Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 30

Wer Schmetterlinge träumen hört, der weiß, wie Wolken riechen

Novalis

Affine Erzeugendensysteme

Lemma 30.1. *Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V. Dann ist der Durchschnitt von einer Familie $F_i \subseteq E$, $i \in I$, von affinen Unterräumen wieder affin.*

Beweis. Wenn der Durchschnitt leer ist, so gilt die Aussage nach Definition. Sei $P \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Wir können die affinen Räume als

$$F_i = P + U_i$$

mit Untervektorräumen

$$U_i \subseteq V$$

schreiben. Sei

$$U = \bigcap_{i \in I} U_i,$$

was nach Lemma 6.16 (1) ein Untervektorraum ist. Wir behaupten

$$\bigcap_{i \in I} F_i = P + U.$$

Aus $Q \in \bigcap_{i \in I} F_i$ folgt

$$Q = P + u$$

mit $u \in \bigcap_{i \in I} U_i$, so dass $Q \in P + U$ liegt. Umgekehrt folgt aus $Q \in P + U$ direkt $Q \in P + U_i = F_i$. □

Insbesondere gibt es zu jeder Teilmenge $T \subseteq E$ in einem affinen Raum E einen kleinsten affinen Unterraum, der T umfasst.

Lemma 30.2. *Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V und $T \subseteq E$ eine Teilmenge. Dann besteht der kleinste affine Unterraum $F \subseteq E$ von E, der T umfasst, aus allen baryzentrischen Kombinationen*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i \text{ mit } P_i \in T \text{ und } \sum_{i=1}^{n} a_i = 1\,.$$

Beweis. Die angegebene Menge enthält die einzelnen Punkte aus T, da man als baryzentrisches Koordinatentupel insbesondere ein Standardtupel nehmen kann. Daher ergibt sich die Behauptung aus Lemma 29.14 und Aufgabe 29.17. □

Definition 30.3. Es sei E ein affiner Raum über dem K-Vektorraum V und sei $F \subseteq E$ ein affiner Unterraum. Eine Familie von Punkten $P_i \in F$, $i \in I$, heißt *affines Erzeugendensystem* von F, wenn F der kleinste affine Unterraum von E ist, der alle Punkte P_i umfasst.

Ein Punkt erzeugt als affinen Punkt den Punkt selbst, zwei Punkte erzeugen die Verbindungsgerade.

Affine Unabhängigkeit

Definition 30.4. Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei

$$P_1, \ldots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E. Man nennt die Punktfamilie *affin-unabhängig*, wenn eine Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i P_i = \sum_{i=1}^{n} b_i P_i$$

mit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 1$$

nur bei

$$a_i = b_i$$

für alle $i = 1, \ldots, n$ möglich ist.

Lemma 30.5. *Es sei E ein affiner Raum über einem K-Vektorraum V und es sei*

$$P_1, \ldots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

(1) *Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ sind affin unabhängig.*
(2) *Für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ist die Vektorfamilie*
$$\overrightarrow{P_i P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_i P_n}$$
linear unabhängig.
(3) *Es gibt ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ derart, dass die Vektorfamilie*
$$\overrightarrow{P_i P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \ldots, \overrightarrow{P_i P_n}$$
linear unabhängig ist.

(4) *Die Punkte $P_1, \ldots, P_n$ bilden in dem von ihnen erzeugten affinen Unterraum eine affine Basis.*

Beweis. Siehe Aufgabe 30.2. $\square$

Affine Abbildungen

Definition 30.6. Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den Vektorräumen V bzw. W. Eine Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

heißt *affin* (oder *affin-lineare Abbildung*), wenn es eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

mit

$$\psi(P+v) = \psi(P) + \varphi(v)$$

für alle $P \in E$ und $v \in V$ gibt.

Es genügt, diese Bedingung für einen einzigen Punkt und alle Vektoren zu überprüfen, siehe Aufgabe 31.2.

Bemerkung 30.7. Eine Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

ist genau dann affin-linear mit linearem Anteil φ, wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times E & \stackrel{+}{\longrightarrow} & E \\ \varphi \times \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ W \times F & \stackrel{+}{\longrightarrow} & F \end{array}$$

kommutiert. Zu einer affin-linearen Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

ist der lineare Anteil (bei $E \neq \emptyset$)

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eindeutig bestimmt. Es ist nämlich notwendigerweise

$$\varphi(v) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(P+v)}$$

für einen beliebigen Punkt $P \in E$. Daher bezeichnen wir den linearen Anteil mit ψ_0. Für zwei Punkte $P, Q \in E$ gilt insbesondere

$$\psi_0(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}.$$

Lemma 30.8. *Es sei K ein Körper und seien E, F und G affine Räume über den Vektorräumen U, V bzw. W. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Identität*

$$\mathrm{Id}_E \colon E \longrightarrow E$$

ist affin-linear.

(2) *Die Verknüpfung von affin-linearen Abbildungen*

$$E \longrightarrow F$$

und

$$F \longrightarrow G$$

ist wieder affin-linear.

(3) *Zu einer bijektiven affin-linearen Abbildung*

$$\psi \colon E \longrightarrow F$$

ist auch die Umkehrabbildung affin-linear.

(4) *Zu $v \in V$ ist die Verschiebung*

$$E \longrightarrow E,\ P \longmapsto P + v,$$

affin-linear.

(5) *Eine lineare Abbildung ist affin-linear.*

Beweis. Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition. □

Lemma 30.9. *Es seien E und F affine Räume über einem Körper K und sei*

$$\psi \colon E \longrightarrow F$$

eine Abbildung. Dann ist ψ genau dann affin-linear, wenn für jede baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ mit $P_i \in E$ die Gleichheit

$$\psi \left(\sum_{i \in I} a_i P_i \right) = \sum_{i \in I} a_i \psi(P_i)$$

gilt.

Beweis. Seien V und W die Vektorräume zu E bzw. zu F. Sei zunächst ψ affin-linear mit linearem Anteil

$$\psi_0 \colon V \longrightarrow W$$

und eine baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ mit $P_i \in E$ und $\sum_{i \in I} a_i = 1$ gegeben. Dann ist (mit einem beliebigen Punkt $Q \in E$)

$$\begin{aligned} \psi \left(\sum_{i \in I} a_i P_i \right) &= \psi \left(Q + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i} \right) \\ &= \psi(Q) + \psi_0 \left(\sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i} \right) \\ &= \psi(Q) + \sum_{i \in I} a_i \psi_0 \left(\overrightarrow{QP_i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \psi(Q) + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{\psi(Q)\psi(P_i)} \\ &= \sum_{i \in I} a_i \psi(P_i) \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt die Abbildung ψ mit den baryzentrischen Kombinationen verträglich. Wir setzen

$$\varphi(v) := \overrightarrow{\psi(P)\psi(P+v)}$$

für $v \in V$. Wir zeigen zunächst, dass dies unabhängig von dem gewählten Punkt P ist. Es ist

$$(P+v) - (Q+v) + Q$$

eine baryzentrische Kombination für den Punkt P, siehe Aufgabe 30.20. Daher ist in F

$$\psi(P+v) - \psi(Q+v) + \psi(Q) = \psi(P).$$

Somit ist in V

$$\overrightarrow{\psi(P)\psi(P+v)} - \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q+v)} + \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} = 0$$

und daher

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\psi(P)\psi(P+v)} &= \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q+v)} - \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} \\ &= \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q+v)} + \overrightarrow{\psi(Q)\psi(P)} \\ &= \overrightarrow{\psi(Q)\psi(Q+v)}. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass φ linear ist. Für $u = \overrightarrow{PQ}$ und $v = \overrightarrow{PR}$ ist

$$\begin{aligned} \psi(P) + \varphi(au+bv) &= \psi(P + au + bv) \\ &= \psi\left(P + a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{PR}\right) \\ &= \psi((1-a-b)P + aQ + bR) \\ &= (1-a-b)\psi(P) + a\psi(Q) + b\psi(R) \\ &= \psi(P) + a\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} + b\overrightarrow{\psi(P)\psi(R)} \\ &= \psi(P) + a\varphi\left(\overrightarrow{PQ}\right) + b\varphi\left(\overrightarrow{PR}\right) \\ &= \psi(P) + a\varphi(u) + b\varphi(v). \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(au+bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

□

DEFINITION 30.10. Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den K-Vektorräumen V bzw. W. Eine bijektive affine Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

heißt *affiner Isomorphismus*.

In einem gewissen Sinne setzen sich affin-lineare Abbildungen aus Verschiebungen und aus linearen Abbildungen zusammen.

Lemma 30.11. *Es sei K ein Körper und sei E ein affiner Raum über dem Vektorraum V. Es sei $P \in E$. Dann entsprechen sich die affin-linearen Abbildungen*

$$\psi\colon E \longrightarrow E$$

mit P als Fixpunkt und die linearen Abbildungen

$$\varphi\colon V \longrightarrow V.$$

Beweis. Die Zuordnung ist durch $\psi \mapsto \psi_0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es zu jeder linearen Abbildung $\varphi\colon V \to V$ eine eindeutige affin-lineare Abbildung

$$\psi\colon E \longrightarrow E$$

mit diesem linearen Anteil gibt. Wegen

$$\psi(Q) = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = P + \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

kann es nur eine affin-lineare Abbildung geben, und durch diese Vorschrift kann man die Abbildung auch definieren. $\square$

Der folgende Satz heißt *Festlegungssatz für affine Abbildungen* und ist analog zu Satz 10.10.

Satz 30.12. *Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den Vektorräumen V bzw. W. Es sei P_i, $i \in I$, eine affine Basis von E und Q_i, $i \in I$, eine Familie von Punkten in F. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte affin-lineare Abbildung*

$$\psi\colon E \longrightarrow F$$

mit

$$\psi(P_i) = Q_i$$

für alle $i \in I$.

Beweis. Es sei $i_0 \in I$. Es gibt nach Satz 10.10 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

mit

$$\varphi(\overrightarrow{P_{i_0}P_i}) = \overrightarrow{Q_{i_0}Q_i},$$

für alle $i \in I \setminus \{i_0\}$. Dann ist

$$\psi(R) = Q_{i_0} + \varphi(\overrightarrow{P_{i_0}R})$$

eine affin-lineare Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft. Umgekehrt ist eine solche affine Abbildung ψ durch den linearen Anteil und das Verhalten auf einem einzigen Punkt eindeutig festgelegt, so dass

$$\psi_0 = \varphi$$

sein muss. $\square$

KOROLLAR 30.13. *Es sei K ein Körper und sei E ein affiner Raum mit einer affinen Basis $P_1, \ldots, P_n, P_{n+1}$. Dann ist die Abbildung*

$$E \longrightarrow K^{n+1},\ P \longmapsto (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}),$$

wobei a_i die baryzentrischen Koordinaten von P sind, eine affin-lineare Abbildung, die eine affine Isomorphie zwischen E und dem affinen Unterraum $F \subset K^{n+1}$ stiftet, der durch

$$F = \left\{ x \in K^{n+1} |\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$$

gegeben ist. Der Vektorraum zu F ist

$$W = \left\{ x \in K^{n+1} |\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}.$$

Beweis. Nach Satz 30.12 gibt es eine eindeutig bestimmte affin-lineare Abbildung

$$E \longrightarrow K^{n+1},$$

die P_i auf den i-ten Standardvektor e_i abbildet. Dabei wird nach Lemma 30.9

$$P = \sum_{i=1}^{n+1} a_i P_i$$

auf

$$\sum_{1=1}^{n+1} a_i e_i$$

abgebildet. Wegen

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$$

gehört dieser Punkt zu F. Die Bijektivität ist klar. $\square$