Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2019/2020

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 17

Aus großer Macht folgt große Verantwortung

Ben Parker

Die Taylor-Formel

Brook Taylor (1685-1731)

Bisher haben wir nur Potenzreihen der Form $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ betrachtet; die Variable x darf jetzt auch durch die „verschobene Variable“ $x-a$ ersetzt werden, um das lokale Verhalten im *Entwicklungspunkt* a beschreiben zu können. Konvergenz bedeutet in diesem Fall, dass es ein $\epsilon > 0$ derart gibt, dass für

$$x \in]a-\epsilon, a+\epsilon[$$

die Reihe konvergiert. In dieser Situation ist die durch die Potenzreihe dargestellte Funktion wieder differenzierbar und die Ableitung wird durch die summmandenweise genommene Ableitung wie in Satz 16.1 beschrieben. Zu einer konvergenten Potenzreihe

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen im Punkt a lassen sich direkt aus der Potenzreihe ablesen, und zwar ist

$$f^{(n)}(a) = n!c_n.$$

Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

Definition 17.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[1] n zu f im Entwicklungspunkt a.

Es ist also

$$T_{a,0}(f)(x) := f(a)$$

die konstante Approximation,

$$T_{a,1}(f)(x) := f(a) + f'(a)(x-a)$$

die lineare Approximation, wie sie im Konzept der linearen Approximierbarkeit vorkommt,

$$T_{a,2}(f)(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

die quadratische Approximation,

$$T_{a,3}(f)(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3$$

die Approximation vom Grad 3, u.s.w. Das Taylor-Polynom zum Grad n ist dasjenige (eindeutig bestimmte) Polynom vom Grad $\leq n$, das mit f an der Stelle a bis zur n-ten Ableitung übereinstimmt.

Satz 17.2. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

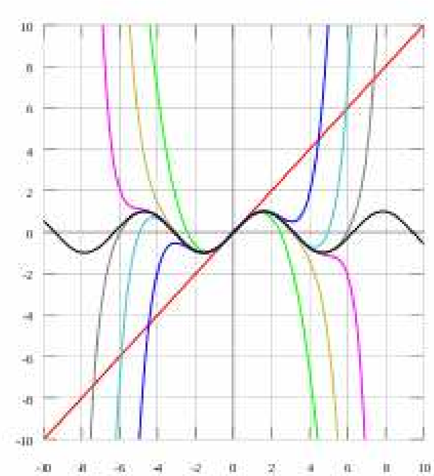
eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

[1] Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

KOROLLAR 17.3. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{B}{(n+1)!} \left|x-a\right|^{n+1}.$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 11.13, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 17.2. □

Kriterien für Extrema

In der fünfzehnten Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine notwendige Bedingung für die Existenz eines lokalen Extremums einer differenzierbaren Funktion ist, dass die Ableitung an der in Frage stehenden Stelle gleich 0 ist. Wir formulieren nun ein wichtiges hinreichendes Kriterium, das auf die höheren Ableitungen Bezug nimmt.

SATZ 17.4. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein lokales Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c (abhängig von x) zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen bei $x = a$ (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ für alle $x \neq a$ in der Umgebung ist. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. □

Ein Spezialfall davon ist, dass bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) > 0$ ein isoliertes Minimum und bei $f'(a) = 0$ und $f''(a) < 0$ ein isoliertes Maximum vorliegt.

Die Taylor-Reihe

Definition 17.5. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall,

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine unendlich oft differenzierbare Funktion und $a \in I$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 17.6. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *eine Potenzreihe, die auf dem Intervall* $]-r,r[$ *konvergiere, und es sei*

$$f\colon\ ]-r,r[\longrightarrow \mathbb{R}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f *unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt* 0 *stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.*

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 16.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt 0. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in 0 den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 16.1. □

Beispiel 17.7. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0\,, \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ (und der rechtsseitige Differenzenquotient im Nullpunkt) die Form $p\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets 0 ist (siehe Aufgabe 17.17 und Aufgabe 17.18.). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert 0 und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

Potenzreihenansatz

Die Taylor-Reihe einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion liefert häufig eine gute Approximation für die Funktion. Definitionsgemäß muss man zur Berechnung der Taylor-Reihe die Funktion ableiten. Für „implizit“ gegebene Funktionen kann man sie aber auch direkt bestimmen, was wir hier anhand typischer Beispiele demonstrieren. Als Faustregel gilt dabei, dass man lediglich die n-ten Ableitungen der die Funktion definierenden Daten kennen muss, um das n-te Taylor-Polynom der Funktion zu bestimmen. Wir verzichten weitgehend auf Konvergenzüberlegungen. Wenn aber die Daten durch Potenzreihen gegeben sind, so konvergieren die im Folgenden beschriebenen Taylor-Reihen auf einem gewissen Intervall und stellen eine Funktion dar.

Bemerkung 17.8. Es seien

$$f\colon\ I \longrightarrow J$$

und

$$g\colon J \longrightarrow \mathbb{R}$$

Funktionen, für die die Taylor-Polynome in den Entwicklungspunkten $a \in I$ und $b := f(a) \in J$ bis zum Grad n bekannt seien (insbesondere seien also diese Funktionen bis zur Ordnung n differenzierbar). Dann ist die hintereinandergeschaltete Funktion

$$g \circ f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

bis zur Ordnung n differenzierbar. Das zugehörige Taylor-Polynom lässt sich direkt berechnen: Sei dazu $S = \sum_{i=0}^{n} c_i(x-a)^i$ das Taylor-Polynom zu f und $T = \sum_{j=0}^{n} d_j(y-b)^j$ das Taylor-Polynom zu g. Dann stimmt das Taylor-Polynom von $g \circ f$ bis zum Grad n mit dem Polynom $T \circ S$ bis zum Grad n überein (das Polynom $T \circ S$ hat im Allgemeinen einen Grad $> n$. Man denke an $f(x) = x^2$ und $g(y) = y^2$ und $n = 2$). D.h. man muss in T überall y durch S ersetzen, durch Umsortieren ein Polynom in $x - a$ erhalten und davon die Monome vom Grad $\geq n+1$ weglassen (diese Monome muss man also nicht ausrechnen).

Bemerkung 17.9. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine n-fach differenzierbare Funktion, für die das Taylor-Polynom im Entwicklungspunkt $a \in I$ bis zum Grad n bekannt sei und für die $f(a) \neq 0$ sei. Dann ist die Funktion $1/f$ auf einem offenen Intervall um a definiert und nach Lemma 14.7 (4) differenzierbar in a. Aufgrund von Satz 9.13 gilt (für $|x| < 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

bzw.

$$\frac{1}{x} = \sum_{i=0}^{\infty} (1-x)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (x-1)^i$$

d.h. für die Funktion $\frac{1}{x}$ ist die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt 1 bekannt. Wir ersetzen f durch $h = \frac{1}{f(a)} f$, so dass $h(a) = 1$ gilt. Dann kann man die Funktion $1/h$ als die Verknüpfung von h mit der Funktion $\frac{1}{x}$ schreiben. Daher erhält man wegen Bemerkung 17.8 das Taylor-Polynom bis zum Grad n von $1/h$, indem man in $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i(x-1)^i$ das Taylor-Polynom (bis zum Grad n) von h im Entwicklungspunkt a einsetzt und beim Grad n abschneidet. Das Taylor-Polynom von $1/f$ erhält man, indem man durch $f(a)$ teilt.

Beispiel 17.10. Wir möchten die Taylor-Reihe bis zum Grad 6 von $\frac{1}{\cos x}$ im Entwicklungspunkt 0 gemäß Bemerkung 17.9 bestimmen. Nach Definition 13.12 ist

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots \\ &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 \ldots . \end{aligned}$$

Zur Berechnung des Taylor-Polynoms bis zum Grad 6 braucht man nur die angeführte Entwicklung des Kosinus bis zum Grad 6. Das Taylorpolynom bis zum Grad 6 von $1/\cos x$ im Nullpunkt ist somit

$$\begin{aligned} & 1 - \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^2 \\ & -\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^3 \\ = \; & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{24}x^6 + \cdots - \frac{1}{8}x^6 + \ldots \\ = \; & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{7}{24}x^4 - \frac{121}{720}x^6 . \end{aligned}$$

Dabei wurden nur die für den Grad 6 relevanten Monome ausgerechnet.

Bemerkung 17.11. Es sei

$$f\colon I \longrightarrow J$$

(I, J seien reelle Intervalle) eine bijektive, n-mal differenzierbare Funktion, und in einem festen Punkt $a \in I$ gelte $f'(a) \neq 0$. Nach Satz 14.9 ist die Umkehrfunktion

$$g = f^{-1}\colon J \longrightarrow I$$

ebenfalls differenzierbar. Die Taylorreihe bis zum Grad n der Umkehrfunktion g kann man aus der Taylorreihe S bis zum Grad n von f berechnen. Man macht dazu ausgehend von $f \circ g = \mathrm{Id}$ den Ansatz

$$S \circ T \overset{!}{=} x.$$

Dabei steht rechts die Taylor-Reihe der Identität, und links muss man das zu bestimmende Polynom T mit unbestimmten Koeffizienten ansetzen und in das Polynom S einsetzen (die Gleichung kann nicht als eine polynomiale Identität gelten, sondern nur, wenn man Terme vom Grad $\geq n+1$ ignoriert). Der Einfachheit halber sei $a = 0$ und $f(a) = 0$. Es sei $S = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ (mit $a_1 \neq 0$) vorgegeben und $T = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ gesucht. Dies führt zur Gesamtbedingung

$$\begin{aligned} x &= S \circ T \\ &= a_1T + a_2T^2 + \cdots + a_nT^n \\ &= a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n) + a_2(b_1x + \cdots + b_nx^n)^2 + \\ &\quad \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n)^n . \end{aligned}$$

Damit erhält man die Einzelbedingungen (durch Koeffizientenvergleich zu jedem Grad $\leq n$)

$$1 = a_1b_1,$$

$$0 = a_1b_2 + a_2b_1^2,$$

$$0 \;=\; a_1b_3 + 2a_2b_1b_2 + a_3b_1^3,$$

aus denen man sukzessive die Koeffizienten $b_1, b_2, b_3, \ldots$ berechnen kann.

Abbildungsverzeichnis