Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

Arbeitsblatt 25

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 25.1. Ein Bakterium möchte entlang des Äquators die Erde umrunden. Es ist ziemlich klein und schafft am Tag genau 2 Millimeter. Wie viele Tage braucht es für eine Erdumrundung?

Übungsaufgaben

Aufgabe 25.2. Beinhaltet Ihre intuitive Vorstellung einer Zahlengerade, dass es zu jeder Zahl darauf eine natürliche Zahl weiter rechts gibt?

Aufgabe 25.3. Beinhaltet Ihre intuitive Vorstellung einer Zahlengerade, dass es keine positive Zahl gibt, die kleiner als alle Stammbrüche ist?

Aufgabe 25.4. Auf der Zahlengeraden seien zwei Punkte als 0 und 1 markiert. Welche Punkte der Zahlengerade lassen sich, ausgehend von diesen beiden Punkten und mit welchen Methoden, präzise positionieren, markieren, adressieren?

Aufgabe 25.5. Zeige, dass es in einem archimedisch angeordneten Körper zu jedem Element $x \in K$ eine ganze Zahl m mit $m \leq x$ gibt.

Aufgabe 25.6. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die halboffenen Intervalle

$$[n, n+1[= \{x \in K \mid x \geq n \text{ und } x < n+1\}\,,\; n \in \mathbb{Z}\,,$$

eine disjunkte Überdeckung von K bilden.

Aufgabe 25.7. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass es für jedes $s \in K$ eine ganze Zahl q und ein $t \in K$ mit $0 \leq t < 1$ und mit

$$s = q + t$$

gibt.

Aufgabe 25.8. Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor \frac{513}{21} \right\rfloor .$$

Aufgabe 25.9. Berechne die Gaußklammer

$$\left\lfloor -\frac{734}{29} \right\rfloor .$$

Aufgabe 25.10. Es sei

$$n = dq + r$$

das Ergebnis einer Division mit Rest innerhalb der ganzen Zahlen. Zeige, dass

$$q = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

ist.

Aufgabe 25.11.*

Es sei z eine rationale Zahl. Zeige, dass z genau dann ganzzahlig ist, wenn

$$\lfloor -z \rfloor = -\lfloor z \rfloor$$

gilt.

Aufgabe 25.12.*

Es seien x, y rationale Zahlen. Zeige, dass

$$x - \lfloor x \rfloor = y - \lfloor y \rfloor$$

genau dann gilt, wenn es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $y = x + n$ gibt.

Aufgabe 25.13. Runde die folgenden Brüche auf ganze Zahlen.

(1) $\frac{317}{15}$,
(2) $\frac{982}{323}$,
(3) $-\frac{477}{26}$.

Aufgabe 25.14. Führe die folgenden Rechnungen durch, wobei die Angaben als gemischte Brüche zu lesen sind. Auch die Ergebnisse sollen als gemischte Brüche angegeben werden.

(1) $7\frac{4}{9} + 2\frac{6}{7}$,
(2) $8\frac{2}{7} + 4\frac{10}{13}$,
(3) $5\frac{8}{5} \cdot 3\frac{3}{4}$.

Aufgabe 25.15. Wir betrachten positive rationale Zahlen als gemischte Brüche.

a) Zeige, dass bei der Addition von zwei gemischten Brüchen der Bruchterm der Summe nur von den Bruchtermen der Summanden abhängt.

b) Wie sieht dies mit dem ganzen Teil aus?

Aufgabe 25.16. Wie oft muss man eine Strecke der Länge $\frac{7}{4293}$ Meter mindestens hintereinander legen, um einen Kilometer zu erhalten?

Aufgabe 25.17. Wie viele Billionstel braucht man, um ein Milliardstel zu erreichen?

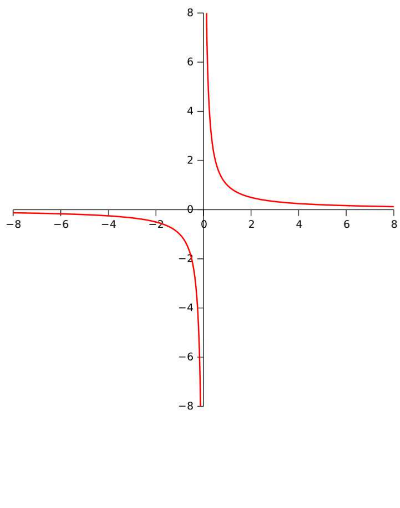
Aufgabe 25.18.*

Im Wald lebt ein Riese, der 8 Meter und 37 cm groß ist, sowie eine Kolonie von Zwergen, die eine Schulterhöhe von 3 cm haben und mit dem Kopf insgesamt 4 cm groß sind. Hals und Kopf des Riesen sind $1,23$ Meter hoch. Auf der Schulter des Riesen steht ein Zwerg. Wie viele Zwerge müssen aufeinander (auf den Schultern) stehen, damit der oberste Zwerg mit dem Zwerg auf dem Riesen zumindest gleichauf ist?

Aufgabe 25.19. Finde eine natürliche Zahl n derart, dass

$$\left(\frac{10001}{10000}\right)^n \geq 1000000$$

ist.



Aufgabe 25.20. Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \setminus \{0\} \longrightarrow K,\, x \longmapsto x^{-1}.$$

Aufgabe 25.21. Es sei K ein angeordneter Körper. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \setminus \{0\} \longrightarrow K,\, x \longmapsto -x^{-1}.$$

Aufgabe 25.22. Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto -\frac{7}{4}x^{-3}.$$

Aufgabe 25.23. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass die Abbildung

$$f\colon K_{\geq -\frac{1}{2}} \longrightarrow K,\, x \longmapsto x^2 + x + 1,$$

streng wachsend ist.

Aufgabe 25.24. Zeige, dass die Funktion

$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\, x \longmapsto x^3 - x,$$

weder wachsend noch fallend ist.

Aufgabe 25.25. Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto |x|\,.$$

Aufgabe 25.26. Es sei K ein angeordneter Körper. Bestimme das Monotonieverhalten der Gaußklammer

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto \lfloor x \rfloor\,.$$

Aufgabe 25.27. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann konstant ist, wenn f gleichzeitig wachsend und fallend ist.

Aufgabe 25.28. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine Abbildung. Zeige, dass f genau dann wachsend ist, wenn die Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto -f(x),$$

fallend ist, und dass dies äquivalent dazu ist, dass die Funktion

$$K \longrightarrow K,\, x \longmapsto f(-x),$$

fallend ist.

Aufgabe 25.29.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es sei

$$f\colon K \longrightarrow K$$

eine bijektive Abbildung mit der Umkehrfunktion f^{-1}. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) f ist genau dann streng wachsend, wenn f^{-1} streng wachsend ist.
(2) f ist genau dann streng fallend, wenn f^{-1} streng fallend ist.

Aufgabe 25.30. Man gebe ein Beispiel für eine streng wachsende Funktion

$$\varphi\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},$$

deren Werte zwischen 0 und 1 liegen.

Aufgabe 25.31. Mustafa Müller will mit Freunden zelten gehen, dafür hat ihm seine Oma eine stattliche Portion Kuchen mitgegeben. Wenn er drei Freunde mitnimmt, so reicht der Kuchen für 8 Tage. Wie lange reicht der Kuchen, wenn er sieben Freunde mitnimmt? Wie lange reicht der Kuchen, wenn er allein geht? Mustafa entschließt sich, mit seiner ganzen Klasse einschließlich der Klassenlehrerin, Frau Maier-Sengupta, zelten zu gehen. Der Kuchenvorrat reicht genau für einen Tag. Wie viele Kinder sind in der Klasse?

Aufgabe 25.32. Wir interessieren uns für alle Rechtecke eines vorgegebenen Flächeninhalts c. Zeige, dass zwischen den Rechtecksseiten ein antiproportionaler Zusammenhang besteht.

Aufgabe 25.33. Es soll eine bestimmte Entfernung zurückgelegt werden. Zeige, dass zwischen der Fahrzeit und der (Durchschnitts-)Geschwindigkeit ein antiproportionaler Zusammenhang besteht.

Aufgabe 25.34. Für ein aufwändiges Projekt hat die Teamleitung 120 Personenjahre angesetzt. Welche ganzzahligen Realisierungen gibt es für dieses Projekt, wenn es spätestens in zwanzig Jahren fertig sein soll und wenn höchstens 50 qualifizierte Mitarbeiter zur Verfügung stehen?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 25.35. (3 Punkte)

Zeige, dass für jede rationale Zahl x die Abschätzungen

$$0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1$$

gelten.

Aufgabe 25.36. (1 Punkt)

Lucy Sonnenschein verbringt einen Urlaubsnachmittag in einem Seebad. Sie hält sich eineinviertel Stunden am Strand auf, dann eine halbe Stunde in der Eisdiele, dann eineinhalb Stunden im Park, sodann wieder zweidreiviertel Stunden am Strand und schließlich 40 Minuten im Café. Wie lange war ihr Nachmittag?

Aufgabe 25.37. (2 Punkte)

Eine kleines Sandkorn hat ein Gewicht von $\frac{13}{2757}$ Gramm. Wie viele Sandkörner muss man nehmen, um eine Sanddüne aufzubauen, die 5906 und eine halbe Tonne wiegt?

Aufgabe 25.38. (3 Punkte)

Untersuche das Monotonieverhalten der Funktion

$$\mathbb{Q} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto -\frac{3}{11}x^{-4}.$$

Aufgabe 25.39. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien Abbildungen

$$f_1, \ldots, f_n \colon K \longrightarrow K$$

gegeben, die jeweils entweder streng wachsend oder streng fallend sind. Es sei k die Anzahl der streng fallenden Abbildungen darunter. Zeige, dass die Hintereinanderschaltung $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ genau dann streng fallend ist, wenn k ungerade ist.

Aufgabe 25.40. (2 Punkte)

Es soll eine Düne aus 300 Tonnen Sand vom Nordseestrand zum Ostseestrand transportiert werden. Zur Erledigung dieser Aufgabe stehen der beauftragten Firma folgende Geräte zur Verfügung: eine Schaufel, mit der man auf einmal 4 kg transportieren kann, eine Schubkarre mit Platz für einen Zentner, ein Bagger, der $1,6$ Tonnen aufladen kann und ein Laster mit einem Fassungsvermögen von 7 Tonnen. Wie oft muss das Gerät jeweils eingesetzt werden, um (mit diesem Gerät allein) den Auftrag zu erfüllen?

Abbildungsverzeichnis