復興初級中學教科書

幾ㄐㄧ　何ㄏㄜˊ

下　冊

余介石　徐子豪編著
段　育　華　校　訂

國民政府教育部審定

普及本

商務印書館發行

復興初級中學教科書

幾ㄐㄧ　何ㄏㄜˊ

下　册

余介石 徐子豪編著
段育華校訂

商務印書館發行

幾何學

目　次

下　册

初級中學教科書

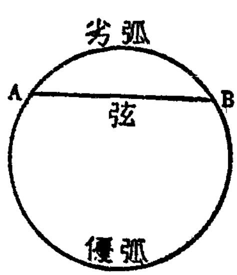
幾何學下冊

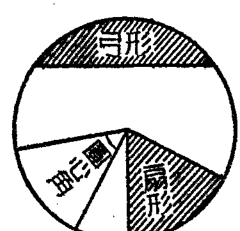
第六編 圓和軌跡

圓

127. 關於圓的要件. 複習§76.

圓周的一段叫做弧(Arc),圓上二點,把圓分爲長短二弧,長的叫優弧 (Major arc),短的叫劣弧 (Minor arc). 初等幾何學中所講二點間弧,常指劣弧而言. 連接一弧二端

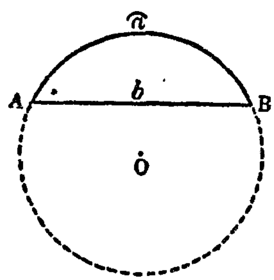




的線段,叫做弦(Chord). 弦和所張弧合成圓形叫弓形(Segment).

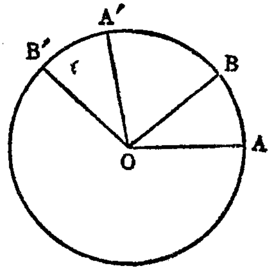
二半徑的夾角,叫圓心角(Central angle). 二半徑同所抱弧合成的圖形,叫做扇形(Sector).

128. 圓和弧的記法. 圓的記號是⊙,其後附記圓心,如下圖可記爲⊙O. 弧的記

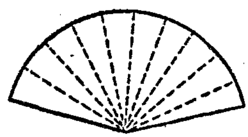


法,和線段相做,可用二個大寫字母,或一小寫字母表示,但字母上須加一︵號如上圖中$\overset{\frown}{AB}$或$\overset{\frown}{a}$.

129. 弧和角的度量. 將一扇形OAB,不變O點位置而旋轉,到扇形OA′B′的位置. 則OB與OB′疊合, OA與OA′疊合, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{A'B'}$在同圓上,所以也完全疊合. 故



在同圓或等圓內,如二圓心角相等,則所抱的弧也等;逆言之,如二弧相等,則所對的二圓心角也相等.



將一弧分爲若干等分,連接自各等分點到圓心的半徑,則圓心角也被分成同數的等分. 反過來說,等分一圓心角的諸半徑,也必等分弧. 在特例分周角爲360等分,每分稱爲1度,這時圓也被分爲360等分,每分也稱爲1度,記號都是°,如30°, 40°. 但須注意每度弧的長短,和半徑的長短有關,不比角的大小,與邊無涉.

如一角和一弧有相同度數,我們稱這角被那弧所度. 由上面所說的理,又可見

圓心角被對弧所度.

這條定理,是角與弧各種關係的基礎.

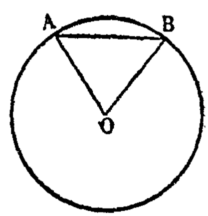
習題三四

1. 用量角器作已知度數的角,是根據什麼道理?

*2. 一直徑所成的圓心角是幾度? 所對的弧是全圓的幾分之幾? 這弧叫做什麼(參看習題四第7題)?

*3. 證明互相垂直的二直徑,分圓爲四等弧.

註. 這弧叫做四分弧(Quadrant).



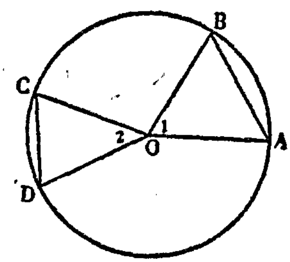
*4. 如AB弧等於半徑,證明$\widehat{AB}$爲全圓六分之一.

*5. 在$\odot O$中,已知$\angle AOB=m^\circ$, 求$\angle OAB$的度數.

6. 如$\angle APB$的度數等於$\widehat{AB}$度數, P點是不是卽爲圓心. 在什麼時候,才必爲圓心?

130. 圓心角,弧,弦三要件的關係. 由圓心角被弧所度的理,立知

(一) 在同圓或等圓裏，圓心角大的所對的弧也大,小的所對的弧也小;逆言之,大弧所對的圓心角大,小弧所對的圓心角小.



在上圖中

(1) 如 $\angle 1 > \angle 2$,

則 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$.

(2) 如 $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$,

則 $\angle 1 > \angle 2$.

註. 等圓的情形也是一樣,學生試自將圖補出

在$\triangle OAB$, $\triangle OCD$中有二組對應等邊,按全等與非全等三角形各定理,再加(一)的關係,即得

(二) 在同圓或等圓裏，等弧所對的弦也等,大弧所對的弦也大;逆言之,等弦所對的弧也等,大弦所對的弧也大.

在上圖中

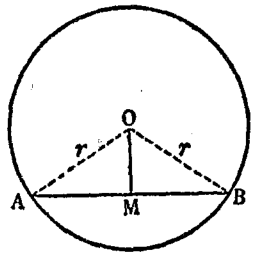
(1) 如 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, 則 $AB=CD$,

如 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$, 則 $AB>CD$,

(2) 如 $AB=CD$, 則 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$,

如 $AB>CD$, 則 $\overset{\frown}{AB}>\overset{\frown}{CD}$.

以上各理的證明,學生宜自己補出.



131. 垂徑分弦定理. 從圓心到弦上的垂線,必平分這弦.

[假設] 在⊙O中 $OM\perp AB$.

[求證] $AM=MB$.

[解析] $\triangle OMA$, $\triangle OMB$ 是何種△?其中有什麼對應相等的元素? 是不是全等形?

[證明] 連結 OA, OB 二半徑,因原設 $OM\perp AB$,故得二個直角三角形 rt. $\triangle OMA$, rt. $\triangle OMB$. 且

OM 是公共邊, $OA=OB=r$ (等邊半徑定理)

$\therefore$ rt. $\triangle OMA\equiv$rt. $\triangle OMB$ (全等rt.△定理二)

即 $AM=MB$.

系一. 圓心與一弦中點聯線,必與這弦垂直.

系二. 一弦的平分垂直線,必過圓心.

這二系均可由垂線公理一二來證.

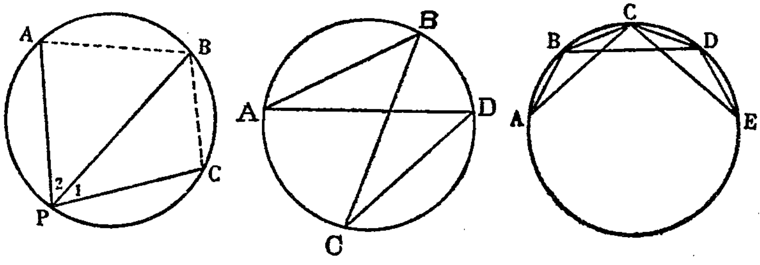
系三. 從圓心到弦上的垂線,平分對這弦線的圓心角.

習題三五

1. 下左圖裏, PA=PC, ∠1<∠2, 試證 $\widehat{AB}>\widehat{BC}$.

2. 下中圖裏, AB=CD, 試證 AD=BC.

3. 下右圖裏, AB=BC=CD=DE, 試證 AC=BD=CE.

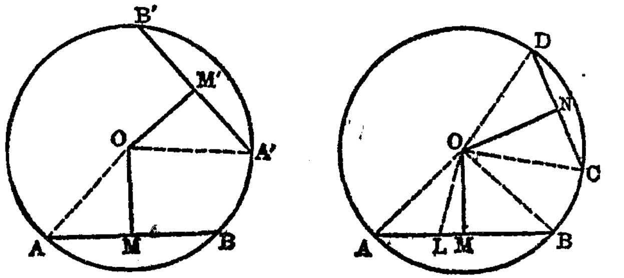


*4. 證明: 平分一弦的半徑,也平分這弦所對的弧.

*5. 證明: 連結一弦中點和其所對弧中點的直線,必經過圓心.

6. 證明圓中一直徑如平分一弦,必平分與這弦平行的一切諸弦.

132. 弦心距定理. 同圓或等圓裏,等弦距圓心等遠,大弦距圓心較近.



(1) (2)

[假設] (1) AB=A'B' (左圖) (2) AB>CD (右圖)

[求證] (1) OM=OM' (左圖) (2) OM<ON (右圖)

[解析] (1) 證明 rt. △OMA≡rt. △OM'A'(看 §131 解析)

(2) 按假設 AB>CD, 則 AM 與 CN 的長短如何? 因此可在 AM 中取 L, 使 AL=CN. 又 $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ 二弧大小如何?

因此可否推斷,次列各組角的大小: (一) ∠AOB, ∠COD (二) ∠AOM, ∠CON (三) ∠OAM, ∠OCN? 再就 △OAL, △OCN 來比較 OL 與 ON, 幷注意 OL>OM.

[證明] (1) $AM=\frac{1}{2}AB$, $A'M'=\frac{1}{2}A'B'$ (垂徑分弦)

而假設 AB=A'B' ∴ AM=A'M' (普通公理)

連接 OA, OA′ 二半徑,成 rt. $\triangle OMA$, rt. $\triangle OM'A'$, 其中又有 $OA=OA'$.

$\therefore$ rt.$\triangle OMA \equiv$ rt.$\triangle OM'A'$ 而 $OM=OM'$ (rt.△ 定理二)

(2) 因 $\frac{1}{2}AB>\frac{1}{2}CD$. 卽 $AM>CN$, 故可取 L, 使 $AL=CN$.

連接 $OA=OC$ 二半徑,則 $\triangle OAL$, $\triangle OCN$ 中,已有二組對應等邊,今試比較 $\angle OAL$, $\angle OCN$ 二夾角.

因 $AB>CD$, 故 $\angle AOB>\angle COD$ (圓的要件關係一)

但 $\angle AOM=\frac{1}{2}\angle AOB$, $\angle CON=\frac{1}{2}\angle COD$

$\therefore$ $\angle AOM>\angle CON$ (垂徑分弦系三)

且 $\angle OAM+\angle AOM=\angle CON+\angle OCN=$ rt.$\angle$ (△內角和系四).

$\therefore$ $\angle OAM<\angle OCN$, 卽 $\angle OAL<\angle OCN$

$\therefore$ $OL<ON$ (非全等△定理一)

但 $OL>OM$ (同上系)

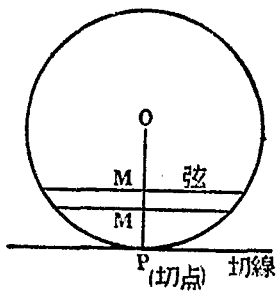
$\therefore$ $OM<ON$ (不等量公理)

133. 弦心距定理的逆定理. 試用轉換法,卽可證得上理的.

逆定理. 同圓或等圓裏,距圓心等遠的弦必等.距圓心較近的弦大.

凡是一條定理裏,如同時包括等於,大於,小於三種情形,則用轉換法都能證明其逆理必定成立. 像§130內的(一)(二)兩條中,同時包括正逆二定理,其所以都能成立的原因,卽如上述.

134. 切線. 在⊙O的半徑OP內取一



點M,而作過M與OP垂直的弦. 由上二節的理,可見OM的長漸加時,這弦的長漸減. OM的長最多能等於OP,那時弦的長必縮爲烏有. 換句話說,過P點而與OP垂直的線,與這圓只有一交點. 這條直線,叫做⊙O的切線(Tangent), P點稱爲切點(Point of contact).

135. 切線定理. 由上節所述,即可得

切線定理. 一圓半徑在圓上端點的垂線,即那圓的切線.

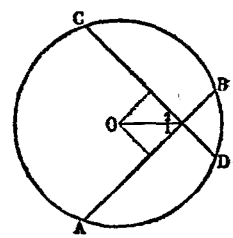
再按垂線公理,即知

系一. 過切點的半徑,必垂直於切線.

系二. 過切點而與切線垂直的線,必經過圓心.

習題三六

1. 在右圖中,試證如 $\angle 1=\angle 2$, 則 $AB=CD$; 如 $\angle 1>\angle 2$, 則 $AB<CD$.



2. 證明過圓內一點 P 的弦,以與過 P 點的半徑垂直的為最短.

3. 證明直徑二端的切線必平行,其餘的必相交.

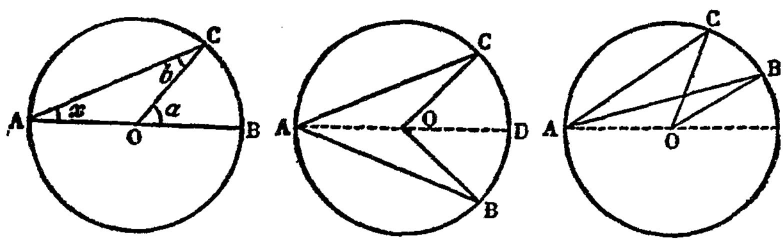
*4. 證明過圓上一點,只有一切線. 過圓外一點,有幾切線呢?

5. 證明過弧中點,而與所對弦平行的線,必為切線.

*6. 如一點在圓內,則到圓心的距離必小於半徑;如在圓外,則距離大於半徑. 試由這理及垂線最短(非全等三角形定理一的系)的理,來證明切線定理.

136. 圓周角. 過圓上一點二弦的夾角,叫做圓周角(Inscribed angle).

137. 圓周角定理. 圓周角被所截弧的一半所度.



[假設] 在⊙O中,圓周角∠BAC與圓心角∠BOC同對$\widehat{BC}$(隨便看那一圖).

[求證] ∠BAC被$\frac{1}{2}\widehat{BC}$所度.

[解析] 就過圓周角頂點直徑.

(一) 與這角一邊相合(左圖),

(二) 在這角內(中圖),

(三) 在這角外(右圖),三種情形分論.

(一) 注意圓心角是一等腰△的外角. (二) 分爲二角和,即合(一)的情形. (三) 分爲二角差,使合於(一)的情形.

[證明] (一) 連半徑 OC=OA (同圓半徑)

則在等腰$\triangle OAC$中，$\angle x=\angle b$　(等腰$\triangle$定理一)

又　$\angle a=\angle x+\angle b$　($\triangle$內角和系一)

$=2\angle x$　(普通公理)

即　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$

但　$\angle BOC$被$\overset{\frown}{BC}$所度　(對弧度圓心角)

$\therefore$　$\angle BAC$被$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$所度.

(二) 作直徑AD，分圓周角BAC爲$\angle BAD$, $\angle DAC$，圓心角$\angle BOC$爲$\angle BOD$, $\angle DOC$. 按(一)所證

$$\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOD,\quad \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC$$

相加　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$　(普通公理)

故　$\angle BAC$被$\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$所度.

(三) 作直徑AD，成另一圓周角$\angle DAB$，又一圓心角$\angle DOB$. 則

$$\angle BAC=\angle DAC-\angle DAB,\quad \angle BOC=\angle DOC-\angle DOB.$$

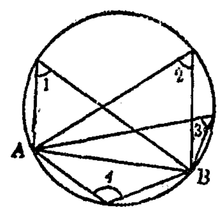
但　$\angle DAB=\frac{1}{2}\angle DOB,\quad \angle DAC=\frac{1}{2}\angle DOC.$

$\therefore$　$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle DOC-\frac{1}{2}\angle DOB$　(普通公理)

$$=\frac{1}{2}(\angle DOC-\angle DOB)=\frac{1}{2}\angle BOC.$$

即 $\angle BAC$ 被 $\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ 所度.

系一. 凡截取同弧,而在這弧所對弦同側的各圓周角必相等.



如右圖中 $\angle 1=\angle 2=\angle 3$.

又因 A, B 所定優劣二弧的和爲 360°, 所以

$\angle 1+\angle 4=180°$, 故有

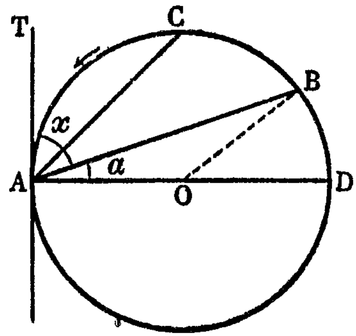
系二. 凡截取同弧,而在這弧所對弦異側的二圓周角必相補.

如 AB 爲直徑,則優劣二弧相等,而爲半圓,故有

系三. 凡截取半圓的圓周角必爲直角.

138. 弦切角定理. 在⊙O內,有一圓周角 $\angle BAC$. 今移動C點,使漸趨於A,而終至相合. 這時 $\overset{\frown}{BC}$ 變爲 $\overset{\frown}{AB}$, 按圓周角定理,得

弦切角定理. 弦端切線與弦所成角被這弦所對弧的半所度.

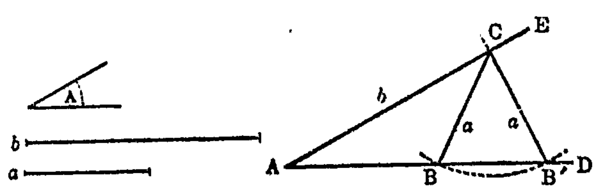


這理也可直接證明如次：作直徑AD，則$AD\perp AT$. $\angle a$被$\widehat{BD}$的半所度，同時又和$\angle x$相餘. 且$\widehat{AB}$和$\widehat{BD}$的和爲180°. 故$\angle x$被$\frac{1}{2}\widehat{AB}$所度.

學生試自行寫出詳細證法，并註明各步的理由.

系. 弦端切線與弦所成的角，等於截這弦所對弧的任何圓周角.

139. 已知二邊和一邊相對角的三角形.



[已知] 三角形的a, b二邊，和a邊的對角$\angle A$.

[求作] 這三角形.

[作法] 作一角等於已知角$\angle A$(設$\angle A$爲銳角，$\angle A$爲直角及鈍角的情形，見下面的習題12).

(基本作圖題六).

在所作角一邊(如AE)上，截取等長b(即AC)

(基本作圖題一).

以C爲心，a爲半徑作弧，交所作角他一邊(如AD)於B及B′.

連成三角形ABC, AB′C即得.

[討論] 如所作弧與AD兩交點，均在AD邊上，兩解都合用. 如弧與AD相切，或有一交點，在DA的延長線上，則只有一解. 如所作弧不與AD相交，則無解.

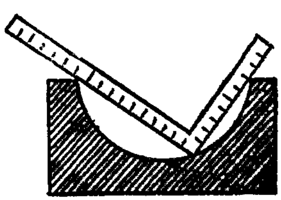
各種情形，學生試分別作圖.

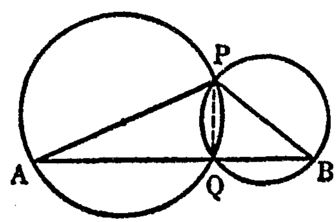
習題三七

1. 證明習題五第4題的作垂線法.

2. 證明§§28, 29的作切線法.

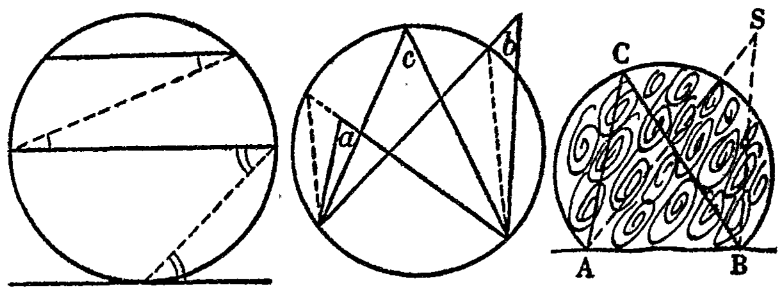
3. 木匠在木板上挖一半圓如下左圖，如欲割得準確，則用直角試驗時應當怎樣?





4. 如上右圖, AP, BP 是二圓中直徑, 試證 A, Q, B 三點在一直線上.

*5. 證明: 平行二弦, 或平行的一弦一切裏, 所夾的二弧必相等(看下面左圖).

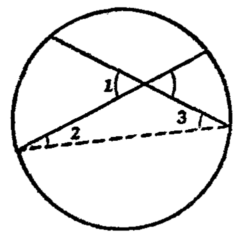


*6. 如上中圖, ∠c 是圓周角, ∠b 頂點在圓外 ∠a 的在圓內, 試證 ∠a>∠c>∠b.

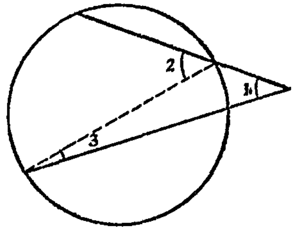
7. 如上右圖, 測得 AB 旁暗礁, 可以圍在一弓形內. 若在 A, B 二處設燈塔, 測定圓周角 ∠ACB. 則海船 S 行駛時, 只要 ∠ASB<∠ACB, 就不會觸礁, 何故?

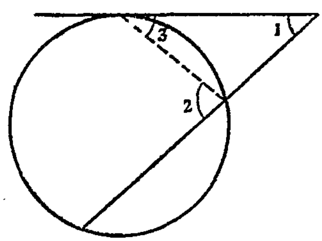
*8. 證明: 二弦在圓內相交, 所成角被所截二弧的和的一半所度 (看下頁右圖, 注意 ∠1, ∠2, ∠3 的關係. 下同).

*9. 證明: 二弦在圓外相交,所成角被所截二弧的較的一半所度(看下列左圖).



*10. 證明: 一弦和一切線相交,所成角被所截二弧的較的一半所度(看下列右圖).

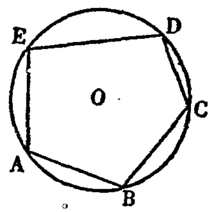


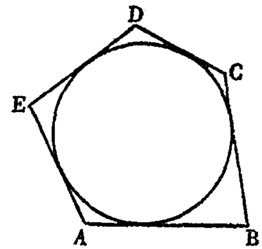


*11. 二切線所成角與截弧有什麼關係?

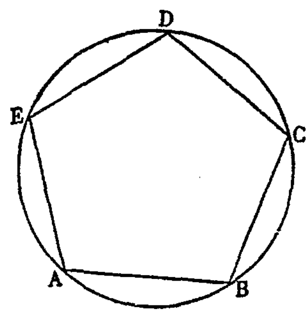
*12. 就 ∠A 爲直角及鈍角兩種情形,討論 § 139 的作圖題.

140. 多角形與圓. 一圓內各弦所成的多角形,叫做內接多角形 (Inscribed polygon) 這圓叫做多角形的外接圓 (Circumscribed circle). 一圓各切線所成的多角形,叫外切多角形 (Circumscribed polygon), 這圓叫做多角形的內切圓 (Inscribed circle).





141. 圓內接正多角形定理. 順次連接圓上等分點諸弦,成這圓的內接正多角形.



[假設]　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$.

[求證]　ABCDE是正多角形.

[解析]　因諸弧等,故諸邊等. 又每角截取三倍等分弧,所以也各自相等.

[證明]　因 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA}$　(假設)

∴ $AB=BC=CD=DE=EA$　(圓的要件關係二)

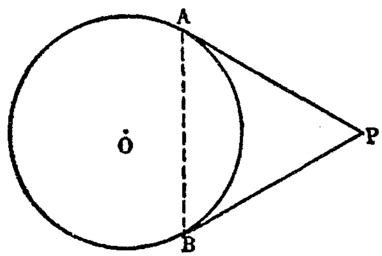
又 $\overset{\frown}{BCE}=\overset{\frown}{CDA}=\overset{\frown}{DEB}=\overset{\frown}{EAC}=\overset{\frown}{ABD}$　(普通公理)

∴ $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$ (圓周角定理)

所以 ABCDE 是正多角形. (正多角形定義)

142. 切線長. 自一點作至一圓上切線,則這點到切點距離叫做這點的切線長.

切線長定理. 自圓外一點至圓上二切線長相等.



[假設] PA, PB 爲自 P 至 ⊙O 上二切線長.

[求證] PA=PB.

[解析] 連接 AB, 則成一等腰 △PAB.

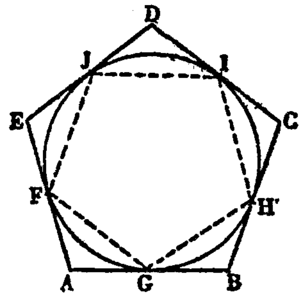
[證明] 連接 AB, 則 ∠PAB, ∠PBA 同爲 $\frac{1}{2}$ AB 所度, 所以相等. (弦切角定理)

∴ PA=PB (等腰△定理二)

系. 二切線與連二切點的弦成等角.

143. 圓外切正多角形定理. 順次作圓

上等分點切線,成這圓的外切正多角形.



[假設]　$\widehat{FG}=\widehat{GH}=\widehat{HI}=\widehat{IJ}=\widehat{JF}$,而AB,BC等皆切線.

[求證]　ABCDE是正多角形.

[解析]　連接FG, GH,則成二個全等等腰△.由此可推知各角都等,各邊也都等,而爲頂點切線長二倍.

[證明]　連接FG, GH,則 $FG=GH$ (圓的要件關係二)

且 $\angle AFG, \angle AGF, \angle BGH, \angle BHG$ 同爲 $\widehat{FG}=\widehat{GH}$ 的半所度,故諸角相等.　(弦切角定理)

依同理得 $\angle BGH=\angle BHG=\angle CHI=\angle CIH=\cdots$
$=\angle AFG=\angle AGF$

$\therefore\ \triangle FAG\cong\triangle GBH\cong\triangle HCI\cong\cdots\cong\triangle JEF$ (a. s. a.)

故 $\begin{cases}\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=\angle E\\ AB=BC=CD=DE=EA\end{cases}$　(普通公理)

$\therefore$ ABCDE 爲正多角形.　(正多角形定義)

習題三八

*1. 已知一圓外切三角形各邊長爲a, b, c. 求自各頂點到圓的各切線長.

*2. 在一圓二切線所截劣弧上取一點,再作一切線與這二切線成一△,證明其周界的長爲一定.

3. 證明圓外切四邊形二對邊長的和,必等於他二對邊長的和.

*4. 試證:二切線交角爲自交點至圓心直線所平分.

*5. 試證:連接圓心與內接(或外切)正多角形頂點,則分這正多角形爲若干全等等腰三角形.

*6. 證明:一圓的外切正多角形周界大於同邊數的內接正多角形周界.

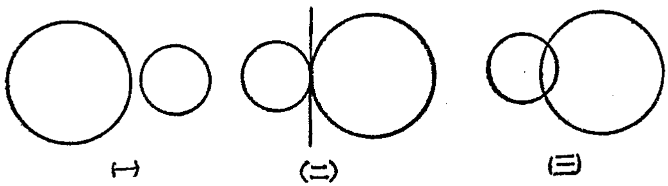
*7. 證明:一圓內接正n多角形,邊數加倍,則後者周界必大於原形周界. 但對於外切正多角形,則反減小.

144. 二圓關係. 二圓相對關係如下:

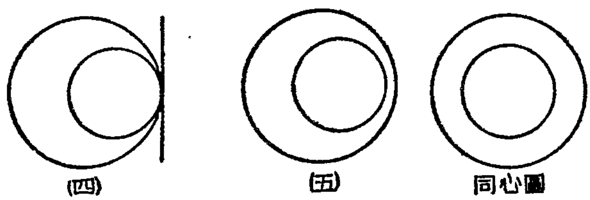
(一) 相離. 一圓在他圓外,而不相交.

(二) 外切 (Externally tangent). 一圓在他圓外,而有一交點;過此交點與一圓相切的線,亦與他圓相切.

(三) 相交. 二圓相交於二點.



(四) 內切 (Internally tangent). 一圓含他圓, 有一交點; 過此交點而與一圓相切的線, 亦與他圓相切.

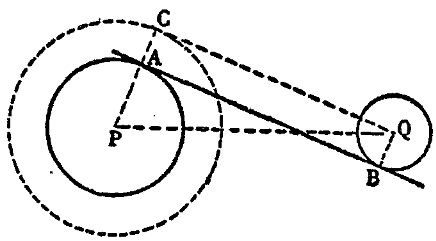


(五) 相含. 一圓完全在他一圓內. 如二圓心更相合, 就稱同心 (Concentric) 圓.

145. 二圓的公共要件. 相交二圓二交點的聯線, 叫做二圓的公弦 (Common chord). 與不相含二圓同時相切的直線, 叫做二圓的公切線 (Common tangent), 但這時切點不限定相同. 相離二圓有四條公切線, 其中二

條,分開二圓,使各居一側的,叫內公切線(Internally common tangent);又二條,使二圓同在一側的,叫外公切線(Externally common tangent). 這些公切線作法看下圖.

146. 作公切線法. (一)作內公切線法.



[已知] ⊙P與⊙Q(并設二圓相離).

[求作] 這二圓的內公切線.

[作法] 假設⊙P,⊙Q不是等圓,而⊙P較大.

以P為心,二圓半徑和為半徑,作一輔助圓.

自Q點作到這輔助圓的切線QC. (切線作法§29)

設C為切點,聯結PC,與⊙P交於A. (垂線作法)

作半徑QB//PC,聯AB卽得一內公切線. (//作法)

依同法,可作出另一內公切線.

[理由] QB//AC,且PC=PA+BQ. (假設)

故　　$BQ=PC-PA=AC$　　(普通公理)

∴　　$ABQC$是▱.　　(▱條件三)

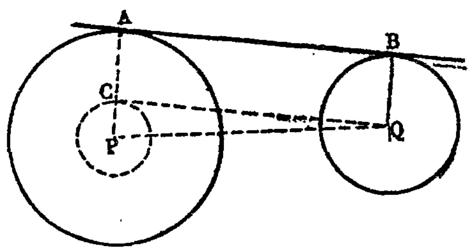
又因　　$PC\perp QC$, 即$\angle C=90°$.　　(切線定理系一)

∴　　$\angle A=\angle B=90°$　　(▱性質二三)

∴　　AB是公切線.　　(切線定理)

註. 要這作法可能,并且能作二條,必須Q點在輔助圓之外. 這就是二圓相離的條件,看下面的習題.

(二)作外公切線法.



這題作法,只須將(一)中第一步改做"以P為心二圓半徑較為半徑,作一輔助圓". 以後即完全相同. 學生試自行補明"已知""求作""作法""理由"四項.

註. 要這作法可能,并且能作二條,必須Q在輔助圓以外. 這就是二圓不相容的條件,看下面的習題.

習題三九

*1. 證明: 二圓相交,聯圓心的直線,必和公弦垂直.

*2. 有⊙o_1和⊙o_2,半徑各爲r_1,r_2,而$r_1 > r_2$,試證

條件	$r_1+r_2<o_1o_2$	$r_1+r_2=o_1o_2$	$r_1+r_2>o_1o_2>r_1-r_2$	$r_1-r_2=o_1o_2$	$r_1-r_2>o_1o_2$
關係	二圓相離	二圓外切	二圓相交	二圓內切	二圓相容

3. 如⊙P,⊙Q是相離二等圓,怎樣去作公切線?

*4. 就二圓種種關係,述公切線作法,并注意各種關係中,內外公切線的條數.

*5. 試證兩圓二內公切線交點,必在聯圓心的線上.

*6. 試證兩圓二外公切線交點,必在聯圓心的線上.

*7. 試證兩圓二內(或外)公切線上,二切點間等距.

軌 跡

147. 軌跡. 用圓規作圖時,我們使裝針尖一脚釘在紙上,并使裝鉛的脚與脚尖保持一定的距離而轉動,則鉛尖在紙上留下跡痕,構成一圓. 在幾何學裏,可以說

一動點與一定點距離爲一定時,其軌跡(Locus)爲圓.

所以軌跡就是集合一切所有遵守某幾何條件的點,所構成的線. 由這定義,可

知欲證明一軌跡題,應當分做二層.

(一) 凡在軌跡上的點,都合那幾何條件.

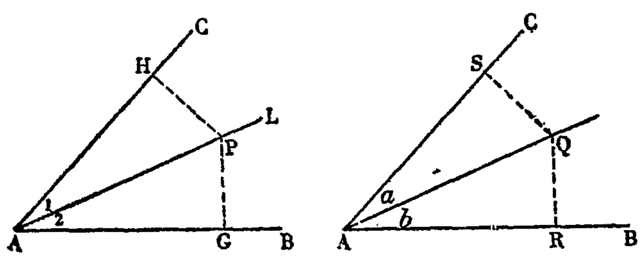
(二) 凡合那幾何條件的點,都在軌跡上.

有時第二條,也可用下條來代替,即

(二)' 不在軌跡上的點,必不合於條件.

這二條所以必需同時成立的必要,只須就上例,即可看出. 譬如取圓上一段弧,其上的點,也都合於"距定點(即圓心)等遠"的條件;但這弧不能包括合這條件的一切點,故不能成軌跡的全部.

148. 分角線定理. 一角的分角線,即距這角二邊等遠點的軌跡.



[假設] AL是∠BAC的平分線.

[求證] AP是距AB,AC二邊等遠點的軌跡.

[解析] 按上節所說,應分二層來證.

(一) 如 $PG \perp AB$, $PH \perp AC$, $\angle 1 = \angle 2$,則得二全等 rt.$\triangle$.

(二) 如 $QR \perp AB$, $QS \perp AC$, $QR = QS$, 亦得二全等 $\triangle$.

[證明] (一)證 AL 上任一點 P, 距 AB,AC 等遠(左圖)

作 $PG \perp AB$, $PH \perp AC$, 則在 rt. $\triangle$ AGP, rt. $\triangle$ AHP 中, 有公共邊 AP, 且原設 $\angle 1 = \angle 2$.

$\therefore$ rt. $\triangle$ AGP $\equiv$ rt. $\triangle$ AHP (全等 rt. $\triangle$ 定理一)

即 $PG = PH$.

(二) 證明如 $QR \perp AB$, $QS \perp AC$, 而 $QR = QS$, 則 AQ 為 $\angle BAC$ 的分角線(右圖).

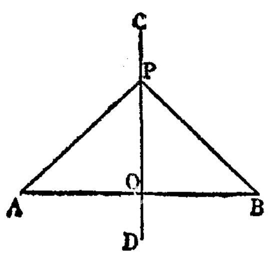
連 AQ, 得 rt. $\triangle$ ARQ, rt. $\triangle$ ASQ, 而原設 $QR = QS$.

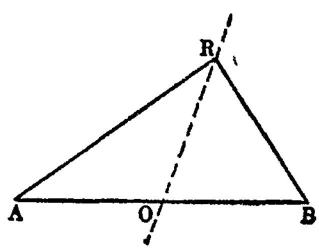
$\therefore$ rt. $\triangle$ ARQ $\equiv$ rt. $\triangle$ ASQ (全等 rt. $\triangle$ 定理二)

即 $\angle a = \angle b$

故 AQ 為 $\angle BAC$ 的分角線.

149. 平分垂直線定理. 一線段的平分垂直線,即距二端點等遠的軌跡.





[假設] CD是AB的平分垂直線, $CD \perp AB$, $OA = OB$.

[求證] CD是距A,B等遠點的軌跡.

[解析] (一)如P在CD上,則rt. $\triangle AOP \equiv$ rt. $\triangle BOP$.

(二) 如 $AR \neq BR$, 則 $\triangle AOR$, $\triangle BOR$ 必非全等.

[證明] (一)證CD上一點P, 距A,B等遠(左圖).

連接PA, PB, 則在 $\triangle AOP$, $\triangle BOP$ 中, 有一公共邊OP, 且原設 $\angle AOP = \angle BOP =$ rt. $\angle$, $OA = OB$.

$\therefore$ rt. $\triangle AOP \equiv$ rt. $\triangle BOP$ (s. a. s.)

即 $AP = BP$.

(二) 證明如 $AR \neq BR$, 則OR非AB的垂直平分線.

連接OR, 則在 $\triangle AOR$, $\triangle BOR$ 中, 有公共邊OR, 且原設 $OA = OB$. 但 $AR \neq BR$.

$\therefore$ $\angle AOR \neq \angle BOR$ (非全等$\triangle$定理二)

但 $\angle AOR + \angle BOR = \angle AOB =$ St.$\angle$ (平角定義)

故如 $\angle AOR =$ rt.$\angle$, 則必 $\angle BOR =$ rt.$\angle$ (普通公理)

而生矛盾. 所以OR不是AB的垂線.

習題四十

1. 證明一圓內等弦中點的軌跡爲一同心圓.

2. 在一圓上, 切線長爲一定的另一端點軌跡, 爲一同心圓, 試加證明.

*3. 證明分角線定理的(二).

*4. 證明垂直平分線定理的(二).

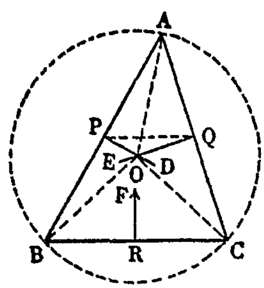
*5. 證明相交二直線所成二組對頂角的二分角線,為距這二交線等遠的點構成的軌跡.

*6. 有常切一角二邊的諸圓,求圓心的軌跡.

*7. 有過二定點的諸圓,求圓心的軌跡.

*8. 求距二平行線等遠點的軌跡.

150. 三角形外接圓定理. 三角形三邊的垂直平分線,必共過一點.



[假設] PD, QE, RF 是 △ABC 三邊的垂直平分線.

[求證] 這三條垂直平分線,共過一點.

[解析] 先證 PD, QE 交於一點 O. 再用平分垂直線定理,證明 RF 也一定要經過 O 點.

[證明] 聯接 PQ, 則

$$\angle APD+\angle AQE=180^\circ$$

$\angle QPD+\angle PQE<\angle APD+\angle AQE$

$\angle QPD+\angle PQE<180°$

(全分公理不等量公理)

∴　PD, QE 交於△內一點 O (交線判別定理)

聯接 OA, OB, OC, 則 OA=OB=OC

(⊥平分線定理及普通公理)

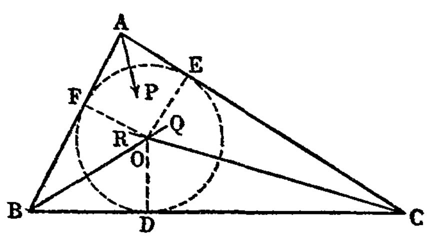
即　O 點也在 BC 的垂直平分線上,就是說 RF 必經過 O.　(⊥平分線定理)

系一. 共過的點,是三角形外接圓心.

註. 這點叫外心 (Circum-center).

系二. 不在一直線上的三點,可定一圓.

151. 三角形內切圓定理. 三角形三內分角線,必共過一點.



[假設] AP, BQ, CR 是△ABC 三內分角線.

[求證] 這三條內分角線,共過一點.

[解析] 先證有二條相交,於一點O. 再用分角線定理,證明第三條,也必經過O點.

[證明] $\angle QBC+\angle RCB<\angle ABC+\angle ACB<180°$ (何故?)

∴ BQ, CR 交於 △ 內一點 O (交線判別定理)

則 O 點距 △ABC 三邊等遠

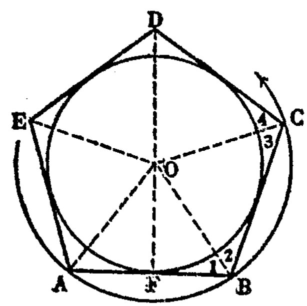
(分角線定理及普通公理)

∴ O點在分角線 AP 上 (分角線定理)

系. 共過的點,是三角形內切圓心.

註. 這點叫做內心 (In-center).

152. 正多角形與圓關係定理. 凡是正多角形都有一個外接圓和內切圓.



[假設] ABCDE 是正多角形.

[求證] (一) 各頂點在一圓上; (二) 各邊是一圓的切線.

[解析] (一)作三頂點的圓,證明這圓必過其他頂點.

(二)以(一)中所得圓心爲心,自心到一邊垂線爲半徑作圓,證明這圓必切於他邊.

[證明] (一)作⊙O,過A,B,C (過三點的圓作法)

連 OA, OB, OC, OD, OE,則

$OA=OB=OC$ (等圓半徑定理)

∴ $\angle 2=\angle 3$ (等腰△定理一)

但 $AB=CD$,且 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$ (正多角形定義)

∴ $\angle 1=\angle 4$ (普通公理)

∴ $\triangle AOB\equiv\triangle COD$ (s. a. s.)

卽 $OA=OD$,故D在⊙O上. 同理可證他點也如此.

(二)因 $AB=BC=CD=DE=EA$ (正多角形定理)

故自O到各邊上距離相等. (弦心距定理)

所以用O爲心,高爲半徑作圓,和各邊都相切.

(切線定理)

153. 正多角形要件. 就上節的理,可知正多角形的外接內切二圓同心,這點,就叫做正多角形的心,如上節圖中的O. 又OA等叫頂心距,OF等叫邊心距,都已在§51

中說過.

習題四一

1. 已知一圓,求其圓心.

2. 已知一弧,求平分爲二.

3. 證明rt.△夾直角二邊平分垂直線,交於斜邊上.

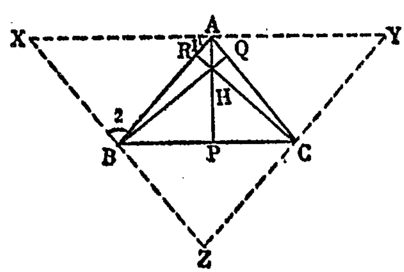
*4. 證明§27的作圖題.

*5. 證明三角形每一內分角線,與他二角外分角線,必相交於一點. 這點叫做旁心(Ex-center).

*6. 求作一圓和一△一邊及他二邊的延長線相切,這圓叫旁切圓(Exscribed circle),一△有三旁切圓.

*7. 已知三角形邊長爲a, b, c,求三角形各邊上,內切圓與旁切圓各切點間距離.

154. 三角形垂心定理. 三角形三高(即項垂線)相交一點.



[假設]　在 $\triangle ABC$ 中 $AP\perp BC$, $BQ\perp CA$, $CR\perp AB$.

[求證]　AP, BQ, CR 三高共過一點.

[解析]　過 A, B, C 各作對邊的平行線,成 $\triangle XYZ$. 再證這三高是 $\triangle XYZ$ 的三邊垂直平分線.

[證明]　過 A 作 BC 的平行線,過 B 作 CA 的平行線,

則　$\angle 1+\angle 2=\angle ABC+\angle BAC$　(//性質定理一)

$<180°$. (按△內角和定理卽明)

所以這二線交於一點 X. 同理作過 C 而與 AB 平行的線,必和前二線相交,成功 $\triangle XYZ$.

因 $AX//BC$, $BX//CA$, 故 ACBX 是▱　(▱定義)

同理 ABCY 也是▱, 故 $XA=BC=AY$　(▱性質二)

同理　$XB=BZ$,　$ZC=CY$.

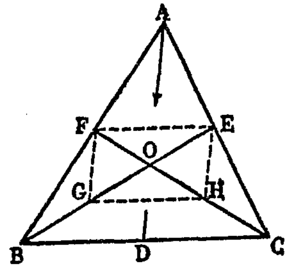
又因　$AP\perp BC$　$\therefore PA\perp XY$　(//性質一)

同理　$BQ\perp ZX$,　$CR\perp YZ$

就 $\triangle XYZ$, 知 AP, BQ, CR 共過一點 (△外接圓定理)

註. 這公共點叫做垂心 (Orthocenter).

155. 三角形重心定理. 三角形三中線,共過一點,且這點在各中線上,與頂點距離,為該中線全長的三分之二.



[假設] $AF=FB,$

$BD=DC,\quad CE=EA.$

[求證] AD, BE, CF 共過一點 O, 且

$$AO=\frac{2}{3}AD,\quad BO=\frac{2}{3}BE,\quad CO=\frac{2}{3}CF$$

[解析] 先證二中線交於一點 O. 再證 O 點合於題中第二層性質. 由此知三中線,在 O 點相交.

[證明] $\angle EBC+\angle FCB<\angle ABC+\angle ACB<180^\circ$(何故?)

所以 BE, CF 相交於一點 O.

平分 OB 於 G, OC 於 H. 聯成四邊形 EFGH.

就 $\triangle ABC$, $\triangle OBC$ 可見

$EF//GH//BC,\ EF=GH=\frac{1}{2}BC$ (習題三三第5,6題)

$\therefore$ EFGH 是平行四邊形 (▱條件三)

$\therefore$ $GO=OE,\quad HO=OF$ (▱性質三)

但 $BG=GO,\ CH=HO,\ \therefore BO=\frac{2}{3}BE,\ CO=\frac{2}{3}CF$

依同理,可知AD與BE的交點,也在BE上,與B相距爲$\frac{2}{3}$BE之處. 故這交點即O.

$\therefore$ AD, BE, CF三中線共交於一點O, 且

$$AO=\frac{2}{3}AD,\quad BO=\frac{2}{3}BE,\quad CO=\frac{2}{3}CF.$$

註. 這點叫做三角形的重心(Center of gravity). 這名詞的意義,和物理上所說的一致.

習題四二

*1. △的垂心是否一定在△內?

2. 如H是△ABC的垂心,說明A是△BCH的垂心; B是△ACH的垂心; C是△ABH的垂心(看§154的圖).

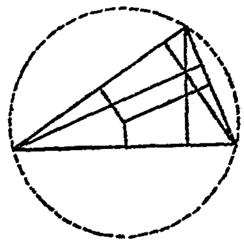
3. 證明等邊△中,內心,外心,垂心,重心四點相合.

4. 證明如一△中,內心,外心,垂心,重心四點有二相合,則必盡相合,而成一等邊△.

5. 證明△裏三中線的和,必小於這△周界的二分之三,而大於周界的四分之三.

6. 聯△三邊中點,成功一新三角形. 原形的重心,是新三角形的什麼?

*7. 試證從△垂心到各角頂的距離,等於從△外接圓心,到各對邊距離的2倍(看右圖).

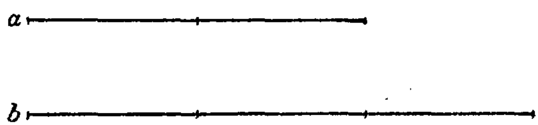


*8. 證明△裏外心,垂心,重心三點在一直線上. 這直線叫尤拉(Euler)線.

第七編　比例論

比例線段

156. 線段比 (Ratio of segment). 用一單位線段去量兩線段,把量得的數,寫成比式或分數式,便是兩線段的比. 例如量 a, b 兩線段,得 2 尺和 3 尺, a, b 兩線段的比,便是 2:3 或 $\frac{2}{3}$.

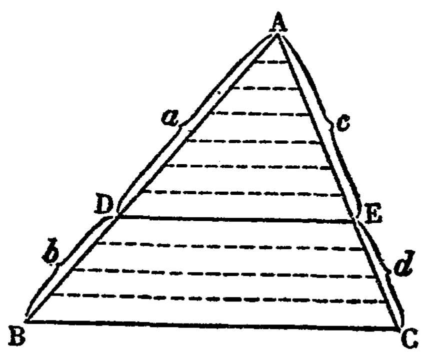


兩線段之比,和單位線段的長短,沒有關係. 例如剛才用尺做公共單位,量得 $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$. 如用寸做公共單位,量 a 便得 20 寸,量 b 得 30 寸, a, b 的比是 $\frac{20}{30}$, 約簡後仍得 $\frac{2}{3}$.

註. 一個單位線段,恰好能量盡兩線段的,叫做兩線段的公共單位. 就理論言,未必定能找得一公共單位,使兩線段都是他的整倍數. 這種情形叫做不可通約 (Incommeasurable). 其討論非初學所必要,故從略.

157. 比例線段(Proportional line segment). 兩線段的比,和另外兩線段的比相等時,這四線段成比例,稱爲比例線段. 例如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, 則a, b, c, d是比例線段.

158. 三角形兩邊成比例線段定理. 和三角形底邊平行的直線,分其餘兩邊成比例線段.



[假設] △ABC中, DE//BC.

[求證] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

[解析] 用a和b的公共單位, 把a, b各分成若干等分. 過各分點各引直線和BC平行, 看c, d被分成的情形如何?

[證明] 如 a, b 的公共單位分 a 爲 m 分, b 爲 n 分,

則 $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$ (線段比定義)

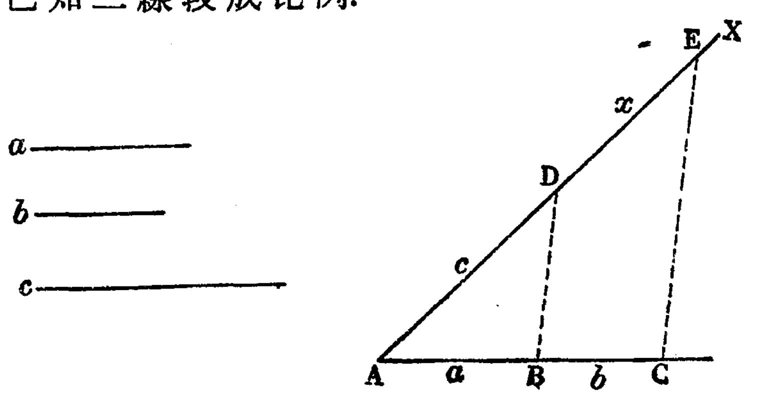
依作 // 法,過各等分點,引直線 //BC, 則此等平行線,必截 c 成 m 等分,截 d 成 n 等分. (// 內等線段定理)

卽 $\frac{c}{d}=\frac{m}{n}$, $\therefore$ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (線段比定義,普通公理).

系一. 諸平行線截兩直線,其相當線段成比例.

系二. 分三角形兩邊成比例線段的直線,與第三邊平行.

159. 比例線段的作圖. 求作一線段和已知三線段成比例.



[已知] a, b, c 三線段.

[求作] 第四線段x, 使有 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$.

[作法] 先作線段 $AC=a+b$ (作等線段法)

過A點任引直線AX, 在其上取 $AD=c$, 連結BD.

從C引CE//BD并和AX交於E. (作//線法)

DE便等於x.

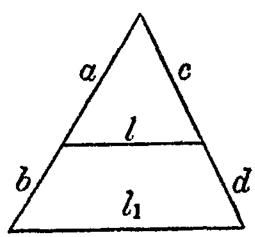
[理由] 因為BD//CE (作法)

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ (△比例線段定理)

習題四三

1. 設 $l//l_1$, $a=3$, $b=2$, $d=2.5$, 求c.

2. 設 $l//l_1$, $a=4$, $c=6$, $d=8$, 求b.

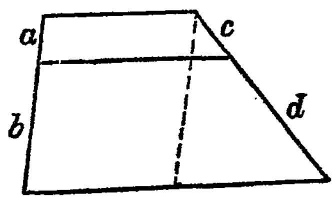


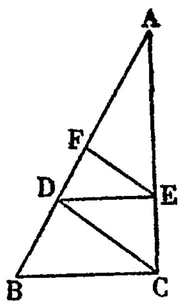
3. 如 $a=b$, c和d的關係怎樣?

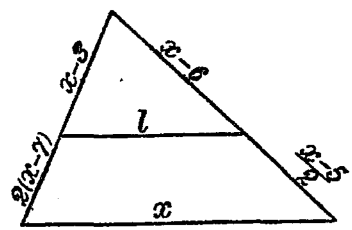
由此可證明以前那一條定理?

*4. 證明和梯形兩底平行的直線, 分割兩腰成比例線段(下頁上圖).

5. 次頁下左圖DE//BC, FE//DC證明 $\frac{AF}{FD}=\frac{AD}{DB}$.







6. 如上右圖 l//x, 求三邊的長.

7. 已知三線段 a, b, c, $a=2.5$, $b=3.5$, $c=5$. 求作 x 和 y 兩個第四比例線段. 使 $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$, $\frac{a}{c}=\frac{b}{y}$. 驗 x, y 兩線段的長,并用代數方法證明其相等.

160. 比例定律

(一) 加法定律 (Addition law) 四量成比例,則兩比的二量相加也成比例.

(二) 減法定律 (Subtraction law) 四量成比例,則兩比的二量相減也成比例.

[假設] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

[求證] $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$, $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$,

[證明] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ [假設]

$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$, 即 $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (普通公理)

同理 $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

(三) 加減定律. 四量成比例,則兩比的二量各相加減也成比例.

[假設] $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

[求證] $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

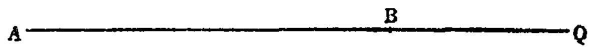
[證明] $\begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{(比例加法定律)}\\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} & \text{(比例減法定律)}\end{cases}$

兩式相除 $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (普通公理)

161. 線段的內分 (Internal division) 和外分 (External division). 在線段上任取一點,這點分線段成兩分. 例如AB上的一點P,將AB分成AP,PB兩線段,我們稱P點內分AB.

如在線段的延長線上,取一點,這點也分線段成兩分. 例如AB延線上的Q點,將AB分做AQ, QB兩線段,我們稱Q點外分AB.

内分 

外分 

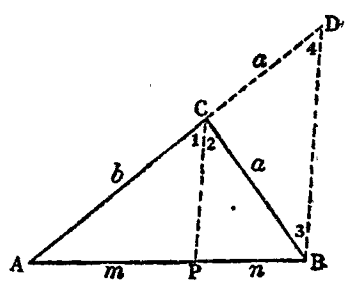
註. 無論内分或外分,兩線段的讀法,總是從線段的一端,讀到分點,再從分點讀到他一端.

如取AB的方向爲正,則BA的方向便是負,不論内分外分,兩線段的和,必等於原來線段的長. 例如

内分　AP＋PB＝AB.

外分　AQ＋QB＝AB.

162. 三角形内分比例線段定理. 三角形的内分角線,内分底邊成兩線段,與其餘兩邊成比例.



[假設] △ABC 中 ∠C 的平分線 CP, 內分 AB 於 P.

[求證] $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$.

[解析] 從 B 引直線 //PC 使和 AC 的延長線相交於 D. 證明 CD=a, 再用△二邊成比例定理.

[證明] 引 BD//PC, 并和 AC 的延線交於 D.

(作//線法)

則 $\angle 1=\angle 4,\ \angle 2=\angle 3$ (//性質定理一,二)

但 $\angle 1=\angle 2$ (假設)

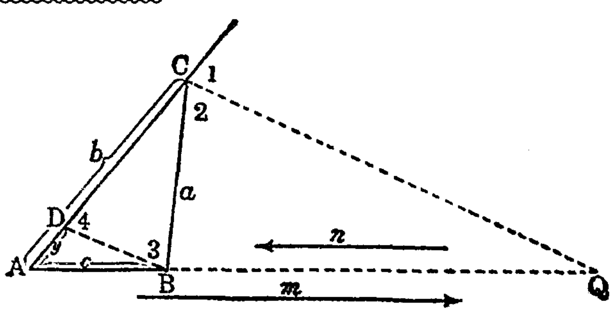
∴ $\angle 3=\angle 4$ (普通公理)

∴ $CD=CB=a$ (等腰△定理二)

但 $\frac{AP}{PB}=\frac{AC}{CD}$ (△比例線段定理)

卽 $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$

163. 三角形外分比例線段定理. 三角形的外分角線,外分底邊成兩線段,與其餘兩邊成比例.



[假設]　△ABC中，∠C外角的分角線CQ，外分AB於Q.

[求證]　$\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$.

[解析]　從B引直線//QC使和AC交於D.　證明CD=a，再用△二邊成比例定理.

[證明]　引BD//QC和AC交於D.　(作//線法)

則　$\angle 1=\angle 4,\ \angle 2=\angle 3$　(//性質定理一，二)

但　$\angle 1=\angle 2$　(假設)

$\therefore$　$\angle 4=\angle 3$　(普通公理)

$\therefore$　$CD=CB=a$　(等腰△定理二)

但　$\frac{AB}{BQ}=\frac{AD}{DC}$

即　$\frac{c}{n}=\frac{y}{a}$　(△比例線段定理)

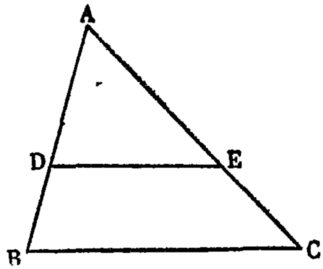
$\therefore$　$\frac{c+n}{n}=\frac{y+a}{a}$ 即 $\frac{m}{n}=\frac{b}{a}$　(比例加法定律)

習題四四

*1.　△ABC中DE//BC證明.

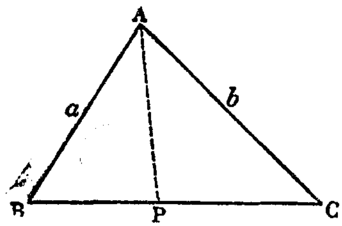
(一)　$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$，　(二)　$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$

(三)　$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE}$，　(四)　$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{EC}$



2. 試從比例加法定律推出第四比例線段的另一作法來.

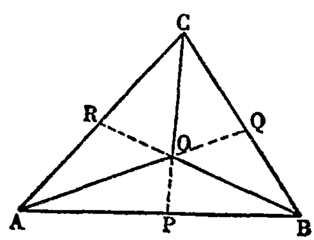
3. $\triangle ABC$中, AP平分$\angle A$, $a=3$, $b=4$, $BP=2$, 求PC.



4. 同圖$a=3$寸, $b=6$寸, $BC=7$寸, 求BP和PC.

5. 三角形的三邊,順次爲7寸,8寸,9寸. 求各角的平分線,內分對邊所成的三對線段.

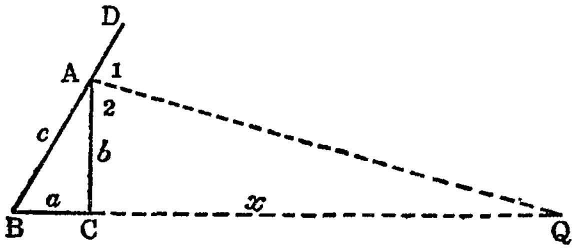
6. 從$\triangle ABC$內任意點O, 引OA, OB, OC三線,再



作三線所成三角的平分線OP, OQ, OR, 則

$$\frac{AP}{PB}\times\frac{BQ}{QC}\times\frac{CR}{RA}=1.$$

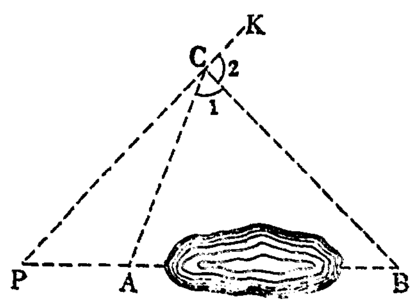
7. 如下圖AQ平分外角CAD, a=2, b=5, c=6. 求x.



8. 同圖 b=2, c=3, x=4. 求BQ.

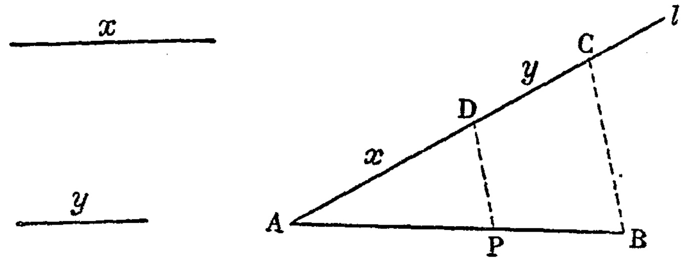
9. 三角形的三邊順次爲8寸, 10寸, 12寸, 求外角平分線外分三邊所成的三對線段.

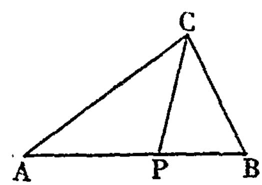
10. 要測不便直接去量的AB兩點間的距離, 先揀一點C, 作CK, 使∠2=∠1, 再延長KC到P, 使P, A, B



三點在同一直線上. 量那幾條線段, 便可算出AB?

164. 內分線段法. 求內分一線段, 使等於已知兩線段的比.





[已知] 線段 x, y 和 AB.

[求作] AB 內分點 P, 使 $\frac{AP}{PB}=\frac{x}{y}$.

[作法一] 如上右圖, 過 A 點任引直線 l, 截取 AD =x, DC=y, 連接 CB. (作直線公法)

過 D 引 DP//CB 與 AB 交於 P. (作//線法)

P 便是所求的內分點.

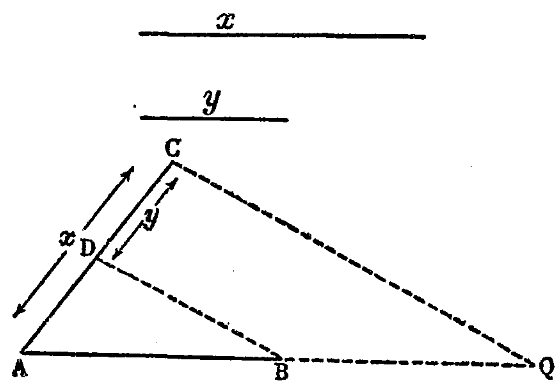
[作法二] 如上次圖, 用 A, B 做心, x, y 各爲半徑, 交換作弧, 命兩弧交點爲 C. 連接 AC, BC.

次作 ∠C 的平分線和 AB 交於 P. (作分角線法)

P 也是所求的內分點.

[理由] 學生試各自補出,并討論"作法二"中不可能的情形.

165. 外分線段法. 求外分一線段,使等於已知兩線段之比.



[已知] 線段 x, y 和 AB.

[求作] AB 外分點 Q, 使 $\frac{AQ}{QB}=\frac{x}{y}$.

[作法] 過 A 點任引 AC=x. 截取 CD=y. 連接 DB.

(作直線公法)

次從 C 作 CQ//DB, 和 AB 的延線交於 Q. (//線作法)

Q 便是所求外分點.

[理由] 因為　DB//CQ　(作法)

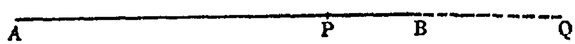
$\therefore \frac{AB}{BQ}=\frac{AD}{DC}$　(△比例線段定理)

$$\frac{AB+BQ}{BQ}=\frac{AD+DC}{DC}$$ (比例加法定律)

卽 $$\frac{AQ}{QB}=\frac{x}{y}.$$

註. 學生試述第二種作法幷說出理由來.

166. 調和分割. 一線段內分外分兩比相等,便叫調和分割(Harmonic Division).



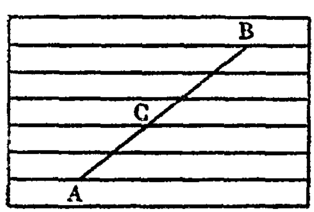
如圖倘有 $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QB}$ 卽稱 AB 被 P, Q 調和分割.

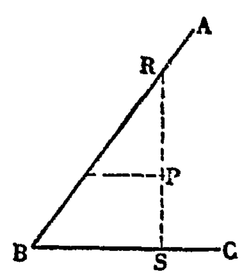
習 題 四 五

1. 內分一線段成 3:5.

2. 外分一線段成 7:4.

3. 一線段可放在橫格紙上,把他分成 2:3 如下左圖(或任何比),試說明其理由.





4. 過∠ABC內一點P,求作一直線遇AB於R, BC於S, 使$\frac{RP}{PS}=\frac{3}{2}$.

*5. 已知二線段的比及其和,求作二線段.

*6. 已知二線段的比及其差,求作二線段.

7. 長方形兩邊和爲5寸,長與闊的比等於7:4, 求作這長方形.

8. 長方形兩邊差爲1寸,長與闊的比等於5:2, 求作這長方形.

9. 已知三角形的二邊a, b和b:c=2:3, 求作這三角形.

*10. 試證△任一角的內外分角線,調和分割對邊.

相似形

167. 相似多角形. 兩多角形合於下列條件的,叫做相似.

(一)各角對應相等,(二)各邊對應成比例.

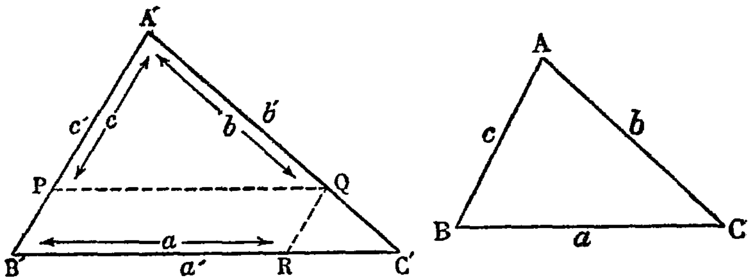
三角形原是多角形的一種,所以兩三角形相似的條件,也應同上述(§36)一樣.

但就三角形論,對於以上廣義的條件,往往因一部分適合後,其餘也就連帶適

合,故相似條件,可以減少. 看以下定理自明.

註. 相似的記號爲 $\backsim$.

168. 相似三角形判別定理一. 兩三角形若各角彼此相等,便相似.



[假設] $\triangle$ ABC, A'B'C' 中, $\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

[求證] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[解析] 各角彼此相等,已適合廣義條件(一),從此再證明合於條件(二) $\left(即\ \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}\right)$ 便可.

[證明] 截取 $A'P=c$, $A'Q=b$.

則 $\triangle A'PQ \equiv \triangle ABC$ (s. a. s.)

$\therefore$ $\angle A'PQ=\angle B=\angle B'$ (全等形定義,假設)

由是知 $PQ // B'C'$ (// 性質定理一)

$\therefore$ $\frac{c}{c'-c}=\frac{b}{b'-b}$ ($\triangle$ 比例線段定理)

即　　$\dfrac{c'-c}{c}=\dfrac{b'-b}{b}$

∴　　$\dfrac{c'}{c}=\dfrac{b'}{b}$　　(比例加法定律)

同理取 $B'R=a$　可證 $\dfrac{b'}{b}=\dfrac{a'}{a}$

即得　　$\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$　　(普通公理)

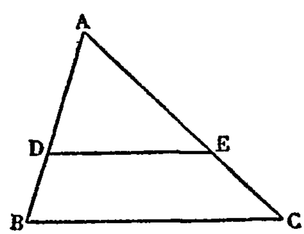
∴　　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$　　(相似△定義)

系一. 兩三角形有兩角彼此相等,便相似.

系二. 兩直角三角形有一銳角相等,便相似.

系三. 兩三角形,各和另一三角形相似,則此兩三角形相似.

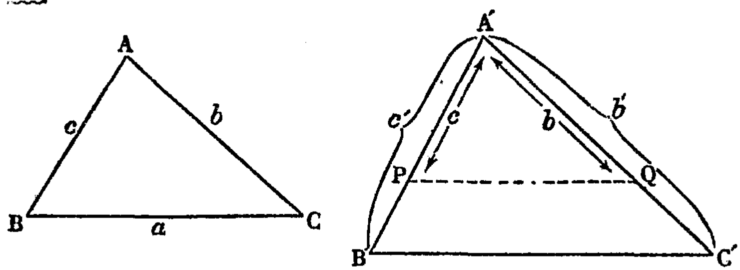
系四. 三角形底的平行線及兩邊所



成三角形,和原形相似.

如圖 $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$.

169. 相似三角形判別定理二. 兩三角形若有兩邊對應成比例,且夾角相等,便相似.



[假設] $\triangle ABC$, $A'B'C'$ 中 $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$, $\angle A=\angle A'$.

[求證] $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

[解析] 作 $B'C'$ 的平行線,所成的 $\triangle$ 和 $\triangle A'B'C'$ 有什麼關係?

[證明] 截取 $A'P=c$, $A'Q=b$ 連接 PQ.

$\because$ $\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$ (假設)

$\therefore$ $\frac{b'-b}{b}=\frac{c'-c}{c}$ (比例減法定律)

即 $\frac{PB'}{A'P}=\frac{QC'}{A'Q}$ (線段減法)

由是得 $PQ/\!/B'C'$ ($\triangle$比例線段定理系二)

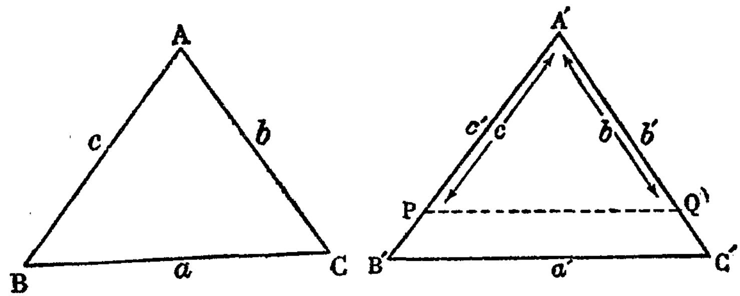
$\therefore$ $\triangle A'PQ \backsim \triangle A'B'C'$

(相似$\triangle$判別定理一系四)

但　　$\triangle ABC \equiv \triangle A'PQ$　　(s. a. s.)

即　　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

170. 相似三角形判別定理三. 兩三角形三邊對應成比例便相似.



[假設]　$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中 $\dfrac{a'}{a}=\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$

[求證]　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

[解析]　設法引 B'C' 的平行線,使這線和 A'B', A'C' 兩邊所成的 △ 和 △ABC 全等.

[證明]　截取 $A'P=c$, $A'Q=b$, 連接 PQ, 則有公共角 $\angle A$, 且假設 $\dfrac{b'}{b}=\dfrac{c'}{c}$,　$\therefore$ $\triangle A'PQ \backsim \triangle A'B'C'$

(相似 △ 判別定理二)

$\dfrac{b'}{b}=\dfrac{a'}{PQ}$　　(相似 △ 定義)

但　$\dfrac{b'}{b}=\dfrac{a'}{a}$　　(假設)

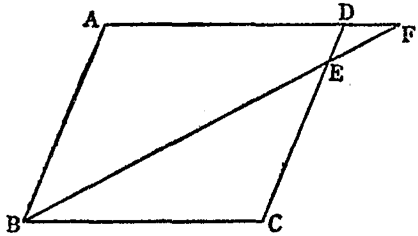
$\therefore$　$\dfrac{a'}{PQ}=\dfrac{a'}{a}$,　$PQ=a$　　(普通公理)

所以 $\triangle A'PQ \equiv \triangle ABC$ (s. s. s.)

即 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$

習題四六

1. ABCD是平行四邊形,延長AD至F,連接BF把圖中所有成比例的線段,用比例式表出.



[提示] 先找出相似三角形來.

*2. 兩相似三角形對應高的比,等於對應邊的比.

*3. 兩相似△對應角平分線的比,等於對應邊的比.

4. 梯形的二對角線,互分爲比例線段. 又若下底是上底的二倍,則對角線的交點,在三分之一處.

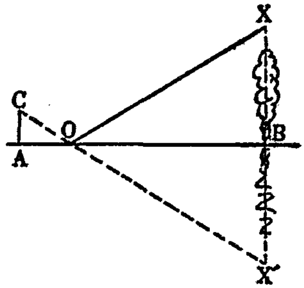
*5. 連接三角形三邊中點的線段,所成三角形和原三角形相似.

6. 用相似△定理,證明連接三角形兩邊中點的直線等於第三邊的一半.

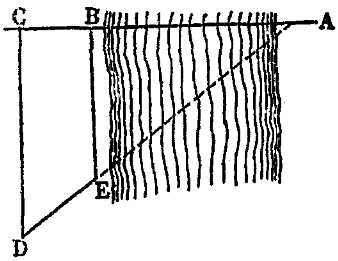
*7. 兩三角形的各邊對應平行或對應垂直,便相似.

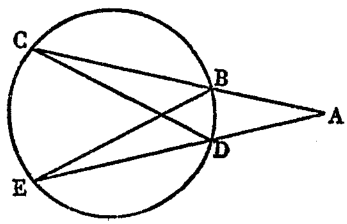
8. 測量家從C點看樹在池中的影子,望得C, O, X'

三點共線,若測得 CA, XB 都與地面垂直. 又量得 CA=5 尺, AO=6.2 尺, BO=30 尺. 試推算樹高.



9. 要量河闊 AB,先找一點 C 和 A, B 共線,次作 CD, BE 二平行線,使 D, E, A 共線,問量那幾條線段,可算出河闊 AB?

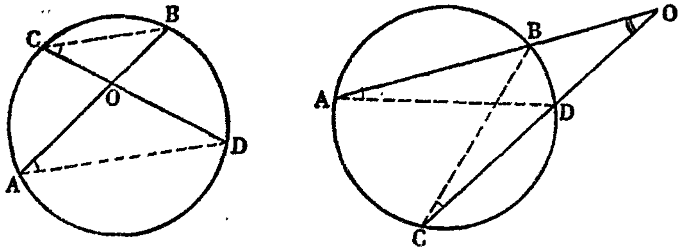




*10. 圓的二弦 AB, CD 相交於 E. 試證 $\triangle AEC$,和 $\triangle BED$ 相似.

*11. 從圓外一點 A 引二線,遇圓於 B, C 和 D, E. 證明 $\triangle ACD \backsim \triangle ABE$.

171. 交弦和交割線段定理. 一圓的二弦或其延線的交點,內分或外分此二弦,所成二線段的積相等.



[假設] AB, CD 爲圓的二弦. AB, CD (或其延線)相交於 O 點.

[求證] $AO \cdot OB = CO \cdot OD$.

[解析] 連接 AB, CD 成 $\triangle AOD$ 和 $\triangle BOC$. 看出這二△中兩對對應等角,得相似△. 故其中對應邊成比例.

[證明] 因 $\angle A = \angle C$ (圓周角定理)

$\angle AOD = \angle COB$ (對頂角或公共角)

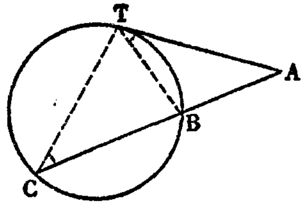
$\therefore$ $\triangle AOD \backsim \triangle COB$ (相似△判別定理一系一)

$\dfrac{AO}{OD} = \dfrac{CO}{OB}$ (相似△定義)

$\therefore$ $AO \cdot OB = CO \cdot OD$ (普通公理)

註. 與圓相交於二點的直線,叫割線 (Secant), 如上面右圖的 OA, OC, 都是割線.

172. 相交切割線段定理. 從圓外一點引一切線及割線,則切線長平方,等於此點外分割線上弦所成兩線段的積.



[假設]　AC爲圓的割線,AT爲切線.

[求證]　$AT^2=AB\cdot AC$.

[解析]　證明 $\triangle ATB\backsim\triangle ACT$,再找對應邊.

[證明]　在 $\triangle ATB$, $\triangle ACT$ 內,有公共角 $\angle A$.

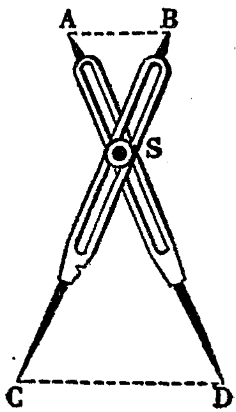
且　$\angle BTA=\angle C$　(弦切角定理系)

$\therefore$　$\triangle ATB\backsim\triangle ACT$　(相似△判別定理一系一)

由是得　$\frac{AT}{AB}=\frac{AC}{AT}$　(相似△定義)

$\therefore$　$AT^2=AB\cdot AC$　(普通公理)

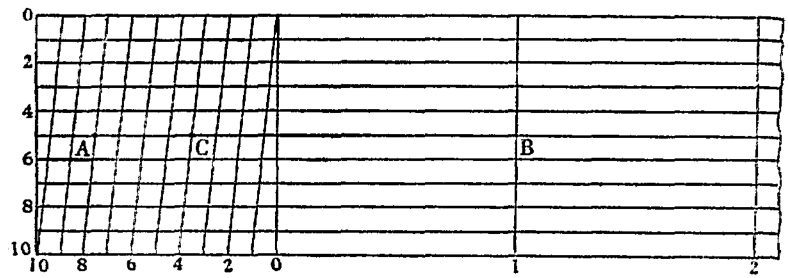
173.　利用相似三角形理,做成的儀器.



(一)比例分線規(Proportional dividers).　如圖AD, BC是銅做的兩桿,上刻度數,中有空槽螺旋輪S可自由升降,決定AB, CD的比,使有

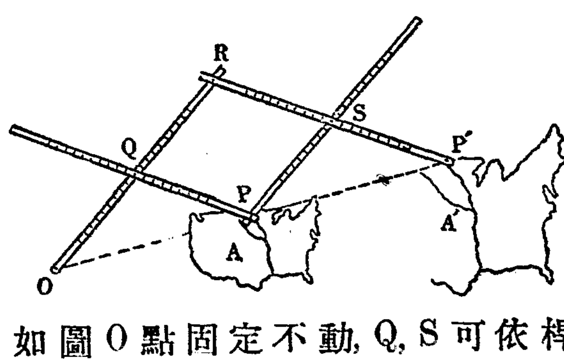
$$\frac{AB}{CD}=\frac{AS}{SD}=\frac{BS}{SC}$$

(二)對角線尺(Diagonal scale)



如圖是對角線尺的一段(共長三寸). 同時把圓規或比例規套準要量線段的兩端點. 再將原距離套在尺上一個適當的地方,一讀便得. 例如AC是0.4寸, CB是1.35寸. 這種儀器,常可量出一條不很長的線段,準確到1寸的百分之幾.

(三) 圖形縮放器(Pantograph).



如圖O點固定不動, Q, S可依桿上小

眼任意選比例,使$\frac{OQ}{OR}=\frac{SP'}{RP'}$. 於是O, P, P'三點,常在一直線上. 使P沿A形各線移動,P'處鉛筆同時畫相似形A'. 對換P, P'便縮小.

習題四七

1. 應用§172定理,證明交割線段定理(§171右圖).

2. 在§171右圖中,如OB=OD,則ABDC爲梯形,試加證明.

3. 試由交弦交割定理,推出已知三線段的第四比例線段的又一作法.

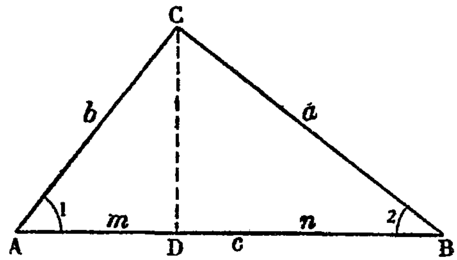
*4. 如二圓相交,則聯其交點的延線,平分其公切線在二切點間的一段長.

5. 對角線尺,是根據何條定理造成?

6. 圖形縮放器中O, P, P'三點,何以總在一條直線上?

*7. 試證交弦和交割線段定理的逆定理,即如AB, CD二線段,或他們的延長線,交於O點,而有AO·OB=CO·OD的關係,則A, B, C, D四點必定在一圓上.

174. 直角三角形母子相似定理. 直角三角形斜邊上的高,分原形爲兩個直角三角形,各與原形相似,且彼此相似.



[假設] △ABC 中, ∠ACB=rt. ∠, CD⊥AB.

[求證] △ABC∽△ACD∽△CBD.

[證明] rt. △ACB, rt. △ADC 有公共角 ∠1.

∴ △ABC∽△ACD (相似△判別定理一系二)

又 rt. △ACB, rt. △CDB 有公共角 ∠2.

∴ △ABC∽△CBD (相似△判別定理一系二)

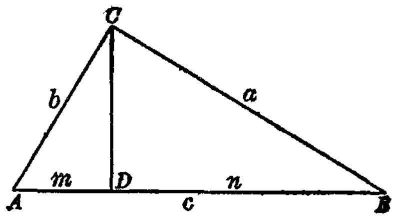
∴ △ABC∽△ACD∽△CBD

(相似△判別定理一系三)

175. 比例中項. 設有a, b, c三線段, 如 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, 則 b 稱爲 a 與 c 的比例中項 (Mean proportional).

在上節的定理內, 因爲rt, △ADC和rt. △CDB相似,

取二對夾直角的二邊,使成比例,即得 $\frac{AD}{CD}=\frac{CD}{DB}$ 所以得



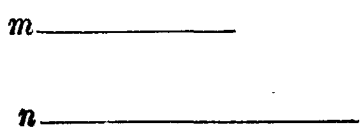
比例中項定理一. 直角三角形斜邊上的高.為分斜線所成二線段的比例中項.

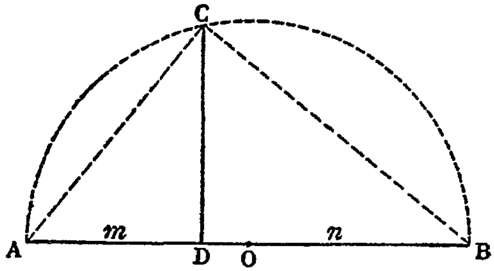
再就 $\text{rt.}\triangle ACB \backsim \text{rt.}\triangle CDB$, $\text{rt.}\triangle ACB \backsim \text{rt.}\triangle ADC$ 看得.

比例中項定理二. 直角三角形中夾直角任一邊,為斜邊上被高所分而對這一邊的一段與斜邊的比例中項.

如上圖中　$\frac{n}{a}=\frac{a}{c}$, $\frac{m}{b}=\frac{b}{c}$.

比例中項作圖. 由上述的定理,立得比例中項作法如下:





[已知] m和n兩線段.

[求作] m和n的比例中項.

[作法] 作線段AB=m+n,并取D點,使

AD=m,則DB=n (等線段作法)

平分AB於O,以O爲心,OA爲半徑,作一半圓,再作DC⊥AB (垂線作法)

則CD爲所求的比例中項.

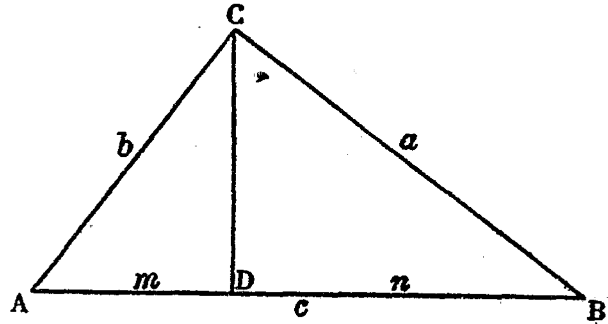
[證明] ∠ACB=rt.∠ (圓周角定理系三)

而 AD=m, DB=n, CD⊥AB (作法)

∴ CD爲m,n的比例中項 (比例中項定理一)

176. 畢達哥拉斯(Pythagoras)定理. 下面的定理,是高等幾何中距離講法的出發點. 在初等幾何數值三角裏,也有廣大的應用,值得特別注意.

畢氏定理. 直角三角形中斜邊的平方,等於夾直角二邊的平方和.



[假設]　c是rt.$\triangle$ACB的斜邊; a, b爲他二邊.

[求證]　$c^2=a^2+b^2$.

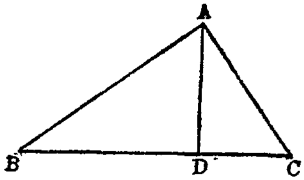
[解析]　引斜邊的高,分斜邊爲二段,利用上面所說直角三角形母子相似定理去證明.

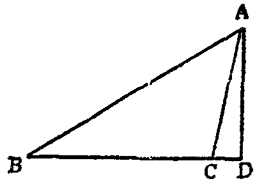
[證明]　作CD$\perp$AB, 則

$a^2=nc,\quad b^2=mc$　(比例中項定理二)

相加得　$a^2+b^2=c(m+n)=c^2$　(因 $c=m+n$)

177. 畢氏定理之推廣. 推廣畢氏定理,可別得二定理如下:





(一) 設 $\angle B$ 爲銳角，作 $AD \perp BC$，則

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times BC \times BD$$

[證明] 在 rt. $\triangle ADC$ 中，$CA^2 = AD^2 + CD^2$ (1)

但就 rt. ABD，知 $AD^2 = AB^2 - BD^2$ (2)

又 $CD^2 = (BC - BD)^2$ 或 $(BD - BC)^2$

$$= BC^2 + BD^2 - 2 \times BC \times BD \qquad (3)$$

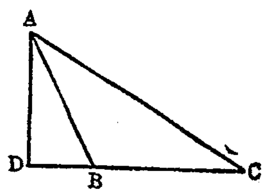
將 (2) (3) 代入 (1) 中，卽得

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times BC \times BD$$

(二) 設 $\angle B$ 爲鈍角，作 $AD \perp BC$，則

$$CA^2 = AB^2 + BC^2 + 2 \times BC \times BD$$

[證明] 與(一)大體相同，學生試按上法逐步推去，卽可證明.



習題四八

*1. 證明67頁圖中　$a^2:b^2=n:m$．

2. 證rt.△斜邊與他一邊平方差,等於第三邊平方.

*3. 求一等腰直角三角形中三邊的比.

*4. 一rt.△中,斜邊爲最短邊二倍,求三邊的比.

5. 如AD爲△ABC的高,求證$\overline{AB}^2-\overline{AC}^2=\overline{BD}^2-\overline{CD}^2$.

*6. 如△ABC中,一邊平方等於他二邊的平方和,試證必爲一rt.△. 如一邊平方大於他二邊的平方和,則必有一鈍角.

7. 有rt.△ABC, CD爲弦上的高,與∠A的分角線AE相交於F,求證　DF : FC=CE : EB.

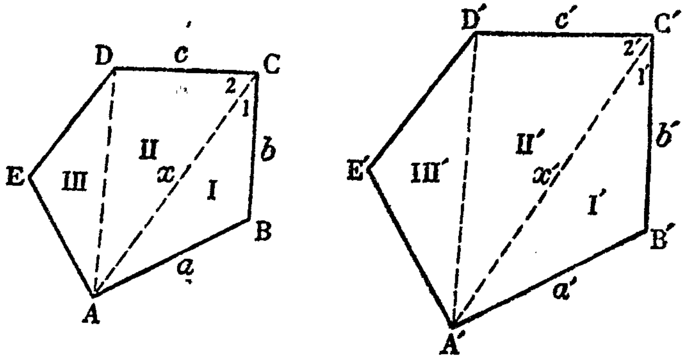
8. 已知△ABC中∠C=120°,求證　$c^2=a^2+b^2+ab$.

9. 已知△ABC中∠C=60°,求c與a, b的關係.

178. 相似多角形定理. 從相似多角形一對應頂點,引各對角線必分兩形爲同個數同位置的許多相似三角形.

[假設]　$ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$,

[求證]　$I \backsim I'$,　$II \backsim II'$,　$III \backsim III'$.



[證明] 因 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$, $\angle B=\angle B'$ (相似形定義)

$\therefore$ $\mathrm{I}\backsim\mathrm{I}'$ (相似△判別定理二)

於是 $\angle 1=\angle 1'$ (相似定義)

但 $\angle C=\angle C'$ (相似定義)

$\therefore$ $\angle 2=\angle 2'$ (普通公理)

又因 $\frac{x}{x'}=\frac{b}{b'}$, $\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ (相似定義)

故有 $\frac{c}{c'}=\frac{x}{x'}$ (普通公理)

卽得 $\mathrm{II}\backsim\mathrm{II}'$ (相似△判別定理二)

同理可證 $\mathrm{III}\backsim\mathrm{III}'$

179. 連比例定律. 如 $a, b, c \cdots\cdots a', b', c'$ 等成連比例,卽 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots$ 則 $\frac{a+b+c+\cdots}{a'+b'+c'+\cdot}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$.

[已知]　[求證]如上述.

[證明]　命 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots=K.$

則　$a=a'K,\ b=b'K,\ c=c'K\ \cdots\cdots$　(普通公理)

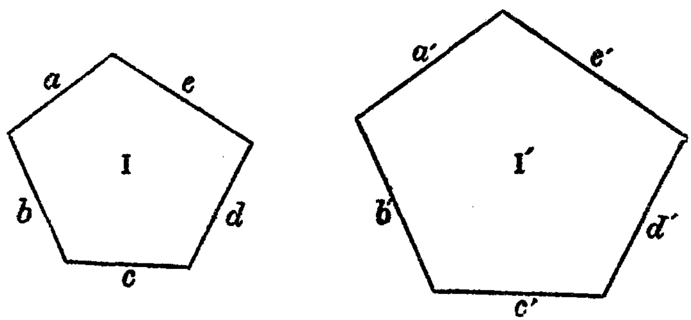
相加得　$a+b+c+\cdots\cdots=(a'+b'+c'+\cdots\cdots)K$

(普通公理)

即　$\frac{a+b+c+\cdots\cdots}{a'+b'+c'+\cdots\cdots}=K=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$

應用這定律,即可證明下面的定理.

相似多角形周界比定理. 兩相似多角形周界的比,等於任兩對應邊的比.



[假設]　$I\backsim I',\ p=a+b+c+d+e,\ p'=a'+b'+c'+d'+e',$

[求證]　$\frac{p}{p'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\cdots\cdots$

[解析]　用連比例定律即得.

[證明]　因　$I\backsim I'$　(假設)

∴ $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\frac{e}{e'}$$ (相似定義)

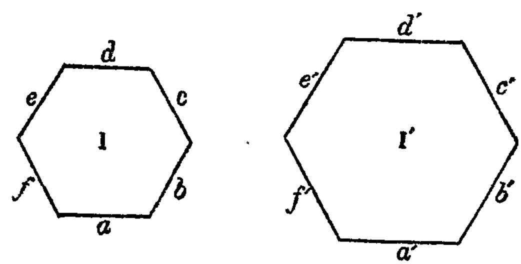
立得 $$\frac{p}{p'}=\frac{a+b+c+d+e}{a'+b'+c'+d'+e'}=\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\cdots\cdots$$

(連比例定律)

180. 相似正多角形定理. 邊數相同的正多角形相似.

[假設] I, I′ 各爲 n 邊的正多角形 (下圖 n=6).

[求證] $I \backsim I'$.



[解析] n 邊的正多角形各角是幾度?

[證明] 因 I, I′ 是正多角形, 故各角均等於

$$\frac{2(n-2)}{n}\text{rt.}\angle s$$ (習題三十第 8 題)

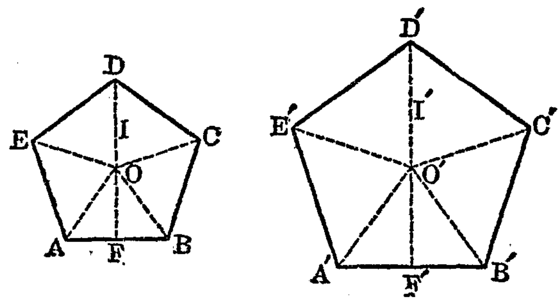
又因 $a=b=c=\cdots\cdots,\quad a'=b'=c'=\cdots\cdots$

(正多角形定義)

故 $$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\cdots\cdots$$ (普通公理)

∴ $I \backsim I'$.

181. 正多角形周界比定理. 邊數相同的二正多角形,其周界的比,等於頂心距或邊心距的比.



[假設] I和I′同爲n邊正多角形, O, O′爲心; OA, O′A′爲頂心距, OF, O′F′爲邊心距, p, p′爲周界.

[求證] $\dfrac{p}{p'}=\dfrac{OA}{O'A'}=\dfrac{OF}{O'F'}$

[解析] 先證 $\triangle OAB \backsim \triangle O'A'B'$.

[證明] $I \backsim I'$ (相似正多角形定理)

在I中, $OA=OB=OC=OD=OE$ (等腰半徑定理)

$AB=BC=CD=DE=EA$ (正多角形定義)

$\therefore \triangle AOB \equiv \triangle BOC \equiv \triangle COD \equiv \triangle DOE \equiv \triangle EOA$

(s. s. s.)

即 $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA$

但 $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOE+\angle EOA=4\text{rt.}\angle$

(§ 68)

∴ $\angle AOB=\frac{4}{n}\text{rt.}\angle$ (普通公理)

同理 $\angle A'O'B'=\frac{4}{n}\text{rt.}\angle=\angle AOB$

又因 $AO=OB,\ A'O'=O'B'$ (等圓半徑定理)

∴ $OA:O'A'=OB:O'B'$ (普通公理)

是以 $\triangle AOB\backsim\triangle A'O'B'$

(相似△判別定理二)

且 $OF\perp AB,\ O'F'\perp A'B'$ (邊心距定義)

$$\frac{OF}{O'F'}=\frac{OA}{O'A'}$$ (習題四六第2題)

∴ $$\frac{p}{p'}=\frac{OA}{O'A'}=\frac{OF}{O'F'}$$

(相似多角形周界比定理)

習題四九

*1. 證明相似三角形周界的比等於對應中線的比.

*2. 證明相似三角形周界的比,等於對應分角線的比.

3. 兩相似三角形的周界爲18寸和15寸,大三角形的一中線爲6.5寸,求小三角形裏的對應中線.

4. 兩相似多角形一對對應邊爲25寸和15寸,小多角形的周長72寸,求大多角形的周.

*5. 求一圓的內接和外切正三角形,邊與邊的比,和高與高的比.

6. 設兩圓的半徑爲5寸,10寸,求內接於兩圓的正六邊形周界的比.

7. 內接於半徑2寸的圓的正多角形,其周界爲a寸,問與其等邊數,內接於半徑3寸的圓的正多角形,周界若干?

8. 如正多角形的周界增加2倍,則頂心距(卽外接圓半徑)須增加若干?

第八編 幾何計算

面 積

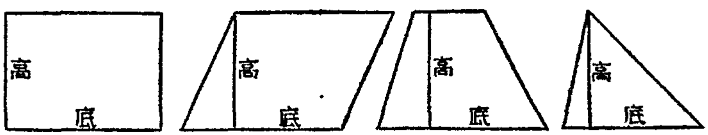
182. 面積. 在§43裏說過,面積單位,是每邊爲單位長的正方形. 換句話說,一個圖形的面積就是他所含這面積單位的個數,照全等平行四邊形定理的系,等邊的二正方形爲全等形. 所以用同一長度單位的正方形都全等,就同等長線段可以完全疊合的情形一樣. 這是我們用單位邊長正方形做面積單位的一個理由. 還有一個更重要的理由,可從第二編中各量法公式看出. 因爲用割補法很容易把各種直線形化成長方形後再求面積. 但是長方形面積,用上述的單位時,便與長闊發生極簡單的關係,使面積計算,大爲便利.

註. 本篇目的即在證明第二編中一部份求積公式.

183. 等積形. 二個圖形面積相等的,叫做等積(Equivalent)形. 等積的符號卽爲普通的等號=.

註. 等號原來單指大小關係而言. 但在線段,與角的情形,大小相等便能疊合,而爲全等,所以和面積情形不同,沒有要區別大小相等與全等的必要.

184. 底和高. 以長方形,平行四邊形,三角形的一邊或梯形中平行二邊之一做底(Base),則長方形中的鄰邊,平行四邊形及梯形中底與對邊的公共垂線,以及三角形中這底上的頂垂線,各稱爲該圖形的高(Altitude).



185. 長方形面積. 照§44所舉的理由,便可說明.

長方形面積定理. 長方形面積等於高和底的乘積.

由此很易推得

系一. 二等高(或底)長方形面積的比,等於二底(或高)的比.

系二. 二長方形面積的比,等於其底與高乘積的比.

但是如果嚴格一些的講法,却應當先證這二系,才能推出定理(看下面的習題).

註. 定理所述,原是一種簡單說法,較詳細一點,應該說: 一長方形的面積(即所含面積單位個數)等於底與高中各含相當長度單位個數的乘積. 以後皆從簡便說法.

習題五十

*1. 設有二等高長方形,底長的比爲$\frac{m}{n}$,試做§158的方法,直接證明上面的系一.

*2. 有三個長方形I, II, III. I和II等高,而底的比爲$\frac{b}{b'}$, II和III等底,而高的比爲$\frac{h}{h'}$試求I與II, II與III面積的比,并證出I和III面積的比.

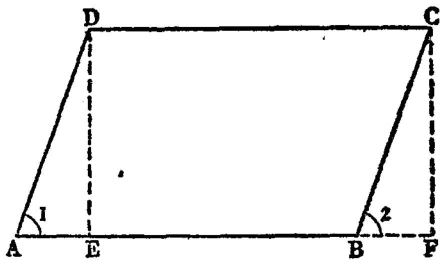
*3. 取III爲面積單位,而就上題推證長方形面積定理.

4. 二等積長方形的底如相等,問高是不是也相等?

5. 二等積長方形中高的比與底的比有何關係?

*6. 求正方形面積與邊長關係,并用詳細一些的說法(§185註.)

186. 平行四邊形面積定理. 平行四邊形面積等於底乘高.



[假設] ▱ABCD的底為b,高為h.

[求證] ▱ABCD=hb.

[解析] 看§45.

[證明] 按垂線作法,作DE,CF二線和AB及延長線垂直. 在rt.△AED,rt.△BFC裏∠1=∠2

(//性質定理二)

AD=BC　(▱性質二)

∴ rt.△AED≅rt.△BFC (全等rt.△定理一)

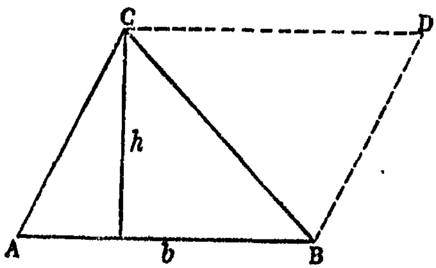
∴ ▱ABCD=△AED+梯形EBCD

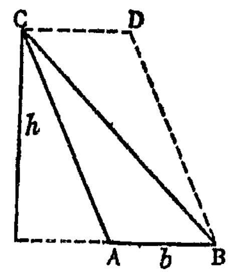
=△BFC+梯形EBCD　(普通公理)

=長方形EFCD=hb　(長方形面積)

系. 同在二條平行線內,同底或等底的二平行四邊形必等積.

187. 三角形面積定理. 三角形面積等於高與底乘積的一半.





[假設] △ABC一底為b,相當高為h(左圖或右圖).

[求證] $\triangle ABC=\frac{1}{2}hb.$

[解析] 作▱ABCD,再用▱性質一.

[證明] 作CD//AB, BD//AC. (//作法)

則 ABCD為▱,而BC為一對角線. (定義)

∴ $\triangle ABC\cong\triangle DCB$ (▱性質一)

∴ ▱ABCD=△ABC+△DCB=2△ABC

∴ △ABC=$\frac{1}{2}$▱ABCD=$\frac{1}{2}$hb. (▱面積定理)

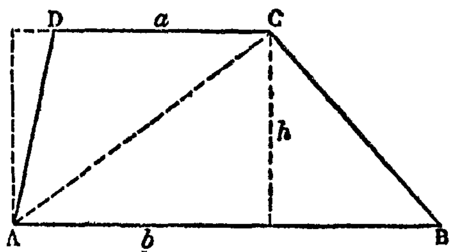
系一. 同在二線平行線內,同底或等底的二個三角形必等積.

系二. 二三角形面積的比,等於其底與高乘積的比.

又習題四六第2題關係,得

系三. 二相似三角形面積的比,等於其任一相當邊平方或相當高平方的比.

188. 梯形面積定理. 梯形面積等於兩底的半和與高的乘積.



[假設] 梯形ABCD的二底爲a及b,高爲h.

[求證] 梯形$ABCD=\frac{1}{2}(a+b)h$.

[解析] 引一對角線,分爲二個△,再用§187定理.

[證明] 引對角線AC,分這梯形爲△ABC, △ACD,則這二△的高必相等,而爲h (習題三二第2題)

又　　$\triangle ABC=\frac{1}{2}hb$, $\triangle ACD=\frac{1}{2}ha$ (△面積定理)

相加得,梯形 $ABCD=\triangle ABC+\triangle ACD$

$$=\frac{1}{2}hb+\frac{1}{2}ha=\frac{1}{2}(a+b)h.$$

習　題　五　一

1. 證明連接▱對邊中點的二線段,分全形爲四個等積▱.

2. 證明經過▱對角線交點的任何線,分全形爲二個等積梯形或▱.

*3. 證明斜方形面積等於其二對角線乘積的一半.

4. 證明△三中線,分原形爲六個等積△.

5. 證明連接△任二邊中點所成小△,面積爲原形的四分之一.

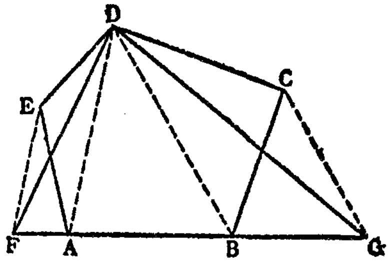
6. 已知等邊三角形邊長爲 a, 求其面積(看習題四八第4題).

*7. 已知△底邊位置及長短,且面積大小有定,求其對頂點的軌跡.

*8. 試分一梯形爲一△和一▱,而求其面積公式.

9. 已知一等腰梯形的二底爲 a, b, 他二等邊均爲1,求其面積.

189. 作等積形法. 求作一三角形,與一已知多角形等積.



[已知] 多角形ABCDE.

[求作] 一三角形與ABCDE等積.

[作法] 聯對角線DA, DB. 并引EF//DA, CG//DB (F,G是所引線與AB延線交點). (作//法)

聯成△DFG卽得所求的△.

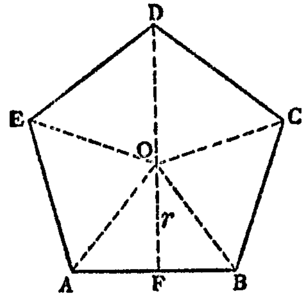
[理由] △ADE=△ADF, △BDC=△BDG.

(△面積定理系一)

ABCDE=△ABD+△ADE+△BDC

=△ABD+△ADF+△BDG=△DFG.

190. 正多角形面積定理. 一正多角形面積等於邊心距與周界乘積的一半.



[假設] 正多角形ABCDE的心爲O,邊心距爲r,周界爲p.

[求證] $ABCDE=\frac{1}{2}pr.$

[解析] 從這正多角形心,作頂心距,分原形爲全等等邊△. 再用△面積公式求之。

[證明] 連接OA,OB,OC,OD,OE,則

$OA=OB=OC=OD=OE$ (等圓半徑定理)

$AB=BC=CD=DE=EA$ (正多角形定義)

$\therefore \triangle AOB\equiv\triangle BOC\equiv\triangle COD\equiv\triangle DOE\equiv\triangle EOA$ (s.s.s.)

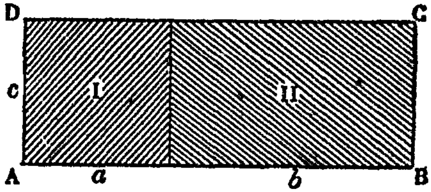
但 $\triangle AOB=\frac{1}{2}r\cdot AB$ (△面積定理)

$\therefore ABCDE=n\cdot\triangle AOB=\frac{1}{2}r\cdot n\cdot AB=\frac{1}{2}rp.$

191. 代數恆等式的幾何證明. 凡代數裏二次的齊次恆等式,都可借面積的理

證明. 卽只須證明等式兩邊所表的面積相等便得. 在此須注意初等幾何裏,只講正量,所以不能由這種方法,證明這些公式的普遍性.

例一. 證明代數分配律: $(a+b)c=ac+bc$.



$$(a+b)c=\text{面積 }ABCD,$$

$$ac=\text{面積 I}$$

$$bc=\text{面積 II}$$

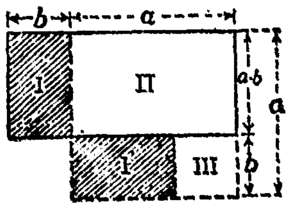
$$ABCD=\mathrm{I}+\mathrm{II}\quad\therefore (a+b)c=ac+bc$$

例二. 證明平方差公式: $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$$(a+b)(a-b)=\mathrm{I}+\mathrm{II}$$

$$a^2=\mathrm{I}'+\mathrm{II}+\mathrm{III}$$

$$b^2=\mathrm{III}$$

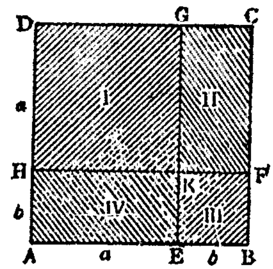


觀右圖,卽明上式.

例三. 證明二項式平方公式.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2,\quad (a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$(a+b)^2=$面積ABCD



$a^2=\mathrm{I}$

$b^2=\mathrm{III}$

$ab=\mathrm{II}=\mathrm{IV}$

$\mathrm{ABCD}=\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{IV}+\mathrm{III}$

即 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

如就上圖,設AB=a, EB=b,則可證明第二式.

習題五二

1. 求作一等腰△與一已知△等積.

2. 求作一正方形與一已知△等積.

*3. 已知圓半徑為r,求其內接正方形和外切正方形的面積.

*4. 已知圓半徑為r,求其內接正六角形和外切正六角形的面積.

5. 用幾何方法證明下面的代數恆等式:

(一) $a(b-c)=ab-ac$;

(二) $a(b+c+d)=ab+ac+ad$;

(三) $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$;

(四) $(a+b)(c-d)=ac+bc-ad-bd$.

圓的度量

192. 圓的相關量. 我們以前所說量長度的方法,以適宜線段為單位,量面積,以適宜正方形為單位,而用疊合法,看所求長或面積中能含這單位的倍數(或幾分之幾). 所以先決條件,就是要單位能和所求件疊合: 但是我們怎能叫圓弧和直線段疊合? 又怎能補割一圓成為長方形呢?

要從嚴格方面,講圓的度量,須先立圓的相關量——如圓周(即全圓的長, §53), 圓面積——的意義. 但這種講法, 非藉極限(Limit)的理不能明白, 在初學不易了解, 故本書只用淺顯的直觀設法解釋.

193. 圓與正多角形. 先複習§§141,143以及習題三八第6第7兩題.

作一圓的內接外切同邊數正n角形, 假設周界各為p_n與P_n, 則$p_n<P_n$. 今將二者

邊數倍增,則陸續可得

$$p_n < p_{2n} < p_{4n} \cdots\cdots < P_{4n} < P_{2n} < P_n.$$

這樣增加下去, p_{2kn} 和 P_{2kn} 可以非常接近,但是總不相等,就是說二者不能相合. 所以我們意想中,必有一量,含於這二種的中間,把他們隔開. 就直觀看來,這中間的量豈不是圓周麼?

面積的講法,也和上面一樣,如以 a, A 表二種正多角形面積,顯見

$$a_n < a_{2n} < a_{4n} < \cdots\cdots < A_{4n} < A_{2n} < A_n.$$

所以圓面積就是分隔這二種面積的量.

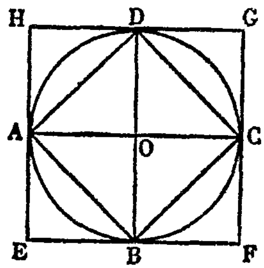
圓和正多角形,關係既這樣密切,故未講圓的度量以前,先說幾種簡單的作圖題.

註. 照理論講說,這種內接外切正多角形,原不限定正多角形.

194. 已知圓的內接外切正多角形作圖法. 照§§141, 143 的定理,便知只須求出圓上等分點,即可解決本問題. 表面看來,

似乎應當和等分線段一樣的簡單. 真是出人意外,問題還談不到簡單不簡單,在初等幾何範圍以內(卽只限定用無度尺和圓規),這題在根本上竟不能作(參看§50). 下文只述可作情形中,極簡單的二種.

195. 已知一圓要作內接外切正方形.



[已知]　⊙O.

[求作]　(一)內接正方形;(二)外切正方形.

[作法]　作二垂線直徑AC,BD.

連ABCD得內接正方形.

過A,B,C,D作切線,相交成外切正方形.

[理由]　$\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOA=\text{rt.}\angle$

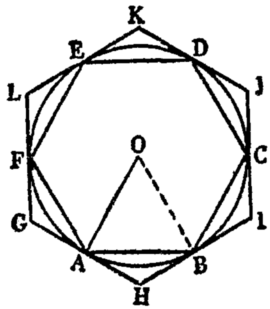
(直角公理)

$\therefore$　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DA}$　(等圓心角對弧)

∴ ABCD是內接正方形(圓內接正多角形定理)

EFGH是外切正方形(圓外切正多角形定理)

196. 已知一圓要作內接外切正六角形.



[已知] ⊙O.

[求作] (一)內接正六角形;(二)外切正六角形.

[作法] 任作一半徑OA.

以A爲心,OA爲半徑作弧,交⊙O於B,得第二等分點. 如此繼續得C,D,E,F.

連諸等分點,得內接正六角形.

過諸等分點,作諸切線,相交即成外切正六角形.

[理由] $OA=OB=AB$ (等圓半徑定理,作法)

∴ $\angle AOB=\frac{2}{3}\text{rt.}\angle=\frac{1}{6}$周角 (習題三十第3題)

∴ $\angle AOB=\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOF=\angle FOA.$

∴ $\widehat{AB}=\widehat{BC}=\widehat{CD}=\widehat{DE}=\widehat{EF}=\widehat{FA}$ (等圓心角對弧)

∴ ABCDEF是內接正六角形(圓內接正多角形定理)

GHIJKL是外切正六角形(圓外切正多角形定理)

系一. 圓內接正六角形的邊和圓半徑相等.

系二. 聯一圓內接正六角形相隔頂點,得這圓的內接等邊三角形.

習題五三

1. 求作圓內接外切正八角形,正十六角形.

*2. 求已知圓內接等邊△每邊與半徑的比.

*3. 求作一正六角形,使邊長等於已知線段.

4. 證明圓內接等邊△的邊心距,等於圓半徑的一半.

*5. 求圓內接正方形邊心距與半徑的比.

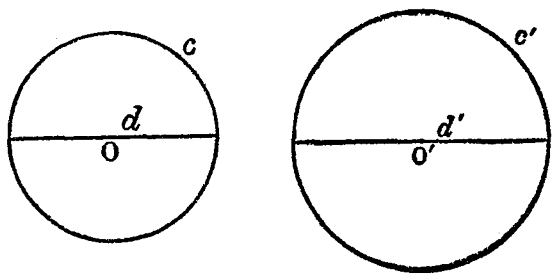
*6. 在圓上任取若干點,作內接外切多角形,再將邊數加多(不限於倍增),問§194所說情形,是否仍合?

197. 圓與正多角形同性公理. 凡正多角形特性,與邊數多寡無關的,也是圓的特性.

如正多角形周界比定理,正多角形面積定理都是,圓周和面積計算法,卽本於此.

註. 這條公理,就嚴密的眼光看來,甚爲含混. 但對初學,則較極限的說法爲簡而易明.

198. 圓周率定理. 任何圓圓周與其直徑的比,爲一定數.



[假設] ⊙O 的圓周爲 c, 直徑爲 d.

[求證] $c \div d =$ 一常數.

[解析] 應用上節公理和正多角形周界比定理.

[證明] 另作一 ⊙O′, 其圓周爲 c′, 直徑爲 d′.

命二圓半徑,各爲 r, r′. 今在二圓內,作同邊數內接正多角形 I, I′, 其周界爲 p, p′, 則

$I \backsim I'$ (相似正多角形定理)

$\therefore \quad \frac{p}{p'}=\frac{r}{r'}=\frac{d}{d'}$ (正多角形周界比定理)

$\therefore\qquad \frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}$ (圓與正多角形同性公理)

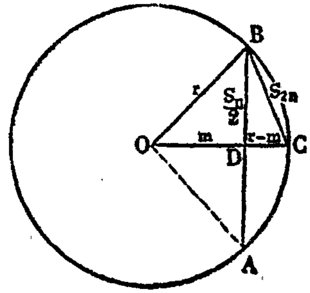
即 $\qquad \frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}$

註. 這定比值叫圓周率,常用希臘字母π表示. 他的值是無盡不循環小數,普通以$3\frac{1}{7}$, 3.1416等代其近似值. 在平常計算,已儘足達適當準確度.

系一. $\qquad c=\pi d=2\pi r.$

系二. 在以r爲半徑的圓中,m°的弧的長等於$\frac{m}{360}\times 2\pi r.$

199. 圓周率求法. 實際上計算圓周率,本當用無盡連級數(Infinite series),或他種高等算學去推求. 下文用幾何方法講解,不過是想明其理而已:



如上圖,設 r 爲圓半徑, S_n 爲內接正 n 角形一邊, S_{2n} 爲內接正 2n 角形一邊. 今往求 S_n 與 S_{2n} 關係.

但 $OD\perp AB$, 則 $AD=DB=\frac{S_n}{2}$, 并命 $OD=m$. 就 rt. $\triangle ODB$, rt. $\triangle BDC$ 中,用畢氏定理,得

$$\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+m^2=r^2,$$

$$\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+(r-m)^2=S_{2n}{}^2$$

從這二個聯立方程式,消去 m. 則從前式解得

$$m=\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\quad\text{代入後式.}$$

$$S_{2n}{}^2=\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+\left[r-\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}\right]^2$$

$$=\left(\frac{S_n}{2}\right)^2+r^2-2r\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}+r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2$$

$$=2r^2-2r\sqrt{r^2-\left(\frac{S_n}{2}\right)^2}$$

$$=2r^2-2r\sqrt{\frac{4r^2-S_n{}^2}{4}}$$

$$=2r^2-r\sqrt{4r^2-S_n{}^2}$$

$$=r^2\left[2-\sqrt{4-\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}\right]$$

$$\therefore\quad \underline{S_{2n}=r\sqrt{2-\sqrt{4-\left(\frac{S_n}{r}\right)^2}}}$$

今自正六角形起,這時 $S_6=r$. 且令 $r=1$, 代入上式計算如下表:

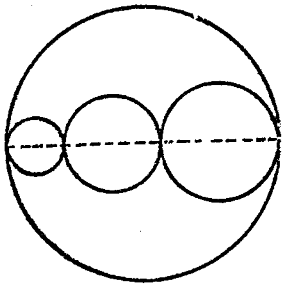
n	計　算　公●式	一邊長	周界
12	$\sqrt{2-\sqrt{4-1^2}}$	0.51764	6.21166
24	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.51764)^2}}$	0.26105	6.26526
48	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.26105)^2}}$	0.13081	6.27870
96	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.13801)^2}}$	0.06534	6.28206
192	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.06534)^2}}$	0.03272	6.28291
384	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.03272)^2}}$	0.01636	6.28312
768	$\sqrt{2-\sqrt{4-(0.01636)^2}}$	0.00818	6.28317

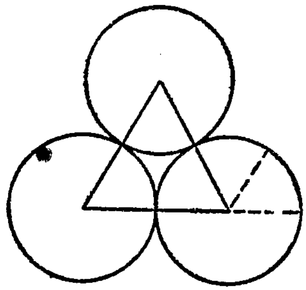
今用正768角形周界做圓周差近值,即得

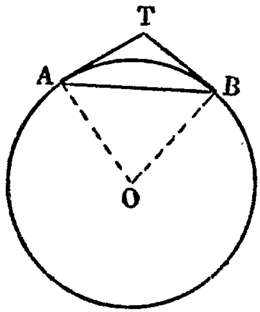
$$\pi=3.14159.$$

習題五四

1. 將一圓直徑,分爲任意幾段,用各段爲直徑連作小圓,如下左圖. 證明小圓周總和等於大圓周.







2. 以一等邊三角形三頂點爲心,每邊長的一半做半徑,作三等圓,兩兩外切. 求三角形內三弧的和.

*3. 上圖中 AT, BT 爲二切線,試證 $AT+TB>\widehat{AB}>AB$.

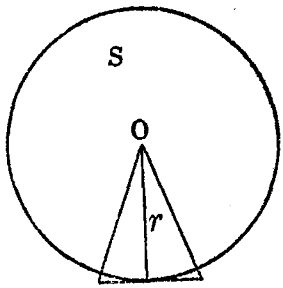
*4. 已知一弧和半徑等長,求其度數.

註. 這弧所對的圓心角,在理論算學中,用做量角的單位,稱爲1弧度角 (Radian).

*5. 求1°等於幾弧度角.

*6. 自圓內接正方形起,依 § 199 的公式,求到內接正 64 角形,以定 π 的差近值(可用二位小數).

200. 圓面積定理. 圓面積等於半徑和圓周的乘積的一半.



[假設] ⊙O 的半徑爲 r, 周爲 c, 面積爲 S.

[求證] $$S=\frac{1}{2}cr.$$

[解析] 用正多角形面積定理和圓與正多角形同性公理便得.

[證明] 設這圓一外切正多角形,面積爲 A, 周界爲 p, 則

$$A=\frac{1}{2}pr. \qquad \text{(正多角形面積定理)}$$

$$\therefore \quad S=\frac{1}{2}cr. \quad \text{(圓與正多角形同性定理)}$$

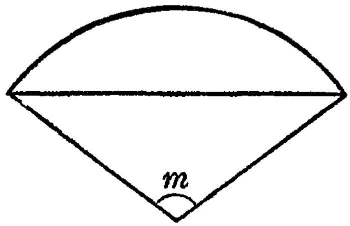
系一. 圓面積等於半徑平方和圓周率的乘積.

因 $$S=\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}2\pi r\cdot r=\pi r^2$$

系二. 二圓面積比,等於半徑平方比.

201. 扇形和弓形面積. 如扇形圓心角爲m°,半徑爲r,則由上理,顯見

扇形面積$=\frac{m}{360}\pi r^2$. 從扇形面積減去一等腰三角形,得弓形面積. 但除特例外,須



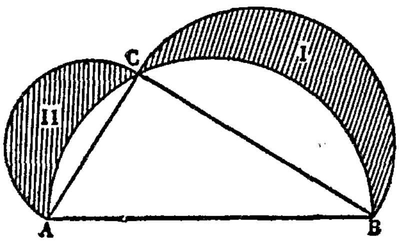
用數值三角法,方能求值.

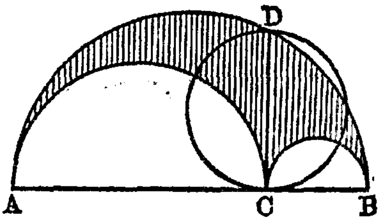
習 題 五 五

1. 求證圓面積$S=\frac{1}{4}\pi d^2$.

2. 用rt. △三邊爲直徑作圓,試證斜邊上圓面積,等於他二邊上者的和.

3. 在rt. △三邊上作半圓,如下圖. 證明I, II兩個初月形面積和,等於這rt. △的面積.





4. 在線段AB上取一點C, 作CD⊥AB及三半圓如上圖. 證明黑暗部分, 等於用CD爲直徑的圓面積.

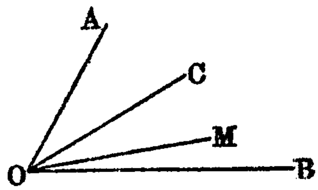
5. 求作一圓使其面積爲二已知圓面積的差.

6. 已知一圓, 圓周與面積等值, 求其半徑.

7. 有一弓形, 已知弦長2寸, 自劣弧中點到弦上距離(稱爲矢)爲$\sqrt{2}-1$寸. 求其弧長和面積.

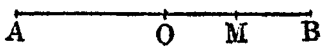
總習題

1. OC是∠AOB的二等分線，OM是∠AOB內的任一直線，證明∠AOM與∠BOM的差等於∠MOC的二倍.



2. 上題若OM在∠AOB之外，則∠AOM與∠BOM的和等於∠MOC的二倍.

3. 直線AB的中點是O，在此直線上作一任意點M，則AM與BM的差，等於MO的二倍.

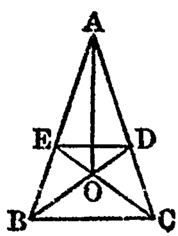


4. 上題若M點在AB的延長線上，則AM與BM的和等於MO的二倍.

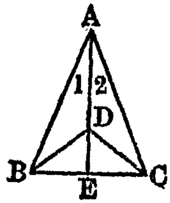
5. 如圖，AB＝AC，AD＝AE.

求證 (1) BD＝CE，(2) ∠ABD＝∠ACE，

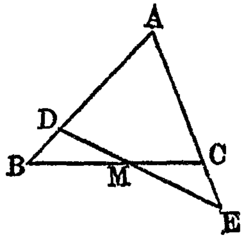
(3) OB＝OC，(4) OA平分∠BAC.



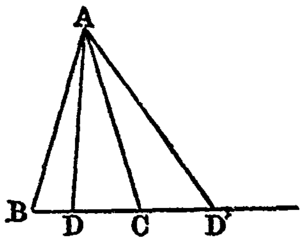
6. 兩同底的等腰三角形,頂點的聯線或引長線,一定垂直於底邊.



7. △ABC通過BC上一點M作一直線,與AB相交於D,與AC的引長線相交於E,若BM=ME, DM=CM. 則AD+AE=AB+AC.

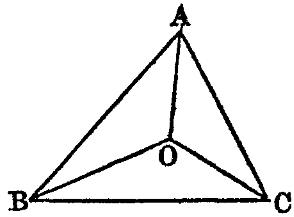


8. 自等腰三角形ABC的頂角A到底邊BC作任意直線AD,則AD必定小於兩腰.

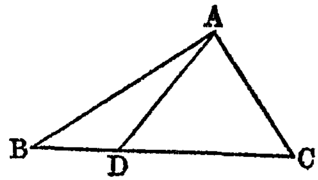


9. 上題若從A到BD的延長線上作任意線AD′,則AD′必大於兩腰.

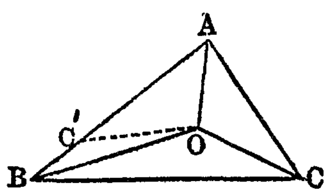
10. O點爲△ABC形內的一點，則OA, OB, OC之和小於周邊，而大於周邊的一半.



11. 自△ABC的頂點A，到底邊BC作任意直線AD，則AD必小於周圍的一半.



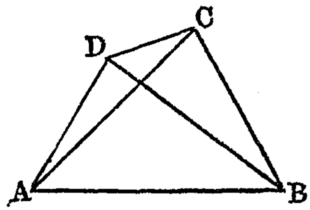
12. 自△ABC頂角A的二等分線上任一點O作OB, OC. 則OB與OC的差必小於AB與AC的差.



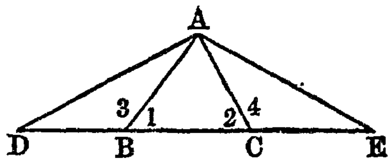
13. 四邊形ABCD中AB是最大邊，CD是最小邊，求證.

$$\angle ABC < \angle ADC,$$

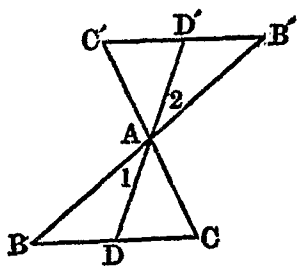
$$\angle BCD > \angle BAD,$$



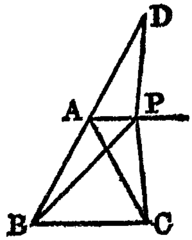
14. 在△ABC底邊BC的延長線上作BD=AC, CE=AB, 若AB>AC, 則AD>AE.



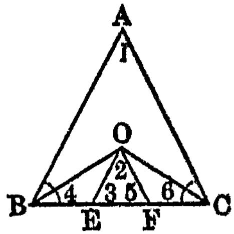
15. 把△ABC的兩邊BA,CA各就A點延長, 令AB′=AB, AC′=AC. 則BC的中點D, B′C′的中點D′和A點必在一直線上.



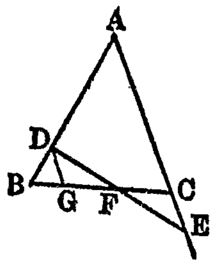
16. 等腰三角形ABC, 頂角之外角CAD的二等分線上任一點為P, 則PB+PC>AB+AC.



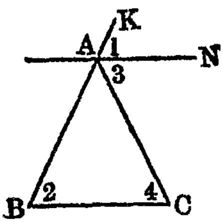
17. 等邊三角形ABC的B,C二角的二等分線交於O點,從O作OE//AB, OF//AC,則BE=EF=FC.



18. 直線DE與等腰三角形ABC的AB邊交於D,與AC的延長線交於E,若DF=EF,則AD+AE=2AB.



19. △ABC頂角A的外角CAK的二等分線AN,若AN//BC,則△ABC是等腰三角形.

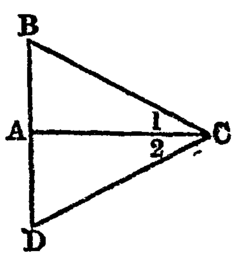


20. 等腰三角形的頂角若爲底角的2倍 則爲直角三角形.

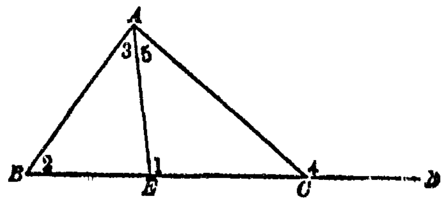
21. 由直角三角形內直角的頂點作一線到斜邊的中點,則分此三角形爲兩個等腰三角形.

22. 由△的一頂點作中線到底邊,若等於底邊二分之一,則其頂角爲直角.

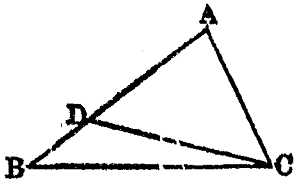
23. 直角三角形的斜邊BC若爲他一邊AB的二倍,則$\angle B=2\angle C=\frac{2}{3}$直角.



24. 三角形ABC頂角A的二等分線交底邊BC於E,則AEC角等於C角的外角與B角之和之半.



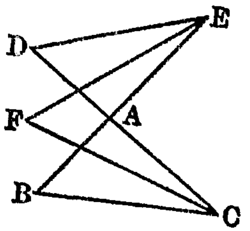
25. △ABC 中 AB>AC, 在 AB 上取 AD=AC, 則



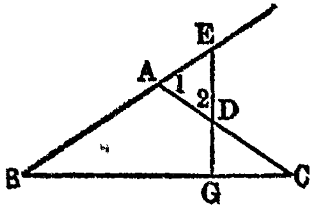
$\angle ADC=\frac{1}{2}(\angle ACB+\angle ABC)$

$\angle BCD=\frac{1}{2}(\angle ACB-\angle ABC)$

26. △ABC 與 △ADE 的頂角互成對頂角, C 角與 E 角的二等分線交於 F, 則 $\angle CFE=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle EDC)$



27. 等腰三角形 ABC 的底角等於頂角的 $\frac{1}{4}$, 在 BC 上作垂線交 AC 於 D, 交 BA 的延長線於 E, 則 △ADE 是等邊三角形.



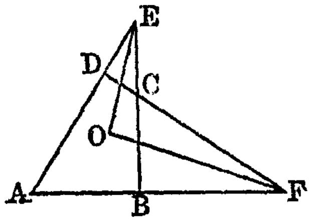
28. 一多角形內角和爲1800°,求其邊數.

29. 自 n 角形任一頂點,可作幾對角線? 一共可作幾條?

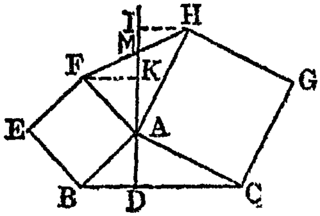
30. 有多角形,其內角之和,比二倍他的邊數的多邊形小十直角,求邊數.

31. 一n角形,有9對角線,求其邊數.

32. 四邊形之對邊 AD, BC, AB, DC 其引長線之交角爲 E 及 F 各作二等分線 EO, FO. 證$\angle EOF=\frac{1}{2}(\angle A+\angle C)$.

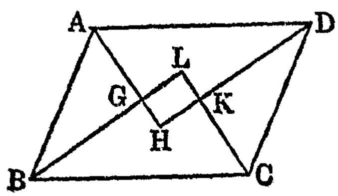


33. 三角形的二邊作正方形 ABEF, ACGH. AD⊥BC, AD 的引長線必二等分 FH 於 M.

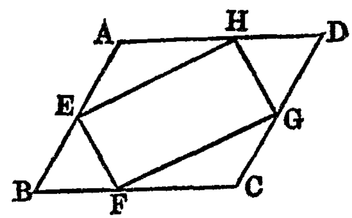


34. 兩對角線相等的梯形必爲等斜梯形.

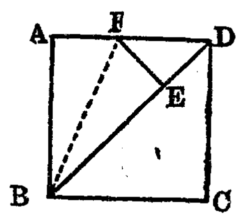
35. 平行四邊形四角的二等分線若相交,則其所成之四邊形必爲矩形.



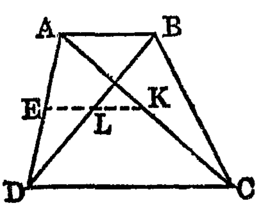
36. 在平行四邊形的四邊AB,BC,CD,DA上順次取E,F,G,H,若AE=BF=CG=DH則EFGH爲平行四邊形.



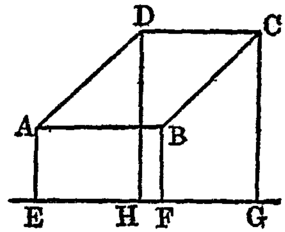
37. 正方形ABCD於其對角線BD上取BE=AB.從E作垂線於BD與AD遇於F,證AF=FE=ED.



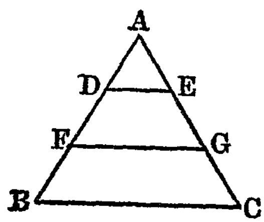
38. 梯形ABCD的兩對角線,其中點的連結線KL等於平行二邊AB,CD差之半.



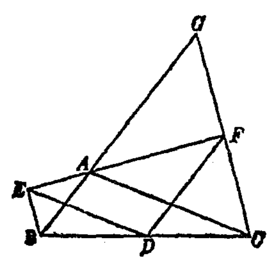
39. 平行四邊形ABCD的各頂角到形外一直線作AE,BF,CG,DH等垂線,則AE+CG=BF+DH.



40. 三等分三角形的二邊AB及AC，其分點爲D,F，及E,G，則DE$=\frac{1}{3}$BC，FG$=\frac{2}{3}$BC.

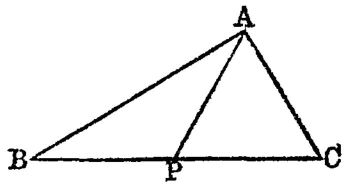


41. 三角形ABC於A的外角二等分線上作垂線BE, CF. D是BC的中點，則DE$=$DF$=\frac{1}{2}$(AB$+$AC).

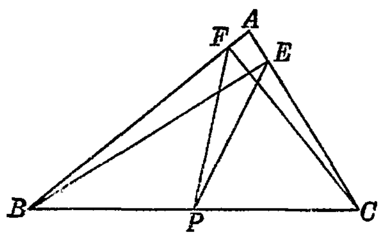


42. 四邊形ABCD的周邊大於兩對角線的和，而小於其和的二倍.

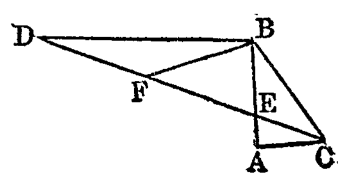
43. 三角形的頂角A爲直角,則中線AP等於BC的一半.



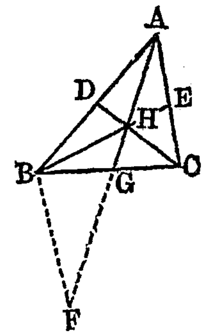
44. 三角形的垂線爲BE, CF, 而BC的中點爲P, 證PE=PF.



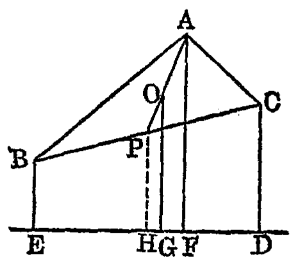
45. 直角三角形的一頂角C作直線CED, 截AB一邊於E, 與AB的垂線BD遇於D, 而DE爲斜邊BC的二倍,證$\angle ACD=\frac{1}{3}\angle ACB$.



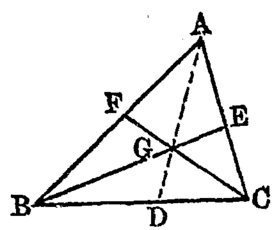
46. 三角形三中線的和必小於周界.



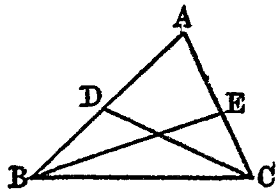
47. 三角形各角點及重心至形外一直線上作垂線於D,E,F,G各點，則3OG=BE+AF+CD.



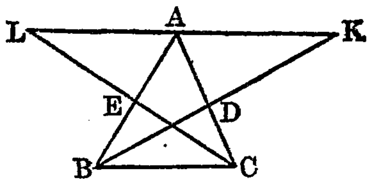
48. 三角形小邊的中線大於大邊的中線.



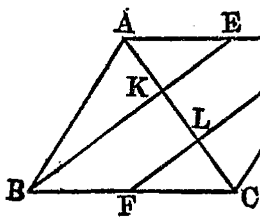
49. 三角形小角的二等分線大於大角的二等分線.



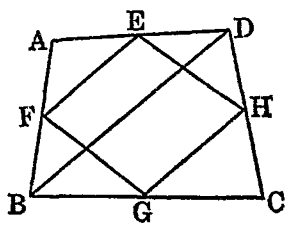
50. 三角形 ABC 自 B, C 引中線 BD, CE, 各引長至 K, L, 使 KD=BD, LE=CE, 則 K, L, A 在一直線上.



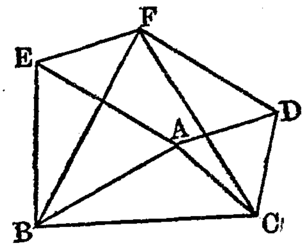
51. 平行四邊形對邊 AD, BC 的中點順次爲 E, F, 結 BE, DF, AC, 而 AC 被 BE, FD 分爲三等分.



52. 結合四邊形各邊中點所成的四邊形爲平行四邊形, 其周邊等於原四邊形對角線之和.



53. 在三角形ABC各邊上晝等邊三角形ACD, ABE, BCF, B與D置於AC異側, E與C置於AB異側, 又F與A置於BC同側. 若結FE, EA, AD, DF, 則EFDA爲一平行四邊形.



54. 若四邊形的兩對角皆爲直角,則他二角的平分線必平行.

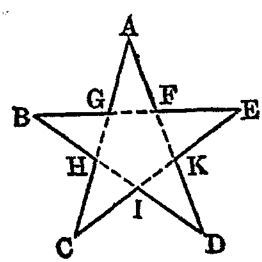
55. 若四邊形的二隣角皆爲直角,則他二角的平分線必互相垂直.

56. 由等腰△底邊的中點,向兩腰的中點,作二直線,則形成一菱形.

57. 若一△的各頂點位於另一△的邊上,則前者的周界小於後者的周界.

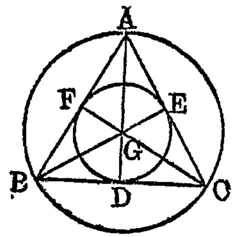
58. 四邊形二對邊的中點與二對角線的中點,可定一平行四邊形.

59. 求證五星形各頂角的和等於二直角.

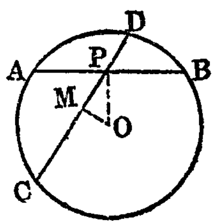


60. 證明三角形三中線的和大於他的周界的四分之三.

61. 等邊三角形各頂點A, B, C, 或各邊中點D, E, F必在重心G爲中心的圓上.

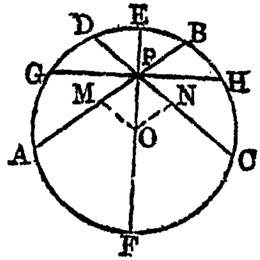


62. 將弦三等分的半徑對其弦的弧非三等分, 弦爲AB, 將AB三等分的半徑爲OC, OD.



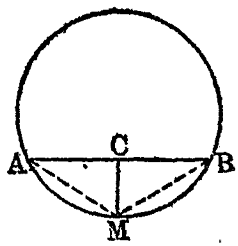
63. 通過圓內一點P的諸弦, 其中最小者必二等分於P.

64. AB, CD, 二弦交角的二等分線若爲直徑EOF, 或爲最小弦GH, 則其二弦相等.

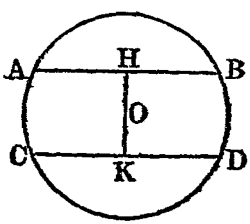


65. 兩圓的外公切線與內公切線,各爲等長.

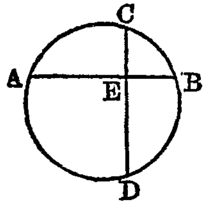
66. 由一弦的中點作一直線到所對弧的中點,必爲此弦的垂直線.



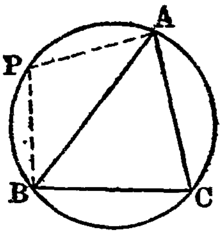
67. 通過二平行弦的中點的直線,一定通過圓心.



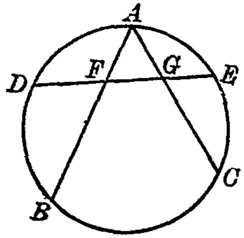
68. 交於直角的二弦爲AEB, CED, 則AD弧 +BC弧 =AC弧 +BD弧 = 半圓周.



69. 三角形ABC的外切圓,其爲三邊所截弓形的角的和等於四直角.



70. AB, AC兩弧的中點爲D, E, 而DE與此二弦的交點爲F, G, 則AF=AG.

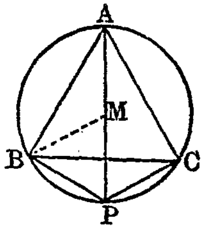


71. 三角形ABC的垂心爲P, 直線AP交於BC, 和外接圓周順次爲E, F. 證PE=EF.

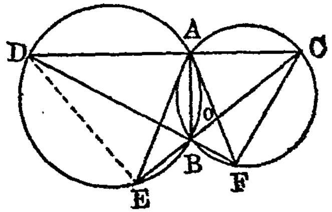
72. 內接四角形ABCD對邊AD, BC的交點爲F, 另一對邊AB, CD的交點爲E, 證角AFB, 角BEC的各等分線爲直交.

73. 由圓外一點至圓周所作的最短線, 爲引長之可以通過圓心之線.

74. 若ABC爲圓內切等邊三角形, P爲BC弧上的任一點. 求證PA=PB+PC.

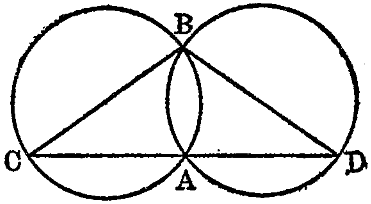


75. 作直線CAD垂直於兩圓交點的連結線AB, 引長CB及DB截圓周於F及E, 則AB必二等分EAF角.

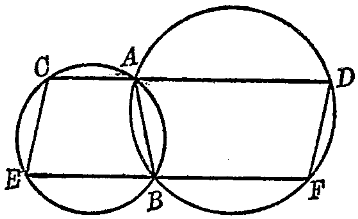


76. 於一弦的兩端作二弦爲其垂線, 則此兩弦相等.

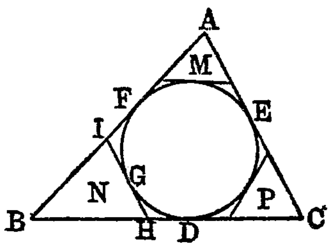
77. 相等的二圓, 相交於A, B, 過A的直線, 與圓周的交點爲C, D. 作BC, BD, 則△BCD爲二等邊.



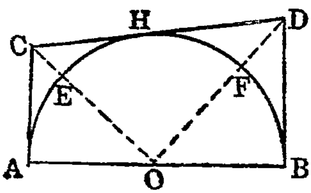
78. 過二圓周的交點AB引平行直線,各直線與各圓周的交點爲C, D, E, F, 結CE, DF, 則四角形CEFD爲平行四邊形.



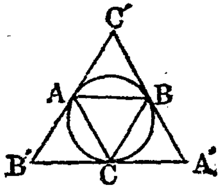
79. 切於三角形ABC的內切圓,於各二邊間作任意的切線所成的三個三角形M, N, P各周邊的和等於原形的周邊.



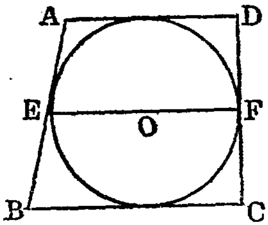
80. 半圓直徑AB兩端的二切線AC, BD間作任意的切線CD, 則中心O必對CD而成直角.



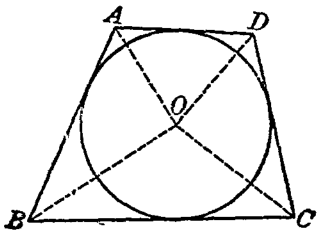
81. 一個圓內的正三角形等於圓外切正三角形四分之一.



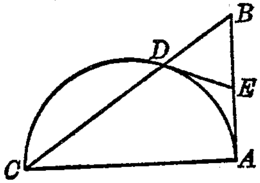
82. 通過梯形ABCD的內切圓中心O與平行二邊AD, BC平行,而作直線交其他的二邊於E, F, 則EF等於原形周邊四分之一.



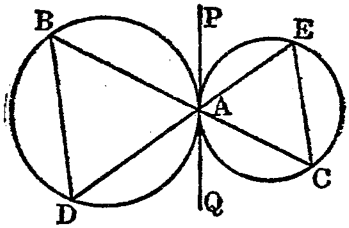
83. 圓的外切四邊形ABCD, 其兩對邊對於中心的角互成補角.



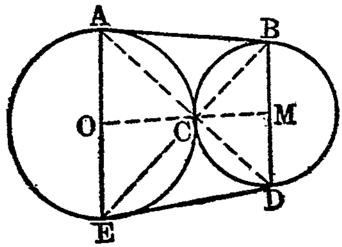
84. 以直角三角形的一邊AC爲直徑而畫半圓,截斜邊BC於D. 自D作切線,截AB於E, 則BE=DE.



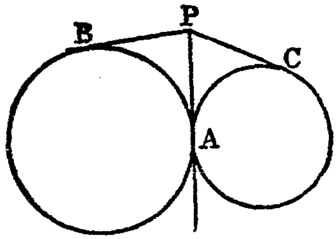
85. 通過外切二圓的切點A於二圓周間作二直線BC, DE, 則BD, CE兩弦必平行.



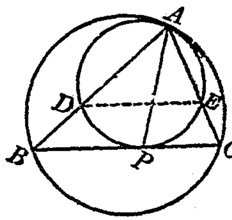
86. 外切於C的兩圓,其公共切線爲AB, 則ACB角等於直角.



87. 兩圓外切於A點, 從A的切線上一點P至兩圓作切線PB, PC則相等.



88. 內切於A的外圓的弦BC,若切內圓於P,則BAP角=CAP角.

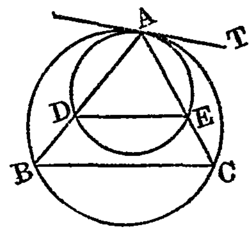


89. 圓的內接與外切六角形ABCDEF其間隔一個角的諸角之和各相等.

90. 圓的外切等邊多角形之邊數爲奇數,則爲正多角形.

91. 正六角形的一邊等於外接圓的半徑.

92. 平行於三角形ABC的底邊BC而作DE,則ABC的外接圓與ADE的外接圓相切於A.



93. 外切直角△兩腰的和,等於其斜邊與其內切圓的直徑的和.

94. 一定圓周上一點A的切線,與過此圓中心C的一定圓,相交於P, Q, 則PC·QC爲一定.

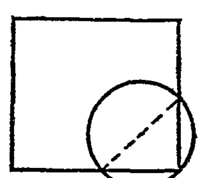
95. 圓的內接梯形必等腰.

96. 以等腰△的腰爲直徑所作的圓必等分△的底邊.

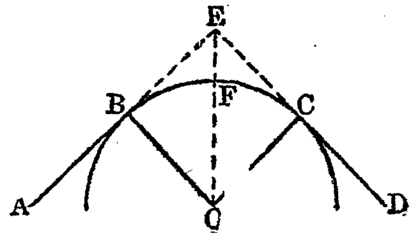
97. △的一角的等分線遇其外接圓於一點,則此點必與△的他二頂點及其內切圓心等距.

98. 延長圓的內接梯形的不平行兩邊,則其交點必在他二邊的垂直平分線上.

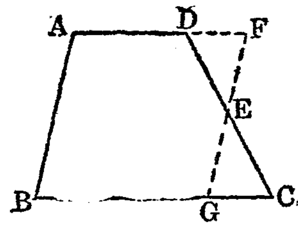
99. 說明用一張長方形的紙,如何可以求出一個圓的直徑.



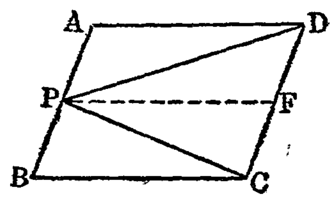
100. 鐵路轉灣的地方都是用圓弧,在AB和CD兩條路之間,用BC弧聯接,使他和AB,CD相切於B,C二點. 延長AB和BC相交於BC弧.



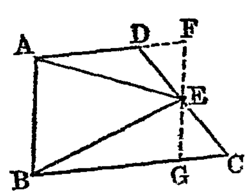
101. ABCD爲梯形, AD, BC爲平行二邊,則ABCD等於$\frac{1}{2}$(AD+BC)爲底, AD, BC間的距離爲高的矩形.



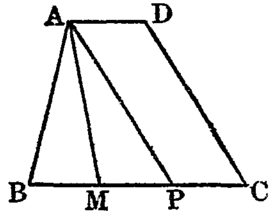
102. 一點P若在平行四邊形一邊AB的上面,則三角形PAD+三角形PBC=$\frac{1}{2}$平行四邊形ABCD.



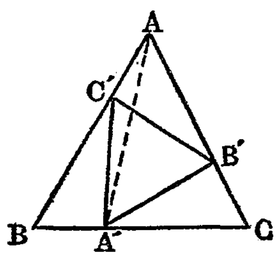
103. 梯形的不平行的一邊CD其中點爲E,則三角形AEB=$\frac{1}{2}$梯形ABCD.



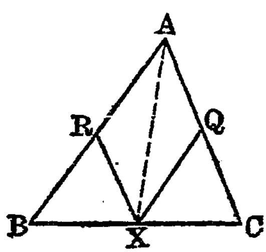
104. 從梯形ABCD的A平行於DC而作AP,若三角形ABP=平行四邊形APCD,則BC=3AD.



105. 於三角形各邊上取其三分之一 A′, B′, C′, 則三角形 $A'B'C'=\frac{1}{3}$ 三角形 ABC.



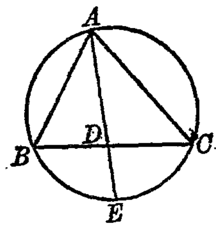
106. 三角形的二邊 AC, AB 其中點爲 Q, R, 而 BC 上任意一點爲 X, 則四邊形 $AQXR=\frac{1}{2}$ 三角形 ABC.



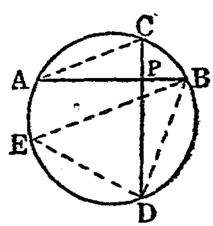
107. 圓內接四邊形二對角線的積, 等於每相對二邊的二積的和.

108. 兩個兩等邊三角形的頂角相等者相似.

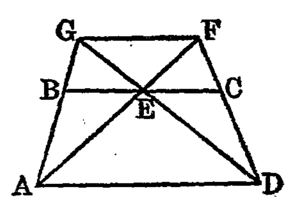
109. 三角形 ABC 頂角 A 的平分線過底邊於 D, 遇外接圓周於 E. 證 AB·AC=AD·AE.



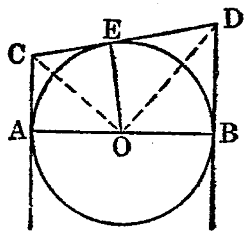
110. 二弦正交所成四線分的平方和,等於此圓直徑的平方.



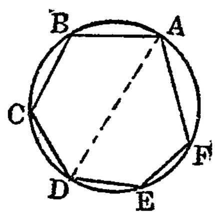
111. 梯形 ABCD 二平行邊的一邊為 BC, 其中點為 E, 引長 AE 及 DE 遇 CD 及 AB 的引長線於 F 及 G. 證 FG//AD.



112. 一圓直徑的兩端作二切線,於其間又作第三切線,此切線為切點所分成二線分,其相乘的積等於此圓的半徑的平方.

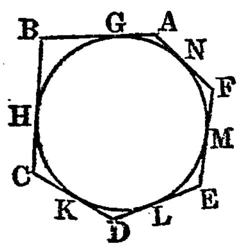


113. 圓內接任意的六角形,每間隔一角的三角的和,必爲四直角.



114. 圓內接六角形,其相對的角的和,大於二直角.

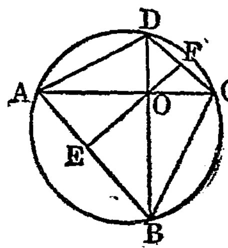
115. 圓外接六角形,每間隔一邊的三邊的和,等於他三邊的和.



116. 有法五角形的二對角線相交各線的較長一分線,等於五角形的一邊.

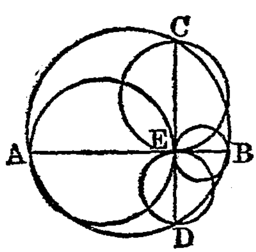
117. 圓內接六角形,相鄰二邊平行於其相對的邊,則他二邊亦平行.

118. 圓內接四邊形的兩對角線,互爲垂直,則自其交點引一邊的垂線,必二等分其對邊.



119. 引長有法六角形的各邊所作星形多邊形爲與六邊形的二倍.

120. 圓內二弦彼此正交,以所成四線分爲直徑作四圓,其和等於與圓.



121. 圓內接八角形,每間隔一角的諸角之和爲六直角.

122. 若三角形的三邊爲7,9,12, 問對12的角是直

角,是銳角,還是鈍角!

123. 直角三角形的兩足是 8 寸及12寸,求其在弦上的二射影,及自直角頂至弦的高.

124. 若三角形的三邊為 9,12,15, 求三角平分線所分得的諸邊的分線.

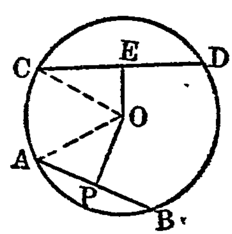
125. 梯形的二底邊為 a 及 b,其高為 h,今引長其兩腰相遇成三角形,求此三角形之高.

126. 一窗高24尺,一梯離窗脚10尺,問此梯應長幾何,方可至窗頂!

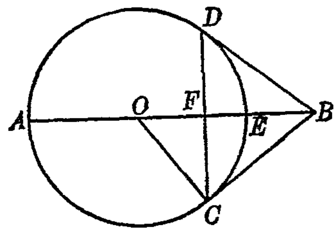
127. 等邊三角形的高為h,求其邊.

128. 一圓的半徑長10寸,今有一點距此圓心 6 寸,通過此點作最長弦及最短弦,試求其長.

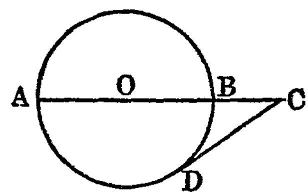
129. 一弦長10尺,距圓心的遠為12尺,今有一弦長24尺,求其距圓心的遠.



130. 一圓的半徑長六寸,今自距圓心10寸的一點作一切線,求其長,又求連二切點一弦的長.



131. 一切線長20寸,自其一端作割線過圓心.若此割線在圓外的一分長8寸,求半徑.



132. 一圓的半徑爲r,有一弦距圓心的遠爲$\frac{1}{2}$r,求弦的長.

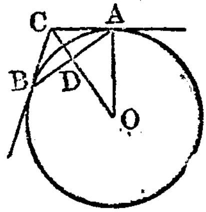
133. 求作一正方,與二正方一邊爲3寸一邊爲4寸者的和等值.

134. 梯形的兩底邊,一爲16尺,一爲10尺,兩腰各長5尺,求此形的面積.

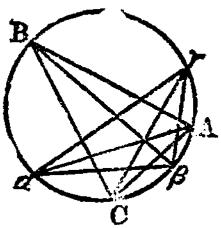
135. 一斜方形含100平方尺,其一對角線爲10尺,問他一對角線幾何?

136. 有甲乙丙三家,欲於各人的等距離處掘井,甲乙隔4丈,乙丙隔13丈,丙甲隔15丈,問各家至井距離若干?

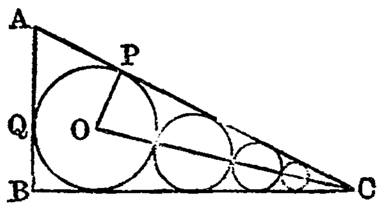
137. 已知圓的半徑爲r,求圓外接正六角形的一邊.



138. 圓內接三角形$\alpha\beta\gamma$的各角爲30°, 100°, 50°, 此三角形的二等分線與圓周相交的點爲A, B, C, 則△ABC各角的大若何?



139. 直角三角形ABC, 累次內切無數的圓, 試求這樣諸徑的和, 但已知其直角的二邊 AB=5, BC=12.



140. 半徑爲r的圓, 求內接正三角形, 正方形, 正五角形的面積.

本書於二十四年二月經
國民政府教育部審定
領到教字第四十九號執照

中華民國二十二年七月初版
中華民國二十四年五月三六版

(57321B 審)

初級中學用

復興教科書 幾何 二冊

下冊 道林紙本 定價大洋肆角
普及本 定價大洋貳角肆分
外埠酌加運費匯費

編著者 余介石 徐子豪

校訂者 段育華

主編兼發行人 王雲五 上海河南路

印刷所 商務印書館 上海河南路

發行所 商務印書館 上海及各埠

(本書校對者王養吾)

一六二〇上(四〇)

復初中幾何下冊　普及本定價貳角肆分