Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2014/2015**

Analysis III

Vorlesung 61

In diesem Kurs beschäftigen wir uns mit dem „Flächeninhalt“ von ebenen Gebilden und den Volumina von räumlichen Gebilden. Für ein Rechteck setzt man den Inhalt als Produkt der beiden Seiten und für einen Quader als Produkt von Breite, Länge und Höhe an. Die durch den Graphen einer stetigen Funktionen, der x-Achse und zwei dazu senkrechten Geraden eingeschlossene Fläche wird über das Riemann-Integral ein Inhalt zugeordnet. Die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken, Parallelogrammen, des Kreises, der Volumina von Pyramiden, Kegeln und der Kugel sind klassische Themen der Mathematik. Eine intuitive Vorstellung, die die Existenz eines sinnvollen Volumenbegriffs nahelegt, ist, dass wenn man den Körper „wasserdicht“ in eine Flüssigkeit in einem quaderförmigen Becken ganz untertaucht, dass dann das Volumen sich als Grundfläche des Beckens mal gestiegenem Waserstand errechnet. Für Flächen kann man sich vorstellen, dass man die ebenen Figuren ausmalt und der Flächeninhalt proportional zur verwendeten Farbe sein muss, die ihrerseits wiederum proportional zum Höhenschwund im Farbeimer ist. Doch das sind nur Gedankenexperimente, die einen sinnvollen Maßbegriff erahnen lassen, keinesfalls zufriedenstellende Begründungen.

Wir werden im Folgenden die *Maßtheorie* einschließlich der Integrationstheorie entwickeln. Dabei werden insbesondere folgende Fragestellungen betrachten.

- Was ist ein Maß (ein Flächeninhalt, ein Volumen)?
- Welchen Mengen kann man ein Maß zuordnen? Allen Teilmengen des $\mathbb{R}^2$?
- Welches Volumen hat der $\mathbb{R}^n$?
- Welche Rechenregeln gelten für das Volumen?
- Welche Möglichkeiten gibt es, die Volumina zu berechnen?

Die ersten beiden Fragen erweisen sich schon dann als nicht trivial, wenn man ein Rechteck betrachtet. Macht es bspw. einen Unterschied, ob man ein Rechteck mit oder ohne seinem Rand betrachtet? Ändert sich der Inhalt, wenn ich einen Punkt aus dem Inneren herausnehme? Besitzt das „rationale Rechteck“, das nur aus den Punkten des Rechtecks mit rationalen Koordinaten besteht, einen sinnvollen Flächeninhalt? Wie sieht es mit dem „irrationalen Rechteck“ aus? Ist die Summe dieser beiden Flächeninhalte, vorausgesetzt, dass sie existieren, gleich dem Rechtecksinhalt?

Mengensysteme

Es ist nicht möglich, für beliebige Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ein sinnvolles Maß zu definieren. Stattdessen sucht man nach einer möglichst großen Auswahl von Teilmengen, für die ein Maß definiert werden kann. Um über solche Mengensysteme und ihre strukturellen Eigenschaften reden zu können, brauchen wir die folgenden Definitionen.

Definition 61.1. Zu einer Menge M heißt eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ der Potenzmenge ein (Teil)-*Mengensystem* auf M.

Definition 61.2. Ein Teilmengensystem $\mathcal{A}$ auf einer Menge M heißt *Mengen-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
(2) Mit $T \in \mathcal{A}$ gehört auch das Komplement $M \setminus T$ zu $\mathcal{A}$.
(3) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{A}$ ist auch $S \cup T \in \mathcal{A}$.

Statt Mengenalgebra sagt man auch *Mengenring*, doch ist das missverständlich, da auch die weiter unten definierten *Mengen-Präringe* manchmal Mengenringe genannt werden.

Für die Maßtheorie ist das folgende Konzept am wichtigsten.

Definition 61.3. Ein Teilmengensystem $\mathcal{A}$ auf einer Menge M heißt *σ-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
(2) Mit $T \in \mathcal{A}$ gehört auch das Komplement $M \setminus T$ zu $\mathcal{A}$.
(3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}\,.$$

Eine σ-Algebra ist also eine Mengenalgebra, die nicht nur unter endlichen Vereinigungen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Sie ist im Allgemeinen nicht unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen. Die trivialen Beispiele für eine σ-Algebra sind die Potenzmenge und das Mengensystem $\{\emptyset, M\}$. Die Elemente aus der σ-Algebra, also die Teilmengen von M, die zu $\mathcal{A}$ gehören, nennt man auch einfach *messbare Mengen*. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man von *Ereignissen*. Zu einer Teilmenge $A \subseteq M$ heißt die aus $\emptyset, A, M \setminus A, M$ bestehende σ-Algebra die *Ereignisalgebra* zu A.

DEFINITION 61.4. Eine Menge M, auf der eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ erklärt ist, heißt ein *Messraum*.

LEMMA 61.5. *Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf einer Menge M. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.*
(2) *Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $T \setminus S$ zu $\mathcal{A}$.*
(3) *Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch*

$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}\,.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 61.6. □

BEMERKUNG 61.6. Es sei $(M, \mathcal{A})$ ein Messraum und es sei A_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von messbaren Teilmengen. Dann sind auch die Mengen

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcup_{k \geq n} A_k\Big)$$

und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Big(\bigcap_{k \geq n} A_k\Big)$$

messbar, da in beiden Fällen die inneren Mengen messbar sind und damit auch die Gesamtmenge messbar ist. Die erste Menge nennt man auch den *Limes superior* und die zweite den *Limes inferior* der Mengenfolge. Die erste Menge besteht dabei aus allen Elementen aus M, die in unendlich vielen der A_n enthalten sind, und die zweite Menge aus allen Elementen aus M, die in fast allen der A_n enthalten sind

LEMMA 61.7. *Sei M eine Menge und sei $\mathcal{A}_j$, $j \in J$, eine beliebige Familie von σ-Algebren auf M. Dann ist auch der Durchschnitt*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

eine σ-Algebra auf M.

Beweis. Siehe Aufgabe 61.7. □

Aufgrund diesen Lemmas gibt es zu jeder Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ umfasst, nämlich der Durchschnitt über alle $\mathcal{E}$-umfassenden σ-Algebren.

DEFINITION 61.8. Es sei M eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Menge von Teilmengen aus M. Dann nennt man die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält, die von $\mathcal{E}$ *erzeugte σ-Algebra*. Das System $\mathcal{E}$ heißt *Erzeugendensystem* dieser σ-Algebra.

Die folgenden Mengensysteme spielen in Beweisen eine wichtige Rolle.

Definition 61.9. Ein Teilmengensystem $\mathcal{A}$ auf einer Menge M heißt *Dynkin-System*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
(2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ und $S \subseteq T$ gehört auch $T \setminus S$ zu $\mathcal{A}$.
(3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, mit paarweise disjunkten Mengen T_i ist auch
$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}\,.$$

Lemma 61.10. *Sei M eine Menge. Für ein Mengensystem $\mathcal{A}$ auf M sind äquivalent.*

(1) *$\mathcal{A}$ ist ein durchschnittsstabiles Dynkin-System*
(2) *$\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.*

Beweis. Siehe Aufgabe 61.10. □

Da der Durchschnitt von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist, gibt es zu jedem Mengensystem ein davon *erzeugtes Dynkin-System*.

Lemma 61.11. *Sei M eine Menge und $\mathcal{E}$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem auf M. Dann stimmt das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System mit der von $\mathcal{E}$ erzeugten σ-Algebra überein.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra ist. Dazu genügt es aufgrund von Fakt ***** zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ durchschnittsstabil ist. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ mit $T \in \mathcal{D}$ betrachten wir das Mengensystem
$$\mathcal{D}_T = \{S \in \mathcal{D} |\, T \cap S \in \mathcal{D}\}\ .$$
Wir müssen $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$ zeigen, denn dies bedeutet die Durchschnittsstabilität. Eine direkte Überlegung zeigt, dass $\mathcal{D}_T$ ebenfalls ein Dynkin-System ist. Für $E \in \mathcal{E}$ gilt $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$, da $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil ist. Daher ist $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Dann ist aber auch $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_T$ für alle $T \in \mathcal{D}$ und somit generell $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$. □

Definition 61.12. Ein Teilmengensystem $\mathcal{A}$ auf einer Menge M heißt *Mengen-Präring*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

(1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.
(2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $S \setminus T$ zu $\mathcal{A}$.
(3) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{A}$ ist auch $S \cup T \in \mathcal{A}$.

Messbare Abbildungen

Definition 61.13. Es seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei Messräume. Eine Abbildung

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

heißt *messbar* (oder genauer *$\mathcal{A}$–$\mathcal{B}$-messbar*), wenn für jede Teilmenge $T \subseteq N$ mit $T \in \mathcal{B}$ das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ zu $\mathcal{A}$ gehört.

Lemma 61.14. *Für messbare Abbildungen gelten die folgenden Eigenschaften.*

(1) *Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.*
(2) *Jede konstante Abbildung ist messbar.*
(3) *Die Identität ist messbar.*
(4) *Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei σ-Algebren auf einer Menge M. Dann ist die Identität auf M genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{B}$-messbar, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ gilt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 61.12. □

Lemma 61.15. *Es seien $(M, \mathcal{A})$ und $(N, \mathcal{B})$ zwei Messräume und es sei*

$$\varphi\colon M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Es sei $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem für $\mathcal{B}$. Dann ist φ bereits dann messbar, wenn für jede Teilmenge $T \subseteq N$ mit $T \in \mathcal{E}$ das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ zu $\mathcal{A}$ gehört.

Beweis. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{C} = \left\{ T \subseteq N \mid \varphi^{-1}(T) \in \mathcal{A} \right\}.$$

Da das Urbildnehmen mit sämtlichen Mengenoperationen verträglich ist, ist $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra. Da diese das Erzeugendensystem $\mathcal{E}$ umfasst, ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. □

Abbildungsverzeichnis