無師自通　考試必備

代數易解

民衆參考中學補充用書

益智書店印行

大滿洲帝國康德二年一月出版

代數易解

（全一冊）

實價大洋四角

外埠酌加郵費匯費

編輯者　益智書店編輯部

校訂者　邢伯南

發行兼印刷者　益智書店

新京商埠西三馬路門牌十一號

分銷處

新京　四寶堂
新京　德和祐
新京　胡魁章
新京　成文厚
奉天　大東書局
奉天　世界書局
奉天　德和興
奉天　萬源湘繡
吉林　成文厚
吉林　協和書局
黑龍江　成文厚
哈爾濱　大東書局
哈爾濱　成文厚
安東　誠文信

代數易解

第一章　緒論

第一節　以文字代數字

例如何數與2之和爲5、以橫式表問題。則爲何數$+2=5$。此所求之何數、名曰未知數、卽題中未曾明言之數也。2及5、則爲已知數、卽爲題中明言之數。凡未知數可用英文字母X代之。而橫式成爲代數式、如$X+2=5$。X讀曰、『哀克斯』。

由題意 $X+2=5$、知X必爲5與2之差、卽$X=5-2$、故知X等於3。

又如某人購地造屋、共用銀五千六百元。建屋所費、爲地價之三倍。地價與建築費各若干。此題地價爲未知數、以X代之。屋價爲地價之三倍、必爲3X。五千六百元係地價房價之和、卽X與3X之和。故列代數式、爲$X+3X=5600$元。X與3X之和爲4X、故得式$4X=5600$元。4X爲5600元、則X必爲5600元之$\frac{1}{4}$。卽1400元。故得式$X=1400$元。X爲地價、故知地價値一千四百元。3X

即一千四百元之三倍、爲四千二百元、屋價也。此題完全解法、列式如下。

X＝地價之元數、 $3X$＝屋價之元數、$3X+X=5600$元。即$4X=5600$元、故$X=1400$元（地價）$3X=4200$元（屋價）、由上例、知凡未知數皆可代以文字、然後解之。解決時比不用文字代者、淸晰、而且易於推考。然代數之用、不僅以文字代未知數。而解決問題、又可以文字表算理。卽已知數亦可以文字代之。通例、代已知數用 a, b、c、等字母。a讀曰、『哀』。b讀曰、『皮』。c讀曰『西』。

由算術理知凡母數與成數之積爲子數。如以 a 代成數、b代母數、c代子數、則求子數之式、成爲$a\times b=c$。此等名曰公式。公式之用甚大。知一個公式時、其相關之他式、均可由此推算。故學百分法者、習熟上列之公式、則百分法之求母、求子、均可一一推知之。a與b之積爲c、則a必爲b除c之商、b必爲a除c之商。a、b、c、三數中、無論何數缺其一時、皆可由公式推算得之。

例如已知 a 爲2%、b爲50元、則$c=a\times b$、卽$c=.02\times50$元　$c=1$元、

又如已知a爲5%、c爲15元、則$.05\times b=15$元、　$b=$

$15\div .05$、　$b=300$元、

又如已知b爲200元、c爲40元、則$a\times 200$元$=40$元、$a=40$元$\div 200$元、　$a=.2$、

又如利息法、以a代利率、b代本、c代利息、d（讀曰『提』）代時期。則得公式、$d\times a\times b=c$。由此式解利息問題、如下例。

例（一）、已知d爲三年半、a爲年利一分、b爲七百元、則$c=3\frac{1}{2}\times\frac{1}{10}\times 700$元、$c=\frac{7\times1\times\overset{35}{\cancel{700}}}{\cancel{2}\times\cancel{10}}$元、　$c=245$元、

例（二）、已知d爲三月、a爲月利六釐、（俗稱）c爲90元、則$3\times .006\times b=90$元、　$b=90$元$\div 3\div .006$、　$b=500$元、

例（三）、已知a爲年利七釐、b爲450元、c爲63元則$d\times .07\times 450$元$=63$元、　$d=63$元$\div .07\div 450$元、　$d=2$、

例（四）、已知d爲二月十日、b爲三千元、c爲56元、則　$2\frac{1}{3}\times a\times 3000$元$=56$元、　$a=56$元$\div 3000$元$\div 2\frac{1}{3}$、

$a=\frac{56}{3000}\div\frac{7}{3}$、　$a=\frac{\cancel{3}}{\cancel{7}}\times\frac{\overset{8}{\cancel{56}}}{\underset{1000}{\cancel{3000}}}$　$a=.008$、

故知以文字代數字時、可將種種算理、用簡單之公式表之。而問題之解決、可由公式推算、比算術簡明。

第二節 寒暑表

驗寒暑者、曰寒暑表。利用水銀、或酒精熱漲冷縮之性、以製之。寒暑表必刻劃度數。刻度之法有種種。常用者曰法倫海表、亦曰華氏表。其刻度法、以表置沸水中、水銀受熱上升、定爲二百十二度、以表置冷水中、水銀遇冷下降、定爲三十二度。鹽與冰混合時、其冷比冰更甚、此時溫度、法倫海表名曰0度。0度者、猶言起點也。度之記號爲一小圈、應寫於數字右上角。例如人體溫度爲98度、則寫98°、溫和季節之氣候爲68度、則寫68°。

例(一)、沸水與冰水之溫度差幾度。已知沸水爲212°、冰水爲32°、故二者之差、必爲212° − 32° = 180°。答相差一百八十度。

例(二)、人體常溫度爲98°。比沸水低幾度、比冰水高幾度。 已知沸水爲212°、又知人溫爲 98°、則沸水高於人溫之度數、必爲二者之差、212° − 98° = 114°。答沸水高一百十四度。又人溫與冰水度數之差、98° − 32° = 66°。答人體高六十六度。

例(三)、某地一年中最熱時爲99°、最冷時爲22°、一年中最熱與最冷之差、幾度。99° − 22° = 77° 答相差七

十七度。

雖然、冰與鹽溫和時、在法倫海表、雖定爲0度、而寒地氣候、往往有更冷於此者。是以寒暑表有0下之度數。例如、比冰鹽混合物更冷一度時。名曰零下一度、或曰負一度。若比冰鹽混和物冷七度時、則曰零下七度、或曰負七度。零下度數之寫法、於數字前加負號(－)、以示區別。例如零下七度、寫之爲-7°。此號即減號、然其意義則較廣、應名曰負號。如7°、則指0度以上之七度、名曰正七度、寫時、應以正號(＋)寫於前、如$+7$、(即加號、但其意義較廣。)然平常正號均省寫。

凡數之比0少者、曰負數、必用負號表明之。正數與負數之關係。如右圖、(以寒暑表爲例)

(例四)、某地氣候最熱時爲98°、最冷時爲-6°、最熱與最冷時相差幾度。 自98°至0°、共98度。更自0°至-6°、共6度。若自98°至-6°則共差98°又6°、即一百另四度也。然求差時、用減法。此題若以減法式表之、當爲$98^\circ-(-6^\circ)=104^\circ$。括弧$-6^\circ$爲負六度、括弧前之(－)爲減法

記號。

第三節　負　數

由前節寒暑表問題、知0以下有負數。然數量之有負數者、不僅寒暑表一種。如營業之損益。益爲正數、則損爲負數。經費之有出入、入爲正數、則出爲負數。物體運動時方向有前後左右、前或右爲正數、則後或左爲負數。負數與正數之關係。如下表、

$$-4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad +1 \quad +2 \quad +3 \quad +4$$

凡行加法時、自某定數始、依所加數、向右順數之。例如、一加二、則自定數1始、向右順數二數、至3、卽得和3。行減法時、自被減數始、依減數、向左逆數之。例如、四減三、則自4始、向左逆數三數、至1、卽得差1。此正數加減之理也。又如三減五時、當自3始、逆數五數、至−2、故$3-5=-2$。又如、負一加二、則自−1始、順數二數、至1、故$-1+2=1$

負數在算術中無所用之、然在代數中則頗重要。故數字或文字之有正負號者、名曰代數的數量。二數有相同之正負號者、曰相似數、不同者、曰非相似數。例如$+a$及$+b$爲相似、$+d$及$-c$爲非相似。無論正數負

數、若暫置其正負於不顧、而僅論其數之價值時、則此數字之價值、名曰絕對價值。例如＋3與－4、若不顧其（＋）（－）、而僅論3及4時、則4大於3、故＋3－4之絕對價值、4大於3也。試以前圖證之、＋3表明此數在0之右第三個、－4表明在0之左第四個。此＋3－4爲代數的數量、表明二事。其一、表明在0之左或右、其二、表明在左或右之第幾個。若不顧正負號而言3或4、則僅言離0第三個或第四個，而未曾表明在0之左或右。此絕對價值與代數的數量之不同也。

第四節 代數中常用之符號及式

【＋及－】 算術中之加號減號、在代數中兼用作正號負號、已詳前節。

【×及指數】 算術中求二因數之積時、二因數之中間、常有（×）。代數式中、常省之。例如2×4、必用（×）、不能寫爲24。然$a\times b$、則常寫爲ab。又如$a\times a$、爲二個同因數相乘、不寫aa、而寫a^2。右肩之2名曰指數、即指明二個a相乘之數也。$a\times a\times a$應寫a^3、凡三個同因數相乘時、其指數必用3、又a^2讀曰、『a方』。猶之正方形各邊之長爲a尺、其面積爲a^2方尺、故曰a方。a^3讀曰、『a三

方』。猶之立方體各邊之長爲a尺、其體積爲a^3立方尺、故曰a立方。然通例皆讀曰a三方。又如$X \times (c-d)$平常亦省寫乘號、而爲$X(c-d)$。

【係數】　同正數相加時、如$a+a+a$、則省寫之爲$3a$、意即三個a連加也。此3名曰係數。$3a$即$3 \times a$之省寫。又如$\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{b}$即三個$\frac{a}{b}$連加、亦即$3 \times \frac{a}{b}$。然通常則寫爲$3\frac{a}{b}$、此3爲分數式$\frac{a}{b}$之係數。

【÷】　代數式÷號、常用分數式表之。例如、$c \div b$平常寫爲$\frac{c}{d}$。

【項】　代數式中、用$(+)(-)$號分切者、爲項。如$3a+4d$,$5c-6\frac{c}{b}$、二式、均有二項、$a^2+2ab+b^2$、$a^2-2ab+b^2$、二式、均有三項、$14cd\frac{a}{b}$、則爲一項。

【同類項】　凡二個項中、文字指數均同、而符號及係數不同者、曰同類項、反是者、曰不同類項。例如、$2ab$與$-4ab$、爲同類項、$2a^2b$與$2ab^2$、爲不同類項。前二式文字均爲ab、故爲同類項。後二式、雖係數同、$(+)(-)$號同、文字同、然a^2b與ab^2之指數不同、故爲不同類項。

代數式之文字、爲數字之代表、故可將數字代入代數式中、而求該式之結果。例如、$a=2$、　$b=3$、　$c=4$

下列各式之結果、如何。

（1）　abc、因abc為$a \times b \times c$、故以數字代入、成為$2 \times 3 \times 4 = 24$、

（2）　$a+b+c$、此式三項、表明相加、以數字代入、成為$2+3+4=9$、

（3）　a^2+b^2、此式a^2表二個a相乘、b^2表二個b相乘、即$a \times a + b \times b$、以數字代入、成為$2 \times 2 + 3 \times 3 = 4 + 9 = 13$、

（4）　$a(c-b)$、此式表明c與b之差、以a乘之、即$a \times (c-b)$以數字代入、成為$2 \times (4-3) = 2 \times 1 = 2$、

（5）　$a^2+6abc-\frac{1}{2}ab+5\frac{c}{a}$、此式第 - 項$a^2$、為二個a相乘、即$2 \times 2$。第二項$6abc$、為6、a、b、c連乘、即$6 \times 2 \times 3 \times 4$。第三項$\frac{1}{2}ab$、為$\frac{1}{2}$、a、及b連乘、即$\frac{1}{2} \times 2 \times 3$。第四項$5\frac{c}{a}$、為5乘a分之c、即$5 \times \frac{4}{2}$。以數字代入、全式成為$2 \times 2 + 6 \times 2 \times 3 \times 4 - \frac{1}{2} \times 2 \times 3 + 5 \times \frac{4}{2}$。計算各項、成$4 + 144 - 3 + 10$。求得其結果、為$4 + 144 - 3 + 10 = 155$。

【習　題】

以下各題、$a=1$，$b=2$，$c=3$，$d=4$，$e=5$，$f=0$，

（e讀曰「衣」，f讀曰「衣甫」。）求其結果。

1. $9a+2b+3c-2f$（凡以0乘除時、其結果均爲0。故f=0時、2f爲2×6、即0。）

2. $4e-3a-3b+5c$

3. $8abc-bcd+9cde-def$

4. $4\frac{ac}{b}+8\frac{bc}{d}-5\frac{cd}{c}$

5. $7e+bcd-\frac{3bdc}{2ac}$

6. $abc^2+bcd^2-dea^2+f^3$（f=0時、f^3爲0×0×0、即0。）

第五節 代數式之定則

【交換定則】 凡一數上加若干數、或由之減若干數、或以若干數乘之、或以若干數除之、其若干加數、減數、乘數、除數之順序雖變、其結果同。

例（一）、$a+b=b+a$、 $a+b+c+d=a+c+b+d$、a、b、c、d、四數之順序、無論如何變更、其結果均同。

例（二）、$a-b-e=a-e-b$、減數b、e之順序雖變、其結果同。

例（三）、$abc=bca=bac=cab$、abc三因數之順序、無論如何變更、其結果均同。

例（四）、$f\div e\div d=f\div d\div e$ 除數d與e之順序雖變、其結果同。

【組合定則】 無論加減乘除、一式中有若干加數、減數、乘數、除數時．依次逐一計算、或以加數、減數、乘數,除數之一部分或全部組合爲一．然後計之、其結果同。

例（一）、$a+b+c+d=a+(b+c)+d=a+(b+c+d)=(a+b)+(c+d)$　a,b,c,d,四加數中之二個或三個,均可組合之。

例（二）,$f-e-d-c=f-e-(d+c)=f-(e+d+c)$減數e,d,c三個中,或組合其一部,或組合其全部。惟有一事當注意．減法之減數組合時、括弧內各數、當以加號易減號。試以數字證之。$20-6-8=20-(6+8)=20-14=6$、不用括弧時,6,8,二減數、依次而減。用括弧時、則將二減數組合爲14,然後作一次減之。反之、式中有括弧而欲脫去括弧時,若括弧前有減號．則脫去括弧後,括弧中各號應反之。

例（三）、$(a+b)+(c+d)=a+b+c+d$、$a+b-(c+d-e)=a+b-c-d+e$、第一式括弧前爲正號．故去括弧時,符號仍舊。第二式括弧前爲負號、故去括弧時,括弧中各數之號應反之。d在括弧內爲$+d$,故去括弧時爲$-d$,e在括弧內爲$-e$,故去括弧時爲$+e$。

例(四)、$a+b-c-d=a+(b-c)-d=a+(b-c-d)=(a+b)-(c+d)$、此即加法減法混合式之組合、其理與例(一)例(二)同。

例(五)、$abc=a(bc)=(ab)c$、abc三個因數中、其ab,或bc、或ac、俱可組合之。

例(六)、$a\div b\div c=a\div bc$、二個除數b,c、可組合之。然c之前本爲(÷)號。組合時c與b因相乘。試以數字證之、$30\div3\div2=30\div(2\times3)=30\div6=5$、不用括弧時、3,2二除數、依次而除。二除數組合時、以3與2之積、作一次除30。反之、式中有括弧、而欲脫去括弧時、若括弧之前有(÷)號、則脫去後括弧中各號應反之。

例(七)、$3\times(6\times5)=3\times6\times5$、$f\div(e\times d\div c)=f\div e\div d\times c$、第一式括弧前爲(×)號。故去括弧時、符號仍舊。第二式括弧前爲(÷)號、故去括弧時、括弧中各數之號、應反之。d在括弧內爲×d、故去括弧時爲÷d。c在括弧內爲÷c、故去括弧時爲×c。

例(八)、$a\times d\div c\div e=a\times(d\div c\div e)=(a\times d)\div(c\times e)$、此例爲乘法除法混合式之組合、其理與例(五)例(六)同。

【分配定則】　以一數乘(或除)其他若干數之和(或

差）時．可以一數分別乘（或除）之、而後求其和（或差）、其結果同。

例（一）、$a(b+c)=ab+ac$、以a乘b、c之和．或a乘b、a乘c、然後求其和、其結果同。

例（二）、$a(b-c)=ab-ac$、以a乘b、c之差．或a乘b、a乘c、然後求其差、其結果同。

例（三）、$(b+c)\div a=\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$、以a除b、c之和．或以a除b、a除c、而求其和、其結果同。

例（四）、$(b-c)\div a=\frac{b}{a}-\frac{c}{a}$以a除b、c之差．或以a除b、a除c、而求其差、其結果同。

第六節　數學定理

【一】　有若干數、同與某數相等者．彼此亦相等。例如．甲乙二數、各與丙數相等．則甲數與乙數亦相等．試以數字例之．　$3\times6=18$、　$2\times9=18$、　故$3\times6=2\times9$．

【二】　以相等之數加於相等之數、其和仍相等。例如．ab等於c、de等於f．則$ab+de=c+f$．試以數字例之．$2\times3=6$、$4\times5=20$、　故$2\times3+4\times5=6+20$．

【三】　由相等之數減相等之數、其差仍相等。例如．

$\frac{a}{b}=f$、$\frac{c}{d}=e$、 則$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=f-e$。試以數字例之。 $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$、$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$、 故$\frac{5}{10}-\frac{4}{12}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$。

【四】 以相等之數乘相等之數、其結果仍相等。例如。$a+b=c$、 $\frac{f}{2}=d$、 則$\frac{f}{2}(a+b)=cd$。試以數字例之。$2+3=5$、 $\frac{1}{2}=.5$、故$\frac{1}{2}\times(2+3)=.5\times5$。

【五】 以相等之數除相等之數、其結果仍相等。例如。$X=ab$、 $c+d=e-f$、 則$\frac{c+d}{x}=\frac{e-f}{ab}$、試以數字例之。$8=2\times4$、 $7+9=19-3$、 故$\frac{7+9}{8}=\frac{19-3}{2\times4}$

【六】 某數加他數、又減去之、其結果仍爲某數。例如。$a+b-b=a$、試以數字例之。 $15+20-20=15$。

【七】 某數以他數乘之、又除之、其結果仍爲某數。例如。$b(X-a)\div b=X-a$、試以數字例之。 $5\times(70-50)\div5=70-50$。

以上定理七條、爲事物必然之理、驟視之似無甚價值。然解決代數幾何之問題、則甚爲重要。故宜先承認之。

第二章 簡單之方程式

【等式】 凡二個相等之式、以(=)號連結之、則成等式。例如 $a+b-c-d=(a+b)-(c+d)$, (=)等號

前之式與等號後之式相等、而中間有（$=$）號連結之、成一個等式。等式之前半、名曰左邊。等式之後半、名曰右邊。上例$a+b-c-d$爲等式之左邊、$(a+b)-(c+d)$爲等式之右邊。

【恒等式】　以無論何數代入等式中之各文字、其左右二邊永相等者、曰恒等式。如上例、以無論何數代a、b、c、d四數、式之二邊、永爲相等。故上式爲恒等式。又如、$X(a+b)=aX+bX$、亦爲恒等式。

【方程式】　若等式中之文字、非以特定之數字代之、其式之二邊不能相等者、名曰方程式。例如、$X+5=8$、此亦一等式。然X爲3時、則等式成立。若X不爲3、則此式左右二邊、不能相等。故此非恒等式、而爲方程式。

方程式必含未知數。求方程中之未知數、名曰解方程式。

方程式與恒等式、同爲等式、然其作用則不同。恒等式無論如何、其二邊永等。故恒等式用以表示算數之眞理。例如、$(a+b)-(c+d)=a+b-c-d$、爲表示組合定則之恒等式、$aX+bX=X(a+b)$爲表示分配定則之恒等式。方程式則用以解決問題、而求未知數之

價値者也。

【簡單方程式】 方程式之含有一個未知數、而未知數上無指數者、名曰簡單方程式。嚴密言之、則未知數上之指數爲1。然通例指數1、均省寫之。故簡單方程式、亦名一元一次方程式。言一次者、卽指數1之意也。言一元者、卽含一個未知數之意也。

方程式之作用。爲以之解決問題、求未知數所代之數。試舉例以述其解法。

例(一)、張王二君合得洋六元、張君所得、爲王君所得之二倍。二君各得洋若干。解法如下

設$X=$王君所得元數、$2X=$張君所得元數、

由題意、知$X+2X=6$，　卽$3X=6$。

二邊各以3除之、(見前章第六節五)得$X=6\div3$，　$X=2$。故知王君得2元、張君得2×2元$=4$元、

例(二)、有某數、加12於其二倍。則和爲28。某數爲若干。解法如下

設$X=$某數，$2X=$某數之二倍、

由題意，知$2X+12=28$、

二邊各減12、(見前章第六節三)得$2X+12-12=28-12$　卽$2X=28-12$，$2X=16$。

二邊各以2除、(見前章第六節五)得$2X\div2=16\div2$即$X=16\div2$、　即$X=8$、　故某數爲8。

由上例、知二邊各減12。猶如將已知數$+12$移於右邊、而爲-12。故知解方程式之法、先將未知各項、移於一邊、已知數各項移於他邊、移時須易其符號、(+者易爲－、－者易爲+)二邊各合併之。然後以係數除其兩邊。

例(三)一牧人有羊二羣、其數相同。於甲羣中售去二十一隻、於乙羣中售去七十隻。如是則甲羣爲乙羣之二倍。各羣原有羊幾隻。解法如下。

設$X=$各羣原有羊數、$X-21=$甲羣售餘之數、$X-70=$乙羣售餘之數、

由題意、知$X-21=2(X-70)$、即$X-21=2X-140$、

將X及已知數移之、使各在一邊、移時易其符號、$140-21=2X-X$、

二邊各合併之、得$119=X$、　故各羣原有119隻。

例(四)、甲乙二人所有之銀元數相等。乙與甲銀十五元時。則乙所餘銀之十一倍、等於甲共有銀之三倍。甲乙原有銀各若干。解法如下。

設$X=$甲乙原有銀數、$X-5=$乙與甲五元後所餘之

銀、$X+5=$甲得五元後之總數、

由題意、知$11(X-5)=3(X+5)$　即$11X-55=3X+15$、

移項、得$11X-3X=15+55$、

併之、得$8X=70$、

以係數除二邊、得$X=8.75$、　故各人原有8。75元。

例（五）、有某數、其三倍中減去五十、等於四十中減去其二倍。某數爲何數。解法如下。

設$X=$某數、　$3X=$某數之三倍、　$3X-50=$某數三倍中減五十、$2X=$某數之二倍、$40-2X=$四十中減某數之二倍、

由題意、知$3X-50=40-2X$、

移項、得$3X+2X=40+50$、

併之、得$5X=90$、

以係數除二邊、得$X=18$、　故某數爲18、

例（六）、有某二數、其和爲48、其差爲14。某二數各爲何數。解法如下。

設$X=$大數、$48-X=$小數、（因大小數之和爲48、故48－大數必爲小數、）$X-(48-X)=$二數之差、

由題意、知$X-(48-X)=14$。$X-48+X=14$、

移項、得$X+X=14+48$、

併之、得$2X=62$、

以係數除二邊、得$X=31$、　故大數$=31$、$48-31=17$、故小數$=17$、

例（七）、有某數、其三分之一、與其四分之一相加。爲14。某數爲何數。解法如下．

設$X=$某數、$\frac{1}{2}X=$某數之三分之一、$\frac{1}{4}X=$某數之四分之一、

由題意、知$\frac{1}{3}X+\frac{1}{4}X=14$、

併之、得$\frac{4}{12}X+\frac{3}{12}X=14$、　即$\frac{7}{12}X=14$、

以係數除二邊、得$X=14\div\frac{7}{12}$、　即$X=\frac{12}{\cancel{7}}\times\overset{2}{\cancel{14}}$、

即$X=24$、　故某數爲24、

例（八）、甲乙二人、今年甲之年歲、爲乙之二倍。二十二年以前、甲之年歲爲乙之三倍。今年甲乙之年歲各若干。解法如下．

設$X=$乙今年歲數、$2X=$甲今年歲數、$X-22=$乙22年前歲數、$2X-22=$甲22年前歲數、

由題意、知$3(X-22)=2X-22$、　即$3X-66=2X-22$、

移項、得$3X-2X=66-22$、

併之、得$X=44$、故知乙今年44歲。$2X=88$ 故知甲今年88歲。

例（九）、某人八年後之歲數、爲其八年前歲數之三倍。某人今年幾歲。解法如下。

設$X=$今年歲數、$X+8=$八年後之歲數 $X-8=$八年前之歲數、

由題意。知$3(X-8)=X+8$、 即$3X-24=X+8$、

移項、得$3X-X=8+24$、

併之、得$2X=32$、

以係數除二邊、得$X=16$、 故知今年16歲。

例（十）、有一工事、甲一人爲之、五日而畢。乙一人爲之、四日而畢。若二人合爲之、幾日可畢。解法如下。

甲五日做完、故每日平均做$\frac{1}{5}$。乙四日做完、故每日平均做$\frac{1}{4}$。

設$X=$二人合作完之日數、$\frac{1}{x}=$二人每日平均合作之事、故知$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{1}{x}$

不必移項、併之、得$\frac{9}{20}=\frac{1}{x}$、

二邊各以X乘之、得$\frac{9}{20}X=1$、

以係數除二邊、得$X=1\div\frac{9}{20}$、 即$X=2\frac{2}{9}$、

故知二人合作、須$2\frac{2}{9}$日、

例(十一)、甲於五時內、可行三十一里半。自某地動身後、經八時、乙追之。乙於三時內可行二十二里半。乙經幾時後、可追及甲。解法如下.

甲五時內行$31\frac{1}{2}$里、則一時內必行$31\frac{1}{2}$里$\div 5=6\frac{3}{10}$里、

乙三時內行$22\frac{1}{2}$里、則一時內必行$22\frac{1}{2}$里$\div 3=7\frac{1}{2}$里、

設$X=$乙追及甲之時數、即乙所行之時數、

$X+8=$甲所行之時數、

$6\frac{3}{10}(X+8)=$甲共行之路、

$7\frac{1}{2}X=$乙共行之路、

乙追及甲時、二人所行路必等。故

$7\frac{1}{2}X=6\frac{3}{10}(X+8)$、　即$7\frac{1}{2}X=6\frac{3}{10}X+50\frac{2}{5}$、

移項、得$7\frac{1}{2}X-6\frac{3}{10}X=50\frac{2}{5}$、

併之、得$1\frac{1}{5}X=50\frac{2}{5}$、

以係數除二邊、得$X=50\frac{2}{5}\div 1\frac{1}{5}$、　即$X=42$、

故知乙共行42時後、可以追及甲。

【習　題】

一，某樹高一丈五尺。爲風吹折。折斷之部分，適爲未折部分之四倍。各部長各若干。

二，於某數加46時，其結果爲原數之三倍。原數爲何數。

三，父子二人之年歲，共爲八十。若子之年歲，爲今之二倍，則比父

年大十歲。父子年歲各幾何。

四，甲有銀七十二元，乙有五十二元。乙與甲若干元後，甲共有之銀數，爲乙所餘銀之三倍。乙與甲銀幾元。

五，父今年三十歲，子今年六歲。幾年後，父之年歲爲子之年歲之二倍。

六，某數之三分之一，比其四分之一，大十四。某數爲何數。

七，某工事，甲一人爲之，五日完。乙一人爲之，七日半完。丙一人爲之，六日完。若三人合爲之，幾日完。

八，甲於五時內，可行七十里。自某地動身後，經八時，乙追之。乙於三時，可行五十里。乙行幾時後，可追及甲。

第三章 加 法

由第一章第三節所述、知凡行正數加法時，須自第一加數所在之點始、依所加之數、向右順數、其所在點即爲和。例如，正3加正4，則自 $+3$ 始、向右順數三數至 $+7$、此 $+7$ 即正3加正4之和也。一式中表明正負號外、又須同時表明加減號時，須將正負號寫於括弧內。故上例詳寫之、當爲 $+3+(+4)=+7$。又如 $+4+(-3)$ 一式、可先由交換定則、（見第一章第五節）變成 $-3+(+4)$。然後自 -3 始、向右順數四數、至 $+1$，即爲 -3 與 $+4$ 之和。$+4+(-3)=-3+(+4)=+1$ 又如

$-3+(-4)$、則所加者為負數。若仍向右順數、則對於正數為增加、而對於負數反見其減少。然題意欲負數增加。故應向負數方面數之、即向左逆數之也。乃自-3始、向左方負數方面、逆數四數、至-7。此即-3與-4之和。試將上例$+4+(-3)$、不用交換定則、而向負數方面數之、亦得$+1$。又如$+3+(-4)$、則自$+3$始、向負數方面逆數四數、得-1。將以上各例列舉之。

$$+3+(+4)=+7。\qquad -3+(+4)=+1。$$
$$-3+(-4)=-7。\qquad +3+(-4)=-1。$$

由此知代數之加法。正負號同者、以各加數絕對價值之和為和、而冠以原有之正負號。其正負號不同者、以各加數之差為和、而冠以大數原有之正負號。

例(一)、$3a+5a+2a=10a$、 此例三個加數均為正數、其和即絕對價值$3a$,$5a$,$2a$之和。而和$10a$當為正數。

例(二)、$-2c+(-3c)+(-4c)=-9c$ 此例三個加數均為負數、其和即絕對價值$2c$,$3c$,$4c$之和。而和$9c$當為負數。

例(三)、$+7a+(-6a)+(+11a)=+12a$ 此例三個加數中、$7a$與$11a$同為正數。如例(一)、求其和、為$+18a$。次求$+18a$與$-6a$之和。二者正負號不同、故以其

絕對價値18a、6a之差12a、爲其和。大數18a爲正數、故12a亦爲正數。

例(四)、$+14a+(-5a)+(-18a)=-9a$ 此例三個加數中、5a、18a同爲負數。如例(二)求其和、爲$-23a$。次求$-23a$與$+14a$之和. 二者正負號不同、故以其絕對價値23a、14a之差9a、爲其和。大數23a爲負數、故9a亦爲負數。

例(五)、$+5a+(-2b)+(+3a)+(+b)$ 此例四加數中、a與b不同類。凡非同類項、不能合併爲一項。故將含a之二項、照例(一)加之、爲$+8a$。含b之二項、照例(四)加之、爲$-b$。後將二個結果連之、爲$8a-b$。

由上五例、得代數加法之法則。如下。同類項之相似者、(即正負號同者、見第三節。)以其絕對價値之和、(即各係數之和、文字仍舊。)爲和。而冠以原有之正負號。同類項之不相似者、以其絕對價値之差、(即各係數之差、文字仍舊。)爲和. 而冠以大數原有之正負號。末將不同類之項、連結之。

如有若干式、每式含不同類之項數個者. 其加法可將各式之同類項、分別加之。

例(六)、求　$2a^3-3a^2b+4ab^2+b^3$、　$a^3+4a^2b-7ab^2-$

$2b^3$、　$-3a^3+a^2b-3ab^2-4b^3$、　$2a^3+2a^2b+6ab^2-3b^3$、

四式之和。此例各式皆四項、而皆非同類。故依a^3、a^2b、ab^2及b^3四類寫之、使各個之同類項上下相對、然後如上法加之。形式如下．

$$
\begin{array}{rrrr}
2a^3 & -3a^2b & +4ab^2 & +b^3 \\
a^3 & +4a^2b & -7ab^2 & -2b^3 \\
-3a^3 & +a^2b & -3ab^2 & -4b^3 \\
2a^3 & +2a^2b & +6ab^2 & -3b^3 \\
\hline
2a^3 & +4a^2b & & -8b^3
\end{array}
$$

b^3類、b^3-9b^3、絕對價值之差$8b^3$、大數為負數

ab^2類、$+10ab-10ab^2$絕對價值之差為0、故空之。

a^2b類、$+7a^2b-3a^2b$、絕對價值之差$4a^2b$、大數為正數。

a^3類、$+5a^3-3a^3$、絕對價值之差$2a^3$、大數為正數。

例(七)、求　$6X^2y+2$、　X^2y-y^3、　$-2X^2y+6y^3-1$、$-4X^2y+2Xy^2+5$、　$-2X^2y-5$、

五式之和。此例(y讀曰『槐哀』)各式中、共有X^2y、Xy^2、y^3、及純數字之四類。依類寫之、使各個同類者上下相對、某項缺該類者空之、然後依前法加之。形式如下。

$$\begin{array}{rrrr}
6X^2y & & & +2 \\
X^2y & & -y^3 & \\
-2X^2y & & +6y^3 & -1 \\
-4X^2y & +2Xy^2 & & +5 \\
-2X^2y & & & -5 \\
\hline
-X^2y & +2Xy^2 & +5y^3 & +1
\end{array}$$

數字類、$+7-6$、絕對價値之差1、大數爲正數。

y^3類、$+6y^3-y^3$、絕對價値之差$5y^3$、大數爲正數。

Xy^2類、只有一數、故仍舊。

X^2y類、$+7X^2y-8X^2y$絕對價値之差X^2y、大數爲負數。

【習題】

求以下各題之和。

(1)　$+7ab$,　$-5ab$.　　(2)　$+5ab$,　$-5ab$.

(3)　$+5a$,　$-3b$,　$+4a$,　$-7b$.

(4)　$5a+3b+c$,　$3a+5b+3c$,　$a+3b+5c$.

(5)　$a+b-c$,　$b+c-a$,　$c+a-b$,　$a+b-c$.

(6)　X^3-4X^2+5X-3,　$2X^3-7X^2-14X+5$,　$-X^3+9X+8$,　$-7X^2+17$.

第四章　減法

正數之減法、卽欲求正數之減少。故如第一章第三

節之圖、行正數減法時、由被減數所在點、向左逆數之。若減數爲負數時、而仍向左逆數．則非減少負數、而反會加負數矣。故欲負數減少、須向0之方向數之．即向右順數之也。

例（一）、$+4-(+3)=+1$、所減爲正數．故自$+4$始、向左逆數三數、至$+1$。

例（二）、$-4-(-3)=-1$、所減爲負數、故自-4始、向右順數三數、至-1。

例（三）、$+4-(-3)=+7$、所減爲負數．故自$+4$始、向右順數三數、至$+7$。

例（四）、$-4-(+3)=-7$、所減爲正數、故自-4始、向左逆數三數、至-7。

試將以上四例、與加法比較之。如下．

$$\begin{cases}\text{減法}\ +4-(+3)=+1,\\ \text{加法}\ +4+(-3)=+1,\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{減法}\ +4-(-3)=+7,\\ \text{加法}\ +4+(+3)=+7,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\text{減法}\ -4-(+3)=-7,\\ \text{加法}\ -4+(-3)=-7,\end{cases}\qquad \begin{cases}\text{減法}\ -4-(-3)=-1,\\ \text{加法}\ -4+(+3)=-1,\end{cases}$$

由此比較、知減法之減數、與加法之加數、正負號相反者．其結果同。故行代數減法時．可將減數之正負號易反之、然後照前章行加法、即得其差。

例(一)、$-7ay-(-3ay)$、將減數之負號易反之、爲$+3ay$、與$-7ay$相加、得$-4ay$、即所求之差。

例(二)、自$4X^3-3X^2y-Xy^2+2y^3$、減$2X^3-X^2y+5Xy^2-3y^3$、寫式似加法。

$$\begin{array}{r} 4X^3-3X^2y-Xy^2+2y^3 \\ 2X^3-X^2y+5Xy^2-3y^3 \\ \hline 2X^3-2X^2y-6Xy^2+5y^3 \end{array}$$

y^3類、減數$-3y^3$。易反其號、爲$+3y^3$。然後求$+2y^3$與$+3y^3$之和。得$+5y^3$。

Xy^2類、減數$+5Xy^2$。易反其號、爲$-5Xy^2$。然後求$-Xy^2$與$-5Xy^2$之和、得$-6Xy^2$。

X^2y類、減數X^2y。易反其號、爲$+X^2y$。然後求$-3X^2y$與$+X^2y$之和、得$-2X^2y$。

X^3類、減數$2X^3$。易反其號、爲$-2X^3$。然後求$4X^3-2X^3$之和。得$2X^3$。

減數正負易反之法、只須計算時暗記之、不必用筆將減數符號改動。不同類者、不能相減、只能易反符號、而連結之。例如$a-(-b)=a+b$。

【習題】

(1) $17aX^3-(-24aX^3)=$。 (2) $2ab^2y-(+ab^2y)=$。

(3) $3a-(+2b)-(-4c=$.

(4) 自$6a-2b-c$,減$2a-2b+3c$.

(5) 自$7X^2-8X-1$,減$5X^2-6X+3$。

(6) 自$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$,減$-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$。

(7) 自$a^2b^2-a^2bc-8ab^2c-a^2c^2+abc^2-6b^2c^2$減$2a^2bc-5ab^2c+2abc^2-5b^2c^2$.

第五章 乘 法

乘法、爲求某數若干倍之方法。亦可視若同數加法之簡法。例如$3\times5=15$、實卽$5+5+5=15$。故乘數爲正數時、意卽將被乘數連加之。例如$3\times(+5)$、卽三個$+5$連加.其積當爲$+15$。又如$3\times(-5)$、卽三個-5相加.其積當爲-15。乘數爲負數時、則宜將被乘數連減之。例如$98\times875=(100-2)\times875$。以100乘875、意卽將百個875連加之。以$-2$乘875、意卽將二個875連減之。因百個875連加、爲87500、連減二個875、爲

$$\begin{array}{r} 87500 \\ -875 \\ \hline 86625 \\ -875 \\ \hline 85750 \end{array}$$

依同理故知-3×5、爲三個5連減.卽共減15。是以-3×5之積、應爲-15。又如$-3\times(-5)$、意卽三個$-$

5連減。由代數減法、知$-(-5)-(-5)-(-5)$、其結果爲$+15$。試將以上四例、列舉之。

$$+3\times(+5)=+(+5)+(+5)+(+5)=+15.$$

$$+3\times(-5)=+(-5)+(-5)+(-5)=-15.$$

$$-3\times(+5)=-(+5)-(+5)-(+5)=-15.$$

$$-3\times(-5)=-(-5)-(-5)-(-5)=+15.$$

由上四例、知乘法之因數、正負號相似者、其積爲正數。正負號不相似者、其積爲負數。

數字相乘時、其積成一新數字。例如$3\times5=15$。然文字相乘時、不能得新文字。仍舊而已。例如$a\times b=ab$、$ab\times cd=abcd$、式之前有($\times$)號者、表明($\times$)號前後各爲一因數。式之後不用($\times$)號者、表明各因數之積。然文字則仍未變也。惟逢同文字相乘時、則不必將數個同文字一一寫出、只須將其文字之個數、用指數指明可矣。例如$a\times a=aa=a^2$、$a\times a^2=aa^2=a^3$、$a^2\times a^2=a^2a^2=aaaa=a^4$、(指數4時、讀曰四方。指數5時、讀曰五方。餘類推之。)若文字之前、又有係數、則係數爲數字。可照算術乘法、將其積寫出。

由是得代數乘法之法則。如下。將係數相乘、文字之不同者連寫之、同者用指數指明其個數。正負號相似

者、積爲正數。正負號不相似者、積爲負數。例如$5ab\times 9a=$、係數之積爲45。二因數各有a之同文字、積中a應有二個。用指數2指明之、爲a^2。b爲不同文字、連寫之。並寫係數、爲$45a^2b$。二因數之正負號爲相似者、故$45a^2b$爲正數。又如$-7a^2b\times 2ac=$、係數之積爲14。二因數各有a之同文字。一爲a^2、一爲a、積共三個a。用指數3指明之、爲a^3。其b及c則爲不同文字。連寫之、爲a^3bc。並寫係數爲$14a^3bc$。二因數之正負號爲非相似者、故$14a^3bc$爲負數、$-14a^3bc$。

被乘數爲含有幾個不同類項之式（省曰多項式、前例名曰單項式。）時、可將乘數、與被乘數之各項、分別乘之。然後將各項之積、連結之。

例如$-3X^2y\times(-4Xy^2+5X^2y+8X^3)=$

$$\begin{array}{r}-4Xy^2+5X^2y+8X^3\\ -3X^2y\\ \hline 12X^3y^3-15X^4y^2-24X^5y\end{array}$$

乘數乘第三項。係數24、X五個、y一個、符號不相似、故爲$-24X_5y$。

乘數乘第二項。係數15、X四個、y二個、符號不相似、故爲$-15X^4y^2$。

乘數乘第一項。係數12、X三個、y亦三個、符號相似、故爲$12X^3y^3$。

乘數與被乘數、均爲含有幾個不同類項之式時、可將乘數之各項、照上法、乘被乘數。然後將其各部分之積加之、

例(一)、$(5a-6b)\times(3a-4b)=$。

$$
\begin{array}{lr}
 & 3a-4b \\
 & 5a-6b \\
\hline
5a\text{乘}3a-4b\text{之積}\cdots & 15a^2-20ab \qquad \\
6b\text{乘}3a-4b\text{之積}\cdots\cdots & -18ab+24b^2 \\
\hline
\text{二部分積之和}\cdots\cdots & 15a^2-38ab+24b^2
\end{array}
$$

例(二)、$5X^2-6X^3+4X+3$、以$-5X+4-6X^2$乘之。

因欲各項乘完後、將各部分積加時、便利起見。故計算時第二第三部分積中某項、有與第一部分積之某項同類者、須上下相對、若於計算之前、先依乘數被乘數中某文字之指數、順次列之。則部分積易於上下相對。此題可依照X之係數、順次列之。以X指數最大者居首時、名曰降次排列。以X指數之最小者居首時、名曰昇次排列。

(甲)降次排列、$-6X^3+5X^2+4X+3$、以$-6X^2-5X+4$乘之。

（乙）昇次排列、$3+4X+5X^2-6X^3$、以$4-5X-6X^2$乘之。

（甲）降次排列時之計算法、

$$
\begin{array}{lrrrrrr}
 & & & -6x^3+5x^2+4x+3 \\
 & & & -6x^2-5x\ +4 \\
\hline
-6x^2\text{乘}-6x^3+5x^2+4x+3\text{之積}\cdots & 36x^5-30x^4-24x^3-18x^2 \\
-5x\ \text{乘}-6x^3+5x^2+4x+3\text{之積}\cdots & 30x^4-25x^3-20x^2-15x \\
4\ \text{乘}-6x^3+5x^2+4x+3\text{之積}\cdots & -24x^3+20x^2+16x+12 \\
\hline
\text{三部分積之和}\cdots & 36x^5\quad -73x^3-18x^2+x\quad 21+
\end{array}
$$

（乙）昇次排列時之計算法、

$$
\begin{array}{lr}
 & 3+4x+5x^2-6x^3 \\
 & 4-5x-6x^2 \\
\hline
4\ \text{乘}3+4x+5x^2-6x^3\text{之積}\cdots & 12+16x+20x^2-24x^3 \\
-5x\ \text{乘}3+4x+5x^2-6x^3\text{之積}\cdots & -15x-20x^2-25x^3+30x^4 \\
-6x^2\text{乘}3+4x+5x^2-6x^3\text{之積}\cdots & -18x^2-24x^3-30x^4+36x \\
\hline
\text{二部分積之和}\cdots & 12+x\quad -18x^2-73x^3\quad +36x^5
\end{array}
$$

無論如何排列、其結果均同。須知排列者爲計算時之便利計、非方法上之有不同也。

二個多項式相乘時、往往將二式各加一括弧、而省略（×）號。如前例、出題時、往往寫作$(-5X+4-6X^2)(5X^2-6X^3+4X+3)$、

【習　　題】

(1)　$7a\times5b=$。　　　(2)　$-3ab^2c\times(-a^2bd)=$。

(3)　$3ab(4a^2-3b)=$。

(4) $-3b^4(-9a^5+3a^3b^2-4a^2b^3-b^5)$

(5) $(X^2+5)(X^2-4)=$. (6) $(a^2-X^2)(a^4-a^2X^2+X^4)=$.

(7) $(-5b+7a)(2b^2+3ab-a^2)=$.

(8) $(X^3-2-2X)(1+2X+4^4-3X^2)=$.

(9) $(2y+X)(2X-y)=$.

(10) $(a+b)(-ab+a^2+b^2)=$.

第六章 除 法

由第五章之首、知

$+3\times(+5)=+15$ 故 $+15\div(+3)=+5$.

$+3\times(-5)=-15$ 故 $-15\div(+3)=-5$.

$-3\times(+5)=-15$ 故 $-15\div(-3)=+5$.

$-3\times(-5)=+15$ 故 $+15\div(-3)=-5$.

故知除數與被除數之正負數相似時、其商爲正數．不相似時、其商爲負數。

代數式之除法、常用分數式表之。例如 $+a^2b\div(-ab)=\frac{a^2b}{-ab}$. 數字相除時、商成一新數字。例如 $15\div3=5$。然文字相除時、則不能得新文字、而同文字則可以相消。例如 $\frac{abc}{bc}=\frac{a\times b\times c}{b\times c}$. 分子分母之同因數、可相約。成爲 $\frac{a\times\cancel{b}\times\cancel{c}}{\cancel{b}\times\cancel{c}}=a$。有係數時、因係數爲數字。故可照算術除法、求其

商。若除數被除數有指數不同之同文字時。則商之文字上之指數、爲被除數與除數中文字上指數之差。例如$\frac{a^5}{a^2}=\frac{a\times a\times a\times a\times a}{a\times a}=a^3$。由是、得代數除法之法則、如下。

以除數之係數、除被除數之係數、爲商之係數。由被除數中、消去除數中所有同指數之同文字。消餘之文字、爲商中之文字。若其文字之指數不同時。商中文字仍舊。而以被除數中該文字之指數、與除數中該文字之指數、求其差。爲商中該文字之指數。次視符號。相似者、商爲正數。不相似者、商爲負數。例如$\frac{35a^3bcd}{5a^2bc}=$ 係數、5除35、爲7。a^2與a^3、爲同文字之指數不同者、求其指數之差、爲商中文字之指數、即a。bc二文字、同指數相消。被除數各文字、除a外、消餘d。除數與被除數符號相似、故商爲正數、得7ad。

又如$\frac{-18x^3y^2}{9xy^2}=$　係數相除爲2。X除X^3爲X^2。y^2除y^2、相消。除數被除數符號不相似、故商爲負數。成$-2X^2$。

被除數爲多項式時、可將除數分別除被除數之各項。然後將各項之商、連結之。例如$\frac{21ax^2-18bx+15cxy}{-3x}=$

$$\begin{array}{r} -7aX+6b-5cy \\ -3X\overline{)21aX^2-18bX+15cXy} \end{array}$$

除數除第一項、係數7、文字相消爲aX、符號不相似、

故為 $-7aX$。

除數除第二項。係數6、文字相消為b、符號相似、故為 $+6b$。

除數除第三項。係數5、文字相消為cy、符號不相似、故為 $-5cy$。

除數與被除數均為多項式時、以除數之第一項、除被除數之第一項、得商之第一項。以商乘除數之各項、而由被除數中減之。如有餘數、再如法除之。

例(一)。$(a^2-b^2)\div(a+b)=$

$$a+b\,\overline{)\,a^2-b^2}$$

以a除 a^2、得a、寫於商之第一項處。以a乘 $a+b$、而自被除數減之。如下。

$$\begin{array}{rl} & \quad a \\ a+b\,) & \overline{a^2-b^2} \\ a(a+b)= & \underline{a^2+ab} \\ \text{減餘} & \quad -ab-b^2 \end{array}$$

以a除 $-ab$、得 $-b$。寫於商之第二項處。以b乘 $a+b$、而自被數除減之。如下。

$$\begin{array}{rl} & \quad a-b \\ a+b\,) & \overline{a^2-b^2} \end{array}$$

$$
\begin{array}{ll}
a(a+b)=a^2+ab & \\
\quad\text{減餘} & -ab-b^2 \\
b(a+b)= & -ab-b^2
\end{array}
$$

減之適盡。故商爲$a-b$。

（例二）$\frac{4a^4X^2-4a^2X^4+X^6-a^6}{X^2-a^2}=$。爲減時便利計、宜照X之降次排列(參看多項式之乘法)之。$\frac{x^6-4a^2x^4+4a^4x^2-a^6}{x^2-a^2}$

然後照上法除之。

$$
\begin{array}{lr}
 & X^4-3a^2X^2+7a^4 \\
X^2-a^2\;) & X^6-4a^2X^4+4a^4X^2-a^6 \\
X^4(X^2-a^2)= & X^6-a^2X^4 \\
\quad\text{減　餘} & -3a^2X^4+4a^4X^2 \\
-3a^2X^2(X^2-a^2)= & -3a^2X^4-3a^4X^2 \\
\quad\text{減　餘} & +7a^4X^2-a^6 \\
7a^4(X^2-a^2)= & +7a^4X^2-a^6
\end{array}
$$

適盡。故商爲$X^4-3a^2X^2+7a^4$。

【習題】

（1）$\frac{21X^2y^4}{3Xy^2}=$　　（2）$\frac{-24a^5b^3X}{3a^2b^2}=$

（3）$\frac{8ab-12ac}{4a}=$　　（4）$\frac{12X^5-8X^3+4X}{4X}=$

(5) $\frac{3a^4-2a^5b^3-a^6b^3}{a^4}=$　　(6) $\frac{X^2-7X+12}{X-3}=$

(7) $\frac{X^6-1}{X-1}=$　　(8) $\frac{2a^4+27ab^3-81b^4}{a+3b}=$

(9) $\frac{26+X^4-15X^4}{9+X^2+5X}=$　　(10) $\frac{a^3-2ab^2+b^3}{-b+a}=$

第七章　乘方及開方

已知正方形之一邊、而求其面積時。可以二個同因數相乘。已知立方體之一邊、而求其體積時。可以三個同因數相乘。例如正方形之一邊爲 a 尺、則其面積爲 a^2 方尺。立方體之一邊爲 a 尺、則其體積爲 a^3 立方尺。此等方法、名曰乘方。反之、已知正方形之面積爲 a^2 方尺時、可以知其各邊爲 a 尺。已知立方體之體積爲 a^3 立方尺時、可以知其各邊爲 a 尺。此等方法、名曰開方。

正方形求面積、曰二乘方、亦曰平方。立方體求體積、曰三乘方、亦曰立方。二乘方用指數2、三乘方用指數3。例如 $a\times a=a^2$、$a\times a\times a=a^3$、反之、求正方形之邊、曰開平方。求立方體之邊、曰開立方。開平方所得結果、曰平方根。開立方所得結果、曰立方根。開平方之符號、爲 $\sqrt{\ }$。開立方之符號、爲 $\sqrt[3]{\ }$。例如 $\sqrt{9}$、即9之平

方根、爲3。又如 $\sqrt[3]{8}$、即8之立方根、爲2。然有二位數時、宜於數上作一橫線、以代括弧。例如 $\sqrt{\overline{16}} = \sqrt{(16)}$、即16之平方根、爲4。又如 $\sqrt[3]{\overline{64}} = \sqrt[3]{(64)}$、即64之立方根、爲4。下表爲十以下各數之平方、三乘方根表。須熟習之。

方根（平方根／立方根）	二乘方（平方）	三乘方（立方）
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64
5	25	125
6	36	216
7	49	343
8	64	512
9	81	729
10	100	1000

第一節　二乘方及開平方

單位數或單項式之二乘方及開平方、甚爲簡單。關

於數字者、如上表。關於文字者、只須注意各文字之指數、可由視察得其結果。例如 $5^2=25$、 $\sqrt{36}=6$、 $(ab)^2=a^2b^2$、 $\sqrt{a^2b^2}=ab$、多位數及多項式之乘方、可以二個同因數乘之。

例(一)、$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$、

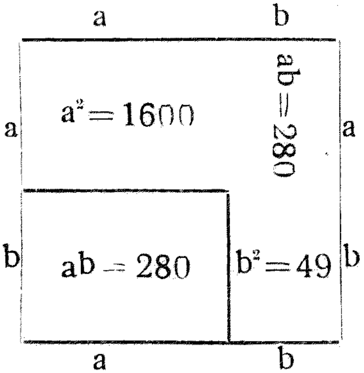
$$\begin{array}{rrr} a & + & b \\ a & + & b \\ \hline a^2 & + & ab \\ & + & ab+b^2 \\ \hline a^2 & + & 2ab+b^2 \end{array}$$

例(二)、$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$、

$$\begin{array}{rrr} a & - & b \\ a & - & b \\ a^2 & - & ab \\ & - & ab+b^2 \\ a^2 & - & 2ab+b^2 \end{array}$$

以數字代入例(一)、設 $a=10$、 $b=3$、 則 $(10+3)^2=10^2+2\times10\times3+3^2=100+60+9=169$、

例(三)、$\sqrt{2209}$ 多位數之開平方法、根據於例(一)之定理。如下。



$a^2 = 1600$　　　609

$ab = 2802$

$ab = 560$

$b^2 = 492$

$ab + b^2 =$　　　609

$b = 7$
$a = 40$
2209

故 $a+b=49$、

開平方第一步、須定位。已知 $1^2=1$、$10^2=100$、故知根一位時、乘方必在100以下。卽至多二位。又知 $10^2=100$、$100^2=10000$、故知根二位時、乘方在100以上、10000以下。卽至少三位、至多四位。是以定位時、自右方始、每二位爲一分節。由分節之數、可以知根之位數。如前例、定位如下22'09、

第二步　自左方第一分節始、求得其中所含最大之方根。前例第一分節22中、所含最大之方根爲4。因方根5時、乘方須25。比22大矣。乃寫其根於第一分節上。此爲根之第一位。如下。

$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 22'09 \end{array}$$

次寫第一根之乘方數(即a^2)於第一分節下、而減之。如下。

$$\begin{array}{l} 4 \\ \hline 22'09 \\ 16 \\ \hline 6 \end{array} \qquad \text{併入第二節。爲} \qquad \begin{array}{l} 4 \\ \hline 22'09 \\ 16 \\ \hline 6\ 09 \end{array}$$

第三步　第一根用二十乘之、寫於餘數之左方．且以線界之。如下。因第一根對於第二根爲十倍、故第一根之4、對於第二根、實爲40。以二十乘4、即以二乘40。即2a也。

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ & 22'09 \\ & 16 \\ \hline 20\times4=80 & 6\ 09 \end{array}$$

以二十乘第一根之積、(即2a)約609、得第二根7。(即b)寫於第二分節上。如下。

$$\begin{array}{r|l} & 4\ \ 7 \\ \hline & 22'09 \\ & 16 \\ \hline 20\times4=80 & 6\ 09 \end{array}$$

此609爲2ab及b^2之和。80爲2a。以2a約$2ab+b^2$、可

得b。若以b乘2a、則僅爲2ab。尙餘b^2、。故宜將b加於2a、使成2a＋b。即於80、上加第二根7。如下。

$$\begin{array}{r|l} & 4\ \ 7 \\ \hline & 22'09 \\ & 16 \\ \hline 20\times4=80 & 6\ 09 \\ +\ 7 & \\ \hline 87 & \end{array}$$

既得2a＋b、然後以b乘之。即爲$2ab+b^2$矣、故以第二根7乘87、得609。減之、適盡。如下。

$$\begin{array}{r|l} & 4\ \ 7 \\ \hline & 22'09 \\ & 16 \\ \hline 20\times4=80 & 6\ 09 \\ +7 & 6\ 09 \\ \hline 87 & \quad 0 \end{array}$$

故 $\sqrt{2209}=47$、

例（四）、 $\sqrt{576}=$ 　此題定位、爲5'76。求第一根、如 $\begin{array}{l}2\\ \hline 5'76\end{array}$。減去第一根之乘方、爲 $\begin{array}{l}2\\ \hline 5'76\\ 4\\ \hline 1\ 76\end{array}$。以20乘第一根、爲

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline & 5'76 \\ & 4 \\ \hline 20\times2=40 & 1\ 76 \end{array}$$

以40約176、得第二根4。寫如

```
             2  4
            5'76
            4
20×2=40 | 1 76
```

加第二根於 40、如

```
      2  4
     5'76
     4
 40 | 1 76
  4 |
 44 |
```

以第二根乘44、而減之。得

```
      2  4
     5'76
     4
 40 | 1 76
  4 | 1 76
 44 |
```

適盡。故　$\sqrt{576}=24$、

例(五)、$\sqrt{.06250}$ 此題係小數。其定位法、當自小數點之右方始、每二位爲一分節。然後如前法開之。如下。

```
             .2  5
            .06'25'0
               4
20×2=40 |    2 25
   +  5 |    2 25
     45 |
```

適盡。故 $\sqrt{.06250}=.25$、

(例六)、$\sqrt{532.2249}$ 此題爲帶小數。其開平方法定位時、自小數點始、整數向左、小數向右、每二位爲一小分節。然後照前法開之。

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\quad 3 \\
 & \overline{5'32.22'49} \\
 & 4 \\ \cline{2-2}
20\times 2=40 & 1\ 32 \\
+3 & \\ \cline{1-1}
43 & 1\ 29 \\ \cline{2-2}
 & \quad 3\ 22 \\
20\times 23=460 &
\end{array}
$$

以460約322、不能得1。故第三根爲0。然後以20乘230、約之。如

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2\quad 3\ .0\quad 7 \\
 & \overline{5'32.22'49} \\
 & 4 \\ \cline{2-2}
20\times 2=40 & 1\ 32 \\
+3 & \\ \cline{1-1}
43 & 1\ 29 \\ \cline{2-2}
 & \quad 3\ 22\ 49 \\
20\times 230=4600 & \\
+7 & \\ \cline{1-1}
4607 & \quad 3\ 22\ 49 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

適盡。故 $\sqrt{532.2249}=23.07$。

例(七)、$\sqrt{81a^2+90ab-25b^2}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 9a-5b \\
 & \overline{81a^2-90ab+25b^2} \\
 & 81a^2 \\ \cline{2-2}
2\times 9a=18a & -90ab+25b^2 \\
18a-5b & -90ab+\quad b^2
\end{array}
$$

方法相似。惟（一）不必定位。（二）第一根以2乘、而不以20乘。因a對於b、非一定有十倍之關係故也。（三）須注意符號之正負。此例90ab爲負數、18a爲正數、故第二根必爲負。否則相似者相乘之積、不能得$-90ab$也。

代數式之開平方法、其簡易者可如上法求之。

【習　　題】

(1) $(18)^2$.　(2) $(a+b)^2$.　(3) $(22)^2$.

(4) $(a-9)^2$.　(5) $\sqrt{64X^2y^2}$.　(6) $\sqrt{49a^2y^2}$.

(7) $\sqrt{3721}$.　(8) $\sqrt{5041}$.　(9) $\sqrt{.2809}$.

(10) $\sqrt{110.25}$.　(11) $\sqrt{144X^2+48Xy+4y^2}$.

(12) $\sqrt{121c^2-66cd+9d^2}$.

第二節　三乘方及開立方

單位數或單項式之三乘方、及開立方、甚爲簡單。關於數字者、如本章首之表、關於文字者、只須注意各文字之指數、可由視察得其結果。例如$5^3=125$、$\sqrt[3]{512}=8$ $(Xy)^3=X^3y^3$、$\sqrt[3]{a^3b^3}=ab$。

多位數或多項式之乘方、可以三個同因數連乘之。

例（一）、$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$。

$$
\begin{array}{rl}
 & a + b \\
 & a + b \\
\hline
 & a^2 + ab \\
 & \quad + ab + b^2 \\
\hline
(a+b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \\
 & a + b \\
\hline
 & a^3 + 2a^2b + ab^2 \\
 & \quad a^2b + 2ab^2 + b^3 \\
\hline
(a+b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3
\end{array}
$$

以數字代入例（一）、設 $a=10$、$b=2$、則

$(10+2)^3=(10)^3+3\times(10)^2\times2+3\times10\times2^2+2^3=$

$1000+600+120+8=1728$。

多位數之開立方法、根據於例（一）之定理。如下.

例（二）、$\sqrt[3]{12167}$ 開立方時、第一步先定位。已知 $1^3=1$、$10^3=1000$、故知根一位時、三乘方必在1000以下.即至多三位。又知 $10^3=1000$、$100^3=1000000$；故知根二位時、三乘方在1000以上、1000000以下、卽至少四位、至多六位。是以定位時、自右方始、定每三位爲一分節。由分節之數、可以知根之位數。例（二）之定位。則爲12'167.若爲小數、則定自小數點始、向右定、每三位爲一分節。

第二步、自左方第一分節始、求得其中所含最大之

方根、爲2。寫於第一分節上。又寫第一根之三乘方於第一分節下。如下。

$$\begin{array}{l} \quad 2 \\ \hline 12'167 \\ \quad 8 \\ \hline \quad 4 \end{array} \qquad \text{併入第二分節、如} \qquad \begin{array}{l} \quad 2 \\ \hline 12'167 \\ \quad 8 \\ \hline \quad 4\ 167。 \end{array}$$

第三步、將第一根之平方、以3乘之。(即$3a^2$)此例第一根對於第二分節、有十倍之關係、故$(20)^2$以3乘之、爲1200。寫於餘數之左方、界以豎線。如

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \\ \cline{2-2} & 12'167 \\ & \quad 8 \\ \cline{2-2} 3\times(20)^2=1200 & \quad 4167 \end{array}$$

以1200約4167、得3。(即b)寫之於第二分節上。如下.

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2 \quad\ 3 \\ \cline{2-2} & 12'167 \\ & \quad 8 \\ 3\times(20)^2=1200 & \quad 4167 \end{array}$$

然4167中、爲$3a^2b$ $3ab^2$及b^3之和。故以二根相乘、再以3乘之、得180。寫於1200之下。(即$3ab$)次以第二根之平方9、寫於180下。(即b^2)如下.

$$\begin{array}{lr|l} & & \quad 2 \quad\ 3 \\ & & 12'167 \\ & & 8 \\ \hline 3\times(20)^2 & =1200 & 4\ 167 \\ 3\times(20\times3) & =\ 180 & \\ 3^2 & =\ \ \ 9 & \\ \hline & 1389 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1200 \\ 180 \\ 9 \\ \hline 1389 \end{array}$$ 相加、得1389。(即$3a^2+3ab+b^2$)以第二根3乘之。

得4167。(即$b\times(3a^2+3ab+b^2)=3a^2b+3ab^2+b^3$)由餘數減之。如下。

$$\begin{array}{lr|l} & & \quad 2 \quad\ 3 \\ & & 12'167 \\ & & 8 \\ \hline 3\times(20)^2 & =1200 & 4\ 167 \\ 3\times(20\times3) & =\ 180 & \\ 3^2 & =\ \ \ 9 & \\ \hline & 1389 & 4\ 167 \end{array}$$

適盡。故 $\sqrt[3]{12167}=23$。

【習　　題】

(1)　$(1.2)^3$.　　(2)　$(2a+1)^3$.　　(3)　$\sqrt[3]{343X^3y^3}$.

(4)　$\sqrt[3]{8.841}$.　　(5)　$\sqrt[3]{42875}$.　　(6)　$(3X+4y)^3$.

第八章 聯立一次方程式

若一個等式、含有二個未知數時．則有種種數字、皆可代此二未知數、而等式依然成立。例如$X+y=10$、一個等式中有二個未知數X及y。X爲1、y爲9．或X爲2、y爲8．以至X爲3、爲9、或爲0。X與y用種種數字代時．等式$X+y=10$依然成立。若更有第二個等式、表明二未知數別種關係時．則X、y、祇能各有一數相代矣。例如於以上等式外。再加一等式如$X-y=2$．則Xy之數值、（卽未知數相等之數字）大爲限制。惟$X=6$、$y=4$時．二個等式、方可成立。凡二個（或幾個）未知數、用二個（或幾個）等式表明其不同之關係．而各式中同文字之未知數、均可用同數值代入者、名曰聯立方程式。例如$X+y=10$、$X-y=2$、此二個等式、成爲聯立方程式。但如$X+y=10$，$3X+3y=30$、則二個等式、非表明二未知數相異之關係者。$3X+3y=30$、不過$X+y=10$之三倍耳。故二等式不成爲聯立方程式。聯立方程式之解法、須先消去其一個方程式及一個未知數、使成一元方程式。其消去之法有三種。如下．

（甲）加減消去法、

例(一)、(1)　$2X-3y=4$、

(2)　$3X+2y=32$、

X及y之係數均不同.即行加減法後、仍不能消去。宜設法使(1)(2)式中X或y之係數相同。今假定欲消去y、而y之係數爲3及2。乃以2乘(1)式、以3乘(2)式.則y之係數均爲6矣。

2乘(1)式、3乘(2)式、得.

(3)　$4X-6y=8$。

(4)　$9X+6y=96$。

(見第一章第六節(四))

y之係數既同、而正負號不同.加之、則y消去矣。故行加法。加(3)(4)二式、(見第一章第六節(二))

$$\begin{array}{rl} 4X-6y & =8 \\ 9X+6y & =96 \\ \hline 13X \qquad & =104、 \end{array}$$

故 $X=8$、

次求y之數値.可於(1)或(2)式中、將X之數値代入之。

(1)　$3X+2y=32$、　　代入X之數値、

$3\times 8+2y=32$、　　即

$24+2y=32$、　　移項、得

$2y=32-24$、　　　　卽

$2y=8$、　　　　　故

$y=4$、

例二、

$$\begin{cases} (1)\quad 6X+35y=177、\\ (2)\quad 8X-21\quad =33、\end{cases}$$

Xy之係數不同。設法以4乘(1)式、3乘(2)式。則X之係數、均爲24。

4乘(1)式、3乘(2)式、得。

$$\begin{array}{lrl} (3) & 24X+140y & =708、\\ (4) & 24X-\ \ 63y & =\ \ 99、\\ \hline & 203y & =609、\end{array}$$

X之係數均爲24、而正負號同。故用減法、則可消去。乃減(3)(4)二式、(見第一章第六節(二))如上。

故$y=3$、

次求X之數值、可於(1)或(2)式中、將y之數值代入之。

(2)　$8X-21y=33$、　　　　代入y之數值、

$8X-21\times3=33$、　　　卽

$8X-63=33$、　　　　　移項、得

$8X=33+63$、　　　　　卽

$8X=9$、　　　　　　　　故

$X=12$

故知、行加減消去法時。先指定一未知數、二個方程式、各以一相宜之數乘之、使所指未知數之係數相同。次視二式所指定之未知數、正負號同者、用減法、正負號異者、用加法。

（乙）代入消去法

例（三）、（1）$2X+3y=8$、

（2）$3X+7y=7$、

先將第一式移項、得

（3）$2X=8-3y$、

以X除二邊、得

（4）$X=\frac{8-3y}{2}$、

暫以$\frac{8-3y}{2}$、視爲X之數值、以之代入（2）式、

$3\left(\frac{8-3y}{2}\right)+7y=7$。　　　即

$\frac{24-9y}{2}+7y=7$、　　　二邊各以2乘、去分母、得

$24-9y+14y=14$　　　移項、得

$-9y+14y=14-24$、 併之、得

$5y=-10$、 故

$y=-2$、

既得y之數值、以之代入(1)式、

$2X+3\times(-2)=8$、

$2X+(-6)=8$、

$2X-6=8$、 卽

$2X=8+6$、 卽

$2X=14$、 故

$X=7$、

故知、行代入消去法時。先於一個方程式中、指定一個未知數、求其值。卽暫以他未知數認作數字、依一元方程式解之。次將此值、代入他一個方程中。

(丙)比較消去法

例(四)、(1) $2X-9y=11$、

(2) $3X-4y=7$、

將(1)(2)二式、各照一元方程式法、指定X、而求其值。

(1)式移項、得

(3) $2X=11+9y$、 以係數除二邊、得

(4)　$X=\dfrac{11+9y}{2}$、

由(2)式移項、得

(5)　$3X=7+4y$、　　　以係數除二邊、得

(6)　$X=\dfrac{7+4y}{3}$、　　　視(4)(6)二式、知

(7)　$\dfrac{11+9y}{2}=\dfrac{7+4y}{3}$。

(見第一章第六節(一))

以6乘(7)式二邊、去分母、得

$\dfrac{\cancel{6}^{3}(11+9y)}{\cancel{2}}=\dfrac{\cancel{6}^{2}(7+4y)}{\cancel{3}}$、卽

$33+27y=14+8y$、　　　移項、得

$27y-8y=14-33$、　　　併之、得

$19y=-19$、　　　故

$y=-1$、　　　旣知y之値、以之代入(1)式。

$2X-9\times(-1)=11$、

$2X-(-9)=11$、

$2X+9=11$、　　　卽

$2X=11-9$、　　　卽

$2X=2$, 故

$X=1$,

故知、行比較消去法時。於二個方程式中、指定一相同之未知數、各求其値、次將二値作成一方程式、解之。

以上三法、均爲消去一個未知數之法。既消去後、可照一元一次方程式解法、求其數値。並再以數値、代入原方程之任何式中、然後再求他未知數之數値。

如爲三元之聯立方程、則將三個方程式、分作二對、而消去未知數之一個、成含有二未知數之式二個、再將二個式、如上法消去之。(下例Z讀日聲)

例(五)、

(1) $2X-3y+4Z=4$,

(2) $3X+5y-7Z=12$,

(3) $5X-\ \ y-8Z=5$,

先由(1)(2)二式、消去Z、

以7乘(1)式、4乘(2)式、而加之、

(4) $14X-21y+28Z=28$,

(5) $12X+20y-28y=48$,

(6) $26X-\ \ y\qquad=$[illegible],

次由(1)(2)二式、消去Z、

以2乘(1)式、(3)式仍舊、加之、

$$
\begin{array}{lrl}
(7) & 4X-6y+8Z & =8、\\
(8) & 5X-\ \ y-8Z & =5、\\
\hline
 & 9X-7y\qquad & =13、
\end{array}
$$

Z消去後、(6)(8)二式、成爲二元方程式、乃以7乘

(1)式、用減法消去y、

7乘(6)式、(8)式、仍舊、減之、

$$
\begin{array}{lrl}
(9) & 182X-7y & =532、\\
(10) & 9X-7y & =13、\\
(11) & 173X\qquad & =519、
\end{array}
$$

解(11)式、得

$X=3$、

以X之數値、代入(6)或(8)式、以求y之値、

以3代(6)式之X、得

$3\times26-y=76$、　　　卽

$78-y=76$、　　　卽

$78-76=y$、　　　故

$y=2$、

以X及y之數値、代入三個方程式中之任何式、卽得

Z之數値。

以3代(1)式之x、2代(1)式之y、得

$2\times3-3\times2+4z=4$、　　即

$6-6+4z=4$、　　即

$4z=4$、　　故

$z=1$、

【習　　題】

(1) $\left.\begin{array}{l}2x+3y=7\\4x-5y=3\end{array}\right\}$　　(2) $\left.\begin{array}{l}3x+2y=39\\3y-2x=13\end{array}\right\}$

(3) $\left.\begin{array}{l}7x-5y=24\\4x-3y=11\end{array}\right\}$　　(4) $\left.\begin{array}{r}9y-7x=13\\15x-7y=9\end{array}\right\}$

(4) $\left.\begin{array}{l}4x+9y=51\\8x-13y=9\end{array}\right\}$　　(6) $\left.\begin{array}{l}7y-3x=139\\2x+5y=91\end{array}\right\}$

(7) $\left.\begin{array}{r}5x+3y-6z=4\\3x-y+2z=8\\x-2y+2z=2\end{array}\right\}$　　(8) $\left.\begin{array}{r}4x-3y+z=9\\9x+y-5z=16\\x-4y+3z=2\end{array}\right\}$

凡問題之含未知數二個者、必有二個方程式、其含未知數三個者、必有三個方程式、方可解決。若方程式之數、比未知數之個數多時、其中必有贅澤無用者、或不合者。若方程式之數、比未知數少時、問題不能解決、或能解決而未知數之數値不定。(即一未知數、有數個之數値也。)

例(六)、　甲乙二人各有銀若干元。甲與乙十元時、

乙之銀數爲甲之三倍。若乙與甲十元時、甲之銀數爲乙之二倍。甲乙原有銀幾元。解法如下

設$X=$甲之銀數、

$y=$乙之銀數、

甲與乙十元時、

$X-10=$甲之餘銀、

$y+10=$乙之共銀、

由題意、得

(1) $y+10=3(X-10)$、

乙與甲十元時、

$y-10=$乙之餘銀、

$X+10=$甲之共餘、

由題意、知

(2) $X+10=2(y-10)$、

然後如前法解之。

化(1)(2)式、成

$y+10=3X-30$、 即

(3) $3X-y=40$、 又

$X+10=2y-20$、 即

(4) $X-2y=-30$、

以2乘(3)式、用減法消去之、得

$$\begin{array}{rcll} 6X-2y & = & 80, & (5) \\ X-2y & = & -30, & (4) \\ \hline 5X & = & 110, & (6) \end{array}$$

故

$X=22$、 以之代入(4)式、得

$22-2y=-30$、 即

$22+30=2y$、 即

$52=2y$、 故

$y=26$、

答甲有二十二元、乙有二十六元。

例(七)、 有某數、共有二位。二位數字之和爲八。若加三十六、則十位單位上數字互易。某數爲何數。解法如下。

設X＝十位數字、

y＝單位數字、

$10X+y$＝某數、

由題意、知

(1) $X+y=8$、

又十位單位數字互易時、即

$10y+X$、

由題意、知

(2)　$10X+y+36=10y+X$、

化(2)式、得

$10X-X+y-10y=-36$、　　　卽

$9X-9y=-36$　　　卽

(3)　$X-y=-4$、

加(1)(3)二式、消去之、得

$$\begin{array}{rl} X+y= & 8, \\ X-y= & -4, \\ \hline 2X\quad = & 4, \end{array}$$　　　故

$X=2$、

以之代入(1)式、得

$2+y=8$、　　　卽

$y=8-2$、　　　故

$y=6$、　　　答某數爲26。

例(八)、　某船順河流而行、每時行三十六里．逆流而行、則每時僅能行十八里。求水流之速、及船在靜水中行之速、每時各幾里。解法如下．

設$X=$船在靜水中行之速、

$y=$水流之速、

順流而下時、爲船之速力及水之速力之和．即$X+y$、

由題意、知

(1)　$X+y=36$、

逆流而上時、水力與船行相反．故爲二者之差、即$X-y$、

由題意、知

(2)　$X-y=18$、

行加法消去法、得

$$\begin{array}{r} X+y=36, \\ X-y=18, \\ \hline 2X \quad =54, \end{array}$$

故

$X=27$、

以之代入(1)式、得

$27+y=36$、　　即

$y=36-27$、　　故

$y=9$、

答船在靜水中之速、每時二十七里。水流之速、每時九里。

例(九)、　某酒商將每斤七十二文之酒、與每斤四

十文之酒、混合成爲每斤六十文之酒。合成之酒、共五十斤。二種酒各用幾斤。解法如下.

設$X=72$文之酒之斤數、

$y=40$文之酒之斤數、

由題意、知

(1) $X+y=50$、 又知

$72X+40y=50\times60$、 卽

(2) $72X+40y=3000$、

以40乘(1)式、得

(3) $40X+40y=2000$、

以(2)(3)二式、行減法消去法、得

$$\begin{aligned}72X+40y&=3000,\\ 40X+40y&=2000,\\ \hline 32X&=1000,\end{aligned}$$ 故

$X=31\frac{1}{4}$、

以之代入(1)式、得

$31\frac{1}{4}+y=50$、 卽

$y=50-31\frac{1}{4}$、 故

$y=18\frac{3}{4}$、

答七十二文之酒用三十一斤四兩、四十文之酒用十八斤十二兩。

例(十)、　某工事甲乙二人合爲之、四十八日完。甲丙二人合爲之、三十日完。甲丙二人合爲之、$26\frac{2}{3}$日完。各人獨爲之、各須幾日完。解法如下.

設$X=$甲獨爲之日數、

$y=$乙獨爲之日數、

$Z=$丙獨爲之日數、

$\frac{1}{X}\quad\frac{1}{y}\quad\frac{1}{Z}$爲甲乙丙獨爲時、每日所爲之事、

$\frac{1}{X}+\frac{1}{y}=$甲乙合爲時、每日所爲之事、

$\frac{1}{X}+\frac{1}{Z}=$甲丙合爲時、每日所爲之事、

$\frac{1}{y}+\frac{1}{Z}=$乙丙合爲時、每日所爲之事、

由題意、知

(1)　$\frac{1}{X}+\frac{1}{y}=\frac{1}{48}$,

(2) $\frac{1}{X}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{30}$,

(3) $\frac{1}{y}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{26\frac{2}{3}}$,

(3)式等號後$\frac{1}{26\frac{2}{3}}$,即

$1\div 26\frac{2}{3}=\frac{3}{80}$,

(3) 故(3)式爲$\frac{1}{y}+\frac{1}{Z}=\frac{3}{80}$,

減(2)(3)兩式、消去Z。得

$\frac{1}{X}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{30}$,

$\frac{1}{y}+\frac{1}{Z}=\frac{1}{80}$,

$\frac{1}{X}-\frac{1}{y}=\frac{1}{30}-\frac{3}{80}$, 即

(4) $\frac{1}{X}-\frac{1}{y}=\frac{1}{240}$,

加(1)(4)兩式、消去y。得

$\frac{1}{X}+\frac{1}{y}=\frac{1}{48}$,

$\frac{1}{X}-\frac{1}{y}=-\frac{1}{240}$、

$2\frac{1}{X}=\frac{1}{48}-\frac{1}{240}$、 卽

$\frac{2}{X}=\frac{1}{60}$、

以X乘二邊、得

$2=\frac{X}{60}$、 以60乘二邊、得

$X=120$、 以之代入(1)式、得

$\frac{1}{120}+\frac{1}{y}=\frac{1}{48}$、 卽

$\frac{1}{y}=\frac{1}{80}$、 以y乘二邊、得

$1=\frac{y}{80}$、 以80乘二邊、得

$y=80$、 以之代入(3)式、得

$\frac{1}{80}+\frac{1}{Z}=\frac{3}{80}$、 卽

$\frac{1}{Z}=\frac{1}{40}$、 以Z乘二邊、得

$1=\frac{Z}{40}$、 以40乘二邊、得

$Z=40$、

答獨爲時。甲須一百二十日、乙須八十日、丙須四十日、

【習　題】

一．某家父子之年齡，七年前，父年爲子年之四倍，七年後，父年爲子年之二倍，今年父子各幾歲。

二．有一個二位數，各位數字之和爲十。若加五十六，則十位單位上數字互易。此二位數爲何數。

三．某茶商以每斤四角二分之茶葉，與每斤五角四分之茶葉，混合。合成之茶葉共三十斤。每斤價四角六分。二種茶葉各用幾斤。

第九章　比及比例

第一節　比

比　某數對於他數。成倍數、或幾分之幾之關係時。爲二數之比。比之寫法、通常用分數表之。例如3爲5之幾分之幾、即3比5。則寫$\frac{3}{5}$。亦有用：表之者、3比5、寫爲3：5。又如8比4、或寫$\frac{8}{4}$、或寫8：4。

兩數相比時。其第一數曰前項。第二數曰後項、後項除前項之結果、曰比之值。如a：b、其值爲$\frac{a}{b}$。8：4、其

值爲2.4：8、其值爲$\frac{1}{2}$。

凡同類同單位之數、可以相比、否則不能相比。例如$\frac{3尺}{7尺}$、可以成立。然$\frac{3尺}{5人}$、則不能成立。

比之值、必爲不名數。蓋比之值、由除法得之、卽除法之商。則同類名數相除時、其商必爲不名數也。

連比　若干數互相連續比者、曰連比。例如、a：b：c或2：3：5、均爲連比。

複比　二對之比、其前項後項各各相乘時、成爲複比例。如a：b及c：d爲二對之比、前項a與c相乘。後項b與d相乘、則爲複比ac：bd。又如2：3及5：7、亦爲二對之比、前後項各各相乘、則爲複比2×5＝3×7

凡比必有前項、後項、及其值。若三者中缺其一、則可求得之。法以X代所缺者、用方程式解之、卽得。

例（一）、　何數比75時、比之值爲3。解法如下。

設X＝何數、

$X : 75 = 3$、　　　　卽

$\frac{X}{75} = 3$、　　　　以75乘二邊、得

$X = 225$、　　　　答某數爲225。

例（二）、　有一門高七尺、高比闊爲三又$\frac{1}{2}$。此門闊

幾尺。解法如下。

設X＝門闊之尺數、

$7:X=3\frac{1}{2}$	即
$\frac{7}{X}=\frac{7}{2}$	以X乘二邊、得
$7=\frac{7}{2}X$、	以2乘二邊、得
$14=7X$、	故
$X=2$、	答門闊二尺。

差分　將某數按照各部所得之比、而分之、名曰差分、例如甲乙二人合股經商。甲乙所出股本額爲5比3。某年得利銀一千六百元。按股本之比分之、甲乙各得若干。

此題甲乙股本爲5：3。則甲應得利銀五份、乙應得利銀三份。故利銀共須照八份分之。然後甲得其五倍。乙得其三倍。$\frac{1600\text{元}}{8}=200\text{元}$、　$5\times200\text{元}=1000\text{元}$、$3\times200\text{元}=600\text{元}$、　或$5+3=8$、$\frac{5}{8}\times1600\text{元}=1000\text{元}$、$\frac{3}{8}\times1600\text{元}=600\text{元}$。　答甲應得一千元、乙應得

六百元。

連比差分之算法、亦同。例如．甲乙丙三人合股經商。其股本額爲2：3：4。某年損失銀二千零七十元。按股本之比、各人應出若干。三人所出份數．應照甲2、乙3、丙4分配。故二千零七十元之損失、應九份分之．而甲出其二倍、乙出其三倍、丙出其四倍。$\frac{2070}{9}$元＝230元、

2×230元＝460元、　3×230元＝690元、

4×230元＝920元、　$2+3+4=9$、

$\frac{2}{9}\times2070$元＝460元、　$\frac{3}{9}\times2070$元＝690元、

$\frac{4}{9}\times2070$元＝920元。　答甲出四百六十元、乙出六百九十元、丙出九百三十元。

複比差分之算法、亦同。例如。甲乙二人合股經商。股本額之比爲4：3然甲出資二月後、乙方附入。經五個月後。共得利銀八百六十元。按股本及出資時期之比分之、各得若干。五個月後得利．則甲共出資七個月、乙出資五個月。故時期之比、爲7：5。4：37：5爲複比、合之得28：15。然後如前法求之。28＋15＝43、

$\frac{28}{43}\times 860$元$=560$元、$\frac{15}{43}\times 860$元$=300$元、　答甲得五百六十元、乙得三百元。

以方程式解以上各例。如下。

(一)差分

設$X=$甲所得之銀數、

$y=$乙所得之銀數、

(1)　$X+y=1600$、

(2)　$X:y=5:3$、　　卽

$\frac{X}{y}=\frac{5}{3}$、　　卽

(3)　$3X=5y$、　　行代入消去法、

(4)　$X=\frac{5y}{3}$、　　代入(1)式、得

$\frac{5y}{3}+y=1600$、

$5y+3y=4800$、

$8y=4800$、　　故

$y=600$、　　代入(1)式、得

$X+600=1600$、　　故

$X=1000$、

(二)連比差分

設$X=$甲應出之數、

$y=$乙應出之數、

$Z=$丙應出之數、

(1) $X+y+Z=2070$、

$X:y=2:3$、 即

$\frac{X}{y}=\frac{2}{3}$、 即

(2) $X=\frac{2y}{3}$、 又

$y:Z=3:4$、 即

$\frac{y}{Z}=\frac{3}{4}$、 即

(3) $Z=\frac{4}{3}y$、 代入(1)式、得

(4) $\frac{2y}{3}+y+\frac{4}{3}y=2070$、 即

$3y=2070$、 故

$y=690$、 代入(2)式、得

$X=\frac{2\times690}{3}$、 故

$X=460$、 以y之值代入(1)式、得

$Z=\frac{4\times690}{3}$、 故

$Z=920$、

(三)複比差分

設$X=$甲所得之數、

$y=$乙所得之數、

(1)　$X+y=860$、

$X:y=4\times8:3\times5$、

(2)　$\frac{X}{y}=\frac{28}{15}$、　卽

(3)　$X=\frac{28y}{15}$、　代入(1)式、得

$\frac{28y}{15}+y=860$、　卽

$28y+15y=12900$、　卽

$43y=12900$、　故

$y=300$、　代入(1)式、得

$X+300=860$、　故

$X=560$

【習　題】

一．某家父子二人，父長六尺。父子身長之比爲$\frac{3}{2}$。子長幾尺。

二．若一年中一百六十五日爲陰天，二百日爲晴天。陰天對於晴天之比若何。

三。某地某年十一月中，晴天比陰天爲3：2。是月中晴天陰天各幾日。

四。以錢三千四百五十文，買紅白糖。紅糖價比白糖價，爲2：7。紅糖重量比白糖重量，爲4：5。紅白糖各値錢幾文。

五。某種合金，由金銀銅三種合成。金銀銅之比，爲9：2：1。今有此種合金十三兩八錢。內含金銀銅各若干。

第二節　比　例

一個等式含有二對之比者、名曰比例。例如二元比三元、等於十尺比十五尺。爲比例。其式$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$、或2元：3元＝10尺：15尺、爲比例式。

比例式中四個數中缺其一時可用X代之。照方程式解法求之。例如。何數比3、等於8：12解法如下.

設X＝何數、

X：3＝8：12、　　即

$\frac{X}{3}=\frac{8}{12}$,　　以3乘二邊、得

$$X=\frac{\cancel{3}\times\cancel{8}^{2}}{\cancel{12}_{\cancel{3}}}=2,$$

又如。15：18、等於五比何數。解法如下.

設X＝何數、

$15:18=5:X$、　　　　　　　　　　卽

$\frac{15}{18}=\frac{5}{X}$、　　　　　　　　　以X乘二邊、得

$\frac{15}{18}X=5$、　　　　　　　　　以18乘二邊、得

$15X=5\times18$、　　　　　　　　卽

$15X=90$、　　　　　　　　　　故

$X=6$、

反比、比之前後項互易時、曰反比。例如.3：8、其反比爲8：3。反比例、一對之比、與他對之反比相等者、其等式曰反比例。不然者、曰正比例。例如某人買算術書。其第一次所買册數、比第二次所買册數.爲3：5。其書價、爲9元：15元。此題册數之比、與價値之比相等.故爲正比例。3：5＝9：15、又如.雇工做某工程。用二人、則三日完。用三人時、二日可完。以一人作一工算、則此工程共須六工。故用二人、則三日完.用三人時、人數加多、日數可減。故祗須二日卽完。此題人數之比、爲2：3。日數之比、爲3：2。若欲成比例式.則人數之比、必等於日數之反比。卽2人：3人＝2日：3日、方成等式。此式爲反比例。

無論正反比例四數中缺其一時。可用X代之、而用解方程式法解之。如下例。

例(一)、 有木四枝價銀十元。此種木十二枝價若干。

此題枝數之比爲4：12、木價之比爲10元：X元。然木之枝數增時、其價亦增。枝數減時、其價亦減。故木之枝數與木價、應爲正比例。其比例式爲 4：12＝10：X、 卽

$\frac{4}{12}=\frac{10}{X}$、 以X乘二邊、得

$\frac{4}{12}X=10$、 以12乘二邊、得

$4X=120$、 故

$X=30$、 答十二枝價三十元、

例(二)、 二人、於十二時內、做成一件木器、若此器用八人做之、幾時可完。

此題人數之比、爲2：8。時間之比、爲12：X、然同爲一器。二人做之、須時久、八人做之、須時短。卽人數增時、時間減。人數減時、時間增。故應爲反比例。卽2：8、等於12：X之反比。卽 2：8＝X：12、 卽

$\frac{2}{8}=\frac{X}{12}$、　　以12乘二邊、得

$\frac{\cancel{12}^{3}\times\cancel{2}}{\cancel{8}_{\cancel{2}}}=X$、　　故

$X=3$、　　答三時完。

比例問題之解決、方法上無大難。所最難者.辨別事理、而定其孰爲正比例孰爲反比例。以下爲重要之例、其他可類推得之。

一、物價與物之個數、或物之重量.爲正比例。

二、工程與工價、爲正比例。

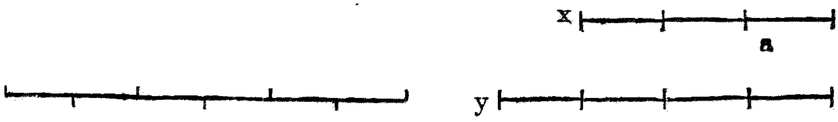
三、物之量限定時.其所分個數、與每個之量、爲反比例。

四、一定之距離內.其每日或每時所行之路、與日數或時數爲反比例。

五、一定之工程、其工作時期、與人數、爲反比例。

六、一定之面積、其長與闊爲反比例。

要之、事物之總量有限定、而其成分可大小者.各成分必爲反比例。若事物之總量無限定、而其中之某成分一定時.則各成分與總量、常爲正比例。



甲　　　　乙

圖甲　線代總量、其各成分爲所分之段數、及各段之長。段數多時、各段之長必減。段數少時、各段之長必增。故題之類此者、爲反比例。圖之上方、段數3、每段之長爲X。下方段數4、每段之長爲y。段數之比3：4、每段長之比X：y。然3X爲線之全長、4y亦爲線之全長。　　故

$3X=4y$。　　　　二邊各以4除、得

$\frac{3}{4}X=y$;　　　　二邊各以X除之、得

$\frac{3}{4}=\frac{y}{X}$;　　　　故

$3:4=y:X$、

故凡題之有此種性質者、必爲反比例。

圖乙　X線代表一種總量、y線亦代表一種總量。X爲三個a、y爲4個a。而X、y、之成分a、爲一定。總量之比、爲X：y。a之個數之比、爲3：4。然 $X=3a$、$y=4a$、則

$X : y = 3a : 4a$,　　　　　　　卽

$\frac{X}{y} = \frac{3a}{4a}$,　　　　　　　消去a時、得

$\frac{X}{y} = \frac{3}{4}$,　　　　　　　卽

$X : y = 3 : 4$、

故凡題之有此種性質者、必爲正比例。

複比例、一對之比、與其他若干對之複比等者、名曰複比例。例如 $a : b = \begin{matrix} c : d \\ e : f \end{matrix}$、　卽　$a : b = ce : df$、爲一個複比例。(前所述之比例、名曰單比例。)

複比例之解法、宜先將複比之前後項、各別相乘、使成單比例之形。然後用單比例法解之。

例如、農夫四人、每日作工十四時、五日耕田十五畝。今用同等工人七人、每日作工十三時、耕田十九畝半.須幾日。設X爲所求之日數。按題意共得四對之比。人數之比、爲$4 : 7$。時數之比、爲$14 : 13$。日數之比、爲$5 : X$。田畝之比、爲$15 : 19.5$。人數、時數、日數、三者、總合之爲工力。工力於所耕田畝、爲正比例。(因總量無一定、而一人一時所耕有定.故爲正比例。)得比例式、如下.

$$\left.\begin{array}{r} 4:7 \\ 14:13 \\ 5:X \end{array}\right\}=15:19.5,$$ 卽

$280:91X=15:19.5,$ 卽

$\dfrac{280}{91X}=\dfrac{15}{19.5},$ 以91X乘二邊,得

$280=\dfrac{15}{19.5}\times(91X),$ 以19.5乘二邊,得

$280\times19.5=15\times(91X),$ 卽

$1365X=5460$ 故

$X=4,$ 答四日。

【習 題】

一. 甲行八十八里時,乙行九十六里。乙行六百七十二里時,甲行若干里。

二. 有地二區面積相等。甲區長二十二丈,闊十八丈. 乙區闊十二丈,長應若干丈。

三. 工人六人,七日內織成布四十四疋。有布二十疋,三日內織成之. 須同等之工人若干。

益智書店