постоянная. Подъ дѣйствіемъ постоянной силы тѣло описываетъ на самомъ дѣлѣ параболу, какъ это доказалъ еще Галилей. Если же ордината описываетъ гиперболу, то будетъ

$$m = 0 - 1 \quad \text{и} \quad n = 1$$

и сила будетъ пропорціональна $2A^{-3}$ или $2B^3$, слѣдовательно, когда сила пропорціональна кубу ординаты, то тѣло будетъ двигаться по гиперболѣ [126]).

Опуская подобнаго рода предложенія перехожу къ другимъ, которыхъ я еще не касался.

---

[126]) Въ общемъ случаѣ уравненіе траекторіи будетъ вида:

$$x = kt; \qquad z = \varphi(x) = \varphi(kt)$$

предполагая, что ось y-ковъ взята такъ, чтобы движеніе происходило въ плоскости zx; сила

$$F = z'' = \frac{d^2x}{dt^2} = k^2\varphi''(x).$$

Но

$$\varphi(x + \alpha) = \varphi(x) + \alpha\varphi'(x) + \frac{\alpha^2}{1.2}.\varphi''(x) + \ldots$$

и, слѣдовательно, сила дѣйствительно пропорціональна коефиціенту при α^2 въ разложеніи функціи $\varphi(x + \alpha)$ по степенямъ α. Но затѣмъ надо выразить изъ уравненія $z = \varphi(x)$ перемѣнную x черезъ z и подставить въ выраженіе $\varphi''(x)$.

ОТДѢЛЪ XIV.

О движенiи весьма малыхъ тѣлъ подъ дѣйствiемъ центростремительныхъ силъ, направленныхъ къ отдѣльнымъ частицамъ весьма большого тѣла.

Предложенiе XCIV. Теорема XLVIII.

Если двѣ однородныя среды раздѣляются пространствомъ, заключеннымъ между двумя параллельными плоскостями и тѣло, при переходѣ черезъ это пространство, притягивается или побуждается къ одной изъ срединъ перпендикулярно къ плоскости раздѣла, другихъ же силъ къ нему никакихъ не приложено и если при этомъ притяженiе, при всякомъ разстоянiи отъ обѣихъ плоскостей, одно и то же и направлено въ ту же сторону, то синусъ угла паденiя на первую плоскость находится въ постоянномъ отношенiи къ синусу угла выхода изъ второй.

Случай 1. Пусть Aa, Bb (фиг. 125) двѣ параллельныя плоскости и тѣло падаетъ на первую плоскость по прямой GH и, въ продолженiе всего своего перехода черезъ промежуточное пространство, притягивается къ первой средѣ и подъ этимъ дѣйствiемъ описываетъ кривую HJ и выходитъ по направленiю JK. Проводимъ къ плоскости выхода перпендикуляръ JM, пересѣкающiй продолженiе линiи паденiя GH въ M и плоскость паденiя въ R. Пусть продолженная линiя выхода JK пересѣкается съ продолженной линiей паденiя HM въ L. Изъ центра L радiусомъ LJ опишемъ кругъ, пересѣкающiй прямую HM въ точкѣ P и Q и продолженiе MJ въ точкѣ N.

Полагая, что притяженiе дѣйствующее на частицу постоянно, то по доказанному Галилеемъ кривая HJ будетъ парабола, обладающая тѣмъ свойствомъ, что произведенiе постояннаго ея параметра на длину LM равно HM^2, причемъ точкою L длина HM раздѣляется пополамъ. Поэтому, если изъ L опустить на MJ перпендикуляръ LO, то $MO = OR$, если къ этимъ равнымъ приложить равныя ON и OJ, то и суммы MN и JR будутъ равны, а такъ какъ JR постоянно, то и MN постоянная, слѣдовательно отношенiе произведенiя $NM \,.\, MJ$ къ произведенiю постояннаго параметра на MJ, т.-е. къ HM^2 постоянное; но

$$MN \,.\, MJ = PM \,.\, MQ = ML^2 - PL^2 = ML^2 - LJ^2$$

и

$$HM^2 = 4ML^2$$

слѣдовательно и отношеніе

$$(ML^2 - LJ^2) : ML^2$$

постоянное, значитъ постоянно и отношеніе

$$\frac{LJ^2}{ML^2}, \text{ т.-е. и } \frac{LJ}{ML}.$$

Но во всякомъ треугольникѣ синусы угловъ пропорціональны сторонамъ, слѣдовательно постоянно и отношеніе синуса угла паденія LMR къ синусу угла выхода LJR.

Случай 2. Положимъ теперь, что точка переходитъ черезъ нѣсколько пространствъ ограниченныхъ параллельными плоскостями $AabB$ (фиг. 126) $BbcC$ и т. д. и что она находится подъ дѣйствіемъ силы, которая въ каждомъ пространствѣ постоянна, но въ разныхъ пространствахъ различная. По выше доказанному синусъ угла паденія на первую плоскость Aa находится въ постоянномъ отношеніи къ синусу угла выхода изъ второй плоскости, но этотъ синусъ есть, вмѣстѣ съ тѣмъ, синусъ угла паденія на вторую плоскость Bb и находится въ постоянномъ отношеніи къ синусу угла выхода изъ третьей плоскости, этотъ же въ постоянномъ отношеніи къ синусу угла выхода изъ четвертой плоскости Dd и т. д. до безконечности, слѣдовательно по перемноженіи этихъ отношеній получится, что синусъ угла паденія на первую плоскость находится въ постоянномъ отношеніи къ синусу угла выхода изъ послѣдней.

Положимъ теперь, что промежутки между плоскостями уменьшаются, число же ихъ увеличивается до безконечности, такъ что законъ измѣненія притяженія или напора можетъ быть сдѣланъ какимъ-угодно непрерывно измѣняющимся, то такъ какъ отношеніе синуса угла паденія на первую плоскость къ синусу угла выхода изъ послѣдней остается постояннымъ, то оно останется таковымъ и при всякомъ законѣ притяженія [127]).

---

[127]) Это утвержденіе можетъ быть провѣрено весьма просто аналитически, какъ то показалъ Клэро. Въ самомъ дѣлѣ, примемъ за ось z-овъ нормаль къ плоскости раздѣла срединъ и за ось x-овъ пересѣченіе этой плоскости съ плоскостью паденія, пусть уголъ паденія α_0, скорость падающей частицы v_0, x и z ея координаты въ моментъ t, h глубина, послѣ которой притяженіе частицы ничтожно мало, $f(z)$ сила притяженія въ разстояніи z.

Уравненія движенія частицы будутъ

$$x'' = 0; \quad z'' = f(z) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad (1)$$

Начальныя условія при $t = 0$:

$$x = 0, \quad z = 0$$

и

$$x' = v_0 \sin\alpha_0; \quad z' = v_0 \cos\alpha_0.$$

Изъ уравненій (1) слѣдуетъ

Предложеніе XCV. Теорема XLIX.

При тѣхъ же предположеніяхъ я утверждаю, что скорость частицы до паденія относится къ ея скорости послѣ выхода, какъ синусъ угла выхода къ синусу угла паденія.

Возьмемъ $AH = Jd$ (фиг. 126) и проведемъ перпендикуляры AG и dK, пересѣкающіе линіи паденія и выхода GH и JK въ G и K, по GH отложимъ $TH = JK$ и опустимъ на плоскость Aa нормаль Tv. Разложимъ движеніе частицы на два: одно параллельно, другое перпендикулярно къ плоскостямъ Aa, Bb... Сила притяженія или напора, дѣйствуя по направленію этихъ перпендикуляровъ, не измѣняетъ движенія по параллелямъ, поэтому частица проходитъ въ этомъ движеніи, въ равныя времена, равныя длины, какъ въ промежуткѣ между AG и H, такъ и въ промежуткѣ между J и прямою dK, слѣдовательно длины GH и JK описываются въ равныя времена, поэтому скорость до паденія такъ относится къ скорости послѣ выхода какъ GH къ JK или къ TH, т.-е. какъ AH или Jd къ vH, т.-е. (принимая за радіусы TH или JK какъ синусъ угла выхода къ синусу угла паденія).

$$x' = v_0 \sin\alpha_0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (2)$$

и по закону живыхъ силъ:

$$v^2 = x'^2 + z'^2 = v_0^2 + 2\int_0^z f(z)dz \quad \dots\dots \quad (3)$$

Пусть при $z = h$ будетъ $v = V$ и направленіе движенія составляетъ уголъ α съ осью z. На основаніи уравненія (2) будетъ

$$V\sin\alpha = v_0 \sin\alpha_0 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (4)$$

по уравненію же (3)

$$V^2 = v_0^2 + 2\int_0^h f(z)dz \quad \dots\dots\dots\dots \quad (5)$$

Уравненіе (4) даетъ

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_0} = \frac{v_0}{V} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

Изъ уравненія же (5) видно, что при постоянномъ v_0 и величина V постоянная, ибо она отъ α_0 не зависитъ. Форм. (6) и выражаетъ законъ преломленія.

Предложеніе XCVI. Теорема L.

Предполагая то же, что и ранѣе и что скорость движенія до паденія больше скорости послѣ таковаго, утверждаю, что можно настолько увеличить наклоненіе линіи паденія, что частица будетъ отражаться, причемъ уголъ отраженія будетъ равенъ углу паденія.

Вообрази, что частица описываетъ, какъ и въ предыдущихъ случаяхъ, между параллельными плоскостями Aa, Bb, Cc.. дуги параболъ, пусть эти дуги суть HP, PQ, QR (фиг. 127).

Положимъ, что наклоненіе линіи паденія къ первой плоскости таково, что отношеніе синуса этого угла къ радіусу равно отношенію синуса этого угла къ синусу угла выхода изъ плоскости Dd въ пространство $DdEe$, при такомъ условіи синусъ угла выхода будетъ равенъ радіусу и этотъ уголъ будетъ прямой, слѣдовательно, линія выхода совпадетъ съ плоскостью Dd. Пусть частица достигаетъ этой плоскости въ R, такъ какъ линія выхода съ этою плоскостью совпадаетъ, то ясно, что частица не можетъ, проникнувъ далѣе, перейти въ пространство $DdEe$, не можетъ она и продолжать двигаться по линіи выхода Rd, ибо на нее постоянно дѣйствуетъ сила въ сторону среды паденія, поэтому частица будетъ двигаться въ обратную сторону, чѣмъ прежде, т.-е. отъ плоскости Dd къ Cc, описывая дугу параболы QRq, вершина которой (по доказанному Галилеемъ) находится въ R, и которая пересѣчетъ плоскость Cc подъ такимъ же угломъ въ точкѣ q, какъ и въ точкѣ Q. Продолжая затѣмъ свой путь по параболическимъ дугамъ pq, ph и т. д. равнымъ и подобнымъ дугамъ QP, PH и т. д., пересѣкая при этомъ въ точкахъ p, h,... прочія плоскости подъ тѣми же углами, какъ въ точкахъ P, H,... частица выйдетъ съ такимъ же наклоненіемъ въ h, какое она имѣла при паденіи въ H.

Вообрази теперь, что разстоянія между плоскостями Aa, Bb, Cc,... уменьшаются, и что число ихъ возрастаетъ до безконечности, такъ что законъ притяженія дѣлается какимъ-угодно непрерывно измѣняющимся,— уголъ паденія и уголъ выхода, оставаясь постоянно равными, останутся таковыми и при всякомъ законѣ притяженія.

Поученіе.

Отъ изложенныхъ выше движеній частицы подъ дѣйствіемъ указанныхъ притяженій почти не отличаются, отраженіе и преломленіе свѣта, совершающееся въ постоянномъ отношеніи секансовъ, какъ это найдено *Снелліусомъ*, слѣдовательно и въ постоянномъ отношеніи синусовъ, какъ это изложено *Декартомъ*. Наблюденіями многихъ астрономовъ доказано, что свѣтъ распространяется постепенно и достигаетъ отъ солнца до земли приблизительно въ семь или въ восемь минутъ времени, какъ это слѣдуетъ изъ явленій затменій спутниковъ *Юпитера*. Когда же лучи находятся въ воздухѣ (какъ уже давно замѣтилъ *Грimальди*, пропуская черезъ отверстіе свѣтъ въ темную комнату, что я и самъ пробовалъ), то при проходѣ близъ угловъ тѣлъ непрозрачныхъ или прозрачныхъ (какъ, напр., около круглыхъ прямоугольныхъ ободковъ золотыхъ, серебряныхъ или мѣдныхъ монетъ или же около острыхъ, какъ у осколковъ камня или стекла) они загибаются въ сторону къ тѣлу, какъ бы будучи къ нему притягиваемыми. При этомъ лучи ближайшіе къ тѣлу загибаются больше, какъ бы болѣе притягиваясь, что я самъ тщательно наблюдалъ. Тѣ же лучи, которые проходятъ въ бóльшемъ разстояніи, загибаются менѣе и въ еще бóльшемъ разстояніи загибаются даже чуть-чуть въ противоположную сторону, давая три цвѣтныхъ полосы. Пусть на чертежѣ s представляетъ ребро какого-либо лезвія или клина AsB и $gowog$, $fnunf$ (фиг. 128), $emtme$, $dlsld$—лучи, изогнувшіеся на величины дугъ owo, nun, mtm, lsl къ лезвію въ большей или меньшей степени, сообразно разстоянію до лезвія. Такъ какъ такое закругленіе лучей происходитъ въ воздухѣ внѣ лезвія, то и тѣ лучи, которые падаютъ на ножъ, должны сперва искривиться ранѣе, чѣмъ достигнуть ножа. Въ такихъ же условіяхъ находятся и лучи, падающіе на стекло, такъ что преломленіе происходитъ не въ точкѣ паденія, а постепенно непрерывнымъ искривленіемъ луча, происходящимъ частью въ воздухѣ, ранѣе достиженія стекла, частью (если не ошибаюсь) въ самомъ стеклѣ, послѣ проникновенія въ него, подобно лучамъ: $ckzc$, $biyb$, $ahxa$ (фиг. 129), которые падаютъ въ r, q, p и искривляются между k и z, i и y, h и x, какъ это и начерчено. По аналогіи, между распространеніемъ свѣтовыхъ лучей и движеніемъ весьма малыхъ тѣлъ, я имѣю въ виду изложить еще слѣдующія предложенія, имѣющія отношеніе къ оптикѣ, но совершенно не касаясь самой природы лучей (тѣлесная ли она или нѣтъ) и совершенно ея не обсуждая, а только находя пути тѣлъ подобные ходу лучей.

Предложеніе XCVII. Задача XLVII.

Полагая, что синусъ угла паденія на какую-либо поверхность находится въ постоянномъ отношеніи къ синусу угла выхода и что искривленіе пути частицы близъ поверхности происходитъ на столь короткомъ промежуткѣ, что его можно принять за точку, требуется опредѣлить такую поверхность, которая заставила бы всѣ частицы, выходящія послѣдовательно изъ заданной точки, собраться въ другую точку также заданную.

Пусть A (фиг. 130) есть та точка, изъ которой частицы расходятся, B та, въ которую онѣ должны сойтись, CDE та кривая, которая своимъ обращеніемъ около оси AB описываетъ искомую поверхность, D и E двѣ какія-либо точки этой кривой, EF, EG перпендикуляры, опущенные на пути AD и DB частицы.

Положимъ, что точка D приближается къ E, тогда предѣльное отношеніе длины DF, на которую увеличивается AD, къ длинѣ DG, на которую уменьшается DB, будетъ равно отношенію синуса угла паденія къ синусу угла выхода, которое задано, значитъ, будетъ извѣстно отношеніе увеличенія длины AD къ уменьшенію длины DB. Поэтому, если на оси AB взять гдѣ бы то ни было точку C, черезъ которую должна проходить искомая кривая и брать отрѣзокъ CM, представляющій увеличеніе длины AC въ вышеупомянутомъ заданномъ отношеніи къ отрѣзку CN, представляющему уменьшеніе длины BC и изъ центровъ A и B радіусами AM и BN описывать два круга, пересѣкающихся въ D, то эта точка D и будетъ лежать на искомой кривой CDE, слѣдовательно, построеніе такихъ точекъ и послужитъ для опредѣленія требуемой кривой.

Слѣдствіе 1. Предполагая, что точка A или B или удаляется въ безконечность, или перемѣщается, относительно C занимая разныя положенія, получимъ всѣ тѣ кривыя, которыя изслѣдованы *Декартомъ* въ оптикѣ и геометріи по отношенію къ преломленію свѣта; но такъ какъ Декартъ скрылъ какимъ образомъ онъ ихъ изобрѣлъ, то въ этомъ предложеніи и имѣлось въ виду это показать.

Слѣдствіе 2. Если частица, падающая на какую-либо поверхность по прямой AD (фиг. 131), проводимой по какому-либо закону, выходитъ по какой-либо другой прямой DK и изъ точки C провести кривыя CP и CQ постоянно перпендикулярныя къ AD и DK, то приращенія длинъ PD, QD, а, слѣдовательно, и самыя длины PD и QD, образуемыя этими приращеніями будутъ относиться другъ къ другу какъ синусъ угла паденія къ синусу угла выхода и обратно.

Предложеніе XCVIII. Задача XLVIII.

Предполагая то же, что и прежде и что задана притягательная поверхность правильная или неправильная, описанная вокругъ оси AB, требуется опредѣлить вторую поверхность EF, которая заставила бы всѣ частицы, выходящія изъ A и проходящія черезъ первую поверхность, собраться въ заданную точку B.

Пусть прямая AB (фиг. 132) пересѣкаетъ первую поверхность въ C, вторую въ E, точка же D берется гдѣ бы то ни было. Положимъ, что отношеніе синуса угла паденія на первую поверхность къ синусу угла выхода изъ нея и отношеніе синуса угла выхода изъ второй поверхности къ синусу угла паденія на нее равны отношенію двухъ заданныхъ величинъ $M : N$. Продолжи AB до G такъ, чтобы было:

$$BG : CE = (M - N) : N$$

и AD до H такъ, чтобы было

$$AH = AG$$

и, наконецъ, DF до K такъ, чтобы было

$$DK : DH = N : M.$$

Соедини BK и изъ центра D радіусомъ DH опиши кругъ, пересѣкающій продолженную KB въ L и проведи параллельно DL прямую BF, точка F опишетъ кривую EF, обращеніемъ которой около оси AB и произведется искомая поверхность.

Ибо вообрази, что кривыя CP, CQ постоянно перпендикулярны къ линіямъ AD и DF, кривыя же ER и ES къ линіямъ FB и FD, слѣдовательно,

$$QS = CE,$$

то по сл. 2 пр. 97 будетъ:

$$\begin{aligned} PD : QD = M : N = DL : DK &= FB : FK \\ &= (DL - FB) : FD = (PH - PD - FB) : FD \\ &= (PH - PD - FB) : (FQ - QD) \\ &= (PH - FB) : FQ. \end{aligned}$$

Но по равенствамъ:

$$PH = CG$$

и

$$QS = CE$$

предыдущее отношеніе равно отношенію

$$(CE + BG - FR) : (CE - FS)$$

А такъ какъ

$$BG : CE = (M - N) : N,$$

то

$$(CE + BG) : CE = M : N,$$

слѣдовательно,

$$FR : FS = M : N$$

и по сл. 2 пр. 97 поверхность EF заставляетъ частицу, падающую на нее по линіи DF, продолжать свой путь по FR въ точку B.

Поученіе.

По этому способу можно было бы перейти къ тремъ или бо́льшему числу поверхностей, но для оптическихъ приложеній наиболѣе удобны сферическія поверхности. Если бы составить объективы телескоповъ изъ двухъ стеколъ, ограниченныхъ сферическими поверхностями, заполнивъ промежутокъ между ними водою, то, можетъ быть, погрѣшности преломленія, образующіяся на наружныхъ поверхностяхъ, были бы исправлены преломленіемъ воды съ достаточною точностью.

Такіе объективы слѣдуетъ предпочесть эллиптическимъ или гиперболическимъ стекламъ не только потому, что ихъ легче изготовить, но и потому, что ими болѣе правильно преломляются пучки лучей, расположенные внѣ оси стеколъ. Однако, въ дѣйствительности различная преломляемость разныхъ лучей есть такое препятствіе, вслѣдствіе котораго въ оптикѣ сферическими или иными стеклами можно достичь лишь малаго совершенства и покуда не будутъ въ состояніи исправить происходящихъ отъ этого погрѣшностей, будетъ вполнѣ безполезно затрачивать трудъ на исправленіе прочихъ погрѣшностей.

Примѣчаніе 116. Къ предложенію LXVI.

Въ этомъ примѣчаніи мы приведемъ сперва выводъ формулъ, выражающихъ измѣненія элементовъ эллиптическаго движенія планетъ, ибо эти формулы служатъ основаніемъ для ученія о возмущеніяхъ луны и планетъ.

§ 1. Тиссеранъ, излагая въ своей Небесной Механикѣ Ньютонову теорію движенія луны пишетъ:

«Въ двадцати двухъ слѣдствіяхъ LXVI-го предложенія Ньютонъ разбираетъ дѣйствіе предыдущихъ силъ по отношенію къ производимымъ ими возмущеніямъ тѣла P. Соображенія, которыми онъ руководствуется, весьма остроумны, но по сжатости изложенія за ними иногда трудно слѣдить».

«Въ превосходномъ мемуарѣ «Théorie géometrique du mouvement des aphélies des planètes pour servir d'addition aux Principes de Newton (Oeuvres t. V) Лагранжъ далъ изящное геометрическое доказательство дифференціальныхъ формулъ, полученныхъ имъ передъ тѣмъ аналитически, для движенія афеліевъ и измѣненій большой оси и эксцентриситета».

«Lespiault [Théorie géometrique de la variation des éléments des planètes (Memoires de la Societé des Sciences physiques et Naturelles de Bordeaux 1867)] основываясь на лекціяхъ, читанныхъ въ 1856 въ College de France Бертраномъ и пользуясь разсмотрѣніемъ паръ, съумѣлъ дать геометрическія доказательства формулъ, относящихся къ наклонности и долготѣ узла, дополнивъ такимъ образомъ мемуаръ Лагранжа».

«Изслѣдованія Ньютона и его послѣдователей по указанному пути вытекаютъ теперь весьма просто изъ формулъ, выражающихъ производныя эллиптическихъ элементовъ планеты въ зависимости отъ составляющихъ возмущающей силы по радіусу вектору ($fm'S$), по перпендикуляру къ нему въ плоскости орбиты ($fm'T$) и по перпендикуляру къ этой плоскости ($fm'W$)».

«Обозначивъ черезъ: a, n, e, p, φ, θ, ω, ε, m, r, w, u, Υ — большую полуось, среднее движеніе, эксцентриситетъ, параметръ, наклонность, долготу узла, долготу перигелія, долготу эпохи, массу, радіусъ векторъ, истинную аномалію, эксцентрическую аномалію и, наконецъ, аргументъ широты возмущаемой планеты P, черезъ m' массу возмущающаго тѣла S и принимая массу T за единицу, будемъ имѣть такія формулы:

$$
(A)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m}\cdot\frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}}\left(Se\sin w + T\frac{p}{r}\right) \quad \ldots\ldots (1)\\
&\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\,[S\sin w + T(\cos u + \cos w)] \quad \ldots (2)\\
&\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{m'}{1+m}na^{\frac{3}{2}}Tr \quad \ldots\ldots (3)\\
&\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,Wr\cos\Upsilon \quad \ldots\ldots (4)\\
&\sin\varphi\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m}\,\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}\,Wr\sin\Upsilon \quad \ldots\ldots (5)\\
&e\frac{d\omega}{dt} = \frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right] + \\
&\qquad + 2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\theta}{dt} \quad \ldots\ldots (6)\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m'}{1+m}naSr + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}\,\frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{d\theta}{dt} \quad (7)
\end{aligned}
\right.
$$

Затѣмъ Тиссеранъ показываетъ, что Ньютону было извѣстно выраженіе $\frac{d\omega}{dt}$, какъ это обнаружилось по оставшимся послѣ него рукописямъ, перешедшимъ впослѣдствіи къ лорду Портсмуту и продолжаетъ: «весьма вѣроятно, что Ньютону были извѣстны и выраженія $\frac{d\theta}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$. Я склоненъ полагать, что онъ зналъ всѣ формулы (1—7), но что онъ предпочелъ, вмѣсто того, чтобы ихъ опубликовать, вывести изъ нихъ большое число геометрическихъ предложеній, которыя онъ получалъ, разсматривая всякій разъ лишь дѣйствіе, производимое одной изъ составляющихъ» F. Tisserand. Traité de Mécanique Celeste t. III. Ch. III.

Тѣ же формулы приводятся и въ главѣ XXVIII тома I, гдѣ Тиссеранъ говоритъ по поводу ихъ: «формулы (A) весьма важны, въ особенности, если желательно получить измѣняющіяся значенія элементовъ при помощи «Механическихъ квадратуръ».

Обыкновенно приведенныя выше по Тиссерану формулы выводятъ изъ общей теоріи измѣненія произвольныхъ постоянныхъ. Но эта теорія требуетъ для своего установленія довольно сложныхъ выкладокъ и соображеній, между тѣмъ, всѣ эти формулы можно вывести непосредственно основываясь на предложеніи XVII Ньютоновыхъ Началъ. Но прежде чѣмъ привести этотъ выводъ, обратимъ вниманіе на слѣдующія слова Лагранжа въ § 2 его мемуара, упомянутаго выше: «Если сочиненіе Ньютона и не предлагаетъ точной теоріи движенія афеліевъ, но тѣмъ не менѣе оно содержитъ ея зачатки и лишь трудность ея развитія, можетъ быть, мѣшала до сихъ поръ воспользоваться ими. Они находятся въ предложеніи XVII первой книги, въ которомъ показано опредѣленіе элементовъ коническаго сѣченія, описываемаго тѣломъ, брошеннымъ съ заданною скоростью по заданному направленію и подверженнымъ непрерывному дѣйствію центральной силы обратно пропорціональной квадратамъ разстояній. Въ третьемъ слѣдствіи этого предложенія Ньютонъ замѣчаетъ, что если тѣло движется по коническому сѣченію и какимъ-либо натискомъ будетъ отклонено отъ своей орбиты, то можно найти его новую орбиту, по которой оно послѣ того будетъ двигаться, присовокупивъ къ тому количеству движенія, которымъ тѣло уже обладало, то количество движенія, которое натискъ ему сообщилъ, ибо такимъ образомъ получится по величинѣ и направленію то новое количество движенія, съ которымъ тѣло покинетъ то мѣсто, гдѣ на него подѣйствовалъ натискъ».

§ 2. Приведенное въ словахъ Лагранжа слѣдствіе 3 пр. XVII и содержитъ всю теорію измѣненія элементовъ орбиты. Въ самомъ дѣлѣ, если натискъ внезапный и весьма малой продолжительности, вродѣ удара, то онъ производитъ лишь измѣненіе количества движенія тѣла, иначе скорости его, положеніе же тѣла за время дѣйствія этого натиска *не измѣняется*; значитъ, по этому прежнему положенію и новой скорости и найдутся элементы новой орбиты.

Если же натискъ, иначе говоря возмущающая сила, дѣйствуетъ постепенно и непрерывно, то и скорость измѣняется непрерывнымъ образомъ. Если разсмотрѣть то дѣйствіе, которое произведетъ возмущающая сила въ продолженіе безконечно малаго промежутка времени dt, то скорость получитъ приращеніе, направленіе коего совпадаетъ съ направленіемъ силы и величина котораго пропорціональна напряженію силы и продолжительности ея дѣйствія dt, измѣненія же или приращенія координатъ тѣла, вызываемыя дѣйствіемъ этой возмущающей силы, будутъ пропорціональны dt^2, т.-е. *будутъ второго порядка относительно* dt.

Слѣдовательно, надо взять формулы эллиптическаго движенія, придать приращеніе лишь скорости, члены перваго порядка въ полученныхъ приращеніяхъ элементовъ по раздѣленіи на dt и дадутъ такъ называемыя «измѣненія эллиптическихъ элементовъ», выражаемыя въ небесной механикѣ приведенными выше формулами (A).

Остается теперь выполнить выкладки, вытекающія изъ приведеннаго выше указанія.

Самъ Лагранжъ, излагая въ своей Mécanique Analytique теорію измѣненія произвольныхъ постоянныхъ и прилагая ее затѣмъ во II главѣ VII отдѣла къ измѣненію эллиптическихъ элементовъ планетъ, дѣлаетъ вышеприведенное указаніе, но не развивая вытекающаго изъ него способа полученія требуемыхъ формулъ, онъ находитъ ихъ изъ общихъ формулъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, являющихся результатомъ общей теоріи имъ данной.

§ 3. Основныя формулы эллиптическаго движенія, которыя намъ понадобятся, и которыя можно найти въ любомъ курсѣ Астрономіи, слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}
r^2\frac{dw}{dt} &= c \ \ldots \ \text{интегралъ площадей}\\
v^2 &= f\mu\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \ \text{интегралъ живыхъ силъ}\\
f\mu &= f(1+m)=\frac{c^2}{p}=\frac{4\pi^2}{\tau^2}\,.\,a^3=n^2a^3\\
c &= \sqrt{f\mu}\,.\,\sqrt{p}=na^2\sqrt{1-e^2}\\
r &= \frac{p}{1+e\cos w}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}\\
r &= a(1-e\cos u)\\
r\sin w &= a\sqrt{1-e^2}\sin u\\
r\cos w &= a(\cos u-e)\\
u-e\sin u &= nt+\varepsilon-\omega
\end{aligned}\right\} \ldots \quad (E)$$

Пусть m' есть масса возмущающаго тѣла, обозначимъ, какъ уже сказано, составляющія возмущающей силы (ускоренія): по радіусу вектора черезъ $fm'S$, по перпендикуляру къ нему въ плоскости орбитъ черезъ $fm'T$, и по перпендикуляру къ этой плоскости черезъ $fm'W$ и черезъ α, β, γ, проэкціи или составляющія безконечно малаго измѣненія скорости, производимыя этими силами въ продолженіе безконечно-малаго промежутка времени dt. Тогда будетъ:

$$\alpha = f\,.\,m'Sdt;\quad \beta = fm'Tdt;\quad \gamma = fm'Wdt \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Начнемъ съ нахожденія измѣненій элементовъ, опредѣляющихъ положеніе плоскости орбиты, т.-е. долготы узла θ и наклонности φ.

Если въ моментъ времени $t-dt$ тѣло проходило черезъ какую-либо точку P_0 своей орбиты со скоростью V_0, то, когда возмущающей силы нѣтъ, оно приходитъ въ моментѣ t въ нѣкоторую точку P той же самой орбиты, обладая скоростью V. Если опредѣлять элементы орбиты по положенію P и скорости V, то получится та же самая начальная или невозмущенная орбита. Но когда тѣло подвержено дѣйствію возмущающей силы, то выйдя въ моментъ $t - dt$ изъ точку P_0 съ тою же скоростью V_0, оно придетъ въ моментъ t въ нѣкоторую точку P_1 обладая въ ней скоростью V_1. Это новое положеніе P_1 и новая скорость V_1 и дадутъ элементы возмущенной орбиты. Разность или приращенія соотвѣтствующихъ элементовъ этихъ двухъ орбитъ по раздѣленіи на dt представятъ производныя элементовъ по времени, которыя и требуется найти.

Но разстояніе PP_1 двухъ вышеупомянутыхъ положеній тѣла P второго порядка относительно dt, разности же соотвѣтствующихъ слагающихъ скоростей V_1 и V суть α, β и γ, т.-е. величины перваго порядка относительно dt. Поэтому при разысканіи производныхъ элементовъ можно разсматривать, что точки P и P_1 совпадаютъ, иначе, что положеніе тѣла P не измѣнилось отъ дѣйствія возмущающей силы, но что тѣло обладаетъ въ этой точкѣ скоростью V_1, коей составляющія отличаются отъ составляющихъ скорости V на величины α, β, γ.

Слѣдовательно, стоитъ только исчислить приращеніе каждаго элемента въ этомъ предположеніи и раздѣлить это приращеніе на dt, частное и представить требуемое выраженіе измѣненія этого элемента.

Положеніе плоскости возмущенной орбиты опредѣляется направленіемъ новой скорости и центромъ O главнаго тѣла (фиг. 134). Такъ какъ положеніе тѣла P не измѣнилось (точнѣе говоря, такъ какъ измѣненія положенія тѣла P *вызываемыя дѣйствіемъ возмущающей силы* второго порядка относительно dt, то прямая OP есть пересѣченіе этихъ двухъ плоскостей, пусть PH есть векторъ, представляющій скорость V въ разсматриваемый моментъ въ невозмущенномъ движеніи, и, слѣдовательно, лежащій въ плоскости OPQ первоначальной орбиты; чтобы получить положеніе OPQ_1 новой орбиты (отбрасывая по прежнему члены второго порядка относительно dt) стоитъ только отложить длину $HG = \gamma$ по перпендикуляру къ плоскости $POHQ$, плоскость $OPGQ$, проходящая черезъ прямыя OP и PG и есть требуемая.

Чтобы опредѣлить безконечно малый уголъ δ, составляемый ею съ плоскостью первоначальной орбиты, проведемъ плоскость PCA, перпендикулярную къ ребру OP, и спроектируемъ прямую GH на эту плоскость. Тогда будетъ:

$$\delta = \frac{AC}{CP}.$$

Но

$$AC = HG = \gamma; \quad CP = r \cdot \frac{dw}{dt}$$

ибо CP есть составляющая скорости тѣла P по перпендикуляру къ радіусу вектору OP.

Но

$$r^2 \frac{dw}{dt} = c$$

слѣдовательно

$$CP = \frac{c}{r}$$

и предыдущая формула будетъ:

$$\delta = \frac{\gamma r}{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Чтобы получить измѣненія наклонности φ и долготы узла θ, обратимся къ фиг. 133 и составивъ сферическій уголъ $NPN_1 = \delta$, получимъ новый узелъ N_1 и новую наклонность φ_1.

Сферическій треугольникъ NPN_1 и доставитъ требуемыя измѣненія этихъ элементовъ.

Проводимъ N_1K перпендикулярно къ NP, тогда:

$$N_1K = \delta \, . \sin N_1P = (\sin NP + \text{безкон. мал.}) \, . \, \delta = \delta \, . \sin \Upsilon$$

причемъ члены высшаго порядка отбрасываются.

Но въ безконечно маломъ треугольникѣ NN_1K будетъ

$$NN_1 \, . \sin \varphi = KN_1 \, .$$

Но $NN_1 = d\theta$ есть измѣненіе долготы узла, слѣдовательно, будетъ:

$$\sin \varphi \, . \, d\theta = \sin \Upsilon \, . \, \delta = \sin \Upsilon \, . \, \frac{\gamma \, . \, r}{c}$$

и подставляя вмѣсто γ его величину $fm'Wdt$, получимъ по раздѣленіи на dt:

$$\sin \varphi \, . \, \frac{d\theta}{dt} = \frac{fm'}{c} rW \sin \Upsilon .$$

Но по форм. (E) имѣемъ:

$$\frac{f}{c} = \frac{c}{(1+m)p} = \frac{na}{(1+m)\sqrt{1-e^2}}$$

слѣдовательно будетъ:

$$\sin \varphi \frac{d\theta}{dt} = \frac{m'}{1+m} \, . \, \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr \sin \Upsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Это есть какъ разъ форм. (5) группы (A).

Чтобы получить измѣненіе наклонности, возьмемъ треугольникъ PNN_1 и пусть

$$PN_1y = \varphi_1 = \varphi + d\varphi ,$$

тогда будетъ:

$$PNN_1 = \varphi ; \quad PN_1N = \pi - \varphi_1 ; \quad NPN_1 = \delta ; \quad NP = \Upsilon$$

слѣдовательно

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi\cos\delta - \sin\varphi\sin\delta \,.\, \cos\Upsilon.$$

Но

$$\cos\delta = 1, \quad \sin\delta = \delta$$

и значитъ

$$\cos\varphi_1 - \cos\varphi = -\sin\varphi \,.\, d\varphi = -\sin\varphi \,.\, \cos\Upsilon \,.\, \delta.$$

Замѣнивъ δ и f ихъ величинами, получимъ по раздѣленіи на dt:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{m'}{1+m} \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} Wr\cos\Upsilon \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

это есть форм. (4) группы (A).

Отсюда видно, что для вывода этихъ формулъ достаточно самыхъ простыхъ и элементарныхъ соображеній.

§ 4. Величина и видъ эллипса въ плоскости орбиты опредѣляются элементами a и e, т.-е. большою полуосью и эксцентриситетомъ, отъ этихъ же элементовъ зависитъ и параметръ орбиты p.

Нормальная составляющая γ измѣненія скорости вызываетъ лишь измѣненія плоскости орбиты и не сказывается на ея видѣ и величинѣ, поэтому придется разсматривать лишь вліяніе измѣненій скорости обозначенныхъ черезъ α и β именно:

$$\alpha = fm'Sdt$$

$$\beta = fm'Tdt$$

по направленію радіуса вектора и по направленію къ нему перпендикулярному.

Обозначимъ черезъ v_1 и v_2 проекціи первоначальной скорости на эти направленія, т.-е.

$$v_1 = \frac{dr}{dt}$$

и

$$v_2 = r\frac{dw}{dt}.$$

Ихъ измѣненныя величины будутъ:

$$v_1 + \alpha \quad \text{и} \quad v_2 + \beta$$

и пусть

$$a_1 = a + da$$

новая большая полуось.

Уравненіе живыхъ силъ даетъ:

$$V^2 = v_1^{\,2} + v_2^{\,2} = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

$$V_1^{\,2} = (v_1 + \alpha)^2 + (v_2 + \beta)^2 = f\mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a_1}\right)$$

ибо радіусъ векторъ r, какъ уже сказано, отъ дѣйствія возмущающихъ силъ претерпѣваетъ лишь измѣненія второго порядка и, слѣдовательно, долженъ считаться постояннымъ.

Разность этихъ уравненій даетъ:

$$2v_1\alpha + 2v_2\beta = f\mu \,.\, \frac{da}{a^2}$$

слѣдовательно:

$$f\mu\,\frac{da}{a^2} = fm'[Sv_1 + Tv_2]\,dt,$$

Но по формуламъ (E)

$$v_1 = \frac{e}{p}\sin w \,.\, \frac{r^2dw}{dt} = \frac{ce\sin w}{p}; \quad v_2 = \frac{c}{r}$$

такимъ образомъ будетъ:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{\mu} \,.\, a^2 \,.\, \frac{c}{p}\left[eS\sin w + \frac{p}{r}\,T\right]$$

но

$$\mu = 1 + m$$

и

$$\frac{c}{p} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}}$$

слѣдовательно:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2m'}{1+m}\,\frac{na^3}{\sqrt{1-e^2}}\left[Se\sin w + \frac{p}{r}\,T\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Это есть формула (1) группы (A).

Затѣмъ имѣемъ:

$$c = \sqrt{p} \,.\, \sqrt{f\mu} = v_2 r$$

для возмущенной орбиты будетъ:

$$c_1 = \sqrt{p_1}\,\sqrt{f\mu} = (v_2 + \beta)r$$

причемъ

$$p_1 = p + dp.$$

Такимъ образомъ

$$\sqrt{f\mu} \,.\, (\sqrt{p_1} - \sqrt{p}) = \sqrt{f\mu} \,.\, d(\sqrt{p}) = \beta \,.\, r$$

но

$$\beta = fm'Tdt$$

и

$$\frac{f}{\sqrt{f\mu}} = \frac{na^{\frac{3}{2}}}{1+m},$$

слѣдовательно:

$$\frac{d(\sqrt{p})}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^{\frac{3}{2}} Tr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Это есть формула (3) группа (А).

Большая полуось, параметръ и эксцентриситетъ связаны соотношеніемъ:

$$p = a(1 - e^2)$$

значитъ будетъ:

$$2ae\frac{de}{dt} = (1 - e^2)\frac{da}{dt} - \frac{dp}{dt}$$

и замѣнивъ $\frac{da}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$ ихъ величинами (1) и (3) получимъ:

$$\frac{de}{dt} = \frac{m'}{1+m} na^2\sqrt{1-e^2}[S\sin w + T(\cos u + \cos w)] \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Это есть формула (2) группы (А).

§ 5. Направленіе большой оси орбиты въ ея плоскости опредѣляется долготою перигелія ω.

Обращаясь къ фиг. 133 имѣемъ:

$$xN + NP = \omega + w$$
$$xN_1 + N_1P = \omega_1 + w_1,$$

слѣдовательно:

$$(xN_1 - xN) + (N_1P - NP) = (\omega_1 - \omega) + (w_1 - w) = d\omega + dw,$$

но

$$xN_1 - xN = NN_1 = d\theta$$
$$NP_1 - NP = -NK = -NN_1\cos\varphi = -\cos\varphi \,.\, d\theta$$

значитъ будетъ:

$$d\omega + dw = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} \,.\, d\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (*)$$

Но по фор. (Е):

$$1 + e\cos w = \frac{1}{r}p$$

и такъ какъ радіусъ векторъ не измѣняется, то

$$-e\sin w\frac{dw}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dp}{dt} - \frac{de}{dt}\cos w.$$

Подставляя вмѣсто $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{de}{dt}$ ихъ величины (3) и (2) получимъ:

$$-e\sin w\frac{dw}{dt}=\frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}[(2-\cos u\cos w-\cos^2 w)T-S\sin w\cos w].$$

Но по форм. Е

$$\cos u=\frac{1}{e}\left(1-\frac{r}{a}\right)=\frac{1}{e}\,\frac{1+e\cos w-1+e^2}{1+e\cos w}=\frac{e+\cos w}{1+e\cos w},$$

слѣдовательно:

$$2-\cos^2 w-\cos u\cos w=1+\sin^2 w-\frac{e\cos w+\cos^2 w}{1+e\cos w}=$$
$$=\sin^2 w\left[1+\frac{1}{1+e\cos w}\right]=\sin^2 w\left(1+\frac{r}{p}\right).$$

такимъ образомъ:

$$-e\frac{dw}{dt}=\frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right]$$

послѣ чего фор. (*) даетъ:

$$e\frac{d\omega}{dt}=2e\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\theta}{dt}+\frac{m'}{1+m}na^2\sqrt{1-e^2}\left[-S\cos w+T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\right]\quad(6)$$

Это есть фор. (6) группы (А).

§ 6. Положеніе планеты P на ея орбитѣ опредѣляется для любого момента времени t, когда извѣстна средняя долгота для начальнаго момента или, какъ ее называютъ долгота эпохи ε, при помощи Кеплерова уравненія

$$u-e\sin u=nt+\varepsilon-\omega\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(*)$$

Во всѣхъ формулахъ, относящихся къ возмущенному движенію, величина ε входитъ всегда въ составѣ количества $nt+\varepsilon$, поэтому измѣненіе всего этого количества относится на измѣненіе ε, величина же nt почитается неизмѣняющейся. Поэтому въ уравненіи (*) при его дифференцированіи будемъ nt считать постояннымъ и тогда будетъ:

$$d\varepsilon=du+d\omega-e\cos u\,du-\sin u\,.\,de\quad.\;.\;.\;.\;.\quad(**)$$

Но мы видѣли, что

$$dw=2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\theta-d\omega\quad.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad(***)$$

Уравненіе

$$r\cos w=a(\cos u-e)$$

даетъ

$$-r\sin w\,dw=(\cos u-e)da-a\sin u\,du-a\,de,$$

но

$$\sqrt{1-e^2}a\sin u = r\sin w,$$

слѣдовательно:

$$du = \sqrt{1-e^2}dw + \frac{\cos u - e}{\sin u} \cdot \frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u}de$$

подставивъ вмѣсто dw его величину, имѣемъ:

$$du + d\omega = 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot d\theta + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}}d\omega + \frac{\cos u - e}{\sin u}\frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u}de.$$

Обозначимъ для сокращенія письма первые два члена въ правой части этого уравненія черезъ Δ, тогда оно напишется такъ:

$$du + d\omega = \Delta + \frac{\cos u - e}{\sin u}\frac{da}{a} - \frac{1}{\sin u}de.$$

По фор. (E) имѣемъ:

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u$$

отсюда:

$$edu = \frac{\cos u}{\sin u}de - \frac{r}{a\sin u}\frac{da}{a},$$

слѣдовательно:

$$e\cos u du = \frac{\cos^2 u}{\sin u}de - \frac{r}{a}\frac{\cos u}{\sin u}\frac{da}{a}$$

и уравненіе (**) будетъ:

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{a(\cos u - e) + r\cos u}{a\sin u}\frac{da}{a} - \left(\frac{1}{\sin u} + \sin u + \frac{\cos^2 u}{\sin u}\right)de$$

$$= \Delta + \frac{r(\cos w + \cos u)}{a\sin u}\frac{da}{a} - \frac{2}{\sin u}de.$$

Подставивъ вмѣсто da и de ихъ величины (1) и (2), получимъ:

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{2m'}{1+m}\frac{na^2}{\sqrt{1+e^2}}\left[Se\sin w + \frac{p}{r}T\right] \cdot \frac{r(\cos w + \cos u)}{a\sin u}dt$$

$$-\frac{2m'}{1+m}\frac{na^2}{\sin u}\sqrt{1-e^2}[S\sin w + T(\cos w + \cos u)]dt.$$

Соберемъ во второй части члены, содержащіе S и T такъ, чтобы было

$$d\varepsilon = \Delta + \frac{2m'}{1+m}na^2[AS + BT]dt$$

тогда

$$A = \frac{e\sin w}{\sqrt{1-e^2}} \cdot \frac{r(\cos w + \cos u)}{a\sin u} - \frac{\sqrt{1-e^2}\sin w}{\sin u} = e(\cos w + \cos u) - \frac{a(1-e^2)}{r} =$$

$$= e\cos w + e\cos u - 1 - e\cos w = -\frac{r}{a},$$

$$B = (\cos w + \cos u)\left[\frac{pr}{ra\sqrt{1-e^2}} - \sqrt{1-e^2}\right] = 0,$$

слѣдовательно:

$$d\varepsilon = \Delta - \frac{2m'}{1+m} narSdt.$$

Подставивъ вмѣсто Δ его величину и раздѣливъ на dt имѣемъ:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2m'}{1+m} narS + \frac{e^2}{1+\sqrt{1-e^2}} \frac{d\omega}{dt} + 2\sqrt{1-e^2}\sin^2\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad . \quad (7)$$

Это есть формула (7) группы (А).

Такимъ образомъ всѣ формулы группы (А) могутъ быть выведены весьма просто, прямымъ и непосредственнымъ образомъ, на основаніи указанія Ньютона, совершенно независимо отъ общей теоріи измѣненія произвольныхъ постоянныхъ. Вмѣстѣ съ тѣмъ выводъ этотъ требуетъ нахожденія приращеній или дифференцированія лишь самыхъ простыхъ функцій и примѣненія такихъ правилъ, которыя всѣ имѣются въ Methodus Fluxionum, поэтому надо думать, что Тиссеранъ былъ вполнѣ правъ, утверждая, что Ньютону эти формулы были извѣстны.

§ 7. Получивъ такимъ образомъ всѣ формулы, дающія измѣненія эллиптическихъ элементовъ въ зависимости отъ проекцій возмущающей силы, можно сдѣлать и дальнѣйшій шагъ, введя вмѣсто S, T и W производныя такъ называемой пертурбаціонной функціи R, черезъ которыя эти силы выражаются.

Положимъ сперва, что возмущающее тѣло только одно, масса его m', масса возмущаемаго тѣла m и главнаго тѣла 1.

Какъ извѣстно, проекціи возмущающей силы на оси координатъ выражаются частными производными $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ пертурбаціонной функціи по соотвѣтствующимъ координатамъ возмущаемаго тѣла.

Пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты возмущающаго тѣла, x, y, z—возмущеннаго и начало O находится въ центрѣ главнаго тѣла, тогда полагая:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad r_1{}^2 = x_1{}^2 + y_1{}^2 + z_1{}^2, \\ \rho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ \text{будемъ имѣть} \\ R = fm' \cdot \left[\frac{1}{\rho} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1{}^3}\right] \end{array}\right\} \quad . \; . \; . \quad (10)$$

Послѣ этихъ предварительныхъ замѣчаній обратимся опять къ Небесной Механикѣ Тиссерана и возьмемъ изъ нея слѣдующее мѣсто главы XXVII тома I.

«По теоремѣ проекцій воспользовавшись формулами сферической тригонометріи, будемъ имѣть:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial x} &= S[\cos\Upsilon\cos\theta - \sin\Upsilon\sin\theta\cos\varphi] + \\
&+ T[-\sin\Upsilon\cos\theta - \cos\Upsilon\sin\theta\cos\varphi] + W\sin\theta\sin\varphi \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial y} &= S[\cos\Upsilon\sin\theta + \sin\Upsilon\cos\theta\cos\varphi] + \\
&+ T[-\sin\Upsilon\sin\theta + \cos\Upsilon\cos\theta\cos\varphi] - W\cos\theta\sin\varphi \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial z} &= S\sin\Upsilon\sin\varphi + T\cos\Upsilon\sin\varphi + W\cos\varphi
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (11)$$

гдѣ черезъ Υ обозначено угловое разстояніе планеты до ея восходящаго узла, т.-е. аргументъ широты.

Пусть σ есть который-нибудь изъ эллиптическихъ элементовъ, то будетъ

$$\frac{\partial R}{\partial\sigma} = \frac{\partial R}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial\sigma} + \frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial\sigma} + \frac{\partial R}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial\sigma} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Величины производныхъ $\frac{\partial x}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial\sigma}$, $\frac{\partial z}{\partial\sigma}$ найдутся по формуламъ эллиптическаго движенія, а именно:

$$\left.\begin{aligned}
x &= r(\cos\Upsilon\cos\theta - \sin\Upsilon\sin\theta\cos\varphi) \\
y &= r(\cos\Upsilon\sin\theta + \sin\Upsilon\cos\theta\cos\varphi) \\
z &= r\sin\Upsilon\sin\varphi \\
\Upsilon &= \omega - \theta + w \\
u - e\sin u &= nt + \varepsilon - \omega \\
r &= a(1 - e\cos u) = \frac{p}{1 + e\cos w} \\
\operatorname{tg}\frac{1}{2}w &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}u
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (13)$$

Производныя по φ вычисляются безъ всякихъ затрудненій; по отношенію къ производнымъ по θ необходимо замѣтить, что θ входитъ въ формулы и явно, и не явно при посредствѣ величины Υ, затѣмъ

$$\frac{\partial}{\partial\omega} = \frac{\partial}{\partial\Upsilon} - \frac{\partial}{\partial\varepsilon}.$$

Наконецъ, производныя по a, e, ε легко получаются замѣтивъ, что будетъ:

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}, \quad \frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos w, \quad \frac{\partial r}{\partial\varepsilon} = \frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin w,$$

$$\frac{\partial\Upsilon}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial\Upsilon}{\partial e} = \frac{2 + e\cos w}{1-e^2}\sin w, \quad \frac{\partial\Upsilon}{\partial\varepsilon} = \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

Мы не измѣняемъ a въ выраженіи $nt + \varepsilon - \omega$, ибо мы предполагаемъ, что въ формулы вводится $\int ndt$ вмѣсто nt.

Найдя на основаніи такого вычисленія $\frac{\partial x}{\partial \sigma}$, $\frac{\partial y}{\partial \sigma}$ и $\frac{\partial z}{\partial \sigma}$, получимъ на основаніи формулъ (11) и (12) производныя $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$.

Послѣ простыхъ приведеній получатся слѣдующіе результаты:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial a} &= S\frac{r}{a} \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial \varphi} &= Wr\sin\Upsilon \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial e} &= -Sa\cos w + T\frac{2+e\cos w}{1-e^2}r\sin w \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= S\frac{ae}{\sqrt{1-e^2}}\sin w + T\frac{a^2}{r}\sqrt{1-e^2} \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial \vartheta} &= -2Tr\sin^2\frac{\varphi}{2} - Wr\sin\varphi\cos\Upsilon \\
\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial \omega} &= -\frac{1}{fm'}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} + Tr
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (C)$$

Изъ этой выписки видно, что для полученія формулъ (C) достаточно непосредственныхъ дифференцированій и простыхъ постановокъ.

§ 8. Чтобы получить формулы (A) Тиссеранъ подставляетъ значенія производныхъ, даваемыхъ формулами (C) въ общія формулы измѣненій элементовъ, получаемыя на основаніи общей теоріи.

Мы же будемъ слѣдовать какъ разъ обратному пути, такъ какъ группа формулъ (A) нами выведена непосредственно, то стоитъ изъ формулъ (C), получаемыхъ, какъ видно, также независимо отъ общей теоріи измѣненія произвольныхъ постоянныхъ, найти выраженія S, T, W черезъ производныя пертурбаціонной функціи R и подставить въ формулы (A), то мы и получимъ ту общую грунцу формулъ, установленіе которой и требуется.

Обративъ вниманіе на составъ формулъ (A) и (C) не трудно замѣтить, что величины S, T и W входятъ въ обѣ группы одинаковыми между собою сочетаніями, поэтому изъ формулъ (C) надо непосредственно находить требуемыя сочетанія, которыя и подставлять въ формулы (A).

Такъ форм. (4) группы (C) даетъ непосредственно:

$$Se\sin w + \frac{Tp}{r} = \frac{1}{fm'}\frac{\sqrt{1-e^2}}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

что по подстановкѣ въ форм. (1) группы (A(въ силу соотношенія

$$f.(1+m) = n^2a^3 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (*)$$

даетъ:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{an}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (15)$$

Формула (2) группы (C) даетъ

$$Wr\sin\Upsilon = \frac{1}{fm'}\,\frac{\partial R}{\partial\varphi}$$

что по подстановкѣ въ формулу (5) группы (A) на основаніи того же соотношенія (*) даетъ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial\varphi}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(16)$$

Формула (4) группы (A) содержитъ величину $Wr\cos\Upsilon$; въ группѣ (C) эта величина содержится въ уравненіяхъ (5) и (6) совмѣстно съ Tr.

Исключивъ Tr изъ уравненій (5) и (6) получимъ:

$$Wr\cos\Upsilon = -\frac{1}{fm'}\,\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{1}{fm'}\cdot\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right)$$

послѣ чего подстановка въ форм. (4) группы (A) даетъ:

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^3\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{\sin\varphi}\,\frac{\partial R}{\partial\theta} - \frac{1}{fm'}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial\omega}+\frac{\partial R}{\partial\varepsilon}\right)\quad\ldots\quad(17)$$

Замѣтивъ, что

$$\frac{2+e\cos w}{a(1-e^2)}\cdot r = \frac{(1+1+e\cos w)\frac{p}{1+e\cos w}}{p} = 1+\frac{1}{1+e\cos w} = 1+\frac{r}{p}$$

можно формулу (3) группы (C) написать такъ:

$$\frac{1}{fm'}\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial e} = -S\cos w + T\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin w\quad\ldots\ldots\quad(3')$$

послѣ чего уравненіе (6) группы (A) обратится въ слѣдующее:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2e}\sqrt{1-e^2}\,\frac{\partial R}{\partial e} + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\,\frac{d\theta}{dt}.$$

Замѣнивъ $\frac{d\theta}{dt}$ его величиною (16) получимъ

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial\varphi}\quad\ldots\ldots\quad(18)$$

Стоитъ только подставить въ формулу (7) группы (A) значенія $\frac{d\omega}{dt}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ и выраженіе

$$Sr = \frac{1}{fm'}\,\frac{1}{a}\cdot\frac{\partial R}{\partial a}$$

и замѣнить $f.(1+m)$ через n^2a^3, чтобы получить формулу:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\,.\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e}\ \ldots \quad (19)$$

Подставляя величину

$$Tr = \frac{1}{fm'}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)$$

въ уравненіе (3) группы (A) даетъ:

$$\frac{d\sqrt{p}}{dt} = \frac{1}{na^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right] \ldots\ldots\ldots \quad (20)$$

или иначе:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

Остается еще найти $\frac{de}{dt}$. Но мы имѣемъ

$$p = a(1-e^2)$$

взявъ логариѳмическую производную имѣемъ:

$$\frac{2e}{1-e^2}\,\frac{de}{dt} = \frac{1}{a}\,\frac{da}{dt} - \frac{1}{p}\,\frac{dp}{dt}.$$

Подставивъ вмѣсто $\frac{da}{dt}$ и $\frac{dp}{dt}$ ихъ величины (15) и (21) получимъ:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2}\,.\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \ldots\ldots \quad (22)$$

Такимъ образомъ мы получаемъ слѣдующую группу формулъ:

$$(B)\left\{\begin{aligned}
&\frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & (15)\\
&\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\cdot\frac{\partial R}{\partial \varphi} \ldots\ldots\ldots\ldots & (16)\\
&\frac{d\omega}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} \ldots\ldots\ldots & (18)\\
&\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - \sqrt{1-e^2}\,.\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \ldots\ldots & (22)\\
&\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}\sin\varphi}\,\frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) \ldots\ldots & (17)\\
&\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na}\cdot\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{1-\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e} \ldots & (19)\\
&\frac{dp}{dt} = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \omega} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots & (21)
\end{aligned}\right.$$

Эта группа формулъ приведенная на стр. 190 т. I Небесной Механики Тиссерана составляетъ заключительный выводъ главы XI этого тома и служитъ основаніемъ для всей теоріи возмущеннаго движенія планетъ по методѣ измѣненія постоянныхъ произвольныхъ, изложенію которой и посвященъ весь этотъ томъ.

Достаточно обратить вниманіе на то, что R есть линейная и однородная функція массъ m', m'', ... возмущающихъ тѣлъ, именно:

$$R = \sum f m_i \left[\frac{1}{\rho_i} - \frac{x x_i + y y_i + z z_i}{r_i^3} \right]$$

гдѣ

$$\rho_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2$$

и

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

такъ же какъ и *полныя* составляющія возмущающихъ силъ, чтобы видѣть, что формулы (B) совершенно общія, т.-е., что онѣ имѣютъ мѣсто при любомъ числѣ возмущающихъ тѣлъ.

Изъ этого примѣчанія, нарочно изложеннаго съ такою подробностью видно то значеніе, которое имѣетъ слѣдствіе 3 предложенія XVII для Небесной Механики, вмѣстѣ съ тѣмъ стоитъ только сравнить выводъ формулы (A) и затѣмъ (B), данный здѣсь, слѣдуя истинному смыслу словъ Ньютона, съ выводомъ этихъ формулъ на основаніи общей теоріи измѣненія произвольныхъ постояннымъ въ Механикѣ Тиссерана или въ т. I Annales de l'Observatoire de Paris par U. J. Le Verrier, гдѣ этотъ выводъ, опуская всѣ простыя и промежуточныя выкладки, занимаетъ 22 страницы мелкой печати большого in 4°, чтобы еще болѣе убѣдиться въ пользѣ изученія Ньютоновыхъ «Началъ» при изученіи даже и современной Небесной Механики.

§ 9. Приведемъ теперь выраженія силъ S, T и W. Примемъ за плоскость xy плоскость орбиты тѣла P и пусть массы этихъ тѣлъ суть: главнаго тѣла T ... M, тѣла P ... m и возмущающаго тѣла S ... m'; обозначимъ соотвѣтственно разстоянія

$$TP = r, \quad TS = r_1, \quad PS = \rho.$$

Тогда можно разсматривать, что отъ взаимнаго притяженія на эти тѣла дѣйствуютъ соотвѣтственно силы, сообщающія имъ слѣдующія ускоренія:

$$\text{тѣлу } T \ldots \frac{fm'}{r_1^2} \text{ по } TS \text{ и } \frac{fm}{r^2} \text{ по } TP$$

$$\text{тѣлу } S \ldots \frac{fM}{r_1^2} \text{ по } ST \text{ и } \frac{fm}{\rho^2} \text{ по } SP$$

$$\text{тѣлу } P \ldots \frac{fM}{r^2} \text{ по } PT \text{ и } \frac{fm'}{\rho^2} \text{ по } PS$$

причемъ порядокъ буквъ, напр., TS указываетъ, что ускореніе направлено по прямой TS отъ T къ S, а ST означаетъ, что ускореніе направлено по той же прямой отъ S къ T.

Но движеніе разсматриваемаго тѣла P относится къ тѣлу T, принимаемому за неподвижное, слѣдовательно, надо къ прочимъ двумъ тѣламъ приложить такія силы, которыя сообщали бы имъ ускоренія равныя и противоположныя ускоренію тѣла T; такимъ образомъ къ тѣлу P надо еще приложить ускорительныя силы: $\frac{fm}{r^2}$ по PT и $\frac{fm_1}{r_1^2}$ по направленію параллельному ST, такимъ образомъ на тѣло P будутъ дѣйствовать слѣдующія ускорительныя силы:

$$F_1 = \frac{f(M+m)}{r^2} \text{ по } PT$$

$$F_2 = \frac{fm'}{r_1^2} \text{ параллельно } ST$$

$$F_3 = \frac{fm'}{\rho^2} \text{ по } PS$$

и на тѣло S слѣдующія силы:

$$P_1 = \frac{f(M+m')}{r_1^2} \text{ по } ST$$

$$P_2 = \frac{fm}{r^2} \text{ параллельно } PT$$

$$P_3 = \frac{fm}{\rho^2} \text{ по } SP.$$

Такъ какъ имѣется въ виду разсматривать движеніе тѣла P, то и разберемъ силы на него дѣйствующія.

Сила F_1, направленная къ принятому за неподвижное тѣлу T и обратно пропорціональная квадрату разстоянія до него даетъ невозмущенное эллиптическое движеніе. Возмущающія силы суть F_2 и F_3 ихъ и надо разложить по вышеприведеннымъ тремъ направленіямъ.

Для этого опустимъ изъ точки S на плоскость орбиты тѣла P перпендикуляръ SJ и изъ точки J перпендикуляръ JH на радіусъ векторъ TP, тогда сила F_3 разлагается на слѣдующія три:

$$F_3 \cdot \frac{PH}{\rho}, \quad F_3 \cdot \frac{HJ}{\rho}, \quad F_3 \cdot \frac{JS}{\rho}$$

и сила F_2 на слѣдующія три:

$$-F_2 \cdot \frac{TH}{r_1}, \quad -F_2 \cdot \frac{HJ}{r_1}, \quad -F_2 \cdot \frac{JS}{r_1}$$

такимъ образомъ будетъ:

$$fm'S = F_3 \cdot \frac{PH}{\rho} - F_2 \cdot \frac{TH}{r_1} = fm'\left[\frac{PH}{\rho^3} - \frac{TH}{r_1^3}\right]$$

$$fm'T = fm'\left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] \cdot HJ$$

$$fm'W = fm'\left[\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right] \cdot JS$$

слѣдовательно:

$$S = \frac{PH}{\rho^3} - \frac{TH}{r_1^3} = \frac{TH - r}{\rho^3} - \frac{TH}{r_1^3} = \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) TH - \frac{r}{\rho^3}$$

$$T = \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) . HJ$$

$$W = \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) . JS.$$

Условившись означать черезъ λ и λ_1 долготу тѣла P и тѣла S считаемую въ плоскости орбиты тѣла P и черезъ β — широту тѣла S отъ той же плоскости, будемъ имѣть:

$$TH = r_1 \cos\beta \cos(\lambda_1 - \lambda)$$

$$HJ = r_1 \cos\beta \sin(\lambda_1 - \lambda)$$

$$JS = r_1 \sin\beta$$

такимъ образомъ будетъ

$$\left.\begin{aligned} S &= -\frac{r}{\rho^3} + \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos\beta \cos(\lambda_1 - \lambda) \\ T &= \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos\beta \sin(\lambda_1 - \lambda) \\ W &= \left(\frac{1}{\rho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \sin\beta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad (23)$$

Предложеніе LXVI, какъ указано Ньютономъ въ предисловіи, имѣетъ въ виду приложенія къ теоріи луны, поэтому для общаго обозрѣнія главнѣйшихъ неравенствъ онъ сперва пренебрегаетъ наклоненіемъ лунной орбиты къ элиптикѣ, т.-е. полагаетъ въ фор. (23) $\cos\beta = 1$ тогда будетъ:

$$\rho^2 = r_1^2 - 2rr_1 \cos(\lambda_1 - \lambda) + r^2 = r_1^2 \left[1 - 2\frac{r}{r_1}\cos(\lambda_1 - \lambda) + \frac{r^2}{r_1^2}\right]$$

вмѣстѣ съ тѣмъ отношеніе $\frac{r}{r_1}$ составляетъ около $\frac{1}{400}$, поэтому, если пренебречь квадратами и высшими степенями этой величины, то можно въ первомъ приближеніи взять:

$$\rho^{-3} = r_1^{-3}\left[1 + 3\frac{r}{r_1}\cos(\lambda_1 - \lambda)\right]$$

и тогда будетъ

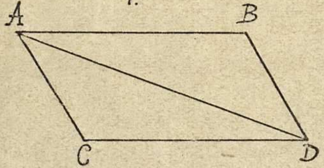
$$S = -\frac{r}{r_1^3} + \left[\frac{1}{r_1^3} + \frac{3r}{r_1^4}\cos(\lambda_1 - \lambda) - \frac{1}{r_1^3}\right] r_1 \cos(\lambda_1 - \lambda),$$

т.-е.

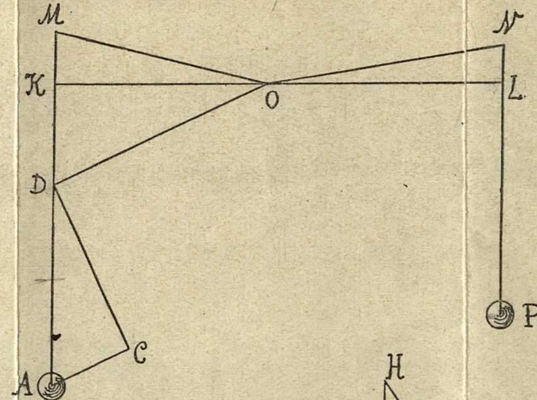
$$\left.\begin{aligned} S &= \frac{r}{r_1^{\,3}}\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cos 2(\lambda_1-\lambda)\right] \\ &\text{и} \\ T &= \frac{3}{2}\,\frac{r}{r_1^{\,3}}\sin 2(\lambda_1-\lambda) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

Эти величины при подстановкѣ въ формулы группы (A), а также и при непосредственномъ разсмотрѣнiи дѣйствiя силъ ими представляемыхъ на тѣло P въ значительной степени облегчаютъ пониманiе высказываемыхъ въ слѣдствiяхъ предложенiя LXVI утвержденiй.

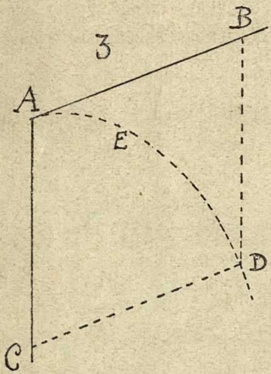
1.


A
B
C
D

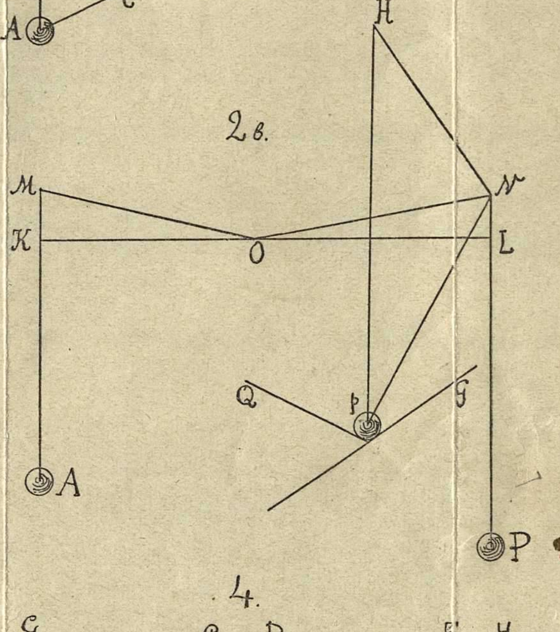
2а.


M
N
K
O
L
D
P
C
A

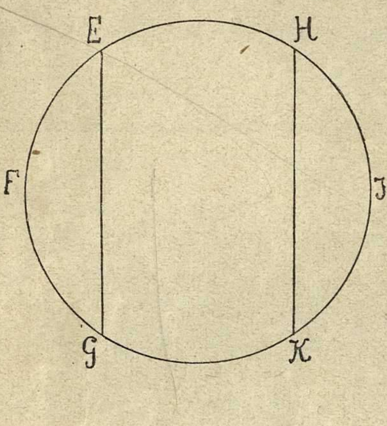
3


B
A
E
D
C

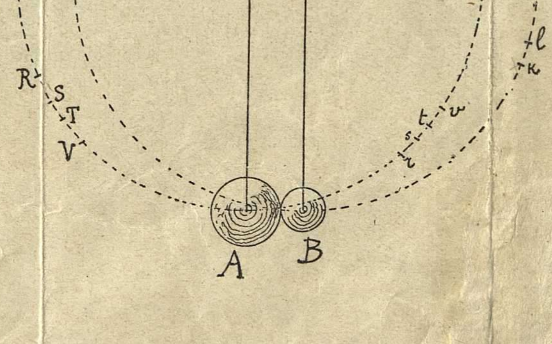
2в.


H
M
N
K
O
L
Q
p
S
A
P

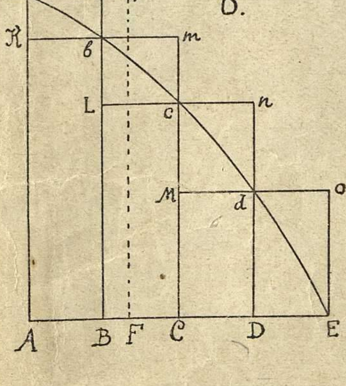
5


E
H
F
J
G
K

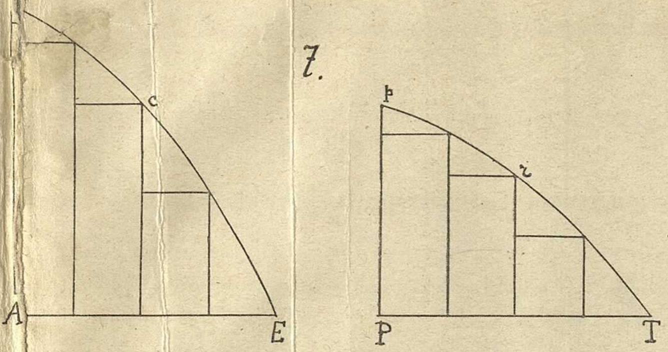
4.


E
G
C
D
F
H
R
S
T
V
l
k
s
t
v
A
B

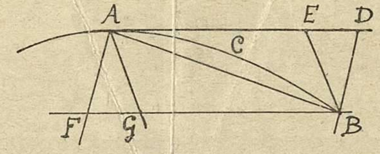
6.


a
l
f
K
b
m
L
c
n
M
d
o
A
B
F
C
D
E

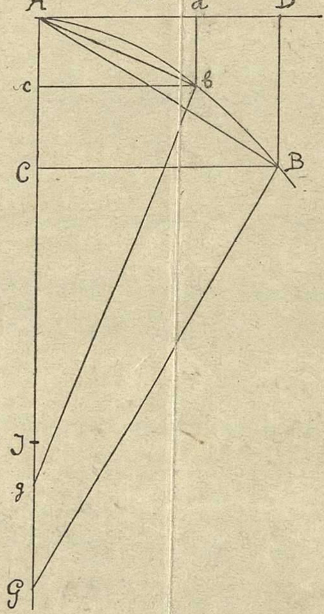
7.



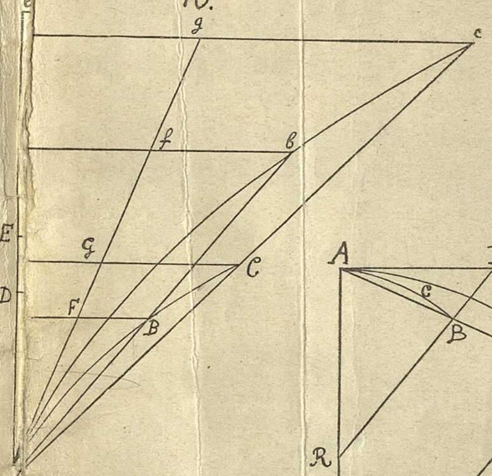
9.



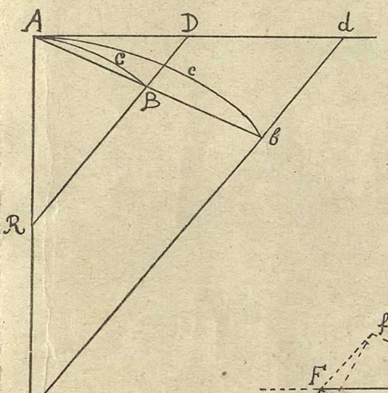
11.



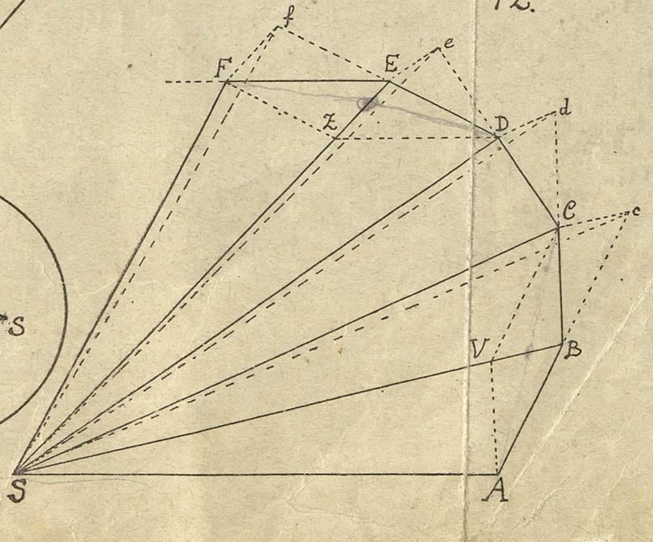
10.



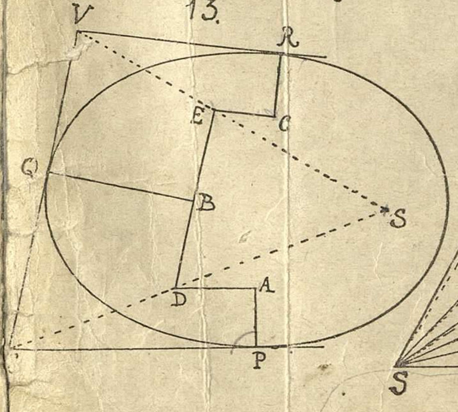
8.



12.



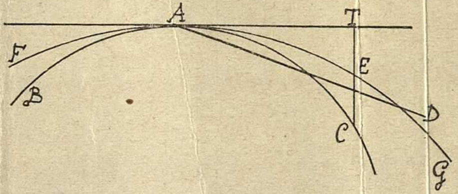
13.



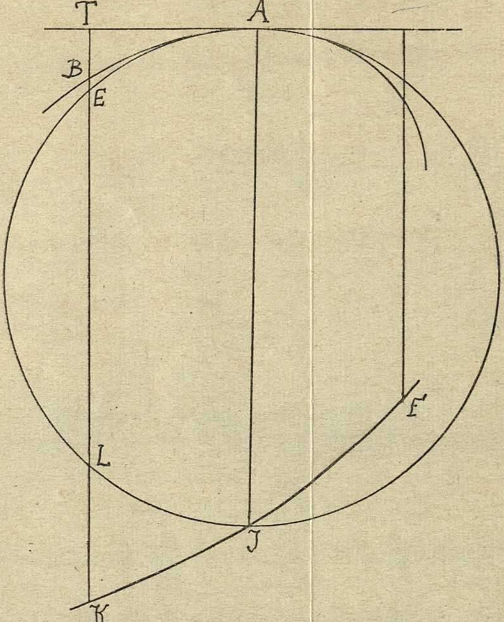
2

Листъ 3ій

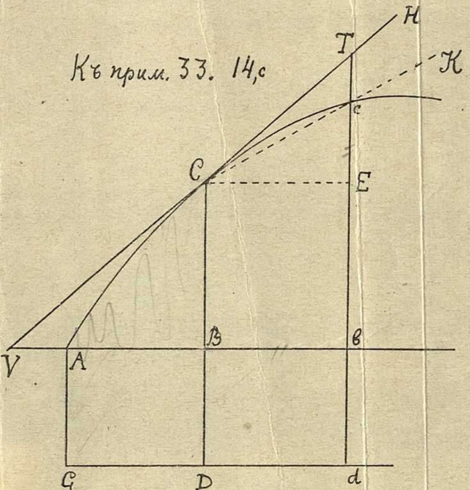
Къ прим. 32. 14,a



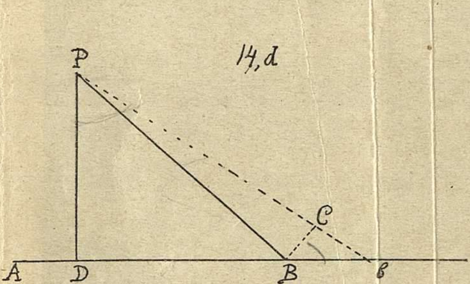
Къ прим. 32. 14,в



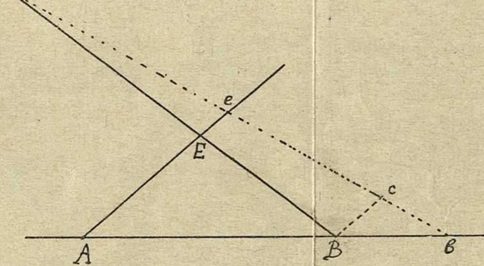
Къ прим. 33. 14,c



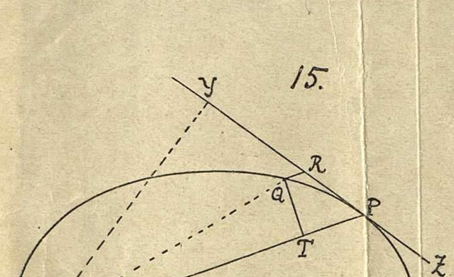
14,d



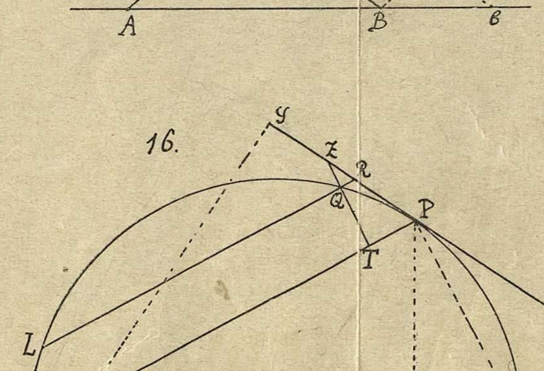
14,e



15.

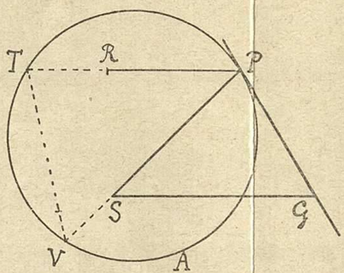


16.

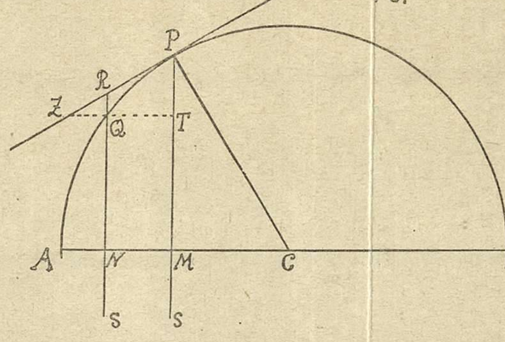


B

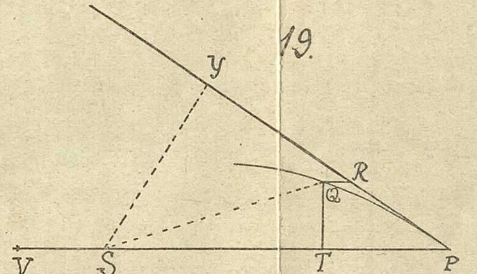
17.



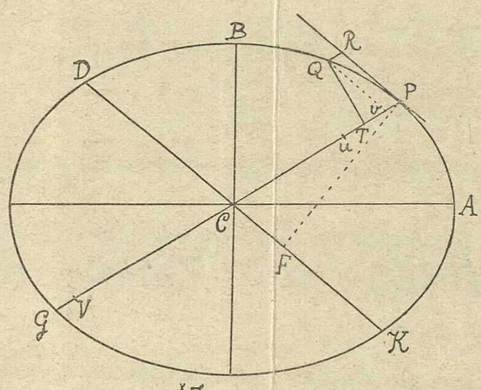
18.



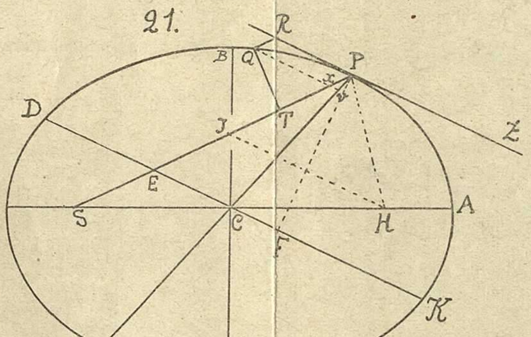
19.



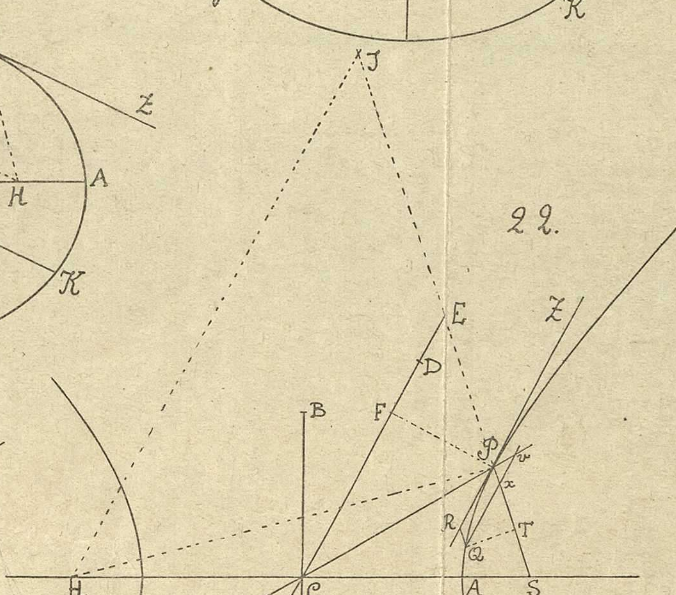
20.



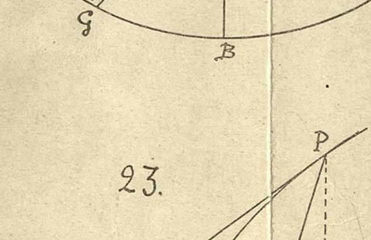
21.



22.

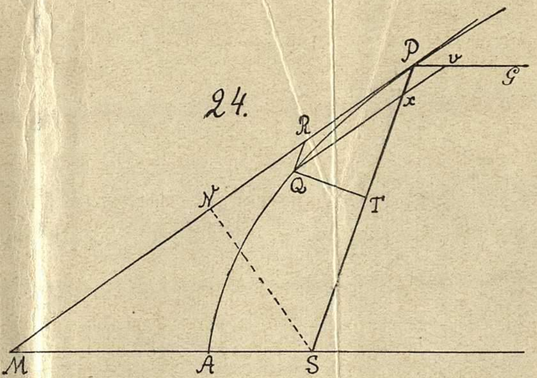


23.

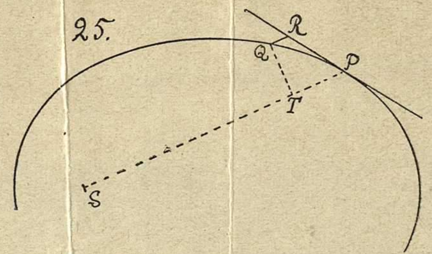


4

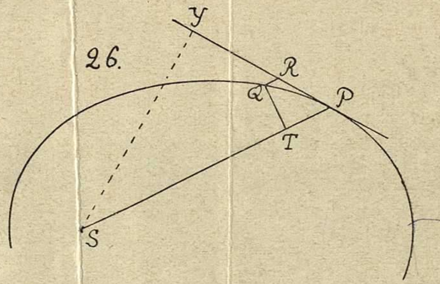
24.



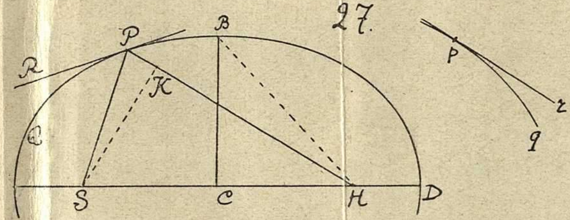
25.



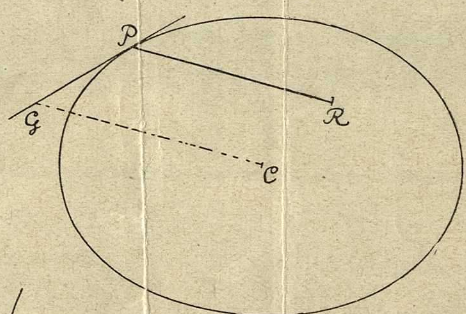
26.



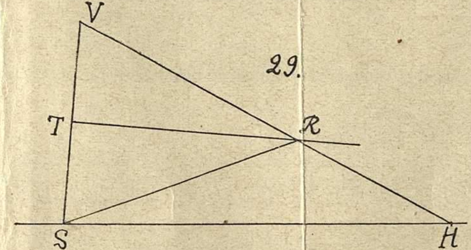
27.



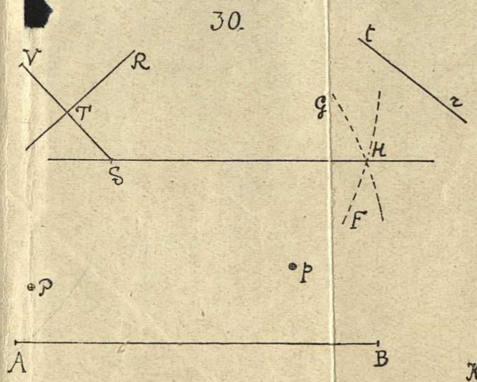
28.



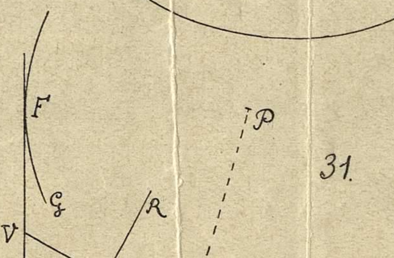
29.



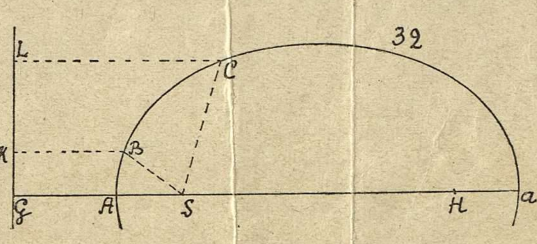
30.



31.

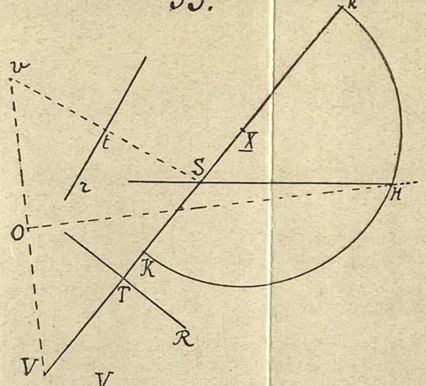


32

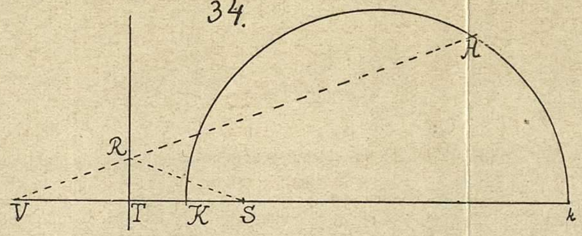


5

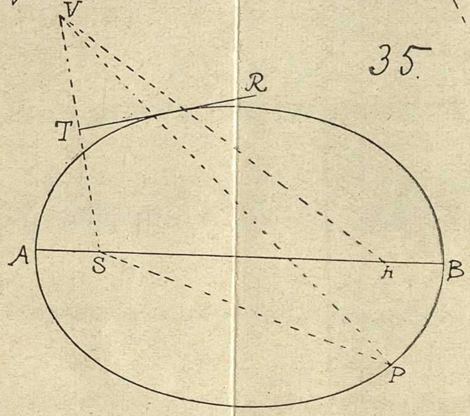
33.

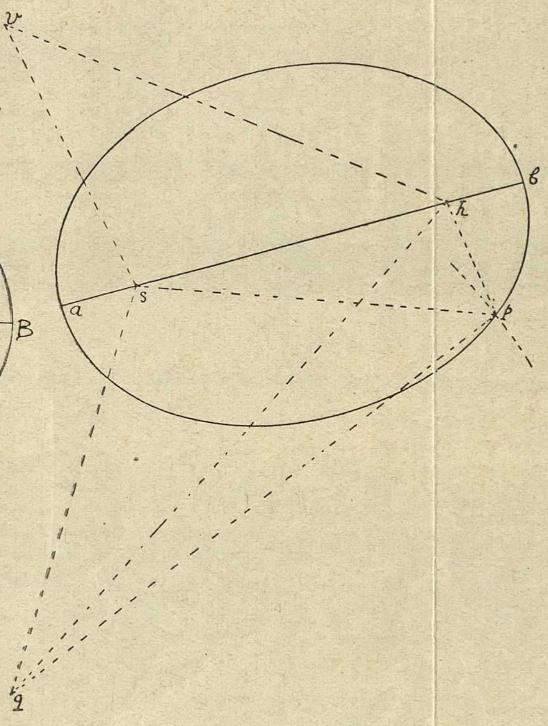


34.

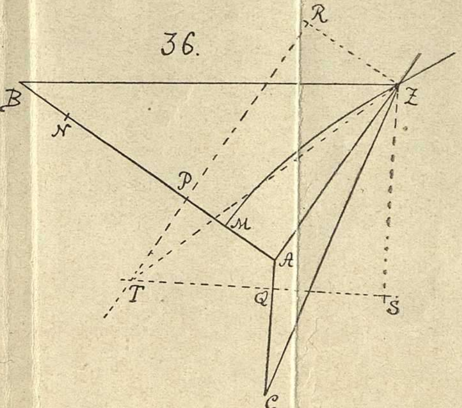


35

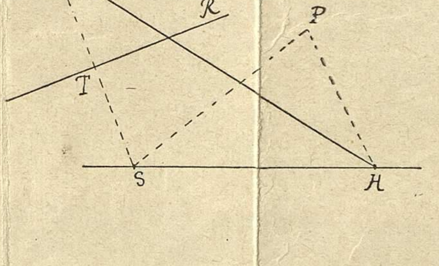




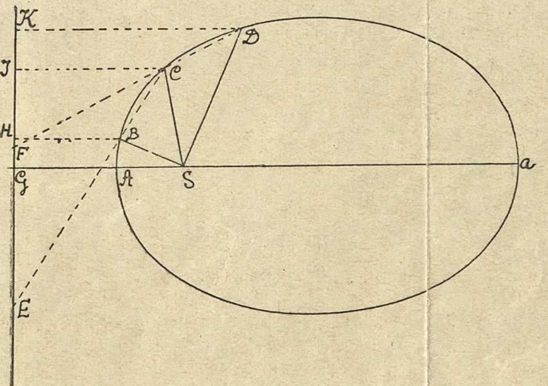
36.



37.

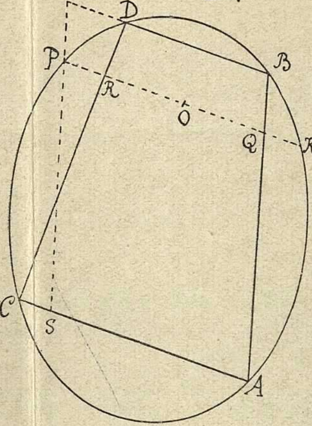


38.

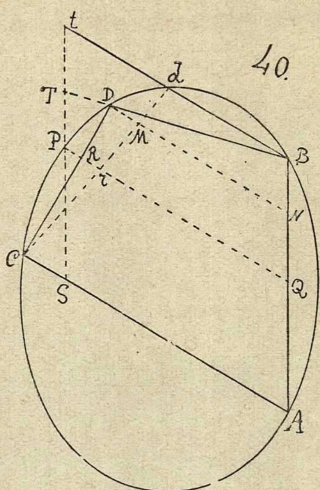


6

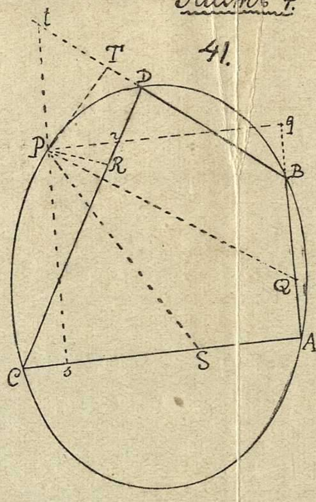
39.



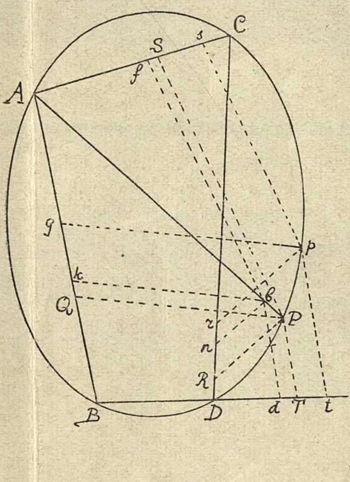
40.



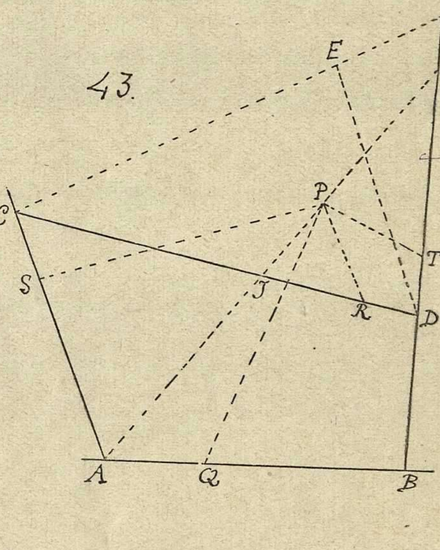
41.



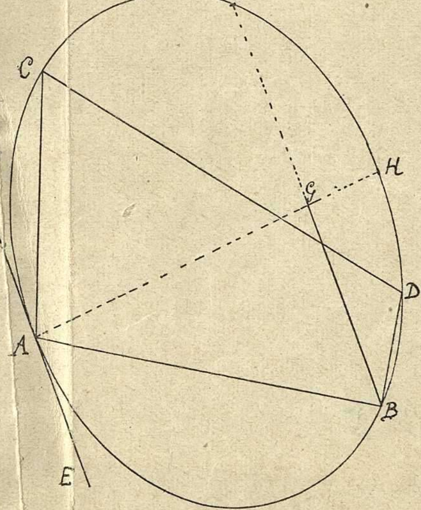
42



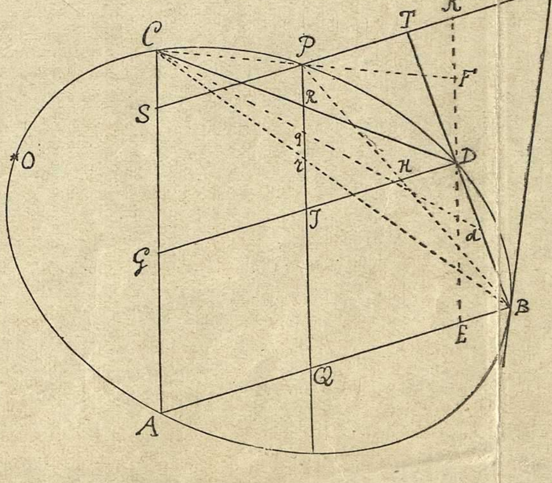
43.



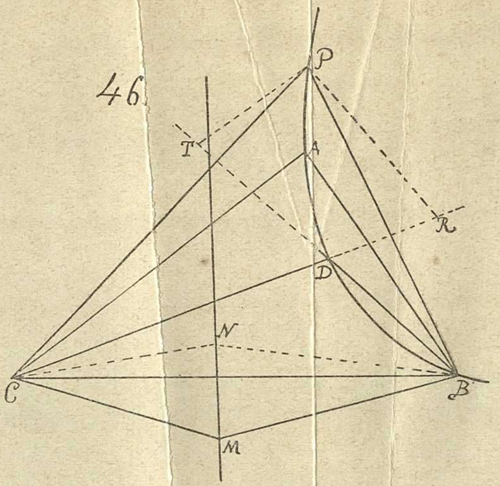
44.



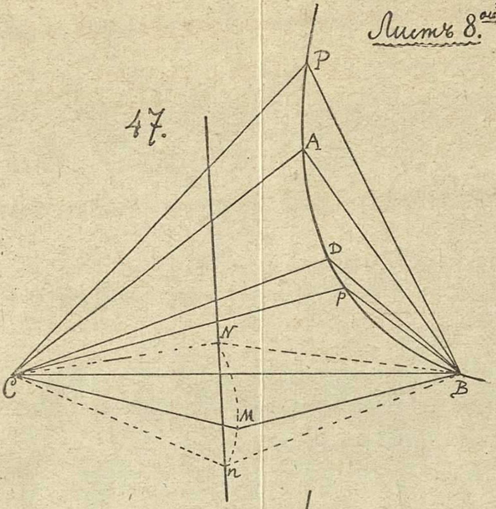
45.



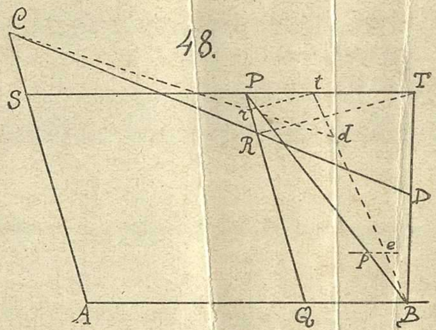
46.



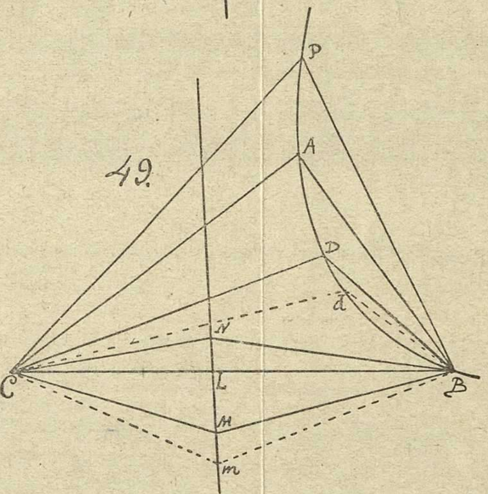
47.



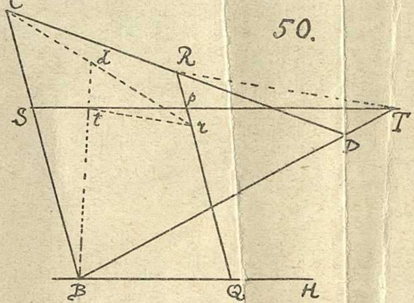
48.



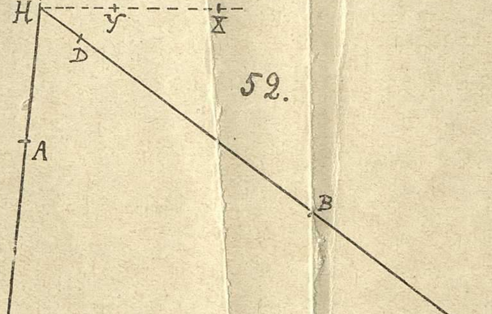
49.



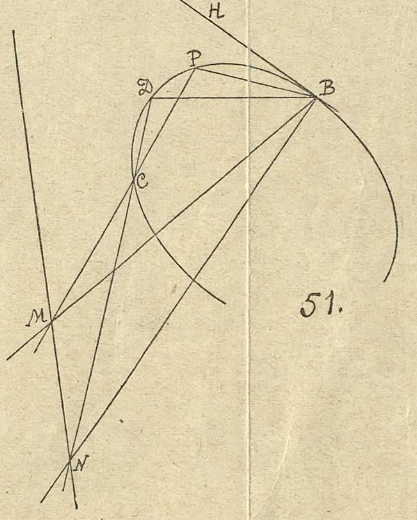
50.



52.

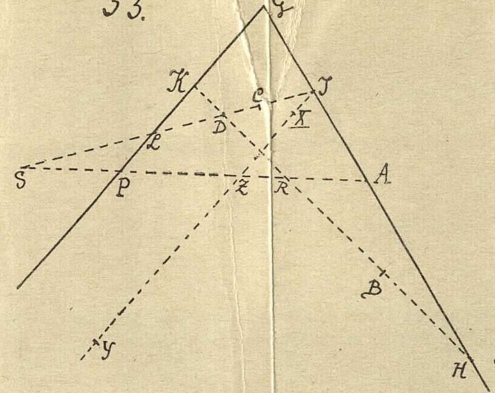


51.

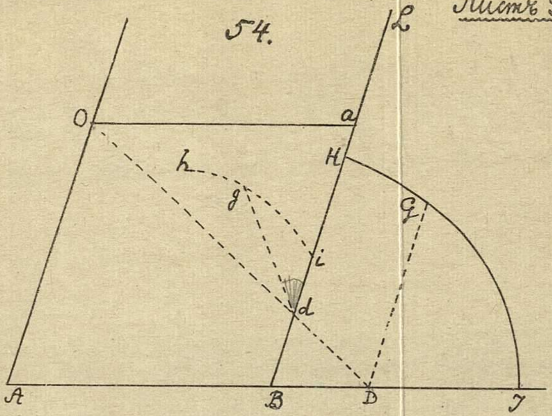


8

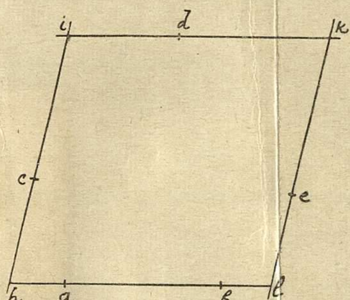
53.



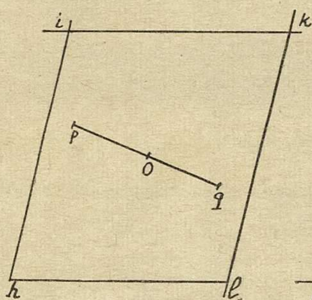
54.



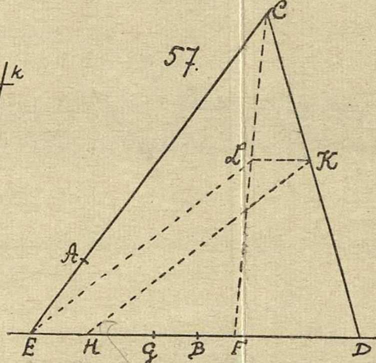
55.



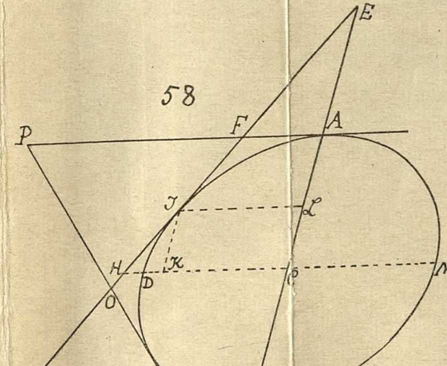
56.



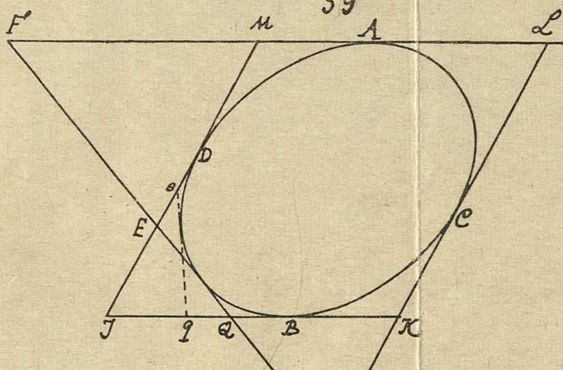
57.



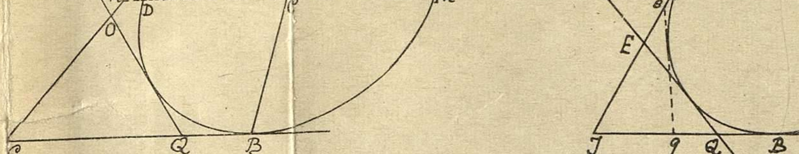
58



59



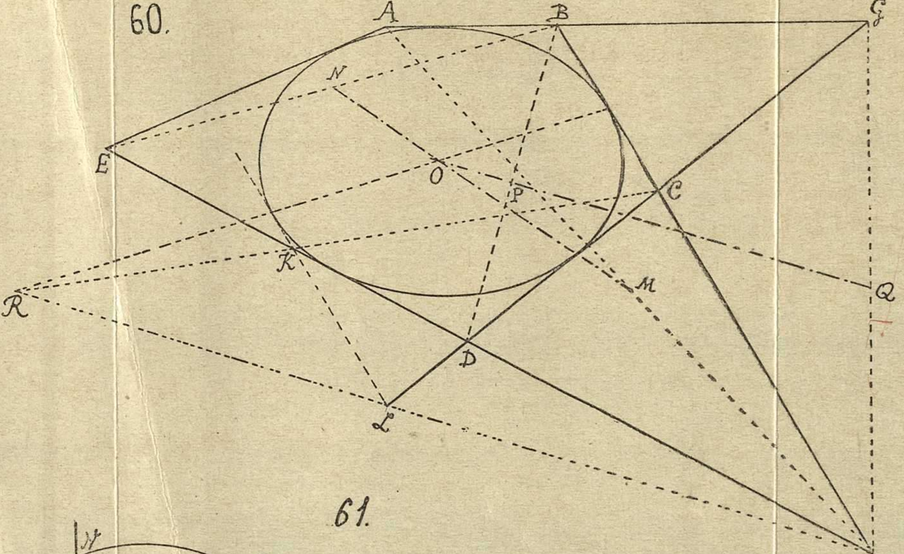
63.



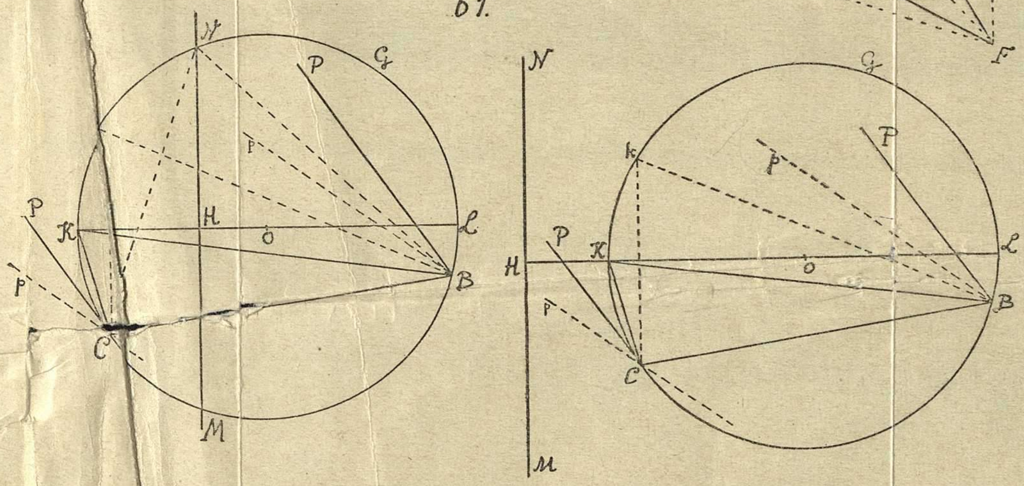
9

Листъ 10.ый

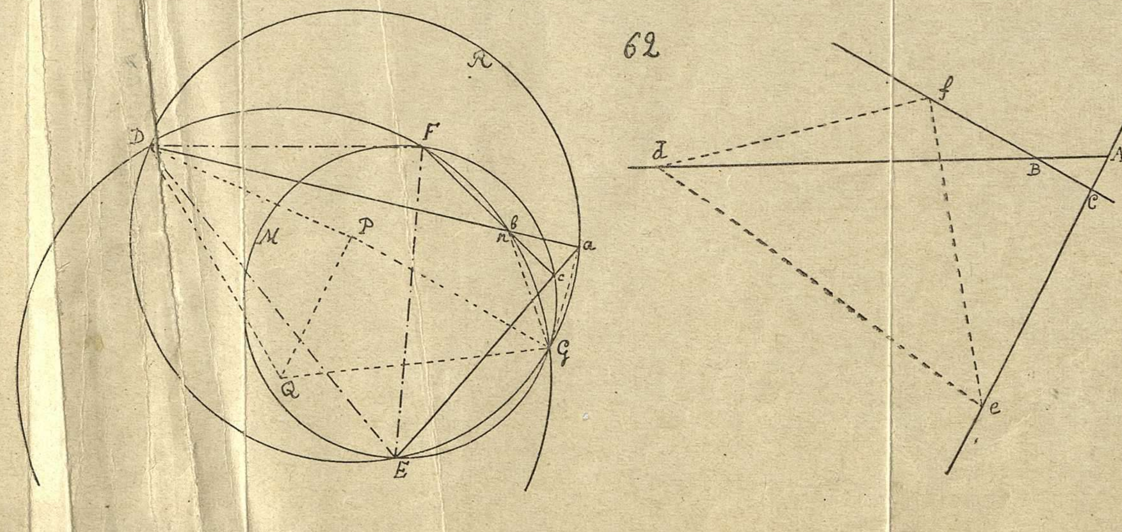
60.



61.

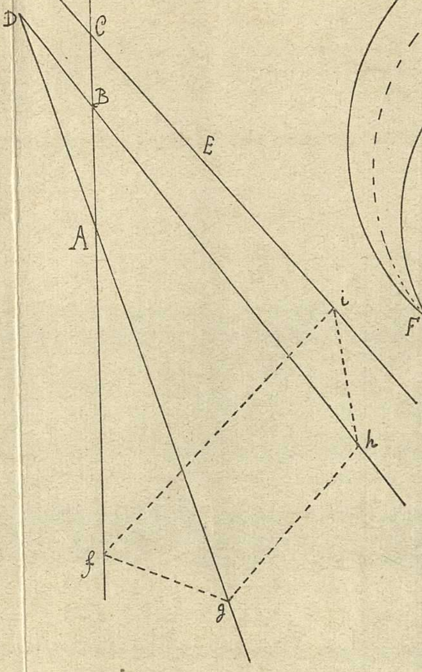


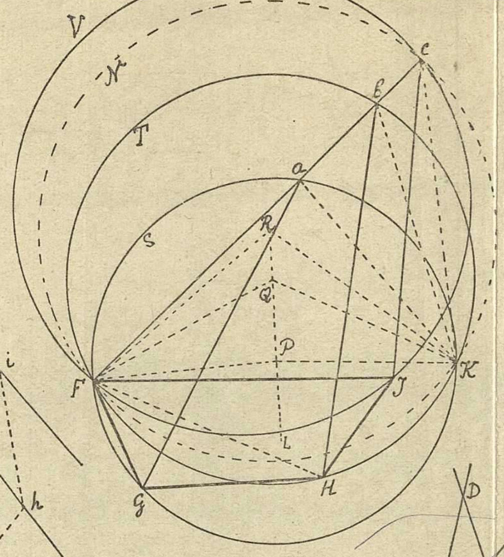
62



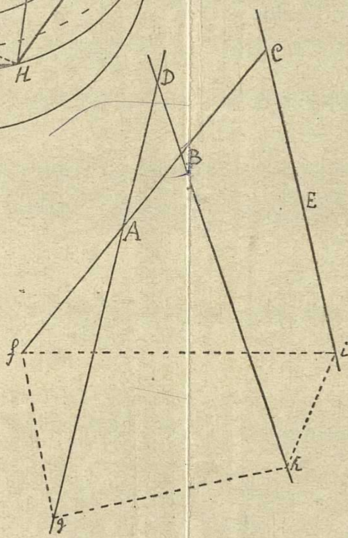
10

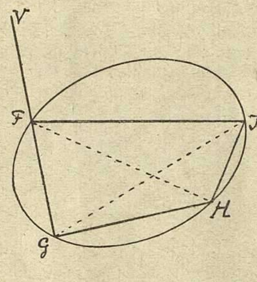
64.


D
C
B
E
A
i
h
f
g

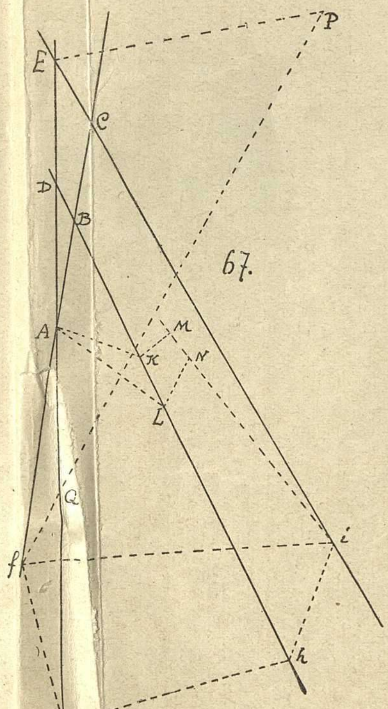

V
N
c
e
T
a
S
R
Q
P
F
J
K
L
G
H

66.

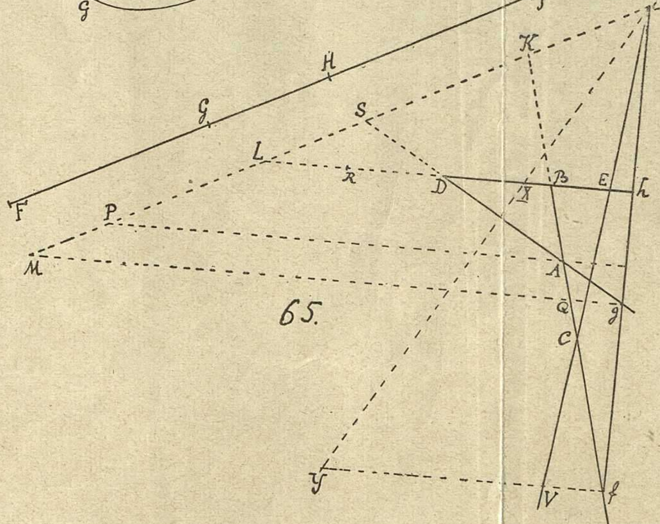

D
C
B
E
A
f
i
k
g


V
F
J
H
G

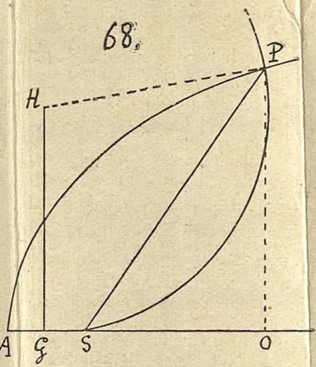
67.


P
E
C
D
B
A
M
K
N
L
Q
f
i
h
g

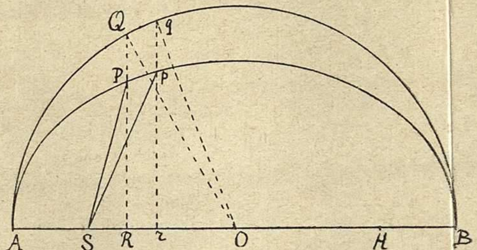
65.


J
i
K
H
G
S
L
R
D
X
B
E
h
F
P
M
A
Q
g
C
Y
V
f

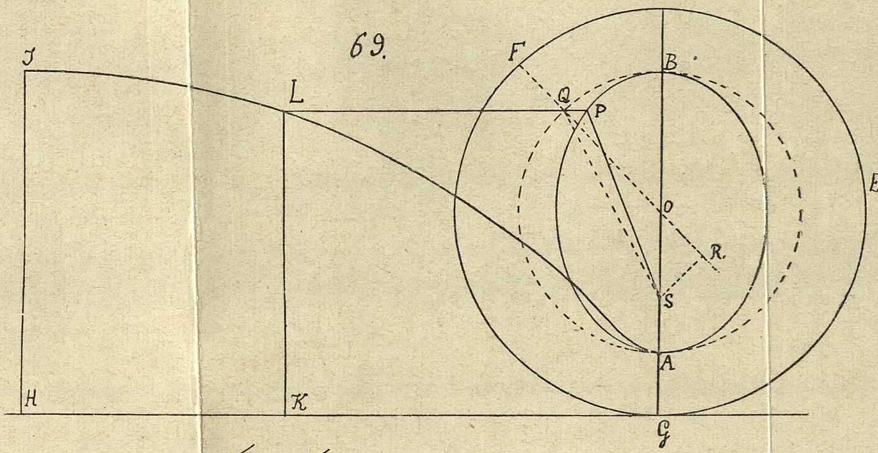
9



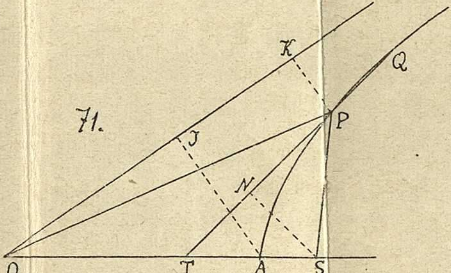
68.



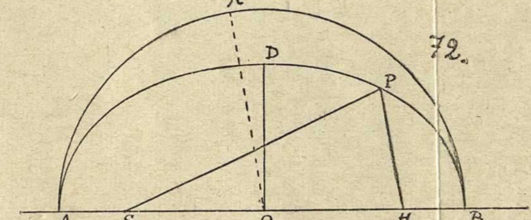
70.



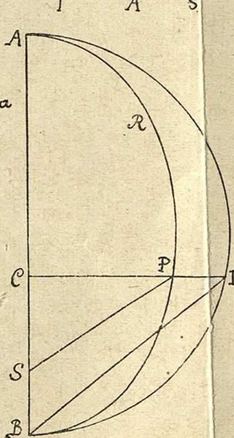
69.



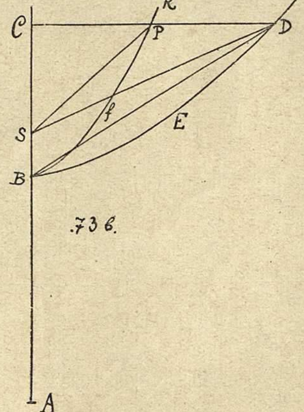
71.



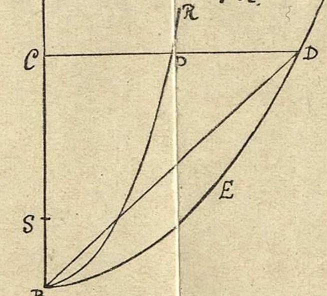
72.



73a



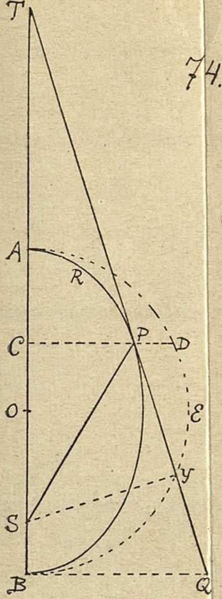
73b.

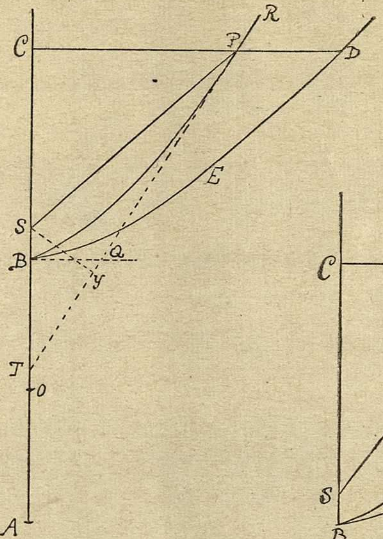


73c.

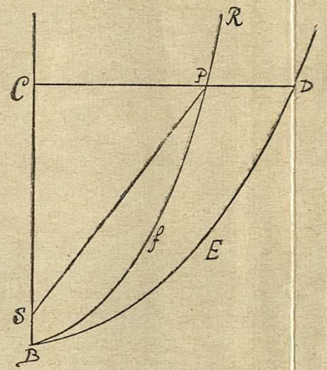
к

74.

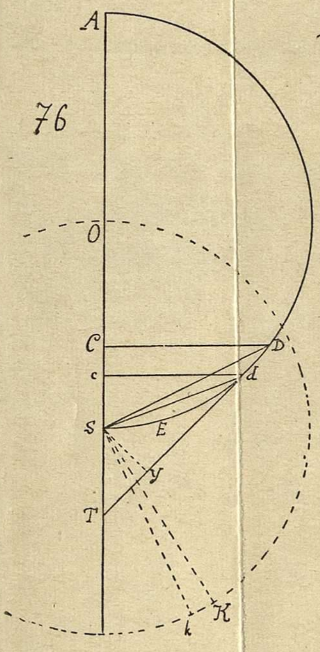

T
A
R
C
P
D
O
E
y
S
B
Q


C
P
R
D
E
S
B
Q
y
T
o
A

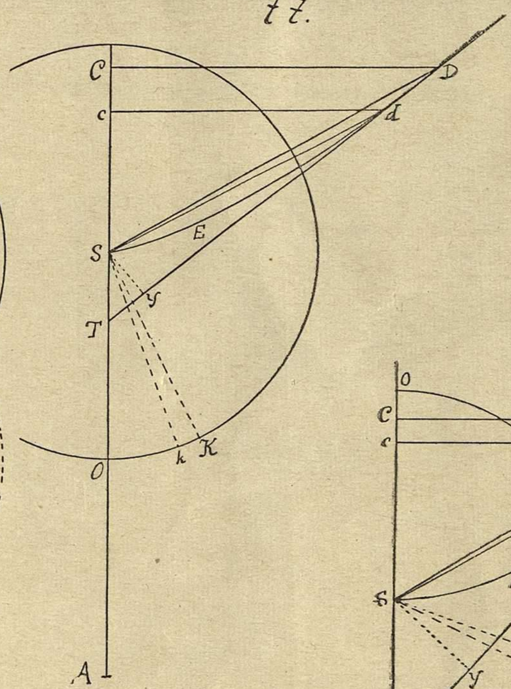
75.


R
C
P
D
f
E
S
B

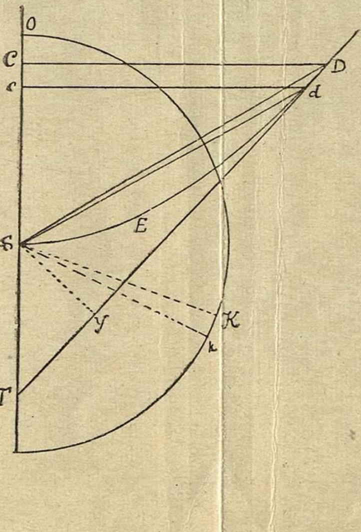
76


A
O
C
D
c
d
S
E
y
T
k
K

77.


C
D
c
d
E
S
y
T
O
k
K
A

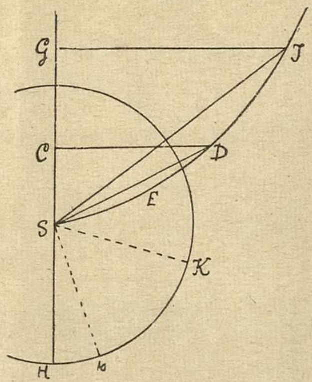
78


O
C
D
c
d
E
S
y
K
k
T

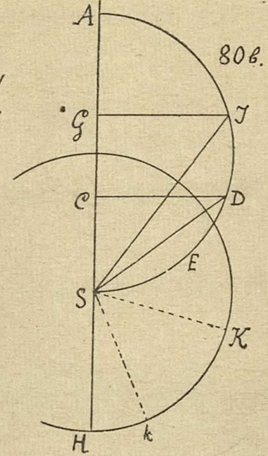
B

79.

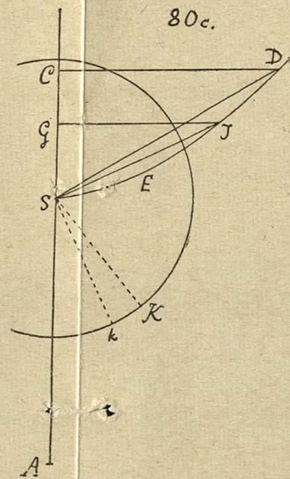
80a.



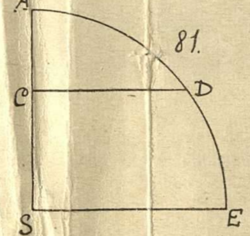
80в.

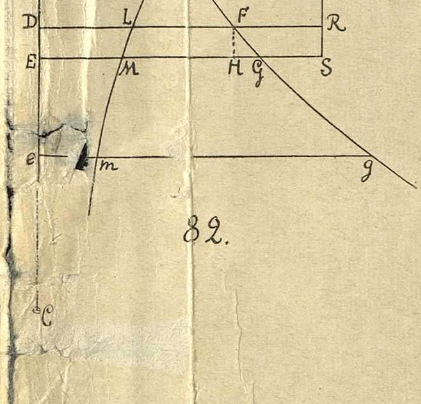


80c.

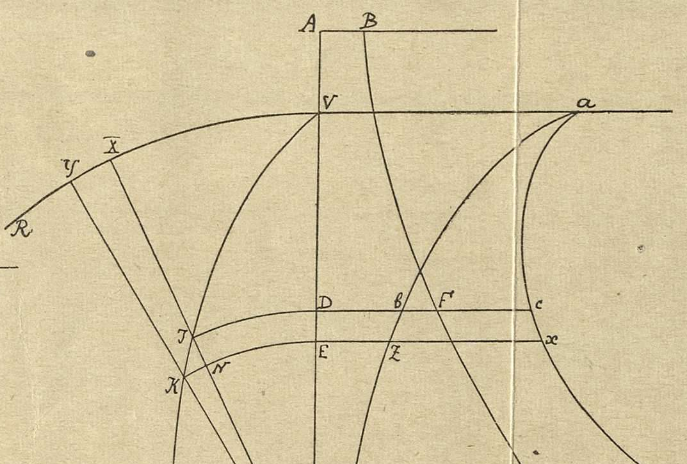


81.





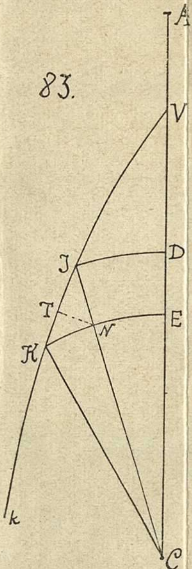
82.

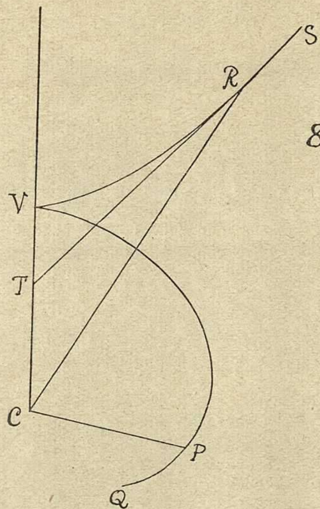


84.

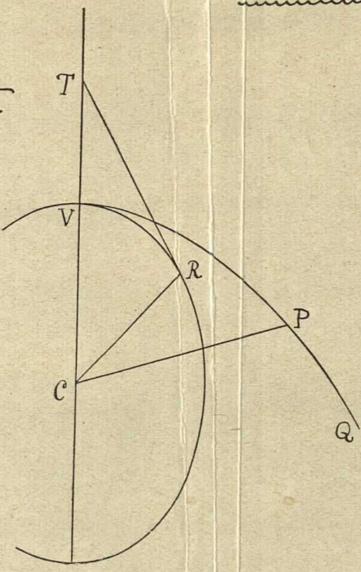
[illegible]

83.

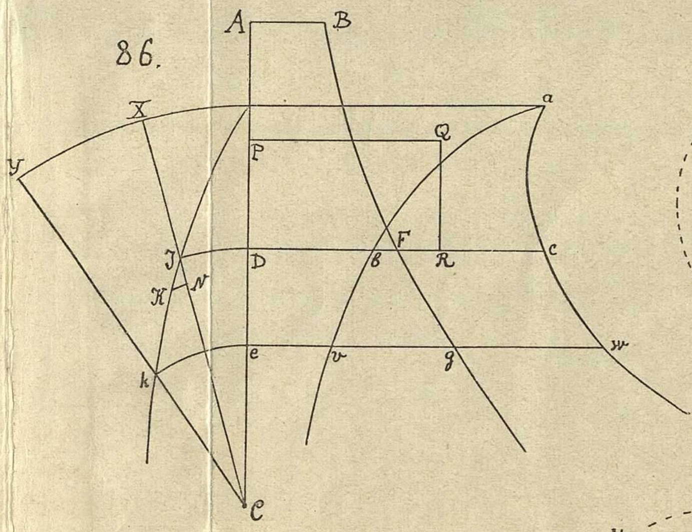




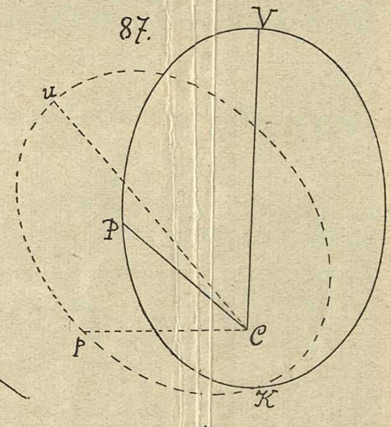
85.



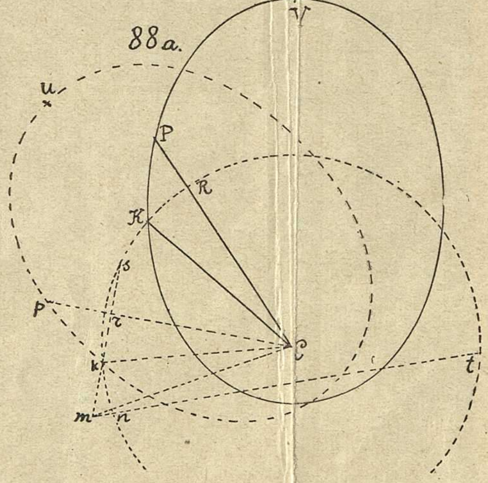
86.



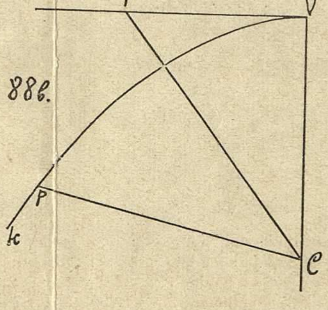
87.



88a.

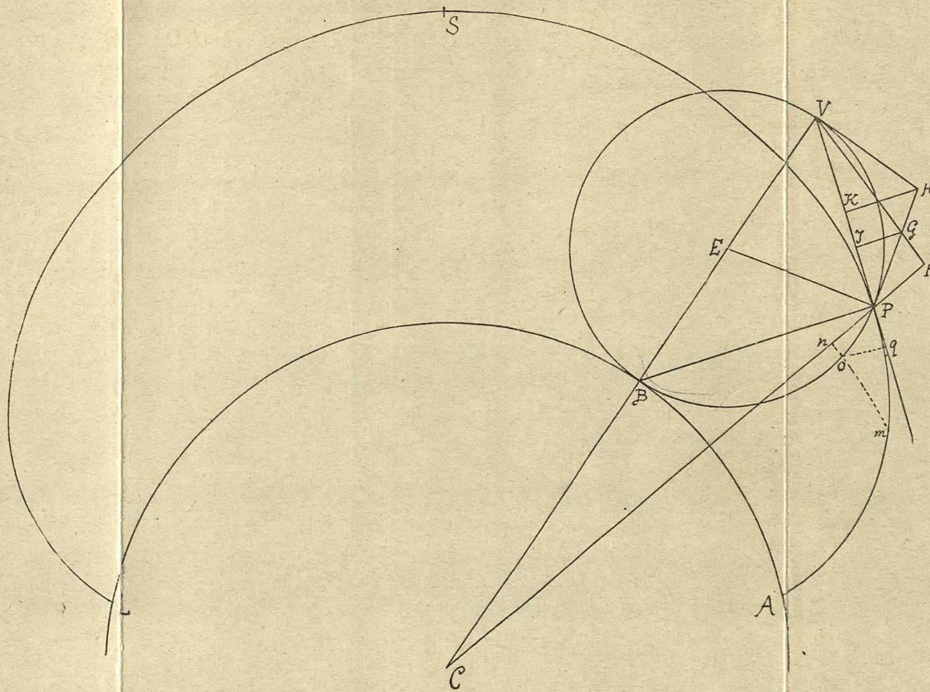


88b.

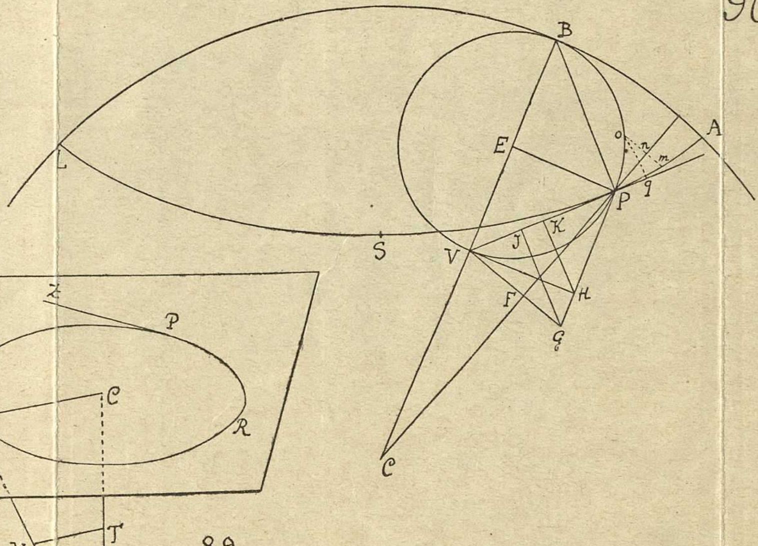


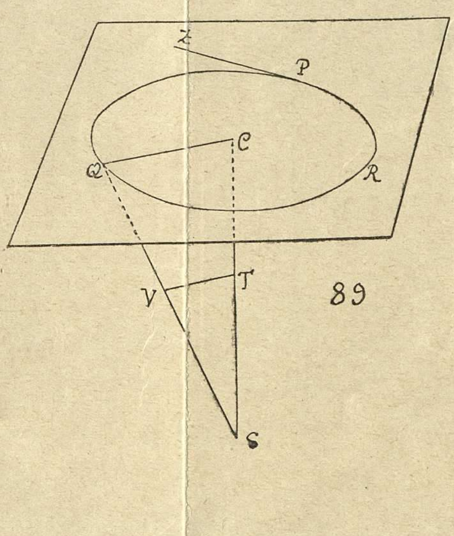
15

Листъ 16.ый



90.

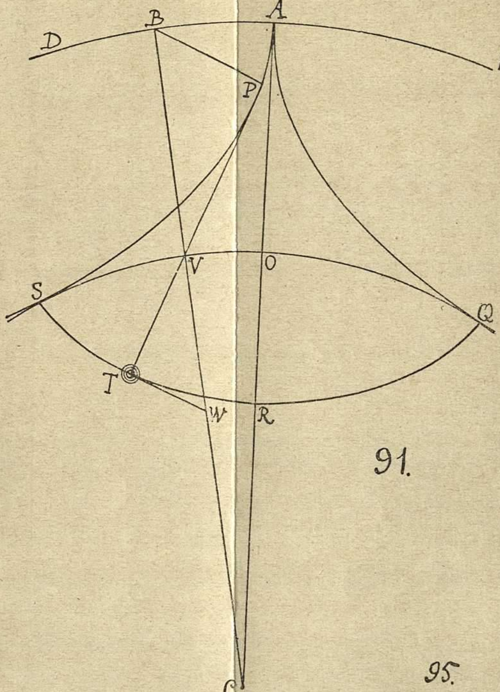




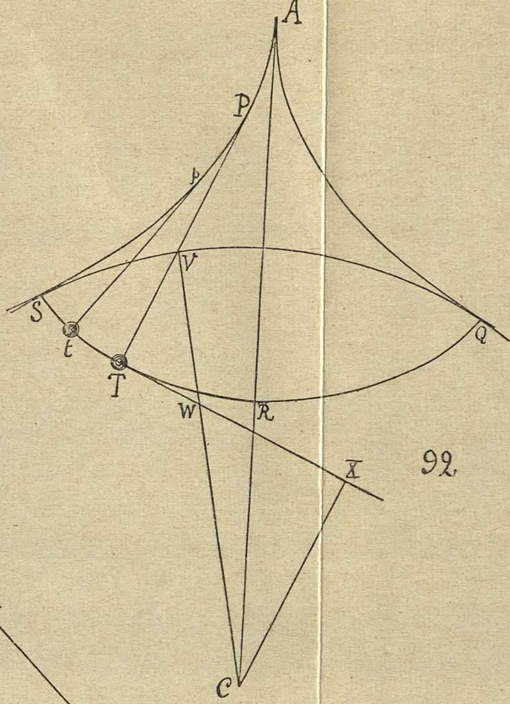
89

16

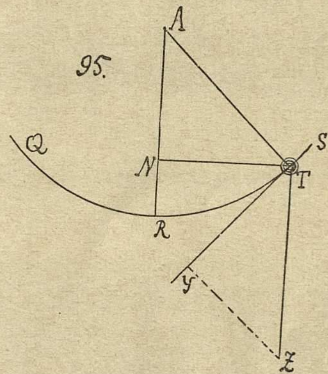
Листъ 17bis



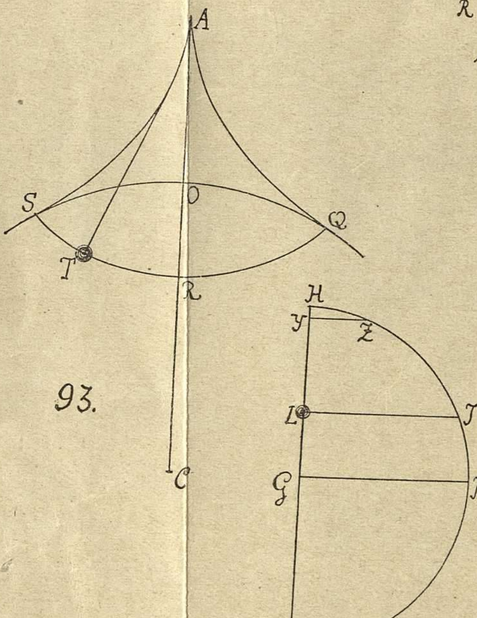
91.



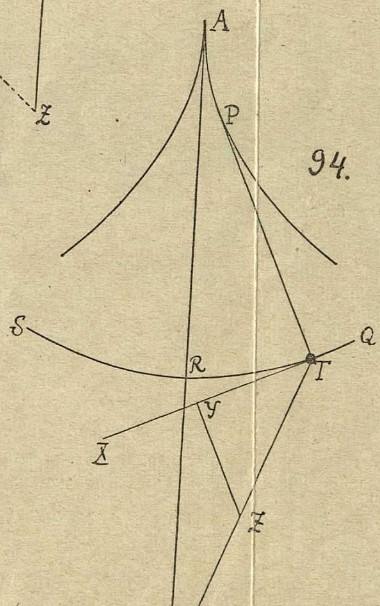
92.



95.

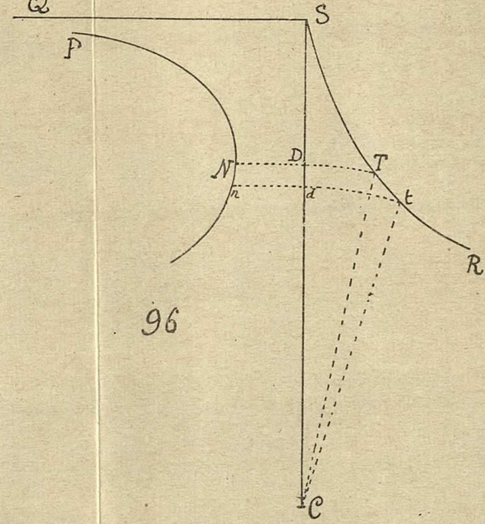


93.

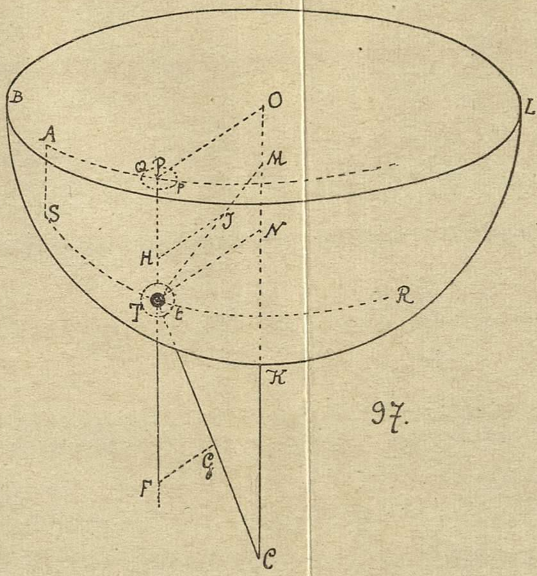


94.

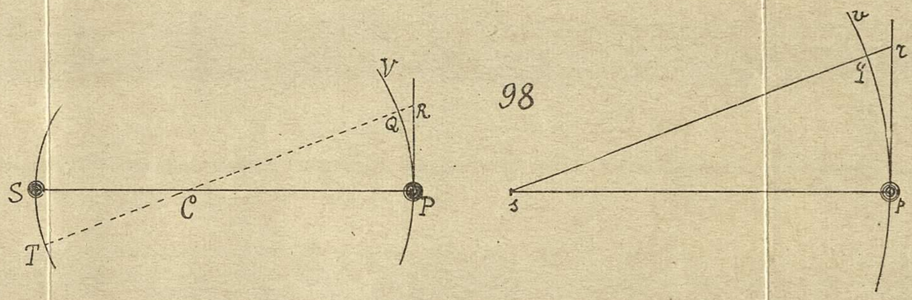
[illegible]



96

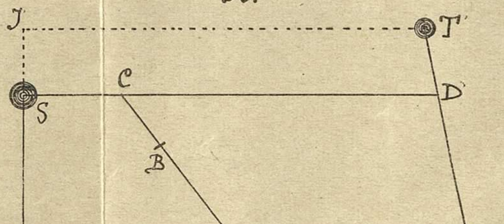


97.

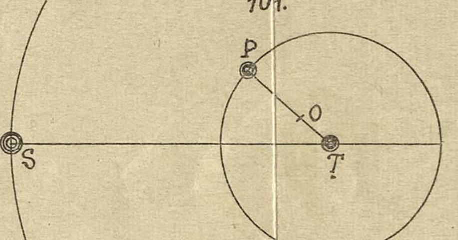


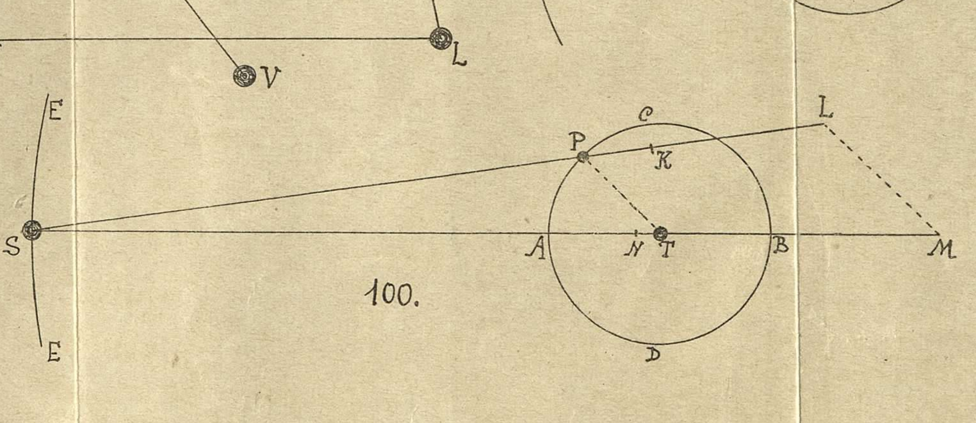
98

99.



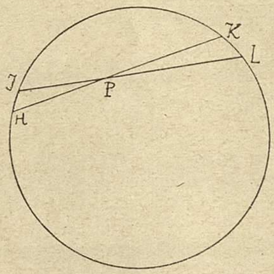
101.





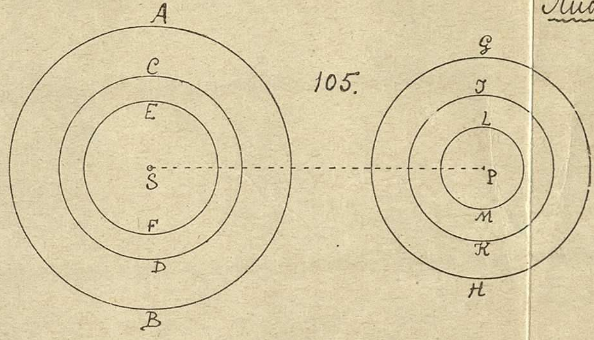
100.

13

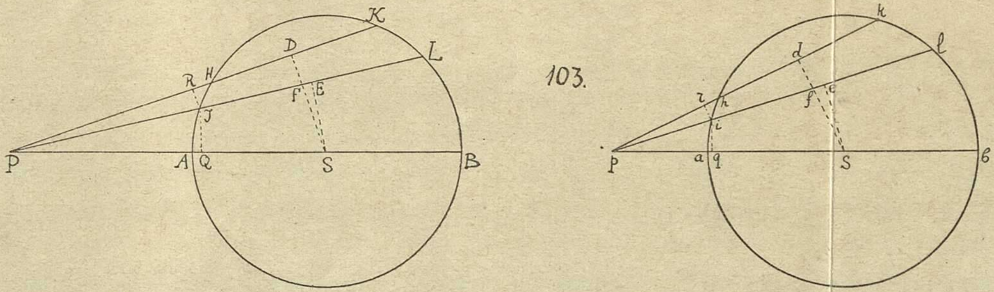


102

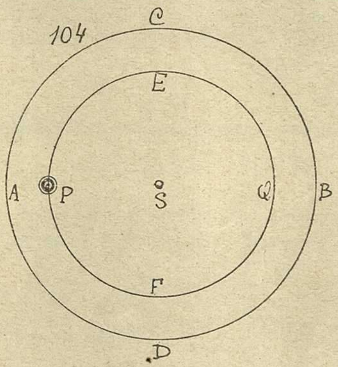
105.



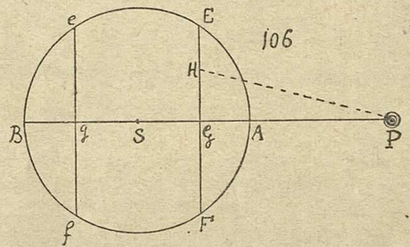
103.



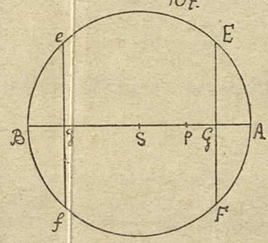
104



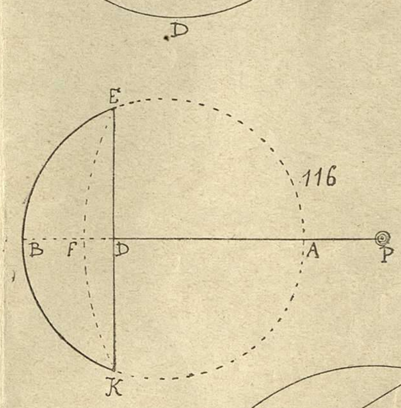
106



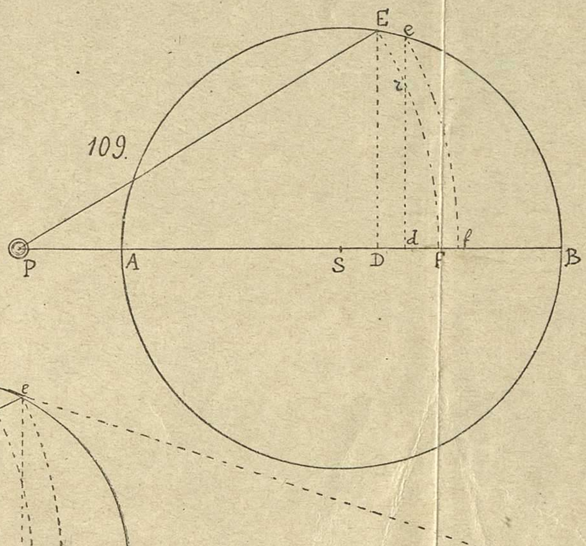
107.



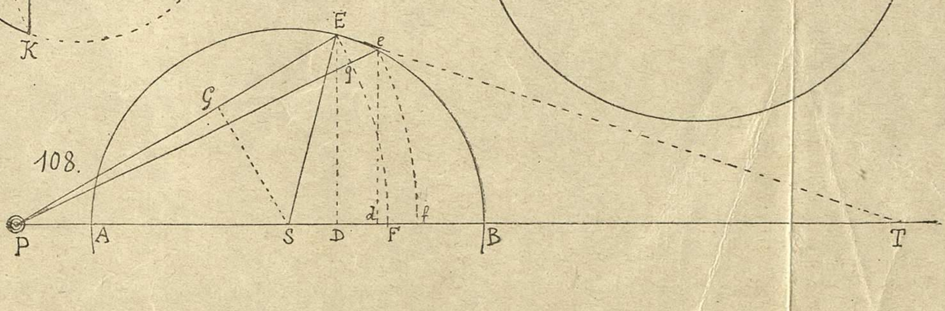
116



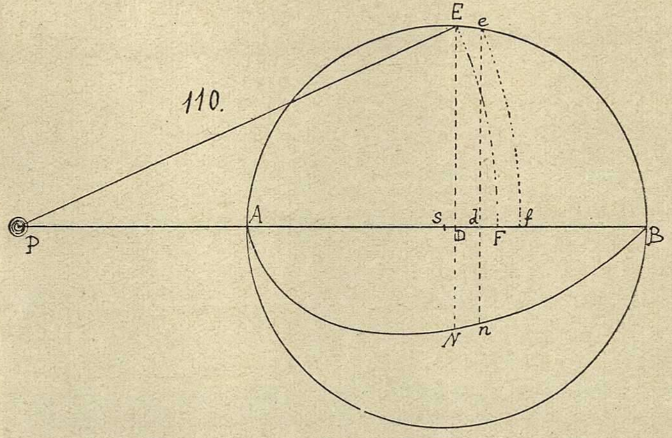
109.



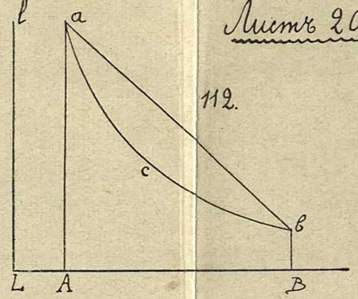
108.



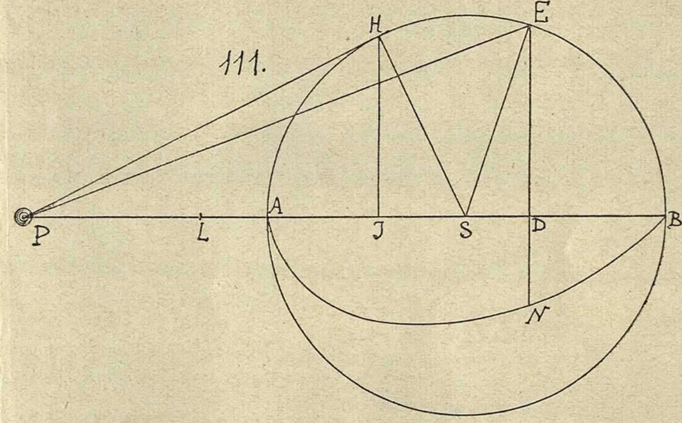
19



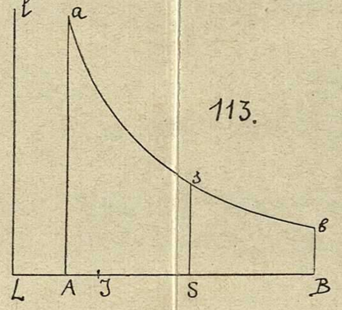
110.



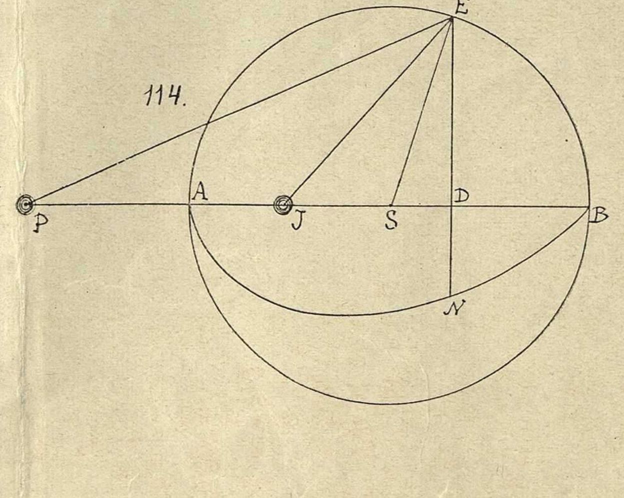
112.



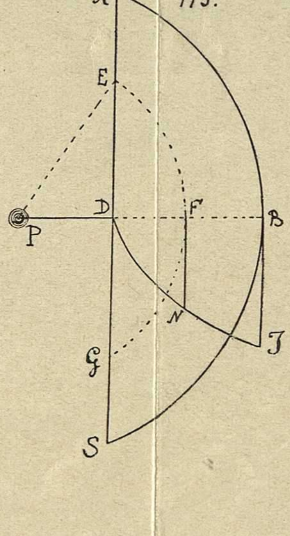
111.



113.

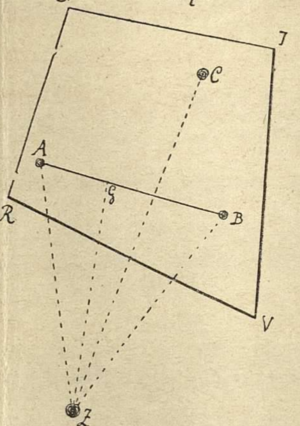


114.

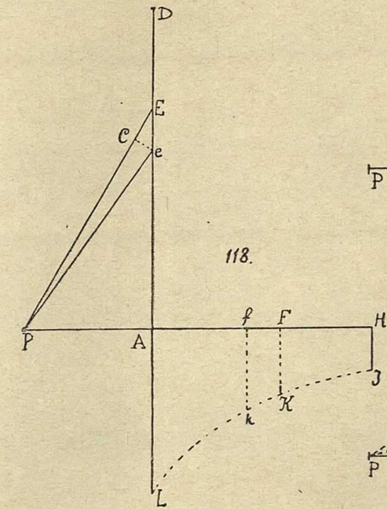


115.

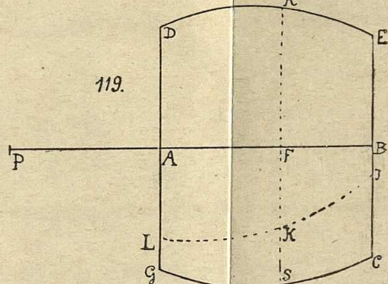
20



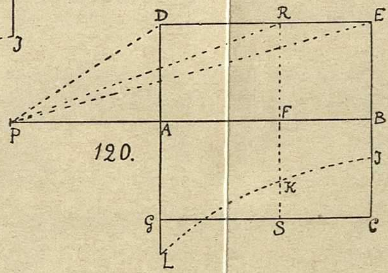
117.



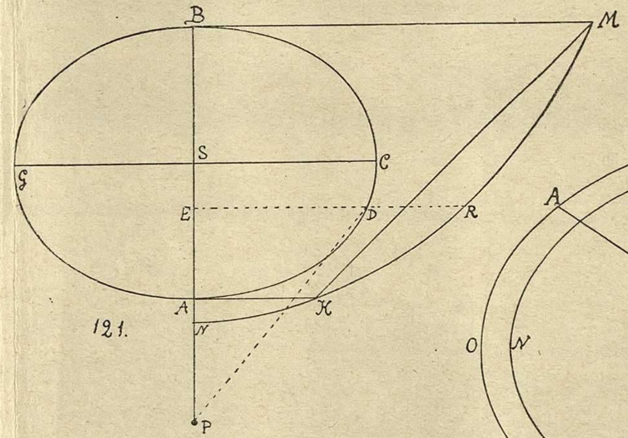
118.



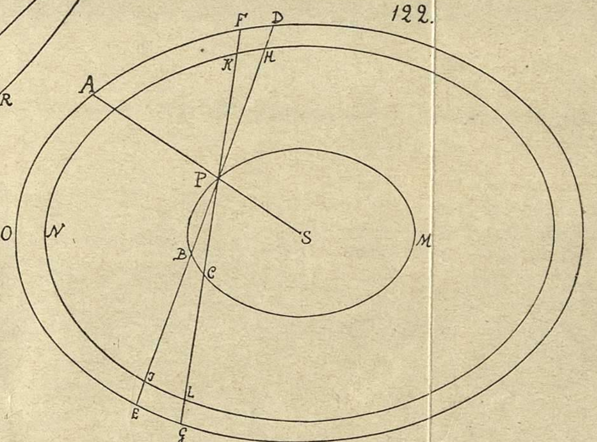
119.



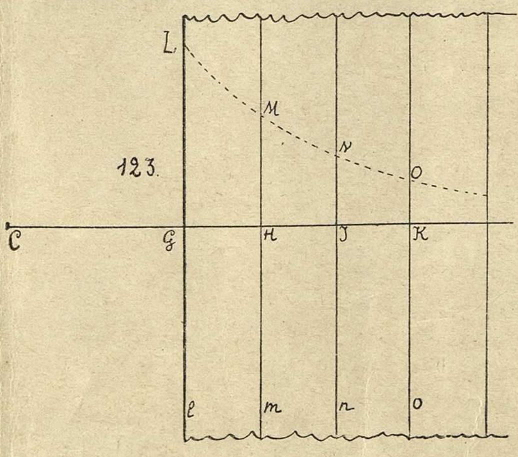
120.



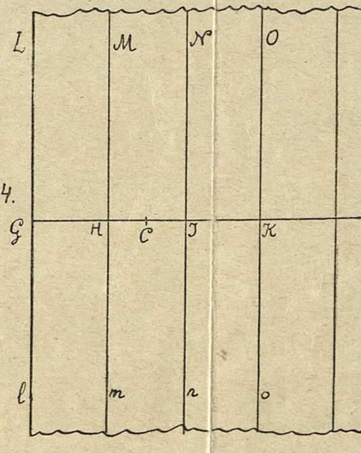
121.



122.

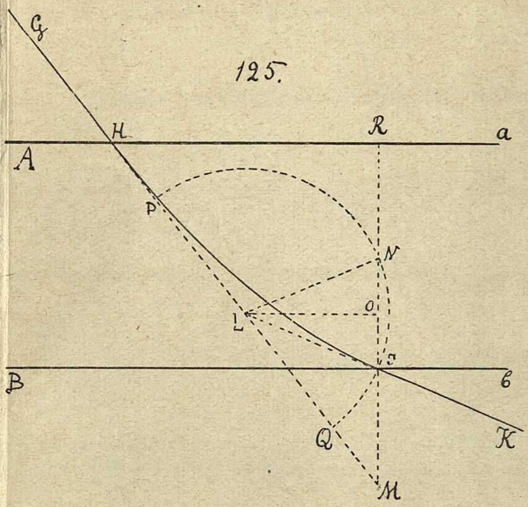


123.

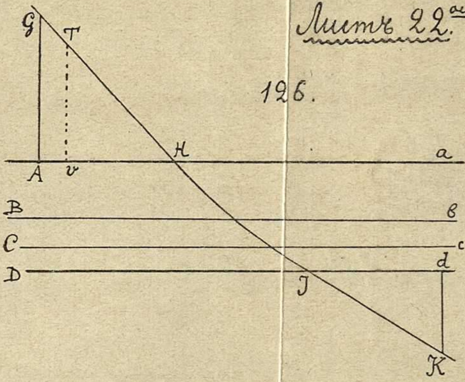


124.

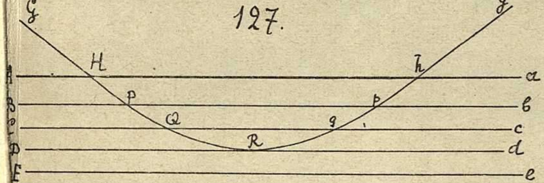
21



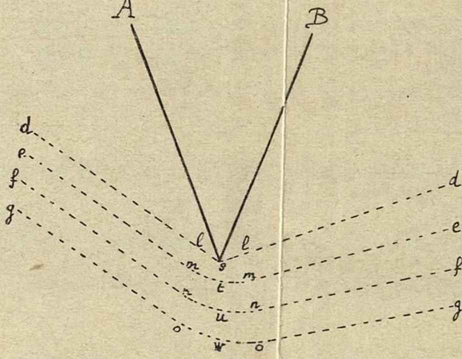
125.



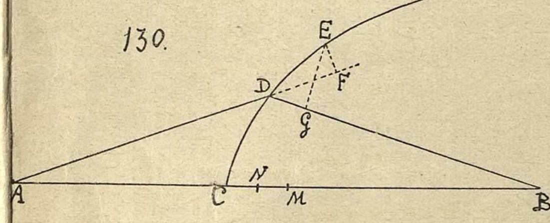
126.



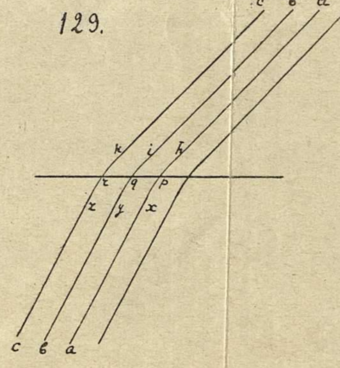
127.



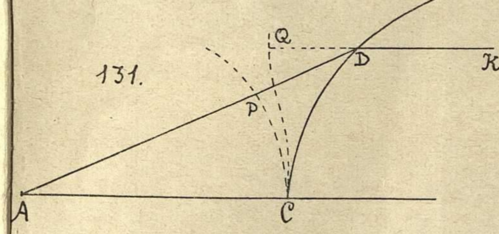
128.



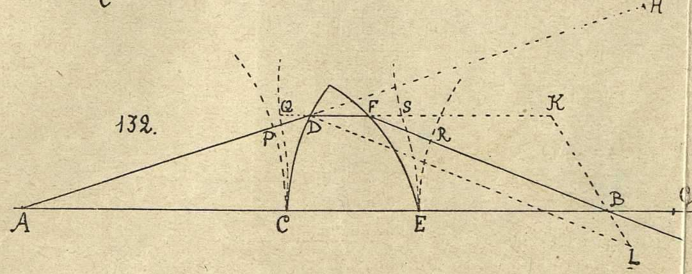
130.



129.



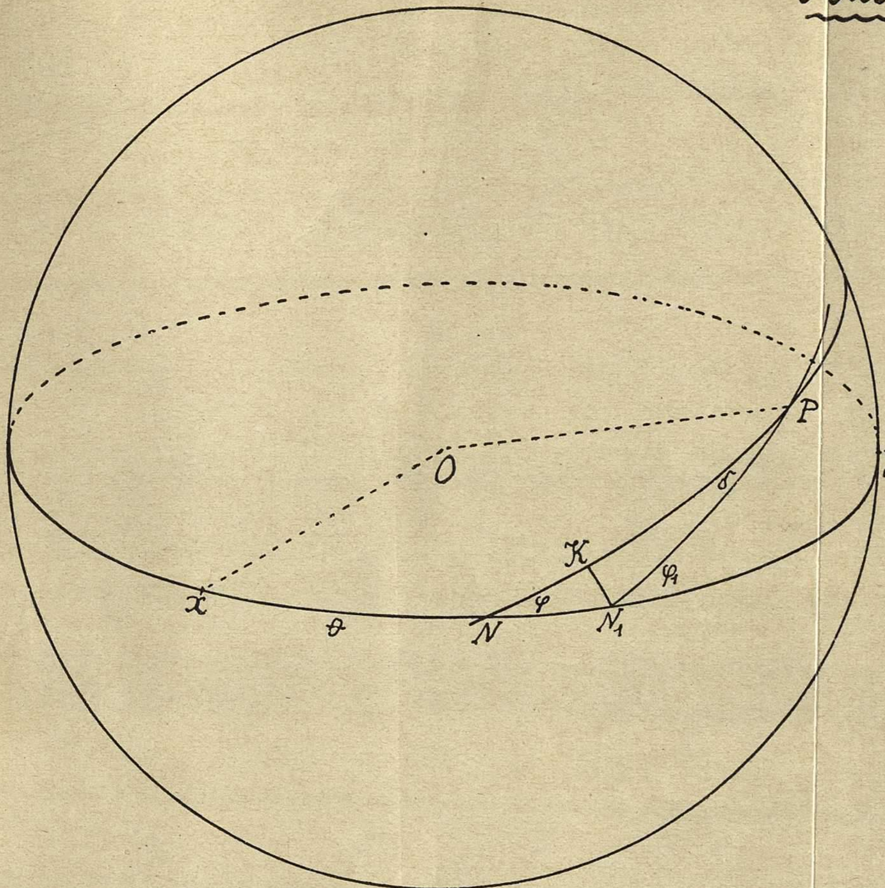
131.



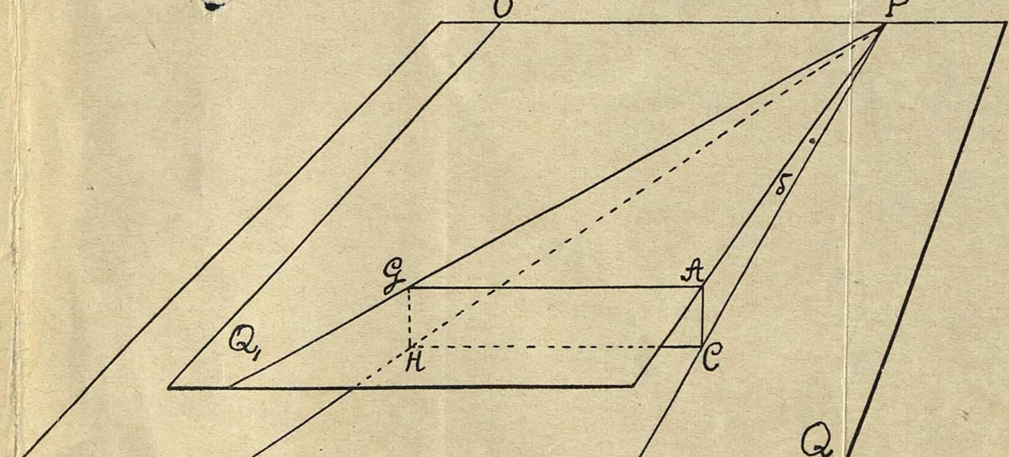
132.

[illegible]

133



134.



23