Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Arbeitsblatt 44

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 44.1. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K, die beide gegen $c \in K$ konvergieren mögen. Zeige, dass die Differenzfolge $x_n - y_n$ eine Nullfolge ist.

Übungsaufgaben

Aufgabe 44.2. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{5}$ zum Startwert $x_0 = 2$. Konvergiert diese Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 44.3. Es sei $c \in \mathbb{Q}_+$, $x_0 \in \mathbb{Q}_+$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige Heron-Folge zur Berechnung von $\sqrt{c}$. Wann konvergiert diese Folge in $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 44.4. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{2}{3n+5}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$x_n \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 44.5. Bestimme für die Folge

$$x_n := \frac{4n-3}{5n-2}$$

und

$$\epsilon = \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots,$$

ab welchem (minimalen) n die Abschätzung

$$\left| x_n - \frac{4}{5} \right| \leq \epsilon$$

gilt.

Aufgabe 44.6. Es sei $k \in \mathbb{N}_+$. Zeige, dass die Folge $\left(\frac{1}{n^k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem archimedisch angeordneten Körper gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 44.7. Zeige, dass bei einer Folge in einem angeordneten Körper K die Änderung von endlich vielen Folgengliedern weder die Konvergenz noch den Grenzwert ändert.

Aufgabe 44.8. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei die rationale Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgendermaßen definiert: Es sei

$$x_n = \frac{a_n}{10^n}$$

die größte Zahl mit $a_n \in \mathbb{N}$ und mit $x_n^2 \leq 5$. Zeige, dass die Folge eine Dezimalbruchfolge ist.

Aufgabe 44.9.*

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = -x_n$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe 44.10.*

Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K sei durch einen Anfangswert $x_0 \in K_+$ und durch die Rekursionsvorschrift

$$x_{n+1} = (x_n)^{-1}$$

gegeben. Bestimme die Anfangswerte, für die diese Folge konvergiert.

Aufgabe 44.11. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem angeordneten Körper K. Zeige, dass die Folge genau dann gegen $x \in K$ konvergiert, wenn die durch

$$y_n := x_n - x$$

gegebene Folge eine Nullfolge ist.

In den folgenden Aufgaben werden die Aussagen (1), (3) und (5) von Lemma 44.11 bewiesen.

Aufgabe 44.12.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Zeige, dass die Summenfolge $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)+\left(\lim_{n\to\infty}y_n\right)$$

ist.

Aufgabe 44.13. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K. Es sei $c\in K$. Zeige, dass die Folge $(c\cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty}(c\cdot x_n) = c\cdot\left(\lim_{n\to\infty}x_n\right)$$

ist.

Aufgabe 44.14. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen in K. Es sei $\lim_{n\to\infty}x_n = x\neq 0$ und $x_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Zeige, dass $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent ist mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty}y_n}{x}.$$

Aufgabe 44.15.*

Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{3n^3-n^2-7}{2n^3+n+8}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 44.16. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{6n^3+3n^2-4n+5}{7n^3-6n^2-2}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 44.17.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n\to\infty} x_n \geq \lim_{n\to\infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 44.18. Es sei K ein angeordneter Körper und es sei $I = [a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in K. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K mit $x_n \in I$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge konvergiere gegen $x \in K$. Zeige $x \in I$.

Aufgabe 44.19.*

Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 44.20. Zeige, dass die Folge

$$x_n = n$$

in keinem angeordneten Körper konvergiert. Kann sie beschränkt sein?

Aufgabe 44.21. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 44.22. Bestimme mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung den Grenzwert der Folge

$$x_n := \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n .$$

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 13.30 hilfreich.

Aufgabe 44.23. Es sei K ein angeordneter Körper, in dem die Wurzeln $\sqrt[n]{n}$ zu $n \in \mathbb{N}_+$ existieren. Zeige, dass die Folge $x_n = \sqrt[n]{n}$ ab $n \geq 3$ streng fallend ist.

Aufgabe 44.24.*

Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei a_n die Summe der ungeraden Zahlen bis n und b_n die Summe der geraden Zahlen bis n. Entscheide, ob die Folge

$$x_n = \frac{a_n}{b_n}$$

in $\mathbb{Q}$ konvergiert, und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 44.25. Man gebe Beispiele für positive monoton wachsende unbeschränkte Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 44.26.*

Es sei

$$x_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(1) Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2.$$
(2) Finde das kleinste n mit
$$x_n \geq 2{,}5.$$

Aufgabe 44.27. Es sei K ein angeordneter Körper und seien $a, b \in K_+$. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{ak+b}$$

divergiert.

Aufgabe 44.28. Zeige, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$$

divergiert.

Aufgabe 44.29. Zeige analog zu Beispiel 44.13, dass das (gliedweise) Produkt der kanonischen Dezimalbruchfolgen von zwei rationalen Zahlen nicht die Dezimalbruchfolge des Produktes sein muss.

Aufgabe 44.30. Es sei K ein angeordneter Körper. Zeige, dass K genau dann archimedisch angeordnet ist, wenn die Folge der Stammbrüche $\frac{1}{n}$, $n \geq 1$, gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 44.31. Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Quadratfolgen x_n^2 und y_n^2 seien konvergent und es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44.32.*

Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in einem angeordneten Körper K mit $x_n, y_n \in K_+$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $x_n^2 - y_n^2$ eine Nullfolge. Zeige, dass $x_n - y_n$ ebenfalls eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44.33. Es sei K ein angeordneter Körper und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K. Zeige, dass die Folge eine wachsende oder eine fallende Teilfolge enthält.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 44.34. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten Folge.

Aufgabe 44.35. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,

(3) divergiert.

Aufgabe 44.36. (7 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper und es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge in K mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die durch

$$y_n := \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

definierte Folge gegen x konvergiert.

Für die folgende Aufgabe ist Aufgabe 44.31 hilfreich.

Aufgabe 44.37. (4 Punkte)

Es sei K ein angeordneter Körper und $c \in K_+$. Es seien $x_0, y_0 \in K_+$ Startwerte und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörigen Heron-Folgen zur Berechnung von $\sqrt{c}$. Zeige, dass $x_n - y_n$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 44.38. (4 Punkte)

Es sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Zeige, dass die Folge

$$\left(\frac{n^3}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 44.39. (3 Punkte)

Zeige, dass die beiden Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+2}$$

divergieren.

Abbildungsverzeichnis