

2513.7

4414-44

中華民國二十四年六月再版

新生活教科書
初級中學校用

幾何 (全二册)

△(上册定價大洋七角)

(外埠酌加郵費匯費)

編著者

薛元 詔鶴
黃應

發行人

沈駿 聲

印刷者

大上海北福建路三三一號

總發行所

大上海四馬路三一〇號



分發行所

開封 南京 濟南 北平 天津 漢口 廣州 汕頭
常州 無錫 杭州 雲南 重慶 廈門 新加坡

大東書局

(本 書 校 對 者 朱 晉 材)

13145

新生活教科書

初級中學校用

幾何

上册目次

實驗幾何	1
直線	2
角	8
平行線及垂線	17
圓	22
三角形	27
多邊形	35
面積	42
比例尺作圖	53
對稱	58
立體	62
理論幾何	67

緒論	67
第一篇 直線形	76
集於一點的角	76
簡單定理	78
三角形	83
平行直線	118
三角形(續)	128
四邊形	143
共點線	158
不等線和不等角	167
雜題	189

編 輯 大 要

1. 本書內容完全根據 教育部頒佈之新課程標準並參酌江蘇教育廳修訂之算學教學進度表
2. 本書分實驗幾何理論幾何數值三角三大部分
3. 本書特別注重實驗方法及啓發法以引起教學雙方的興趣
4. 本書習題豐富以便學生充分練習
5. 本書編制完全根據學習心理由淺入深便於教學
6. 我們編輯這書雖是憑着十餘年教授的經驗努力着做去可是不妥的地方一定很有還望用這書的教師們充分的予以指導這是編者十二分盼望的

二十三年十二月

薛元鶴黃應韶識

13.19
4414-44

新生活教科書

初級中學校用

幾何

上冊

實驗幾何

1.幾何是研究圖形的一種學科,幾乎要時時刻刻和圖形接觸,讀者自不得不備一副畫圖的用具:——

- 一枝削尖的鉛筆(HB)
- 一枝市制的尺,至少約長 $\frac{1}{2}$ 尺,上面有公分,公厘等刻度.
- 一副三角板,最長的一邊約長6市寸.
- 一個半圓的量角器.
- 一個圓規,一脚上有削尖的鉛筆或鉛條.

直 線

2. 放一枝尺在紙上,用鉛筆的尖端沿着尺邊畫,所得的線稱為直線.其他如練習簿的邊線,暗室裏從一小孔射進來的光線等等都是直線.

習題1. 試舉出教室裏其他直線的例子.

3. 表示一直線,往往在直線上面記兩點,如 A, B 或 A, C 而稱這線為 AB 或 AC. 在習慣上表示一點往往用英文大寫字.



4. 一直線的介乎其上二點間的部份稱為線段.如前圖中線段 AC, CB.

由此可見說直線 AB 是表示這線的位置而無關於其長短;若說線段 AB, 則既表示這線的位置,又表示 A, B 二點間的長短了.

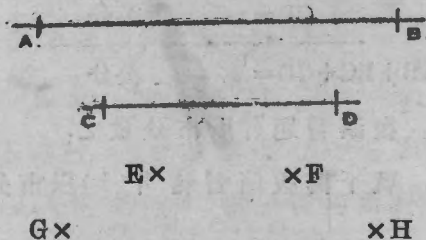
欲測量一線段的長,必須用長的單位.現今各國通用的單位,科學方面用萬國公制

的公里,公引,公丈,公尺,公寸,公分,公厘等;商業方面用英制的哩,碼,呎,吋等;我國除採用萬國公制外,並暫設輔制,稱為市用制,如市里,市引,市丈,市尺,市寸,市分等.各制的進位和互相的關係已見於算術書中,茲不贅.

以下測量時,用公分,應量到最近似的公厘;用市分,應量到最近似的十分之一.

習題2. 試用尺直接量線段AB, CD, EF, GH 的長.

(i) 用公分 (ii) 用市分



習題3. 試用市寸量這本書書面的縱與橫.再以公分量之.

5. 測一線段的長,用尺直接測量,所得的結果不如用圓規間接測量的精密.其法,先張開兩腳使兩腳尖端落於線段的兩端之

上,再放這兩尖端在尺的刻度上,就讀得線段的長度。

以後在比較兩線段,或測量一線段時應常用圓規間接測量。

習題4. 以公分量 AB, BC, CD 的長排列結果成一表並求其和。



$AB =$ 公分

$BC =$ 公分

$CD =$ 公分

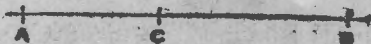
$AB + BC + CD =$ 公分

習題5. 復演習題4, 以市分量之。

習題6. 就下圖復演習題4, (i) 以市分, (ii) 以公分量之。



習題7. 以公分量 AB, BC 的長並求其差排列結果成一表, 測量 AC 以檢驗之。



直 線

5

AB= 公分

BC= 公分

AB-BC= 公分

習題 8. 復演習題 7, 以市分量之.

習題 9. 就下圖復演習題 7, (i) 以公分, (ii) 以市分量之.

×
A

×
C

×
B

習題 10. 畫一直線約長 5 市寸, 在這線上截取線段 AB=2 市寸, BC=1.5 市寸, CD=1.2 市寸; 求諸線段之和, 量 AD 以檢驗之. [如習題 4 排列一表.]

習題 11. 復演前題以

(i) AB=2.9 公分, BC=7.8 公分, CD=1.5 公分.

(ii) AB=3 $\frac{1}{4}$ 市寸, EC= $\frac{1}{4}$ 市寸, CD= $\frac{1}{4}$ 市寸.

習題 12. 某人向東行 3.2 市里後向西行 1.6 市里. 這時他離出發點有多遠? 試作一圖 (以 1 市寸代表 1 市里) 並用測量以求距離.

習題 13. 某人先向北行 7.5 公里後向南行 12 公里又向北行 4.8 公里, 這時他在出發點的什麼方向距出發點多遠? 畫圖以表示之. (以 1 公分代表 1 公里)

習題 14. 畫一長約 4 市寸的線段; 憑目力定出其

中點。測量兩部分的長，有無誤差？

習題 15. 畫較長的線段復演前題三四次。作一表以表明你的誤差。

習題 16. 畫一長 10.4 公分的線段，計算其一半的長，從線的一端在線上量取此長。

習題 17. 畫以下長度的線段，如前題二等分之。
(i) 7.6 公分, (ii) 4.7 市寸。

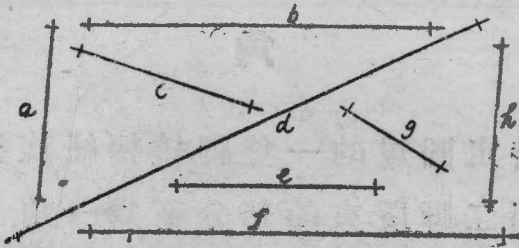
習題 18. 作一線段 AB，用圓規從 A, B 兩端在這線上截取等長 AC, BD (應十分接近於這線段的半長) 再憑目力二等分其餘的部分 CD。檢驗此點是否 AB 的中點。

習題 19. 畫三四長度不同的線段，如前題用圓規二等分之，測量各部分的長以檢驗之。

習題 20. 將圓規的兩腳張開 1 公寸，再放於市寸的刻度上以求 1 公寸合若干市寸。

習題 21. 將圓規的兩腳張開 1 市寸，如前題以求 1 市寸合若干公分。

習題 22. 猜測下圖中各線段之長 (i) 以公分, (ii) 以市寸用測量以檢驗之。並作表如下：



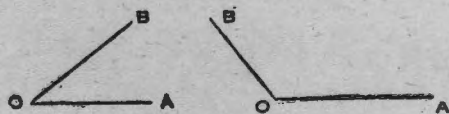
線 段	猜 測	實 測
a		

角

6. 持定圓規的一隻腳，繞樞紐旋轉其他一脚，則二腳所夾的部分稱為一角。

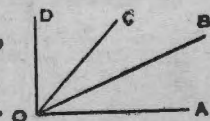


可見若從一點 O 引二直線 OA, OB ，則在 O 形成一角。 O 稱為這角的角頂； OA, OB 稱為這角的邊。

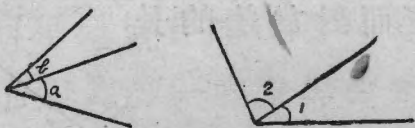


7. 表示一角普通用三字母，如上圖的角稱為角 AOB ，中間的字母表明這角的角頂，兩旁的字母表明二邊上的點。

倘若在 O 點的祇有一角，更可簡稱為角 O ，不過在 O 點的若不止一角，則角 O 係指全體的角 AOD 而言。



有時又可用一小寫字母或數字放在角



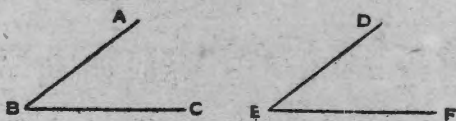
的裏面表明一角,如上圖的角 a 和角 b ,角 1 和角 2 .角的符號是 \angle , \angle^s 是表明幾隻角.

習題 23. 用幾種不同的方法

稱右圖的 $\angle O$.



8. 兩個角是否相等,以其是否能完全重合而定如下圖將 $\angle ABC$ 置於 $\angle DEF$ 上使點

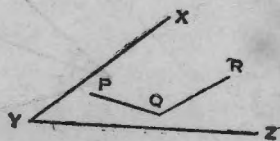


B 落於 E 上.直線 BC 落於直線 EF 上,再看直線 AB 是否與直線 DE 相合.能相合,則 $\angle ABC = \angle DEF$, 否則 $\angle ABC \neq \angle DEF$.

又 AB 不能與 DE 相合時,若 AB 落於 $\angle DEF$ 內,則 $\angle ABC < \angle DEF$; 若 AB 落於 $\angle DEF$ 外,則 $\angle ABC > \angle DEF$.

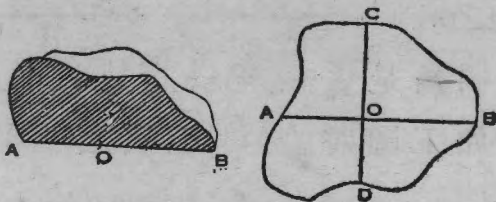
由此可見角的大小完全因其兩邊間的

張度而定，而對於邊的長短無關。



習題 24. 試用透寫紙先模繪 $\angle PQR$ ，再放於 $\angle XYZ$ 上而比較二角的大小。

9. 取紙一頁，在其中部如下圖摺之，設摺痕是 AOB ，再將 OB 摺疊於 OA 上，放開後，則



看出兩摺痕 AOB ， COD 交成四角 AOC ， COB ， BOD ， DOA ，因這四角能互相重合，可見全部相等。如此的角稱為直角。

小於一直角的角稱為銳角；大於一直角的角稱為鈍角。

習題 25. 用紙摺一直角 AOB ，再摺此角使 OB 落於 OA 上；令此摺痕為 OE ， $\angle AOE$ ， $\angle EOB$ 各是一直角的幾分之幾？

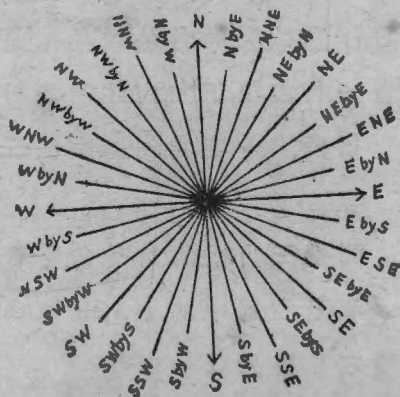
習題 26. 再用摺疊法二等分前題中的 $\angle AOE$ ，所得的角是一直角的幾分之幾？

10. 直角固可以當作角的單位. 但普通實用的角的單位是將一直角等分為90等分, 而以一等分做角的單位, 稱為一度. 再將每度分為60等分, 每分稱為1分; 每分分為60等分, 每分稱為一秒.

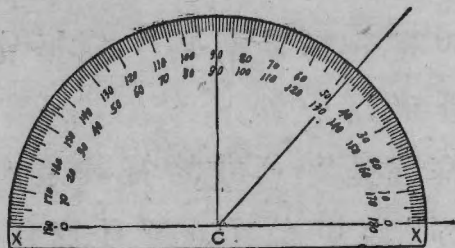
度的符號是“°”, 分的符號是“′”, 秒的符號是“″”, 如43度27分30秒寫作 $43^{\circ}27'30''$.

習題27. 當下列的時間, 鐘面上兩針間的角度如何 (i) 3. 點鐘 (ii) 1. 點鐘 (iii) 5. 點鐘 (iv) 8. 鐘點 (v) 10. 點鐘? 並說明是直角, 銳角, 或鈍角.

習題28. 下圖是一羅盤面上刻定的方向, 在 (i) N 和 E, (ii) W 和 SW, (iii) W 和 WNW, (iv) E 和 E by S, (v) NE 和 NNW, (vi) SW 和 SE 間的角度如何?



11. 下圖係一量角器;若半圓邊上諸分點與 C 聯接,則得一組集於 C 點的角,而每角等於一度.



欲測量一角,放量角器於角上,使其中心 C 與角的角頂相合,其底線 C X 與角的一邊相合;再注意角的其他一邊通過量角器上的什麼刻度;所以如上圖,欲測的角 = 48°

注意 若量角器上有兩組數目,必須注意選用適合的一組.最好注意欲測的角是銳角還是鈍角.

當既注意一角之後,在角內註明測得的角度.

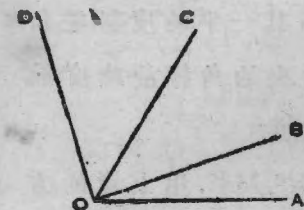
習題 29. 切紙成一直角,用摺疊法二等分之,測量所成的二角.

習題 30. 測量三角板的角,各角是若干度?

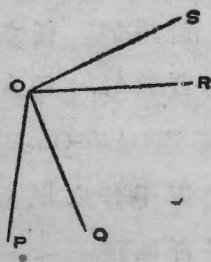
習題 31. 測量右圖中的 $\angle AOB$, $\angle BOC$; 求其和;測量 $\angle AOC$ 以檢驗之.(排列成一表)

習題 32. 測量 $\angle AOC, \angle GOD,$
 $\angle AOD$ 並檢驗結果.

習題 33. 測量右圖中 $\angle PO$
 $Q, \angle QOR, \angle ROS$; 求其和; 測量 $\angle POS$
 以檢驗之.



習題 34. 測量 $\angle POR, \angle QOS, \angle POS,$
 $\angle QOR$; 從 $\angle POR, \angle QOS$ 的和中減去 \angle
 POS , 其差是否等於 $\angle QOS$?



12. 若已知某角度數, 可用
 量角器作成某角. 假設要在
 一直線 AB 的 A 端作一 57° 的角; 先放量角器
 使其中心落於 A 上, 底線落於 AB 上; 然後在
 57° 的刻度處點一小點; 再連接此點與 A 即
 得.

習題 35. 試作 $20^\circ, 35^\circ, 43^\circ, 79^\circ, 103^\circ, 154^\circ, 175^\circ$, 諸角.

習題 36. 不用量角器作二直線使其間的夾角約
 等於 $40^\circ, 65^\circ, 72^\circ, 110^\circ, 164^\circ$, 再一一用量角器檢驗之, 有
 無誤差排列成一表以表明之.

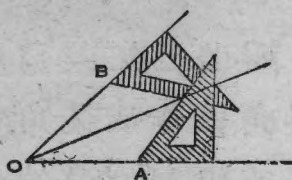
習題 37. 不用量角器, 單用三角板能否作成 $75^\circ,$
 $15^\circ, 105^\circ, 135^\circ$ 的角? 試一一作之, 並用量角器檢驗之.

習題 38. 作一 52° 的角, 計算其一半的度數, 從角頂在角內引一直線使其與一邊所夾的角等於此度數量所成的二角, 這線是否二等分這角?

習題 39. 作角 $24^\circ, 78^\circ, 142^\circ, 67^\circ, 113^\circ$. 用上題的方法一一二等分之.

習題 40. 任意作一角, 三等分之, 四等分之.

習題 41. 任意作一角 O ; 先用圓規在二邊上量出等長的 OA 和 OB ; 再如右圖用三角板平分之. 以量角器檢驗其是否準確.



習題 42. 任意作一角, 憑

目力作其二等分線, 以量角器檢驗之. 復演此題三四次.

習題 43. 畫一銳角 AOB , 延長 AO 至 C ; BOC 是何種角?

若角 AOB 是一鈍角, 則 BOC 是何種角?

若角 AOB 是一直角, 則 BOC 是何種角?

習題 44. (i) 作 $\angle AOB = 65^\circ$; 延長 AO 至 C ; 量 $\angle BOC$; $\angle AOB, BOC$ 的和是若干?

(ii) 以 $\angle AOB = 77^\circ$ 復演 (i)

(iii) 以 $\angle AOB = 125^\circ$ 復演 (i)

比較 (i), (ii), (iii) 的結果; 各個和等於若干直角?

習題 45. (i) 若 $\angle BOC = 43^\circ$, 延長 BO 到 A , $\angle AOB$

爲何?

(ii) 以 $\angle BOC = 96^\circ$, 復演 (i)

(iii) 以 $\angle BOC = 117^\circ$, 復演 (i)

比較 (i), (ii), (iii) 得到什麼結果?

習題 46. (i) 畫一直線 OB ; 在 OB 的兩側作二角 $\angle AOB = 40^\circ$, $\angle BOC = 135^\circ$. 其和爲何? $\angle AOC$ 是否爲一直線?

(ii) 以 $\angle AOB = 54^\circ$, $\angle BOC = 131^\circ$, 復演 (i)

(iii) 以 $\angle AOB = 72^\circ$, $\angle BOC = 108^\circ$, 復演 (i)

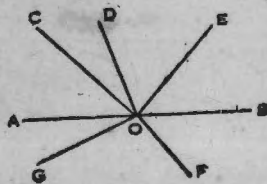
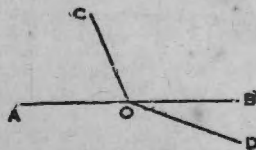
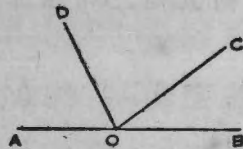
(iv) 以 $\angle AOB = 113^\circ$, $\angle BOC = 67^\circ$, 復演 (i)

比較 (i), (ii), (iii), (iv) 的結果, 二角間有若何關係, $\angle AOC$ 方能成一直線?

習題 47. 從直線 AB 上一點 O 引二直線 OC, OD 測量三角 $\angle BOC, \angle COD, \angle DOA$: 其和爲何?

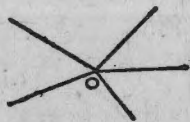
習題 48. 如右圖, 作 $\angle AOC = 66^\circ$; 延長 AO 到 B , 作 $\angle BOD = 26^\circ$. 集於 O 點的四角之和應爲何?

習題 49. 從直線 AB 上一點 O 引直線 OC, OD, OE, OF, OG (如右圖) 測量 $\angle AOC, \angle COD, \angle DOE$ 等

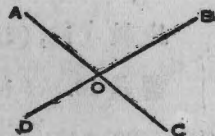


等.其和爲何?

習題 50. 從一點 O 如右圖任意引若干直線, 測量所成的諸角其和爲何? 等於若干直角?



習題 51. 如右圖作二直線, 測量諸角.

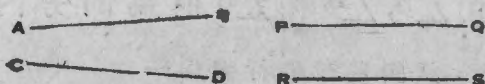


習題 52. (i) 作 $\angle AOB = 57^\circ$, 延長 AO 到 C , BO 到 D ; 測量諸角 (ii) 以 $\angle AOB = 124^\circ$, 復演 (i)

習題 53. $\angle AOB = 78^\circ$, 如前題延長 AO , BO 後, $\angle COD$ 爲何? 其他二角相等否?

平行線及垂線

13. 下面左圖中二直線 AB, CD 如若向右



延長能否相交?如若向左延長能否相交?又如右面圖中二直線 PQ, RS 如若向右延長, 能否相交?如若向左延長能否相交?像 PQ, RS 直線, 不管如何延長都不能相交的直線稱為平行線, 如尺的兩邊, 練習簿的上下二邊, 一條直路上的電車軌道, 暗室中從兩個小孔裏透進來的太陽光線等等都是平行線。

習題 54. 試就教室裏舉出其他平行線的例子。

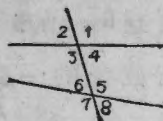
習題 55. 試舉幾個教室外的平行線的例子。

14. 任意二直線被一截線

所截時, 則有 \angle s 1, 2, 3, 4, 5, 6,

7, 8 等八角 (如右圖) 其中

$\angle 1$ 和 $\angle 5$, $\angle 2$ 和 $\angle 6$, $\angle 3$ 和 $\angle 7$, $\angle 4$ 和 $\angle 8$ 稱

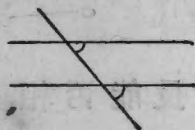


爲同位角。

又 $\angle 3$ 和 $\angle 5$, $\angle 4$ 和 $\angle 6$ 稱爲內錯角; $\angle 1$ 和 $\angle 7$, $\angle 2$ 和 $\angle 8$ 稱爲外錯角。

又 $\angle 4$ 和 $\angle 5$, $\angle 3$ 和 $\angle 6$ 稱爲同旁內角。

習題56. 試測量二平行線爲一截線所截後的一對同位角是否相等?

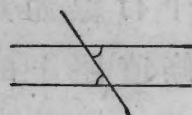


習題57. 依不同的方向作截線

復演上題二三次。

習題58. 對於二不平行的直線復習題56同位角相等否?

習題59. 試測量二平行線爲一截線所截後的一對內錯角,是否相等?

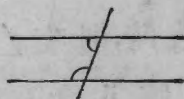


依不同的方向作截線,復演二,三

次。

習題60. 對於二不平行的直線復演前題,內錯角相等否?

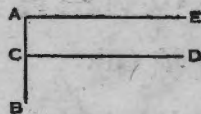
習題61. 試測量二平行線爲一截線所截後的一對同旁內角,其和等於若干?



依不同的方向作截線,復演二,三次。

習題 62. 對於二不平行的直線復演前題,一對同旁內角之和是否等於二直角?

習題 63. 如右圖作一直線 AB , 在 AB 上取一點 C ; 用三角板從 C 作 CD 使 $\angle BCD = 90^\circ$; 從 A 作 AE 使 $\angle BAE = 90^\circ$ AE 與 CD 平行否?



習題 64. 在上題所作的圖中另作二直線與 CD 成直角; 測量各直線上在 AE, CD 間的線段; 均相等否?

如若諸直線與 CD 交成各種不同的角, 諸線段相等否?

習題 65. 復演習題 63 使 $\angle BCD = \angle BAE = 60^\circ$ (用三角板); 作三直線與 CD 交成直角; 測量截於 AE 與 CD 之間的線段.

習題 66. 復演習題 63 使 $\angle BCD = \angle BAE = 45^\circ$ (用三角板); 如前題測量諸線段.

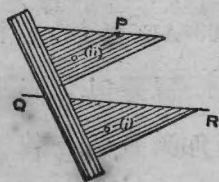
15. 從習題 56 到習題 66 讀者當已察出平行線的性質除去任意延長不能相交外, 尚有:

(i) 若一截線截二線, 同位角相等, 錯角相等, 同旁內角之和等於二直角.

(ii) 平行線間的距離到處相等。

16. 過一已知點 P 作一直線平行於已知直線 QR .

放一三角板使其一邊沿着已知直線 QR , 如圖在 (i) 的位置; 固定這三角板於這位置, 放一支尺使其邊與三角板的另一邊相接觸 (或用另一三角板代替尺亦可); 這時按定尺而沿着尺邊推動三角板, 直到沿着 QR 的一邊通過 P 時為止, 如圖在 (ii) 的位置; 再按定三角板, 沿邊畫一直線, 即得。



習題 67. 上面的作法應用的什麼原理?

習題 68. 作一直線 AB 並記一點 C ; 過 C 引 AB 的平行線。

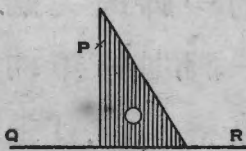
用三角板的各種邊復演若干次。

17. 若二直線間的角度是直角, 則此二直線稱為互相垂直, 每一直線是其他一直線的

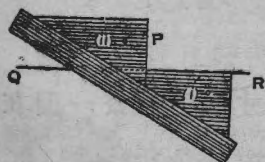
垂直線，或簡稱垂線。

18. 過一已知點 P 線一直線垂直於一已知直線 QR 。

這本可如右圖用三角板直接畫；但因在三角板的直角頂畫線不易，用下面的作法比較便利：



放一三角板使其夾直角的一邊沿着已知直線 QR ，如圖在 (i) 的位置；放直尺（或用另一三角板）使其邊與三角板的最大邊相接觸；這時按定尺而沿着尺邊推動三角板，直到三角板的另一直角邊過 P 時為止；再畫一直線，即得。



習題 69. 上面的作法應用的什麼原理？

習題 70. 作一直線 AB 並在其外記一點 C ；過 C 引一直線垂直於 AB 。

復演此題二、三次。

習題 71. 過一直線內一已知點作此直線的垂線。

圓

19. 張開一圓規的兩腳,使其不附有鉛筆的一腳的尖端固定於某一點而旋繞其他一腳,則鉛筆的尖端在紙上畫一曲線;這曲線稱為圓.可是圓是一封閉的曲線,其上的點全和其中一定點等距離.這定點稱為圓心;距離稱為半徑;曲線稱為圓周,或簡稱為圓.

習題 72. 試舉若干圓的例子.

習題 73. 以 O 為圓心,以 2 市寸為半徑畫一圓.在圓周上任意取點 A, B, C , 測量 OA, OB, OC . 全相等否?

習題 74. 就上題的圓內記其他任意點 P , 測量 PA, PB, PC , 全相等否?

復演二,三次.

習題 75. (i) 以 O 為圓心,以 3 公分為半徑畫一圓;從 O 引一長 3.5 公分的線段 OA ; A 在圓外,圓上,圓內?

(ii) 在 OA 上取一點 B , 令 $OB = 3.2$ 公分; B 在圓外,圓上,圓內?

(iii) 在 OA 上取一點 C , 令 $OC = 3$ 公分; C 在圓外,圓

上,圓內?

(iv)在OA上取一點D,令 $OD=2.7$ 公分;D在圓外,圓

上,圓內?

習題 76. (i)以O為圓心,以2.6公分為半徑畫一圓,在圓外取任意點P,OP大於,等於或小於2.6公分?

(ii)若P在圓上則如何?

(iii)若P在圓內則如何?

習題 77. (i)以A為圓心,以1市寸為半徑畫一圓,又在透寫紙上以B為圓心,以1市寸為半徑畫一圓,放圓B於圓A上,使B與A相合;觀察兩圓周是否相重合。

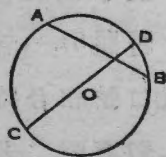
(ii)若圓B的半徑是 $1\frac{1}{8}$ 市寸,則如何?

(iii)若圓B的半徑是 $\frac{15}{16}$ 市寸,則如何?

20.在圓上任意取兩點

A,B; 線段AB稱為這圓的

弦。



如若弦CD過圓心O,CD稱為這圓的直徑。

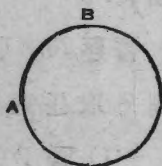
習題 78. 圓的直徑是半徑的幾倍?圓的直徑全相等否?

習題 79. 在透寫紙上作一半徑2.5公分的圓;畫一直徑AB;以AB做摺痕,摺此圓;圓的兩部份能否完全相合?

畫其他直徑復演之。

21. 圓的直徑分圓成二相等的部份，每部份稱為半圓。

圓的一部份稱為弧，如弧 AB 。大於半圓的弧稱為優弧；小於半圓的弧稱為劣弧。普通單說弧係指劣弧而言。



習題 80. 在紙上透寫紙上各畫半徑 3 公分的圓；並各作長 4 公分的弦；（用圓規）放透寫紙於紙上，觀察二弦相合時，弧是否相合？

畫各種長度的弦復演二、三次。

習題 81. 若透寫紙上的圓的半徑是 3.6 公分，復演前題；二弦相合時，弧是否相合？

習題 82. 若透寫紙上的圓的半徑是 2.8 公分，復演習題 80；二弦相合時，弧是否相合？

習題 83. 作一半徑 1 市寸的圓；在圓內作三、四長 $1\frac{1}{2}$ 市寸的弦；從圓心引這些弦的垂線，諸垂線相等否？

作三、四長 $\frac{1}{2}$ 的弦復演之。

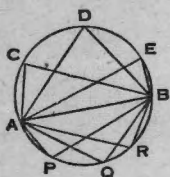


習題 84. 圓一半徑 3 公分的圓,另畫一半徑 4 公分的圓;在各圓內作長 4.8 公分的弦;從各圓心到弦引垂線測量其長,是否相等?

習題 85. 畫一半徑 1 市寸的圓(圓心爲 O),在圓內作若干長 1.3 市寸的弦 AB,CD,EF 等;聯 AO,BO,CO,DO 等,測量 $\angle AOB, \angle COD$, 等,諸角相等否?

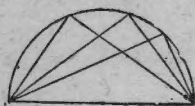
習題 86. 以長 0.8 市寸的諸等弦復演上一習題.

習題 87. 任意作一圓,在圓內任意作一弦 AB;在 AB 的一側的弧上任意取三點 C, D, E, 聯 AC, BC, AD, BD, AE, BE, 測量 $\angle ACB, \angle ADB, \angle AEB$. 諸角相等否?

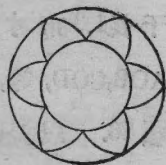
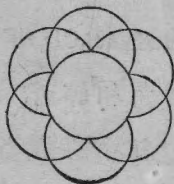
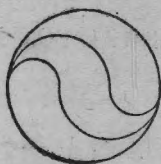
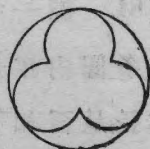
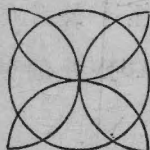
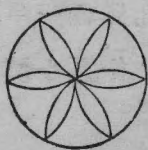


習題 88. 在上題的圓內弦 AB 的另一側的弧上任意取三點 P, Q, R; 聯 AP, BP, AQ, BQ, AR, BR. 測量 $\angle APB, \angle AQB, \angle ARB$. 諸角相等否?

習題 89. 在一任意直徑上作一半圓;在半圓上任意取若干點;如前兩題測量此直徑在諸點所張的角是何種角?

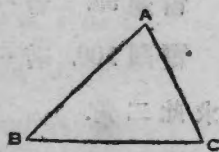


習題 90. 試模繪以下諸圖案畫:



三 角 形

22. 三直線所包圍的圖形
 稱爲三角形,如三角形 ABC,
 A,B,C三點稱頂點; BC,CA,AB
 稱爲邊; $\angle A, \angle B, \angle C$ 稱爲頂角.

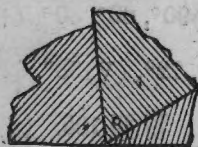


三角形的符號爲 \triangle ,如三角形 ABC 可寫
 作 $\triangle ABC$.

習題 91. 作一三角形 (每邊至少長 2 寸) 測量
 諸頂角並求其和.

習題 92. 以各種不同的三角形復演上題三四次.

習題 93. 切紙成一三角形,在各頂角內註以記號;
 撕下三個頂角如圖併攏之集三頂點
 於一點,從此實驗發現出什麼?與前二
 題的結果相符合否?



習題 94. 測量三角板的三頂角;求其和.

習題 95. 若一三角形的二角是 $54^\circ, 86^\circ$. 第三角如何?

習題 96. 若一三角形的二角是 (i) $28^\circ, 115^\circ$; (ii)
 $21^\circ, 37^\circ$; (iii) $104^\circ, 58^\circ$ 第三角如何?

習題 97. 若一三角形的二角是 $78^\circ, 114^\circ$ 第三角如何?

實際上無這三角形

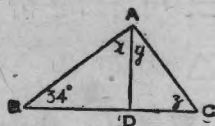
習題 98. 一三角形至多有幾個鈍角?

習題 99. 若一三角形的三角相等,各角是若干度?

習題 100. 若一三角形的一角是 36° , 其他二角相等,求此二角.

習題 101. 復演前題使已知角爲 (i) 90° , (ii) 132° , (iii) 107° .

習題 102. 在右圖中三角形 ABC 有 $\angle A = 90^\circ$, AD 垂直於 BC, 若 $\angle B = 34^\circ$, 求註以 x, y, z 的角.



習題 103. 復演前題使 (i) $\angle B = 68^\circ$, (ii) $\angle B = 25^\circ$, (iii) $\angle B = 45^\circ$.

習題 104. 在以下各組角中那幾組能組成三角形?
(i) $90^\circ, 60^\circ, 30^\circ$, (ii) $74^\circ, 35^\circ, 70^\circ$ (iii) $49^\circ, 62^\circ, 69^\circ$, (iv) $137^\circ, 22^\circ, 22^\circ$, (v) $83^\circ, 32^\circ, 66^\circ$, (vi) $54^\circ, 54^\circ, 72^\circ$.

習題 105. (i) 舉出三組不能組成一三角形的角.

(ii) 舉出三組能組成一三角形的角.

習題 106. 作一角 $\angle ABC = 74^\circ$; 在二邊上截取 $BC = 5.2$ 公分, $BA = 3.8$ 公分; 聯 AC. 測量三角形的其餘的邊和角.

註 在以後作三角形時既得三角形之後宜測量其餘的邊, 所取的單位因已知邊所度的單位而定; 並

測量其餘的角而求三角之和。

習題 107. 用以下的度量作三角形 ABC:—

(i) $\angle BCA = 28^\circ$, $BC = 6.4$ 公分, $CA = 7$ 公分.

(ii) $\angle BAC = 85^\circ$, $AB = 1.6$ 市寸, $AC = 2.3$ 市寸.

(iii) $\angle B = 126^\circ$, $AB = 1.9$ 市寸, $BC = 2.2$ 市寸.

(iv) $\angle A = 37^\circ$, $CA = 6.1$ 公分, $AB = 4.8$ 公分.

(v) $AC = 2.4$ 市寸, $BC = 1.3$ 市寸, $\angle C = 97^\circ$.

(vi) $AB = 5.9$ 公分, $\angle B = 107^\circ$, $BC = 7.3$ 公分.

習題 108. 作一線段 AB 長 7 公分, 在 A 作一角 $BAC = 60^\circ$, 在 B 作一角 $ABC = 45^\circ$, 延長 AC, BC 交於 C, 測量此三角形的其餘的邊和角, 又三角之和爲何?

習題 109. 作三角形 ABC 已知:—

(i) $AB = 6.7$ 公分, $\angle A = 45^\circ$, $\angle B = 73^\circ$.

(ii) $BC = 2.6$ 市寸, $\angle B = 94^\circ$, $\angle C = 26^\circ$.

(iii) $\angle A = 120^\circ$, $AC = 2.4$ 市寸, $\angle C = 33^\circ$.

(iv) $\angle B = 47^\circ$, $\angle A = 105^\circ$, $AB = 5.7$ 公分.

(v) $\angle C = 116^\circ$, $AC = 1.9$ 市寸, $\angle A = 41^\circ$.

(vi) $AB = 3.2$ 公分, $\angle A = 27^\circ$, $\angle B = 39^\circ$.

習題 110. 已知 $AB = 58$ 公分, $\angle A = 114^\circ$, $\angle B = 80^\circ$; 能否作一三角形? 試舉理由說明之。

習題 111. 已知 $BC = 2$ 市寸, $\angle A = 76^\circ$, $\angle B = 55^\circ$; 能

否作一三角形? 第一步應先求什麼角?

習題 112. 試作三角形 ABC, 已知:

(i) $AB=2.3$ 市寸, $\angle B=65^\circ$, $\angle C=59^\circ$.

(ii) $AC=2.8$ 市寸, $\angle C=48^\circ$, $\angle B=108^\circ$.

(iii) $\angle A=99^\circ$, $\angle B=37^\circ$, $BC=6.4$ 公分.

(iv) $\angle C=56^\circ$, $\angle A=39^\circ$, $AB=7.5$ 公分.

習題 113. 已知 $BC=3$ 市寸, $\angle A=118^\circ$, $\angle C=80^\circ$; 能否作一三角形? 試舉出理由.

習題 114. 記兩點 A, B 相隔 7 公分.

(i) 與 A 的距離是 6 公分的點在什麼曲線上?

(ii) 與 B 的距離是 5 公分的點在什麼曲線上?

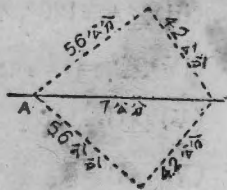
(iii) 有無一點與 A 的距離是 6 公分而與 B 的距離是 5 公分?

(iv) 另外有無這樣的一點?

習題 115. A 與 B 是相隔 7 公分的二點. 試如上題求一點距 A 5.6 公分又距 B 4.2 公分.

習題 116. 復演前題, 不必作完全的圓.

(如右圖).



習題 117. (i) 作一三角形其邊的長是 9.4 公分, 7.5

公分,6.1公分.

(ii) 畫的弧交於幾點?

(iii) 能作成幾個三角形互相全等否? (即互相完全相合否?)

習題 118. 作三角形 ABC, 已知:—

(最好先作最長的邊)

(i) $BC=4.6$ 公分, $CA=6.7$ 公分, $AB=7.2$ 公分.

(ii) $AB=3.5$ 市寸, $BC=4.2$ 市寸, $CA=2.7$ 市寸.

(iii) $BC=5.1$ 公分, $CA=3.7$ 公分, $AB=6.9$ 公分.

習題 119. 已知 $AB=5.3$ 公分, $BC=2.7$ 公分, $CA=1.6$ 公分;能否作成一三角形?什麼原因?

習題 120. 已知 $AB=7.2$ 公分, $BC=5.1$ 公分, $CA=2.1$ 公分;能否作成一三角形?什麼原因?

23. 三角形可以其邊來分類:

一三角形有兩邊相等的稱爲二等邊三角形,或等腰三角形;相等的二邊稱爲等邊,或等腰;第三邊稱爲底邊;在底邊兩端的角稱爲底角;夾在等邊間的角稱爲頂角;

一三角形有三邊相等的稱爲等邊三角

形;

一三角形沒有兩邊相等的稱爲不等邊三角形,三角形又可以其角來分類:

一三角形其三頂角都是銳角的稱爲銳角三角形;

一三角形有一頂角是直角的稱爲直角三角形;夾直角的邊稱爲直角邊;對直角的邊稱爲斜邊;

一三角形有一頂角是鈍角的稱爲鈍角三角形.

習題 121. 作一直角三角形,其他二頂角是何種角?

√習題 122. 作一鈍角三角形,其他二頂角是何種角?

√習題 123. (i) 任意作一二等邊三角形,測量其二底角.

(ii) 以各種不同的二等邊三角形復演(i).

從這實驗發現二等邊三角形的二底角有若何關係?

習題 124. 能否作一二等邊直角三角形?此三角形的三頂角的角度如何?

習題 125. 能否作一二等邊三角形使其兩底角全是直角,或鈍角?

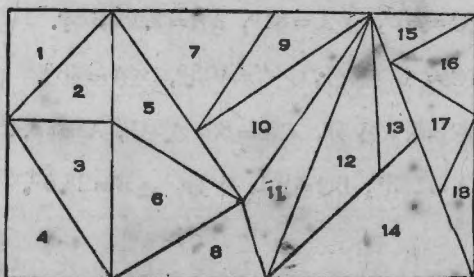
√習題 126. (i) 在一長約 2 市寸線段上作一等邊三

角形;測量其三頂角?

(ii) 以太小不同的等邊三角形復演(i)

從這實驗發現等邊三角形的三角有若何關係?

習題 127. 試作一表在 A 行內表明下圖中的三角形是不等邊,二等邊或等邊三角形,又在 B 行內表明下圖中的三角形是銳角,直角或鈍角三角形。



三角形 號 數	A	B
1		
2		
3		

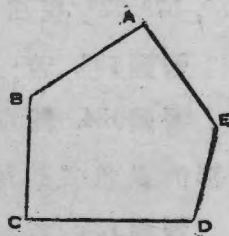
習題 128. 試就以下的度量作三角形 ABC:—

(未作之前先畫一草圖以決定作法的步驟;既作之後,測量其餘的邊和角,並註明這是不等邊,二等邊或等邊三角形及銳角,直角,鈍角三角形。)

- (i) $BC=3.25$ 市寸, $AB=2.5$ 市寸, $\angle B=34^\circ$.
- (ii) $\angle A=74^\circ$, $\angle B=53^\circ$, $AB=5.7$ 公分.
- (iii) $\angle B=60^\circ$, $AC=2.35$ 市寸, $\angle C=60^\circ$.
- (iv) $AB=4.2$ 公分, $BC=5.6$ 公分, $CA=7$ 公分.
- (v) $AC=1.4$ 市寸, $BC=2.5$ 市寸, $\angle C=112^\circ$.
- (vi) $\angle B=34^\circ$, $\angle C=56^\circ$, $BC=6.3$ 公分.
- (vii) $\angle C=55^\circ$, $\angle A=81^\circ$, $AB=2.45$ 市寸.
- (viii) $AC=3$ 公分, $\angle C=108^\circ$, $\angle A=36^\circ$.
- (ix) $BC=6.4$ 公分, $CA=8.3$ 公分, $AB=5.4$ 公分.
- (x) $\angle A=133^\circ$, $BC=9.1$ 公分, $\angle B=23.5^\circ$.

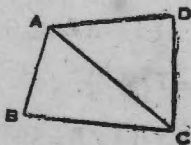
多邊形

24. 三以上直線所圍繞的圖形稱爲多邊形, 如多邊形 ABCDE; A, B, C 等稱爲頂點; AB, BC, CD 等稱爲邊; $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 等稱爲頂角; 諸邊之和稱爲周; 不相鄰的兩頂點的聯線稱爲對角線; 如 AC, BD 等.



三邊的多邊形稱爲三角形; 四邊的稱爲四邊形; 五邊的稱爲五邊形; n 邊的稱爲 n 邊形.

習題 129. 任意作一四邊形 ABCD 聯 AC.



- (i) $\triangle ABC$ 的三角之和爲若干?
- (ii) $\triangle ACD$ 的三角之和爲若干?
- (iii) 此四邊形的四角之和爲若干?

習題 130. 以各種不同的四邊形復演前題, 結果應否相同?

習題 131. 若一四邊形的三角是 106° , 67° , 85° , 第

四角爲何?

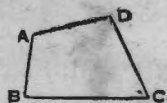
習題 132. 以 (i) $76^\circ, 110^\circ, 70^\circ$, (ii) $90^\circ, 90^\circ, 90^\circ$, (iii) $123^\circ, 57^\circ, 57^\circ$, 復演前題.

習題 133. 若一四邊形的四角相等, 每角是若干度?

習題 134. 任意作一五邊形 ABCDE; 聯 AC, AD. 此五邊形的五角之和爲若干?

習題 135. 若一五邊形的五角相等, 每角是若干度?

習題 136. 用以下的度量作一四邊形 ABCD—:



(未作之前應先畫一草圖, 藉以決定作圖的步驟, 看從那一個三角形作起, 繞着四邊形表明頂點的文字應依順序排列, 如上圖四邊形稱爲 AECD, 非 ACBD.)

(i) $AB=6.3$ 公分, $\angle B=84^\circ$, $BC=7.8$ 公分, $\angle C=90^\circ$, $CD=7$ 公分.

(ii) $\angle B=120^\circ$, $BC=1.5$ 市寸, $\angle C=103^\circ$, $CD=2$ 市寸, $\angle D=92^\circ$.

(iii) $AD=6$ 公分, $\angle D=108^\circ$, $\angle DA_1=29^\circ$, $\angle BAC=34^\circ$, $AB=4.8$ 公分.

(iv) $AC=5.6$ 公分, $\angle A=58^\circ$, $\angle DAC=69^\circ$, $\angle BCA=58^\circ$, $\angle DCA=69^\circ$.

(V) $\angle ABD = \angle ADB = 52^\circ$, $\angle C = 67^\circ$, $BC = 2.5$ 市寸,
 $CD = 3$ 市寸.

(Vi) $AB = 2.3$ 市寸, $BC = 2.1$ 市寸, $CD = 3.3$ 市寸,
 $DA = 1.5$ 市寸, $BD = 3$ 市寸.

(Vii) $AB = 2.7$ 公分, $BC = 7.5$ 公分, $AB = 8.4$ 公分,
 $\angle C = 98^\circ$, $\angle BDC = 54^\circ$.

習題 132. 用以下的度量作五邊形 ABCDE:—

(i) $AB = 4$ 公分, $BC = 4.4$ 公分, $CD = 3.5$ 公分,
 $DE = 4.4$ 公分 $EA = 5$ 公分, $\angle B = 113^\circ$ $\angle C = 147^\circ$.

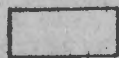
(ii) $AB = 2.7$ 公分, $BC = 3.1$ 公分, $DE = 3.9$ 公分,
 $AE = 4.2$ 公分, $\angle B = 95^\circ$, $\angle ACD = 85^\circ$, $\angle ADC = 81^\circ$.

25. 兩雙對邊互相平行的
 四邊形, 稱為平行四邊形.

有一角是直角的平行四
 邊形稱為矩形.

有二鄰邊相等的平行四
 邊形稱為菱形.

有二鄰邊相等的矩形稱
 為正方形.



習題 138. 作一平行四邊形使其二鄰邊為 6.4 公分和 5.3 公分又此二邊間的夾角為 35° .

對邊相等否? 對角相等否?

對角線互相二等分否?

習題 139. 以 (i) 10.4 公分, 2.6 公分, 116° , (ii) 10.4 公分, 2.6 公分 64° 復演前題.

習題 140. 作一四邊形 ABCD 已知 $AB=CD=4.7$ 公分, $AD=BC=6.5$ 公分, 又 $\angle A=84^\circ$.

這是平行四邊形否?

習題 141. 作一平行四邊形使其二鄰邊為 3 市寸和 5 市寸, 此二邊間的夾角是 90° , 這是何種四邊形? 考察其餘三角.

習題 142. 作一矩形使其邊 = 6.3 公分和 2.9 公分測量其四角, 全相等否?

測量其二對角線, 相等否?

習題 143. 以 (i) 3.3 市寸, 2.5 市寸 (ii) 6.8 公分, 10.2 公分 (iii) 9.3 公分, 2.8 公分復演前題.

習題 144. 作一矩形使邊 = 2.75 市寸和 1.5 市寸測量其二對角線.

習題 145. 以下面的度量復演前題 (i) 6.8 公分, 8.6 公分, (ii) 9.5 公分, 2.7 公分.

習題 146. 作一平行四邊形使其相鄰二邊同等於 5.6 公分, 夾角等於 54° . 測量其邊, 角, 對角線及對角線間的夾角.

習題 147. 作一菱形使一邊 = 2 市寸又一角 = 54° . 測量其邊, 角, 對角線及對角線間的夾角.

習題 148. 以 (i) 7.2 公分, 145° , (ii) 6.7 公分, 76° 復演前題.

習題 149. 作一矩形使其相鄰二邊同 = 4.6 公分, 測量其邊, 角, 對角線及對角線間的夾角.

習題 150. 畫一每邊 = 2.5 市寸的正方形. 測量其邊, 角, 對角線及對角線間的夾角.

習題 151. 說明如何用摺疊法檢驗一張紙是否成一正方形.

習題 152. 就下列表內看某圖形是否常具有某性質而在適當的方格內填入“+”號或“-”號.

	平 行 四 邊 形	矩 形	正 方 形	菱 形
對邊和對角相等				
對角線互相平分				
頂角全等於直角				

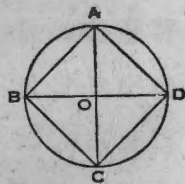
對角線相等				
對角線直交				
鄰邊相等				

26. 等邊又等角的多邊形稱為正多邊形。

習題 153. 試舉一等邊而不等角的四邊形。再舉一等角而不等邊的四邊形。等邊又等角的四邊形是什麼？

習題 154. 等邊三角形等角否？能否稱為一正三角形？

習題 155. 作一半徑 3 公分的圓作二互相垂直的直徑交圓於 A, B, C, D 聯 AB, BC, CD, DA. 測量四邊形 ABCD 的諸邊和諸角這是一正方形否？



習題 156. 作一半徑 3 公分的圓；在圓心作一組角各等於 60° (即 $\frac{360^\circ}{6}$) 順次聯半徑的他端；則得一內接於圓的六邊形，測量其諸邊及諸角，這是一正六邊形否？

習題 157. 做做前題在一半徑 3 公分的圓內作一正五邊形；在圓心的角應各等於若干度？

習題 158. 先計算在圓心的角，在一半徑 3 公分的圓內作以下諸正多邊形。

(i) 三角形, (ii) 八邊形, (iii) 九邊形, (iv) 十邊形,

(V) 十二邊形, (Vi) 十六邊形.

習題159. 試由習題 156 所發現的事實,說明一正六邊形的簡便的作法.

面 積

27. 每邊一公分的正方形稱爲一平方公分。同理，每邊一市寸的正方形稱爲一平方市寸。平方公分，平方市寸等等都用作測量面積的單位。

習題 160. 作一正方形 $ABCD$ 使其每邊長 3 公分；分 AB 和 BC 成三等分，再從各分點引邊的平行線。則正方形 $ABCD$ 分成若干平方公分？

習題 161. 以一每邊 5 公分的正方形復演前題。

習題 162. 每一平方公分中有若干平方公厘？一平方公厘合若干平方公分？

習題 163. (i) 每邊長 2.5 公分的正方形中有若干平方公厘？有若干平方公分？

(ii) 每邊長 4.7 公分的正方形中有若干平方公分？

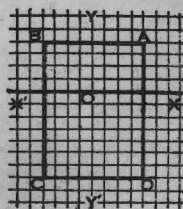
習題 164. 作一矩形 $ABCD$ 使 $AB=4$ 市寸， $BC=3$ 市寸；分成平方市寸後，有若干平方市寸？

習題 165. 作一 6 公分與 4 公分的矩形其中有若干平方公分？

習題 166. 一個 4.5 公分與 6.7 公分的矩形中有若干

平方公厘?若干平方公分?

習題 167. 在方格紙上畫二軸 XX' , YY' , 點四點 $A(5, 4)$, $B(-3, 4)$, $C(-3, -7)$, $D(5, -7)$. 矩形 $ABCD$ 的面積如何?
(即有若干方格?)



習題 168. 點以下諸點, 順次聯接後, 再求面積:

- (i) $(1, 16)$, $(9, 16)$, $(9, 1)$, $(1, 1)$.
- (ii) $(-6, 2)$, $(2, 2)$, $(2, -13)$, $(-6, -13)$.
- (iii) $(0, 0)$, $(8, 0)$, $(8, -15)$, $(0, -15)$.
- (iv) $(10, 20)$, $(-10, 20)$, $(-10, -20)$, $(10, -20)$.

習題 169. 求一矩形的面積,

- (i) 10 公厘 \times 10 公厘, 計以平方公厘又計以平方公分.
- (ii) 8 公里 425 公尺 \times 1 公里 264 公尺, 計以平方公里又計以平方公尺及公畝.
- (iii) 1 市里 105 市丈 9 市尺 \times 3 市里 96 市丈 3 市尺, 計以平方市里又計以平方市丈及市畝.
- (iv) a 公分 \times b 公分.

習題 170. 試算下圖中三字母的面積:

THE

習題 171. 求一矩形的其他度量, 已知

- (i) 面積 = 140 平方市尺, 一度量 = 35 市尺.
- (ii) 面積 = 1 平方市尺, 一度量 = 4 市寸.
- (iii) 面積 = 6.5 平方市丈, 一度量 = 3.9 市丈.
- (iv) 面積 = 7.8 市畝, 一度量 = 18 市丈.

28. 作一矩形的一對角線, 則分矩形成二相等的直角三角形, 所以一直角三角形的面積可以由某矩形的面積的一半計算而得.

習題 172. 求一三角形的面積其頂點爲

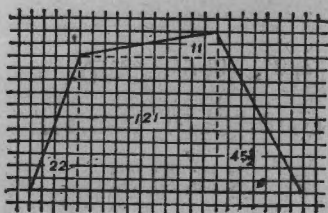
- (i) $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(6, 0)$ (完成矩形)
- (ii) $(2, 5)$, $(17, 5)$, $(17, 10)$
- (iii) $(-1, 13)$, $(-8, 3)$, $(-8, 13)$.

習題 173. 求一直角三角形的面積其夾直角的邊爲 (i) 2 市寸, 5 市寸, (ii) 4.5 公分, 6.4 公分, (iii) 3.6 市寸, 7 市寸.

29. 應用矩形和直角三角形可以求任意

直線形的面積若將直線形的一邊沿着方格紙的一線,求面積尤為便利。

下圖表明如何分一四邊形或矩形和直角三角形;在每矩形和三角形中的數目指明其中所含的方格數;而全面積為 $199\frac{1}{2}$ 或 199.5 方格。



習題 174. 分以下圖形成矩形和直角三角形以求其面積:

(i) $(1, 2), (1, 10), (6, 13), (6, 2)$.

(ii) $(-4, -3), (-3, 3), (5, 6), (10, -3)$.

(iii) $(0, 0), (1, 4), (6, 0)$.

(iv) $(1, 4), (6, 3), (1, -3)$.

(v) $(3, 5), (-3, 2), (-5, -3), (3, -7)$.

(vi) $(2, 5), (5, 2), (5, -2), (2, -5), (-2, -5),$

$(-5, -2), (-5, 2), (-2, 5)$.

習題 175. 在同軸上作以下三圖形;求各個的面積及周.

(i) $(1, 1), (1, 6), (6, 6), (6, 1)$.

(ii) $(1, 1), (4, 5), (9, 5), (6, 1)$.

(iii) $(1, 1), (5, 4), (10, 4), (6, 1)$.

等周的圖形面積一定等否?

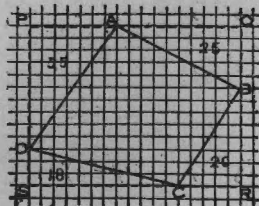
習題 176. 在同軸上作以下二圖形;求各個的面積及周.

(i) $(0, 0), (7, 0), (9, 5), (2, 5)$.

(ii) $(0, 0), (7, 0), (8, 5), (-4, 5)$.

等面積的圖形一定等周否?

30. 若直線形沒一邊與方格紙的一線相合 (如下圖 ABCD), 則過其諸頂點在形外引平行於軸的直線而形成一矩形 (PQRS); 從矩形中減去若干直角三角形可得所求的面積.



$$\begin{aligned}
 \text{在上圖中 } ABCD &= PQRS - AQB - BRC - CSD \\
 &\quad - DPA \\
 &= 221 - 25 - 20 - 18 - 35 \\
 &= 123.
 \end{aligned}$$

習題 177. 求以下圖形的面積：——

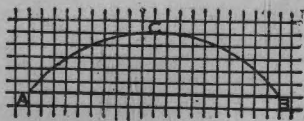
(i) (1, 1), (16, 5), (9, 14).

(ii) (10, -20), (20, -24), (12, 4).

(iii) (1, 0), (6, 1), (5, 6), (0, 5).

(vi) (2, 0), (10, 4), (6, 10), (-2, 6);

31. 應用方格紙不能精確地求得一曲線形的面積的值;然而應用下面的方法却容易求得其近似值.



在上圖中,欲求圖形 ACBA 的面積,注意曲線 ACB 切開若干方格;則必先決定如何處理這些不完整的方格.最適用而簡便的辦法是:——若不完整的方格大於一方格

之半,以 1 計算,若小於一方格之半,以 0 計算。

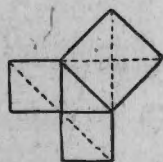
所以依此方法求得 ACBA 的面積是 72。

習題 178. 以半徑 10 圓心 (0,0) 作一圖,計算其面積。
(先求每象限的面積,再以 4 乘之,計算比較簡便)

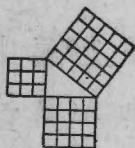
習題 179. 試繪 $x^2 + y^2 = 36$ 的圖解,並求其面積。

習題 180. 試繪 $y = 6 - \frac{x^2}{6}$ 的圖解,並求此曲線與 x 軸所包含的部份的面積。

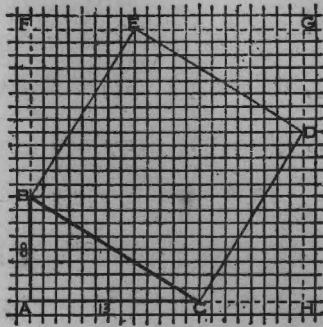
32. 如右圖作一二等邊直角三角形並在每邊上作一正方形。虛線分正方形成直角三角形而各形顯然與原三角形相等,此圖已表明在斜邊上的正方形等於在直角邊上的二正方形之和。



習題 181. 作一直角三角形使其夾直角的邊長 3 公分和 4 公分。在此二邊及斜邊上作正方形。測量斜邊的長,再決定斜邊上的正方形是否等於夾直角的二邊上的正方形之和。



習題 182. 在下圖中斜邊 BC 上的正方形 BCDE 的面積可以由正方形 AFGH 中減去四角的三角形而得再計算 AB 和 AC 上的正方形的面積之和此和是否等於 BC 上的正方形的面積。



習題 183. 作一不等邊直角三角形 ABC, 直角在 A. 測量三邊並計算其上正方形的面積. 求二較小的正方形的面積之和, 更排列結果如下:

AB =	公分	AB 上的正方形 =	平方公分,
AC =	公分	AC 上的正方形 =	平方公分,
		AB, AC 上的正方形之和 =	平方公分,
BC =	公分	BC 上的正方形 =	平方公分.

習題 184. 以各種不同的直角三角形復演前題。

33. 上面的習題引導出下面的有名的畢

達哥拉斯 (Pythagoras) (B. C. 570 - 500) 氏定理:

“ 在一直角三角形中斜邊上的正方形等於其他二邊上的正方形之和。”

習題 185. 求一直角三角形的斜邊, 其直角邊為

(i) 4.5 市寸, 6 市寸, (ii) 7.8 公分, 9.4 公分,

(iii) $4\frac{1}{2}$ 市寸, $5\frac{1}{2}$ 市寸, (iv) 3.6 公分, 5.5 公分.

習題 186. 求一直角三角形的其他一直角邊及三角形的面積, 已知其斜邊及一直角邊如下:

(i) 斜邊 = 15 公分 直角邊 = 12 公分,

(ii) 斜邊 = 160 公厘 直角邊 = 100 公厘,

(iii) 斜邊 = 8 市寸 直角邊 = 5 市寸.

習題 187. 一直角三角形的斜邊為何, 若其夾直角的二邊是 6 公分和 8 公分? 畫圖以檢驗之.

34. 當以計算和畫圖求得某一結果時, 二者之間往往有些微的誤差, 要看誤差是否過甚, 必求誤差的百分數, 即誤差對於精確結果的百分數, 而稱為百分差. 在前題中由計算得

$$\begin{aligned} \text{二直角邊上的正方形之和} &= (6^2 + 8^2) \text{ 平方公分,} \\ &= 100 \quad \text{平方公分,} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{斜邊上的正方形} = 100 \quad \text{平方公分,}$$

$$\therefore \text{斜邊} = 10 \quad \text{公 分;}$$

$$\text{由畫圖, 假設求得斜邊} = 9.95 \quad \text{公 分,}$$

$$\text{誤差} = 0.05 \quad \text{公 分,}$$

$$\text{百分差} = \frac{0.05}{10} = 0.5 \quad \%$$

百分差不必求到一位以上有效數字;小於 1% 的百分差方能視為可以滿意的結果。

(演以下各題 (i) 由計算 (ii) 由畫圖計算應求到三位有效數字,並求百分差)

習題 188. 求一矩形的對角線之長其邊為 (i) 4 市寸和 6 市寸, (ii) 9 公分和 11 公分。

習題 189. 求一矩形的其他一邊和面積已知其 (i) 對角線 = 10 公分, 一邊 = 7 公分; (ii) 對角線 = 4.63 公尺, 一邊 = 3.47 公尺。

習題 190. 求一正方形的對角線其邊是 (i) 1 市寸, (ii) 5 公分, (iii) 6.72 公分。

習題191. 求一正方形的一邊和面積,其對角線是
(i) 2市寸, (ii) 10市寸, (iii) 14.14公分.

習題192. 若一點P的坐標是(1, 1), 又一點Q的坐標是(2, 3), 求距離PQ (PQ是某矩形的對角線.)

習題193. 求以下諸點間的距離:—

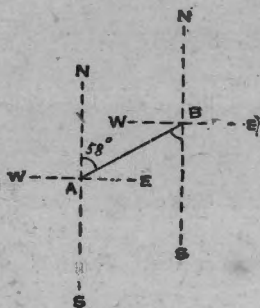
(i) (2, 1), (1, 3). (ii) (0, 0), (3, 1).

(iii) (2, 0), (0, 3). (iv) (-1, -1), (2, 1).

(v) (-2, 2), (1, -2).

比例尺作圖

35. 一觀測者在 A 點觀測另一點 B; B 在 A 之北, 而 AB 線與過 A 的 N-S 線夾成 58° 的角, 且 B 在 A 之東, 則稱 B 對於 A 的方位是北偏東 58° 或簡寫為 N 58° E.



反過來, A 對於 B 的方位是 S 58° W.

注意 方位是先定南北, 然後再定偏東或偏西.

(演以下各題先作一草圖, 註明已知的部份; 再依規定的比例尺作圖.)

習題 194. A 在 B 的正西 2.5 公里, C 在 A 的正南 4.5 公里, 從 B 到 C 距離為何? B 對於 C 的方位如何? (比例尺 1 公里 : 1 市寸.)

習題 195. P 在 Q 的 N. W. 17.5 公里, Q 在 R 的 N. E. 25 公里, P 對於 R 的距離和方位如何? (比例尺 10 公里 : 1 市寸.)

習題 195. A 在 B 的 N 88 里, C 在 B 的 S 30° E 48 里. 求 A 與 C 間的距離. (比例尺 10 里 : 1 公分.)

在以下各題中用適當的比例尺, 並須註明.

習題 197. A 與 B 是相隔 800 公尺的二浮標, B 在 A 的正北. 一船在 B 的正北 100 公尺向正東航行, 5 分鐘後看見 A 在 S 57° W. 求此移動的距離.

習題 198. A 是一燈塔; B 與 C 是相隔 15.5 公里的二船; B 在 A 的正北, C 在 B 的正東, 又 C 在 A 的 N. E. 求此二船與燈塔的距離.

習題 199. 某人在河岸看見對岸的一株樹在他的 N 20° W. 他沿河岸走 200 公尺後發現樹在 N. E. 的方向. 若河流是東西的方向, 求其寬.

習題 200. 從 G 向西走 9 公里到 H, 從 H 向北走 12 公里到 A, 又從 A 向西走 17 公里到 R. 從 G 到 R 的距離為何? 又 R 對於 G 的方位如何?

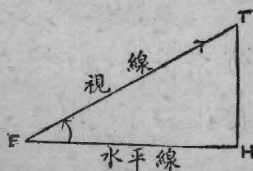
習題 201. 岸上某目標在一船的 N 32° W. 此船向 N 22° E 航行 7.2 公里後, 目標在船的 N 71° W. 此時船距目標多遠?

習題 202. A 在 B 的正 W 1 公里. C 對於 A 的方位是 N 28° W 又 D 的方位是 N 33° E. C 對於 B 的方位是 N 34° W 又 D 的方位是 N 9° W, 求 D 對於 C 的距離和方位.

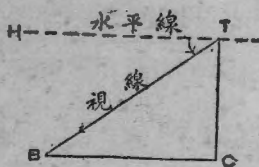
習題 203. 從某一海岸守備站發現一艦在其 $N28^\circ E$ 3 公里的地方, 而正向 $N72^\circ W$ 的方向航行. 十五分鐘後此艦在站的 $N36^\circ W$ 的方向, 求其航行的速度.

速度 = $\frac{\text{距離}}{\text{時間}}$

36. 在 E 水平地放一望遠鏡以觀測一塔 HT; 次擡起鏡頭觀測塔頂 T; 則視線 ET 與水平線 EH 間的夾角 HET 稱爲 T 的仰角.

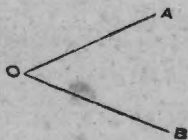


在 T, 一懸岩 TC 的頂上, 水平地放一望遠鏡; 低下鏡頭以觀測水面上一隻船 B; 則視線 TB 與水平線 TH 間的夾角稱爲 B 的俯角.



注意 所謂仰角或俯角是觀測者的視線與水平線所成的角.

若 O 是一觀測者而 A 和 B 是二點, 則角 AOB 稱爲 AB 在 O 的張角.



習題 204. 一枝鉛直的旗杆高 50 市尺立於一水平面之上。求從距杆脚 15 市尺的水平面上的一點測得旗杆的頂點和中點的仰角。

習題 205. 一淺水艦在距離 200 公尺的地方駛過一砲臺，臺上的砲在水面上 120 公尺，若直接對艦發砲，這砲應俯下若干度？

習題 206. 在一高 15 市尺的窗口測得一株樹的張角是 44° ；若樹根的俯角是 12° ，求其高。

習題 207. 從一點 A 越過一高 50 市尺的屋頂適可看見一塔頂。若 A 和塔根的距離是 460 市尺又 A 和屋的距離是 160 市尺，求塔高若干市尺，又從 A 測得塔頂的仰角。

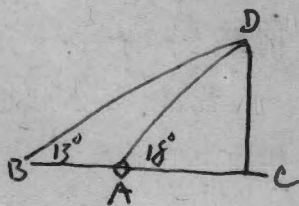
習題 208. 在一高一公里的飛機中測得某目標的俯角是 34° ，這飛機上升 20 分後，某目標的俯角為 56° 。求上升的速度。

習題 209. 一觀測者測得聯接二砲臺 A 和 B 的直線在一點 C 張一直角；從 C 向 B 前進 100 公尺而求得 A 在此點張一 107° 的角。求 A 與二觀測點的距離。

習題 210. 從一海船上測得某山頂的仰角是 18° ，向海外駛出 5 公里則測得山頂的仰角為 13° 。求山頂高出海面若干公尺。

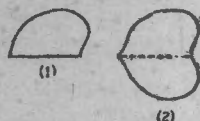
習題 211. 從一高出水面 30 市尺的一軍艦的甲板上見一魚雷艦一直駛去, 其艦頭的俯角是 11° , 又其艦尾的俯角是 21° . 求魚雷艦的身長.

211/
 作 BC 水平線
 設 A 為軍艦
 從 A 作 $\angle CAD = 18^\circ$
 截 AB = 5 哩
 從 B 作
 $\angle CBD = 13^\circ$
 BD, AD 交於 D 矣
 從 D 作 $DE \perp BC$
 DE 即 4 高 矣



對 稱

37. 取一張紙摺疊之;切摺紙成任意圖形 (如右圖(1));放開紙,測得一軸對稱圖形(如圖(2))



此圖形稱為關於摺痕為軸對稱,而摺痕稱為對稱軸。

習題 212. 若切摺紙成以下圖形,試作所得各軸對稱圖形的草圖,並於可能時說出其名稱。

- (i) 一直角 \triangle ,以其最短邊為摺痕。
- (ii) 一二等邊 \triangle ,以其底邊為摺痕。
- (iii) 一不等邊 \triangle ,以其最大邊為摺痕。
- (iv) 一半圓,以其直徑為摺痕。
- (v) 一矩形,以其一邊為摺痕。
- (vi) 一平行四邊形,以其一邊為摺痕。

習題 213 以下各圖形何種有對稱軸?何種有二以上的對稱軸?若有對稱軸,並作線以表明之:

- (i) 二等邊 \triangle , (ii) 等邊 \triangle , (iii) 正方形, (iv) 矩形,
- (v) 平行四邊形, (vi) 菱形, (vii) 正五邊形 (viii) 正六邊形, (ix) 圓, (x) 半圓, (xi) 二不等圓, (xii) 二等

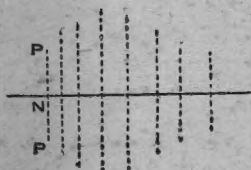
圖.

習題 214 以下諸直體大寫字母那幾個有對稱軸，並作線以表明之：

A B C D E F G H

38. 取紙一張摺疊之。在摺紙上，刺小孔若干。放開紙後，則得一關於摺痕為軸對稱的圖形，如下圖聯接其對應點。

注意 當摺疊時， NP' 與 NP 相合而表明 $NP' = NP$ 。且



測量 PP' 與摺痕所成之角；又可看出 PP' 與摺痕相垂直，所以一軸對稱的圖形中任意一對對應點的聯線為對稱軸所平分，且與對稱軸垂直。

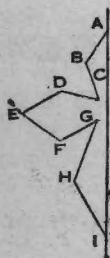
習題 215. 若 P 在對稱軸上，其對應點 P' 在何處？

習題 216. 任意作一直線 AB ，在其一旁作一線分 CD 試作以 AB 為對稱軸的 CD 的對稱圖。

習題 217. 任意作一直線 DE ，在其一旁作一三角形 ABC 。試作以 DE 為對稱軸的 $\triangle ABC$ 的軸對稱圖。

習題 218. 試作右圖中的 ABCDEFGHI 的軸對稱圖。

習題 219. 切紙成一二鄰邊不等的平行四邊形。以一對角線為摺痕摺疊之。兩個半形能相合否？平行四邊形有無對稱軸？有無對稱的性質？



39. 畫一平行四邊形，過 O ，對角線的交點，引若干直線而過平行四邊形的周圍。

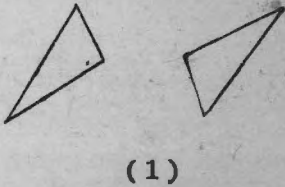
設一直線過周圍於 P 和 P' 則 PP' 為 O 所平分。對於過 O 的其他直線亦復如此。實際上，過 O 而止於周圍的每一線段都為 O 所平分。

此平行四邊形稱為關於 O 為中心對稱，而 O 稱為對稱中心。

習題 220. 在一張固定的紙上作一平行四邊形，在對角線的交點上刺進一針。用刀切開此平行四邊形，繞着針旋轉此平行四邊形；則旋轉若干度後此紙平行四邊形仍與原來空位置相合？

習題 221. 以下二圖那一個是中心對稱圖，表明其

對稱中心:那一個是軸對稱圖,表明其對稱軸。



習題 222. 以下諸大寫字母中那幾個是中心對稱圖形,並表明其對稱中心:

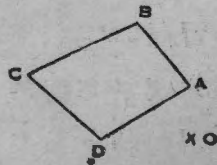
N, O, R, S, T, V, X, Z

習題 223. 以下諸圖形中何種有中心對稱性質!又其對稱中心何在?

(i) 正方形, (ii) 正三角形, (iii) 矩形, (iv) 菱形, (v) 正五邊形, (vi) 正六邊形, (vii) 圓, (viii) 二等圓.

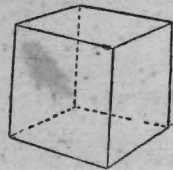
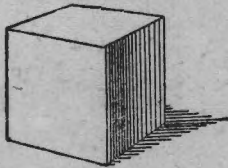
習題 224. 一中心對稱圖的任意一對對應點的聯線過對稱中心否?是否為對稱中心所平分?

習題 225. 在右圖中,以 O 為對稱中心如何作 ABCD 之中心對稱圖?

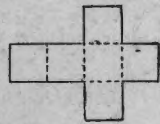


立 體

40. 以下二圖代表一立方體，即以六個相等端正方形包圍的立體。



習題 226. 作一硬紙的立方體，每邊長 2 寸。其法可先切紙如右圖，次依虛線摺之；再膠合接縫即得，右圖稱為網圖。



習題 227. 一立方體有幾個隅？幾條稜？

習題 228. 有幾稜集於每一隅？是否全體的稜數等於隅數乘以集於每隅的稜數？試舉出理由。

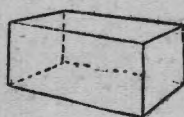
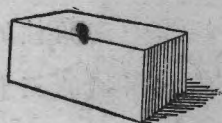
習題 229. 每面有幾條稜？是否全體的稜數等於面數乘以屬於每面的稜數？試舉出理由。

習題 230. 最多同時能看見幾個面，稜，隅？

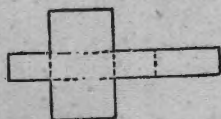
習題 231. 以三種不同的看法作一立方體的草圖。

41. 以下二圖代表一長方體或六面體，即

類似磚形的立體。



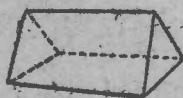
習題 232. 作一硬紙的長方體其網圖如右;其度量爲 6 公分、
3.8 公分及 2.6 公分。



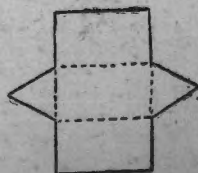
習題 233. 任意取一長方體的一稜;與其相等的稜有幾?

習題 234. 以三種不同的看法作一長方體的草圖。

42. 以下二圖代表一正三角柱,即兩端是正三角形周圍是矩形所包圍的立體。



習題 235. 作一正三角柱;其網圖如右;短線各長 4 公分而長線各長 7 公分:



習題 236. 一三角柱有幾個面?

幾條稜幾個隅？

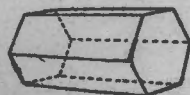
習題 237. 最多同時能看見幾個面，稜，隅？

習題 238. 以三種不同的看法作一三角柱的草圖。

習題 239. 作一三角柱的網圖其兩端的三角形的邊是 5 公分，5 公分，1.5 公分而長是 3 公分。

如此的角柱又稱為劈。

43. 以下二圖代表一正六角柱，即兩端是正六邊形周圍是矩形所包圍的立體。



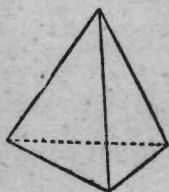
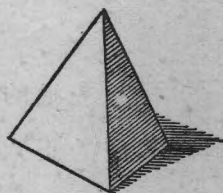
習題 240. 試作正六角柱的草圖，正六邊形的每邊長 2 公分而長 6 公分。

習題 241. 一六角柱有幾個面，稜，隅？

習題 242. 最多同時能看見幾個面，稜，隅？

習題 243. 以三種不同的看法作一正六角柱的草圖。

44. 以下二圖代表一四面體，即四個面所包圍的立體。



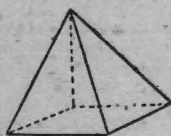
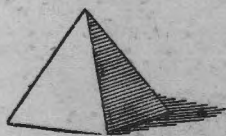
習題 244. 作一硬紙的四面體,其四面全是等邊三角形,每邊長 5 公分.

其網圖如何?

習題 245. 一四面體有幾條稜?幾個隅?

習題 246. 以三種不同的看法作一四面體的草圖.

45. 以下二圖代表一正方椎,即立於一正方形底上的椎體;四個三角形全是二等邊的.



習題 247. 作一正方椎;其正方形底每邊長 4 公分,又三角形的等邊各長 6 公分.

其網圖如何?

習題 248. 一正方椎有幾個面?幾條稜?幾個隅?

習題 249. 最多同時能看見一正方椎的幾個面,稜,隅?

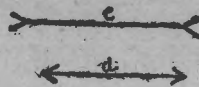
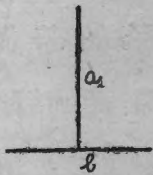
習題 250. 以三種不同的看法作一正方椎的草圖.

習題 251, 作一正六角椎的網圖,其底是正六邊形每邊長 2 公分,而二等邊三角形的等邊各長 5 公分.

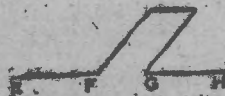
理論幾何

緒論

46. 理論的必要 在前一部實驗幾何中我們研究幾何圖形應用的是實驗方法，當我們測量時，必須依賴直覺；而直覺未必如何可靠。例如：



左圖中的 a 和 b ，右圖中的 c 和 d ，本來是相等的，若單憑直覺卻以 a 大於 b ， c 大於 d 了。



又如單憑直覺以為左圖中 AB ， CD 不相平行，右圖中 EF ， GH 不成直線了。可見如若信賴直覺而作推論必容易得着錯誤的結果。而且在測量時代我們還要信賴測量的用

具和我們的目力。實際上我們的用具如尺、量角器等既然不會絕對精密而我們的目力所能達到的精密的程度亦屬有限。所以我們用尺最多不過測到一公分的百分之一，用量角器要量到一度的十分之一就很困難了。可見測量，不管用具如何精密，僅能得近似值而已。還有，測量僅能施於少數的例子而不能施於所有的例子，如若僅憑少數例子的測量遽下論斷，則難免不陷於謬誤。

幾何是首重推理的學科。在理論幾何中，某種幾何的敘述真確與否，我們決不能以直觀或測量而加以斷定；若非有完全的理論的證明，我們決不能輕易下肯定或否定的。

47. 幾何學的目的 幾何學的主要目的在於研究並發現體、面、線、點及其相互間的重要性質。而面、線、點稱為幾何學的元素；其

在幾何學上的意義我們應先明白。

48.體,面,線,點 在實驗幾何學裏我們曾接觸並製造許多立體,我們僅研究其所佔據的的空間的大小和形狀,對於其構成的物質以及其顏色,溫度,硬度等我們不加以研究的。

教室代表一部分的空間,不過倘若教室沒有四周的牆壁和仰塵,地板,這空間必擴展到無限,所以僅在有界限時方有完全封閉的一部分的空間,任何有限部份的空間便是體,體的界限便是面。

教室裏的牆若沒有界限,必擴展到無限,但牆的面因和其他面相交而有限制,這面和面相交處便是線,同理線和線相交成點,一塊磚,一張紙,一顆星,一滴水,籃球裏的空氣等各佔有一部分空間,在幾何上便都稱爲體,體的長,有寬,有厚(或高)。

牆壁的表面既非牆,又非空氣,而是牆與

空氣的交界，稱爲面。一玻璃瓶內一半裝水，一半裝油，油與水不能混合，油與水的交界既非水又非油，當然不是體而僅乎是面，所以面沒有厚而有長，有寬。

牆壁與地板的交界既非牆面，又非地板面，稱爲線。上面玻璃瓶中的水和油的交界面與玻璃瓶的交界處也是線，所以線沒有厚，沒有寬而僅有長。

一頁紙的邊緣是線；直線和橫線的交界處是點，所以點沒有厚，沒有寬，沒有長，僅有位置而已。

更就運動方面說，除去在本身的位置運動而外，點運動後成線，線運動後成面，面運動後成體。

習題 252. 試舉點運動成線的實例。

習題 253. 試舉線運動成面的實例。

習題 254. 試舉面運動成體的實例。

49. 直線 直線的意義人都明白，可是因

爲直線是幾何學的最基本的觀念，其完美的定義卻難寫下。下面的實驗可作爲定義的代替：

(i) 摺一張紙，摺痕代表一直線。

(ii) 拉緊一根絲線這可以代表一直線。

(iii) 沿着尺的邊看，尺邊的直線可以被看成一點。

50. 平面 平面是平滑，平坦的面。牆壁，窗上玻璃的表面，靜止的水面都是平面的很好的實例。如若放一枝直尺在平面上，尺邊將全與平面密合。所以一面上任意二點聯接的直線完全在這面之內的，這面稱爲平面。

51. 平面幾何學 祇研究平面圖形的幾何學稱爲平面幾何學。本書所討論的便是平面幾何學。

52. 定理，作圖題，命題，系。

一段敘述能證明其爲真確的稱爲定

理。

作圖的問題稱爲作圖題。

定理和作圖題統稱爲命題。

從某一定理很容易推得的定理稱爲系。

53. 定理的分析 一定理含有二部分：(a) 假設，已知的條件或已設的事實；及 (b) 終結，要證明的論斷。

當一定理是一單句時，主辭是假設而敘述詞是終結。如定理“對頂角相等”，“對頂角”是假設而“相等”是終結。若一定理是一複句時，條件子句是假設，主要子句是終結。如定理“若一三角形的二邊相等，其對角相等”，“假設是“若一三角形的二邊相等”，終結是“其對角相等”。

習題 255. 試分析以下的敘述，什麼是假設，什麼是終結？

(i) 愈有價值的書生命愈久。

(ii) 若水的溫度在 32°F 以下則結冰。

(iii) 若二三角形全等，其對應的部分相等。

(iv) 飛機遇逆風時其進行愈慢。

(v) 三角形的三內角的和等於二直角。

(vi) 平行四邊形的對邊對角相等。

54. 普通公理和幾何公理 在證明一定理的過程中, 每一步必須有理由的根據。有若干基本的定理是我們人人公認為真實而毋需加以證明的。這些定理稱為普通公理。

純粹用於幾何學的公理稱為幾何公理

55. 普通公理

(1) 在一等式或不等式中一量可以其等量代之 (簡稱“替代”) 系等於同量或等量的量相等。

(2) 等量加等量其和相等。

(3) 從等量中減去等量其差相等。

(4) 等量的同倍量相等。(特例: 等量的二倍量相等)

(5) 等量的同分量相等。(特例: 等量的

半分量相等)

(6) 等量加不等量其和不等,大者仍大.

(7) 從不等量減去等量其差不等,大者仍大.

(8) 從等量減去不等量,其差不等,減大量的其差反小.

(9) 不等量的同倍量不等,大者仍大.

(10) 不等量同分量不等,大者仍大.

(11) 三等中之第一量大於第二量,第二量大於第三量,則第一量大於第三量.

(12) 一量小於,等於,或大於第二量,三者必居其一.

(13) 全量等於其諸部分的和.

(14) 全量較其任意部分大.

56. 幾何公理.

(1) 過兩點祇能引一直線 (或兩點決定一直點)

系 I. 二直線祇能交於一點.

系 2. 若二直線的某一部分相重合,則全部必重合.

(2) 兩點間的直線是其間最短的線.

(3) 一直線可任意延長.

(4) 以任意點爲圓心,任意長爲半徑可作一圓.

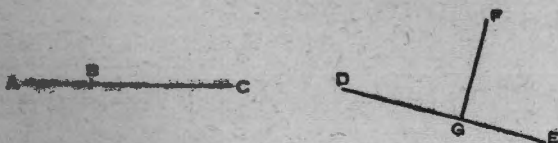
(5) 一幾何圖形可不變其形狀及大小而移動其位置.

(6) 過一直線外一點祇能引一直線與其平行系相交二直線不能和第三直線平行.

第一編 直線形

集於一點的角

57. 平角 一角的二邊在角頂的相反的方向而在一直線之內的稱爲一平角;如 $\angle ABC$.

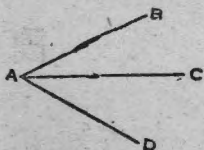
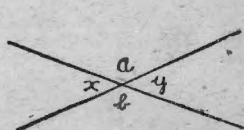


平角可簡寫爲 st. \angle .

58. 直角 一直線遇其他直線所成之二角相等的,每角稱爲一直角. $\angle DGF$ 和 $\angle FGE$ 都是直角,所以一直角是一平角的二分之一.

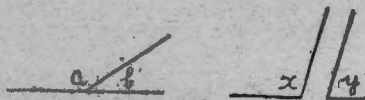
直角可簡寫爲 rt. \angle , 或 R \angle .

59. 對頂角 二直線相交,相對的應稱爲對頂角;如 $\angle x$ 和 $\angle y$, $\angle a$ 和 $\angle b$.



60.鄰角 角頂和一邊相同的二法稱為鄰角;如 $\angle BAC$ 和 $\angle CAD$.

61.補角 二角之和等於一平角,則此二角稱為互相補角或相補;如 $\angle a$ 和 $\angle b$, 或 $\angle x$ 和 $\angle y$



每一角是其他一角的補角.

62.餘角 二角之和等於一直角,則此二角稱為互相餘角,或相餘;如 $\angle 1$ 和 $\angle 2$, 或 $\angle 3$ 和 $\angle 4$. 每



一角是其他一角的餘角.

簡 單 定 理

63. 凡平角都相等.

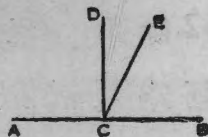
由幾何公理(1),過二點祇能引一直線,所以凡平角都相等.

64. 系 凡直角都相等.

因爲凡平角都相等(63),直角是平角的二分之一(58),所以凡直角都相等(普通公理5).

65. 過一直線上的一點祇能作一直線垂直於此線.

若過AB上的C點能作AB的二垂線CD和CE,則將有不相等的二直角ACD和ACE;此與第64節矛盾故不可能.



66. 同角或等角的補角相等.(普通公理3)

67. 同角或等角的餘角相等.(普通公理3)

68. 若二鄰角的外邊成一直線,則二角相

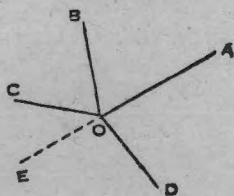
補 (57,61).

69. 若二鄰角相補, 其外邊成一直線.

因為二鄰角的外邊夾一平角 (61), 所以其外邊成一直線 (57).

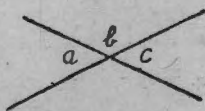
70. 從一點引諸直線, 則繞此點諸角之和為二平角.

設從 O 引諸直線 OA, OB, OC, OD 等; 延 AO 到 E ; 則 $\angle AOB, BOC, COE$ 之和為一平角, 又 $\angle EOD, DOA$ 之和亦為一平角 (普通公理 13). 故 $\angle AOB, BOC, COD, DOA$ 之和為二平角. (普通公理 2).



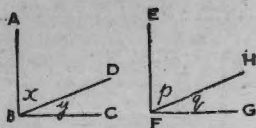
71. 對頂角相等.

$\angle a$ 與 $\angle b$ 相補, 又 $\angle c$ 與 $\angle b$ 相補 (61). 所以 $\angle a = \angle c$ (66).



習題 256. 若 $AB \perp BC, EF \perp FG$, 又 $\angle x = \angle p$, 何以 $\angle y = \angle q$?

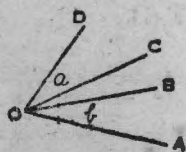
註: \perp 是垂直於的符號.



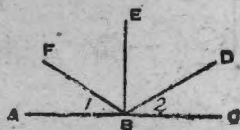
習題 257. 若 $\angle a = \angle b$, 為何

$\angle AOC = \angle BOD$?

習題 258. 若 $\angle AOC = \angle BOD$, 爲何 $\angle a = \angle b$?

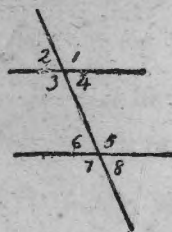


習題 259. 若 $EB \perp AC$ 又 $\angle 1 = \angle 2$, 何以 EB 二等分 $\angle FBD$?



習題 260. 若 $\angle 3$ 與 $\angle 6$ 相補, 何以 $\angle 3 = \angle 5$? $\angle 1 = \angle 5$?

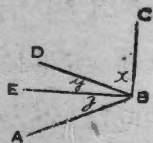
習題 261. 若 $\angle 4 = \angle 8$, 何以 $\angle 4 = \angle 6$? $\angle 4$ 與 $\angle 5$ 相補?



習題 262. 若 $\angle 4 = \angle 6$, 何以 $\angle 2 = \angle 8$?

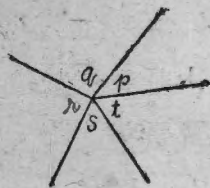
習題 263. 若 $\angle 3 = \angle 7$, 何以 $\angle 4$ 與 $\angle 5$ 相補?

習題 264. 若 $CB \perp BE$, $\angle ABC = 123^\circ$, 又 $\angle ABD = 52^\circ$, $\angle x$, $\angle y$, $\angle z$ 各爲若干度?



習題 265. 若 $\angle p = 44^\circ$, $\angle q = 112^\circ$, $\angle r = 90^\circ$, $\angle s = 64^\circ$, 求 $\angle t$.

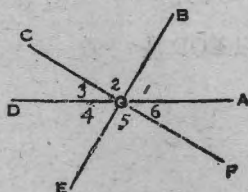
習題 266. 若 $\angle p, q, r, s$ 與 t 之比爲 $5:11:9:6:5$, 各角爲若干度?



習題 267. 若 $\angle 4$ 是 $\angle 6$ 的餘

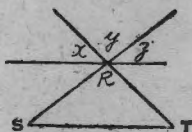
角,求 $\angle 2$.

習題 268. 若 $\angle 1 = 50^\circ$, $\angle 2 = 95^\circ$, $\angle 4 = 7^\circ$, $\angle DGF = 7^\circ$, $\angle AGE = 7^\circ$.

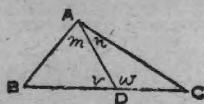


習題 269. 若 $\angle 2$ 是 1 rt. \angle $\angle 4$ 與 $\angle 6$ 之和為何?

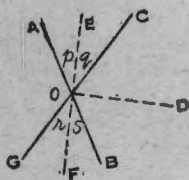
習題 270. 若 $\angle x = \angle T$, $\angle z = \angle S$, $\triangle RST$ 的三內角之和為何?



習題 271. 若 $\angle V = \angle n + \angle C$ 又 $\angle w = \angle m + \angle B$, $\angle A + \angle B + \angle C$ 為何?



習題 272. 若 OE 二等分 $\angle AOC$, OD 二等分 $\angle BOC$, 又 AOB 是一直線,何以 OE 與 OD 互相垂直?



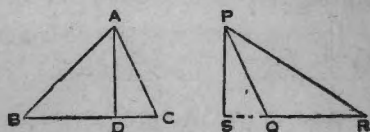
習題 273. 若 OE 二等分 $\angle AOC$, OD 二等分 $\angle BOC$, 又 $OE \perp OD$, 何以 AOB 是一直線?

習題 274. 若 OE 二等分 $\angle AOC$, 何以 EO 的延長線 OF 亦二等分對頂角 BOG?

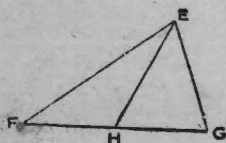
習題 275. 若 $\angle p = \angle q$, $\angle r = \angle s$, 又 AB 和 CG 是直線, 何以 EOF 是一直線.

三 角 形

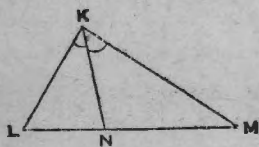
72. 高垂線 從三角形的一頂點到對邊，必要時延長，所引的垂線稱爲此三角形的高或垂線；如 AD 或 PS 。每三角形有三垂線。



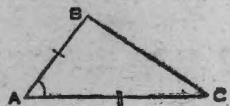
73. 中線 三角形的一頂點與其對邊的中點的聯線稱爲此三角形的中線；如 EH 。每三角形有三中線。



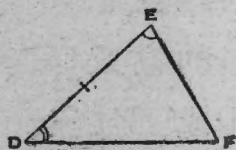
74. 角二等分線 從三角形的一頂點所引的二等分在此頂點的頂角而止於其對邊的線段稱爲此三角形的角二等分線或分角線；如 KN 。每三角形有三分角線。



75. 夾角 當述及一三角形的二邊時,此二邊所成的角稱爲此二邊的夾角;如 $\angle A$ 是 AB 和 AC 的夾角.



76. 夾邊 當述及一三角形的二角時,此二角的公共邊稱爲此二角的夾邊;如 DE 是 $\angle D$ 和 $\angle E$ 的夾邊.



77. 全等形,全等三角形 若將一圖形放在另一圖形之上,二圖形能完全重合,則此二圖形稱爲互相全等.一圖形是另一圖形的全等形.全等的記號是 \cong .

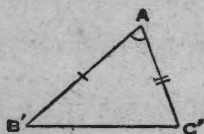
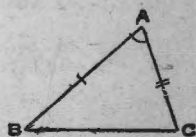
二互相全等的三角形稱爲二全等三角形.

全等形的對應邊和對應角相等.

命題 1. 定理

78. 若一三角形的二邊及其夾角各各等於另一三角形的二邊及其夾角，則此二三角形全等。

(S. A. S. = S. A. S.)



假設： $\triangle ABC$ 和 $A'B'C'$ 的 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$
又 $\angle A = \angle A'$.

求證： $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證明： 放 $\triangle ABC$ 於 $\triangle A'B'C'$ 之上令點 A 落於點 A' 之上，又 AB 沿 $A'B'$ 而落下。幾公 5.

因 $AB = A'B'$.

假設

\therefore 點 B 落於點 B' 之上。

因 $\angle A = \angle A'$,

假設

$\therefore AC$ 沿 $A'C'$ 而落下。

因 $AC = A'C'$,

假設

∴ 點 C 落於點 C' 之上。

∴ BC 與 B'C' 相重合。 幾公 1.

∴ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. 77

79. 疊置證法 上面的證法稱為疊置證法祇有在證明基礎命題的時候方應用此法,先將圖中已知的相等部份重合,然後再繼續研究圖中其他部份的位置。

註 為便於記憶起見,上面的命題可縮寫如下:

$$s. a. s. = s. a. s.$$

s 是 side (邊) 的略寫,

a 是 angle (角) 的略寫。

80. 證明的排列 上面證明的排列有一定的順序,茲述明於下.讀者應依此順序演算習題。

1. 在紙的頂部先以文字寫下要證明的命題。

2. 畫圖 圖形既不宜過小,亦不宜過大。

3. 標明圖上已知的部份。

4. 就圖中寫明假設的部份;例如,寫
“ $AB = A'B'$ ”而不寫“二線段相等。”

5. 就圖中寫明求證的部份;例如,寫
“ $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ”而不寫“二三角形全
等”

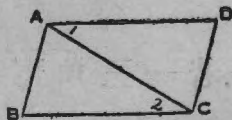
6. 順次寫下證明,應簡明扼要,語有根據

7. 若有畫圖的必要應在證明之前加以
說明。

81. 證明的根據 在證明中語語應有所
根據。若非確係幾何學上的真理,斷不能因
為顯然如此而貿然承認。所根據的理由僅
能為:普通公理,幾何公理,定義,業已證明的
命題,作圖及假設。

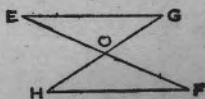
習題 276. 假設 $AD = BC$

又 $\angle 1 = \angle 2$ 求證 $\triangle ABC \cong$
 $\triangle AOD$ 。



習題 277. 假設 $EO = OF$,

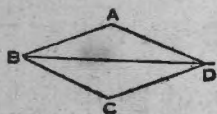
$GO = OH$, 又 EOF, GOH 是直線。



求證 $\triangle EOG \equiv \triangle FOH$.

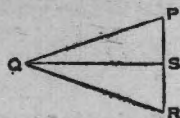
習題 278. 假設 BD 二等分 $\angle ABC$, 又 $AB=BC$.

求證 $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$.



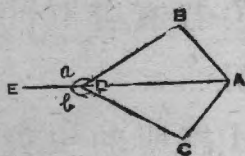
習題 279. 假設 $QS \perp PR$
又 $PS=SR$.

求證 $\triangle PQS = \triangle RQS$.



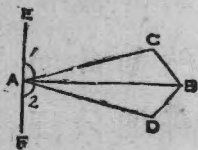
習題 280. 假設 $BD=DC$,
 $\angle a = \angle b$, 又 ADE 是直線.

求證 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$.



習題 281. 假設 $AB \perp EF$,
 $\angle 1 = \angle 2$, 又 $AC=AD$, EAF 是直線.

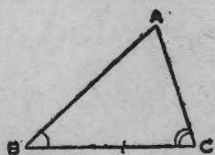
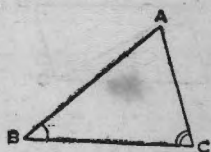
求證 $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$.



命題 2. 定 理

82. 若一三角形的二角及其夾邊各各等於另一三角形的二角及其夾邊, 則此二三角形全等.

(a . s . a . = a . s . a .)



假設: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的 $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$
 又 $BC = B'C'$.

求證: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證明: 放 $\triangle ABC$ 於 $\triangle A'B'C'$ 之上令點 B 落於
 點 B' 之上,

又 BA 沿 $B'A'$ 而落下 幾公 5.

因 $\angle B = \angle B'$, 假設

$\therefore BC$ 沿 $B'C'$ 而落下.

又因 $BC = B'C'$, 假設

\therefore 點 C 落於點 C' 之上.

因 $\angle C = \angle C'$, 假設

$\therefore CA$ 沿 $C'A'$ 而落下.

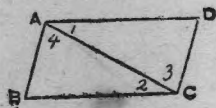
點 A 與點 A' 相重合 幾公 1 系 1.

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. 77.

習題 282. 假設 $\angle 1 = \angle 2$.

$\angle 3 = \angle 4$,

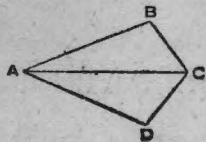
求證 $\triangle ABC = \triangle ADC$.



習題 283. 假設四邊形

ABCD 中 AC 二等分 $\angle A$ 又二等分 $\angle C$.

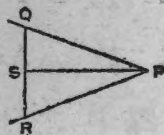
求證 $\triangle ABC = \triangle ADC$.



習題 284. 假設 PS 二等分

$\angle P$ 又 $QR \perp PS$.

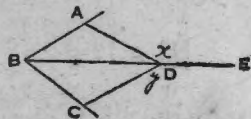
求證 $\triangle PQS = \triangle PRS$.



習題 285. 假設 $\angle ABC$ 為

BE 所二等分, 又 $\angle x = \angle y$, BDE 是直線.

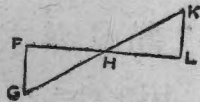
求證 $\triangle ABD = \triangle CBD$



習題 286. 假設 $FG \perp FL$,

$KL \perp FL$, 又 GK 過 FL 的中點 H.

求證 $\triangle FHG = \triangle LHK$.



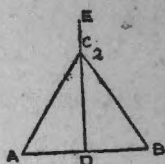
83. 證法 1. 要證明二線段相等或二角相等, 選擇一對三角形而此二線段或二角是其對應的部分, 然後證明此二三角形全

等.再利利用全等三角形的對應部分相等.

習題 287. 假設 CD 垂直二

等分 AB.

求證 $AC=BC$.



習題 288. 假設 $ED \perp AB$,

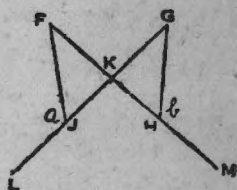
$\angle 1 = \angle 2$, 又 ECD 是直線.

求證 $\angle A = \angle B$.

習題 289. 假設 FM, GL 交

於 K 而 $JK = HK$ 又 $FK = GK$

求證 $\angle F = \angle G$.

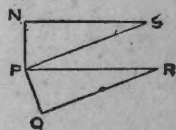


習題 290. 假設 FM, GL 交
於 K 而 $JK = HK$ 又 $\angle a = \angle b$.

求證 $FK = GK$.

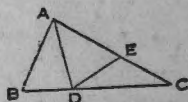
習題 291. 假設 NS 和 PR
垂直於 NP, PS 和 QR 垂直於 PQ,
又 $NP = PQ$.

求證 $PS = PR$.



習題 292. 假設 $\triangle ABC$ 中
AD 二等分 $\angle A$ 又 $AB = AE$

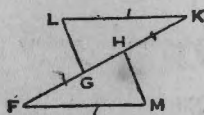
求證 $\angle B = \angle AED$.



習題 293. 假設 $FG=HK$

$FM=KL$, 又 $\angle F=\angle K$.

求證 $LG=MH$.



習題 294. 假設 $FG=HK$,

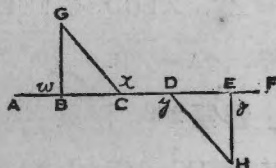
$LG=MH$, 又 $\angle FGL=\angle MHK$.

求證 $\angle F=\angle K$.

習題 295. 假設 $BD=CE$,

$GB \perp AF$, $HE \perp AF$, 又 $\angle x = \angle y$,

求證 $GC=HD$.



習題 296. 假設 $BD=CE$,

$\angle w = \angle z$, 又 $\angle x = \angle y$.

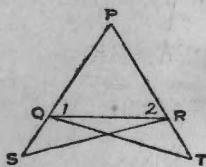
求證 $\angle G = \angle H$.

習題 297. 假設 $\triangle PQR$ 的

$PQ=PR$, 延長 PQ 到 S , PR 到 T 使

$QS=RT$.

求證 $QT=RS$.



習題 298. 用上題的假設, 求證 $\triangle QRS \cong \triangle RQT$;

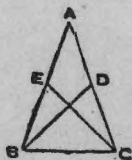
再證 $\angle 1 = \angle 2$.

習題 299. 假設 $\triangle ABC$ 的 $AB=AC$, 又 BD 及 CE 是中

線.

求證 $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$;

再證 $\triangle BCD \equiv \triangle CBE$.



習題 300. 假設 $\triangle FGH$ 的

$FG = FH$, LK 垂直二等分 FH ,

MN 垂直二等分 FG , 又 LK, MN

交於 O .

求證 $LK = MN$;

再證 $\triangle MOL \equiv \triangle KON$.



習題 301. 假設 $\angle Q = \angle R$,

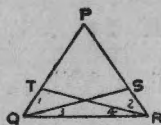
又 $\angle 1 = \angle 2$.

求證 $QS = RT$

習題 302. 假設 $BQ = PR$,

又 $\angle 1 = \angle 2$.

求證 $TQ = SR$.



習題 303. 若在 $\triangle ABC$ 內, D 是 AC 的中點, 延長 BD

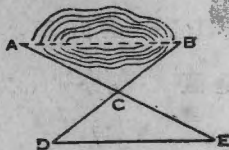
到 E 使 $DE = BD$, 則 $\angle A = \angle ACE$.

習題 304. 若三角形的二角相等, 此二等角的角二等分線相等.

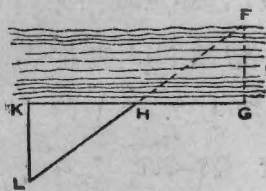
習題 305. 在二全等三角形內, 對應邊中的線相等.

習題 306. 在二全等三角形內,對應角的角二等分線相等.

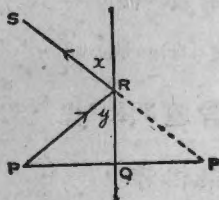
習題 307. 要測量小池的對徑 AB 的長,在 C 立一木樁.在 BC 的延線上量距離 CD 使等於 BC 又在 AC 的延線上量距離 CE 使等於 AC .量 DE ,何以能求得 AB ;試證明之.



習題 308. 某人用下之方法測量河寬 FG .先以垂直於 FG 的方向測一段距離 KG ,並在 KG 的中點 H 立一木杆,從 K 向 KG 的垂直方向前行,直到 L 使 L 與 H, F 在一直線上,測量何線段可求得河寬?何故?

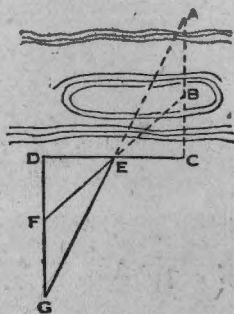


習題 308. QR 是一平面鏡,從 P 投射的光線在 R 反射到 S 而 $\angle x = \angle y$. P 的像 P' 現在 SR 的延線及從 P 所引 RQ 的垂線 PQ 的延線上.

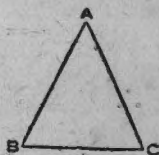


試證 PQ 與 QP' 等長.

習題 310. 要測量二不可達到的點 A 和 B 間的距離, 從 AB 的延線上一點 C 走一段距離 CD, 使 CD 垂直於 AC. 在 CD 的中點立一木杆, 從 D 延 DG, 垂直於 DC, 前行; 在 F 和 G, 與 BE 和 AE 成直線的地方立木樁. 證明 FG 是所求的距離.



習題 311. $\triangle ABC$ 是二等邊的, 除去二邊 AB 和 AC 相等而外有無其他相等的部分能證明其為相等否? 能否應用全等三角形以證明之? 必如何方能應用?

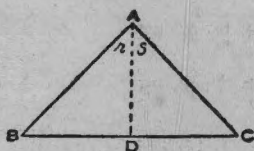


命題 3. 定 理

84. 二等邊三角形底角相等.

假設: $\triangle ABC$ 的 $AB = AC$.

求證: $\angle B = \angle C$.



證明：作 AD 二等分 $\angle BAC$ ，交 BC 於 D 。

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 內，

$$AB = AC,$$

假設

$$AD = AD,$$

$$\angle r = \angle s,$$

作圖

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

S. S. S. = S. S. S.

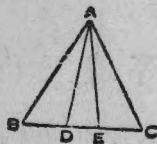
$$\therefore \angle B = \angle C.$$

77.

85.系 1. 二等邊三角形的頂角的二等分線垂直於其底，且二等分其底。

86.系 2. 等邊三角形等角。

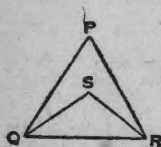
習題 312. 若 $AB = AC$ 又 $BE = CD$ ，則 $AD = AE$ 。



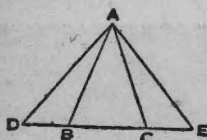
習題 313. 若 $AB = AC$ 又

$\angle BAE = \angle CAD$, 則 $BD = CE$.

習題 314. 若 PQR 與 SQR 是同底 QR 上的兩個二等邊三角形。

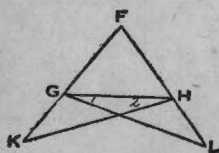


求證 $\angle PQS = \angle PRS$



習題 315. 若延長二等邊 $\triangle ABC$ 的底邊到 D, E 使

$BD = CE$, 則 $\angle D = \angle E$

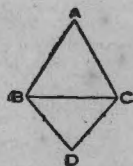


習題 316. 若 $FG = FH$,

$\angle 1 = \angle 2$, 又 FGK, FHL 是直線,

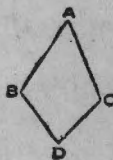
則 $\angle K = \angle L$.

習題 317. 若 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DBC$ 是在同底 BC 上的二等邊三角形, 則 $\angle ABD = \angle ACD$.



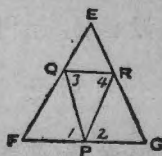
習題 318. 若在四邊形 $ABDC$ 內 $AB = AC$, 又 $BD = CD$,

則 $\angle B = \angle C$.



習題 319. 若 $EF = EG$, P 是 FG 的中點, 又 $\angle 1 = \angle 2$,

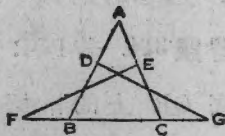
則 $PQ = PR$; 並從而證明



$$\angle 3 = \angle 4.$$

習題 320. 若 $AB=AC$,
 $BD=CE$, $EF \perp AC$, $DG \perp AB$

又 $FBCG$ 是一直線, 則 $BF=CG$.



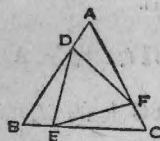
習題 321. 三等邊三角形的底邊的中線二等分其頂角.

習題 322. 二等邊三角形的底角的角二等分線相等.

習題 323. 二等邊角形的等邊的中線相等.

習題 324. 等邊三角形的三邊的中點的聯線形成另一等邊三角形.

習題 325. 若 $AB=BC=CA$,
 又 $AD=BE=CF$, 則 $\triangle DEF$ 是等邊的.



習題 326. $\triangle A'BC$ 的三邊各各等於 $\triangle ABC$ 的對應邊, 此二三角形外觀全等否? 應

如何證明此二三角形全等? 能

否應用疊置法? 另有何種方法

可證明二三角形全等? 要證明

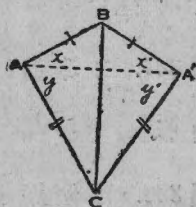
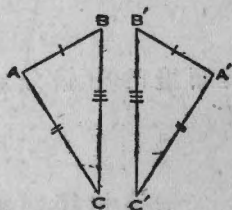
此二三角形全等, 還需要什麼



條件!若 $\angle A = \angle A'$ 能證明否! $\triangle ABA'$ 是何種三角形! $\angle x$ 等於 $\angle x'$ 否! $\angle y$ 等於 $\angle y'$ 否!

命 題 4. 定 理

87. 若一三角形的三邊各各等於另一三角形的三邊, 則此二三角形全等 (S.S.S. = S.S.S.)



假設: $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中, $AB = A'B'$, $AC = A'C'$
又 $BC = B'C'$.

求證: $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

證明: 放 $\triangle A'B'C'$ 使 $B'C'$ 與 BC 相重合, 並使 A' 和 A 在 BC 的兩旁.

幾公 5.

聯 AA' .

$\therefore AB = A'B'$

假設

$\therefore \angle x = \angle x'$

又 $\because AC = A'C$, 假設

$\therefore \angle y = \angle y'$. 84

$\therefore \angle x + \angle y = \angle x' + \angle y'$, 普公 2

或 $\angle BAC = \angle BA'C$.

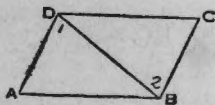
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'BC$ S.S.S. = S.S.S.

或 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

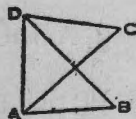
習題 327. 二等邊三角形爲其底邊的中線分成二全等三角形。

習題 328. 兩個等邊三角形若有一邊相等，則兩形全等。

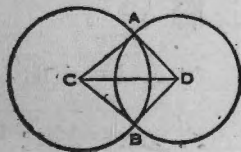
習題 329. 若四角形 ABCD 的對邊相等，則 $\angle 1 = \angle 2$ 。



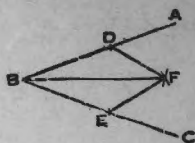
習題 330. 若 $AB = CD$ 又 $AC = BD$ ，則 $\angle B = \angle C$ 。



習題 331. 若兩圓的圓心是 C 和 D，兩圓相交於 A 和 B，則 $\angle ACD = \angle BCD$ 。



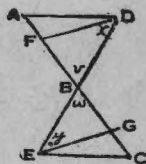
習題 332. 若在 $\angle ABC$ 的邊上取等長 BD 和 BE , 又以 D 和 E 做圓心, 用等長的半徑畫弧, 交於 F , 求證 BF 二等分 $\angle ABC$.



習題 333. 若以同半徑量等長 AB, BC, DE , 和 EF 又以半徑 AC 量 DF , 則 $\angle B = \angle E$



88. 解析證法 讀者試先研究下一證法:
若 $AB = BC, \angle A = \angle C$, 又 $\angle x = \angle y$,
求證 $BF = BG$.



要證 $BF = BG$, 因為 BF 和 BG 是 $\triangle BFD$ 和 BGE 的對應邊, 則應先證 $\triangle BFD \cong \triangle BGE$.

要證 $\triangle BFD \cong \triangle BGE$, 因為已知 $\angle x = \angle y$ (假設) $\angle v = \angle w$ (對頂角), 若應用 $a.s.a. = a.s.a.$, 則應先證 $BD = BE$.

要證 $BD = BE$, 因為 BD 和 BE 是 $\triangle ABD$ 和 CBE 的對應邊, 則應先證 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$

已知 $\angle v = \angle w$ (對頂角), $AB = BC$ (假設), 又 $\angle A = \angle C$ (假設), 由 a. s. a. = a. s. a., $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ 可以證明.

所以 $BF = BG$ 亦可以證明.

上之證法稱為解析證法. 以前所用的證法則稱為綜合證法.

解析證法是由終結的求證部分向前逆推直到原題的假設或其他已知其為真確的定理而後已. 應用此證法, 應先仔細考察能證明終結的各種方法, 向前逆推, 將原來的命題化成一較簡單的命題. 如是繼續進行, 直到達某已知事實而止. 例如, 證 $BF = BG$, 經解析後, 化為證 $\triangle BFD \cong \triangle BGE$; 再解析, 又化為證 $BD = BE$; 再解析, 更化為證 $\triangle ABD \cong \triangle CBE$. 逆推至此事實已屬顯然. 總之解析證法應含有下列四步:

(i) 如何能使終結真確? 擇一適當的證法, 以為第一步設想.

(ii) 如何能使第一步真確?擇一適當的證法,以爲第二步設想.

(iii) 繼續應用此法,最後得一顯然易見的事實.

(iv) 由最後起,倒述前法,綜合證明.

前面 (i), (ii), (iii) 均爲解析,解析乃思索探討的路徑.應用此法頗易推得證題的方法.至於解題時,僅須將 (iv) 解析結果綜合證法列入,其餘概可從略.

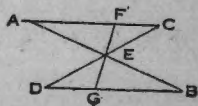
習題 334. 若一三角形的二邊及其中一邊的中線各各等於另一三角形的二邊及對應邊的中線,則此二三角形全等.

習題 335. 若兩個二等邊三角形的底邊相同,則頂點的聯線二等分底邊.

習題 336. 若一四邊形的對邊相等,則過對角線的中點而止於一雙對邊的線段爲此點所平分.



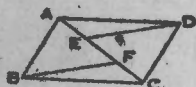
習題 337. 若 AB 和 CD 互相二等分於 E, 則 FG 爲 E 所平分.



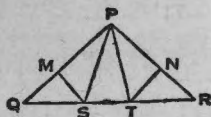
習題 338. 若 $AC=BD$, $\angle A=\angle B$, 又 $\angle C=\angle D$, 則 $FE=EG$.

習題 339. 若一四邊形的對邊相等, 則對角線互相平分.

習題 340. 若四邊形 $ABCD$ 的對邊相等, 在 AC 上取等長 AE , CF , 則 $BF=DE$.

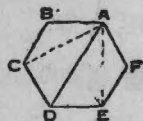


習題 341. 在二等邊三角形 PQR 的等邊上取等長 QM 和 RN , 在 M 和 N 引等邊的垂線交底邊於 S 和 T , 則 $PS=PT$.

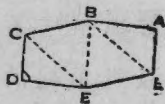


習題 342. 若 $ABCDE$ 是等邊五邊形又對角線 AC 和 AD 相等, 則 $\angle BCD = \angle CDE$.

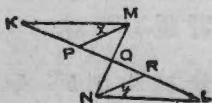
習題 343. 若 $ABCDEF$ 等邊又等角, 對角線 AD 二等分 $\angle CDE$.



習題 344. 若一六邊形的對邊相等, 又一對對角相等, 則其他二對對角亦相等.



習題 345. 若 KL 與 MN 互相二等分於 Q , 又 $\angle x = \angle y$, 則 $PM=RN$.

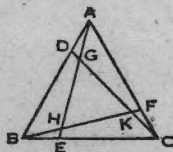


習題 346. 若 $AB=AC$ 又 $BD=CE$,
則 $\triangle BDF = \triangle CEF$.



習題 347. 若 BE 和 CD 交於 F 而
 $DF=EF$, 又 $BF=CF$, 則 $AB=AC$.

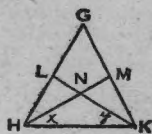
習題 348. 在 $\triangle GHK$ 內 $GH=GK$
又 $\angle x = \angle y$. 試證 NHK 是二等邊三
角形.



習題 349. 若二等邊 $\triangle GHK$ 的等邊的中線 HM 和
 KL 交於 N , 則 GN 二等分 $\angle HGK$.

習題 350. 在同圖內, 若 $\angle GHK = \angle GKH$, 又 $HL=KM$,
則 $GL=GM$.

習題 351. 在等邊 $\triangle ABC$ 的各邊
上, 取 D, E, F 諸點使 $AD=BE=CF$, 又使
 D, E, F 各與其所對的頂點相聯, 則
 GHK 是一等邊三角形.



89. 逆定理 68 節定理 “若二鄰角的外
邊成一直線, 則二角相補” 的假設為何? 又
其終結為何? 69 節定理 “若二鄰角相補, 其
外邊成一直線” 的假設為何? 又其終結為
何? 比較此二定理的假設和終結發現出什

麼事實?第二定理稱為第一定理的逆定理.

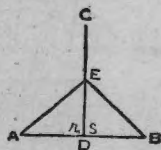
某定理的逆定理是另一定理其中的假設是原定理的終結而其終結是原定理的假設.

試敘述以下諸定理的逆定理

- (i) 若一三角形的二邊相等,對角相等.
- (ii) 等角的補角相等.
- (iii) 等邊三角形等角.
- (iv) 對頂角相等.
- (v) 凡直角皆相等.
- (vi) 馬是四足動物.

上面的敘述全真確否?其逆定理全真確否?可見某定理若真確,其逆定理並不一定真確.若欲應用某定理的逆定理,必須當為一新定理而加以證明.

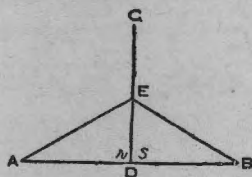
習題 352. CD 垂直於 AB 並二等分 AB . 比較 CD 上的一點 E 與 A , 與 B 的距離相等否?應如何證明之?證明



二線段相等的方法如何?

命題 5. 定 理

90. 一線段的垂直二等分線上的任意點與線段的兩端等距.



假設: $CD \perp AB$, $AD = DB$, 又 CD 上任意點 E .

求證: $AE = EB$.

證明: 在 $\triangle ADE$ 和 BDE 中

$$AD = DB$$

假設

$$ED = ED$$

$$\angle r = \angle s$$

64.

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDE$$

s.s.s. = s.s.s.

$$\therefore AE = EB$$

77.

91. 逆定理 與一線段的兩端等距離的任意點在此線段的垂直二等分線上

假設：線段 AB 與一點 E ，而 $AE = EB$ 。

求證： E 在 AB 的垂直二等分線上。

證明：設 D 是 AB 的中點；過 E 引 CD 。

在 $\triangle ADE$ 和 BDE 內，

$$AD = DB,$$

作圖

$$ED = ED,$$

$$AE = EB,$$

假設

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDE$$

S.S.S. = S.S.S.

$$\therefore \angle r = \angle s,$$

77

$$\therefore \angle r \text{ 是直角.}$$

58.

$$\therefore CD \perp AB.$$

17.

$\therefore CD$ 是 AB 的垂直二等分線。

$\therefore E$ 在 AB 的垂直二等分線上。

92. 系 與一線段的兩端等距離的二點
決定此線段的垂直二等分線。

93. 證法 2. 要證明某直線與另一直線
垂直，證明

(i) 一直線上的二點與另一直線上的

二點等距離,或 (ii) 此二直線相交的二鄰角相等.

習題 353. 二等邊三角形的底邊的中線垂直於底邊.

習題 354. 二等邊三角形的頂角的角二等分線垂直於底邊.

習題 355. 二等邊三角形的底邊的垂直二等分線通過頂點.

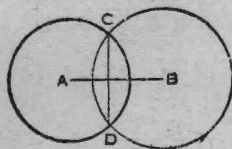
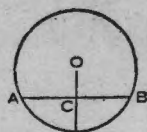
習題 356. 若三以上的二等邊三角形在同一底邊上,諸頂點在一直線上.

習題 357. 菱形的對角線互相垂直二等分.

習題 358. 過一弦的中點的半徑垂直於此弦.

習題 359. 一弦的垂直二等分線通過圓心.

習題 360. 若二圓相交,聯接圓心的直線是公共弦的垂直二等分線.



94. 作圖的用具 在前一部實驗幾何中作圖所准許使用的用具除直尺和圓規而

外還有三角板,量角器,和有刻度的尺等等,但在理論幾何中作圖所准許使用的用具,僅圓規和無刻度的直尺而已。

直尺的用途僅限於

- (i) 過任意二已知點作一直線,
- (ii) 任意延長一已知直線。

圓規的用途僅限於

- (i) 以任意點做圓心,任意長半徑畫圓,
- (ii) 移動距離;即在一直線上可取一部分等於其他線段。

95. 作圖題 一作圖題可分為二部份:已知部分和求作部分。從已知部分作成求作部分的過程中應以言詞說明。所能根據的方法是前節所規定的直尺和圓規的用途及業經證明過的作圖命題。為要表明作圖的結果的真實,應附以理論底證明。有時作圖不必盡屬可能,有時作圖的結果不止一個,往往在證明後更附以推論;不過,普通此

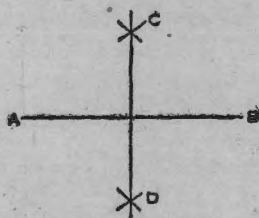
節可以省去。

所以一作圖題可分為數部分：已知，求作，作圖，證明，和推論。

最好已知線和求作的線畫粗線，作圖的線畫細線，證明所用的線畫虛線。

命題 6. 作圖題

96. 作一已知線段的垂直二等分線。



已知：線段 AB。

求作：AB 的垂直二等分線。

作圖：以 A 為圓心，任意適當的長為半徑，
在 AB 的兩側畫弧；

以 B 為圓心，同樣的長為半徑，畫弧，
交前弧於 C 和 D。

聯 CD.

則 CD 是所求的直線.

證明: C 與 A 和 B 等距.

作圖

D 與 A 和 B 等距.

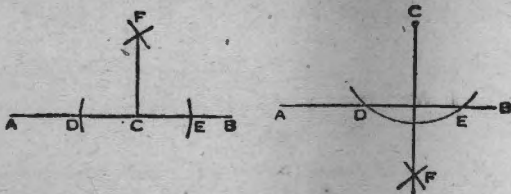
作圖

\therefore CD 是 AB 的垂直二等分線.

92.

命題 7. 作圖題

97. 過一已知點作一已知直線的垂線.



已知: 直線 AB 和點 C.

求作: 過 C 作 AB 的垂線.

情形 1. C 在 AB 上.

情形 2. C 在 AB 外.

作圖: 以圓心 C 和適當的半徑畫弧, 交 AB 於 D 和 E.

以圓心 D 和適當的半徑畫弧;
 以圓心 E 和同半徑畫弧,交前弧於 F.
 聯 CF.

則 CF 是所求的直線

證明: C 與 D 和 E 等距; 作圖
 F 與 D 和 E 等距. 作圖

∴ CF 是 AB 的垂直二等分線 92

∴ CF ⊥ AB.

註 作圖和證明中的敘述對於情形 1 和情形 2 同能適用.

習題 361. 分一已知線段成四等分.

習題 362. 已知二不等線段 a 和 b, 大於 b, 試作

$$\frac{1}{4}(a+b); \frac{1}{2}(a-b); \frac{2a-b}{2}; \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}b.$$

習題 363. 作一已知三角形的三邊的垂直二等分線.

習題 364. 作一已知三角形的三邊的中線.

習題 365. 作一已知銳角三角形的三個高.

習題 366. 作一已知鈍角三角形的三個高.

習題 367. 已知一邊作一正方形.

習題 368. 已知周圍作一正方形.

習題 369. 作一已知銳角的餘角.

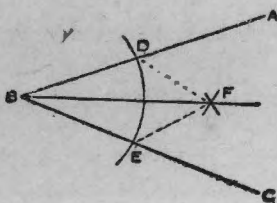
習題 370. 作一直角三角形其直角邊爲 2 寸和 3 寸.

習題 371. 作一二等邊直角三角形其一直角邊爲 5 公分.

習題 372. 已知底邊和高作一二等邊三角形.

命題 8. 作 圖 題

98. 二等分一已知角.



已知: $\angle ABC$.

求作: $\angle ABC$ 的二等分線.

作圖: 以圓心 B 和任意半徑畫弧交 AB 於 D 及 BC 於 E.

以 D 和 E 爲圓心及等半徑畫弧, 交於

F.

聯 BF.

則 BF 是所求的直線.

證明: 聯 DF 和 FF.

在 $\triangle DBF$ 和 EBF 內,

$$BD = BE,$$

作圖

$$BF = BF,$$

$$DF = EF,$$

作圖

$$\therefore \triangle DBF \cong \triangle EBF.$$

S.S.S. = S.S.S.

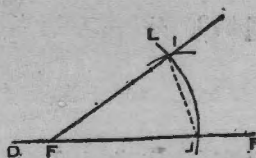
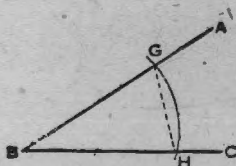
$$\therefore \angle ABF = \angle CBF$$

• 77.

\therefore BF 二等分 $\angle ABC$.

命題 9. 作圖題

99. 在一已知直線上一已知點作一角等於一已知角.



已知: $\angle B$, 直線 DE , 及 DE 上的點 F .

求作: 在 F 引一直線與 DE 的交角等於 $\angle B$.

作圖: 以圓心 B , 及任意半徑畫弧, 交 AB 於 G 及 BC 於 H .

以圓心 F 及同半徑作弧 LJ , 交 DE 於 J .

以圓心 J 又半徑 GH 畫弧, 交弧 LJ 於 I .

聯 FI .

則 $\angle IFE$ 是所求的角.

證明: 引 GH 和 IJ .

在 $\triangle BHG$ 和 FJI 內,

$$BG = FI$$

作圖

$$BH = FJ$$

作圖

$$GH = IJ$$

作圖

$$\therefore \triangle BHG \cong \triangle FJI$$

S.S.S. = S.S.S.

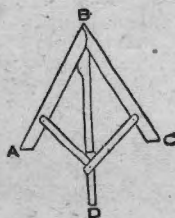
$$\therefore \angle B = \angle IFE.$$

77.

習題 373. 分一已知角成

四等分.

習題 374. 作角 45° , 135° .



習題 375. 作角 $22^{\circ}30'$ $67^{\circ}30'$.

習題 376. 欲求 $\angle ABC$ 的角二等分線,如何應用圖中所示的分角器.

習題 377. 作一角等於已知角之(i)和,(ii)差.

習題 378. 作一三角形使其二角及夾邊各等於已知角及已知線段.

習題 379. 作一三角形使其二角及夾邊各等於已知角及已知線段.

習題 380. 作一已知三角形的三角二等分線.

習題 381. 作 $\triangle ABC$, 令 $AB=6.5$ 公分, $\angle A=90^{\circ}$, 又 $\angle B=45^{\circ}$.

習題 382. 作 $\triangle ABC$, 令 $AB=3$ 寸, $BC=2\frac{1}{2}$ 寸, 又 $\angle B=22.5^{\circ}$.

平 行 直 線

100. 截線 一直線截二或二以上其他直線稱爲截線。

復習第14節

101. 平行線 在同一平面上任意延長而永不相交的二直線稱爲平行線;如 AB 和 CD.

A ————— B
C ————— D

AB 和 CD 稱爲互相平行。

// 是平行於的符號;如 $AB \parallel CD$ 。

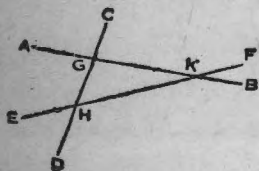
習題 383. 在右圖中,說出

各對內錯角,同位角,同旁內角

(i) 若 CD 是 AB 和 EF 的截線;

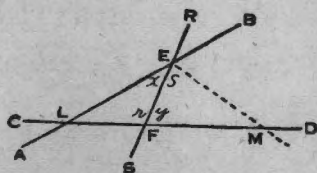
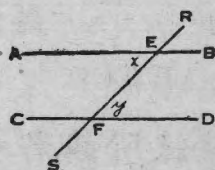
(ii) 若 AB 是 CD 和 EF 的截線;

(iii) 若 EF 是 AB 和 CD 的截線。



命 題 10. 定 理

102. 兩直線爲一截線所截,若其一對內錯角相等,則此二直線平行。



假設：二直線 AB 和 CD 為截線 RS 截於 E 和 F，而 $\angle x = \angle y$ 。

求證：AB // CD。

證明：如若可能時，設 AB 交 CD 於 L；在 CD 上取 $FM = EL$ ，又引 EM。

在 $\triangle EFL$ 和 $\triangle EFM$ 中，

$EL = FM$,

$EF = EF$,

$\angle x = \angle y$,

$\therefore \triangle EFL \cong \triangle EFM$.

$\therefore \angle r = \angle s$

但 $\angle r + \angle y = 1 \text{ st. } \angle$

$\therefore \angle s + \angle x = 1 \text{ st. } \angle$

\therefore LEM 將為一直線交 CD 於 L 和 M

二點。

作圖

假設

S.S.S. = S.S.S.

77

68

普公 1.

69.

因爲這是不可能的 幾公 1

\therefore AB 不能交 CD, 或, $AB \parallel CD$. 101.

103.系 1. 兩直線爲一截線所截,若一對同位角相等,則此二直線平行.

104.系 2. 兩直線爲截一線所截,若一對同旁內角相補,則此二直線平行.

105.系 3. 同直線的垂線互相平行。(應用 103)

106.系 4. 從一直線外一點向此線祇能引一垂線。(應用 105)

107.歸謬證法 命題 10 所採用的證法稱爲歸謬證法,應用此法時,先否定原命題的終結,由此否定推出與已知事理相背的結果,因而斷定先前的否定是誤謬的,原來的終結於是成立.如此的證法稱爲歸謬證法.歸謬證法用於終結祇有兩種可能的情形,某種情形誤謬,其他一種情形必真實;如二直線相平行或不相平行,二直線相垂直或

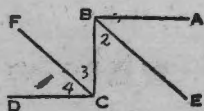
不相垂直,三點在一直上或不在一直線上
等等二者必居其一.

108. 證法 3. 欲證明二直線平行,證明其
為一截線所截時.

- (i) 一對內錯角相等;或
- (ii) 一對同位角相等;或
- (iii) 一對同旁內角相補.

習題 384. 若二直線為一截線所截,一對外錯角相
等,則此二直線平行.

習題 385. 若 $\angle 1 = 48^\circ, \angle 2 = 42^\circ,$
 $\angle 3 = 43^\circ, \angle 4 = 47^\circ,$ 則 $AB \parallel CD.$

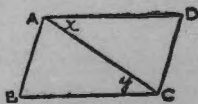


習題 386. 若 $AB \perp BC, CD \perp BC,$
BE 二等分 $\angle ABC,$ 又 CF 二等分 $\angle BCD,$ 則 BE 與 CF 互相
平行.

習題 387. 若 GH 和 KL 互相平分,則 $GK \parallel LH.$

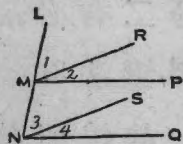
習題 388. 若一四邊形的兩雙對邊相等,則對邊平
行.

習題 389. 若四邊形 ABCD
的對邊 AD 和 BC 相等又 $\angle x = \angle y,$
則 AB 平行於 CD.

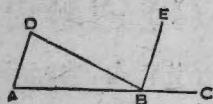


習題 390. 若二直線為一截線所截，一對同旁外角相補，則此二直線平行。

習題 391. 若 $\angle LMP = \angle LNQ$
又 $\angle 2 = \angle 4$ ，則 $MR \parallel NS$ 。

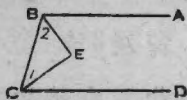


習題 392. 若 $AB = BD$ 又 $\angle D = \angle EBC$ ，則 $AD \parallel BE$ 。

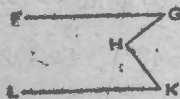


習題 393. 若 $AB = BD$ 又 $\angle D$ 是 $\angle ABE$ 的補角，則 $AD \parallel BE$ 。

習題 394. 若 BE 二等分 $\angle ABC$ ，
 CE 二等分 $\angle BCD$ ，又 $\angle 1 + \angle 2 = 1\text{rt.}\angle$ ，則 $BA \parallel CD$ 。

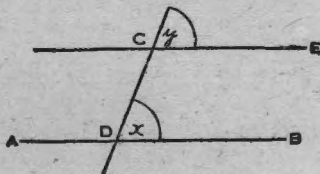


習題 395. 若 $\angle GHK = \angle G + \angle K$ ，
則 $FG \parallel LK$ 。



命題 11. 作圖題

109. 過一直線外一點作此線的平行線。



已知: 直線 AB 及 AB 外一點 C .

求作: 過 C 作一直線平行於 AB .

作圖: 過 C 作直線 CD 交 AB 於 D .

作 CE , 使 $\angle y = \angle x$.

99

則 CE 是所求的直線.

證明: $\because \angle y = \angle x$

作圖

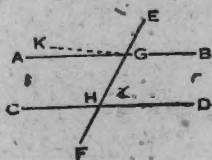
$\therefore CE \parallel AB$

103

註 在一作圖題中,若引用以前的作法,其作法無需詳細敘述,在上面作圖題中“作 CE , 使 $\angle y = \angle x$ ”,祇要註明應用 99 節,詳細作法可不必贅述.

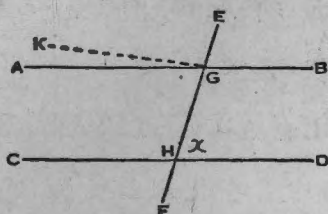
習題 396. 應用內錯角相等的方法,過一直線外一點作此線的平行線.

習題 397. 敘述命題 10 的逆定理,真確否?作二平行線並作若干截線內錯角相等否?若引 GK 使 $\angle KGH = \angle x$, KG 和 CD 的關係如何? KG 和 AB 能否是二不同的直線?然則 $\angle KGH$ 和 $\angle AGH$ 的關係如何?



命 題 12. 定 理

110. 若二平行直線爲一截線所截則一對內錯角相等.



假設：二平行直線 AB 和 CD 爲 EF 所截，截於 G 和 H 。

求證： $\angle AGH = \angle X$ 。

證明：作 GK ，使 $\angle KGH = \angle X$ ；

則 $KG \parallel CD$ 。

102.

但 $AB \parallel CD$ ，

假設

$\therefore KG$ 與 AB 相重合

幾公 6.

$\therefore \angle AGH = \angle KGH$ 。

77

$\therefore \angle AGH = \angle X$ 。

普公 1.

111. 系 1. 若二平行直線爲一截線所截，則

一對同位角相等。

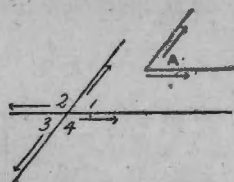
112.系2. 若二平行直線為一截線所截，則一對同旁內角相等。

113.系3. 一直垂直於二平行線之一必垂直於其二。

114.系4. 平行於同一直線的二平行線互相平行，(應用歸謬證法和幾何公理6系。)

115.系5. 若一角的二邊各各平行於另一角的二邊，則此二角相等，或相補。

如右圖中 $\angle A$ 與 $\angle 1, 2, 3$ 或 4 相等或相補。若二角的二邊方向全相同或全相反，則二角相等；如 $\angle 1$ 和 3 與 $\angle A$ 。若二角的二邊方向一相同，一不相同，則二角相補；如 $\angle 2$ 和 4 與 $\angle A$ 。



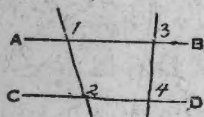
116.同一證法 命題12所採用的證方稱為同一證法。應用此法時，若欲證明一圖形有某種性質，別作具有此種性質的圖形而

證明所作者與欲證者同為一種圖形藉以達到目的。如此的證法稱為同一證法。例如在命題 12 中欲證 $\angle AGH = \angle X$ ，別作 GK ，使 $\angle KGH = \angle X$ ，而證 KG 與 AB 合而為一，藉以證明 $\angle AGH = \angle X$ 。

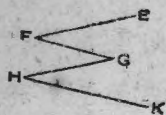
117. 證法 4. 證明二角相等有時可利用二平行直線為一截線所截後的一對內錯角或同位角。

習題 398. 若二平行線為一截線所截，則一對外錯角相等。

習題 399. 若 $\angle 1 = \angle 2$ ，則 $\angle 3 = \angle 4$ 。



習題 400. 若 $EF \parallel GH$ 及 $FG \parallel HK$ ，則 $\angle F = \angle H$ 。



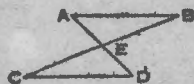
習題 401. 若一四邊形的兩對對邊相平行，則兩對對邊相等。

習題 402. 若一四邊形的一對對邊相等又平行，則其他一對對邊相等又平行。

習題 403. 若二平行線為一截線所截，則一對同旁

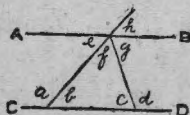
外角相補。

習題 404. 若 $AB = CD$ 又 $AB \parallel CD$. 則 AD 和 BC 互相平分.

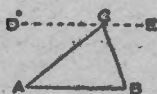


習題 405. 若 $AB \parallel CD$, 則

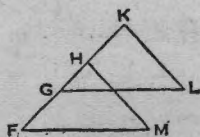
- (i) $\angle d = \angle b + \angle f$.
- (ii) $\angle c = 180^\circ - \angle b - \angle f$.
- (iii) $\angle b = \angle c + \angle f = 180^\circ$.



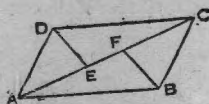
習題 406. $\triangle ABC$ 的三角之和等於一平角; 試證明之.



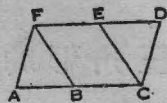
習題 407. 若 $FGHK$ 是一直線, $FG = HK$, $FM \parallel GL$ 又 $HM \parallel KL$, 則 $HM = KL$.



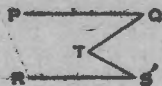
習題 408. 若 $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$, $AE = FC$ 又 $AEFC$ 是一直線, 則 $DE \parallel FB$.



習題 409. 若 $AC \parallel FD$, $AF \parallel CD$, 又 $FB \parallel EC$, 則 $\triangle ABF = \triangle DEC$.

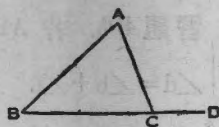


習題 410. 若 $PQ \parallel RS$, 則 $\angle QTS = \angle Q + \angle S$.



三 角 形 (續)

118. 外角 三角形的一邊與另一邊的延線所成之角稱爲此三角形的外角;如 $\angle ACD$.



一角鄰接於外角其他二角稱爲此外角的內對角 $\angle ACB$ 鄰接於 $\angle ACD$. $\angle A$ 和 $\angle B$ 是外角 $\angle ACD$ 的內對角.

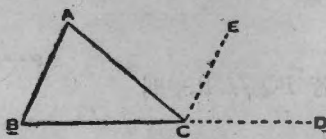
習題 411. 三角形的一外角等於其內對角之和試證之.

並由此證明三角形的三角之和等於一平角.



命 題 13. 定 理

119. 三角形的三角之和等於一平角.



假設: $\triangle ABC$.

求證: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 1 \text{ st. } \angle.$

證明: 延長 BC 到 D; 引 CE // BA.

$\angle DCE + \angle ECA + \angle ACB = 1 \text{ st. } \angle.$ 普公 13.

$\therefore \angle ECA = \angle A.$ 110

又 $\angle DCE = \angle B;$ 111

$\therefore \angle A + \angle B + \angle ACB = 1 \text{ st. } \angle.$ 普公 1.

120.系 1. 三角形的一外角等於其內對角之和.

121.系 2. 三角形的一外角大於任一內對角.

122.系 3. 等角三角形的每角等於 $60^\circ.$

123.系 4. 一三角形中至多祇能有一銳角或直角.

124.系 5. 直角三角形的二銳角相餘.

125.系 6. 若一三角形的二角各各等於另一三角形的二角, 則第三對角相等.

126.系 7. 若一三角形的二角及其一對邊各各等於另一三角形二角及其一對邊,

則此二三角形全等。(a.a.s. = a.a.s.) (應用系6)。

127.系 8. 若一直角三角形的斜邊和一銳角各各等於另一直角三角形的斜邊和一銳角,則此二三角形全等系。(h.a. = h.a.) (應用系7)。

註 h 是斜邊 HyPotenuse 的略寫。

128.系 9. 若一直角三角形的一銳角和一直角邊各各等於另一直角三角形的一銳角和一直角邊,則此二三角形全等。(a.l. = a.l.) (應用系7或82節)。

註 l 是直角邊 Leg 的略寫。

習題 412. 作角 $60^\circ, 30^\circ, 120^\circ, 150^\circ, 75^\circ, 105^\circ$ 。

習題 413. 三等分角 45° 。

習題 4.4. 求一二等邊直角三角形的各角的度數。

習題 415. 已知一三角形的二角求作其第三角。

習題 416. 已知一二等邊三角形的頂角,求作其底角。

習題 417. 在 $\triangle ABC$ 內,求 $\angle C$, 若:

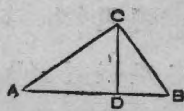
(1) $\angle B = 48^\circ$ 又 $\angle A = \angle C$ 。

(ii) $\angle C = \angle A + \angle B$.

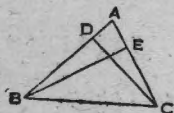
(iii) $\angle A = m^\circ$ 及 $\angle B = n^\circ$.

(iv) $\angle A + \angle C = 130^\circ$ 又 $\angle B + \angle C = 125^\circ$.

習題 418. 若 CD 是直角 $\triangle ABC$ 的斜邊上的高, 則 $\angle ACD = \angle B$ 又 $\angle BCD = \angle A$.



習題 419. 若 BE 和 CD 是 $\triangle ABC$ 的二垂線, 則 $\angle ABE = \angle ACD$.



習題 420. 若一三角形的二角等於第三角, 則此三角形是一直角三角形.

習題 421. 若一直線二等分一二等邊三角形的二等邊, 則此線平行於底邊.

習題 422. 若一直線截一二等邊三角形的二等邊的 $\frac{1}{n}$, 則此線平行於底邊.

習題 423. 若二平行線為一截線所截, 一對同旁內角的角二等分線互相垂直.

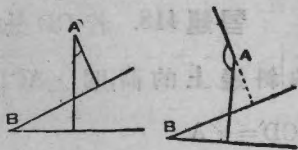
習題 424. 若過二等邊三角形的頂點而延長其一等邊, 使延線與其相等, 則延線的末端與底邊的近端的聯線垂直於底邊.

習題 425. 若一三角形的一邊的中線等於此邊之半, 則此三角形是直角三角形.

習題 426. 若向兩方延長一三角形的底邊, 則二外角之和比頂角多一平角.

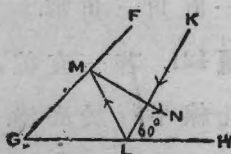
習題 427. 一四邊形的諸角之和是若干平角?

習題 428. 若 $\angle A$ 的二邊各各垂直於 $\angle B$ 的二邊則 $\angle A = \angle B$ 或 $\angle A$ 和 $\angle B$ 相補.



習題 429. 若一三角形的二角的角二等分線相遇則夾一鈍角.

習題 430. 當一光線 AB 投射到平面鏡 DE 上時, 則



以 $\angle ABD = \angle CBE$ 的條件沿 BC 而反射. 有二平面鏡 FG 和 GH 夾成角 45° . 若光線 KL 投射到鏡 GH 上而 $\angle KLH = 60^\circ$, 沿 LM 及 MN 而反射, 則 MN 垂直於 KL.

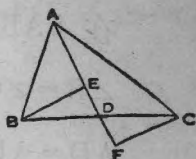
習題 431. 在前題中, 若 KL 以任何角向鏡 GH 投射, 則 MN 和 KL 仍然垂直.

習題 432. 全等三角形的對應高相等.

習題 433. 從一二等邊三角邊的底形的中點向二等邊所引的垂線相等.

習題 434. 兩個等高的等邊三角形全等.

習題 435. 若 AD 是 $\triangle ABC$ 的中線, 又 BE 和 CF 是 AB 的垂線, 則 $BE=CF$.



習題 436. 圓內垂直於一弦的半徑二等分此弦.

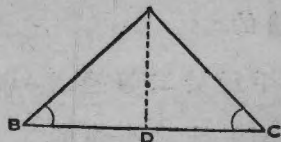
習題 437. 二等邊三角形的二等邊上的高相等.

習題 438. 命題 3 “二等邊三角形的底角相等”的逆定理為何? 真確否, 不作補助線能直接證明否? 如何證明二線分相等? 若作頂角的二等分線, 能證明二三角形全等否?



命題 14. 定理

129. 若一三角形的二角相等, 其對邊相等.



假設: $\triangle ABC$ 的 $\angle B = \angle C$.

求證: $AC = AB$.

證明: 作AD二等分 $\angle A$.

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$\angle B = \angle C,$$

$$AD = AD,$$

$$\angle BAD = \angle CAD,$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD.$$

$$\therefore AB = AC.$$

假設

作圖

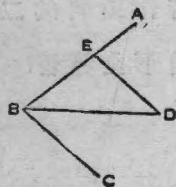
a.a.s. = a.a.s.

77.

系 等角三角形等邊.

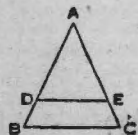
130. 證法 5. 證明線段的相等或角的相等, 命題 3 和命題 14 常可應用

習題 439. 若 BD 是 $\angle ABC$ 的角二等分線又 $DE \parallel CB$, 則 $\triangle BDE$ 是二等邊的.



習題 440. 若一二等邊三角形的任意一角是 60° , 則此三角形是等邊的.

習題 441. DE 平行於二等邊 $\triangle ABC$ 的底邊 BC ; 試證 $\triangle ADE$ 是二等邊的.



習題 442. 延長二等邊 $\triangle ADE$ 的二等邊 AD 和 AE 各各到 B 和 C . 若 $BC \parallel DE$, 則 $\triangle ABC$ 是二

等邊的。

習題 443. 平行於二等邊三角形的一等邊的直線截取另一二等邊三角形。

習題 444. 從一二等邊三角形的底邊上一點引二等邊的平行線，則所成四邊形的周圍等於三角形的二等邊之和。

習題 445. 若一三角形的一外角的角二等分線平行於一邊，則此三角形是二等邊的。

習題 446. 一二等邊三角形的二底角的角二等分線與底邊形成另一二等邊三角形。

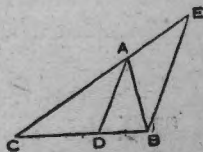
習題 447. 若一三角形的二角的角二等分線與其夾邊形成一二等邊三角形，則原三角形亦為二等邊的。

習題 448. 在二等邊 $\triangle ABC$ 內， CD 和 BE ，二等邊上的高，交於 F 求證 $\triangle BFC$ 是二等邊的。

習題 449. 一二等邊直角三角形為其斜邊上的高分成兩個二等邊直角三角形。

習題 450. 若在四邊形 $PQRS$ 內， $PQ=QR$ 又 $\angle P=\angle R$ ，則 $SP=SR$ 。

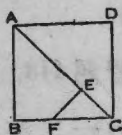
習題 451. 若 AD 二等分 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 又 $BE \parallel DA$ ，則 $EA=AB$ 。



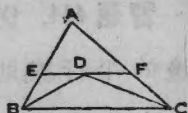
習題 452. 若 $EA=AB$ 又 AD 二等分 $\angle BAC$ ，則 $EB \parallel$

AD.

習題 453. 若在正方形 $ABCD$ 中, $AE = AB$ 又 $EF \perp AC$, 則 $BF = EF = EC$.

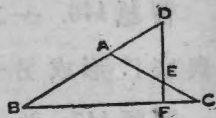


習題 454. 若 BD 和 CD 各各二等分 $\angle B$ 和 $\angle C$, 又 EF 過 D 而平行於 BC , 求證 $EF = BE + FC$.



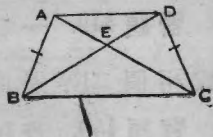
習題 455. 若 $\triangle ABC$ 是二等邊的, 又 $DF \perp$ 底邊 BC , 交 AC 於 E , 則 $\triangle ADE$ 是二等邊的.

習題 456. 若二等邊 $\triangle ABC$ 的頂角 A 是底角之和的二倍, 又 $DEF \perp BC$, 則 $\triangle ADE$ 是等邊的.



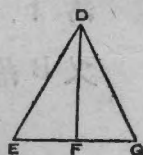
習題 457. 一二等邊三角形的二等角的角二等分線遇對邊於 D 和 E . 求證 DE 平行於底邊.

習題 458. 若在一四邊形內對角線相等, 又一對對邊相等, 試於此四邊形為對角線所分成的四三角形中有二三角形是二等邊的.



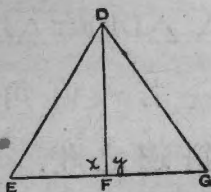
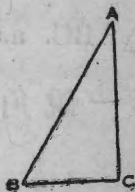
習題 459. 圖中的二三角形是直角三角形有直角邊 DF 公共及一形的斜邊 DE 等於他形的斜邊 DG . 此二

形外觀全等否? 二形間有若干部份相等? 有與一種命題可藉以證明此二形全等? $\angle E$ 和 $\angle G$ 相等否? 根據於何種定理? EFG 必須為直線否? EFG 何以是一直線?



命題 15. 定理

131. 若一直角三角形的斜邊和一直角邊各各等於另一直角三角形的斜邊和一直角邊, 則此二三角形全等 (h. l. = h. l.)



假設: $\triangle ABC$ 和 DEF 的 $\angle C$ 和 $\angle F$ 是直角, $AB = DE$, 又 $AC = DF$.

求證: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

證明: 放 $\triangle ABC$ 使點 C 落於 F 上, CA 沿 FD 而

落下。

又 B 落於位置 G 與 E 在 DF 的兩側。

幾公 5.

因 $AC = DF$,

假設

\therefore 點 A 落於點 D 上。

因 $\angle x$ 和 $\angle y$ 是直角,

假設

$\therefore \angle EFG$ 是一平角

58.

$\therefore EFG$ 是一直線

57.

$\therefore DE = AB$ 或 DG

假設

$\therefore \angle E = \angle G$

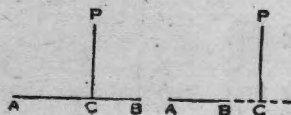
84.

$\therefore \triangle DEF \equiv \triangle DGF$ 或 $\triangle ABC$. a.a.s. = a.a.s.

132.系 若一直角三角形一銳角是 30° , 其對邊是斜邊之半。

若, 在命題 15 的圖中, $\triangle DEF \equiv \triangle DGF$ 又 $\angle EDF = 30^\circ$, 則 $\triangle DEG$ 是等邊的, 因而 $EF = \frac{1}{2} DE$.

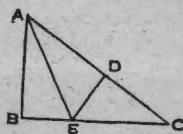
133.距離 從一點到一直線所引的垂線之長稱爲此點與此直線的距離; 如 PC 是 P 與



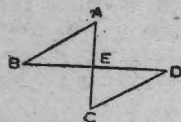
AB的距離。

習題 460. 若從三角形的一邊的中點向其他二邊所引的垂線相等,則此三角形是二等邊的。

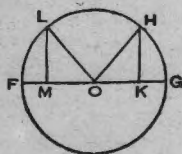
習題 461. 在直角 $\triangle ABC$ 內, $AD=AB$,又 $DE \perp$ 斜邊 AC ,求證 AE 二等分 $\angle BAC$.



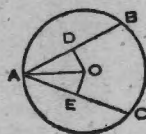
習題 462. 若 AC 是 BD 的垂直二等分線,又 $AB=CD$,則 $AB \parallel DC$.



習題 463. 在圓 O 中,若 HK 和 LM 相等並同垂直於直徑 FG ,則 $MO=OK$.



習題 464. 若 AB 和 AC 二弦與圓心 O 等距離,則 AO 二等分 $\angle BAC$.



習題 465. 若一三角形的二高相等,則此三角形是二等邊的。

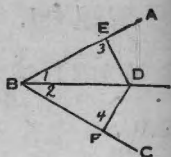
習題 466. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle A=30^\circ$, $\angle C=90^\circ$,又 $AB=12$,求 BC .

習題 467. 在 $\triangle ABC$ 內, $\angle A=30^\circ$, $\angle B=60^\circ$ 又 $BC=7$,求 AB .

習題 468. 二等邊三角形 ABC 的底角 A 和 B 各等於 15° ,又 $BC=8$ 公分,求高 AD 的長。

習題 469. 在四邊形 ABCD 中, $AB=BC=4$ 公分, $\angle A=120^\circ$, $\angle B=60^\circ$, 又 $\angle C=150^\circ$, 求 AD 的長.

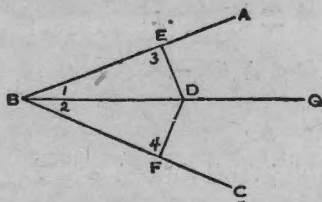
習題 470. D 是 $\angle AEC$ 的角二等分線 BD 上的一點. DE 和 DF 是 D 與 AB 和 AC 的距離. DE 和 DF 相等否? 如何證明? 距離的定義為何? 如何證明直角三角形 BDE 和 BDF 互相全等?



又上之逆定理為何? 真確否? 如何證明 $\angle 1$ 等於 $\angle 2$?

命題 16. 定理

134. 一角的角二等分線上的任意點與角的二邊等距.



假設: BG 二等分 $\angle ABC$; D 是 BG 上的任意點;

DE 和 DF 各是從 D 到 AB 和 BC 的距離.

求證: $DE = DF$.

證明: 在 $\triangle BDE$ 和 $\triangle BDF$ 中,

$$\angle 1 = \angle 2$$

假設

$$BD = BD$$

$$\angle 3 = 1 \text{ rt. } \angle = \angle 4$$

133.

$$\therefore \triangle BDE \cong \triangle BDF.$$

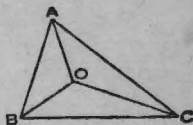
h.a. = h.a.

$$\therefore DE = DF.$$

77.

135.系 與一角的二邊等距離的點在此角的角二等分線上。(命題 16 的逆定理.)

習題 471. 若 BO 二等分 $\angle B$ 又 CO 二等分 $\angle C$, 則 O 與三邊等距.



習題 472. 應用前題的假設, 若引 AO , 則 AO 二等分 $\angle A$.

習題 473. 在一已知三角形內求一點與三邊等距.

習題 474. 若一點不在一角的角二等分線上, 則此點不與角的二邊等距。(歸謬證法)

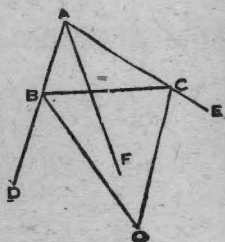
習題 475. 若一點不與一角的二邊等距, 則此點不在角二等分線上。(歸謬證法)

習題 476. 在一已知三角形的一邊上求作一點與

其他二邊等距.

習題 477. 若 BO 和 CO 各是外角 DBC 和 ECB 的角二等分線, 則 O 在 $\angle A$ 的角二等分線上.

習題 478. 三直線相交求作四點各與此三直線等距.



四 邊 形

復習第25節

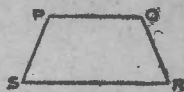
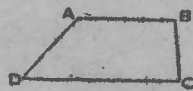
136. 以下二簡單定理頗易證明:

(a) 矩形的角全是直角(25和112節);及

(b) 若一四邊形的角全是直角,則此四邊形是一矩形(25和104節).

137. 梯形 一四邊形祇有二邊平行的稱爲梯形;如梯形ABCD.

梯形的二不平行邊若相等,則稱爲二等邊梯形,或等腰梯形;如二等邊梯形PQRS. 形梯的二不平行邊又可稱爲腰.



梯形的二平行邊稱爲底或底邊,有上底和下底之別;如上圖中AB和PQ是上底,CD和RS是下底.

梯形的二底間的公共垂線稱爲高.

梯形的二不平行邊的中點的聯線稱爲中線。

138. 平行四邊形的底和高 平行四邊形的任意一對平行邊可稱爲底或邊。普通以最下一邊彷彿平行四邊形安放於其上的稱爲底。

平行四邊形的二底間的公共垂線稱爲高。

平行四邊形的符號是□。

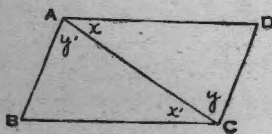
矩形的符號是□。

正方形的符號是□。

139. 平行間的距離 二平行線間公共垂線之長稱爲此二平行線間的距離。

命題 17. 定理

140. 平行四邊形的一對角線分全形成二全等三角形。



假設: $\square ABCD$, 對邊線 AC .

求證: $\triangle ABC \cong \triangle ACD$.

證明: 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$AC = AC.$$

$$\therefore AD \parallel BC \text{ 及 } AB \parallel CD, \quad 25.$$

$$\therefore \angle x = \angle x' \text{ 及 } \angle y = \angle y'. \quad 110.$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ACD. \quad \text{a.s.a.} = \text{a.s.a.}$$

141.系 1. 平行四邊形的對邊相等.

142.系 2. 平行四邊形的對角相等.

143.系 3. 平行線間的平行線段相等.

144.系 4. 平行線間的距離處處相等.

145.系 5. 菱形是一等邊的平行四邊形
(25 和 141 節).

146.系 6. 正方形是一等邊的矩形 (25 和
141 節).

習題 479. 矩形的對角線相等.

習題 480. 若一平行四邊形的對角線相等則此形
是一矩形.

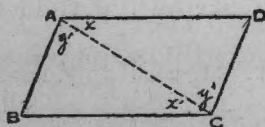
習題 481. 自平行四邊形的相對二頂點到對角線的垂線相等.

習題 482. 過一平行四邊形的對角線的中點所引止於一對對邊的線段爲對角線所平分.

習題 483. 若一平行四邊形的對角線二等分一頂角,則此形是菱形.

命題 18. 定理

147. 若一四邊形的兩雙對邊相等,則此形是一平行四邊形.



假設: 四邊形 ABCD 中 $AB = CD$ 又 $AD = BC$.

求證: ABCD 是一 \square .

證明: 聯 AC.

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$AC = AC$,

$AB = CD$ 及 $AD = BC$,

假設

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ACD.$ S.S.S. = S.S.S.

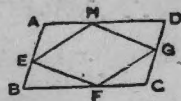
$\therefore \angle x = \angle x'$ 又 $\angle y = \angle y',$ 77.

$\therefore AD \parallel BC$ 又 $AB \parallel DC.$ 102.

$\therefore ABCD$ 是一 \square 25.

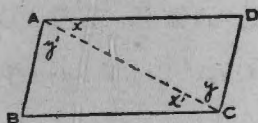
習題 484. 順次聯接平行四邊形各邊中點的直線形成另一平行四邊形.

習題 485. 若 $ABCD$ 是一平行四邊形, $AE = CG$ 又 $BF = DH,$ 則 $EFGH$ 是一平行四邊形.



命 題 19. 定 理

148. 若一四邊形的一雙對邊相等又平行, 則此形是一平行四邊形.



假設: 四邊形 $ABCD$ 的 $AD = BC$ 求 $AD \parallel BC.$

求證: $ABCD$ 是一 $\square.$

證明: 聯 $AC.$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ACD$ 中,

$$AD = BC,$$

假設

$$AC = AC,$$

$$\therefore AD \parallel BC,$$

假設

$$\therefore \angle x = \angle x'$$

110

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ACD:$$

S.S.S. = S.S.S.

$$\therefore \angle y = \angle y'.$$

77.

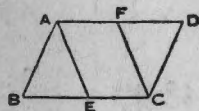
$$\therefore AB \parallel DC.$$

102

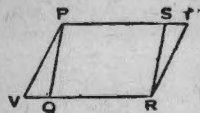
$$\therefore ABCD \text{ 是一 } \square$$

25.

習題 486. 若 E 和 F 各是 $\square ABCD$ 的對邊 BC 和 AD 的中點, 則 $AECF$ 是一平行四邊形.



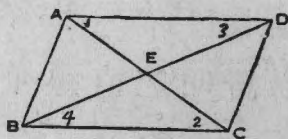
習題 487. 若以相反的方向延長一平行四邊形 $PQRS$ 的對邊, PS 和 RQ 各到 T 和 V 而 $ST = QV$, 則 $PTRV$ 是一平行四邊形.



習題 488. 若 $ABCD$ 和 $ABEF$ 是二平行四邊形, 則 CD FE 是一平行四邊形.

命題 20. 定理

149. 平行四邊形的二對角線互相二等分.



假設: $\square ABCD$ 的對角線 AC 和 BD 交於 E .

求證: $AE = EC$, 又 $BE = ED$.

證明: 在 $\triangle AED$ 和 $\triangle BEC$ 中,

$$AD = BC \quad 141.$$

$$\therefore AD \parallel BC, \quad 25$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \text{ 又 } \angle 3 = \angle 4. \quad 110.$$

$$\therefore \triangle AED \cong \triangle BEC. \quad \text{a.s.a.} = \text{a.s.a.}$$

$$\therefore AE = EC, \text{ 又 } BE = ED. \quad 77.$$

150. 系 若一四邊形的對角線互相二等分, 則此形是一平行四邊形.

習題 489. 菱形的對角線互相垂直.

習題 490. 若平行四邊形的對角線互相垂直, 則此形是菱形.

習題 491. 若順次聯接一平行四邊形的對角線半份的中點, 則形成另一平行四邊形.

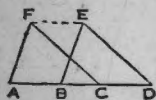
習題 492. 順次聯接一圓的二直徑的各端成一矩形.

151. 證法 要證明二直線平行可證明其爲一平行四邊形的對邊.

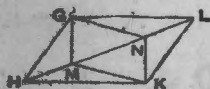
習題 493. 平行四邊形的一雙對邊的中點的聯線平行於其他二邊.

習題 494. 一不等邊的平行四邊形的一雙對角的角二等分線互相平行.

習題 495. 若 $AB=CD$, $AF=BE$, 又 $AF \parallel BE$, 試證, 不用三角形, FC 平行於 ED .

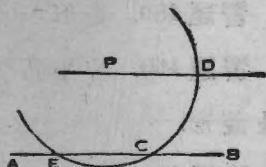


習題 496. 從平行四邊形 $GHKL$ 的二頂點 G 和 K 引 $GM \parallel KN$ 各交 HL 於 M 和 N . 試證 $GN \parallel KM$.



習題 497. 過 P 作一直線平行於 AB , 其作法如下:

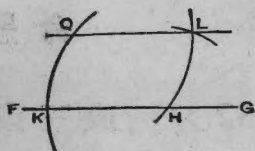
以 P 爲圓心作弧交 AB 於 E 以圓心 E 和同半徑, 作弧, 交 AB 於 C ; 再以 C 爲圓心, 用同半徑畫弧交弧 ED 於 D . 試證



PD 平行於 AB.

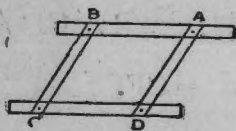
習題 498. 過 Q 作一直線平行於 FG, 其作法如下:

以圓心 Q 和任意半徑畫弧交 FG 於 H; 以圓心 H 和同半徑畫弧交 FG 於 K, 再以圓心 K 和半徑 QH 畫弧, 交第一弧於 L. 試證 QL 平行於 FG.



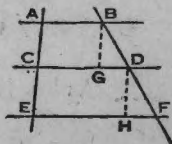
習題 499. 從一三角形的二頂點各向對邊所引的線段不能互相二等分.

習題 500. 右圖係一平行尺. 四棒連於 A, B, C 和 D. 相連處可活動旋轉而 $AB=CD$ 又 $AD=BC$. 若固定 CD, 試說明如何可畫 CD 的平行線.



習題 501. 任意取一張印有橫格的紙, 其上橫線平分否? 諸橫線是否在紙邊上截取等長? 任意畫幾條截線, 諸橫線是否在各截線上截取等長?

在右圖中, 若 $AB \parallel CD \parallel EF$ 又 $AC=CE$. 則是否 $BD=DF$? 應如何證明? 試

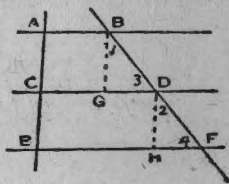


作 BG 和 DH 平行於 AE, 要證二三角形全等, 應證明那兩邊相等? 試比較 BG 和 AC; DH 和 CE; BG 和 DH. 現在能否

證明 BD 等於 DF ?

命題 21. 定理

152. 若三或三以上平行直線在一截線上截取等長，則在其他任意截線上截取等長。



假設: $AB \parallel CD \parallel EF$, 截線 ACE 和 BDF , 又 $AC = CE$.

求證: $BD = DF$.

證明: 作 $BG \parallel AE$, 交 CD 於 G , 又 $DH \parallel AE$, 交 EF 於 H .

$\therefore BG \parallel DH$, 114.

又 $AB \parallel CD \parallel EF$, 假設

$\therefore AC = BG$ 又 $CE = DH$. 141

$\therefore AC = CE$, 假設

$\therefore BG = DH$. 普公1系

在 $\triangle BGD$ 和 DHF 中,

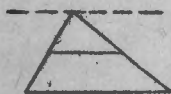
$$BG = DH,$$

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ 又 } \angle 3 = \angle 4 \quad 111$$

$$\therefore \triangle BGD \cong \triangle DHF \quad \text{a.s.a.} = \text{a.s.a.}$$

$$\therefore BD = DF. \quad 77.$$

153.系 若一直線平行於一三角形的一邊而二等分第二邊,則二等分第三邊.



習題 502. 一直線截三角形的一邊的三分之一而平行於第二邊,則截其他一邊的三分之一.

習題 503. 一直線截三角形的一邊的 $\frac{1}{n}$, n 是整數,而平行於第二邊,則截其他一邊的 $\frac{1}{n}$.

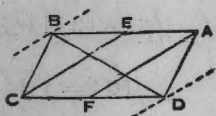
習題 504. 直角三角形的一直角邊的垂直二等分線二等分斜邊.

習題 505. 若一直線二等分一梯形的一腰而平行於底邊則二等分其他一腰.

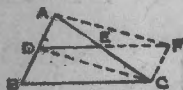
習題 506. 若一直線二等分一梯形的一腰而平行於底邊則二等分二對角線.

習題 507. 在平行四邊形 $ABCD$ 中, E 和 F 各為 AB 和

CD 的中點試證 AF 和 CE 三等分 BD.



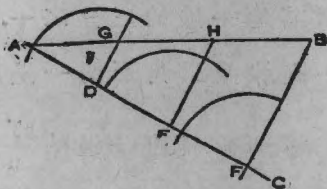
習題 508. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 的中點, $DE \parallel BC$, 又延長 DE 到 F 使 $DF = BC$, 從而證明第 153 節系.



習題 509. 在命題 21 的圖中, 若 $AB \parallel CD$, $AC = CE$, 又 $BD = DF$, 則 $EF \parallel AB$. (用同一證法).

命題 22. 作圖題

154. 分一已知線段成任意等分.



已知: 線段 AB.

求作: 分 AB 成任意等份.

作圖: 如 A 畫任意直線 AC.

在 AC 上繼續截取 AD, DE, EF, 等 n 次,

使 $AD = DE = EF = \dots\dots$

聯 B 與最後分點 F.

引 DG, EH , 等平行於 FB , 交 AB 於 G, H ,
等. 109.

則 AB 爲 G, H 等分成 n 等份.

證明: 讀者自證之.

習題 510. 五等分一已知線段.

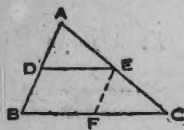
習題 511. 以兩種不同的作法四等分一已知線段.

習題 512. 作一線段等於一已知線段的 $\frac{5}{6}$.

習題 513. 作一等邊三角形, 已知其周.

習題 514. 作一三角形使其邊各等於一已知線段的 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 和 $\frac{1}{4}$.

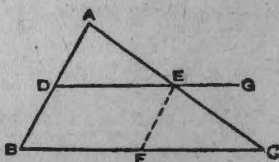
習題 515. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 D 和 E 各爲 AB 和 AC 的中點, DE 與 BC 互相平行否? 應如何證明之? 能否應用同一證法? 試由 D 引一直線平行於 BC , 此直線是否必通過點 E ?



又比較 DE 和 BC , DE 是否 BC 的一半? 應如何證明之? 二等分 BC 於 F . 如何可證明 $DE=BF$. $DBFE$ 是否一平行四邊形?

命題 23. 定 理

155. 三角形二邊中點的聯線平行於第三邊，且等於第三邊之半。



假設： $\triangle ABC$, D 和 E 各為 AB 和 AC 的中點。

求證： $DE \parallel BC$ 又 $DE = \frac{1}{2}BC$ 。

證明： 自 D 引 $DG \parallel BC$,

則 DG 二等分 AC, 即通過點 E. 153.

$\therefore DE \parallel BC$. 幾公 1.

二等分 BC 於 F.

同理, $EF \parallel AB$.

$\therefore BDEF$ 是一 \square 25

$\therefore DE = BF$ 141

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$.

習題 516. 三角形的三邊的中點的聯線分成四全

等三角形。

習題 517. 梯形的中線等於上下底之半和。

習題 518. 梯形的二對角線的中點的聯線平行於底而等於上下底之半差。

習題 519. 二等邊三角形的二等邊的中點各與底邊的中點聯接，成一菱形。

習題 520. 順次聯接四邊形的四邊的中點成一平行四邊形。

習題 521. 順次聯接四邊形的一雙對邊和二對角線的中點成一平行四邊形。

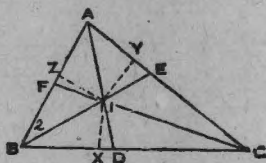
共 點 線

156. 共點 若三或三以上直線交於一點，則稱諸直線共點，諸直線稱為共點線。

復習前題 471—473, 477.

命 題 24. 定 理

157. 三角形的三角的二等分線交於一點，此點與三邊等距離。



假設： $\triangle ABC$ 及三角的角二等分線 AD , BE 和 CF .

求證： AD , BE 和 CF 交於一點又此點與三邊等距。

證明： $\because \angle A + \angle B < 1 \text{ st. } \angle.$

117, 普公 14.

$\therefore \angle 1 + \angle 2 < 1 \text{ rt. } \angle.$

普公 10.

\therefore AD 和 BE 必相交, 設交於 I. 104

自 I 引 $IX \perp BC$, $Iy \perp CA$ 又 $IZ \perp AB$.

\therefore IA 二等分 $\angle A$, 假設

$\therefore Iy = IZ$; 134.

又 IB 二等分 $\angle B$, 假設

$\therefore IX = IZ$. 134.

$\therefore IX = Iy$. 普公 1 系.

\therefore I 在 $\angle C$ 的角二等分線, 即 CF, 上 135.

\therefore AD, BE, 和 CF 交於一點又此點與三

邊等距.

158. 系 三角形的一角的角二等分線與其他二角的外角的角二等分線交於一點, 此點與三邊等距離.

159. 內心 三角形的三角的角二等分線的交點稱為三角形的內心.

160. 傍心 三角形的一角的角二等分線與其他二角的外角的角二等分線的交點稱為三角形的傍心.

習題 522. 在一平行四邊形內求一點與其三邊等距. 此點是否必與第四邊等距?

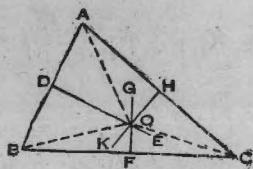
習題 523. 若一四邊形的三邊的角二等分線交於一點, 則第四邊的角二等分線通過此點.

習題 524. $\triangle ABC$ 的內心, $\angle A$ 內的傍心, 和 A 在一直線上.

習題 525. $\triangle ABC$ 的 $\angle B$ 和 $\angle C$ 內的二傍心, 和 A 在一直線上.

命題 25. 定理

161. 三角形的三邊的垂直二等分線交於一點. 此點與三頂點等距離.



假設: $\triangle ABC$; $DE \perp$ 二等分 AB , $FG \perp$ 二等分 BC ;

又 $HK \perp$ 二等分 CA .

求證: DE , FG 和 HK 交於一點, 又此點與 A , B , 和 C 等距.

證明: 若 $DE \parallel FG$, 則 $AB \perp FG$; 113.

而 $BC \perp FG$, 假設

$\therefore AB \parallel BC$. 105.

但 AB 和 BC 交於 B , 假設

$\therefore DE$ 和 FG 必相交, 設交於 O .

聯 OA , OB , 和 OC .

$\because DE \perp$ 二等分 AB , 假設

$\therefore OA = OB$; 90

又 $FG \perp$ 二等分 BC . 假設

$\therefore OB = OC$. 90

$\therefore OA = OC$. 普公 1 系

$\therefore O$ 在 CA 的 \perp 二等分線, 即 HK , 上 91.

$\therefore DE, FG$, 和 HK 交於一點又此點與 A ,

B , 和 C 等距.

162. 外心 三角形的三邊的垂直二等分線的交點, 稱爲此三角形的外心.

習題 526. 過三角形的三頂點作一圓.

習題 527. 求證祇有一圓能過三角形的三頂點.

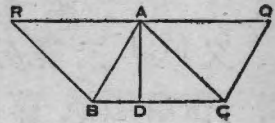
習題 528. 等邊三角形的外心與內心合而爲一.

習題 529. 若一四邊形的三邊的垂直二等分線交於一點，則第四邊的垂直二等分線通過此點。

習題 530. 若一三角形的二邊的垂直二等分線交於第三邊上，則此三角形是直角三角形。

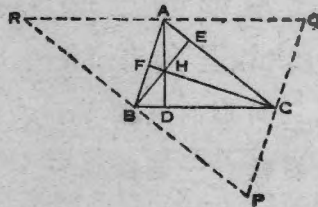
習題 531. 在四邊形 $ABCD$ 中， AB 和 AD 的垂直二等分線交於 E ，又 BC 和 CD 的垂直二等分線交於 F ，則 EF 是 BD 的垂直二等分線。

習題 532. $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ；又從 B 和 C 引對邊的平行線交過 A 平行於 BC 的直線於 R 和 Q 。則 AD 垂直二等分 QR 。



命題 26. 定理

163. 三角形的三垂線交於一點。



假設: $\triangle ABC$ 的三垂線 $AD, BE,$ 和 $CF.$

求證: AD, BE 和 CF 交於一點.

證明: 過 A 引 $RQ \parallel BC,$ 過 B 引 $PR \parallel CA$ 又過

C 引 $QP \parallel AB;$ 三線交於 P, Q 和 $R.$

$\therefore ARBC$ 是 $\square,$ 25

$\therefore AR = BC;$ 141

又 $ABCQ$ 是 $\square,$ 25

$\therefore QA = BC.$ 141

$\therefore QA = AR.$ 普公 1 系

$\therefore AD \perp QR$ 113

$\therefore AD$ 是 QR 的垂直二等分線.

同理, BE 和 CF 各為 RP 和 PQ 的垂直二等分線.

$\therefore AD; BE$ 和 CF 交於一點, 設為 $H.$ 161

164. 垂心 三角形的三垂線的交點稱為此三角形的垂心

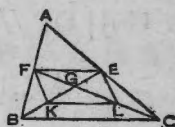
習題 533. 若 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心, 則 A 是 $\triangle BCH$ 的垂心.

習題 534. 若 I 是 $\triangle ABC$ 的內心, I_1, I_2, I_3 是 $\triangle ABC$ 的

三傍心,則I是 $\triangle I_1 I_2 I_3$ 的垂心.

習題 535. 若H是 $\triangle ABC$ 的垂心,則 $\angle BHC$ 和 $\angle A$ 相補.

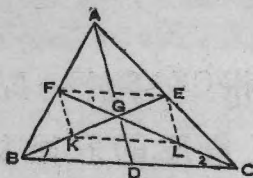
習題 536. $\triangle ABC$ 中,中線BE和CF交於G;K和L各為BG和CG的中點.則EFKL是一平行四邊形.



習題 537. $\triangle ABC$ 中,中線BE和CF交於G.則 $GE = \frac{1}{3} BE$ 又 $GF = \frac{1}{3} CF$.

命題 27. 定理

165. 三角形的三中線交於一點,此點與頂點的距離等於從此頂點所引的中線的三分之二.



假設: $\triangle ABC$ 的三中線AD, BE和CF.

求證: AD, BE和CF交於一點,設為G.

$$\text{又 } AG = \frac{2}{3} AD, BG = \frac{2}{3} BE, \text{ 及 } CG = \frac{2}{3} CF.$$

證明: 若 $BE \parallel CF$, 則 $\angle 1 + \angle 2 = 1 \text{ st} \angle$. 112

但 $\angle B + \angle C < 1 \text{ st} \angle$. 118

$\therefore BE$ 和 CF 不能互相平行設交於 G .

二等分 BG 於 K , CG 於 L ; 聯 EF, FK, KL 和 LE

$\therefore EF \parallel BC$, 又 $= \frac{1}{2} BC$; 155

$KL \parallel BC$, 又 $= \frac{1}{2} BC$.

$\therefore EF \parallel KL$, 114.

又 $EF = KL$ 普公 1 系

$\therefore EFKL$ 是 \square 24

$\therefore KG = GE$ 又 $LG = GF$ 149

$\therefore BG = 2GE = \frac{2}{3} BE$ 又 $CG = 2GF = \frac{2}{3} CF$

設 AD 交 BE 於 G' , 則同理 $BG' = \frac{2}{3} BE$;

而 $BG' = BG$, G' 與 G 合而為一;

即 AD 必通過 G .

$\therefore AD, BE$ 和 CF 交於一點 G ,

而 $AG = \frac{2}{3} AD$, $BG = \frac{2}{3} BE$ 又 $CG = \frac{2}{3} CF$.

166. 重心 三角形的三中線的交點稱為
此三角形的重心.

習題 538. 若一三角形的二邊的中線相等,則此二邊相等.

習題 539. 若一三角形的一邊及其他二邊上的中線各各等於另一三角形的一邊及其他二邊上的中線,則此二三角形全等.

習題 540. 試用下面的方法證明 $\triangle ABC$ 的三中線 AD, BE 和 CF 交於一點:

設 BE 和 CF 交於 G , 延長 AD 到 P 令 $GP=AG$; 再證 $GBPC$ 是一 \square , 等等.

習題 541. 三角形 ABC 的中線為 AD, BE 和 CF . $\triangle ABC$ 和 DEF 有同一重心.

習題 542. 四邊形的兩雙對邊的中點的聯線和二對角線的中點的聯線交於一點.

習題 543. 六邊形的三雙對邊各相等又平行, 則其三對角線交於一點.

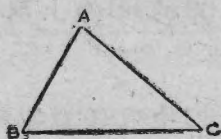


習題 544. 一平行四邊形的四頂點在另一平行四邊形的邊上, 則二平行四邊形的對角線交於一點.

不等線和不等角

命題 28. 定理

167. 三角形的任意二邊之和大於第三邊.



假設: $\triangle ABC$.

求證: $AB + AC > BC$.

證明: 讀者自證之.

168. 系 三角形的任意二邊之差小於第三邊.

$$\therefore AB < AC + BC$$

$$\therefore AB \sim AC < BC$$

普公 7.

註 \sim 是差的符號, 在前後二量中, 從大量減去小量, 而前一量不必一定比後一量大.

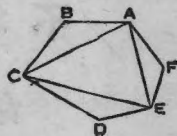
習題 545. 用下列各組線段能否作成三角形

(i) 3 寸, 5 寸, 9 寸; (ii) 12 寸, 7 寸, 5 寸;

(iii) 6寸, 9寸, 8寸; (iv) 2寸, 10寸, 5寸.

習題 546. 求證六邊形 ABCDEF

的周圍大於三角形 ACE 的周圍.



習題 547. 在 $\triangle ABC$ 中 $AC = BC$,

又 AC 的延線上的一點 D 與 B 聯接, 則 $DA > DB$.

習題 548. 在 $\triangle ABC$ 的 BC 邊上取任意點 D , 則

$AB + BC > BE + DC$

習題 549. 在 $\triangle ABC$ 中取任意點 E , 則聯 BE 和 EC ,

$AB + AC > BE + EC$.

習題 550. 圓內不通過圓心的任意弦小於直徑.

習題 551. 右圖中, O 是圓心,

$AOPC$ 是直徑. 試證 $PA > PB$, 又

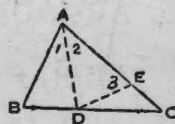
$PC < PB$.



習題 552. $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$,

比較 $\angle B$ 和 $\angle C$. $\angle B = \angle C$? $\angle B > \angle C$?

$\angle B < \angle C$? 應如何證明? 若引 AD 二

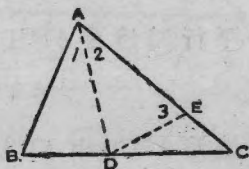


等分 $\angle A$, 在 AC 上取 AE 令 $AE = AB$, 能否證明 $\angle B = \angle 3$.

比較 $\angle 3$ 和 $\angle C$. $\angle B$ 與 $\angle C$ 間的關係如何?

命題 29. 定理

169. 若三角形的二邊不等, 則其對角亦不等, 大邊所對的角較大.



假設: $\triangle ABC$ 的 $AC > AB$

求證: $\angle B > \angle C$.

證明: 引 AD 二等分 $\angle A$, 交 BC 於 D ;

$\therefore AC > AB$

假設

\therefore 在 AC 上可取 AE 令 $AE = AB$.

在 $\triangle ABD$ 和 AED 中,

$AD = AD$

$\angle 1 = \angle 2$

$AB = AE$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle AED$

s.s.s. = s.s.s.

$\therefore \angle B = \angle 3$

77

但 $\angle 3 > \angle C$

120

作圖

作圖

$$\therefore \angle B > \angle C$$

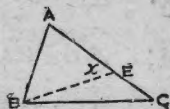
普公 1.

習題 553. 在一三角形的最大邊的兩端的角是銳角.

習題 554. 在一平行四邊形 ABCD 中, $AB > AD$; 求證 $\angle ADB > \angle BDC$.

習題 555. 在四邊形 ABCD 中, AB 是最短邊又 CD 是最長邊; 試證 $\angle B > \angle D$ 又 $\angle A > \angle C$.

習題 556. $\triangle ABC$ 中, $AC > AB$ 若在 AC 上取 AE 令 $AE = AB$, 再聯 BE, 從而證明命題 29.



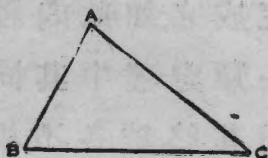
習題 557. 試述命題 29 的逆定理真確否? 應如何證明?



若 $\angle B > \angle C$, AC 和 AB 間的關係有幾種? 能否 $AC < AB$? 能否 $AC = AB$? 如若此兩種均不可能, 則必如何?

命題 30. 定理

170. 若三角形的二角不等, 則其對邊不等, 大角所對的邊較大.



假設: $\triangle ABC$ 的 $\angle B > \angle C$.

求證: $AC > AB$.

證明: AC 和 AB 祇有三種可能的關係:

$AC < AB$, $AC = AB$, 或 $AC > AB$ 普公 12.

若 $AC < AB$, 則 $\angle B < \angle C$; 169.

若 $AC = AB$, 則 $\angle B = \angle C$. 84.

因 $\angle B > \angle C$, 假設

所以這兩種關係全是不可能的。

$\therefore AC > AB$. 普公 12

171. 系 從一點引到一直線的線段以垂線為最短 (106).

172. 窮舉證法 命題 30 所採用的證法稱, 為窮舉證法. 應用此法時, 先不直接證明命題的終結, 但悉舉與此終結同類的各種可能情形, 而一一證其與假設不合, 最後落得

原來終結必定成立。如此的證法稱為窮舉證法。凡在某一類定理中其同類異種的假設悉已發見而其終結各不相容，則其任意一定理的逆定理必能以窮舉證法證明。

習題 558. 直角三角形的那一邊最大？鈍角三角形呢？

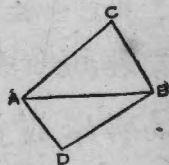
習題 559. 若在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ ，又 $\angle B = 60^\circ$ 。這三角形的那一邊最大？那一邊最小？

習題 560. 若在 $\triangle ABC$ 中， $AB > AC$ ，又 $\angle A = 60^\circ$ 。比較其三邊，列以不等式。

習題 561. 三角形 ABC 的角 B 和 C 的角二等分線交於 O 。若 $AB > AC$ ，則 $OB > OC$ 。

習題 562. 三角形 ABC 的 AB 和 AC 的垂線交於 H ，而 H 在三角形內。若 $AB > AC$ ，則 $HB > HC$ 。

習題 563. 右圖中 $AC > BC$ ， $AD \perp AC$ ，又 $BD \perp BC$ 。求證 $BD > AD$ 。



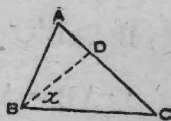
習題 564. 若三角形 ABC 的角 B 和 C 的外角的角二等分線交於 E ，而 $AB > AC$ ，則 $EB < EC$ 。

習題 565. 一直線 PQR 截一二等邊三角形 ABC 的

等邊 AB 和 AC 於 P 和 Q , 又截底邊 BC 的延線於 R , 求證 $AP < AQ$.

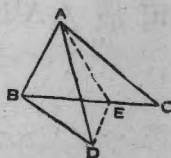
習題 566. $\triangle ABC$ 的 $\angle B > \angle C$;

引 BD 交 AC 於 D , 令 $\angle x = \angle C$; 從而證明命題 30.



習題 567. $\triangle ABC$ 和 ABD 的

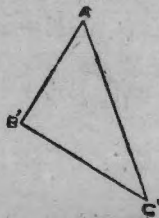
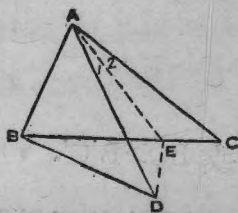
$AC = AD$, AB 公共, 又 $\angle A > \angle BAD$, 試比較 BC 和 BD . 是 $BC < BD$; $BC = BD$;



還是 $BC > BD$? 應如何證明. 試作 AE 二等分 $\angle CAD$, 交 BC 於 E . 能否證明 $DE = EC$? 果爾, 由 $BE + DE > BE$, 能否證明 $BC > BD$?

命題 31. 定理

173. 若二三角形有二雙邊相等, 又一三角形的夾角大於另一三角形的夾角, 則前一三角形的第三邊大於後一三角形的第三邊.



假設: $\triangle ABC$ 和 $A'B'C'$ 的 $AB=A'B'$, $AC=A'C'$,

又 $\angle A > \angle A'$

求證: $BC > B'C'$.

證明: $\because AB=A'B'$,

假設

可放 $\triangle A'B'C'$ 使 $A'B'$ 落於 AB 之上; 設 C' 落於 D .

$\because \angle A > \angle A'$,

假設

$\therefore AD$ 在 AB 和 AC 之間.

作 AE 二等分 $\angle CAD$, 交 BC 於 E ; 聯 DE 在 $\triangle ADE$ 和 ACE 中,

$AE = AE$,

$AD = AC$,

假設

$\angle 1 = \angle 2$,

作圖

$\therefore \triangle ADE \equiv \triangle ACE$

s.a.s. = s.a.s.

$\therefore DE = EC$

77.

但 $BE + DE > BD$

167

$\therefore BE + EC > BD$, 或 $BC > B'C'$.

普公 1

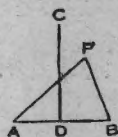
習題 568. A, B, C, D 是一圓周上的四點, 圓心為 O , 又

$\angle AOB > \angle COD$; 求證弦 $AB >$ 弦 CD .

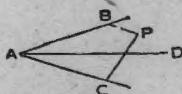
習題 569. 設三角形 ABC 的中線 AD 與 BC 所成的角 ADB 是銳角, 則 $AC > AB$.

習題 570. 設在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \angle B$, 又在 AB 上取一點 D , 令 $\angle ACD > \angle DCB$, 則 $AD > DB$.

習題 571. 設 CD 是 AB 的垂直二等分線, 試證 $PA > PB$.



習題 572. 設 AD 是 $\angle BAC$ 的角二等分線, 又 $AB = AC$, 試證 $PB < PC$.



習題 573. $\triangle ABC$ 和 $A'B'C'$ 全是二等邊的, BC 和 $B'C'$ 是底邊, 若 $AB = A'B'$, 又 $\angle B > \angle B'$, BC 和 $B'C'$ 孰大?

習題 574. $\triangle ABC$ 中, $\angle C$ 是直角; 在 AB 上取 $AD = BC$; 求證 $AB > CD$.

習題 575. 在三角形 XYZ 的邊 YX 和 ZX 上取等長 YS 和 ZT ; 求證, 若 $XY > XZ$, $YT > ZS$.

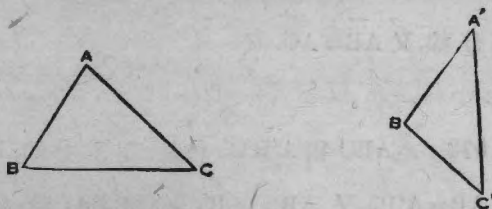
習題 576. 延長三角形 XYZ 的邊 XY 和 XZ 各各到 S 和 T 令 $YS = ZT$; 求證, 若 $XY > XZ$, $ZS > YT$.

習題 577. 試述命題 31 的逆定理, 真確否? 應如何證

明能否應用窮舉證法?試用窮舉證法證明之。

命題 32. 定 理

174. 若二三角形有二雙邊相等, 又一三角形的第三邊大於另一三角形的第三邊, 則前一三角形的夾角大於另一三角形的夾角。



假設: $\triangle ABC$ 和 $A'B'C'$ 的 $AB = A'B'$, $AC = A'C'$,
又 $BC > B'C'$.

求證: $\angle A > \angle A'$.

證明: $\angle A$ 和 $\angle A'$ 祇有三種可能的關係:

$\angle A < \angle A'$, $\angle A = \angle A'$, 或 $\angle A > \angle A'$. 普公 12.

若 $\angle A < \angle A'$, 則 $BC < B'C'$; 173

若 $\angle A = \angle A'$ 則 $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$,

而 $BC = B'C'$, 77

因 $BC = B'C'$, 假設

所以這兩種關係全是不可能的。

$\therefore \angle A > \angle A'$. 普公 12.

習題 578. 在圓 $ABCD$ 內, 其圓心為 O , 弦 $AB >$ 弦 CD ,
求證 $\angle AOB > \angle COD$.

習題 579. 在三角形 ABC 中, $AB > AC$; D 是 BC 的中
點. 求證 $\angle ADC$ 是銳角.

習題 580. P 是三角形 ABC 的中線 AD 上的任意點
求證若 $AB > AC$, $PB > PC$.

習題 581. 在三角形 XYZ 的邊 YX 和 ZX 上各截取
等長 YS 和 ZT ; 求證若 $YT > ZS$, $XY > XZ$.

習題 582. 延長三角形 XYZ 的邊 XY 和 XZ 各到 S
和 T , 令 $YS = ZT$; 求證若 $ZS > YT$, $XY > XZ$.

習題 583. 在四角形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, 但 $AB < CD$ 求
證 $\angle DAC > \angle ACB$.

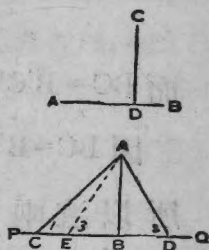
習題 584. 在四邊形 $ABCD$ 中, $AD = BC$ 又 $\angle ADC >$
 $\angle BCD$; 求證 $\angle ABC > \angle BAD$.

175. 垂足 一直線的垂線與其交點稱為

垂線的足;如 D.

習題 585. 若 $AB \perp PQ, BC > BD$.

試比較 AC 和 AD. 孰大? 應如何證明?

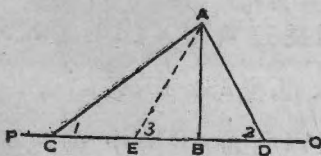


試取 $BE = BD$. 能否證明 AD

$= AE$. 比較 $\angle 3$ 和 $\angle 1$; 再比較 $\angle 2$ 和 $\angle 1$; 從而證明 $AC > AD$.

命題 33. 定理

176. 若從一直線的垂線上一點引二斜線, 其截此直線的交點與足的距離不等, 則距離遠的斜線較長.



假設: $AB \perp PQ$, AC 和 AD 各截 PQ 於 C 和 D 而 $BC > BD$.

求證: $AC > AD$.

證明：在BC上取BE=BD；聯AE。

$\therefore BC > BD,$ 假設

$\therefore E$ 在 B 和 C 之間。

$\therefore AE = AD.$ 90.

$\angle 2 = \angle 3.$ 84

但 $\angle 3 > \angle 1$ 120.

$\therefore \angle 2 > \angle 1$ 普公 1

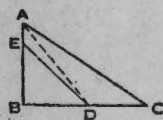
$\therefore AC > AD.$ 170.

177.系 1. 若從一直線的垂線上一點引二不等的斜線，則較長的斜線截此直線的交點與垂足的距離較遠。(應用窮舉證法)

178.系 2. 從一直線外一點向此線祇能引二相等的斜線。

習題 586. 若 $AB \perp BC$, AEB 和 BDC 均為直線。

求證 $AC > DE$ 。



習題 587. 若二三角形有一邊及其相鄰的鈍角相等，又一三角形的鈍角的其他夾邊大於另一三角形的鈍角的其他夾邊，則前一三角形的第三邊大於後一三

角形的第三邊。

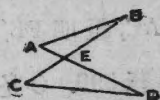
習題 588. 若二三角形有一鈍角相等,但一三角形的鈍角的二夾角大於另一三角形的鈍角的二對應夾角,則前一三角形的第三角大於後一三角形的第三邊。

179. 證法 7. 要證線段的不等,若沒有角的關係,往往利用第 167, 168, 176, 177 等節;若二線段是一三角形的二邊,且能證明其對角不等,則用第 170, 171 節;若二線段是二三角形的二邊而此二三角形其他二雙邊相等,且能證明其夾角不等,則用第 173 節。

要證角的不等,若沒有邊的關係,往往利用第 118, 120, 122 節;若二角是一三角形的二角,且能證明其對邊不等,則用第 169 節;若二角是二三角形的二角,而此二三角形有二雙夾邊相等,且能證明其第三邊不等,則用第 174 節。

證線段或角的不等,有時往往要連用幾種方法方能達到目的。

習題 589. 設 AD 和 BC 相交於 E , 求證 $AD+BC > AB+CD$.



習題 590. 設 O 是三角形 ABC 內的一點, 求證 $\angle BOC > \angle BAC$.

習題 591. 任意四邊形的對角線的和小於其周而大於其半周.

習題 592. 任意三角形的二邊之和大於其第三邊上中線之 2 倍.

習題 593. AM 是 $\triangle ABC$ 的一中線, 若 $AB > AC$, 則 $\angle BAM < \angle CAM$.

習題 594. AD 是 $\triangle ABC$ 的一垂線, 若 $AB > AC$, 則 $\angle BAM > \angle CAM$.

習題 595. 任意點 O 與三角形 ABC 的三頂點的距離之和大於三角形之半周.

習題 596. 三角形內的任意點與三頂點的距離之和小於三角形之周.

(應用習題 549)

習題 597. 在三角形 ABC 內, D 是 BC 的中點, 若 $AD < BD$, $\triangle ABC$ 是鈍角三角形.

若 $AD > BD$, 則如何?

習題 598. P 是三角形 ABC 的中線 AD 上的任意點.

若 $AB > AC$, 證明 $PB > PC$.

習題 599. O 是等邊三角形 ABC 內的一點; 若 $\angle OAB > \angle OAC$, 則 $\angle OCB > \angle OBC$.

習題 600. 證明二三角形全等的證法如何?

習題 601. 證明二直角三角形全等的證法如何?

習題 602. 證明二線段相等的證法如何?

習題 603. 證明二角相等的證法如何?

習題 604. 證明二直線互相垂直的一法如何?

習題 605. 證明二直線互相平行的證法如何?

習題 606. 證明一四邊形是一平行四邊形的證法如何?

習題 607. 證明二線段不等的證法如何?

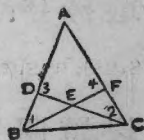
習題 608. 證明二角不等的證法如何?

180. 解析證法的研究 證題時欲發現證明方法, 最好利用解析, 已述於前第 88 節.

應用解析證法時, 欲使某步成立, 其方法往往不止一端. 這時可選擇其一進行解析證明. 若選擇的一證法不能得一結果, 則選擇其他一證法; 唯所選證法則必取其與題

之假設有關係而能使下一步設想比較簡單而顯然可證。

例 若 $BE = CE$ 又 $ED = EF$,
則 $AB = AC$.



解析 要證 AB 和 AC 相等證法有:

- (i) 全等三角形的對應邊相等;
- (ii) 三角形的等角的對邊相等.

其他如“平行四邊形的對邊相等,”“一線段的垂直二等分上任意點與線段的兩端等距”等等,因其與假設無關,自不必列入.

若選擇 (i), 即證 $\triangle ABF \cong \triangle ACD$. 因已知 $\angle A = \angle A$, 和 $BF = CD$ ($\because BE = CE, EF = ED$), 證法有:

(a) a.s.a. = a.s.a.

其他如“a.s.a. = a.s.a.,”“s.a.s = s.a.s.”因其證明並不簡易,不宜採用.

要證 (a), 則必證明

$$(a_1) \angle 1 = \angle 2;$$

$$(a_2) \angle 3 = \angle 4.$$

若選擇 (a_1) , 則必證明 $\triangle BDE \equiv \triangle CFE$, 此則由 s.a.s. = s.a.s. 而顯然以可成立.

所以證明是:

$$\angle BED = \angle CEF \quad 71$$

$$BE = CE \quad \text{假設}$$

$$ED = EF \quad \text{假設}$$

$$\therefore \triangle BDE \equiv \triangle CFE \quad \text{s.a.s.} = \text{s.a.s.}$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 \quad 77$$

$$\text{又} \because BE = CE, EF = ED \quad \text{假設}$$

$$\therefore BF = CD \quad \text{普公 2.}$$

$$\angle A = \angle A$$

$$\therefore \triangle ABF \equiv \triangle ACD \quad \text{s.a.s.} = \text{s.a.s.}$$

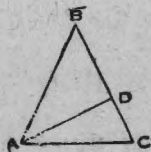
$$\therefore AB = AC \quad 77.$$

習題 609. 試用 (i), (a), (a_2) 的方法證明前例.

習題 610. 試用 (ii) 的方法證明前例.

習題 611. 已知一二等邊三角形 ABC 的頂角 B, 求

$\angle DAC$, 底邊與一等邊上的高所夾之角.



解 設 $\angle B = m^\circ$

則 $\angle A + \angle C = 180^\circ - m^\circ$ (何故?)

$\angle A = \angle C$ (何故?)

$\therefore 2(\angle C) = 180^\circ - m^\circ$ (何故?)

$\therefore \angle C = 90^\circ - \frac{m^\circ}{2}$ (何故?)

但 $\angle DAC = 90^\circ - \angle C$ (何故?)

$\therefore \angle DAC = 90^\circ - (90^\circ - \frac{m^\circ}{2})$ (何故?)

或 $\angle DAC = \frac{m^\circ}{2} = \frac{1}{2}(\angle B)$.

181. 證法 8. 幾何命題有時可用代數計算證明之. 前一習題所用的方法即為代數計算法. 若一幾何命題其終結是二或二以上角的關係, 往往可以應用代數計算法來證明. 若為二角的關係, 一角表以代數形式 (如 m°), 從而推得另一角的值. 若為三或三以上角的關係, 除去一角而外, 其餘數角悉表以代數形式 (如 $m^\circ, n^\circ, P^\circ$ 等), 而推求其他一角的值為簡便起見, 角的記號, 如 $\angle A$ 或

$\angle B$, 有時亦可用以表示角的值。

在式中如若除去與終結有關的諸角而外尚有其他的角夾於其中, 則設法由幾何的關係利用代數計算而消去之。

例 已知 $\triangle ABC$, 及 AC 上的點 D . 而 $AD=AB$, 求證 $\angle DBC = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

證明: 設 $\angle B = m^\circ$, 又 $\angle C = n^\circ$.

則 $\angle A = 180^\circ - m^\circ - n^\circ$.

但 $\angle ABD + \angle BDA = 180^\circ - \angle A$

即 $\angle ABD + \angle BDA = 180^\circ -$

$$(\angle A)$$

$$= m^\circ + n^\circ.$$

但 $\angle ABD = \angle ADB$

$$\therefore 2(\angle ABD) = m^\circ + n^\circ.$$

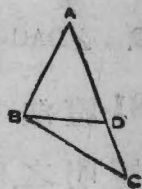
$$\therefore \angle ABD = \frac{1}{2}(m^\circ + n^\circ)$$

但 $\angle DBC = \angle B - \angle ABD$

$$= m^\circ - \frac{1}{2}(m^\circ + n^\circ)$$

$$= \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$$

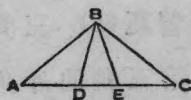
$$\therefore \angle DBC = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C).$$



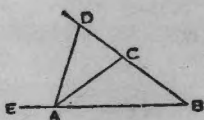
習題 612. 向兩方延長一直角三角形的斜邊所成

二外角之和等於 270° 。

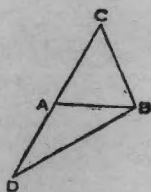
習題 613. 在一二等邊 $\triangle ABC$ 的底邊 AC 上取二點 D 和 E 令 $AD=AE$ 又 $BC=CD$, 證明 $\angle DBE = \angle A$.



習題 614. 在右圖中,若 $AD=AC=CB$, 又 DB 和 EB 是直線, 則 $\angle EAD = 3(\angle B)$.



習題 615. 延長二等邊三角形 ABC 的一等邊 CA 令 AD 等於底邊 AB , 則 $\angle C = 180^\circ - 4(\angle D)$.



習題 616. 延長二等邊三角形 ABC 的底邊 AB 到 D , 再引 CD , 則 $\angle BCD = \angle A - \angle D$.

習題 617. 若在二等邊三角形 ABC 內底邊 AB 的一端 B 與對邊上一點 D 相聯, 則

$$\angle A = \frac{1}{2}(\angle CDB + \angle CBD).$$

習題 618. 延長三角形 ABC 的一邊 AC 到 D 令 $CD = CB$, 則 $\angle ABD = 90^\circ + \frac{1}{2}(\angle A - \angle ABC)$.

習題 619. $\triangle ABC$ 內, AD 是高又 AE 是角二等分線; 試證 $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle B - \angle C)$.

習題 620. $\triangle ABC$ 的二角 B 和 C 的角二等分線交於

I, 求證 $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

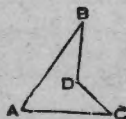
習題 621. 三角形的二外角的角二等分線的夾角
等於第三角的外角之半.

雜 題

習題 622. 直角三角形的斜邊上的中線等於斜邊的半。

習題 623. 右圖中求證

$$\angle BDC = \angle A + \angle B + \angle C.$$



習題 624. 兩二等邊三角形的頂角相補則其底角相餘。

習題 625. 全等三角形的對應邊中線相等。

習題 626. 全等三角形的對應邊的垂線相等。

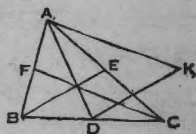
習題 627. 全等三角形對應角的角二等分線相等。

習題 628. 二等邊三角形的二等邊上垂線的交點與頂點的聯線二等分頂角。

習題 629. 若一三角形的一邊與其上中線和垂線各各等於另一三角形的一邊與其上中線和垂線則此二三角形全等。

習題 630. 若一三角形的二邊與其中一邊的對角各各等於另一三角形的二邊與其中對應邊的對角則其他一雙對應邊的對角或相等或相補若相等時則二三角形全等。

習題 631. AD , BE , 和 CF 是 $\triangle ABC$ 的三中線. 若 DK 等於且平行於 BE , 則 KA 等於且平行於 CF .



習題 632. 從一直線外一已知點作一直線與此直線交成一已知角.

習題 633. 作一線段使其兩端在一已知角的二邊上而此線段等於且平行於另一已知線段.

習題 634. 過一已知角內的一已知點作一直線與角的二邊成等角.

習題 635. 過一已知角內的一已知點作一線段, 止於角的二邊上, 而爲此點所二等分.

習題 636. 二等邊梯形的二底角相等.

習題 637. 若梯形的二對角線相等, 則爲二等邊梯形.

習題 638. 在四邊形 $ABCD$ 中, $AB=CD$ 又 $\angle B=\angle C$; 求證 AD 平行於 BC .

習題 639. ABC 和 DBC 是在同底 BC 上的二三角形, 又 AD 平行於 BC . 若三角形 ABC 是二等邊的其周小於三角形 DBC 之周.

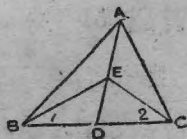
習題 640. 若 P 是三角形 ABC 的角 A 的外角的角二等分線上任意一點, 則 $AB+AC < PB+PC$.

習題 641. A 和 B 二已知點在一已知直線 CD 的兩側, 在 CD 上求一點 P 令 $\angle APC = \angle BPC$.

習題 642. A 和 B 二已知點在一已知直線 CD 的同側, 在 CD 上求一點 P 令 $\angle APC = \angle BPD$.

習題 643. A 和 B 二已知點在一已知直線 CD 的同側, 在 CD 上求一點 P 令 $AP + BP$ 為最小.

習題 644 若中線 AD 上的一點 E 與 B 和 C 聯接, 而 $\angle B < \angle C$, 則 $\angle 1 < \angle 2$.

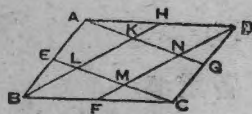


習題 645. 若三角形的二邊不等, 從其相交的頂點引角二等分線及對邊的中線和垂線, 則角二等分線在中線和垂線之間.

(應用習題 593, 594)

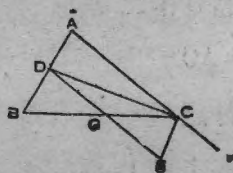
習題 646. E 和 F 各為平行四邊形 ABCD 的對邊 AB 和 CD 的中點. 求證 AF 和 CE 三等分 BD.

習題 647. 若 E, F, G 和 H 是 $\square ABCD$ 的諸邊的中點, 求證 KLMN 是一平行四邊形.



習題 648. CD 二等分 $\angle ACB$, CE 二等分 $\angle BCF$, 又 $DE \parallel AF$.

求證 BC 二等分 DE.



習題 649. 在二等邊三角形 ABC 的一等邊 AB 上取一點 D 又在另一等邊 AC 的延線上取一點 E 令 $BD=CE$ 求證底邊 BC 二等分 DE .

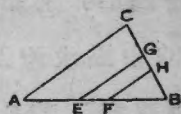
習題 650. 一直線截一二等邊三角形 PQR 的一等邊 PQ 於 X , 底邊 QR 於 Y 及另一等邊 PR 的延線於 Z . 若 $XY=YZ$, 則 $XQ=RZ$.

習題 651. 三角形的三中線之和小於三角形之周 (應用習題 592)

習題 651. 三角形的三中線之和大於三角形之周之四分之三.

習題 653. $\triangle ABC$ 的二邊的中線 BE 和 CF 各延長到 G 和 H 使 $EG=BE$ 又 $FH=CF$. 求證 G, A 和 H 在一直線上 又 A 是 GH 的中點.

習題 654. 在 $\triangle ABC$ 中, $AE=BF$, 又 $AC \parallel EG \parallel FH$ 求證 $EG+FH=AC$.



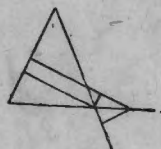
習題 655 在二等邊三角形 ABC 中, 過底邊 AB 上的一點 D 作二等邊的平行線交二等邊於 E 和 F , 則 $DE+DF=AC$.



習題 656. 在二等邊三角形中 從底邊上的任意一點作二等邊的

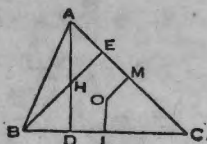
垂線,其和等於一等邊上的高.

習題 657. 從二等邊三角形的底邊的延線上的任意一點作二等邊的垂線其差等於一等邊上的高.



習題 658. 從等邊三角形中的任意一點作三邊的垂線,其和等於此三角形的高.

習題 659. 在 $\triangle ABC$ 中,高 AD 和 BE 交於 H , 又 OL 和 OM 各為 BC 和 CA 的垂直二等分線,求證 $AH=2OL$ 又 $BH=2OM$.

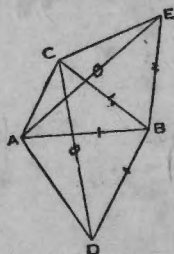


習題 660. 在前題中, HO 截中線 AL 的三分之一.

習題 661. 三角形的垂心,重心和外心在一直線上.

習題 662. ABD 和 BCE 是在

$\triangle ABC$ 的邊 AB 和 BC 上的等邊三角形,求證 $CD=AE$.



習題 663. ADE 和 BCF 是在正方形 $ABCD$ 的邊 AD 和 BC 上的

等邊三角形而全在正方形外,求證 $EBFD$ 是一平行四邊形.

習題 664. $ABCD$ 是一平行四邊形而 $AD=2AB$; 向兩方延長 AB 到 E 和 F 使 $EA=AB=BF$. 求證 CE 和 DF 互相垂直.

13143

書名: 幾何	13.19	4414
卷號	2822	75
姓名	5	Prin
姓名	5	Prin



貴州

省立圖書館

13.19	13143
4414-44	著者: 海元
書名: 幾何	

第 冊 共 冊

請 愛 護

