Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 5

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 5.1. Erstelle eine Geradengleichung für die Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die beiden Punkte $(-4,3)$ und $(5,-6)$ verläuft.

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.2.*

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} 3x & & +z & +4w & = & 4 \\ 2x & +2y & & +w & = & 0 \\ 4x & +6y & & +w & = & 2 \\ x & +3y & +5z & & = & 3\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.3. Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,0), (0,1,2) \text{ und } (2,3,4)$$

liegen.

Aufgabe 5.4. Bringe das lineare Gleichungssystem

$$3x-4+5y \,=\, 8z+7x,$$

$$2-4x+z \,=\, 2y+3x+6,$$

$$4z-3x+2x+3 \,=\, 5x-11y+2z-8$$

in Standardgestalt und löse es.

Aufgabe 5.5. Löse über den komplexen Zahlen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{i}x & +y & +(2-\mathrm{i})z & = & 2 \\ & 7y & +2\mathrm{i}z & = & -1+3\mathrm{i} \\ & & (2-5\mathrm{i})z & = & 1\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.6. Es sei K der in Beispiel 3.8 eingeführte Körper mit zwei Elementen. Löse in K das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} x & +y & & = & 1 \\ & y & +z & = & 0 \\ x & +y & +z & = & 0\,. \end{array}$$

Aufgabe 5.7. Finde zu einer komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i} \neq 0$ die inverse komplexe Zahl mit Hilfe eines reellen linearen Gleichungssystems mit zwei Variablen und zwei Gleichungen.

Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ besteht aus allen reellen Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$. Das inverse Element zu $a + b\sqrt{3} \neq 0$ ist $\frac{a}{a^2+3b^2} - \frac{b}{a^2+3b^2}\sqrt{3}$.

Aufgabe 5.8.*

Löse das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $K = \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$:

$$\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ \frac{1}{2} & -2-3\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 4-2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5.9. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} 4x + 7y + 3z & = & 4 \\ 11x + 9y + 13z & = & 9 \\ 6x + 8y + 5z & = & 2 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.10. Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccc} 5x + 6y + 2z & = & 6 \\ 4x + 8y + 9z & = & 5 \\ 11x + 5y + 7z & = & 8 \end{array}$$

mit dem Gleichsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.11. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass alle Koeffizienten ganzzahlig sind.

Aufgabe 5.12. Zeige, dass es zu jedem linearen Gleichungssystem über $\mathbb{Q}$ ein dazu äquivalentes Gleichungssystem mit der Eigenschaft gibt, dass darin der Betrag aller Koeffizienten kleiner als 1 ist.

Aufgabe 5.13. Zeige durch ein Beispiel, dass das durch die drei Gleichungen I,II,III gegebene lineare Gleichungssystem nicht zu dem durch die drei Gleichungen I-II, I-III, II-III gegebenen linearen Gleichungssystem äquivalent sein muss.

Aufgabe 5.14.*

Aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 werden verschiedene Produkte P_1, P_2, P_3, P_4 hergestellt. Die folgende Tabelle gibt an, wie viel von den Rohstoffen jeweils nötig ist, um die verschiedenen Produkte herzustellen (jeweils in geeigneten Einheiten).

	R_1	R_2	R_3
P_1	6	2	3
P_2	4	1	2
P_3	0	5	2
P_4	2	1	5

a) Erstelle eine Matrix, die aus einem Dreiertupel von Produktmengen die benötigten Rohstoffe berechnet.

b) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Produkt in einem Monat produziert werden soll.

	P_1	P_2	P_3	P_4
	6	4	7	5

Welche Rohstoffmengen werden dafür benötigt?

c) Die folgende Tabelle zeigt, wie viel von welchem Rohstoff an einem Tag angeliefert wird.

	R_1	R_2	R_3
	12	9	13

Welche Produkttupel kann man daraus ohne Abfall produzieren?

Aufgabe 5.15. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ein n-Tupel über einem Körper K, und es sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ein Variablentupel. Welche Besonderheiten erfüllt das lineare Gleichungssystem

$$Dx = c,$$

und wie löst man es?

Aufgabe 5.16. Löse die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

simultan.

Aufgabe 5.17. Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

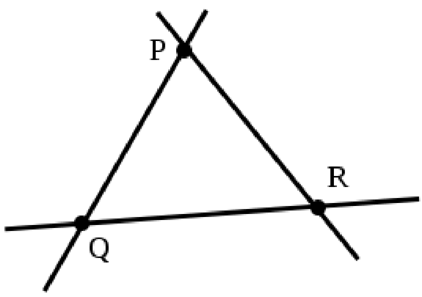
$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y &\geq 0, \\ x + y &\leq 1, \end{aligned}$$

gegeben. Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

Aufgabe 5.18. Es sei

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &\geq c_1, \\ a_2x + b_2y &\geq c_2, \\ a_3x + b3y &\geq c_3, \end{aligned}$$

ein lineares Ungleichungssystem, dessen Lösungsmenge ein Dreieck sei. Wie sieht die Lösungsmenge aus, wenn man in jeder Ungleichung $\geq$ durch $\leq$ ersetzt?



AUFGABE 5.19.*

Beweise das Superpositionsprinzip für lineare Gleichungssysteme.

AUFGABE 5.20.*

Bestimme in Abhängigkeit vom Parameter $a \in \mathbb{R}$ den Lösungsraum $L_a \subseteq \mathbb{R}^3$ der linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x + ay + (1-a)z &= 0, \\ 2ax + a^2y + 3z &= 0. \end{aligned}$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 5.21. (4 Punkte)

Löse das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} x & +2y & +3z & +4w & = & 1 \\ 2x & +3y & +4z & +5w & = & 7 \\ x & & +z & & = & 9 \\ x & +5y & +5z & +w & = & 0\,. \end{array}$$

AUFGABE 5.22. (3 Punkte)

Betrachte im $\mathbb{R}^3$ die beiden Ebenen

$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + 4y + 5z = 2\right\}$ und $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = -1\right\}$.

Bestimme die Schnittgerade $E \cap F$.

AUFGABE 5.23. (3 Punkte)

Bestimme eine Ebenengleichung für die Ebene im $\mathbb{R}^3$, auf der die drei Punkte

$$(1,0,2), (4,-3,2) \text{ und } (2,1,-1)$$

liegen.

AUFGABE 5.24. (4 Punkte)

Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} 2x & -ay & & = & -2 \\ ax & & +3z & = & 3 \\ -\frac{1}{3}x & +y & +z & = & 2 \end{array}$$

über den reellen Zahlen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$. Für welche a besitzt das Gleichungssystem keine Lösung, eine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

Aufgabe 5.25. (3 Punkte)

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcr} 5x \quad - y + 7z &=& 6 \\ 3x + 6y + 3z &=& -2 \\ 8x + 8y + 7z &=& 3 \end{array}$$

mit dem Einsetzungsverfahren.

Aufgabe 5.26. (4 (2+2) Punkte)

Ein lineares Ungleichungssystem sei durch die Ungleichungen

$$\begin{aligned} x &\geq 0, \\ y + x &\geq 0, \\ -1 - y &\leq -x, \\ 5y - 2x &\geq 3, \end{aligned}$$

gegeben.

a) Skizziere die Lösungsmenge dieses Ungleichungssystems.

b) Bestimme die Eckpunkte der Lösungsmenge.

Abbildungsverzeichnis