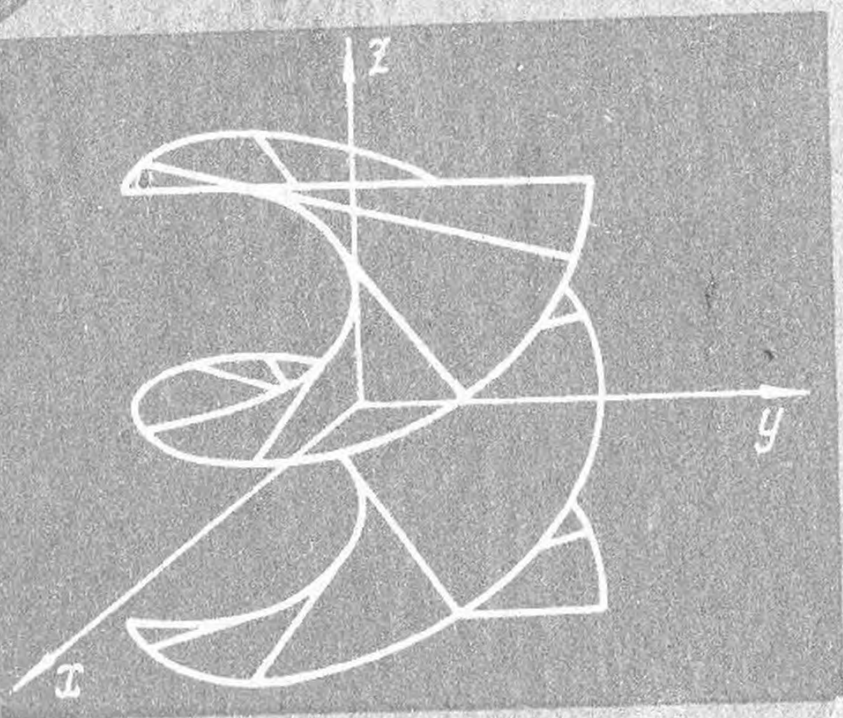


О. А. Борисенко

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ТОПОЛОГИЯ



«ОСНОВА»

О. А. Борисенко

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Затверджено Міністерством освіти України
як навчальний посібник для студентів
механіко-математичних факультетів університетів,
що вивчають дисципліну
«Диференціальна геометрія і топологія»

Харків
«Основа»
1977

ББК 22.151
Б82
УДК 514.7(075.8)

Борисенко О. А.

Б82 Диференціальна геометрія і топологія.— Х.: Основа, 1995.— 304 с.

ISBN 5-7768-0388-8.

У навчальному посібнику викладено основні поняття диференціальної геометрії кривих та поверхонь, тензорного аналізу і риманової геометрії, теоретико-множинної і алгебраїчної топології, диференційованих многовидів. Показано залежність зовнішньої форми кривих та поверхонь від аналітичних властивостей. Описано зв'язок між топологічними і диференціально-геометричними властивостями кривих та поверхонь. Подано фізичну інтерпретацію геометричних понять. Наведено розв'язання модельних прикладів.

Для студентів механіко-математичних факультетів університетів, що вивчають дисципліну «Диференціальна геометрія і топологія».

Б 1602050000-014 226-95 **Замовне**

ББК 22.151

Навчальне видання

БОРИСЕНКО Олександр Андрійович

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНА ГЕОМЕТРІЯ І ТОПОЛОГІЯ

Редактор *Г. О. Романець*
Художник обкладинки *В. Є. Петренко*
Художній редактор *В. Є. Петренко*
Технічний редактор *І. А. Омельченко*
Коректор *В. М. Бурейко*

Здано до набору 10.10.94. Підписано до друку 10.02.95. Формат 84×108/32. Папір друк. № 2. Гарнітура літературна. Друк високий. Умов. друк. арк. 15,96. Умов. фарбо-відб. 16,21. Обл.-вид. арк. 19,32. Вид. № 2327. Зам. 4-351. Замовне.

Державне спеціалізоване видавництво «Основа».
Україна, 310005 Харків, пл. Повстання, 17.
Харківська книжкова фабрика ім. М. В. Фрунзе.
Україна, 310057 Харків, вул. Донець-Захаржевського, 6/8.

ISBN 5-7768-0388-8

© О. А. Борисенко, 1995

ПЕРЕДМОВА

В останній час у багатьох розділах математики і теоретичної фізики почали широко використовуватися ріманова геометрія, тензорний аналіз, теорія многовидів, елементи алгебраїчної та диференціальної топології. Тому виникла доконечна потреба в зміні змісту курсу геометрії. Цей навчальний посібник є продовженням посібника «Аналітична геометрія». В курсі аналітичної геометрії в основному вивчаються лінійні образи та образи другого порядку, причому засоби вивчення — це вектори, координати, методи лінійної алгебри.

Перша відміна диференціальної геометрії від аналітичної полягає в тому, що диференціальна геометрія вивчає криві та поверхні значно ширшого класу; друга відміна — в тому, що основним інструментом при вивченні геометричних образів є математичний аналіз і диференціальні рівняння.

Глави 1—2 присвячено основним поняттям диференціальної геометрії. Вони містять здебільшого традиційний матеріал — теорії кривих та поверхонь. В основу багатьох визначень покладено лінійно-алгебраїчні конструкції. Наприклад, лінійна алгебра становить основу визначення головних напрямків, головних кривин, середньої та гауссової кривин. При такому підході забезпечується зв'язок з іншими математичними курсами, а самі визначення легко поширюються на багатовимірний випадок. Довжину кривої і площу поверхні визначено аналітично. Щоправда, при такому способі виникають проблеми пояснення природності визначення, коректності, тобто незалежності від вибраної системи координат, але ці проблеми розв'язувані.

Велику увагу приділено поняттю орієнтації і зв'язку орієнтації площини, простору, кривої, поверхні зі знаками відповідних кривин. Наголос зроблено на якісній наочній інтерпретації геометричних понять, що вводяться.

У главі 3 подано основи тензорного аналізу, теорії диференційованих та ріманових многовидів. Викладення ріманової геометрії доведено до секційної кривини, кривини Річчі, які безпосередньо використовуються в загальній теорії відносності, у теорії калібрувальних полів.

Відзначимо, що такий матеріал, як криволінійні координати та тензорний аналіз, потрібний не тільки студентам фізико-математичного профілю, а і студентам технічних вузів.

Глави 4 і 5 присвячено поняттям теоретико-множинної та алгебраїчної топології. Виходячи з них дано точне визначення поверхні, многовиду, пояснено зв'язок між геометричними і топологічними інваріантами поверхонь та многовидів.

При викладенні не забуті імена математиків, які зробили важливі геометричні відкриття. Особливо багато уваги приділено тернистому шляху створення і визнання геометрії Лобачевського.

За ходом викладення наведено розв'язання модельних прикладів, запропоновано багато запитань, завдань та задач для самостійного розв'язування.

Навчальний посібник написаний на основі лекцій, які автор багаторазово читав на механіко-математичному факультеті Харківського державного університету (ХДУ). Початковий запис лекцій зробила доц. Л. М. Сергієнко. Переклад з російської мови здійснено за допомогою доц. Г. Ч. Курінного. Обговорення рукопису викладачами кафедри геометрії ХДУ сприяло його покращенню. Особливо цінними були зауваження доц. Ю. А. Ніколаєвського, доц. Г. Ч. Курінного. Після цього істотні зауваження висловив рецензент — завідувач кафедри геометрії Київського державного університету проф. В. В. Кириченко. У заключному редагуванні рукопису відчутну допомогу подали Н. К. Фарафонов, М. О. Якуба. Рукопис оформила Н. А. Колісниченко. Автор висловлює подяку всім.

Глава I

ТЕОРІЯ КРИВИХ

Поняття кривої є одним з основних у диференціальній геометрії. Спочатку цьому поняттю не давалося точного математичного визначення і уявлення про криву залишалися на наочному рівні. Запропонований Р. Декартом метод координат дозволив вперше сформулювати поняття кривої в досить загальній формі. Але ще в 1897 р. Ф. Клейн писав: «Що таке довільна крива, довільна поверхня?.. Можна сказати, що з математичної точки зору в нинішній час немає нічого більш темного і неясного, ніж згадане поняття». Зараз у диференціальній геометрії використовується поняття кривої, яке ввів К. Жордан, правда, трохи змінене.

1.1. Вектор-функції одного аргументу

Нехай X — множина точок прямої, площини або простору.

Визначення. Вектор-функцією називається відображення точок множини X у двовимірний простір E^2 або в тривимірний евклідов простір E^3 . Кожній точці $x \in X$ ставиться у відповідність її радіус-вектор $r(x)$. Нехай $X = (a, b)$, $a < t < b$. Тоді $r = r(t)$ — вектор-функція одного аргументу.

Нехай $e = (e_1, e_2, e_3)$ — ортонормований базис тривимірного евклідового простору. Тоді $r(t) = f^1(t)e_1 + f^2(t)e_2 + f^3(t)e_3$. Функції $f^i(t)$, $i = 1, 2, 3$ називаються компонентами вектор-функції $r(t)$. Якщо вважати $f^i(t)$, $i = 1, 2, 3$ неперервними функціями та інтерпретувати t як час, то інтуїтивно зрозуміло, що кінець вектора $r = r(t)$ змалює криву.

Для вектор-функції вводяться поняття границі, неперервності, похідної, інтеграла, подібні відповідним поняттям для скалярної функції.

Визначення. Нехай $r = r(t)$ — вектор-функція, $a = (a^1, a^2, a^3)$ — сталий вектор. Тоді $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} |r(t) - a| = 0$.

Неважко довести, що $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = a \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} f^i(t) = a^i$, $i = 1, 2, 3$.

Визначення. Вектор-функція називається неперервною в точці $t = t_0$, коли $\lim_{t \rightarrow t_0} r(t) = r(t_0)$.

Якщо $f(t)$, $g(t)$ — вектор-функції; a , b — сталі вектори; $\lambda(t)$ — скалярна функція та

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) = \lambda_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = b,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (f(t) \pm g(t)) = a \pm b,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \lambda(t) f(t) = \lambda_0 a,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \langle f, g \rangle = \langle a, b \rangle,$$

де $\langle ; \rangle$ — скалярний добуток; $\lim_{t \rightarrow t_0} (f \times g) = (a \times b)$, де $a \times b$ — векторний добуток.

Визначення. Похідною від вектор-функції $r(t)$ називається вектор-функція

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t},$$

якщо ця границя існує, або покомпонатно,

$$r'(t) = \left(\frac{df^1}{dt}, \frac{df^2}{dt}, \frac{df^3}{dt} \right).$$

Визначення. Вектор-функція $r(t)$ називається гладкою, класу C^k , $k \geq 1$ (C^∞ , аналітичною), якщо $r(t)$ має неперервні похідні до k -го порядку включно (нескінченно диференційовна, розкладається в ряд Тейлора по t).

Нехай $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ — вектор-функції класу C^1 , $\lambda(t)$ — скалярна функція того ж класу. Тоді

$$(f \pm g)' = f' \pm g';$$

$$(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f';$$

$$\langle f, g \rangle' = \langle f', g \rangle + \langle f, g' \rangle;$$

$$(f \times g)' = f' \times g + f \times g';$$

$$(f, g, h)' = (f', g, h) + (f, g', h) + (f, g, h'),$$

де $()$ — змішаний добуток вектор-функцій.

Наведені правила диференціювання довести самостійно.

Визначення. Вектор-функція $g(t) = \int f(t) dt$ називається невизначеним інтегралом від вектор-функції $f(t)$, якщо $\frac{dg}{dt} = f(t)$, або по координатно,

$$g(t) = \left(\int f^1(t) dt, \int f^2(t) dt, \int f^3(t) dt \right).$$

Звідси одразу випливає збереження всіх властивостей інтеграла Рімана на відрізку.

Визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(t) dt = g(b) - g(a).$$

Довести самостійно правила інтегрування вектор-функцій:

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt;$$

$$\int \lambda_0 f(t) dt = \lambda_0 \int f(t) dt;$$

$$\int \langle a, f(t) \rangle dt = \langle a, \int f(t) dt \rangle;$$

$$\int (a \times f(t)) dt = a \times \int f(t) dt.$$

Приклад. Якщо $|r| = \sqrt{\langle r, r \rangle} = c = \text{const}$, то $r' \perp r$. Дійсно, $\langle r, r \rangle = c^2$, отже, $\langle r, r \rangle' = 2 \langle r, r' \rangle = 0$, тобто $r' \perp r$.

Вправа. Знайти $(\sqrt{\langle r, r \rangle})'$, $(r' \times r'')$, (r', r'', r''') , де $r = r(t)$ — вектор-функція класу C^4 .

1.2. Регулярні криві на площині та в просторі

Будемо розглядати в подальшому геометричні об'єкти в евклідових просторах вимірностей 2 та 3. В основному, якщо не сказано протилежне, всі твердження вірні в n -вимірному просторі. Через x^1, x^2, x^3 або x, y, z будемо позначати декартові координати.

Визначення. Шляхом, що з'єднує точки A та B на площині або у просторі, називається неперервне відображення $f: [a, b] \rightarrow E^2 (E^3)$, причому $f(a) = A$, $f(b) = B$.

Шляхи можуть бути вельми складної природи. Наприклад, існує таке неперервне відображення відрізка в площину, при якому образом відрізка є квадрат. Намітимо етапи побудови такого шляху, який називають кривою Пеано.

Перший етап: відрізок та квадрат розбиваються на чотири рівні частини і відрізку ставиться у відповідність крива всередині квадрата, яка зображена на рис. 1.1.

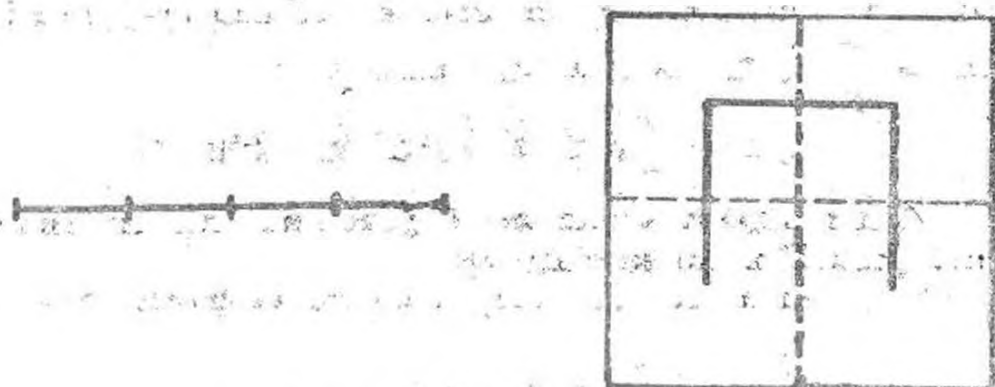


Рис. 1.1

Другий етап зображений на рис. 1.2.

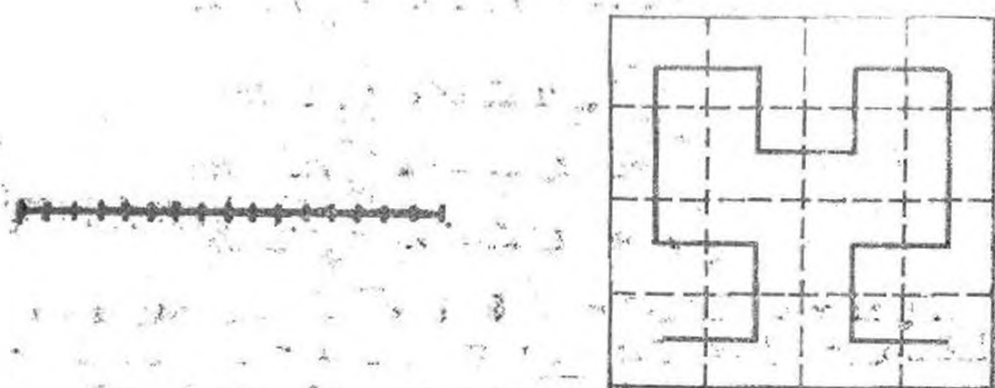


Рис. 1.2

Границею шляхів, що одержуються на кожному етапі, буде шлях, який заповнює квадрат повністю [5].

Отже, на радіус-вектор $r(t)$, що задає деякий шлях, необхідно накладати додаткові обмеження, щоб він став об'єктом диференціальної геометрії.

Згадаємо деякі визначення, що були дані в курсі аналітичної геометрії.

Взаємно однозначне та неперервне відображення, обернене до якого також неперервне, називається топологічним відображенням.

Нехай X — множина точок на площині або у просторі, P — довільна точка множини X . Околом $U(P)$ точки P в X називається переріз відкритої кулі $D_r(P)$ (у тривимірному випадку), або круга (у двовимірному випадку)

з центром в точці P з множиною X , тобто $U(P) = X \cap D_\varepsilon(P)$.

Множина X називається відкритою, коли разом із кожною своєю точкою вона має в собі деякий її отвір.

Наприклад, внутрішність круга — відкрита множина на площині R^2 .

Круг разом із колом, що його обмежує, на площині не є відкритою множиною.

Множина називається лінійно зв'язною, коли для будь-яких точок P та Q , які належать цій множині, існує неперервний шлях, що з'єднує точки P , Q та цілком лежить у множині.

Образ відкритого інтервалу при топологічному відображенні його на площину або у простір називається елементарною кривою; тобто елементарна крива гомеоморфна і відкритому інтервалу, і прямій.

Одна і та ж елементарна крива може бути задана різними вектор-функціями, які задають різні параметризації цієї кривої.

Множину точок простору (або площини) будемо називати вкладеною кривою, коли ця множина зв'язна і кожна її точка має отвір, що є елементарною кривою.

Зануреною кривою називається геометричне місце точок у просторі, яке є образом вкладеної кривої при неперервному відображенні, причому неперервне відображення локально є топологічним.

Занурена крива може мати самоперетин.

Далі розглянуто тільки елементарні криві, оскільки локально всі криві елементарні.

Не всі елементарні криві є об'єктами диференціальної геометрії. Вони можуть бути досить складними. Вони не можуть заповнювати квадрат, але серед них є криві, образи яких заповнюють множину плоскої лебегової міри, скільки завгодно близької до одиниці.

Таким чином, щоб елементарна крива стала об'єктом диференціальної геометрії, потрібні додаткові умови. Знайдемо ці умови. Для цього, насамперед, розглянемо декілька прикладів кривих на площині, що задані аналітичними вектор-функціями $ir = r(t) = (f^1(t), f^2(t))$, де $f^i(t) \in C^k$, $k \geq 1$, $i = 1, 2$.

Приклади. 1. $\begin{cases} x = t^2; \\ y = t^3, \end{cases} -\infty < t < \infty$ (рис. 1.3).

2. $\begin{cases} x = t^2; \\ y = t^4, \end{cases} -\infty < t < \infty$ (рис. 1.4).

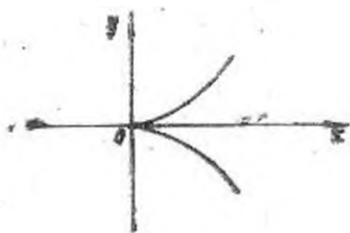


Рис. 1.3

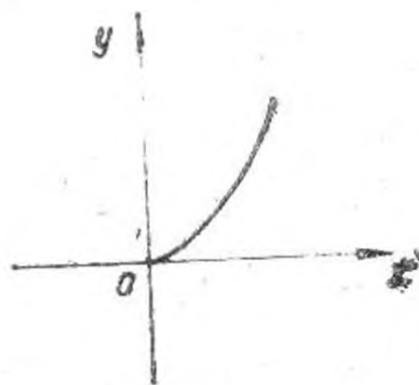


Рис. 1.4

3. $\begin{cases} x = t^2(1+t); \\ y = t^4, \end{cases} -\infty < t < \infty$ (рис. 1.5).

4. $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t, \end{cases} -\infty < t < \infty$ (рис. 1.6).

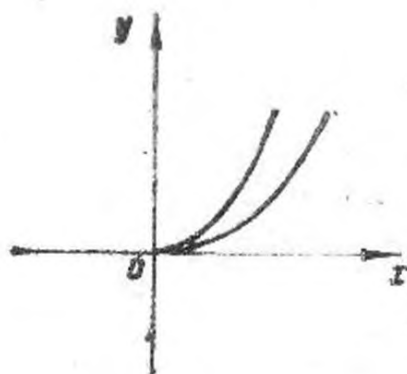


Рис. 1.5

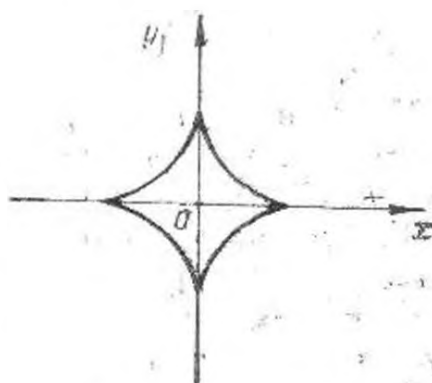


Рис. 1.6

5. $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t; \\ y = b \operatorname{sh} t, \end{cases} -\infty < t < \infty, a > 0$ (рис. 1.7).

6. $\begin{cases} x = a \cos t; \\ y = a \sin t, \end{cases} -\infty < t < \infty$ (рис. 1.8).

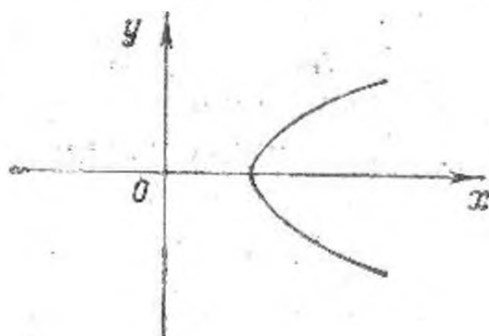


Рис. 1.7

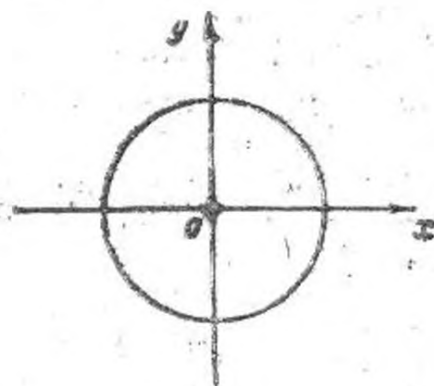


Рис. 1.8

У всіх прикладах вектор-функції $r(t)$ аналітичні. Але в прикладах 1—4 на кривих є особливі точки, в яких не існує дотичної.

Зауважимо, що в цих особливих точках $r'(t) = 0$. В прикладах же 5 та 6 у всіх точках кривої $r'(t) \neq 0$.

Визначення. Лінійно зв'язна множина на площині або у просторі називається регулярною класу C^k (C^∞ , аналітичною) кривою, якщо у кожній точці цієї множини існує окіл такий, що в ньому множина допускає параметризацію у вигляді гладкої вектор-функції $r = r(t) \in C^k$, $k \geq 1$ (C^∞ , аналітичної), $t \in (a, b)$ і в цьому околі $r'(t) \neq 0$. Така параметризація називається регулярною.

Зауваження. У визначенні регулярної кривої слова «існує параметризація» суттєві.

Приклад. Нехай крива задана радіус-вектором $r = (t^3, t^7)$. Тоді $r' = (3t^2, 7t^6)$ і $r'(t) = 0$ при $t = 0$. Але це не значить, що крива не регулярна; може статися, що існує інша, краща параметризація цієї кривої. І дійсно, введемо новий параметр

$\tau = t^3$; крива буде тоді задана радіус-вектором $r = \left(\tau, \tau^{\frac{7}{3}}\right)$, $r(\tau) \in C^2$ і $r' = \left(1, \frac{7}{3}\tau^{\frac{4}{3}}\right) \neq 0$ для будь-якого τ .

Якщо існує якась регулярна параметризація кривої, то їх існує нескінченно багато.

Дійсно, нехай $r = r(t)$, $a < t < b$ — деяка регулярна параметризація кривої. Розглянемо регулярну функцію $t = t(\tau)$, де $\alpha < \tau < \beta$, $t'(\tau) \neq 0$ для будь-якого τ і $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$. Тоді $r = r(t(\tau))$ — інша регулярна параметризація.

В аналітичній геометрії розглядалися різні задання кривих: параметричне, неявне та явне.

Кажуть, що крива на площині задана явно, коли вона є графіком функції $x^2 = f(x^1)$, де $a < x^1 < b$. У просторі явно задана крива — це множина точок з координатами $(x^1, F^2(x^1), F^3(x^1))$, де $a < x^1 < b$, $F^2(x^1)$ і $F^3(x^1)$ — неперервні функції. Якщо провести площину $x^1 = x_0^1$, де $a < x_0^1 < b$ перпендикулярно до осі x^1 , то вона перетне криву в одній точці. Тим самим кожній точці $x \in (a, b)$ ставиться у відповідність точка кривої $(x, F^2(x), F^3(x))$. З огляду на неперервність функцій F^2, F^3 це відображення є топологічним. Отже, явно задана крива — це елементарна крива.

Теорема 1. Регулярна крива в околі будь-якої своєї точки може бути задана явно, причому функції явного

задання кривої мають той же клас регулярності, що і сама крива.

Доведення. Оскільки крива регулярна, її можна параметризувати так, що радіус-вектор $r(t) = (f^1(t), f^2(t), f^3(t)) \in C^k, k \geq 1$ і $\left(\frac{df^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df^2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{df^3}{dt}\right)^2 \neq 0$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\frac{df^2}{dt} \neq 0$ в точці P кривої. Нехай $P = r(t_0)$. Таким чином, $\frac{df^2}{dt}(t_0) \neq 0$. Отже, з огляду на неперервність $\frac{df^2}{dt}, \frac{df^2}{dt} \neq 0$ в деякому околі точки P . Тоді $f^1(t)$ — строго монотонна функція і згідно з теоремою про обернену функцію існує функція $t = \chi(x^1)$, яка обернена до функції f^1 , тобто $x^1 \equiv f^1(\chi(x^1))$, якщо $|t - t_0| < \varepsilon$ і $\chi(x^1)$ належить тому ж класу регулярності, що і $f^1(t)$.

В ε -околі точки P криву можна параметризувати так:

$$\begin{cases} x^1 = \chi(x^1); \\ x^2 = f^2(\chi(x^1)); \\ x^3 = f^3(\chi(x^1)). \end{cases}$$

А це і є явне задання кривої.

Неявно заданою кривою на площині будемо називати множину точок цієї площини, координати яких задовольняють рівнянню $\Phi(x, y) = 0$.

Подібно до кривої на площині, неявно задана крива у просторі — це множина точок простору, координати яких задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} \Phi^1(x^1, x^2, x^3) = 0; \\ \Phi^2(x^1, x^2, x^3) = 0. \end{cases}$$

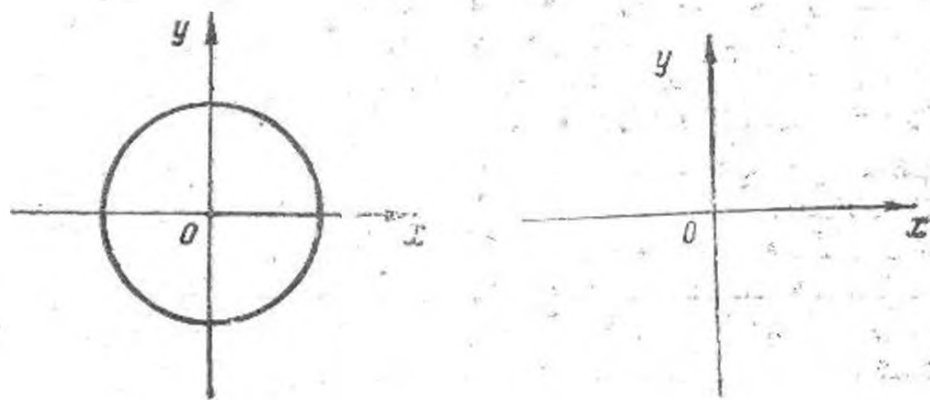


Рис. 1.9.

Неявно задана крива не завжди є регулярною кривою.

Приклади. 1. $\varphi(x, y) = (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0$ (рис. 1.9). Це не крива, оскільки є ізольована точка.

2. $\varphi(x, y) = xy = 0$ (рис. 1.10). Окіл точки O не є елементарною кривою.

3. $\varphi(x, y) = x^2 - y^2 - 1 = 0$ (рис. 1.11). Це гіпербола. Вона складається з двох компонент і тому не є регулярною кривою, незважаючи на те, що кожна компонента зв'язна і є елементарною кривою.

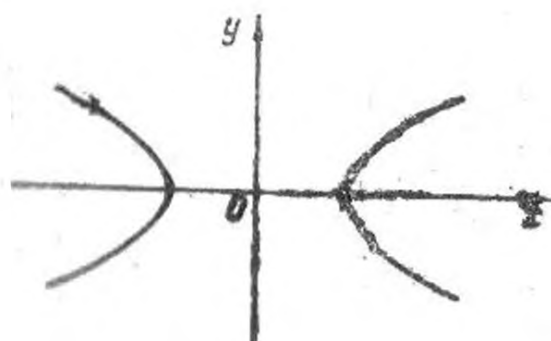


Рис. 1.11

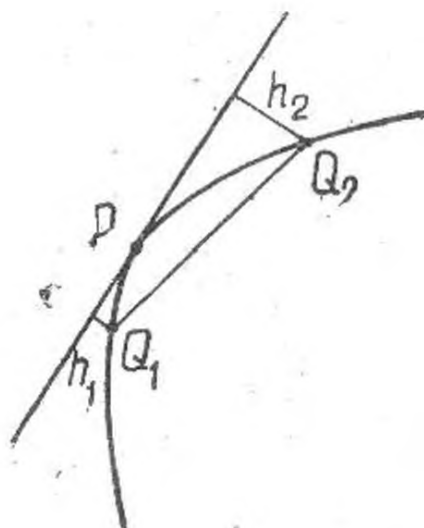


Рис. 1.12

У прикладах 1 та 2 особлива точка $O(0; 0)$ характеризується тим, що $\varphi_x(0, 0) = \varphi_y(0, 0) = 0$. Відповімо на запитання, при яких умовах неявно задана крива локально є регулярною кривою.

Теорема 2. Якщо на площині крива задана неявно $\varphi(x, y) = 0$ і виконуються такі умови: 1) $\varphi(x, y) \in C^k$, $k \geq 1$; 2) $\varphi(x_0, y_0) = 0$; 3) $\varphi_x^2(x_0, y_0) + \varphi_y^2(x_0, y_0) \neq 0$, тоді існує окіл $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \delta$ точки $P(x_0, y_0)$, такий, що множина точок, які задовольняють рівнянню $\varphi(x, y) = 0$ і лежать у цьому околі, утворюють явно задану криву $y = f(x)$, де функція f має ту ж гладкість, що і функція φ .

Доведення. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Згідно з теоремою про неявну функцію існує такий окіл $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \delta$ точки P , що множина точок, які лежать в цьому околі і задовольняють рівнянню $\varphi(x, y) = 0$, співпадає з множиною точок, що задовольняють рівнянню $y = f(x)$ і $f(x) \in C^k$. Тобто в цьому околі $\varphi(x, f(x)) \equiv 0$, а інших точок, що задовольняють рівнянню $\varphi(x, y) = 0$, крім точок $(x, f(x))$, немає.

Якщо $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$, то з умови 3 теореми випливає, що $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді неявно задана крива в околі точки P буде графіком функції $x = \varphi(y)$.

Зауваження. 1. Теореми 1, 2 стверджують, що в малому околі точки криві, які в них розглядаються, є елементарними кривими.

2. З теореми 2 випливає, що в околі точки регулярну криву можна задати параметрично. Дійсно, явне задання — окремий випадок параметричного. В подальшому, коли не указане протилежне, будемо вважати, що параметризація t регулярної кривої $r(t)$ саме та, в якій $r'(t) \neq 0$ і клас гладкості вектор-функції $r(t)$ найвищий.

Задача. Сформулювати теорему для неявно заданої просторової кривої

$$\begin{cases} \Phi^1(x^1, x^2, x^3) = 0; \\ \Phi^2(x^1, x^2, x^3) = 0; \end{cases}$$

аналогічну теоремі 2. Сформулювати аналогічну теорему для простору E^n .

1.3. Дотична до кривої

Нехай P — фіксована, а Q_1 та Q_2 — довільні точки на елементарній кривій γ . Зокрема, можна вважати, що одна з цих точок співпадає з P .

Визначення. Коби існує така пряма l , що проходить через точку P елементарної кривої γ і $\lim_{Q_1, Q_2 \rightarrow P} \frac{h_1 + h_2}{d} = 0$,

де Q_1, Q_2 — точки кривої γ , h_1, h_2 — відстань від точок Q_1 та Q_2 до прямої l , d — відстань від точки Q_1 до точки Q_2 , то вона називається дотичною до кривої γ в точці P (рис. 1.12).

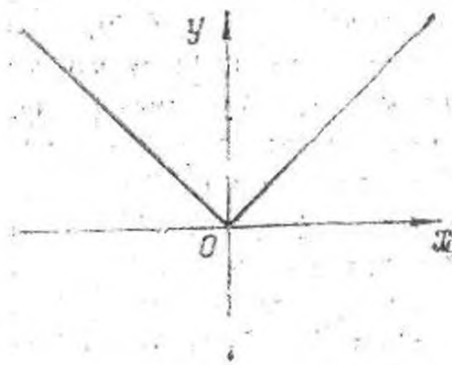


Рис. 1.13

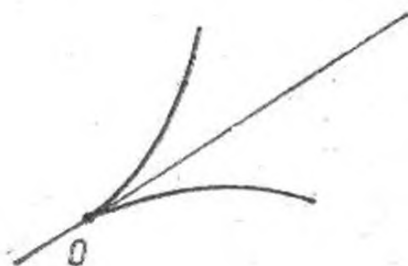


Рис. 1.14

Якщо одна з точок Q_1 та Q_2 весь час співпадає з точкою P , а друга лежить по одну сторону від точки P , то одержимо визначення півдотичної до вітки кривої.

Проведемо січну через точки Q_1, Q_2 . Кут φ між січною та дотичною задовольняє умові $\sin\varphi \leq (h_1 + h_2)/d$. Тоді за умови існування дотичної вона є границею січних.

Приклад. Розглянемо криву $y = |x|$ (рис. 1.13). Можна показати, що в точці $O(0; 0)$, яка належить цій кривій, дотичної не існує. Ця крива елементарна, але не регулярна, оскільки $y = |x|$ не має похідної в точці $O(0, 0)$.

Теорема 3. В кожній точці регулярної кривої $r = r(t)$ існує дотична. Напрямним вектором є вектор $r'(t)$.

Зауваження. Тепер зрозумілий геометричний зміст обмеження $r'(t) \neq 0$ у визначенні регулярної кривої. Відомо, що це обмеження еквівалентне вимозі існування дотичної до кривої.

Доведення. Крива $r = r(t)$ регулярна. Отже, $r(t) \in C^k$, $k > 1$ і $r'(t) \neq 0$. Розглянемо вектор $\tau = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$. Доведемо, що пряма l , яка проходить через точку $P(r(t))$ в напрямку вектора τ , є дотична. Для цього розглянемо точки $Q_1(r(t_1))$, $Q_2(r(t_2))$, відстань d від точки Q_1 до точки Q_2 $d = |r(t_1) - r(t_2)|$ і відстань h_1, h_2 від точок Q_1, Q_2 до прямої l ,

$$h_1 = |\tau \times (r(t_1) - r(t))|, \quad h_2 = |\tau \times (r(t_2) - r(t))|.$$

Нехай для визначеності $t_2 > t > t_1$. Тоді $|t_2 - t| + |t - t_1| = |t_2 - t_1|$. Оскільки

$$\begin{aligned} & \frac{|(r(t_1) - r(t)) \times \tau|}{|t_2 - t_1|} + \frac{|(r(t_2) - r(t)) \times \tau|}{|t_2 - t_1|} \\ & \leq \frac{|r(t_2) - r(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \\ & \leq \frac{|(r(t_1) - r(t)) \times \tau|}{|t_1 - t|} + \frac{|(r(t_2) - r(t)) \times \tau|}{|t_2 - t|} \\ & \leq \frac{|r(t_2) - r(t_1)|}{|t_2 - t_1|} \end{aligned}$$

то при $t_1 \rightarrow t, t_2 \rightarrow t$

$$0 \leq \lim_{Q_1, Q_2 \rightarrow P} \frac{h_1 + h_2}{d} \leq \frac{|r'(t) \times \tau| + |r'(t) \times \tau|}{|r'(t)|} = 0.$$

Якщо $t_1 = t$, то $h_1 = 0$ і доведення далі проводиться аналогічно.

Зауваження. В кожній точці регулярної кривої існує єдина дотична. Дійсно, нехай в точці P є дві дотичні: крім тієї, що має напрямний вектор τ , ще існує дотична з напрямним вектором α , $|\alpha| = 1$. Тоді $\alpha = \pm \tau$.

Нехай t — час, $r(t)$ — радіус-вектор кривої, яка є траєкторією руху матеріальної точки. Тоді

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r(t + \Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

— вектор миттєвої швидкості цієї матеріальної точки, $|r'(t)| = V$ — абсолютна величина швидкості матеріальної точки в даний момент часу.

Нехай $r = r(t)$ — регулярна крива. Запишемо рівняння дотичної до цієї кривої в точці $r(t_0)$, що відповідає значенню параметра t_0 , причому $r'(t_0)$ — напрямний вектор дотичної. Тоді $R(\sigma) = r(t_0) + r'(t_0)\sigma$ — параметричне рівняння дотичної. Можна записати рівняння дотичної в канонічному вигляді:

$$\frac{x^1 - f^1(t_0)}{\frac{df^1(t_0)}{dt}} = \frac{x^2 - f^2(t_0)}{\frac{df^2(t_0)}{dt}} = \frac{x^3 - f^3(t_0)}{\frac{df^3(t_0)}{dt}}, \quad (1.1)$$

де $(f^1(t_0), f^2(t_0), f^3(t_0)) = r(t_0)$.

Вправа. У шкільному курсі математики рівняння дотичної до кривої, що задана явно, $y = f(x)$ записувалося у вигляді $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Довести, що це рівняння — окремий випадок рівняння (1.1).

Нехай крива на площині задана неявно: $\varphi(x, y) = 0$ і нехай в точці $P(x_0, y_0)$, що лежить на кривій, $\varphi_x^2 + \varphi_y^2 \neq 0$. Тоді згідно з теоремою 2 в околі точки P криву можна задати параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, причому $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Отже, $\varphi(x(t), y(t)) = 0$. Продиференціюємо тотожність по t , одержимо $\varphi_x x' + \varphi_y y' = 0$, звідки випливає, що $n = (\varphi_x, \varphi_y)$ — напрямний вектор нормалі даної кривої в точці P , тобто прямої, перпендикулярної до дотичної. Таким чином, рівняння дотичної до неявно заданої кривої в точці $P(x_0, y_0)$ запишеться у вигляді

$$\varphi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0. \quad (1.2)$$

Приклад. У курсі аналітичної геометрії доведено, що пряма $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ є дотична до еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Щоб одержати рівняння дотичної, було задано частину еліпса явно. Тепер можна одержати рівняння дотичної до еліпса, скориставшись формулою (1.2).

Вправа. Написати рівняння дотичної до просторової кривої, що задана явно.

Нехай регулярна крива задана радіус-вектором $r = r(t)$. Розкладемо радіус-вектор кривої в околі точки $t = t_0$ по формулі Тейлора: $r(t) = r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0)$.

В околі точки $t = t_0$ поведінка кривої істотно визначається доданком $r(t_0) + r'(t_0)(t - t_0)$. Якщо залишити в розкладенні тільки цю лінійну частину, а доданки більш високого порядку відкинути, то одержимо рівняння дотичної.

Нехай регулярна крива задана неявно: $\varphi(x, y) = 0$. Розкладемо функцію $\varphi(x, y)$ в околі точки $P(x_0, y_0)$, що лежить на кривій, за формулою Тейлора: $\varphi(x, y) = \varphi(x_0, y_0) + \varphi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi_y(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2})$. Поведінку кривої в околі точки визначає доданок $\varphi(x_0, y_0) + \varphi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi_y(x_0, y_0)(y - y_0)$, але $\varphi(x_0, y_0) = 0$ і $\varphi_x(x_0, y_0)(x - x_0) + \varphi_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$ — рівняння дотичної до кривої в точці (x_0, y_0) .

Отже, в малому околі точки криву можна замінити дотичною з точністю до нескінченно малих другого порядку.

1.3.1. Особливі точки плоскої кривої

Раніше указано, що криві належать C^k , $k \geq 1$.

Визначення. Точка елементарної кривої називається регулярною, якщо крива допускає регулярну параметризацію в деякому околі цієї точки.

Точка називається особливою, якщо такої параметризації не існує.

З'ясуємо, яка поведінка кривої в околі особливої точки.

Розглянемо плоску криву, що задана аналітичним радіус-вектором $r = (x(t), y(t)) \in C^k$, $k \geq 1$. Нехай $(x'(0))^2 + (y'(0))^2 = 0$. Точка $O(0, 0)$ може бути особливою або регулярною. Якщо точка регулярна, то в околі цієї точки існує краща параметризація, в якій

$$(x'_t(0))^2 + (y'_t(0))^2 \neq 0.$$

Розкладемо в околі точки $O(0, 0)$ функції, що задають криву, за формулою Тейлора:

$$x = c_1 t^m + o(t^m), \quad c_1 \neq 0;$$

$$y = c_2 t^n + o(t^n), \quad c_2 \neq 0.$$

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $m \leq n$. Якщо m — непарне число, то точка O — регулярна.

Справді, якщо ввести новий параметр $\tau = t^m$, то в цій новій параметризації крива буде класу C^1 і $r' \neq 0$ в точці O .

Зворотна точка першого роду — це точка, в якій збігаються дві вітки кривої, кожна з яких має одну й ту ж півдотичну, а вітки кривої розташовані по різні сторони від півдотичної (рис. 1.14).

Приклад.

$$\begin{cases} x = t^2; \\ y = t^3, \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Точка O — зворотна точка першого роду (рис. 1.15).

Зворотна точка другого роду — це точка, в якій збігаються дві вітки кривої, кожна з яких має одну й ту ж півдотичну, а вітки розташовані по одну сторону від півдотичної (рис. 1.16).

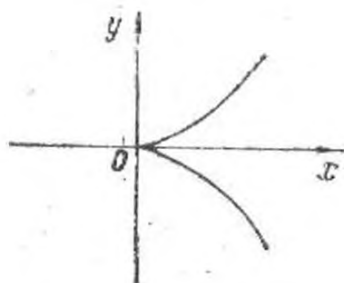


Рис. 1.15



Рис. 1.16

Приклад.

$$\begin{cases} x = t^2; \\ y = t^4(1+t), \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty.$$

Точка O — зворотна точка другого роду (рис. 1.17).

Якщо m — парне число, то точка O особлива: при n непарному O — зворотна точка першого роду; при n парному — зворотна точка другого роду.

Доведення сформульованих тверджень міститься у книзі О. В. Погорелова «Диференціальна геометрія» [15].

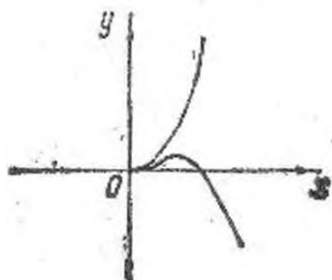


Рис. 1.17

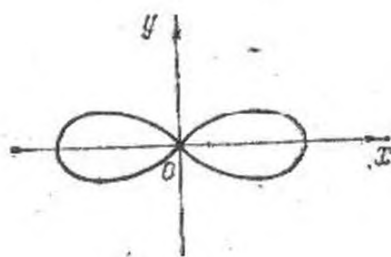


Рис. 1.18

Нехай плоска крива задана неявно: $\varphi(x, y) = 0$, $\varphi \in C^k$, $k \geq 2$ і в точці $P(x_0, y_0)$ кривої $\varphi_x = \varphi_y = 0$. Розкладемо функцію $\varphi(x, y)$ в околі особливої точки P за формулою Тейлора:

$$\varphi(x, y) = [\varphi_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\varphi_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \varphi_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2] \frac{1}{2!} + o((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2).$$

В околі точки P поведінка кривої визначається квадратичною формою

$$\varphi_{xx}(x_0, y_0)(x - x_0)^2 + 2\varphi_{xy}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) + \varphi_{yy}(x_0, y_0)(y - y_0)^2.$$

Позначимо $x - x_0$ через ξ , а $y - y_0$ через η .

Розглянемо можливі випадки.

1. Форма $\varphi_{xx}\xi^2 + 2\varphi_{xy}\xi\eta + \varphi_{yy}\eta^2$ знаковизначена, тобто $\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 > 0$. Тоді вона перетворюється в нуль лише при $\xi = \eta = 0$, при решті ξ, η форма зберігає знак. Таким чином, точка (x_0, y_0) — ізольована точка кривої, тобто в її околі немає інших точок площини, координати яких задовольняють рівнянню $\varphi(x, y) = 0$.

Приклад. Точка $(0, 0)$ — ізольована точка кривої $(x^2 + y^2)(x - 1) = 0$.

2. Форма $\varphi_{xx}\xi^2 + 2\varphi_{xy}\xi\eta + \varphi_{yy}\eta^2$ знаконевизначена, тобто $\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 < 0$. Тоді рівняння $\varphi_{xx}\xi^2 + 2\varphi_{xy}\xi\eta + \varphi_{yy}\eta^2 = 0$ дає дві прямі, що перетинаються. Ці прямі є дотичними до двох віток кривої в точці (x_0, y_0) . Така точка називається вузловою.

Приклад. Точка $O(0, 0)$ — вузлова точка лемніскати Бернуллі (рис. 1.18) $(x^2 + y^2)^2 - 4a^2(x^2 - y^2) = 0$.

3. Нехай $\varphi_{xx}\varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 = 0$ і принаймні одне з чисел φ_{xx} , φ_{yy} , φ_{xy} не дорівнює нулю. Тоді рівняння $\varphi_{xx}\xi^2 + 2\varphi_{xy}\xi\eta + \varphi_{yy}\eta^2 = 0$ задає дві прямі, що співпадають; на них лежать півдотичні до двох віток кривої в точці $P(x_0, y_0)$. Тоді точка P — це або зворотна точка першого роду, або зворотна точка другого роду, або точка самостіку двох віток кривої.

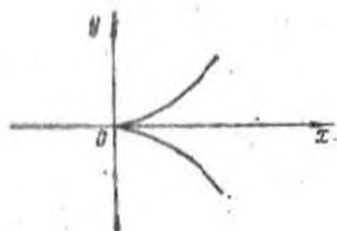


Рис. 1.19

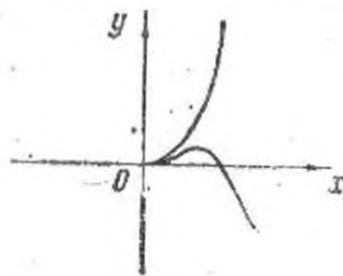


Рис. 1.20

Приклади. 1. Точка $O(0, 0)$ — зворотна точка I роду кривої $y^2 = x^3$ (рис. 1.19).

2. Точка $O(0, 0)$ — зворотна точка II роду кривої $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ (рис. 1.20).

3. Точка $O(0, 0)$ — точка самостику кривої $y^2 - x^4 = 0$ (рис. 1.21).

Доведення сформульованих вище тверджень відносно поведінки неявно заданої кривої в околі особливої точки можна знайти в книзі [15] та «Курсі диференціальної геометрії» П. К. Рашевського [20].

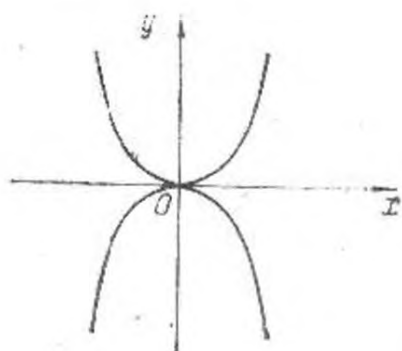


Рис. 1.21

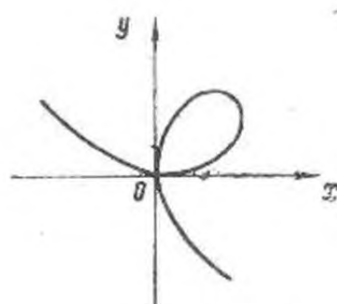


Рис. 1.22

4. Якщо $\varphi_{xx} = \varphi_{xy} = \varphi_{yy} = 0$ в точці $P(x_0, y_0)$, то для з'ясування поведінки кривої в околі цієї точки потрібно розглянути треті похідні функції $\varphi(x, y)$.

Зауваження. Поняття регулярності кривої, що задана параметрично або неявно, різні.

Приклад. Розглянемо криву l , що задана неявно рівнянням $(x+y)^3 = xy$ (рис. 1.22). Точка $O(0; 0)$ — вузлова точка цієї кривої. Отже, крива l як неявно задана крива має особливу точку.

Задамо ту ж криву l параметрично:

$$\begin{cases} x = \tau^2(1 - \tau); \\ y = \tau(1 - \tau^2), \quad -\infty < \tau < +\infty; (x')^2 + (y')^2 \neq 0 \end{cases}$$

при будь-якому значенні τ , тобто крива l регулярна. Таким чином, крива l як параметрично задана не має особливих точок; точці $O(0; 0)$ відповідають два різних значення параметра τ . Це занурена крива.

Задача. Параметризувати лист Декарта регулярним чином.

Задача. Лист Декарта, який може бути заданий неявно рівнянням $x^3 + y^3 = 3axy$, має особливість в точці $O(0; 0)$. Параметризувати його регулярним чином.

1.3.2. Стична площина кривої

Визначення. Площина π називається стичною площиною кривої γ в точці P , якщо $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{h}{d^2} = 0$, де Q — точка кривої γ , d — відстань від точки Q до площини π (рис. 1.23).

Теорема 4. У кожній точці P регулярної кривої класу C^3 існує стична площина. Якщо вектори r' та r'' в точці P не колінеарні, то така площина єдина. Якщо вектори r' та r'' в точці P колінеарні, то будь-яка площина, що проходить через дотичну в точці P , є стичною в цій точці.

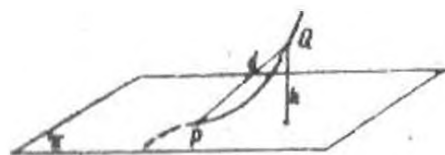


Рис. 1.23

Доведення. Насамперед доведемо, що коли вектори r' та r'' лінійно незалежні в деякій регулярній параметризації, то вони лінійно незалежні і в будь-якій іншій регулярній параметризації, тобто ця умова геометрична, вона не залежить від параметризації. Справді, нехай $r = r(t)$ та $r = r(\sigma)$ — дві різні регулярні параметризації кривої. Тоді $r(\sigma) = r(t(\sigma))$, де $t = t(\sigma)$ — регулярна функція класу C^2 , для якої $t'_\sigma \neq 0$ і $r'_\sigma = r'_t t'_\sigma$, $r''_\sigma = r''_t (t'_\sigma)^2 + r'_t t''_\sigma$. Звідси $r'_\sigma \times r''_\sigma = (t'_\sigma)^3 (r'_t \times r''_t)$. Оскільки $t'_\sigma \neq 0$, то $r'_t \times r''_t$ і $r'_\sigma \times r''_\sigma$ одночасно рівні нулю або одночасно відрізняються від нуля.

Нехай $r(t)$ — радіус-вектор точки P , $r(t + \Delta t)$ — радіус-вектор точки Q . Позначимо через n одиничну нормаль стичної площини π , що проходить через точку P . Тоді

$$d = |r(t + \Delta t) - r(t)|; \quad h = |\langle r(t + \Delta t) - r(t), n \rangle|;$$

$$\begin{aligned} \frac{h}{d^2} &= \frac{|\langle r'(t) \Delta t + \frac{1}{2} r''(t) (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2), n \rangle|}{(r'(t) \Delta t + o(\Delta t))^2} = \\ &= \frac{|\langle r'(t), n \rangle \Delta t + \frac{1}{2} \langle r''(t), n \rangle (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2)|}{(r'(t))^2 (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2)} = \\ &= \frac{\left| \frac{\langle r'(t), n \rangle}{\Delta t} + \frac{1}{2} \langle r''(t), n \rangle + \varepsilon_1(\Delta t) \right|}{(r'(t))^2 + \varepsilon_2(\Delta t)}, \end{aligned}$$

$$\text{де } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0.$$

Оскільки $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h}{d^2} = 0$, то $\langle r'(t), n \rangle = \langle r'', n \rangle = 0$. Таким чином, якщо стична площина існує, то вектори $r'(t)$ і $r''(t)$ їй паралельні.

Доведемо при виконанні умов теореми існування стичної площини. Нехай площина π буде паралельна векторам $r'(t)$ та $r''(t)$. Тоді $\langle r'(t), n \rangle = \langle r''(t), n \rangle = 0$ і, отже, $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h}{d^2} = 0$, тобто площина π стична.

Оскільки стична площина паралельна векторам $r'(t)$ та $r''(t)$, очевидно, що вона буде єдиною, якщо вектори $r'(t)$ та $r''(t)$ не колінеарні. Якщо ж ці вектори колінеарні, то будь-яка площина, яка проведена через дотичну до кривої, буде стичною площиною.

Складемо рівняння стичної площини кривої $r = r(t)$ в точці P , яка відповідає значенню параметра $t = t_0$. Нехай $r'(t_0) \times r''(t_0) \neq 0$. Тоді $r'(t_0) \times r''(t_0)$ буде вектором нормалі стичної площини, а її рівняння запишеться у вигляді

$$\langle R - r(t_0), r'(t_0) \times r''(t_0) \rangle = 0$$

або

$$(R - r(t_0), r'(t_0), r''(t_0)) = 0.$$

Якщо подати радіус-вектор $r(t)$ кривої в координатному вигляді, то рівняння стичної площини запишеться так:

$$\begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо крива має клас регулярності C^1 , а не C^2 , то стична площина може не існувати.

Приклади. 1. Розглянемо криву (рис. 1.24), що складена з двох півкіл:

$$\begin{cases} z = 0; \\ x = \sqrt{2y - y^2}; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0; \\ x = -\sqrt{-z^2 + 2z}. \end{cases}$$

В точці $O(0, 0)$ у кривої є дотична, але стичної площини немає. Для однієї вітки кривої стичною площиною є площина XOY , а для другої — XOZ .

2. Розглянемо гвинтову лінію, що задана параметрично: $x = a \cos t$; $y = a \sin t$; $z = bt$. Складемо рівняння дотичної та стичної площини в точці, що відповідає значенню параметра $t = 0$:

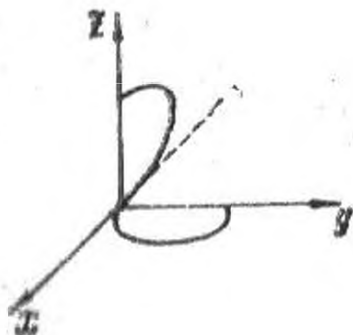


Рис. 1.24

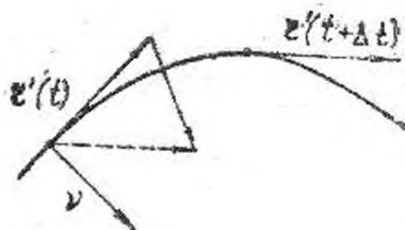


Рис. 1.25

$$\begin{cases} x(0) = a; \\ y(0) = 0; \\ z(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x'(0) = 0; \\ y'(0) = a; \\ z'(0) = b; \end{cases} \quad \begin{cases} x''(0) = -a; \\ y''(0) = 0; \\ z''(0) = 0. \end{cases}$$

Рівняння дотичної в точці $t = 0$:

$$x = a; \quad y = at; \quad z = bt, \quad -\infty < t < +\infty.$$

Рівняння стичної площини в точці $t = 0$:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ 0 & a & b \\ -a & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

або $by - az = 0$.

3. Розглянемо криву $y = x^3$. В точці $O(0; 0)$ будь-яка площина, що проходить через вісь Ox , є стичною площиною цієї кривої.

Зуважимо, що для плоскої кривої площина її розташування є стичною площиною.

1.4. Головна нормаль кривої

У кожній точці регулярної кривої існує площина прямих, що проходять через цю точку і перпендикулярні до дотичної. Вони називаються нормальними кривої. Нехай стична площина в точці єдина.

Визначення. Нормаль кривої в точці, що лежить в стичній площині, називається головною нормаллю.

Будемо через τ позначати одиничний вектор дотичної, а через ν — одиничний вектор головної нормалі кривої.

Якщо вектор τ зафіксований, то вектор ν можна вибрати двома способами — залежно від напрямку. Покажемо, що вектор ν можна вибрати однозначно і цей вибір не залежить від параметризації. Нехай $r = r(t)$.

і $r=r(\sigma)$ — дві різні регулярні параметризації кривої. Вище доведено, що

$$r'_\sigma \times r''_\sigma = (t'_\sigma)^3 (r'_t \times r''_t). \quad (1.3)$$

Розглянемо два випадки.

1. $t'_\sigma > 0$. У цьому випадку вектори r'_t і r''_t однаково напрямлені, оскільки $r'_\sigma = t'_\sigma \cdot r'_t$. Із рівності (1.3) випливає, що вектори r''_t і r''_σ лежать в одній півплощині стичної площини, що обмежена дотичною, або що пари r'_t, r''_t і r'_σ, r''_σ задають одну й ту ж орієнтацію стичної площини.

2. $t'_\sigma < 0$. У цьому випадку вектори r'_t та r''_t протилежно напрямлені, але і вектори $r'_\sigma \times r''_t$, $r'_\sigma \times r''_\sigma$ також протилежно напрямлені. Отже, як і у випадку 1, вектори r''_t і r''_σ лежать в одній півплощині, що обмежена дотичною.

Будемо вибирати вектор головної нормалі v так, щоб він лежав у тій же півплощині, що і вектори r''_t, r''_σ .

У природній параметризації $\langle r'_s, r''_s \rangle = 0$, і тому головна нормаль v кривої співнапрямлена з вектором r''_s . Вектор головної нормалі напрямлений в сторону опуклості кривої. Щоб проілюструвати це твердження, досить розглянути вектор $r'(t + \Delta t) - r'(t)$ (рис. 1.25) і згадати, що

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{r'(t + \Delta t) - r'(t)}{\Delta t} = r''(t).$$

Введемо бінормаль кривої. Нехай γ — регулярна крива класу C^2 в просторі E^3 і P — точка кривої. Нехай в цій точці стична площина єдина.

Визначення. Бінормаллю кривої γ в точці P називається пряма, що проходить через точку P і перпендикулярна до стичної площини. Одиничний вектор β , що задає напрям бінормалі, будемо вибирати таким чином: $\beta = \tau \times v$.

1.5. Довжина кривої

При афінному перетворенні $y = ax + b$ на прямій відношення довжин відповідних відрізків є величина стала, що дорівнює $|a|$.

Розглянемо пряму l в просторі, що задана параметрично: $R = r_0 + at$, де $a \neq 0$ — напрямний вектор. Нехай $R_1 = r_0 + at_1$, $R_2 = r_0 + at_2$ — радіус-вектори двох точок на l . Тоді $|R_2 - R_1| = |a| |t_2 - t_1|$, тобто при відображенні $l \rightarrow r_0 + at$ в просторі довжина кожного її відрізка збільшується в $|a|$ разів (рис. 1.26).

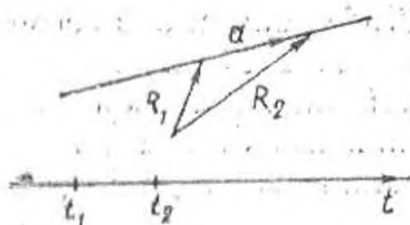


Рис. 1.26

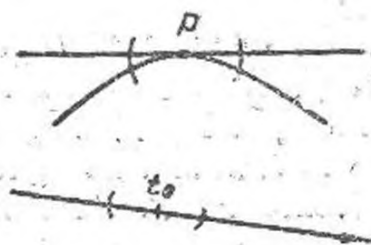


Рис. 1.27

Розглянемо тепер довільну регулярну криву γ , що задана радіус-вектором $r=r(t)$. Запишемо рівняння дотичної до кривої в точці $P(t_0)$:

$$R = r(t_0) + r'(t_0)\sigma.$$

В околі точки P криву можна замінити дотичною з точністю до нескінченно малих другого порядку. На дотичній образ околу точки одержується розтягуванням його в $|r'(t_0)|$ разів (рис. 1.27). Проводячи дотичну в різних точках кривої, одержуємо різні коефіцієнти розтягування. Це робить природним наступне визначення.

Визначення. Довжиною регулярної кривої γ , що параметризована радіус-вектором $r=r(t)$, $a \leq t \leq b$, називається число

$$s[a, b] = \int_a^b |r'(t)| dt.$$

Зауважимо, що оскільки $r(t) \in C^1$, то $|r'(t)|$ неперервна функція і, отже, інтеграл існує.

Перевіримо коректність визначення, тобто покажемо, що довжина кривої не залежить від параметризації. Справді, нехай $r=r(\sigma)$ — інша регулярна параметризація кривої. Тоді існує така регулярна функція $t=t(\sigma)$, $t'_\sigma \neq 0$, що $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$ і $r(\sigma) = r(t(\sigma))$, $\alpha \leq \sigma \leq \beta$. Знайдемо по визначенню довжину кривої γ у цій новій параметризації:

$$s[\alpha, \beta] = \int_\alpha^\beta |r'_\sigma| d\sigma = \int_\alpha^\beta |r'_t| t'_\sigma d\sigma = \int_a^b |r'_t| dt.$$

Довжина кривої — аддитивна функція кривої. Справді, нехай $r(a)$, $r(b)$, $r(c)$ — радіус-вектори відповідно послідовних точок P_1, P_2, P_3 кривої. Тоді

$$\begin{aligned} s[a, c] &= \int_a^c |r'(t)| dt = \int_a^b |r'(t)| dt + \int_b^c |r'(t)| dt = \\ &= s[a, b] + s[b, c]. \end{aligned}$$

У книзі О. В. Погорелова «Диференціальна геометрія» [15] реалізовано синтетичний підхід до визначення довжини кривої. Довжина кривої визначається як точна верхня границя по правильно вписаних ламаних.

Довести, що обидва визначення регулярної кривої еквівалентні.

Введемо натуральну параметризацію кривої.

Приклад. Нехай крива задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}, \quad -\infty < t < \infty. \end{cases}$$

Це пряма (рис. 1.28). Система рівнянь, що задає пряму, є параметризацією з низькою регулярністю в початку координат. Раніше було показано, що одну й ту ж криву можна параметризувати по-різному. І природно виникає питання: яка параметризація найкраща в тому розумінні, що в цій параметризації регулярність кривої максимальна? Виявляється, що кращою параметризацією регулярної кривої є параметризація довжиною дуги цієї кривої.

Нехай регулярна крива задана радіус-вектором $r = r(t)$, $r(t) \in C^1$, $r'(t) \neq 0$; P_0 — фіксована точка кривої, що відповідає значенню параметра t_0 ; σ — довжина дуги кривої від фіксованої точки P_0 до точки P ; $\sigma = \sigma(t)$. Визначимо функцію $s(t)$ так:

$$s(t) = \begin{cases} \sigma(t), & \text{якщо } t_0 \leq t; \\ -\sigma(t), & \text{якщо } t_0 > t. \end{cases}$$

Функція $s(t)$ строго монотонна. Тому s можна взяти за параметр. Така параметризація називається натуральною.

Доведемо, що коли $r = r(t)$ — деяка параметризація кривої, $r(t) \in C^k$, $k \geq 1$ і $r'(t) \neq 0$, то $r(s) \in C^k$, $r'(s) \neq 0$, де $r = r(s)$ — натуральна параметризація цієї ж кривої.

Дійсно, $s_t = |r'(t)| > 0$, якщо $r'(t) \neq 0$. Оскільки $r'(t) \in C^{k-1}$, то функція $s(t) \in C^k$. Отже, $s(t)$ — строго монотонна регулярна функція; тому існує обернена до неї функція $t = t(s)$, яка належить тому ж класу C^k , і $t'_s = \frac{1}{s_t} =$

$= \frac{1}{|r'(t)|}$. Підставимо функцію $t = t(s)$ в первісну параметризацію: $r = r(t) = r(t(s)) = r(s)$, і одержимо натуральну параметризацію. Отже, натуральна параметризація регулярна і належить тому ж класу C^k , що і первісна параметризація.

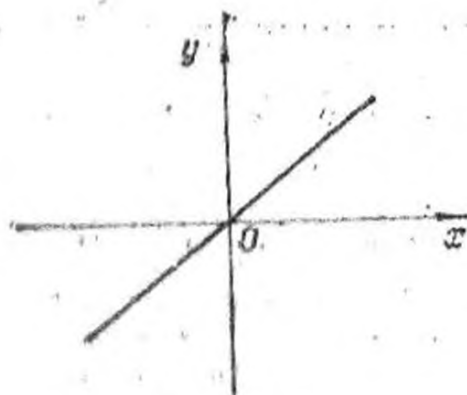


Рис. 1.28

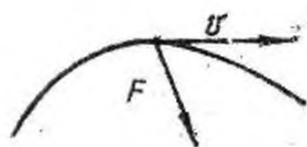


Рис. 1.29

Зауважимо, що коли $r = r(s)$ — натуральна параметризація кривої, то $|r'(s)| = 1$. Дійсно,

$$\frac{dr(s)}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dr(t)}{dt} \cdot \frac{1}{\left| \frac{dr(t)}{dt} \right|}, \text{ звідки } \left| \frac{dr(s)}{ds} \right| = 1.$$

1.6. Кривина кривої

Якщо на матеріальну точку, що має в початковий момент швидкість V , не діють ніякі сили, вона рухається по прямій. Якщо матеріальна точка має в початковий момент часу швидкість V і на неї діє сила F , причому $F \times V \neq 0$, то точка рухається по кривій (рис. 1.29).

Визначимо кількісну міру відхилення кривої від дотичної.

Визначення. Нехай P — довільна точка регулярної кривої γ , Q — точка кривої, що близька до точки P . Позначимо через $\Delta\varphi$ кут між дотичними в точках P та Q , а через Δs — довжину дуги кривої, вміщеної між P та Q (рис. 1.30). Тоді $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = k_1$, коли він існує, називається кривиною кривої γ в точці P .

Зауважимо, що криві, які суміщаються рухом, мають у відповідних точках рівні кривини.

Приклади. 1. Знайдемо кривину кола радіуса R . Задамо коло параметрично: $x = R \cos\varphi$; $y = R \sin\varphi$. Нехай $\Delta\varphi$ — кут між дотичною до кола в точці P , що відповідає значенню параметра φ , і дотичною в точці Q , що відповідає значенню параметра $\varphi + \Delta\varphi$. Тоді довжина дуги $\Delta s = R\Delta\varphi$ і

$$k_1(\varphi) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{R\Delta\varphi} = \frac{1}{R}.$$

2. Кривина прямої дорівнює нулю.

3. Розглянемо криву, що складається з півкола радіуса R з центром в точці $(0, R)$, яке лежить в півплощині $x \geq 0$ (рис. 1.31), і від'ємної півосі Ox . У цієї кривої в точці $O(0, 0)$ кривина не визначена: границя $\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$ дорівнює нулю, якщо наближатися до точки O зліва, і дорівнює $\frac{1}{R}$, коли наближатися до точки O справа. Зауважимо, що ця крива належить класу C^1 , але не належить класу C^2 .

Теорема 5. У кожній точці регулярної кривої класу C^2 кривина визначена. Якщо $r = r(s)$ — регулярна параметризація кривої, то $k_1(s) = |r''(s)|$. Якщо $r = r(t)$ — довільна регулярна параметризація, то

$$k_1(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}. \quad (1.4)$$

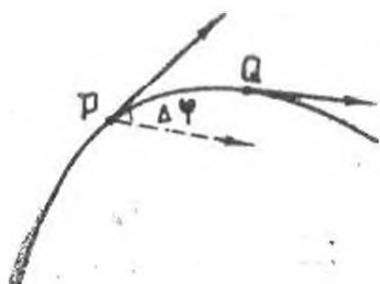


Рис. 1.30

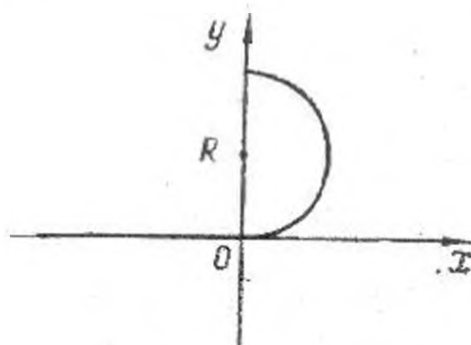


Рис. 1.31

Доведення. Нехай крива параметризована натуральним параметром s . Точкам P та Q кривої відповідають значення параметра s і $s + \Delta s$; $\tau(s)$ і $\tau(s + \Delta s)$ — одиничні вектори дотичних в точках P та Q відповідно; $\Delta\varphi$ — кут між $\tau(s)$ та $\tau(s + \Delta s)$. Розглянемо рівнобедрений трикутник ABC (рис. 1.32):

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= \tau(s); \quad \overline{AC} = \tau(s + \Delta s); \\ |\overline{BC}| &= |\tau(s + \Delta s) - \tau(s)| = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}; \\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} &= \frac{\Delta\varphi}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \left| \frac{\tau(s + \Delta s) - \tau(s)}{\Delta s} \right|. \end{aligned}$$

Якщо $\Delta s \rightarrow 0$, то і $\Delta\varphi \rightarrow 0$, оскільки крива належить класу C^2 . Тому

$$\begin{aligned} k_1(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \cdot \lim \left| \frac{\tau(s + \Delta s) - \tau(s)}{\Delta s} \right| = \\ &= |\tau'(s)| = |r''(s)|. \end{aligned}$$

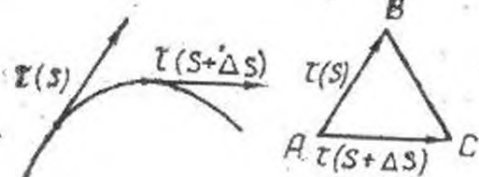


Рис. 1.32



Рис. 1.33

З цього безпосередньо випливає, що оскільки r_s'' співнаправлений з вектором головної нормалі ν кривої, то

$$\tau' = k_1 \nu \quad (1.5)$$

Нехай задана довільна регулярна параметризація кривої $r = r(t)$. Виразимо r_s'' через похідні по t : $r_t' = r_s' s_t'$, але $s_t' = |r_t'|$, тому $r_s' = \frac{r_t'}{|r_t'|}$. Продиференціюємо цю рівність по t :

$$r_s'' s_t' = \frac{r_t''}{|r_t'|} - \frac{\langle r_t', r_t'' \rangle r_t'}{|r_t'|^3};$$

піднесемо цю рівність до квадрату, враховуючи, що $r_s''^2 = k_1^2$ і $s_t'^2 = r_t'^2$. Одержимо

$$k_1^2 = \frac{(r_t'')^2 (r_t')^2 - \langle r_t', r_t'' \rangle^2}{(\langle r_t', r_t' \rangle)^3}$$

або

$$k_1(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3}.$$

Зауваження. 1. Раніше було доведено, що крива в точці має одну стичну площину, якщо в цій точці $r' \times r'' \neq 0$, і нескінченно багато стичних площин, коли $r' \times r'' = 0$. Отже, крива має нескінченно багато стичних площин в точці, в якій $k_1 = 0$.

2. Нехай крива задана параметрично: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. Тоді формула (1.4) запишеться в координатному вигляді:

$$k_1(t) = \frac{\sqrt{(x'y'' - y'x'')^2 + (y'z'' - z'y'')^2 + (x'z'' - x''z')^2}}{(\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2})^3}.$$

Підставивши в цей вираз $z = 0$, одержимо формулу для обчислення кривини плоскої кривої:

$$k_1 = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Якщо плоска крива задана рівнянням $y = y(x)$, то

$$k_1 = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}.$$

3. Якщо $k_1 = 0$ у всіх точках кривої γ , то γ — або пряма, або інтервал на прямій, або промінь. Справді, розглянемо натуральну параметризацию $r = r(t)$ кривої γ . Оскільки $k_1 = 0$, $r'' = 0$. Звідси $r = r_0 + at$, де r_0 , a — сталі вектори.

1.6.1. Механічна інтерпретація кривини кривої

Нехай матеріальна точка маси m під дією поля сил F рухається по кривій, рівняння якої $r = r(t)$, де t — час. Оскільки траєкторія руху точки однозначно визначається полем сил та початковими умовами, можна знайти кривину траєкторії.

Підставимо у формулу $k_1(t) = \frac{|r' \times r''|}{\langle r', r' \rangle^{3/2}}$ вектор r'' , знайдений із другого закону Ньютона $mr'' = F$, і вектор $r' = V$, де V — швидкість руху точки. Одержимо, що

$$k_1 = \frac{\left| V \times \frac{F}{m} \right|}{|V|^3} = \frac{|V \times F|}{m|V|^3}.$$

Нехай $F = F_n + F_v$, де F_n — нормальна складова сили, тобто F_n перпендикулярна по V , а F_v — складова сили, що колінеарна V . Тоді $|V \times F| = |V| F_n$ і

$$k_1 = \frac{F_n}{mV^2}.$$

Таким чином, якщо початкова швидкість $|V|$ точки велика, то кривина траєкторії руху в цій точці мала.

1.6.2. Про знак кривини кривої

Згідно з визначенням кривина кривої — невід'ємне число. Але для плоских кривих можна природним образом ввести знак кривини.

Згадаємо, що всі базиси площини поділяються на два класи. Два базиси належать одному класу, коли визначник матриці переходу від одного базису до другого додатний [4, розд. 1, § 6].

Зафіксуємо на площині ортонормований базис $e = (e_1, e_2)$, що задає її додатну орієнтацію. Розглянемо регулярну криву

на площині, що задана радіус-вектором $r = r(t)$, $r(t) \in C^*$, $k \geq D$, $r'(t) \neq 0$. Вектор $r'(t)$ в кожній точці кривої задає напрям додатний, отже, і напрям обходу кривої, тобто вектор $r'(t)$ задає орієнтацію кривої. Нехай $\tau = \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ — одиничний вектор дотичної. Якщо кривина кривої відрізняється від нуля, то, як доведено вище, одиничний вектор головної нормалі ν вибирається однозначно, і вибір не залежить від параметризації кривої.

Кривині плоскої кривої в точці P припишемо знак «+», якщо базис $(\tau(p), \nu(p))$ орієнтований додатно, і знак «-», якщо базис $(\tau(p), \nu(p))$ орієнтований від'ємно.

Наприклад, кривина кривої, що зображена на рис. 1.33, в точці P_1 від'ємна, а в точці P_2 додатна.

Раніше показано, що кривина k_1 плоскої кривої обчислюється за формулою

$$k_1^2 = \frac{(x'y'' - y'x'')^2}{(x'^2 + y'^2)^3}$$

де $x = x(t)$, $y = y(t)$ — регулярна параметризація кривої. Радіус-вектор довільної точки кривої $r(t) = x(t)e_1 + y(t)e_2$. Звідси $r'(t) = x'(t)e_1 + y'(t)e_2$; $r''(t) = x''(t)e_1 + y''(t)e_2$. Якщо кривина кривої відрізняється від нуля, то вектори r' , r'' утворюють базис площини і $(x'y'' - y'x'')$ — визначник матриці переходу від базису (e_1, e_2) , що задає орієнтацію площини, до базису (r', r'') . Але базиси (r', r'') і (τ, ν) задають одну і ту ж орієнтацію площини, оскільки вектори ν та r' однаково напрямлені, а вектори ν та r'' утворюють гострий кут (рис. 1.34).

Таким чином, кривина плоскої кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$, споряджена знаком, обчислюється за формулою

$$k_1 = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}$$

Якщо крива задана явно рівнянням $y = f(x)$, то

$$k_1 = \frac{f''}{(1 + f'^2)^{3/2}}$$

Зауваження. 1. Якщо орієнтація кривої фіксована, а орієнтація площини змінюється, то знак кривини змінюється на протилежний. Якщо орієнтація площини фіксована, а змінюється параметризація кривої так, що орієнтація кривої змінюється на протилежну, то знак кривини змінюється.

2. Дзеркальний рух на площині, орієнтація якої зафіксована, переводить криві в криві з протилежною по



Рис. 1.34

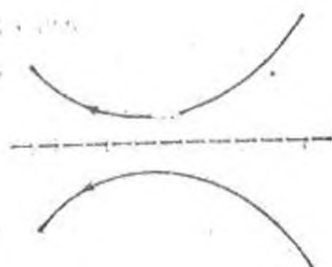


Рис. 1.35

знаку орієнтацією (рис. 1.35). Нагадаємо, що дзеркальний рух на площині — це ковзна симетрія: композиція осьової симетрії та паралельного перенесення в напрямку осі симетрії [4, розд. VII, § 34].

1.6.3. Зв'язок між кривиною і опуклістю плоскої кривої

Нехай на площині задана регулярна крива. За теоремою 1 в околі будь-якої точки цю криву можна задати явно. За пряму, на яку крива в околі точки P проектується однозначно, можна взяти дотичну до кривої в точці P . Виберемо таку систему координат: вісь OX напрямимо по дотичній до кривої в точці P , а початок координат розташуємо в точці P . Нехай $x=x(t)$, $y=y(t)$ — регулярна параметризація кривої в цій системі координат. Тоді, оскільки $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$ і дотична в точці P співпадає з віссю OX , то $x' \neq 0$, а $y' = 0$ в точці P . Отже, в околі точки P крива може бути задана явно рівнянням $y=f(x)$. Напрямний вектор дотичної кривої в точці P буде $r'_x = (1, f'(0)) = (1, 0)$. Отже, $f'(0) = 0$ і кривина кривої в точці P обчислюється за формулою $k_1 = f''(0)$.

Згадаємо, що функція $y=f(x)$ класу C^2 на зв'язній відкритій множині її області визначення називається строго опуклою, якщо $f'' > 0$, і увігнутою, якщо $f'' < 0$. Звідси випливає, що опуклість функції $y=f(x)$ еквівалентна тому, що кривина більше нуля.

У нашій системі координат в околі точки $O(0, 0)$ розкладемо функцію $y=f(x)$ за формулою Тейлора:

$$y = \frac{1}{2} f''(0) x^2 + o(x^2).$$

З точністю до нескінченно малих третього порядку поведінку кривої визначає доданок $\frac{1}{2} f''(0) x^2$. Таким чином, якщо кривина кривої в деякій точці не дорівнює нулю, то крива

лежить по одну сторону від дотичної в малому околі цієї точки. Зауважимо, що в цьому околі крива з похибкою до нескінченно малих третього порядку має форму параболи.

Розглянемо множину площини, що обмежена кривою $y=f(x)$ та прямою $y=h$, де значення h досить мале. Ця множина в кожній граничній точці має опорну пряму і по теоремі 15.2 курсу аналітичної геометрії [4, розд. III, § 15] є опуклою множиною; тому і дуга кривої $y=f(x)$ як частина межі опуклої множини є опуклою.

Отже, коли кривина плоскої кривої $k_1 \neq 0$, то крива локально опукла. Але локально опукла крива не обов'язково опукла глобально.

Приклад. Розглянемо криву, що задана рівнянням $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4b^2(x^2 + y^2)$, $b < a$ — завиток Паскаля, який є регулярною зануреною кривою. В кожній точці кривої кривина додатна; отже, крива локально опукла. Але глобально крива опуклою не буде, оскільки вона не є межею опуклої множини (рис. 1.36).

Між кривиною та опуклістю вкладеної кривої є тісний зв'язок, відбитий нижче.

Теорема 6. Нехай L — регулярна вкладена крива, гомеоморфна колу, і нехай кривина цієї кривої $k_1 \geq 0$ у всіх точках. Тоді крива L є опуклою, тобто L — границя опуклої області.

Довести самостійно.

Зауваження. 1. Диференціальна геометрія в основному вивчає локальні властивості кривих та поверхонь. Теорема 6 — перша глобальна теорема, теорема геометрії в цілому, яку тут сформульовано.

2. Вимога гомеоморфності кривої L колу істотна в теоремі 6.

Приклад. Розглянемо криву, що задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = e^\varphi$, $-\infty < \varphi < \infty$ (рис. 1.37). Це вкладена крива, що гомеоморфна прямій, її кривина $k_1 > 0$ у всіх точках. Ця крива не є глобально опуклою.

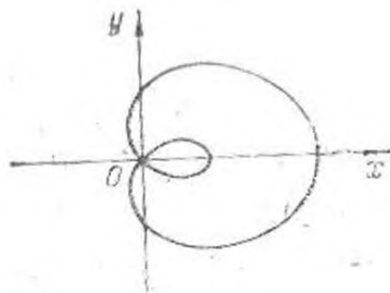


Рис. 1.36

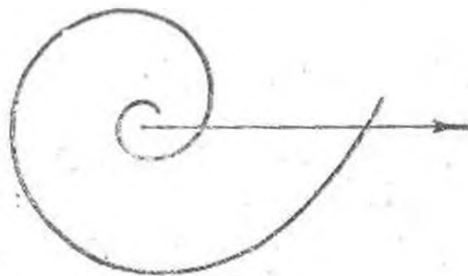


Рис. 1.37

1.6.4. Індукована орієнтація

Нехай кривина плоскої кривої не дорівнює нулю в кожній точці. Виникає природне питання: як вибрати такий обхід на кривій, щоб кривина була додатною?

Нехай базис (e_1, e_2) задає орієнтацію площини. Розглянемо спочатку пряму l на площині. Вона розбиває площину на дві півплощини. Зафіксуємо одну з них і напрямимо нормаль v прямої в цю півплощину. Виберемо на l напрям вектора τ так, щоб базис (τ, v) задавав додатну орієнтацію площини. Так вибраний напрямок τ задає орієнтацію прямої, яка називається індукованою орієнтацією. Якщо напрямити вектор v в другу півплощину, індукована орієнтація буде протилежною.

Нехай тепер на площині задана крива, кривина якої не дорівнює нулю. Нехай l — дотична до кривої в точці P . Вище доведено, що в околі точки P крива лежить по одну сторону від дотичної. В цю ж півплощину напрямлена головна нормаль v кривої. Вектор τ виберемо так, щоб він задавав орієнтацію на пряму l , яка індукована цією півплощиною. Тепер параметризуємо криву так, щоб $r'(P)$ і τ мали однаковий напрям. При цій параметризації кривина кривої буде додатною. Одержаний в такий спосіб напрямок обходу кривої задає індуковану орієнтацію кривої.

Індуковану орієнтацію можна вводити не тільки для локально опуклих кривих, але і для будь-яких вкладених кривих, що гомеоморфні колу. Скористаємося теоремою Жордана: будь-яка регулярна вкладена крива на площині, що гомеоморфна колу, ділить площину на дві зв'язні області, що не перетинаються, причому одна з них обмежена.

Індукована орієнтація вводиться так: вектор v напрямляємо всередину обмеженої області, вектор τ вибираємо так, щоб базис (τ, v) задавав додатну орієнтацію площини. Тоді на кожній дотичній буде обрано напрямок, тобто буде обрано напрямок на кривій, узгоджений з орієнтацією площини.

Індукований напрямок обходу кривої називається ще додатним напрямком. Якщо змінити орієнтацію площини, додатний напрямок кривої буде протилежним відносно початкового.

1.6.5. Інтегральна кривина кривої

Визначення. Повною кривиною просторової кривої L називається величина $\Omega = \int_L k_1(s) ds$, якщо вона існує. Очевидно, що $0 \leq \Omega \leq +\infty$. Для плоскої кривої кривину можна брати зі знаком.

Фіксуючи орієнтацію площини, обхід кривої, введемо, як раніше, кривину $k_1(s)$. Тепер можна дати визначення.

Визначення. Нехай L — плоска C^2 -регулярна крива, s — натуральний параметр на ній, $k_1(s)$ — кривина. Повною кривиною ω називається інтеграл $\omega = \int_L k_1(s) ds$, якщо він існує. Абсолютною кривиною називається величина $\Omega = \int_L |k_1(s)| ds$. Як і раніше, $0 \leq \Omega \leq +\infty$.

Із визначення випливає, що повна кривина просторової кривої дорівнює сумарному значенню кута обертання дотичної при обході кривої. Повна кривина плоскої кривої дорівнює сумарному куту обертання дотичної з врахуванням знака обертання. Наприклад, повна кривина кривої, що зображена на рис. 1.38, дорівнює нулю.

Теорема 7. Для замкнених регулярних кривих $\Omega \geq 2\pi$ і $\Omega = 2\pi$ тоді і тільки тоді, коли замкнена крива є плоскою та опуклою.

Задача 1. Довести, що для плоских замкнених вкладених кривих $\omega = 2\pi$.

Задача 2. Нехай R — радіус кулі, в якій лежить замкнена регулярна крива L . Довести, що довжина кривої $s(L) \leq R\Omega$. З'ясувати, коли $s = R\Omega$.



Рис. 1.38

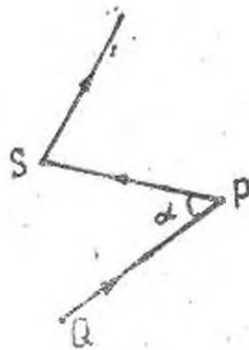


Рис. 1.39

Зауваження. Розглянемо на площині ламану L з обраним напрямком обходу (рис. 1.39). Якщо Q, P та S — три послідовні вершини, то визначимо кривину $k_1(P)$ ламаної L в точці P як орієнтований кут обертання від вектора \overrightarrow{QP} до вектора \overrightarrow{PS} . Очевидно, що $k_1 = \pi - \alpha$, де $-\pi \leq k_1(P) \leq \pi$.

Повна кривина ламаної L визначається як $\omega = \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i)$, де n — кількість вершин ламаної; $(\pi - \alpha_i)$ — кривина ламаної в i -й вершині.

Знайдемо інтегральну кривину вкладеного багатокутника, тобто багатокутника без самоперетинів (рис. 1.40). Згадаємо, що сума внутрішніх кутів n -кутника дорівнює $\pi(n - 2)$.

Звідси $\omega = \pi n - \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi$.

Порівняйте наведений результат із твердженням задачі 2.

1.7. Скрут кривої

Кривина кривої — це кількісна міра відхилення кривої від дотичної.

Введемо кількісну міру відхилення кривої від стичної площини.

Визначення. Нехай P — довільна точка регулярної кривої γ , Q — точка кривої, що близька до P . Позначимо через $\Delta\alpha$ кут між стичними площинами кривої в точках P та Q , а через Δs — довжину дуги PQ кривої. Тоді $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, якщо він існує, називається абсолютним скрутом кривої γ в точці P і позначається через $|k_2|$.

Теорема 8. Нехай γ — регулярна крива класу C^3 . Тоді в кожній точці кривої, в якій кривина $k_1 \neq 0$, визначений абсолютний скрут $|k_2|$. Якщо $r = r(s)$ — натуральна параметризація кривої, то

$$|k_2| = |\beta'_s| = \frac{|(r'_s, r''_s, r'''_s)|}{k_1^2},$$

де $\beta(s)$ — вектор-функція одиничних бінормалей кривої γ . У довільній регулярній параметризації $r = r(t)$

$$|k_2| = \frac{|(r'_t, r''_t, r'''_t)|}{(r'_t \times r''_t)^2}.$$

Доведення. Нехай крива γ параметризована натуральним параметром s і нехай в точці P кривої кривина

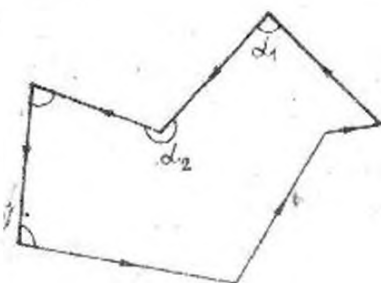


Рис. 1.40

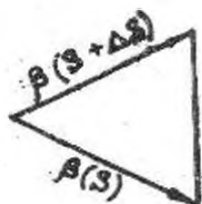


Рис. 1.41

$k_1 \neq 0$. Тоді, оскільки функція $k_1 = k_1(s)$ неперервна, то кривина не дорівнює нулю в точках, що близькі до P . У кожній такій точці вектори r' та r'' не колінеарні. Отже, в кожній точці Q , що близька до P , існує єдина стична площина (див. теорему 4) і вектор-функція $\beta(s)$ належить класу C^1 .

Нехай $\beta(s)$ та $\beta(s + \Delta s)$ — одиничні вектори бінормалей відповідно в точках P та Q кривої γ . Кут $\Delta\alpha$ між стичними площинами кривої в точках P та Q дорівнює куту між векторами $\beta(s)$ та $\beta(s + \Delta s)$. Вектори $\beta(s)$ та $\beta(s + \Delta s)$ є сторонами рівнобедреного трикутника (рис. 1.41),

$$|\beta(s + \Delta s) - \beta(s)| = 2 \sin \frac{\Delta\alpha}{2}.$$

Звідси

$$\frac{\Delta\alpha}{|\Delta s|} = \frac{\Delta\alpha}{2 \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \left| \frac{\beta(s + \Delta s) - \beta(s)}{\Delta s} \right|.$$

Оскільки крива γ належить класу C^3 , то $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\alpha = 0$. Тоді із першої визначної границі та належності $\beta(s)$ класу C^1 випливає, що $\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ існує і дорівнює

$$\lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha}{2 \sin \frac{\Delta\alpha}{2}} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\beta(s + \Delta s) - \beta(s)}{\Delta s} \right| = |\beta'(s)| = |k_2(s)|.$$

Вектор β' перпендикулярний до $\beta = \tau \times \nu$, оскільки $\langle \beta', \beta \rangle = \frac{1}{2} \langle \beta, \beta \rangle' = 0$. Вектор β' перпендикулярний до τ тому, що $\beta' = \tau' \times \nu + \tau \times \nu' = k_1 \nu \times \nu + \tau \times \nu' = \tau \times \nu'$, оскільки за формулою (1.5) $\tau' = k_1 \nu$. Отже, вектор β' паралельний вектору ν і

$$|k_2| = |\langle \beta', \nu \rangle|. \quad (1.6)$$

Але $v = \frac{r''}{k_1}$, звідси $v' = \frac{r'''}{k_1} - \frac{r''}{k_1^2} k_1'$. Підставимо знайдені вирази в формулу (1.6) і одержимо, що

$$\begin{aligned} |k_2| &= \left| \left\langle \beta', \frac{r''}{k_1} \right\rangle \right| = \left| \left\langle \tau \times v', \frac{r''}{k_1} \right\rangle \right| = \\ &= \left| \left\langle \tau \times \left(\frac{r'''}{k_1} - \frac{r''}{k_1^2} k_1' \right), \frac{r''}{k_1} \right\rangle \right| = \frac{|(r', r'', r''')|}{k_1^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Знайдемо вирази для $|k_2|$ у випадку довільної C^3 -регулярної параметризації $r = r(t)$ кривої γ . Виразимо похідні r'_s, r''_s, r'''_s через похідні r'_t, r''_t, r'''_t :

$$\begin{aligned} r'_s &= r'_t t'_s; \\ r''_s &= r''_t t_s'^2 + r'_t t_s''; \\ r'''_s &= r'''_t t_s'^3 + 3r''_t t_s' t_s'' + r'_t t_s'''. \end{aligned}$$

Зауважимо, що $t'_s = \frac{1}{|r'_t|}$. Підставимо r'_s, r''_s, r'''_s у формулу (1.7):

$$|k_2| = \frac{t_s'^3 |(r'_t, r''_t, r'''_t)|}{k_1^2} = \frac{|(r'_t, r''_t, r'''_t)|}{(r'_t \times r''_t)^2}. \quad (1.8)$$

Раніше введено знак для кривини плоскої кривої. Подібним чином можна ввести знак скруту просторової кривої. В подальшому скрутом кривої γ будемо називати

$$k_2 = \frac{(r', r'', r''')}{(r' \times r'')^2},$$

де $r = r(t)$ — регулярна параметризація. Введений знак скруту інваріантний відносно параметризації кривої. Справді, нехай $r = r(t)$ і $r = r(\sigma)$ — дві регулярні параметризації кривої γ , $t = t(\sigma)$ — регулярна функція заміни параметра, причому $t'_\sigma \neq 0$. Тоді

$$(r'_\sigma, r''_\sigma, r'''_\sigma) = t_\sigma'^3 (r'_t, r''_t, r'''_t).$$

Згадаємо, що знак кривини плоскої кривої залежить від вибору напрямку на кривій, тобто залежить від параметризації кривої.

Нехай зафіксована орієнтація простору. Скрут кривої $r = r(t)$ додатний в точці P , якщо в цій точці вектори r', r'', r''' задають від'ємну орієнтацію простору, і від'ємний, коли вектори r', r'', r''' задають додатну орієнтацію простору.

Таким чином, знак скруту пов'язаний з орієнтацією простору: якщо орієнтацію простору поміняти, скрут змінить знак.

Нехай крива параметризована натуральним параметром: $r=r(s)$; у ході доведення теореми 8 одержано, що

$$\langle \beta', \nu \rangle = - \frac{(r', r'', r''')}{k_1^2},$$

тобто $\langle \beta', \nu \rangle = k_2$. Звідси випливає, що коли при русі вздовж кривої в напрямку зростання s вектор бінормалі β обертається до вектора ν , то скрут додатний. Якщо вектор обертається в другу сторону, то скрут від'ємний (рис. 1.42). Оскільки вектори β' та ν колінеарні, то

$$\beta' = k_2 \nu. \quad (1.9)$$

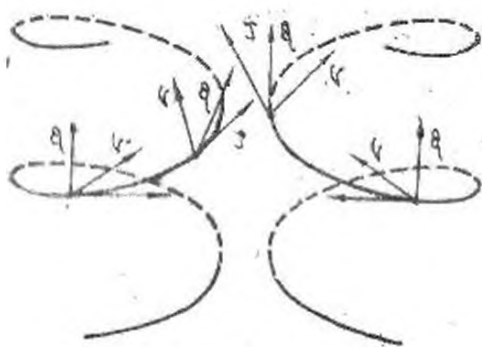


Рис. 1.42

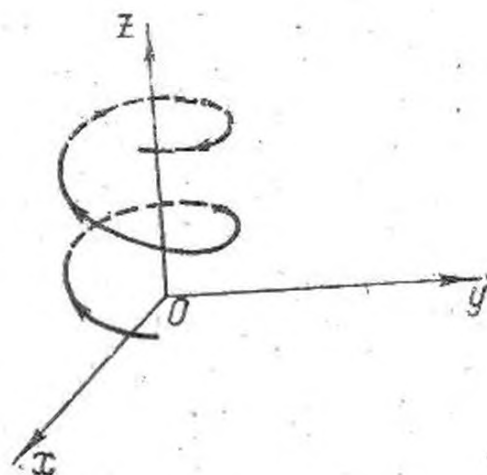


Рис. 1.43

Зауваження. Дзеркальний рух у просторі переводить дану криву в криву з протилежним за знаком скрутом. Нагадаємо, що дзеркальний рух у просторі — це дзеркальне обертання, тобто композиція обертання навколо осі та симетрії відносно площини, що перпендикулярна до осі обертання, а також ковзна симетрія, тобто симетрія відносно площини та паралельного перенесення на вектор, що паралельний цій площині.

Приклад. Обчислимо кривину та скрут гвинтової лінії, що задана параметрично (рис. 1.43):

$$\begin{cases} x(t) = a \cos \omega t; \\ y(t) = a \sin \omega t; \\ z(t) = bt, \quad a > 0. \end{cases}$$

Це траєкторія руху точки, проекція якої на площину XOY рівномірно обертається по колу $x^2 + y^2 = a^2$ з кутовою

швидкістю $\omega \neq 0$, а проекція на вісь OZ рівномірно рухається з лінійною швидкістю b . Оскільки

$$\begin{aligned} r_t &= (-a\omega \sin \omega t, a\omega \cos \omega t, b); \\ r_t'' &= (-a\omega^2 \cos \omega t, -a\omega^2 \sin \omega t, 0); \\ r_t''' &= (a\omega^3 \sin \omega t, -a\omega^3 \cos \omega t, 0), \end{aligned}$$

то $\langle r', r' \rangle = a^2\omega^2 + b^2$, $\langle r'', r'' \rangle = a^2\omega^4$, $\langle r', r'' \rangle = 0$; $(r' \times r'')^2 = r_t'^2 r_t''^2 - \langle r', r'' \rangle^2 = (a^2\omega^2 + b^2) a^2\omega^4$; $(r', r'', r''') = ba^2\omega^5$.

Тоді

$$k_1 = \frac{a\omega^2}{a^2\omega^2 + b^2}; \quad k_2 = -\frac{b\omega}{a^2\omega^2 + b^2}.$$

Таким чином, кривина та скрут гвинтової лінії сталі.

Розглянемо іншу гвинтову лінію (рис. 1.44):

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t; \\ y = -a \sin \omega t; \\ z = bt. \end{cases}$$

Кривини обох гвинтових ліній однакові, а скрути рівні за абсолютним значенням але протилежні за знаком.

Покажемо, що якщо скрут кривої дорівнює нулю, то крива плоска.

Доведення. Нехай скрут $k_2 = 0$. Оскільки в природній параметризації $|k_2| = |\beta'|$, то $\beta' = 0$, звідси $\beta = n = \text{const}$. Але вектори τ та β ортогональні, тобто $\langle \tau, \beta \rangle = 0$, або $\langle r', n \rangle = 0$. Отже, $\langle r, n \rangle = \text{const}$, що і потрібно було довести.

Задача. Радіус-вектор траєкторії руху точкового заряду в магнітному полі з напруженістю H задовольняє

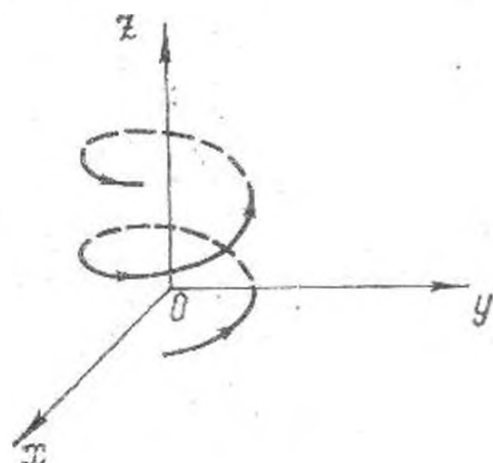


Рис. 1.44

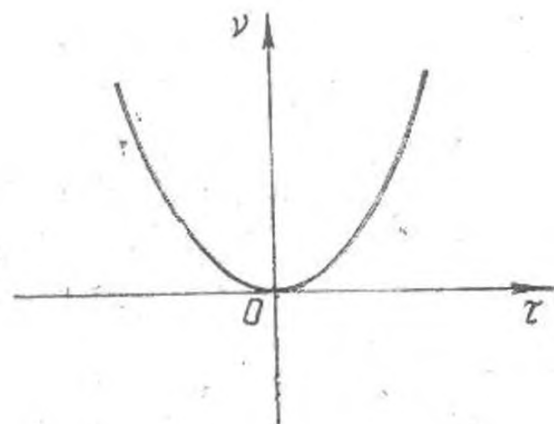


Рис. 1.45

рівнянню $r'' = c(r' \times H)$, де $c = \text{const}$. Довести, що траєкторією руху зарядженої частки в однорідному магнітному полі ($H = \text{const} \neq 0$) може бути тільки одна з таких кривих: 1) пряма, що паралельна вектору H ; 2) коло, площина якого перпендикулярна до H ; 3) гвинтова лінія з віссю, що паралельна H .

1.7.1. Формули Френе

З кожною точкою ненульової кривини регулярно параметризованої кривої класу C^3 з радіус-вектором $r = r(s)$ можна зв'язати три взаємно перпендикулярних одиничних вектори $r(s)$, $v(s)$, $\beta(s)$. Три промені з початком у точці кривої, що відповідають параметру s , і з напрямками відповідно $\tau(s)$, $v(s)$, $\beta(s)$ є ребрами тригранного кута. Цей тригранний кут називається природним тригранником, або тригранником Френе.

З'ясуємо, як змінюється тригранник Френе при русі вздовж кривої. Згадаємо, що $r'_s = \tau$ і за формулою (1.5) $\tau' = k_1 v$, а за формулою (1.9) $\beta' = k_2 v$. Оскільки $v = \beta \times \tau$, то

$$v' = \beta' \times \tau + \beta \times \tau' = k_2 v \times \tau + \beta \times k_1 v = -k_1 \tau - k_2 \beta$$

Формули

$$\begin{cases} \tau' = k_1 v; \\ v' = -k_1 \tau - k_2 \beta; \\ \beta' = k_2 v \end{cases} \quad (1.10)$$

називаються формулами Френе.

Зауважимо, що матриця коефіцієнтів розкладання векторів τ' , v' , β' по базису τ , v , β

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

кососиметрична. Це не випадково. Одержимо формули Френе як наслідки більш загальної теореми.

Розглянемо групу ортогональних 3×3 -матриць $A = (a_i^j)$. Нехай $A(s) = (a_i^j(s))$ — гладка крива класу C^1 в просторі ортогональних матриць (тобто всі функції $a_i^j(s)$ можна неперервно диференціювати),

$$A'(s) = \left(\frac{da_i^j(s)}{ds} \right)$$

— дотичний вектор до цієї кривої.

Якщо крива $A = A(s)$ в просторі ортогональних матриць така, що $A(0) = E$, де E — одинична матриця, то дотичний вектор $A'(0)$ до цієї кривої — кососиметрична матриця.

Справді, оскільки $A = (a_i^j)$ — ортогональна матриця, то

$$\sum_{j=1}^3 a_i^j a_k^j = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Звідси

$$\sum_{j=1}^3 \left(\left. \frac{da_i^j}{ds} \right|_{s=0} \cdot a_k^j(0) + \left. \frac{da_k^j}{ds} \right|_{s=0} \cdot a_i^j(0) \right) = 0,$$

але $a_i^j(0) = \delta_{ij}$, тому

$$\left. \frac{da_i^k}{ds} \right|_{s=0} + \left. \frac{da_k^i}{ds} \right|_{s=0} = 0.$$

Повернемося до тригранника Френе. Нехай $\tau(s) = e_1(s)$, $\nu(s) = e_2(s)$, $\beta(s) = e_3(s)$ і матриця $A = (a_i^j)$ — матриця переходу від ортонормованого базису $e_1(0), e_2(0), e_3(0)$ до ортонормованого базису $e_1(s), e_2(s), e_3(s)$, тобто

$$e_i(s) = \sum_{j=1}^3 a_i^j(s) e_j(0), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.11)$$

Тоді $A = (a_i^j)$ — ортогональна матриця і $A(0) = E$. Отже, $A'(0)$ — кососиметрична матриця. Але це матриця коефіцієнтів розкладення векторів $e_i'(0)$ по базису $e_i(0)$, $i = 1, 2, 3$. Якщо продиференціювати рівності (1.11), одержимо

$$\left. \frac{de_i(s)}{ds} \right|_{s=0} = \sum_{j=1}^3 \left. \frac{da_i^j(s)}{ds} \right|_{s=0} \cdot e_j(0).$$

Якщо тепер написати кососиметричну матрицю з першим рядком $(0, k_1, 0)$ і третім $(0, k_2, 0)$, то вона з необхідністю буде мати вигляд

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix}$$

і формули Френе одержано.

Задача. Вивести формули Френе для кривих в n -вимірному просторі.

Перехід від репера $\tau(s), \nu(s), \beta(s)$ до репера $\tau(s + \Delta s), \nu(s + \Delta s), \beta(s + \Delta s)$ здійснюється з допомогою

ортогональної матриці, яка задає власний рух. Перенесемо всі реperi Френе регулярної кривої в одну точку. Власний рух, що лишає точку на місці, — це обертання навколо деякої осі [4, розд. VII, §34]. Отже, при переході від репера Френе до нескінченно близького репера відбувається миттєве обертання навколо деякої осі.

Знайдемо вісь миттєвого обертання. Якщо $\tau(s)$, $\nu(s)$, $\beta(s)$ і $\tau(s+ds)$, $\nu(s+ds)$, $\beta(s+ds)$ — два нескінченно близьких реperi Френе, то вісь ω миттєвого обертання від першого репера до другого ортогональна нескінченно малому перенесенню векторів τ , ν , β , тобто ортогональна векторам $d\tau = \tau(s+ds) - \tau(s) = \tau' ds$, $d\nu = \nu' ds$ і $d\beta = \beta' ds$. Тому $\langle \omega, \tau' \rangle = \langle \omega, \nu' \rangle = \langle \omega, \beta' \rangle = 0$. Якщо $\omega = \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix}$ — координати вектора ω в базисі (τ, ν, β) , то

$$\begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & k_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \\ \omega^3 \end{pmatrix} = 0,$$

отже, $\omega^3 = 0$, $\omega^1 = k_2$, $\omega^2 = -k_1$, тобто $\omega = k_2\tau - k_1\nu$.

Кінематичне тлумачення формул Френе належить Дарбу. Вектор ω ще називають вектором Дарбу.

1.7.2. Натуральні рівняння кривої

Якщо крива аналітична, то вона однозначна (з точністю до власного руху в просторі) визначається кривиною та скрутом як функціями природного параметра.

Справді, розкладемо вектор-функцію $r=r(s)$ в ряд Тейлора в околі нуля:

$$r(s) = r(0) + r'(0)s + \frac{1}{2}r''(0)s^2 + \frac{1}{3!}r'''(0)s^3 + \dots$$

Ряд збігається, оскільки крива аналітична. Виберемо в просторі спеціальну систему координат: початок координат помістимо в точку кривої, що відповідає значенню параметра $s=0$; за базис беремо репер Френе τ, ν, β кривої в цій точці. Тоді, враховуючи формули Френе, одержимо

$$\begin{aligned} r(0) &= 0; \\ r'(0) &= \tau; \end{aligned}$$

$$r''(0) = \tau' = k_1 v;$$

$$r'''(0) = k_1' v - k_1(k_1 \tau + k_2 \beta);$$

.....

Зазначимо, що координати похідних радіус-вектора кривої в точці $s=0$ в базисі (τ, v, β) виражаються через кривину, скрут та їх похідні. Зауважимо, що коли крива аналітична, то її кривина та скрут — такі ж аналітичні функції. Підставимо знайдені значення $r(0)$, $r'(0)$, $r''(0)$, ... в ряд Тейлора для радіус-вектора кривої:

$$r(s) = \left(s - \frac{1}{6} k_1^2 s^3 + o(s^3) \right) \tau +$$

$$+ \left(\frac{1}{2} k_1 s^2 + \frac{1}{6} k_1' s^3 + o(s^3) \right) v + \left(-\frac{1}{6} k_2 k_1 s^3 + o(s^3) \right) \beta, (1.12)$$

тобто одержимо координати вектора $r(s)$, що виражаються через k_1, k_2 та їх похідні.

Довільність у знаходженні аналітичної кривої із заданими кривиною та скрутом пов'язана із вибором базису та початку координат. Репери Френе переходять один в другий за допомогою власного руху в просторі. Тому аналітична крива із заданими кривиною та скрутом визначається однозначно з точністю до власного руху в просторі.

Ці міркування дають ґрунт для того, щоб вважати, що кривина та скрут в певній мірі визначають криву.

Теорема 9 (основна теорема теорії кривих). *Нехай задані дві функції: $k_1 = k_1(s) > 0$ класу C^1 та $k_2 = k_2(s)$ класу C^0 . Тоді існує єдина з точністю до власного руху крива в просторі, для якої ці функції як функції природного параметра є кривиною та скрутом.*

Доведення теореми в загальному випадку викладене в підручнику [15]. Розглянемо плоский випадок, тобто доведемо, що коли задана функція $k = k(s)$ класу C^0 ($k_2 = 0$), то існує єдина з точністю до власного руху на площині крива з такою кривиною, як функцією природного параметра.

Нехай для визначеності крива розташована в площині. Якщо дотична цієї кривої утворює кут φ з додатним напрямком — напрямком осі OX , то із визначення кривини випливає, що $k = \frac{d\varphi}{ds}$. Звідси

$$\varphi(s) = \int k(s) ds.$$

Обчисливши цей інтеграл, одержимо

$$\varphi(s) = A(s) + \varphi_0,$$

де φ_0 — стала інтегрування.

З іншого боку, дотичний вектор шуканої кривої

$$\tau(s) = \frac{dr}{ds} = (\cos \varphi(s), \sin \varphi(s)),$$

ввідки випливає, що

$$x(s) = \int \cos(A(s) + \varphi_0) ds = B_1(s) + b_1;$$

$$y(s) = \int \sin(A(s) + \varphi_0) ds = B_2(s) + b_2,$$

де b_1, b_2 — сталі інтегрування.

Сталі b_1, b_2 визначають паралельне перенесення, а φ_0 — кут обертання однієї ортогональної системи координат відносно другої. Таким чином, рівнянням $k = k(s)$ крива визначається з точністю до власного руху на площині.

Приклад. Раніше з'ясовано, що кривина та скрут у гвинтової лінії сталі. Із теореми 9 випливає, що лінія, в якій сталі ненульові кривина та скрут, — гвинтова. Плоска лінія, кривина якої $k = \text{const} \neq 0$, — коло.

Задача. Довести, що лінія із сталими кривиною та скрутом — гвинтова, без використання основної теореми теорії кривих.

Вказівка. Використати вісь миттєвого обертання.

Зауваження. Регулярні та нерегулярні криві зв'язані між собою. Справді, згадаємо розклад радіус-вектора (1.12) регулярної кривої, зберігаючи в цьому розкладі тільки перші члени:

$$\begin{cases} x = s; \\ y = \frac{1}{2} k_1 s^2; \\ z = -\frac{1}{6} k_1 k_2 s^3. \end{cases}$$

Проекції дуги кривої, що розташована поблизу початку координат на площинах $\tau\nu$, $\tau\beta$, $\nu\beta$, зображені на рис. 1.45—1.47. Видно, що проекція на стичну площину — регулярна крива, проекція на площину, яка перпендикулярна до ν , містить точку перегину, на нормальну площину — зворотну точку першого роду.

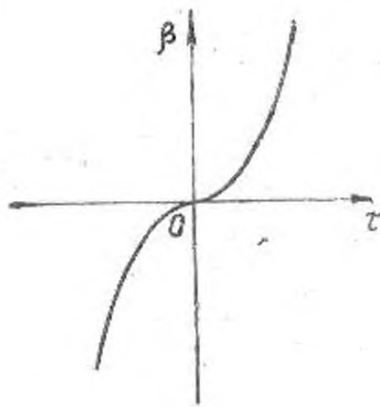


Рис. 1.46

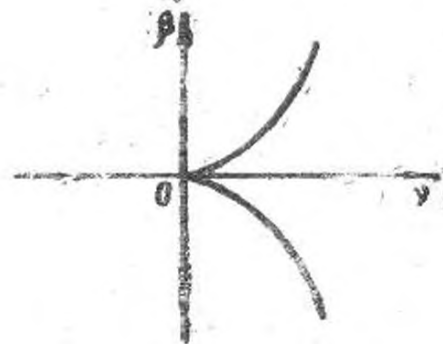


Рис. 1.47

Таким чином, особливі точки одержуються при проєктуванні регулярних кривих.

1.8. Криволінійні координати в n -вимірному просторі

У курсі аналітичної геометрії [4, розд. IV] було розглянуто різні системи координат: полярні та еліптичні координати на площині; сферичні, циліндричні та еліпсоїдальні координати в просторі.

Дамо тепер визначення криволінійних координат в області n -вимірного евклідового простору. Згадаємо, що областю називається зв'язна та відкрита множина евклідового простору.

Нехай U, V — дві області в n -вимірних евклідових просторах. Нехай в області U введено декартові координати u^1, \dots, u^n , в області V — декартові координати v^1, \dots, v^n .

Визначення. Відображення $R:U \rightarrow V$ називається дифеоморфізмом класу $C^p U$ на V , коли: 1) відображення R належить класу C^p ; $p \geq 1$; 2) $R \equiv$ бієкція; 3) обернене відображення R^{-1} також належить класу C^p .

Якщо $p=0$ (тобто вимагається лише неперервність відображень R та R^{-1}), то відображення R називається гомеоморфізмом.

Знайдемо необхідні та достатні умови того, що R — дифеоморфізм. Розглянемо спочатку функцію однієї змінної $v = f(u)$ (тобто U та V — області на прямій). Якщо f — дифеоморфізм, то $f \in C^p$, $p \geq 1$, f — взаємно однозначна функція і $f^{-1} \in C^p$. Продиференціювавши тотожність $v = (f^{-1}(v))$, одержимо

$$1 = f'(f^{-1})'$$

Звідси випливає, що необхідна умова — це $f^a(u) \neq 0$. Нехай тепер дифеоморфізм R заданий функціями

$$v^i = f^i(u^1, \dots, u^n), \quad (1.13)$$

R^{-1} — функціями $u^j = \varphi^j(v^1, \dots, v^n)$, $i, j = 1, \dots, n$. Продиференціюємо по v^k ($k = 1, \dots, n$) тотожності

$$v^i \equiv f^i(\varphi^1(v), \dots, \varphi^n(v)).$$

Одержимо

$$\delta_k^i = \frac{\partial f^i}{\partial u^j} \frac{\partial \varphi^j}{\partial v^k}$$

(нагадаємо, що по однаковим верхньому та нижньому індексам відбувається підсумовування). Матриця $R' = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)$ називається матрицею Якобі відображення R ; $(R^{-1})' = \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial v^k}\right)$ — матриця Якобі R^{-1} . Одержано, що $R'(R^{-1})' = E$. Звідси $\det R' \det (R^{-1})' = 1$ і необхідною умовою того, що R — дифеоморфізм, є умова $\det R' \neq 0$.

Зауваження. Позначення матриці Якобі R' не випадкове. Розглянемо функцію однієї змінної $v = f(u)$ і розкладемо її за формулою Тейлора: $v = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + \dots$. Ясно, що $f'(u_0)$ — це коефіцієнт при лінійній частині розкладення. Розглянемо тепер відображення R , яке задане у вигляді (1.13), і розкладемо функції f^i за формулою Тейлора. Для спрощення запису будемо розкладати функції в околі точки $u = 0$ і вважати, що $R(0) = 0$. Тоді

Зауваження. Позначення матриці Якобі R' не випадкове. Розглянемо функцію однієї змінної $v = f(u)$ і розкладемо її за формулою Тейлора: $v = f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) + \dots$. Ясно, що $f'(u_0)$ — це коефіцієнт при лінійній частині розкладення. Розглянемо тепер відображення R , яке задане у вигляді (1.13), і розкладемо функції f^i за формулою Тейлора. Для спрощення запису будемо розкладати функції в околі точки $u = 0$ і вважати, що $R(0) = 0$. Тоді

$$v^1 = \frac{\partial f^1(0)}{\partial u^1} u^1 + \frac{\partial f^1(0)}{\partial u^2} u^2 + \dots + \frac{\partial f^1(0)}{\partial u^n} u^n + o(\sqrt{(u^1)^2 + \dots + (u^n)^2});$$

$$\dots$$

$$v^n = \frac{\partial f^n(0)}{\partial u^1} u^1 + \frac{\partial f^n(0)}{\partial u^2} u^2 + \dots + \frac{\partial f^n(0)}{\partial u^n} u^n + o(\sqrt{(u^1)^2 + \dots + (u^n)^2}).$$

Виписані доданки утворюють лінійне відображення $v = Au$, де $A = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}\right)$ — матриця Якобі відображення R .

Таким чином, нелінійному відображенню R можна в кожній точці поставити у відповідність лінійне відображення, що задається матрицею Якобі R' .

З'ясуємо геометричний зміст того, що $\det R' \neq 0$.

Нехай R відображає область евклідового простору E_1^n , в якій введено координати u^1, \dots, u^n , на область евклідового простору E_2^n з координатами v^1, \dots, v^n . Нехай $e = \{e_i\}_{i=1}^n$ — ортонормований базис простору E_1^n , а саме:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots; e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$R'e_1 = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^1} \right)_{i=1}^n, \dots, R'e_n = \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^n} \right)_{i=1}^n,$$

тобто образ вектора e_j при відображенні R' є вектор, координати якого утворюють j -й стовпець матриці Якобі. Те, що визначник матриці Якобі (він називається якобіаном відображення R) відрізняється від нуля, означає, що базисні вектори простору E_1^n перейшли в лінійно незалежні вектори простору E_2^n при відображенні R' .

Геометричний зміст якобіана відображення R такий: $\det R'$ дорівнює об'єму багатовимірного орієнтованого паралелепіпеда в просторі E_2^n , який натягнуто на вектори $R'e_1, R'e_2, \dots, R'e_n$. Для тривимірного простору це впливає з аналітичної геометрії [4, розд. I, § 7], для багатовимірного — легко виводиться із властивостей матриці Грама.

Знайдена нами необхідна умова того, що відображення R є дифеоморфізмом, в малому є і достатньою.

Справді, згадаємо теорему про обернену функцію [10]. Нехай відображення R області $U \subset E_1^n$ на область $V \subset E_2^n$ задане у вигляді $v^i = f^i(u^1, \dots, u^n)$, ($i = 1, \dots, n$), має такі властивості: 1) функції f^1, \dots, f^n належать класу C^p , $p \geq 1$; 2) $R(u_0) = v_0$; 3) матриця Якобі $R'(u_0)$ не вироджена, тобто $\det R'(u_0) \neq 0$. Тоді існує такий окіл точки u_0 , що обмеження відображення R на цей окіл є дифеоморфізмом класу C^p .

Отже, теорема стверджує, що коли виконані умови 1, 2 та лінійне відображення має обернене, то і нелінійне відображення $v = R(u)$ локально має обернене.

Глобально теорема невірна.

Приклад. Розглянемо відображення $R: E^2 \rightarrow E^2$, що задане рівняннями

$$\begin{cases} v^1 = e^{u^1} \sin u^2; \\ v^2 = e^{u^1} \cos u^2. \end{cases}$$

Функції, що задають відображення, регулярні. Матриця Якобі

$$R' = \begin{pmatrix} e^{u^1} \sin u^2 & e^{u^1} \cos u^2 \\ e^{u^1} \cos u^2 & -e^{u^1} \sin u^2 \end{pmatrix},$$

$\det R' = -e^{2u^1} \neq 0$. Локально можна застосувати теорему про обернену функцію, глобально — ні. Образ будь-якої смуги

$$\begin{cases} -\infty < u^1 < +\infty; \\ 2\pi k \leq u^2 < 2\pi(k+1), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

при відображенні R є вся площина $v^1 v^2$, крім початку координат. Таким чином, відображення R не є взаємно однозначним, тим більше дифеоморфізмом.

1.8.1. Визначення криволінійної регулярної системи координат

Нехай G — область у n -вимірному евклідовому просторі E^n , в якій задано декартові координати x^1, \dots, x^n ; V — область в E^n з декартовими координатами u^1, \dots, u^n . Вважається, що в області G визначено регулярні криволінійні координати, якщо заданий дифеоморфізм $R: V \rightarrow G$.

Якщо зафіксувати всі змінні, крім u^i -координати, то обмеження R на кожну зв'язну компоненту цієї множини є функцією однієї змінної і воно задає криву, що називається координатною кривою криволінійної системи координат.

В області простору E^3 , в якій задані криволінійні координати, через кожну точку проходять три координатні лінії.

Якщо у просторі E^n зафіксувати одну змінну $u^i = \text{const}$, то одержимо координатні поверхні.

Запишемо матрицю Якобі таким чином:

$$R' = (R_{u^1}, R_{u^2}, \dots, R_{u^n}),$$

де $R_{u^j} = \frac{\partial R}{\partial u^j}$ — вектор-стовпець, $j = \overline{1, n}$. Вектори $\{R_{u^i}\}$ ($i = \overline{1, \dots, n}$) лінійно незалежні. Нехай до кожної точки u_0 області U прикріплений ортонормований базис $e = \{e_1, \dots, e_n\}$. Він утворює базис дотичного простору в точці u_0 , який, за визначенням, складається із усіх век-

торів з початком у точці u_0 . Базис e перейде в базис дотичного простору області G у точці $x_0 = R(u_0)$ за допомогою відображення $R' : R'(u) e_i = R_{u_i}$, $i = 1, \dots, n$. Вектори R_{u_i} дотичні до координатних кривих.

Нехай R — таке відображення, що на множині $U_0 \subset V$ $\det R' = 0$ і R — дифеоморфізм V/U_0 на $G/R(U_0)$. Тоді на $G/R(U_0)$ введені регулярні криволінійні координати, а точки $R(U_0)$ називають особливими точками криволінійної системи координат.

Приклади. 1. Розглянемо полярну систему координат. Відображення R задане рівняннями

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi; \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

G — площина XOY без променя $y = 0, x \geq 0$; V — смуга:

$$\begin{cases} \rho > 0; \\ 0 < \varphi < 2\pi \end{cases}$$

Функції, що задають відображення R , — аналітичні, R є взаємно однозначним відображенням. Матриця Якобі

$$R' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ і } \det R' = \rho$$

Якщо $\rho > 0$, то полярна система координат є регулярною криволінійною системою координат на площині без променя.

Можна розглядати відображення R при $\rho = 0$, але тоді порушиться умова взаємної однозначності. Точка $x = 0, y = 0$ є особливою точкою полярної системи координат.

Звичайно розглядають кут $0 \leq \varphi < 2\pi$, і тоді G — площина XOY без початку координат. Але в цьому випадку обернене відображення R^{-1} не є неперервним. Якщо розглядати інші межі зміни кута φ , то відображення R^{-1} при $\varphi = 0$ буде регулярним, але порушиться його неперервність при інших значеннях φ .

Вправа. Встановити область визначення та знайти матрицю Якобі циліндричної системи координат.

2. Розглянемо сферичні координати. Відображення R

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \cos \psi; \\ y = \rho \sin \varphi \cos \psi; \\ z = \rho \sin \psi; \end{cases}$$

G — простір XYZ без півплощини $y = 0, x \geq 0$; V — брусок у просторі змінних ρ, φ, ψ :

$$U = \begin{cases} \rho > 0; \\ 0 < \varphi < 2\pi; \\ -\pi/2 < \psi < \pi/2. \end{cases}$$

Функції, що задають відображення R , — аналітичні; обчислимо якобіан відображення R :

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\rho \sin \varphi \cos \psi & -\rho \cos \varphi \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \psi & \rho \cos \varphi \cos \psi & -\rho \sin \varphi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & \rho \cos \psi \end{vmatrix} = \rho^2 \cos \psi.$$

Якобіан дорівнює нулю, коли $\rho = 0$ або $\psi = \pm \frac{\pi}{2}$. Отже, всі точки осі z — особливі точки сферичної системи координат. Поза віссю z сферична система координат буде регулярною. Подібно до прикладу 1 тут кут φ можна розглядати в межах $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Задача. Знайти формули переходу від сферичної системи координат до декартової в n -вимірному евклідовому просторі та обчислити якобіан цього відображення.

3. Розглянемо сім'ю співфокусних еліпсів та гіпербол на площині XOY , що задані рівняннями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2^2 + \lambda} = 1; \\ \frac{x^2}{a_1^2 + \mu} - \frac{y^2}{a_2^2 + \mu} = 1, \end{cases}$$

де параметри λ, μ належать області V , причому

$$\lambda > -a_2^2, \quad -a_1^2 < \mu < -a_2^2 \quad (a_1^2 > a_2^2).$$

Через кожну точку площини, де $xy \neq 0$, проходять один еліпс та одна гіпербола кожної із сукупностей. Таким чином, кожній точці (x, y) , де $xy \neq 0$, ставиться у відповідність пара чисел λ, μ , що називаються еліптичними координатами [4, розд. V, § 27]. Щоб записати відображення R , потрібно знайти $x = x(\lambda, \mu)$, $y = y(\lambda, \mu)$. Із рівнянь сімей одержимо

$$x^2 = \frac{(a_1^2 + \lambda)(a_1^2 + \mu)}{a_1^2 - a_2^2}; \quad y^2 = \frac{(a_2^2 + \lambda)(a_2^2 + \mu)}{a_2^2 - a_1^2}.$$

Доведемо, що в квадранті $G: x > 0, y > 0$ еліптичні координати є регулярними координатами. Відображення R задають регулярні функції

$$x = \sqrt{\frac{(a_1^2 + \lambda)(a_1^2 + \mu)}{a_1^2 - a_2^2}}; \quad y = \sqrt{\frac{(a_2^2 + \lambda)(a_2^2 + \mu)}{a_2^2 - a_1^2}}$$

Обчислимо якобіан відображення R :

$$\det R' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} \end{vmatrix} = \frac{\mu - \lambda}{4xy(a_1^2 - a_2^2)} \neq 0,$$

оскільки $\lambda \neq \mu, a_1^2 \neq a_2^2, x > 0, y > 0$.

Подібним чином можна довести, що еліптична система координат є регулярною в будь-якому відкритому квадранті.

4. Розглянемо сім'ю еліпсоїдів, одна та двопорожнистих гіперболоїдів, що задані рівняннями

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda} + \frac{y^2}{a_2^2 + \lambda} + \frac{z^2}{a_3^2 + \lambda} &= 1; \\ \frac{x^2}{a_1^2 + \mu} + \frac{y^2}{a_2^2 + \mu} + \frac{z^2}{a_3^2 + \mu} &= 1; \\ \frac{x^2}{a_1^2 + \nu} + \frac{y^2}{a_2^2 + \nu} + \frac{z^2}{a_3^2 + \nu} &= 1; \\ -a_1^2 < \nu < -a_2^2 < \mu < -a_3^2 < \lambda. \end{aligned}$$

Через кожну точку області простору XYZ , де $xyz \neq 0$, проходить по одній поверхні з кожної сім'ї. Таким чином, кожній точці (x, y, z) , де $xyz \neq 0$, ставиться у відповідність трійка чисел λ, μ, ν , що називаються еліпсоїдальними координатами.

Вправа. Довести, що в будь-якому відкритому октанті еліпсоїдальні координати є регулярними координатами.

5. Розглянемо регулярну функцію $z = f(x, y)$, що задана в деякій області. Позначимо f_x через u^1 , f_y — через u^2 . Нехай відображення R —

$$\begin{cases} u^1 = f_x(x, y); \\ u^2 = f_y(x, y). \end{cases}$$

З'ясуємо, коли частинні похідні можна розглядати як криволінійні координати. Для цього обчислимо якобіан відображення:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial x} & \frac{\partial u^1}{\partial y} \\ \frac{\partial u^2}{\partial x} & \frac{\partial u^2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2.$$

Отже, якщо в деякій точці $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \neq 0$, то локально f_x, f_y можна взяти як криволінійні координати в околі цієї точки.

Перетворення $\begin{cases} u^1 = f_x \\ u^2 = f_y \end{cases}$ називається перетворенням Лежандра і застосовується для розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних.

1.8.2. Метрична форма евклідового простору в криволінійних координатах

Розглянемо вектори a та b з початком у деякій точці області G і розкладемо їх по базису $\{R_{u_i}\}$ в цій точці: $a = a^i R_{u_i}$; $b = b^j R_{u_j}$. Скалярний добуток векторів a, b : $\langle a, b \rangle = a^i b^j \langle R_{u_i}, R_{u_j} \rangle$. Позначимо $\langle R_{u_i}, R_{u_j} \rangle$ через g_{ij} . У курсі аналітичної геометрії вводилися коефіцієнти g_{ij} , коли вивчалася косокутна декартова система координат з базисом $\{e_1, e_2, e_3\}$ [4, розд. I, § 5].

Запишемо тепер елемент довжини дуги кривої ds в криволінійній системі координат. Нехай в області U задана регулярна крива $u = u(t)$. Образом цієї кривої в області G є крива, рівняння якої $x = R(u(t))$. Координати x^1, \dots, x^n декартові, тому $ds^2 = \left\langle \frac{dx}{dt}, \frac{dx}{dt} \right\rangle dt^2$, але $\frac{dx}{dt} = R_{u^i} \frac{du^i}{dt}$. Підставимо одержаний вираз у формулу для обчислення довжини кривої і одержимо

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left\langle R_{u^i} \frac{du^i}{dt}, R_{u^j} \frac{du^j}{dt} \right\rangle dt^2 = \\ &= \langle R_{u^i}, R_{u^j} \rangle du^i du^j = g_{ij}(u) du^i du^j. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ця додатно-визначена квадратична форма називається метричною формою евклідового простору в криволінійних координатах.

У випадку вибору прямокутних декартових координат із (1.14) одержимо вже відомі формули (див. підрозд. 1.5).

Справді, якщо (x, y) — прямокутні декартові координати на площині, то метрична форма (1.14) набере вигляду

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Якщо на площині задана регулярна крива $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$ то квадрат диференціала довжини дуги цієї кривої запишеться у вигляді

$$ds^2 = ((x')^2 + (y')^2) dt^2.$$

У просторі в прямокутній декартовій системі координат

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

А квадрат диференціала довжини дуги регулярної кривої $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ запишеться у вигляді

$$ds^2 = ((x')^2 + (y')^2 + (z')^2) dt^2.$$

Приклади. 1. Нехай на площині задано полярну систему координат, відображення $R: \begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$ Матриця Якобі

$$R' = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix},$$

$$g_{11} = \langle R_r, R_r \rangle = 1,$$

$$g_{12} = \langle R_r, R_\varphi \rangle = 0,$$

$$g_{22} = \langle R_\varphi, R_\varphi \rangle = r^2.$$

Метрична форма площини в полярній системі координат має такий вигляд:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

2. Розглянемо коло з центром у полюсі полярної системи координат і радіусом r_0 ; його рівняння $r = r_0$. Знайдемо елемент довжини дуги цієї кривої та довжину кола. Оскільки $dr = 0$, то, використовуючи результат прикладу 1, одержимо,

$$\text{що } ds^2 = r_0^2 d\varphi^2, \text{ звідки } s = \int_0^{2\pi} r_0 d\varphi = 2\pi r_0.$$

3. Знайдемо довжину дуги логарифмічної спіралі, що задана в полярній системі координат рівнянням $r = e^\varphi$:

$$dr = e^\varphi d\varphi; ds^2 = 2e^{2\varphi} d\varphi^2;$$

$$ds = \sqrt{2} e^\varphi d\varphi; s = \sqrt{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^\varphi d\varphi = \sqrt{2} (e^{\varphi_2} - e^{\varphi_1}).$$

4. Запишемо метричну квадратичну форму простору в сферичній системі координат. Відображення R задається системою рівнянь

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi; \\ y = r \sin \varphi \cos \psi; \\ z = r \sin \psi. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{aligned} g_{11} &= \langle R_r, R_r \rangle = 1; \\ g_{22} &= \langle R_\varphi, R_\varphi \rangle = r^2 \cos^2 \psi; \quad g_{33} = \langle R_\psi, R_\psi \rangle = r^2; \\ \langle R_r, R_\varphi \rangle &= \langle R_\varphi, R_\psi \rangle = \langle R_\psi, R_r \rangle = 0, \end{aligned}$$

тобто $g_{12} = g_{13} = g_{23} = 0$, і метрична форма простору має вигляд

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cos^2 \psi d\varphi^2 + r^2 d\psi^2.$$

Матриця (g_{ij}) діагональна, отже, вектори R_r, R_φ, R_ψ , які утворюють в кожній точці, крім точок осі z , базис простору, є взаємно ортогональними.

5. Запишемо метричну квадратичну форму першого відкритого квадранта площини в еліптичній системі координат. Відображення R задане таким чином:

$$x = \sqrt{\frac{(a_1^2 + \lambda)(a_1^2 + \mu)}{a_1^2 - a_2^2}}; \quad y = \sqrt{\frac{(a_2^2 + \lambda)(a_2^2 + \mu)}{a_2^2 - a_1^2}}.$$

Матриця Якобі

$$R' = \begin{pmatrix} \frac{a_1^2 + \mu}{2x(a_1^2 - a_2^2)} & \frac{a_1^2 + \lambda}{2x(a_1^2 - a_2^2)} \\ \frac{a_2^2 + \mu}{2y(a_2^2 - a_1^2)} & \frac{a_2^2 + \lambda}{2y(a_2^2 - a_1^2)} \end{pmatrix},$$

матриця

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda - \mu}{4(a_1^2 + \lambda)(a_2^2 + \lambda)} & 0 \\ 0 & \frac{\mu - \lambda}{4(a_1^2 + \mu)(a_2^2 + \mu)} \end{pmatrix},$$

відки $ds^2 = g_{11}(d\lambda)^2 + g_{22}(d\mu)^2$.

Зауваження. 1. Можна було не обчислювати коефіцієнт g_{12} , оскільки рівність нулю цього коефіцієнта ви-

пливає із доведеного в курсі аналітичної геометрії факту ортогональності еліптичної системи координат.

2. У механіці, якщо метрична форма площини має діагональний вигляд, то коефіцієнти g_{11} , g_{22} називаються коефіцієнтами Ламе та позначаються відповідно через H_1 , H_2 .

Вправа. Записати метричну квадратичну форму простору в еліпсоїдальній системі координат.

Знайдемо вигляд елемента об'єму в криволінійній системі координат простору E^n . Згадаємо спочатку деякі відомості із аналітичної геометрії: якщо афінне перетворення задане метричним рівнянням $y = Ax$, де A — невироджена матриця, то образом паралелепіпеда, натягнутого на вектори e_1, \dots, e_n , що має об'єм V_x , є паралелепіпед, натягнутий на вектори Ae_1, \dots, Ae_n , з об'ємом

$$V_y = V_x |\det A|.$$

З курсу алгебри відомо, що об'єм паралелепіпеда, який натягнутий на вектори a_1, \dots, a_n , в ортогональній системі координат обчислюється за формулою $\text{vol}(a_1, \dots, a_n) = |\det(a_j^i)|$.

Розглянемо тепер дифеоморфізм $x = R(u)$, де (x^1, \dots, x^n) , (u^1, \dots, u^n) — відповідно декартові та криволінійні координати області ω ; (u^1, \dots, u^n) — декартові координати області u . Дифеоморфізм R породжує матрицю Якобі $R'(u) = (R_{u^i}^x, \dots, R_{u^i}^y)$.

Об'єм нескінченно малого паралелепіпеда в області u можна обчислити за формулою $dV_u = du^1 \dots du^n$, в області ω — $dV_x = dx^1 \dots dx^n$. Тоді

$$dx^1 dx^2 \dots dx^n = |\det R'(u)| du^1 du^2 \dots du^n.$$

Одержані формули дозволяють знаходити елемент орієнтованого об'єму області ω в криволінійній системі координат.

Згадаємо метричну форму евклідового простору в криволінійних координатах:

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j = \langle R_{u^i}, R_{u^j} \rangle du^i du^j.$$

Коефіцієнти метричної форми утворюють матрицю $G = (g_{ij}) = \langle R_{u^i}, R_{u^j} \rangle = R'(u)^t R'(u)$. Але $\det R' = \det^t R'$, тому $\det^2 R'(u) = \det G$, або $|\det R'(u)| = \sqrt{\det G}$. Таким чином, елемент об'єму в області ω дорівнює

$$\sqrt{\det G} du^1 \dots du^n.$$

Приклади. 1. Знайдемо елемент площі площини в полярній системі координат. Згадаємо, що $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$.

Звідси $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$, отже, $ds = r dr d\varphi$.

2. Знайдемо елемент об'єму простору E^3 у сферичній системі координат:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 \cos^2 \psi & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix},$$

звідси $dV = r^2 |\cos \psi| dr d\varphi d\psi$.

Вправа. Записати елемент площі площини в еліптичній системі координат та елемент об'єму простору в еліпсоїдальній системі координат.

1.9. Еволюта плоскої кривої

Нехай на площині є C^2 -регулярна крива L . В околі кожної точки кривої L можна ввести таку регулярну криволінійну систему координат u^1, u^2 , в якій рівняння кривої L буде мати вигляд $u^1 = 0$. Дійсно, нехай на площині введені декартові координати (x, y) , а крива L задана радіус-вектором $r(\sigma) = (x(\sigma), y(\sigma))$, де σ — натуральний параметр.

Введемо в околі L криволінійні координати (σ, t) , використовуючи таке відображення R :

$$R(\sigma, t) = r(\sigma) + tv(\sigma), \quad (1.15)$$

де v — одиничний вектор нормалі кривої L . З'ясуємо, в якій області площини криволінійні координати (σ, t) будуть регулярними.

Вектор $R_\sigma = r'_\sigma + tv'_\sigma = \tau(1 - kt)$, де τ — одиничний вектор дотичної; k — кривина кривої L , $R_t = v$. Отже, вектори R_σ, R_t лінійно незалежні, якщо $1 - kt \neq 0$. Тоді якобіан відображення R відрізняється від нуля. При $t = 0$ точка $P(\sigma, 0)$ лежить на кривій L і $1 - kt \neq 0$. У досить малому околі точки P кривої L введені нами криволінійні координати є регулярними.

У цій криволінійній системі координат рівняння дуги кривої L має вигляд $t = 0$. Метрична форма площини в цій системі координат

$$ds^2 = dt^2 + (1 - kt)^2 d\sigma^2,$$

де k — кривина базової кривої L .

Якщо $k = 0$, то

$$ds^2 = dt^2 + d\sigma^2.$$

Це метрична форма площини в прямокутній системі координат.

Якщо $k = 1$, тобто крива L — коло радіуса 1, то

$$ds^2 = dt^2 + (1-t)^2 d\sigma^2.$$

Перейдемо до нової системи координат $\begin{cases} \sigma = \sigma; \\ r = 1-t, \end{cases}$ де r — довжина відрізка, відкладеного від центра кола; криволінійна система координат (σ, r) — це полярна система координат площини. Метрика площини в полярній системі координат задається формою $ds^2 = dr^2 + r^2 d\sigma^2$.

Знайдемо точки площини, в яких порушується регулярність системи координат (σ, t) . Щоб вектори R_σ та R_t стали лінійно незалежними, потрібно, щоб $1 - kt = 0$, тобто $t = \frac{1}{k}$. Підставимо це значення t в рівняння (1.15) і одержимо параметричне рівняння множини l особливих точок криволінійної системи координат:

$$R(\sigma) = r(\sigma) + \frac{1}{k} v(\sigma). \quad (1.16)$$

Якщо радіус-вектор кривої L належить класу C^3 , то вектор-функція множини особливих точок криволінійної системи координат належить класу C^1 .

За визначенням $\rho = 1/k$ — радіус кривої L . Точка, що визначена радіус-вектором R (1.16), називається центром кривини кривої L .

Визначення. Еволюта кривої — це геометричне місце центрів кривини цієї кривої.

Крива називається евольвентою своєї еволюти.

Знайдемо умову, при якій еволюта є регулярною кривою:

$$R'(\sigma) = \tau \left(\frac{1}{k} \right)' v + \frac{1}{k} v' = -\frac{k'}{k^2} v.$$

Отже, якщо всюди $k' \neq 0$, то еволюта регулярна. Якщо в деякій точці $k' = 0$, то в околі цієї точки параметризація кривої нерегулярна або у кривої l є особливі точки. Доведено також, що коли еволюта l регулярна, то її дотична є нормаллю кривої L .

Рівняння (1.16) — це рівняння еволюти кривої L , що параметризована природним параметром. Запишемо рів-

няння еволюти кривої, параметризація якої довільна. Нехай крива L задана системою рівнянь $\begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t). \end{cases}$ Тоді вектор дотичної $\tau = (x', y')$, одиничний вектор нормалі

$$\nu = \left(-\frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right),$$

кривина

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

Підставимо ці вирази в рівняння (1.16) і одержимо рівняння еволюти:

$$\begin{aligned} X(t) &= x(t) - y' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}; \\ Y(t) &= y(t) + x' \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'}. \end{aligned}$$

Приклади. 1. Еволютою кола радіуса R є точка — центр кола. Якщо радіус кола $R=1$, то криволінійною системою координат, що породжується цим колом, є полярна система координат. Раніше зазначено, що центр полярної системи координат — особлива точка цієї системи. Зараз одержано той же результат.

2. Нехай еліпс заданий рівнянням $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 1.48). У вершинах еліпса кривина досягає екстремального значення. Їм відповідають особливі точки еволюти. Рівняння еволюти еліпса — $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$. Еволюта зображена на рис. 1.48, причому дузі еліпса відповідає дуга MN еволюти. Зауважимо, що рівняння $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

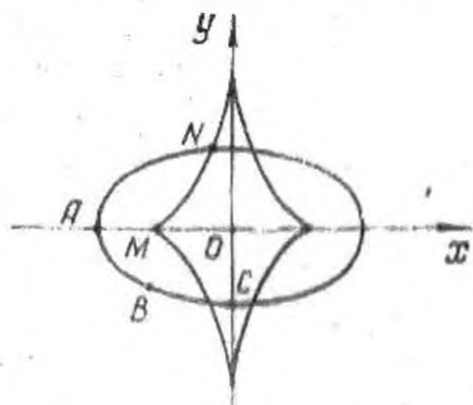


Рис. 1.48

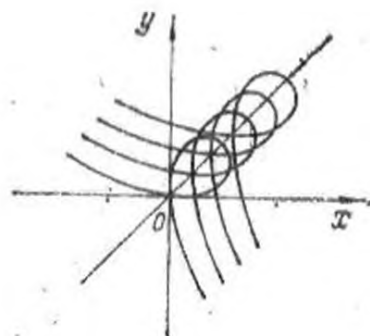


Рис. 1.49

задає астроїду, отже, еволюта еліпса — це афінний образ астроїди.

З'ясуємо фізичний зміст еволюти. Нескінченно близькі нормалі кривої перетинаються в точках еволюти. Якщо на кривій розташовані джерела випромінювання, то в точках еволюти відбувається концентрація цього випромінювання.

Задача 1. Знайти плоску криву, що має таку властивість: відрізок її дотичної між точкою дотику і віссю OX є величина стала, яка дорівнює a . Ця крива називається трактрисою.

2. Довести, що еволюта трактриси є ланцюгова лінія, тобто лінія, яка задається рівнянням $y = \operatorname{ch} \frac{x}{a}$.

3. Записати рівняння поверхні, що одержується при обертанні навколо осі OX : а) трактриси; б) ланцюгової лінії.

4. Одержати рівняння евольвенти.

5. Знайти довжину дуги еволюти кривої L , що вміщається між точками, які відповідають значенням параметра $\sigma = \sigma_1$ та $\sigma = \sigma_2$, де σ — природний параметр L .

6. Циклоїдою називається крива, що змальовується нерухомою точкою кола, яке котиться по прямій без проковзування. Знайти рівняння циклоїди та її еволюти.

Задача. Довести, що коло, радіус якого дорівнює радіусу кривини кривої L , а центр розташований в центрі кривини, має з кривою L стик більш високого порядку, ніж дотична.

Вказівка. Записати явні рівняння кривої та кола і розглянути різницю $U_{кр} - U_{кола}$.

Зауваження. Еволюта та евольвента застосовуються при проектуванні зубчастих передач.

Розглянемо ще одне застосування еволюти. Якщо потрібно зробити зручний мішечок ріжком із листка паперу, що має форму круга, то лист розрізають по радіусу і скручують із нього конус. Нехай лист паперу має довільну форму. Як зробити з нього найбільш зручний мішечок ріжком? Відомо, що нормалі кривої дотикаються її еволюти. Отже, потрібно розрізати лист по еволюті граничної кривої і зробити мішечок. Є жуки-листокрутки, що роблять собі гнізда із листків дерев; вони розрізають листок по еволюті його межі і скручують листок навколо розрізу.

1.9.1. Обгортка сім'ї плоских кривих

Нехай на площині задана параметрична сім'я кривих рівнянням $F(x, y, \varphi) = 0$, де φ — параметр сім'ї. У багатьох випадках сім'я допускає існування кривої, яка в кожній своїй точці дотикається деякої кривої сім'ї.

Визначення. Крива l класу C^1 , що задається параметрично: $\begin{cases} x = x(\lambda); \\ y = y(\lambda), \end{cases}$ називається обгорткою сім'ї кривих $F(x, y, \varphi)$, де функція F має неперервні частинні похідні по всіх змінних, коли задана функція $\varphi = \varphi(\lambda)$ — «правило прикріплення» кривих сім'ї до кривої l , що задовольняє таким умовам: 1) $F(x(\lambda), y(\lambda), \varphi(\lambda)) \equiv 0$; 2) при кожному фіксованому λ_0 крива $F(x, y, \varphi(\lambda_0)) = 0$ дотикається кривої l ; 3) функція $\varphi = \varphi(\lambda)$ не є сталою ні на якому інтервалі зміни λ .

Приклади. 1. Еволюта кривої — це обгортка нормалей кривої.

2. Розглянемо сім'ю кіл радіуса r , що лежать в одній півплощині і дотикаються осі OX . Обгорткою цієї сім'ї є вісь OX та пряма $y = 2r$.

3. Гладка крива, що не має прямолінійних ділянок, є обгорткою своїх дотичних.

Одержимо рівняння обгортки.

Теорема 10. Якщо обгортка сім'ї $F(x, y, \varphi) = 0$ існує, то її точки задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi) = 0; \\ F_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (1.17)$$

Доведення. Нехай крива l класу C^1 , задана системою рівнянь $\begin{cases} x = x(\lambda); \\ y = y(\lambda), \end{cases}$ є обгорткою сім'ї $F(x, y, \varphi) = 0$. Припустимо, що в деякій точці P обгортки $F_{\varphi} \neq 0$. Тоді і в деякому околі цієї точки $F_{\varphi} \neq 0$. За теоремою про неявну функцію множина точок в околі точки P , що задовольняють рівнянню $F(x, y, \varphi) = 0$, задовольняє рівнянню $\varphi = \varphi(x, y)$, причому $F(x, y, \varphi(x, y)) \equiv 0$ і $\varphi = \varphi(x, y)$ належить класу C^1 . Звідси умова 1, якій задовольняє «правило прикріплення» кривих сім'ї до обгортки, набирає вигляду $\varphi = \varphi(x(\lambda), y(\lambda))$. Продиференціюємо цю тотожність і одержимо

$$\varphi_{\lambda} = \varphi_x x' + \varphi_y y'.$$

Але x', y' — компоненти дотичного вектора кривої l , а φ_x, φ_y — компоненти вектора нормалі кривої сім'ї. За умовою

2 криві сім'ї дотикаються обгортки, тому $\varphi_x x' + \varphi_y y' = 0$; звідси одержимо, що $\varphi'_\lambda = 0$ і, таким чином, $\varphi = \text{const}$ в деякому околі точки P , що суперечить умові 3. Отже, $F_\varphi(x, y, \varphi) = 0$.

Приклади. 1. Розглянемо сім'ю прямих, що утворюють з осями координат трикутники сталої площі $S = 2$, розташовані в першому квадранті. Рівняння сім'ї $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$; $ab = 4$ ($a, b > 0$). Можна записати рівняння сім'ї так: $4x + a^2y = 4a$. Тоді система рівнянь (1.17) набере вигляду

$$\begin{cases} 4x + a^2y = 4a; \\ 2ay = 4. \end{cases}$$

Із другого рівняння знаходимо $a = \frac{2}{y}$, підставимо це значення в перше рівняння: $4x + \frac{4}{y} = \frac{8}{y}$; звідси $xy = 1$ ($x, y > 0$). Отже, обгорткою сім'ї прямих $4x + a^2y = 4a$ ($a > 0$) є вітка рівнобічної гіперболи.

2. У курсі аналітичної геометрії показано, що траєкторією польоту снаряда, що випущений з фіксованої точки зі сталою швидкістю V_0 під кутом α до горизонту, є парабола [4]. Максимальна дальність польоту досягається при $\alpha = 45^\circ$, максимальна висота, що дорівнює $\frac{V_0^2}{2g}$, — при $\alpha = 90^\circ$. Розглянемо сім'ю траєкторій, що залежать від α : $x = V_0 t \cos \alpha$; $y = V_0 t \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}$. Обгорткою цієї сім'ї є парабола, що називається параболою безпеки, її рівняння

$$\begin{cases} x = V_0 t; \\ y = \frac{V_0}{2g} x - \frac{gt^2}{2}. \end{cases}$$

Коли літак знаходиться вище параболи безпеки, а швидкість вильоту снаряда не перевищує V_0 , то літак невразливий.

Задача. Вивести рівняння параболи безпеки.

3. Розглянемо сім'ю кіл з центром у початку координат, що задана рівнянням $x^2 + y^2 = \varphi^2$. Системі рівнянь (1.17), що набирає вигляду $\begin{cases} x^2 + y^2 = \varphi^2; \\ 2\varphi = 0, \end{cases}$ задовольняє тільки точка $O(0, 0)$, тобто ця сім'я не має обгортки.

4. Розглянемо сім'ю кривих, що задана рівнянням $(x - \varphi)^3 + (y - \varphi)^3 + 3(y - \varphi)(y - \varphi) = 0$ (рис. 1.49). Сис-

темі рівнянь (1.17) задовольняє пряма $y = x$, яка не є обгорткою сім'ї. Ця пряма складається із особливих точок кривих сім'ї. Таким чином, системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi) = 0; \\ F_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0 \end{cases}$$

можуть задовольняти криві, що не є обгортками.

Зауваження. Системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi) = 0; \\ F_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0 \end{cases}$$

задовольняють такі точки: 1) в яких функція F не належить класу C^1 ; 2) в яких $F_x = F_y = 0$; 3) що належать обгортці сім'ї $F(x, y, \varphi) = 0$.

Достатні ознаки існування обгортки сім'ї плоских кривих є, але тут не розглядаються; вони викладені в роботі [9]. Задачу знаходження обгортки можна розв'язати, знаючи необхідні ознаки. Якщо функція F належить класу C^1 , то крива, яка визначається системою рівнянь (1.17), є обгорткою, якщо вона не складається із особливих кривих сім'ї.

Розглянемо ще деякі трактування обгортки. Нехай на площині задана сім'я кривих $F(x, y, \varphi) = 0$. Координати точки перетину нескінченно близьких кривих сім'ї задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} F(x, y, \varphi) = 0; \\ F(x, y, \varphi + \Delta\varphi) = 0, \end{cases}$$

звідси

$$\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{F(x, y, \varphi + \Delta\varphi) - F(x, y, \varphi)}{\Delta\varphi} = 0,$$

або

$$F_{\varphi}(x, y, \varphi) = 0.$$

Отже, обгортка складається з точок перетину нескінченно близьких кривих сім'ї.

Розглянемо дві криві L_1 та L_2 сім'ї, що відповідають значенням параметра φ_1 та φ_2 . Їх рівняння відповідно $F(x, y, \varphi_1) = 0$ та $F(x, y, \varphi_2) = 0$. Відстань між кривими $\rho(L_1, L_2) = \inf_{\substack{P \in L_1 \\ Q \in L_2}} |PQ|$. Якщо $F_{\varphi} \neq 0$, то відстань між кри-

вими — величина порядку $\Delta\varphi$. Якщо $F_{\varphi} = 0$, то відстань між кривими — нескінченно мала більш високого порядку, ніж $\Delta\varphi$. Отже, на обгортці криві сім'ї «зближуються».

1.9.2. Опорна функція кривої

Запишемо рівняння прямої на площині в нормальній формі:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = h,$$

де h — довжина перпендикуляру, що опущений на пряму з початку координат; φ — кут, який утворює цей перпендикуляр з додатним напрямком осі OX ; $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ — одиничний вектор нормалі. В однородних координатах рівняння будь-якої прямої запишеться так:

$$u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 = 0,$$

де (u_1, u_2, u_3) — тангенціальні координати прямої. Зауважимо, що тангенціальні координати визначаються з точністю до множника: якщо (u_1, u_2, u_3) — координати деякої прямої, то $(\rho u_1, \rho u_2, \rho u_3)$, $\rho \neq 0$ — координати цієї ж прямої. Пронормуємо тангенціальні координати так, щоб $u_1^2 + u_2^2 = 1$, та перейдемо в останньому рівнянні до неоднорідних координат:

$$u_1 \frac{x^1}{x^3} + u_2 \frac{x^2}{x^3} + u_3 = 0;$$

$$u_1 x + u_2 y = -u_3, \quad u_1^2 + u_2^2 = 1.$$

Порівняємо одержані рівняння з рівнянням прямої в нормальній формі. Координати $(\cos \varphi, \sin \varphi, -h)$ — це тангенціальні координати прямої.

Плоску криву можна задати двома способами: 1) точками, якщо задаємо криву радіус-вектором; 2) прямими, якщо задаємо криву як обгортку своїх дотичних. Подібним чином двома способами визначається опуклі множини на площині: точками та опорними кривими [4, розд. III].

Розглянемо більш детально другий спосіб задання кривої. Дотичні до кривої можна задати за допомогою додатно однорідної функції першого степеня $h(n) = \langle r, n \rangle$, яка називається опорною функцією.

З курсу математичного аналізу відомо, що додатно однорідна функція першого степеня $h = h(n_1, n_2)$ задовольняє тотожності

$$h_n, n_1 + h_n, n_2 = h.$$

З іншого боку, рівняння дотичної в нормальним вектором $n = (n_1, n_2)$ ($|n| = 1$), відстань якої від початку координат дорівнює h , має вигляд $x n_1 + y n_2 = h$ (рис. 1.50.)

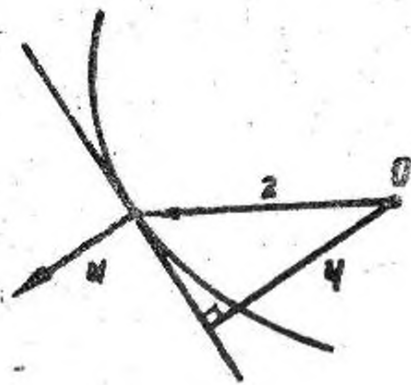


Рис. 1.50.

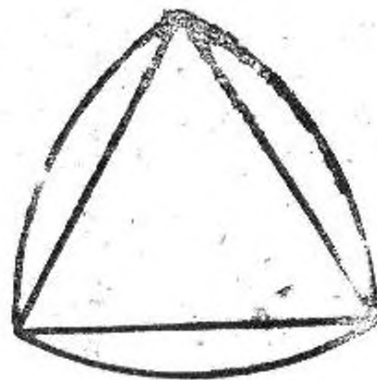


Рис. 1.51

Порівняємо два останні рівняння і одержимо, що координати точки дотику знаходяться за формулами

$$\begin{cases} x = h_{n_1}; \\ y = h_{n_2}. \end{cases}$$

Якщо обмежитися тільки одиничними нормаллями $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, то опорна функція буде функцією від φ : $h = h(\varphi)$. Сім'ю дотичних до кривої можна задати рівнянням $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi)$. Дана крива — обгортка цієї сім'ї.

За теоремою 10 із системи рівнянь

$$\begin{cases} x \cos \varphi + y \sin \varphi = h(\varphi); \\ -x \sin \varphi + y \cos \varphi = h'(\varphi) \end{cases} \quad (1.18)$$

знаходимо рівняння обгортки

$$\begin{cases} x = x(\varphi); \\ y = y(\varphi), \end{cases}$$

якщо вона існує.

Таким чином одержано параметричне рівняння обгортки, і параметр — це кут, який утворює нормаль кривої з додатним напрямком осі OX . З'ясуємо, як пов'язаний параметр φ з природним параметром σ кривої. Відомо, що кривина плоскої кривої $k = \frac{d\alpha}{d\sigma}$, де α — орієнтований кут, який утворює дотична до кривої з додатним напрямком осі OX . Але $\frac{d\varphi}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{d\sigma}$, отже, $k = \frac{d\varphi}{d\sigma}$ і $d\varphi = k d\sigma$.

Якщо $k \neq 0$, тобто крива локально опукла, то $\frac{d\varphi}{d\sigma} \neq 0$ і φ задає регулярну параметризацію кривої. Якщо $k = 0$ на деякому інтервалі, то $\varphi = \text{const}$ і тому не задає регулярну параметризацію кривої.

Особливо ефективно використовувати опорну функцію для вивчення опуклих кривих.

Нехай крива задана опорною функцією $h = h(\varphi)$. Виразимо через опорну функцію кривину кривої. Підставимо рівняння кривої $\begin{cases} x = x(\varphi); \\ y = y(\varphi) \end{cases}$ в систему рівнянь (1.18):

$$\begin{cases} x(\varphi) \cos \varphi + y(\varphi) \sin \varphi \equiv h(\varphi); \\ -x(\varphi) \sin \varphi + y(\varphi) \cos \varphi \equiv h'(\varphi). \end{cases}$$

Продиференціюємо другу тотожність по φ :

$$-x \cos \varphi - y \sin \varphi - x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \equiv h''(\varphi).$$

Одержане рівняння складемо з першою тотожністю і знайдемо, що

$$-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = h + h''.$$

Вектор $\tau = (x', y')$ — дотичний вектор кривої, заданої рівнянням $\begin{cases} x = x(\varphi); \\ y = y(\varphi). \end{cases}$ Отже, вектор $N = (y', -x')$ — нормальний вектор кривої; вектор $n = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ — одиничний вектор нормалі. Виберемо напрямок обходу на кривій так, щоб вектори n та N були співнаправлені. Тоді $\langle n, N \rangle = |N|$, або $-x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$. Але

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{k} = \rho,$$

де ρ — радіус кривини кривої. Тому

$$\rho = h + h''.$$

Розглянемо на площині замкнену опуклу криву (границю обмеженої опуклої множини). Відстань між двома паралельними опорними прямими опуклої множини називається шириною опуклої множини в даному напрямку.

Приклад. Розглянемо рівносторонній тілесний трикутник. Максимальна ширина цієї множини дорівнює довжині сторони трикутника, мінімальна — довжині висоти трикутника.

Крива називається кривою сталої ширини, якщо ширина опуклої множини, що обмежена цією кривою, у всіх напрямках одна і та ж.

Приклади. 1. Коло — крива сталої ширини.

2. Розглянемо рівносторонній трикутник. Дугою кола, центр якого знаходиться у вершині трикутника, а радіус дорівнює стороні трикутника, з'єднуємо дві

вершини трикутника. Опукла крива, що складена з трьох таких арок, є кривою сталої ширини (рис. 1.51).

Теорема 11. Довжина кривої сталої ширини d дорівнює πd .

Доведення. Доведемо теорему для регулярної C^2 -кривої. Крива замкнена, тому її довжина $l = \int_0^{2\pi} ds(\varphi)$. Згадаємо, що $ds = \rho d\varphi$, де ρ — радіус кривини кривої, а $\rho = h + h''$, де h — опорна функція кривої. Тому

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} (h + h'') d\varphi = \int_0^{2\pi} h d\varphi = \int_0^{\pi} h(\varphi) d\varphi + \int_0^{\pi} h(\varphi + \pi) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} (h(\varphi) + h(\pi + \varphi)) d\varphi = \int_0^{\pi} d\varphi = \pi d. \end{aligned}$$

Задача 1. Знайти площу замкненої опуклої області, що обмежена кривою з опорною функцією $h = h(\varphi)$.

2. Розглянемо криву, радіус кривини якої $\rho \leq \rho_0$, де ρ_0 — фіксоване число. Довести, що криву можна розташувати в крузі радіуса ρ_0 .

Вказівка. Використати опорну функцію.

Згадаємо, що полюс та поляр вводилися відносно кривої другого порядку, що задана в однорідних координатах. Але всі криві другого порядку проєктивно еквівалентні. Тому, не обмежуючи загальності, можна розглядати полюс та поляр відносно кола.

Згадаємо, що коли точка A лежить поза колом та через неї проведені дві дотичні до кола, то пряма, що з'єднує точки дотику, називається полярною точки A . Якщо точка A лежить всередині кола, то полярна точки A будується так: проводиться тятива (хорда) через точку A ; через кінці тятиви проводяться дотичні до кола, які перетинаються в деякій точці. Другу точку одержимо, розглянувши ще одну тятиву кола, що містить в собі A . Пряма, що з'єднує дві побудовані точки, є полярною точки A .

Нехай задані коло та пряма. Як побудувати полюс прямої відносно кола? Якщо пряма l перетинає коло в точках B_1, B_2 , то точка перетину дотичних до кола, які проходять через точки B_1, B_2 , є полюсом прямої l . Якщо пряма l не перетинає коло, то робимо таким чином.

Через будь-яку точку A_1 прямої l проводимо дві дотичні до кола і з'єднуємо точки дотику тятивою. Взяв-

ши іншу точку A , прямої l , одержимо ще одну тјативу. Точка перетину побудованих тјатив — полюс прямої l .

Зауважимо, що полярна центру кола лежить на нескінченності, є нескінченно віддаленою прямою.

Побудуємо полярну точки A відносно кола радіуса R з центром в точці O . Нехай точка A лежить всередині кола. Проведемо тјативу BC , що перпендикулярна до відрізка OA . Через точки B та C проведемо дотичні до кола. Вони перетинаються в точці S . Пряма, що проходить через точку S та перпендикулярна до прямої OS , є полярною точки A (рис. 1.52).

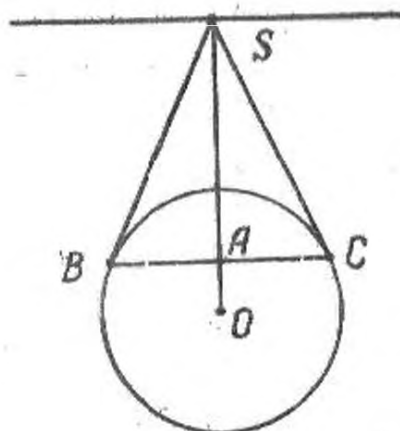


Рис. 1.52

Зауважимо, що коли

$$|OA| = r,$$

то

$$|OS| = \frac{R^2}{r}.$$

Нехай початок координат розташований в центрі кола O . Кожній точці A площини поставимо у відповідність пряму, що перпендикулярна до радіуса-вектора цієї точки і знаходиться на відстані $\frac{R^2}{r}$ від по-

чатку координат. Таке перетворення називається полярним.

Нехай на площині задана крива $r = r(t)$. Кожній точці цієї кривої відповідає при полярному перетворенні деяка пряма. Обгортка сім'ї прямих називається полярним образом кривої $r = r(t)$ відносно кола радіуса R з центром в початку координат. Полярний образ кривої $r = r(t)$ можна задати з допомогою опорної функції

$$h = \frac{R^2}{|r(t)|}.$$

Приклади. 1. Коло радіуса r з центром у початку координат при полярному перетворенні відносно кола $x^2 + y^2 = R^2$ перейде в коло радіуса $\frac{R^2}{r}$ з центром у початку координат.

2. Нехай в коло, відносно якого здійснюється полярне перетворення, вписаний трикутник. Він перейде в описаний навколо кола трикутник, причому сторони описаного трикутника дотикаються кола у вершинах вписаного трикутника.

Полярне перетворення має такі властивості:

1. Прямолінійні ділянки кривої при полярному перетворенні переходять в одну точку, і ця точка є кутовою точкою полярного образу кривої.

2. Кутові точки кривої при полярному перетворенні переходять у відрізки.

Зауваження. З точки зору полярного перетворення умови «Кривина не дорівнює нулю» та «Існує дотична» еквівалентні, оскільки полярне перетворення переводить криву, для якої не виконана одна з цих умов, у криву, для якої не виконана друга.



Глава 2 ТЕОРІЯ ПОВЕРХОНЬ

Нагадаємо визначення поверхні, які були введені в курсі аналітичної геометрії [4, розд. IV, §20].

Елементарною поверхнею називається топологічний образ внутрішності одиничного круга в тривимірному евклідовому просторі.

Якщо на площині введені прямокутні декартові координати u^1, u^2 , то внутрішність U одиничного круга задається нерівністю $(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1$. Образом взаємно однозначного та взаємно неперервного відображення множини U в простір є елементарна поверхня, яку можна задати параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2); \\ x^2 = x^2(u^1, u^2); \\ x^3 = x^3(u^1, u^2), \end{cases}$$

де x^1, x^2, x^3 — координати точок простору.

Зауважимо, що внутрішність одиничного круга топологічно еквівалентна, наприклад, площині або внутрішності квадрата.

Простою (вкладеною) поверхнею називається зв'язна множина в просторі, кожна точка якої має отвір, що гомеоморфний внутрішності круга.

Приклади. 1. Усі не вироджені поверхні другого порядку [4, розд. VI, §31] є вкладені поверхні. У двопорожнистого гіперболоїда необхідно розглядати одну зв'язну компоненту.

2. Циліндр над вкладеною плоскою кривою — вкладена поверхня.

3. Конус не є вкладена поверхня. Дійсно, розглянемо отвір вершини конуса. Якщо видалили вершину, множина стане незв'язною. Якщо ж із внутрішності круга видалити точку, множина лишиться лінійно зв'язною. А лінійна зв'язність — це топологічний інваріант. Строге доведення наведено в підрозд. 4.6.

Згадаємо, що будь-яка вкладена крива гомеоморфна прямій або колу. Не гомеоморфних між собою вкладених поверхонь значно більше.

Приклади. 1. Еліпсоїд гомеоморфний сфері S^2 .

2. Однопорожнистий гіперболоїд гомеоморфний циліндру $S^1 \times E^1$, де S^1 — коло.

3. Порожнина двопорожнистого гіперболоїда гомеоморфна площині E^2 .

4. Тор — це декартовий добуток $S^1 \times S^1$.

5. Розглянемо поверхню, що називається сферою з p ручками. Вона будується таким чином: із тора вирізаємо область, що гомеоморфна колу, і

одержимо поверхню, яка називається ручкою (рис. 2.1). Із сфери вирізаємо p областей, які гомеоморфні колу. До кожної граничної кривої на сфері «приклеюємо» ручку (тобто гомеоморфізмом отожднюємо граничні точки кривої на сфері і на ручці). Одержимо поверхню, яка називається сферою з p ручками. Якщо $p_1 = 0$ то поверхня — сфера; якщо $p = 1$, то поверхня — тор. Якщо $p_1 \neq p_2$ то сфера з p_1 ручками та сфера з p_2 ручками не гомеоморфні [2].

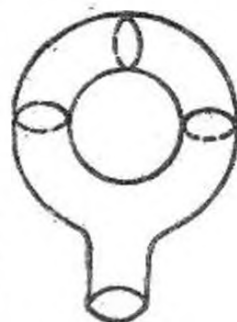


Рис. 2.1

Зауваження. Занурена поверхня подібно до зануреної кривої визначається як локально топологічний образ вкладеної поверхні. Точне визначення див. у підрозд. 4.7.

Далі поверхні розглянуто в основному локально, в околі точки.

Познайомимося з двома спеціальними класами поверхонь: з поверхнями обертання та лінійчастими [4, розд. IV, §21].

Нехай на площині XOZ задана вкладена крива

$$L: \begin{cases} x = x(u); \\ z = z(u), \end{cases} \quad x \geq 0, \quad a < u < b.$$

Обертаючи криву навколо осі OZ , одержимо поверхню обертання. Параметричне рівняння цієї поверхні —

$$\begin{cases} x = x(u) \cos v; \\ y = x(u) \sin v; \\ z = z(u), \end{cases} \quad a < u < b, \quad 0 \leq v < 2\pi.$$

Приклади. 1. Розглянемо трактрису, що задана рівняннями

$$\begin{cases} x = a \sin u; \\ z = a \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right), \end{cases} \quad 0 < u < \pi.$$

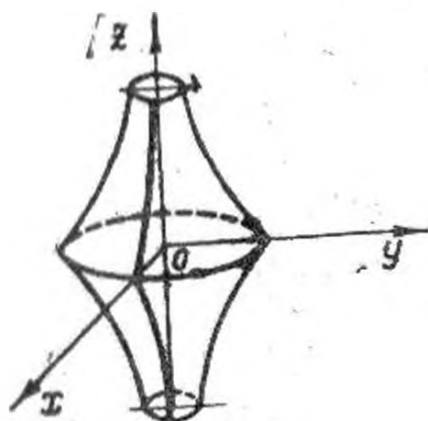


Рис. 2.2

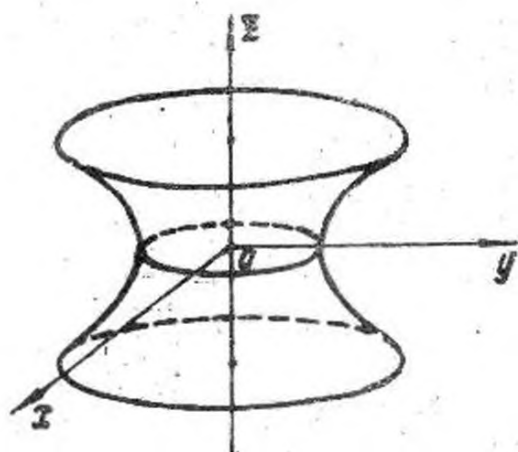


Рис. 2.3

При обертанні трактриси навколо осі OZ одержимо поверхню, яка називається псевдосферою (рис. 2.2). Рівняння псевдосфери —

$$\begin{cases} x = a \sin u \cos v; \\ y = a \sin u \sin v; \\ z = a \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right), \quad 0 < u < \pi, \quad 0 \leq v < 2\pi. \end{cases}$$

2. Розглянемо ланцюгову лінію

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a}; \\ z = u, \quad -\infty < u < \infty. \end{cases}$$

При обертанні ланцюгової лінії навколо осі OZ одержимо поверхню, яка називається катеноїдом (рис. 2.3); її рівняння —

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \cos v; \\ y = a \operatorname{ch} \frac{u}{a} \sin v; \\ z = u, \quad -\infty < u < \infty, \quad 0 \leq v < 2\pi. \end{cases}$$

Нехай $\rho = \rho(u)$, $u \in U$ — радіус-вектор кривої; нехай через кожену точку кривої проходить пряма з напрямним вектором $s(u)$. Тоді радіус-вектор точки поверхні, що утворена цими прямими, буде мати такий вигляд:

$$R(u, v) = \rho(u) + s(u)v, \quad u \in U, \quad -\infty < v < +\infty.$$

Ці поверхні називають лінійчастими. Вони можуть мати точки, в околі яких поверхні не є елементарними.

Приклади. 1. Конус, циліндр, однопорожнистий гіперболоїд, гіперболічний параболоїд — лінійчасті поверхні.

2. Розглянемо поверхню, що утворена таким рухом прямої: пряма, що перетинає вісь OZ під прямим кутом, обертається навколо цієї осі із сталою кутовою швидкістю ω і одночасно ковзає вздовж осі OZ з лінійною швидкістю a . Ця поверхня називається гвинтовою поверхнею або гелікоїдом (рис. 2.4). Її параметричне рівняння:

$$\begin{cases} x = u \cos \omega t; \\ y = u \sin \omega t; \\ z = at, \quad -\infty < t < +\infty, \quad -\infty < u < +\infty. \end{cases}$$

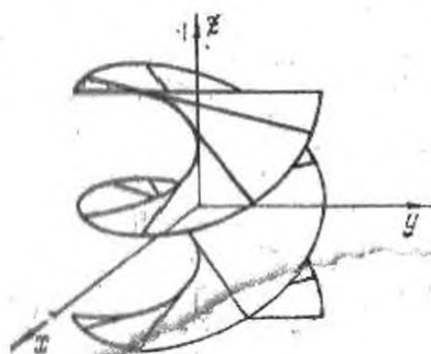


Рис. 2.4

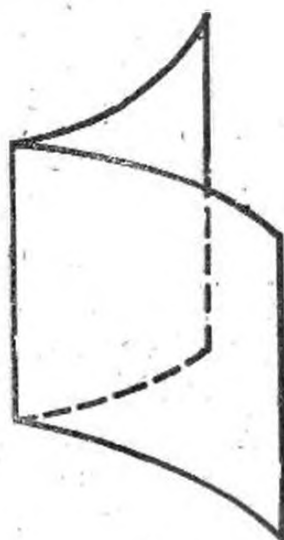


Рис. 2.5

2.1. Способи задання поверхонь

Поверхні, як і криві, можна задавати різними способами [4, розд. IV, § 20]: 1) параметрично, тобто системою рівнянь

$$\begin{cases} x = x(u^1, u^2); \\ y = y(u^1, u^2); \\ z = z(u^1, u^2); \end{cases}$$

- 2) неявно, тобто за допомогою рівняння $F(x, y, z) = 0$;
3) явно, тобто рівнянням $z = f(x, y)$.

Приклади. 1. Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = u + v; \\ y = (u + v)^2; \\ z = (u + v)^3, \quad -\infty < u, v < +\infty, \end{cases}$$

що визначає гладкий радіус-вектор $r=r(u, v)$. Ця система задає криву. Справді, позначимо $u+v$ через t . Тоді рівняння будуть мати вигляд

$$\begin{cases} x = t; \\ y = t^2; \\ z = t^3. \end{cases}$$

Приклад показує, що гладкості радіус-вектора $r=r(u, v)$ не досить для того, щоб він визначав поверхню; потрібні додаткові вимоги.

Розглянемо матрицю Якобі нашого відображення $r=r(u, v)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2(u+v) & 2(u+v) \\ 3(u+v)^2 & 3(u+v)^2 \end{pmatrix}.$$

Ранг цієї матриці дорівнює одиниці для будь-яких u, v , тобто $r_u \times r_v = 0$.

2. Ранг матриці Якобі відображення

$$\begin{cases} x = 2u + v; \\ y = 4u^2 + 4uv + v^2; \\ z = e^{2u} e^v, \quad -\infty < u, v < +\infty \end{cases}$$

дорівнює одиниці у всіх точках. Легко показати, що система задає криву.

Можна показати, що коли ранг матриці Якобі відображення $x=x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$ у всіх точках дорівнює одиниці, то множина точок, що задовольняють системі рівнянь, є регулярною кривою.

Повернемося до розглядання прикладів та вивчимо менш вироджені випадки.

3. Система рівнянь

$$\begin{cases} x = u \cos v; \\ y = u \sin v; \\ z = u, \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 \leq v < 2\pi \end{cases}$$

задає конус обертання. При $u=0$ одержимо особливу, кінчну точку поверхні. Ранг матриці Якобі

$$\begin{pmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

при $u=0$ дорівнює одиниці, при $u \neq 0$ — двом, тобто $r_u \times r_v \neq 0$.

4. Система рівнянь

$$\begin{cases} x = u^3; \\ y = u^2; \\ z = v, \end{cases} \quad -\infty < u, v < +\infty$$

визначає циліндричну поверхню з ребром (рис. 2.5).
У точках ребра ранг матриці Якобі

$$\begin{pmatrix} 3u^2 & 0 \\ 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

дорівнює одиниці.

5. У поверхні, що задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x + iy = (u + iv)^2; \\ z = \operatorname{Re}(u + iv)^3 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x = u^2 - v^2; \\ y = 2uv; \\ z = u^3 - 3uv^2, \end{cases}$$

є особливості, які називаються точками розгалуження. Це точки з координатами $u=0, v=0$. Легко показати, що ранг матриці Якобі даного відображення в цій точці дорівнює 0.

Таким чином, розглянуті приклади показують: для того щоб радіус-вектор $r=r(u, v)$ локально задавав елементарну поверхню, на ранг матриці Якобі цього відображення необхідно накласти деякі обмеження.

Визначення. Лінійно зв'язна множина точок простору називається *регулярною поверхнею*, якщо в кожній точці цієї множини є окіл, який допускає параметризацію регулярним радіусом-вектором $r=r(u, v)$ класу C^k , $k \geq 1$ (C^∞ , аналітичним) і таким, що $r_u \times r_v \neq 0$.

Зауважимо, що коли крива регулярна, тобто в околі будь-якої точки допускає регулярну параметризацію, то існує єдина (глобальна) регулярна параметризація всієї кривої. Для поверхонь подібне твердження неправильне.

Приклад. Розглянемо сферу, яка задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v; \\ y = R \cos u \sin v; \\ z = R \sin u, \end{cases} \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi.$$

Ранг матриці Якобі дорівнює одиниці в північному та південному полюсах сфери, тобто в точках N та S з координатами відповідно $u = \frac{\pi}{2}$, $v = 0$ та $u = -\frac{\pi}{2}$, $v = 0$. Але ці точки нічим не відрізняються від решти точок сфери. Якщо повернути систему координат так, щоб вісь OZ не проходила через точки N та S , то ранг матриці Якобі буде дорівнювати двом в цих точках. Отже, сфера — регулярна поверхня, але глобальна параметризація, яка тут розглядається, має особливі точки.

Природно виникає питання: чи існує регулярна параметризація всієї сфери? Докладна відповідь на це питання міститься в гл. 5.

Але, звичайно, існують поверхні, що допускають глобальну параметризацію.

Приклади. 1. Круговий циліндр можна задати так:

$$\begin{cases} x = R \cos v; \\ y = R \sin v; \\ z = u, \quad -\infty < u < +\infty, \quad 0 \leq v < 2\pi. \end{cases}$$

У всіх точках ранг матриці $\begin{pmatrix} 0 & -R \sin v \\ 0 & R \cos v \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ дорівнює двом.

2. Тор можна задати системою рівнянь

$$\begin{cases} x = (a + b \cos u) \cos v; \\ y = (a + b \cos u) \sin v; \\ z = b \sin u, \quad 0 \leq u, v < 2\pi. \end{cases}$$

Це глобальна регулярна параметризація тора.

Розглянемо поверхні, що задані неявно.

Приклади. 1. Точка $O(0, 0, 0)$ є особливою точкою конуса $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 0$, оскільки в цієї точки немає околу, гомеоморфного кругу. Відзначимо, що в цій точці $F_x = F_y = F_z = 0$, тобто в точці O $\text{grad } F = 0$.

2. Нехай $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2 - 1) = 0$. Ця множина точок має ізольовану точку $O(0, 0, 0)$, і в ній $\text{grad } F = 0$.

Для того щоб множина точок, що задані неявно рівнянням $F(x, y, z) = 0$, була регулярною поверхнею, в розумінні даного нами визначення, на функцію F необхідно накласти деякі обмеження.

Теорема 12. В околі точки (локально) всі три способи задання регулярної поверхні еквівалентні між собою, а саме:

1. У кожній точці регулярної поверхні існує окіл, що допускає явне задання того ж класу регулярності, тобто вона локально є елементарною поверхнею.

2. Нехай множина точок простору E^3 задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$, причому $F \in C^k$ ($k \geq 1$) і $\text{grad } F \neq 0$ в точці P_0 . Тоді існує окіл точки P_0 , в якому ця множина може бути задана явно, і функція явного задання належить C^k , тобто ця множина локально є елементарною поверхнею.

Доведення. 1. Нехай в точці P_0 регулярної поверхні, що задана радіус-вектором $r = r(u, v) \in C^k$ ($k \geq 1$), векторний добуток $r_u \times r_v \neq 0$. Це еквівалентно тому, що ранг матриці Якобі відображення $r = r(u, v)$ в цій точці дорівнює двом. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що в точці P_0

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Отже, за теоремою про обернену функцію в деякому околі точки P_0 існує обернене відображення

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

того ж класу регулярності. Підставимо знайдені значення u та v в параметричні рівняння поверхні і одержимо задання поверхні у вигляді

$$\begin{cases} x = x; \\ y = y; \\ z = z(u(x, y), v(x, y)). \end{cases}$$

2. Істинність другої частини теореми також випливає із теореми про неявну функцію. Довести самостійно.

Таким чином, доведено, що локально будь-яка регулярна поверхня є елементарною поверхнею. Більше того, гомеоморфізм околу точки регулярної поверхні круга задається ортогональним проектуванням цього круга на координатну площину і є дифеоморфізмом відповідного класу гладкості.

2.2. Дотична площина поверхні

У курсі аналітичної геометрії [4, розд. VI, § 30] було визначено дотичну площину до поверхні другого порядку $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ в точці $P(x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ як площину, в якій

лежать дотичні до всіх плоских перерізів поверхні, що проходять через точку P . Було доведено, що рівняння дотичної площини

$$F_{x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^i - x_0^i) = 0.$$

Міркуючи подібним чином, введемо поняття дотичної площини до регулярної поверхні. Нехай в околі точки P поверхня задана параметрично радіус-вектором $r = r(u^1, u^2)$ ($r_{u^1} \times r_{u^2} \neq 0$) і нехай точка P — образ точки $u_0^i(u_0^1, u_0^2)$. Розглянемо на площині $u^1 u^2$ регулярну криву

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t); \\ u^2 = u^2(t), \quad (u^1)' + (u^2)' \neq 0, \end{cases}$$

що проходить через точку u_0 . Образом цієї кривої на поверхні буде крива, що проходить через точку P . Її радіус-вектор $r = r(u^1(t), u^2(t))$; дотичний вектор $r_t = r_{u^1} \frac{du^1}{dt} + r_{u^2} \frac{du^2}{dt} \neq 0$, оскільки поверхня та крива на площині $u^1 u^2$ регулярні. Дотичний вектор r_t в точці P до кривої, що лежить на поверхні, розташований в площині π , яка натягнута на вектори $r_{u^1}(u_0)$, $r_{u^2}(u_0)$.

Розглянемо регулярні криві на площині $u^1 u^2$, що проходять через точку u_0 . Їх образ — це множина регулярних кривих на поверхні, що проходять через точку P . Дотичні вектори до цих кривих будуть лежати в площині π .

Нехай $\begin{cases} u^1 = u_0^1 + a_1 t; \\ u^2 = u_0^2 + a_2 t, \quad a_1^2 + a_2^2 \neq 0 \end{cases}$ — крива в площині $u^1 u^2$. Її образ має в точці P дотичний вектор $a = r_{u^1} a_1 + r_{u^2} a_2$. З огляду на довільність a_1 та a_2 дотичні до кривих на поверхні, які проходять через точку P , заповнюють площину π . Площина π називається дотичною площиною поверхні в точці P .

Визначення. Дотичною площиною регулярної поверхні в деякій точці називається площина, яка утворена дотичними до регулярних кривих, що лежать на поверхні і проходять через цю точку.

Ясно, що напрямний вектор нормалі площини π є вектор $r_{u^1} \times r_{u^2}$. Тому рівняння дотичної площини до поверхні $r = r(u^1, u^2)$ в точці P з радіус-вектором $r(u_0^1, u_0^2)$ має такий вигляд:

$$(R - r(u_0^1, u_0^2), r_{u^1}(u_0^1, u_0^2), r_{u^2}(u_0^1, u_0^2)) = 0. \quad (2.1)$$

Нехай поверхня задана неявно рівнянням $F(x^1, x^2, x^3) = 0$, причому $\text{grad } F \neq 0$. Запишемо рівняння дотичної площини до поверхні в точці (x_0^1, x_0^2, x_0^3) . За теоремою 12 в околі точки (x_0^1, x_0^2, x_0^3) поверхню можна задати явно, а це — окремий випадок параметричного задання. Отже, в околі точки (x_0^1, x_0^2, x_0^3) існує регулярна параметризація поверхні

$$\begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2); \\ x^2 = x^2(u^1, u^2); \\ x^3 = x^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

і $F(x^1(u^1, u^2), x^2(u^1, u^2), x^3(u^1, u^2)) \equiv 0$. Продиференціювавши тотожність, одержимо:

$$\begin{cases} F_{x^1} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} + F_{x^2} \frac{\partial x^2}{\partial u^1} + F_{x^3} \frac{\partial x^3}{\partial u^1} = 0, \\ F_{x^1} \frac{\partial x^1}{\partial u^2} + F_{x^2} \frac{\partial x^2}{\partial u^2} + F_{x^3} \frac{\partial x^3}{\partial u^2} = 0, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \langle \text{grad } F, r_{u^1} \rangle = 0; \\ \langle \text{grad } F, r_{u^2} \rangle = 0. \end{cases}$$

Оскільки r_{u^1}, r_{u^2} лінійно незалежні, вектор $\text{grad } F$ є напрямний вектор нормалі дотичної площини. Тому рівняння дотичної площини поверхні $F(x^1, x^2, x^3) = 0$ в точці (x_0^1, x_0^2, x_0^3) має такий вигляд:

$$F_{x^i}(x_0^1, x_0^2, x_0^3)(x^i - x_0^i) = 0. \quad (2.2)$$

Якщо поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$, то рівняння дотичної площини (2.2) в точці (x_0^1, x_0^2, x_0^3) набере вигляду

$$f_{x^1}(x_0^1, x_0^2)(x^1 - x_0^1) + f_{x^2}(x_0^1, x_0^2)(x^2 - x_0^2) = x^3 - x_0^3.$$

Приклад. Запишемо рівняння дотичної площини в точці $(R, 0, 0)$ до сфери радіуса R з центром у початку координат. Нехай сфера задана параметрично:

$$\begin{cases} x = R \cos u \cos v; \\ y = R \cos u \sin v; \\ z = R \sin u, \quad -\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq v \leq 2\pi. \end{cases}$$

Точці $(R, 0, 0)$ відповідають значення параметрів $u = 0$, $v = 0$. Тоді $r_u(0, 0) = (0, 0, R)$, $r_v(0, 0) = (0, R, 0)$ і рівняння дотичної площини (2.1) запишеться у вигляді

$$\begin{vmatrix} x - R & y & z \\ 0 & 0 & R \\ 0 & R & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

або $x = R$.

Ця ж сфера неявно може бути задана рівнянням

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0,$$

тоді

$$\text{grad } F = (2x, 2y, 2z), \quad \text{grad } F|_{(R, 0, 0)} = (2R, 0, 0),$$

і рівняння дотичної площини (2.2) буде таким: $x = R$.

Зауваження. 1. Дотичну площину поверхні можна визначити подібно до того, як раніше визначено дотичну пряму для кривої. Нехай P — точка на регулярній поверхні, π — площина, що проходить через точку P . Візьмемо на поверхні точку Q і позначимо її відстань від точки P та площини π через d та h відповідно (рис. 2.6). Площина π називається дотичною площиною до поверхні в точці P , якщо $\lim_{Q \rightarrow P} \frac{h}{d} = 0$ [15].

Задача. Довести, що два визначення дотичної площини для регулярної поверхні еквівалентні.

2. Вище зазначено: якщо розкласти радіус-вектор $r(t)$ кривої за формулою Тейлора (або функцію $F(x, y)$, коли крива задана неявно) та залишити тільки лінійну частину, то одержимо рівняння дотичної до кривої.

Подібне твердження має місце для поверхні. Нехай $r = r(u^1, u^2)$ — радіус-вектор регулярної поверхні. Розкладемо $r(u^1, u^2)$ за формулою Тейлора в околі точки (u_0^1, u_0^2) :

$$r(u^1, u^2) = r(u_0^1, u_0^2) + r_{u^1}(u_0^1, u_0^2)(u^1 - u_0^1) + r_{u^2}(u_0^1, u_0^2)(u^2 - u_0^2) + o(\sqrt{(u^1 - u_0^1)^2 + (u^2 - u_0^2)^2}).$$

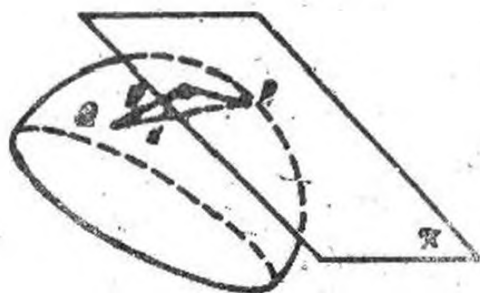


Рис. 2.6

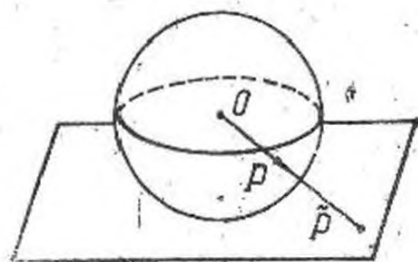


Рис. 2.7

Якщо залишити в розкладі тільки лінійну частину, а доданки більш високих порядків відкинути, одержимо параметричне рівняння дотичної площини.

Нехай поверхня задана неявно рівнянням $F(x^1, x^2, x^3) = 0$. Розкладемо функцію $F(x^1, x^2, x^3)$ за формулою Тейлора в околі точки (x_0^1, x_0^2, x_0^3) :

$$F(x^1, x^2, x^3) = F_{x^1}(x_0)(x^1 - x_0^1) + F_{x^2}(x_0)(x^2 - x_0^2) + F_{x^3}(x_0)(x^3 - x_0^3) + o(\sqrt{(x^1 - x_0^1)^2 + (x^2 - x_0^2)^2 + (x^3 - x_0^3)^2}).$$

Прирівнявши до нуля лінійну частину розкладу, одержимо рівняння дотичної площини.

Таким чином, локально дотична площина є лінійним наближенням поверхні.

3. За теоремою 12 регулярну поверхню в околі довільної точки P поверхні можна задати явно, тобто поверхня однозначно проектується на свою дотичну площину.

Справді, виберемо прямокутну систему координат у просторі спеціальним чином: початок координат — точка P , за площину x^1x^2 беремо дотичну площину поверхні в точці P , за вісь x^3 — нормаль до поверхні в точці P . Тоді вектор нормалі до поверхні в точці P має координати $(0, 0, 1)$. З іншого боку, координати вектора нормалі — це мінори матриці Якобі

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^3}{\partial u^1} & \frac{\partial x^3}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

Звідси випливає, що

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \neq 0$$

і поверхня явно задається рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$.

За вибором системи координат $f(0, 0) = 0$. Крім того, $f_{x^1}(0, 0) = f_{x^2}(0, 0) = 0$, оскільки вектор нормалі $(f_{x^1}, f_{x^2}, -1)$ дотичної площини в точці P колінеарний вектору $(0, 0, 1)$.

2.2.1. Сферичне відображення поверхні

Згадаємо, що криву можна задати двома способами: радіус-вектором, якщо розглядати криву як множину

точок простору, сім'єю прямих, якщо розглядати криву як обгортку своїх дотичних.

Те ж саме має місце для поверхні, а саме: поверхню можна задати радіус-вектором як множину точок простору; дуальний спосіб задання — задання через сім'ю дотичних площин, обвідною поверхнею якої (обгорткою) є поверхня.

Нехай F — регулярна поверхня в просторі E^3 . У кожній точці поверхні існує дотична площина. Нехай $r = r(u^1, u^2)$

— регулярна параметризація F , вектор $n = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|r_{u^1} \times r_{u^2}|}$ є

одичний вектор нормалі поверхні. Початок одичного вектора нормалі n в точці P поверхні розташуємо в центрі одичної сфери. Тоді кінець вектора n попадає в точку \bar{P} , що належить сфері, \bar{P} — сферичне зображення точки P . Сферичним зображенням області G , яка лежить на поверхні, буде деяка множина \bar{G} , що складається із сферичних зображень точок області G .

Приклади. 1. Сферичним зображенням площини є точка на сфері.

2. Сферичним зображенням прямого кругового циліндра є велике коло одичної сфери.

3. Сферичним зображенням еліпсоїда є вся сфера. При цьому в силу опуклості еліпсоїда кожній точці сфери відповідає одна точка еліпсоїда.

Вправа. Самостійно розглянути сферичне відображення тора.

Нехай поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$. Тоді вектор $N = (f_{x^1}, f_{x^2}, -1)$ — вектор нормалі до поверхні

в точці $P(x^1, x^2, f(x^1, x^2))$, вектор $n = \frac{(f_{x^1}, f_{x^2}, -1)}{\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}}$ —

одичний вектор нормалі. Нехай центр одичної сфери розташований в початку координат. Рівняння дотичної площини до сфери в точці $(0, 0, -1)$ буде $x^3 = -1$. Промінь з початком в точці O в напрямку вектора n перетне цю площину в точці \bar{P} , яка називається нормальним зображенням точки P (рис. 2. 7). Координати точки $\bar{P} = (f_{x^1}, f_{x^2})$.

Приклад. Знайдемо сферичне зображення еліптичного параболоїда $x^3 = \frac{(x^1)^2 + (x^2)^2}{2}$. Вектор $N = (x^1, x^2, -1)$ — вектор нормалі поверхні, тому нормальним зображенням еліптичного параболоїда є вся площина. Звідси випливає,

що образом еліптичного параболоїда при сферичному відображенні є відкрита півсфера.

Вправа. Самостійно розглянути сферичне відображення гіперболічного параболоїда.

Згадаємо, що на площині криволінійні координати вводилися u^1, u^2 таким чином: $u^1 = f_{x^1}, u^2 = f_{x^2}$, де $f(x^1, x^2)$ — регулярна функція. Це перетворення Лежандра. Дамо його геометричну інтерпретацію. Розглянемо поверхню, що задана рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$; координати (f_{x^1}, f_{x^2}) — це координати нормального зображення точки поверхні.

2.2.2. Орієнтовані і неорієнтовані поверхні

Нехай F — регулярна класу C^k поверхня в просторі E^3 ; U, V — дві області на цій поверхні, які перерізаються, і кожна з яких гомеоморфна відкритому кругу, і у кожній з яких існує регулярна параметризація: $r = r_1(u^1, u^2)$ — параметризація області U , $r = r_2(v^1, v^2)$ — параметризація області V . У перерізі областей U та V є дві параметризації.

Нехай відкрита множина U настільки мала, що в ній поверхня може бути задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$. Тоді точки перерізу множин U та V допускають однозначне проєктування на площину x^1x^2 . Отже, відображення

$$F : \begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2) \\ x^2 = x^2(u^1, u^2) \end{cases}$$

і обернене відображення

$$F^{-1} : \begin{cases} u^1 = u^1(x^1, x^2) \\ u^2 = u^2(x^1, x^2) \end{cases}$$

належать класу регулярності C^k .

Відображення $G : \begin{cases} x^1 = x^1(v^1, v^2) \\ x^2 = x^2(v^1, v^2) \end{cases}$ та обернене відображення $G^{-1} : \begin{cases} v^1 = v^1(x^1, x^2) \\ v^2 = v^2(x^1, x^2) \end{cases}$, де $v^1, v^2 \in U \cap V$, належать класу регулярності C^k . Отже, відображення

$$F^{-1}G : \begin{cases} u^1 = u^1(x^1(v^1, v^2), x^2(v^1, v^2)) \\ u^2 = u^2(x^1(v^1, v^2), x^2(v^1, v^2)) \end{cases}$$

або $\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2) \\ u^2 = u^2(v^1, v^2) \end{cases}$ є регулярним класу C^k взаємно однозначним відображенням області $r_1^{-1}(U \cap V) \xrightarrow{F^{-1} \circ G} r_2^{-1}(U \cap V)$. Те ж саме має місце для оберненого відображення $G^{-1} \circ F$,

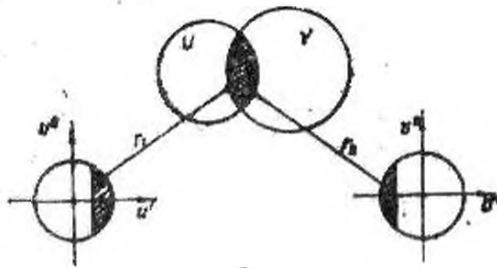


Рис. 2.8

$u^2(v^1, v^2)$). Звідси

$$r_{v^1} = r_{u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + r_{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1}; \quad r_{v^2} = r_{u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + r_{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^2}$$

$$r_{v^1} \times r_{v^2} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^2} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} (r_{u^1} \times r_{u^2}). \quad (2.3)$$

Із того, що $r_{u^1} \times r_{u^2} \neq 0$; $r_{v^1} \times r_{v^2} \neq 0$, випливає

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^2} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \neq 0.$$

Визначення. Регулярна поверхня називається орієнтовною, якщо її можна вкрити околами, що гомеоморфні відкритому колу, в кожному з яких поверхня допускає регулярну параметризацію, причому в області перерізу околів перехід від одних криволінійних координат до других відбувається за допомогою перетворення, визначник матриці Якобі якого додатний. Якщо не існує вкриття поверхні такими околами, то поверхня не може бути орієнтованою.

Розглянемо одну область U з криволінійними координатами u^1, u^2 . Координатні лінії задаються рівняннями $u^1 = \text{const}$, $u^2 = \text{const}$; r_{u^1}, r_{u^2} — дотичні вектори до координатних ліній. В кожній точці області U вектори r_{u^1}, r_{u^2} можна прийняти за базисні вектори відповідної дотичної площини, вони задають орієнтацію дотичної площини. Від точки до точки орієнтація змінюється неперервно, оскільки вектори r_{u^1}, r_{u^2} також змінюються неперервно.

Розглянемо переріз областей U та V . В кожній точці області перерізу є два базиси однієї і тієї ж дотичної площини: (r_{u^1}, r_{u^2}) та (r_{v^1}, r_{v^2}) . Якщо матриця переходу від одного базису до другого (а це і є матриця Якобі відображення, яке зв'язує одні криволінійні координати з другими)

має додатний визначник, то ці базиси задають одну і ту ж орієнтацію дотичної площини.

Розглянемо ще один перехід до з'ясування змісту визначення поверхонь, які можуть або не можуть бути орієнтовані. Нехай в просторі задана орієнтація. Якщо (r_{u^1}, r_{u^2}) — базис дотичної площини поверхні $r = r(u^1, u^2)$, то нормаль n до поверхні вибираємо так, щоб базис простору (r_{u^1}, r_{u^2}, n) надавав додатну орієнтацію простору, тобто $n = r_{u^1} \times r_{u^2}$. Формула (2.3) показує, як зв'язані нормалі, що визначаються параметризаціями околів U та V . Із неї випливає, що можливість орієнтувати поверхню гарантує можливість вибору параметризації околів, які вкривають поверхню, а також що нормаль буде неперервно змінюватися при переході від точки до точки і в перерізі околів різні параметризації будуть визначати один і той же одиничний вектор нормалі.

Розглянемо на поверхні шлях γ з початком у точці P_0 . Вкривмо його околами U_α (гомеоморфними відкритому колу), в яких задана регулярна параметризація шляху. Оскільки шлях γ є неперервне відображення f відрізка $[0, 1]$, то $f^{-1}(U_\alpha \cap \gamma)$ вкривють відрізок $[0, 1]$. З цього покриття можна вибрати скінченне вкриття $f^{-1}(U_0 \cap \gamma), \dots, f^{-1}(U_k \cap \gamma)$. Тоді околи U_0, U_1, \dots, U_k здійснюють скінченне вкриття шляху γ .

На відріжку $[0, 1]$ виберемо впорядковану послідовність точок x_0, x_1, \dots, x_{k+1} таких, що $x_0 = 0, x_{k+1} = 1$ і $P_0 = f(x_0) \in U_0, P_{k+1} = f(x_{k+1}) \in U_k, P_i = f(x_i) \in U_{i-1} \cap U_i$.

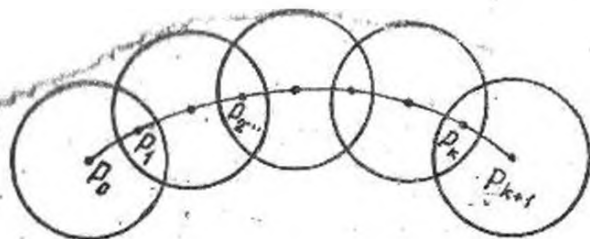


Рис. 2.9

(рис. 2.9). Уздовж відрізка шляху P_0P_1 визначимо одиничне нормально неперервне векторне поле поверхні $n_0 = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|r_{u^1} \times r_{u^2}|}$, де $r = r(u^1, u^2)$ — регулярна параметризація околу U_0 . У точці P_1 нормаль задається також у вигляді $n_1 = \frac{r_{v^1} \times r_{v^2}}{|r_{v^1} \times r_{v^2}|}$, де $r = r(v^1, v^2)$ — регулярна параметризація околу U_1 . Якщо нормалі n_0 та n_1 у точці P_1 співпадають, то нормальне неперервне векторне поле буде визначено на відріжку шляху P_0P_1 . Якщо вони протилежні, то змінимо параметризацію

околу таким чином: $v^1 = \tilde{v}^1$, $v^2 = -\tilde{v}^2$. Тоді в новій параметризації в точці P_1 нормаль n_1 буде співпадати з нормаллю n_0 . В точках P_i будемо робити аналогічно. В результаті вздовж шляху γ побудуємо неперервне нормальне векторне поле.

Нехай γ — замкнений шлях, тобто $P_0 = P_{k+1}$. Після обходу γ повернемося в точку P_0 з нормаллю n_k , яка або співпадає з n_0 , або протилежна.

Вправа. Покажіть, що ця властивість не залежить від вибору нормального векторного поля.

Якщо поверхня може бути орієнтована, то неперервне поле нормалей вздовж будь-якої замкненої кривої має ту властивість, що після обходу кривої повернення у вихідну точку здійснюється з нормаллю того ж напрямку. Це впливає безпосередньо із рівності (2.3).

Якщо на поверхні існує замкнена крива γ така, що після обходу кривої повернення у вихідну точку відбувається з протилежно напрямленою нормаллю, то поверхня не може бути орієнтована. Крива γ називається петлею, що дезорієнтує. Таким чином, у нас є ознака поверхні, що не може бути орієнтована.

При обході замкненої кривої можна слідкувати не за полем нормалей, а за базисами дотичних площин. Будемо вважати, що вздовж шляху γ задане поле дотичних реперів, коли вздовж нього задані два неперервних дотичних векторних поля $\{e_1(t), e_2(t)\}$, які в кожній точці утворюють базис дотичної площини.

Аналогічно тому, як при побудові неперервного векторного поля нормалей, вкрийемо шлях γ скінченною послідовністю околів U_0, U_1, \dots, U_k з упорядкованою послідовністю точок P_0, P_1, \dots, P_{k+1} . Вздовж відрізка шляху P_0P_1 визначимо дотичний репер $\{r_{u^1}, r_{u^2}\}$, де $r = r(u^1, u^2)$ — регулярна параметризація в околі U_0 . В точці P_1 є також базис дотичної площини $\{r_{v^1}, r_{v^2}\}$, де $r = r(v^1, v^2)$ — регулярна параметризація в околі U_1 . Розкладемо вектори базису $\{r_{u^1}, r_{u^2}\}$ по базису $\{r_{v^1}, r_{v^2}\}$:

$$\begin{cases} r_{u^1} = a_1^1 r_{v^1} + a_1^2 r_{v^2}; \\ r_{u^2} = a_2^1 r_{v^1} + a_2^2 r_{v^2}. \end{cases}$$

Змінимо параметризацію U_1 таким чином:

$$\begin{cases} v^1 = a_1^1 \tilde{v}^1 + a_2^1 \tilde{v}^2; \\ v^2 = a_1^2 \tilde{v}^1 + a_2^2 \tilde{v}^2. \end{cases}$$

Тоді в новій параметризації в точці P_1 $r_{\sigma_1} = r_{u^1}$, $r_{\sigma_2} = r_{u^2}$ і тепер дотичний репер буде визначений на відрізку P_0P_2 . В інших точках P_i будемо робити подібним чином. У результаті вздовж шляху γ одержимо поле дотичних реперів.

Нехай γ — замкнений шлях, тобто $P_0 = P_{k+1}$. Після обходу γ вернемося в точку P_0 з базисом, що задає ту ж орієнтацію, що і початковий базис, або протилежну.

Вправа. Показати, що ця властивість не залежить від вибору поля дотичних реперів.

Якщо поверхня може бути орієнтована, то повернення відбувається в точку P_0 з базисом, що задає ту ж орієнтацію. Якщо ж відбулося повернення в початкову точку з базисом, що задає протилежну орієнтацію, то поверхню орієнтувати неможливо і крива називається петлею, що дезорієнтує.

Приклади. 1. Усі елементарні поверхні можна орієнтувати. Елементарні поверхні гомеоморфні колу, тобто вони можуть бути вкриті однією областю (околом), можуть бути задані однією параметризацією.

2. Сфера — це поверхня, що може бути орієнтована. Сферу можна задати рівнянням $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$. Нормаль $n = (x, y, z)$ напрямлена по радіус-вектору точки сфери. Таким чином, у всіх точках сфери однозначно вибрана нормаль, що неперервно змінюється від точки до точки.

3. Розглянемо поверхню, що задана параметрично:

$$\begin{cases} x = \left(1 + t \cos \frac{\theta}{2}\right) \cos \theta; \\ y = \left(1 + t \cos \frac{\theta}{2}\right) \sin \theta; \\ z = t \sin \frac{\theta}{2}, \quad -\frac{1}{4} < t < \frac{1}{4}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Ця поверхня називається листком Мебіуса. Листок Мебіуса одержується з прямокутника ототожненням двох його сторін, як показано на рис. 2.10 (ототожнюються точки 1 і 6, 3 і 4, 2 і 5). Можна одержати листок Мебіуса, обертаючи півплощину xz , в якій розташований відрізок AB , навколо осі OZ та обертаючи сам відрізок навколо осі, паралельній осі OX , що проходить через середину відрізка, так, щоб швидкість обертання була в два рази менше швидкості обертання півплощини (рис. 2.11). Коли півплощина обернеться на кут 2π , відрізок обернеться на кут π і змалює листок Мебіуса.



Рис. 2.10



Рис. 2.11

Доведемо, що листок Мебіуса — це поверхня яка не може бути орієнтована. Для цього покажемо, що крива $t=0$ є петля, яка дезорієнтує. Справді,

$$\begin{aligned}
 r_t(0, \theta) &= \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \theta, \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sin \frac{\theta}{2} \right); \\
 r_\theta(0, \theta) &= (-\sin \theta, \cos \theta, 0); \\
 n &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos \frac{\theta}{2} \cos \theta & \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = \\
 &= \left(-\sin \frac{\theta}{2} \cos \theta, -\sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \cos \frac{\theta}{2} \right).
 \end{aligned}$$

Зауважимо, що $|r_t \times r_\theta| = 1$ у всіх точках кривої $t=0$. Отже, параметризація поверхні регулярна вздовж цієї кривої. Тому поверхня регулярна в околі кривої, тобто нормаль змінюється неперервно при русі вздовж кривої. Но, мала $n = (0, 0, 1)$ при $\theta = 0$ і $n = (0, 0, -1)$ при $\theta = 2\pi$.

4. Довести самостійно, що поверхня, яка задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x = \cos u \cos 2v; \\ y = \cos u \sin 2v; \\ z = (\cos v - \cos u \sin v) \sin u, \end{cases}$$

є поверхнею, яка не може бути орієнтованою. Знайти петлю, що дезорієнтує.

Зауваження. Поверхні, які не можуть бути орієнтовані, називаються ще односторонніми.

2.3. Перша квадратична форма поверхні

Розглянемо регулярну поверхню, що задана параметрично: $r = r(u^1, u^2)$, $r_{u^1} \times r_{u^2} \neq 0$, та регулярну криву на площині u^1, u^2 , що задана системою рівнянь

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t), & t_1 \leq t \leq t_2; \\ u^2 = u^2(t), & \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 \neq 0. \end{cases}$$

Образом цієї кривої на поверхні буде регулярна крива, що задана параметрично: $r = r(u^1(t), u^2(t))$.

Знайдемо довжину кривої на поверхні як $s = \int_{t_1}^{t_2} ds$. Відомо, що $ds^2 = \langle r_t, r_t \rangle dt^2$. Але $r_t = r_{u^1} \frac{du^1}{dt} + r_{u^2} \frac{du^2}{dt}$. Тому

$$ds^2 = \left(\langle r_{u^1}, r_{u^1} \rangle \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2 \langle r_{u^1}, r_{u^2} \rangle \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \langle r_{u^2}, r_{u^2} \rangle \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 \right) dt^2 = \langle r_{u^i}, r_{u^j} \rangle du^i du^j, \quad i, j = 1, 2.$$

Ця квадратична форма називається першою квадратичною формою поверхні і позначається через I .

Отже, $I = g_{ij} du^i du^j$, де $g_{ij} = \langle r_{u^i}, r_{u^j} \rangle$, $i, j = 1, 2$.

Часто коефіцієнти першої квадратичної форми позначають таким чином: $E = g_{11}$; $F = g_{12}$; $G = g_{22}$.

Знаючи першу квадратичну форму поверхні та рівняння кривої на поверхні в криволінійних координатах, можна знайти довжину дуги кривої.

Обчислимо дискримінант першої квадратичної форми:

$$\Delta = \langle r_{u^1}, r_{u^1} \rangle \langle r_{u^2}, r_{u^2} \rangle - \langle r_{u^1}, r_{u^2} \rangle^2 = |r_{u^1} \times r_{u^2}|^2.$$

Якщо поверхня $r = r(u^1, u^2)$ регулярна, то дискримінант першої квадратичної форми $\Delta > 0$, $g_{11} = \langle r_{u^1}, r_{u^1} \rangle > 0$ і перша квадратична форма є позитивно визначеною. Позитивна визначеність першої квадратичної форми порушується там, де порушується регулярність параметризації.

Приклади. 1. Нехай u^1, u^2 — прямокутні декартові координати площини. Перша квадратична форма площини $I = (du^1)^2 + (du^2)^2$.

Перша квадратична форма площини в полярних координатах має такий вигляд (див. підрозд. 1.8.2):

$$I = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

2. Розглянемо сферу радіуса R . Раніше обчислено елемент дуги кривої в сферичній системі координат (r, φ, ψ) і одержано (див. підрозд. 1.8.2):

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi^2).$$

Із останньої рівності можна одержати першу квадратичну форму сфери, якщо підставити в неї $r = R = \text{const}$. Отже, перша квадратична форма сфери радіуса R $I = R^2 (d\psi^2 + \cos^2 \psi d\varphi^2)$.

Той же результат одержимо, якщо будемо шукати першу квадратичну форму сфери, що задана рівняннями

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \cos \psi; \\ y = R \sin \varphi \cos \psi; \\ z = R \sin \psi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

та користуватися при цьому лише визначенням першої квадратичної форми.

Зауважимо, що коли сфера задана системою рівнянь

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \psi; \\ y = R \sin \varphi \sin \psi; \\ z = R \cos \psi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \psi \leq \pi, \end{cases}$$

то $I = R^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2)$.

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнтів g_{ij} . На поверхні розташовані дві сім'ї координатних ліній $u^1 = \text{const}$; $u^2 = \text{const}$. Вектори r_{u^1} , r_{u^2} дотикаються координатних ліній. Знайдемо елемент довжини дуги лінії $u^2 = \text{const}$: $ds_1^2 = \langle r_{u^1}, r_{u^1} \rangle (du^1)^2$.

Звідси $g_{11} = \left(\frac{ds_1}{du^1}\right)^2$. Подібним чином можна показати, що $g_{22} = \left(\frac{ds_2}{du^2}\right)^2$ визначає елемент дуги координатних ліній $u^1 = \text{const}$. Нарешті, розглянемо $g_{12} = \langle r_{u^1}, r_{u^2} \rangle$. Нехай ω — кут між дотичними векторами r_{u^1} , r_{u^2} до координатних ліній в точці P . Тоді $\cos \omega = \frac{\langle r_{u^1}, r_{u^2} \rangle}{|r_{u^1}| |r_{u^2}|}$, або $\cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$.

Отже, коли $g_{12} = 0$, тоді координатні лінії ортогональні, і навпаки. Тобто рівність нулю коефіцієнта g_{12} — необхідна та достатня умова для ортогональності координатних ліній.

Якщо $g_{11} = 1$, то du^1 — елемент дуги кривої $u^2 = \text{const}$, тобто u^1 — натуральний параметр на цій кривій.

Повернемося до сфери. Її перша квадратична форма

$$I = R^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\varphi^2), \quad g_{12} = 0,$$

отже, координатна мережа ортогональна, $g_{11} = R^2$; $g_{22} = R^2 \sin^2 \psi$. Розглянемо нову параметризацію сфери — таку, щоб $R d\psi = d\tilde{\psi}$; звідси $\psi = \frac{\tilde{\psi}}{R}$. У нових криволінійних координатах $(\varphi, \tilde{\psi})$ перша квадратична форма сфери $ds^2 =$

$= d\tilde{\varphi}^2 + R^2 \sin^2 \frac{\tilde{\varphi}}{R} d\varphi^2$. Зауважимо, що коли ψ — кут, який утворює радіус-вектор точки сфери з центром у початку координат з додатним напрямком осі OZ , то $\tilde{\psi}$ — довжина дуги великого кола на сфері, що стягує кут ψ . Якщо $R = 1$, то $\tilde{\psi} = \psi$.

Обчислимо довжину малого кола на сфері. Мале коло можна задати рівнянням $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0$, де $\tilde{\psi}_0 = \text{const}$, $\tilde{\psi}_0$ — довжина підлізка меридіана від полюса до малого кола. Елемент дуги малого кола знайдемо, підставивши в першу квадратичну форму $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}_0$: $ds = R \sin \frac{\tilde{\psi}_0}{R} d\varphi$. Звідси довжина малого кола

$$s = \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} R \sin \frac{\tilde{\psi}_0}{R} d\varphi = 2\pi R \sin \frac{\tilde{\psi}_0}{R}.$$

Якщо $R = 1$, то $s = 2\pi \sin \tilde{\psi}_0$.

З допомогою першої квадратичної форми можна знайти кут між будь-якими двома кривими, що лежать на поверхні. Справді, нехай криві

$$(L_1) \begin{cases} u^1 = \varphi^1(t); \\ u^2 = \varphi^2(t); \end{cases} \quad (L_2) \begin{cases} u^1 = f^1(t); \\ u^2 = f^2(t); \end{cases}$$

лежать на поверхні $r = r(u^1, u^2)$. Тоді криву L_1 можна задати рівнянням $r_1 = r(\varphi^1(t), \varphi^2(t))$, криву L_2 — рівнянням $r_2 = r(f^1(t), f^2(t))$. Напрямний вектор дотичної кривої L_1 буде

$$r_{1t} = r_{u^1} \frac{d\varphi^1}{dt} + r_{u^2} \frac{d\varphi^2}{dt},$$

кривої L_2 —

$$r_{2t} = r_{u^1} \frac{df^1}{dt} + r_{u^2} \frac{df^2}{dt}.$$

Якщо криві L_1, L_2 перетинаються під кутом α , то

$$\cos \alpha = \frac{|\langle r_{1t}, r_{2t} \rangle|}{|r_{1t}| |r_{2t}|} = \frac{\left| g_{ij} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{df^j}{dt} \right|}{\sqrt{g_{ij} \frac{d\varphi^i}{dt} \frac{d\varphi^j}{dt}} \sqrt{g_{ij} \frac{df^i}{dt} \frac{df^j}{dt}}}.$$

Зауваження. Позначимо $a^i = \frac{d\varphi^i}{dt}$, $b^j = \frac{df^j}{dt}$, $i, j = 1, 2$, координати векторів $a(P)$ та $b(P)$ в косокутному базисі

$(r_{u^1}(P), r_{u^2}(P))$ дотичної площини в точці P . Тоді кут α між векторами $a(P)$ та $b(P)$ знайдемо з формули [4, розд. I, § 5]:

$$\cos \alpha = \frac{g_{ij} a^i b^j}{\sqrt{g_{ij} a^i a^j} \sqrt{g_{ij} b^i b^j}}.$$

2.3.1. Площа поверхні

Розглянемо на площині область G , що обмежена регулярною кривою, в якій введені прямокутні декартові координати u^1, u^2 . Площа області G дорівнює $S = \iint_G du^1 du^2$.

Нехай $r = au + bv + c$, де a, b — неколінеарні вектори, $-\infty < u, v < +\infty$; параметричне рівняння площини π ; a — образ одиничного вектора осі u ; b — образ одиничного вектора осі v . Розглянемо прямокутник на площині u, v , сторони якого паралельні осям координат та мають довжину, що дорівнює Δu та Δv . При вказаному відображенні цей прямокутник перейде в паралелограм на площині π , що натягнута на вектори $a \Delta u, b \Delta v$. Площа паралелограма $S = |a \times b| \Delta u \Delta v$. Таким чином, коефіцієнт розтягування прямокутника при відображенні площини u, v в просторі у всіх точках площини один і той же і дорівнює $|a \times b|$.

Будемо тепер розглядати площину π як поверхню в тривимірному просторі та знайдемо коефіцієнти її першої квадратичної форми: $r_u = a; r_v = b; g_{11} = \langle a, a \rangle; g_{12} = \langle a, b \rangle; g_{22} = \langle b, b \rangle$. Звідси $|a \times b|^2 = \langle a, a \rangle \langle b, b \rangle - \langle a, b \rangle^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ і площа елементарного паралелограма на площині π буде

$$S = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \Delta u \Delta v.$$

Нехай у просторі рівнянням $r = r(u^1, u^2)$ задана регулярна поверхня. Координатні лінії $u^1 = \text{const}, u^2 = \text{const}$ площини $u^1 u^2$ переходять при відображенні $r = (u^1, u^2)$ в координатні лінії поверхні, які ділять її на координатні криволінійні чотирикутники. Розглянемо на площині u^1, u^2 елементарний прямокутник, сторони якого паралельні осям u^1, u^2 . Не втрачаючи загальності, можна вважати, що точка $O(0, 0)$ лежить всередині прямокутника. При відображенні $r = r(u^1, u^2)$ прямокутник перейде в координатний чотирикутник, що лежить на поверхні, точка O — в точку P_0 поверхні. Рівняння дотичної площини поверхні в точці P_0 : $R = r_{u^1}(0, 0)u^1 + r_{u^2}(0, 0)u^2 + C$. Пря-

могутник на площині u^1, u^2 при відображенні R перейде в паралелограм на дотичній площині. Якщо прямокутник малий, то площа паралелограма на дотичній площині повинна бути близькою до площі криволінійного чотирикутника поверхні.

Враховуючи наведені вище міркування, визначимо площу поверхні, що задана рівнянням $r = r(u^1, u^2)$; $u^1, u^2 \in U$, таким чином:

$$S = \iint_U |r_{u^1} \times r_{u^2}| du^1 du^2 = \iint_U \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2.$$

Отже, площу поверхні визначено аналітично. Тому виникають три запитання:

1. Чи виконується властивість адитивності площі?
2. Чи коректне визначення площі, тобто чи не залежить воно від параметризації поверхні?
3. Чи співпадає запропоноване формулювання з визначеннями площі для плоских областей, площі сфери, які вводилися в шкільному курсі?

Властивість адитивності площі поверхні впливає з адитивності інтеграла.

Щоб відповісти на друге запитання, згадаємо формулу заміни змінних в подвійному інтегралі. Нехай в області U змінюються змінні u^1, u^2 , в області $V - v^1, v^2$, і

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2); \\ u^2 = u^2(v^1, v^2). \end{cases}$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_U f(u^1, u^2) du^1 du^2 &= \iint_V f(u^1(v^1, v^2), u^2(v^1, v^2)) \times \\ &\times \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} \right| dv^1 dv^2. \end{aligned}$$

Розглянемо дві регулярні параметризації поверхні: $r = r(u^1, u^2)$ і $r = \tilde{r}(v^1, v^2)$. Раніше показано, що функції переходу $u^i = u^i(v^1, v^2)$ ($i = 1, 2$) від криволінійних координат v^1, v^2 до криволінійних координат u^1, u^2 регулярні у випадку регулярності обох параметризацій поверхні і $\det \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j} \right) \neq 0$. Зауважимо, що

$$r = \tilde{r}(v^1, v^2) = r(u^1(v^1, v^2), u^2(v^1, v^2))$$

і

$$\tilde{r}_{v^1} \times \tilde{r}_{v^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix} (r_{u^1} \times r_{u^2}).$$

Повернемося тепер до формули, що визначає площу поверхні:

$$\begin{aligned} S &= \iint_V |r_{u^1} \times r_{u^2}| du^1 du^2 = \\ &= \iint_V \frac{|\tilde{r}_{v^1} \times \tilde{r}_{v^2}|}{\left| \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \right|} \left| \frac{\partial u^1}{\partial v^1} \frac{\partial u^2}{\partial v^2} - \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1} \right| dv^1 dv^2 = \\ &= \iint_V |\tilde{r}_{v^1} \times \tilde{r}_{v^2}| dv^1 dv^2. \end{aligned}$$

Отже, коректність визначення площі поверхні доведено.

Відповімо на третє запитання. Для цього розглянемо приклади.

Приклади. 1. Знайдемо площу круга радіуса r_0 на площині. Нехай на площині введені полярні координати r, φ . Круг радіуса r_0 можна задати системою нерівностей $\begin{cases} 0 \leq r \leq r_0; \\ 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$ Метрична форма площини в полярній системі координат має вигляд $dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$; елемент площі — $dS = r dr d\varphi$. Отже, площа круга

$$S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r_0} r dr = \pi r_0^2.$$

2. Знайдемо площу круга радіуса r_0 на сфері

$$\begin{cases} x = R \cos v \sin \frac{u}{R}; \\ y = R \sin v \sin \frac{u}{R}; \\ z = R \cos \frac{u}{R}. \end{cases}$$

Її перша квадратична форма:

$$dS^2 = du^2 + R^2 \sin^2 \frac{u}{R} dv^2;$$

матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \frac{u}{R} \end{pmatrix}.$$

Отже, елемент площі сфери

$$dS = R \sin \frac{u}{R} du dv.$$

Круг радіуса r_0 на сфері можна задати системою нерівностей

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq r_0; \\ 0 \leq v < 2\pi. \end{cases}$$

Площа цього круга, якщо обчислити її за введеним вище визначенням, буде

$$S = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{r_0} R \sin \frac{u}{R} du = 2\pi R^2 \cos \frac{u}{R} \Big|_0^{r_0} = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{r_0}{2R}.$$

Зауважимо, що якщо $r_0 = \pi R$, то кругом радіуса r_0 на сфері є сфера. Площа її $S = 4\pi R^2 \sin^2 \frac{\pi R}{2R} = 4\pi R^2$, що співпадає з одержаним раніше результатом.

Таким чином, за допомогою першої квадратичної форми можна знаходити довжини кривих, що лежать на поверхні, кути між кривими та площі областей, що розташовані на поверхні.

Зауваження. Нехай поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$. Перейдемо до параметричного її задання:

$$r(x^1, x^2) = (x^1, x^2, f(x^1, x^2)).$$

Тоді $r_{x^1} = (1, 0, f_{x^1})$, $r_{x^2} = (0, 1, f_{x^2})$ і $g_{11} = \langle r_{x^1}, r_{x^1} \rangle = 1 + f_{x^1}^2$; $g_{12} = \langle r_{x^1}, r_{x^2} \rangle = f_{x^1} f_{x^2}$; $g_{22} = \langle r_{x^2}, r_{x^2} \rangle = 1 + f_{x^2}^2$.

Таким чином, коефіцієнти першої квадратичної форми явно заданої поверхні мають вигляд $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$. Вище розглянуто спеціальну систему координат: початок координат розташований в точці P_0 поверхні, дотична площина до поверхні в точці P_0 — це площина $x^1 x^2$, вісь x^3 напрямлена по нормалі до поверхні в точці P_0 . В деякому околі точки P_0 в такій системі координат поверхня задається явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$, причому $f(0, 0) = 0$; $f_{x^1}(0) = f_{x^2}(0) = 0$ і $g_{ij} = \delta_{ij}$ в точці P_0 . Тобто в спеціальній системі координат матриця першої квадратичної форми поверхні $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в точці P_0 .

Таким чином, вибір спеціальної системи координат суттєво спрощує обчислення.

Якщо поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$, то $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}$ і площа області X поверхні обчислюється за формулою

$$S = \iint_X \sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2} dx^1 dx^2.$$

Задача. Знайти першу квадратичну форму поверхні, що задана неявно рівнянням $F(x^1, x^2, x^3) = 0$, $\text{grad } F \neq 0$, і формулу для обчислення площі області, що лежить на поверхні.

2.3.2. Повні поверхні

На регулярній поверхні за допомогою першої квадратичної форми можна знаходити довжини регулярних кривих, що з'єднують дві точки.

Нехай F — регулярна поверхня, точки P та Q лежать на поверхні F . Через $L(P, Q)$ позначимо криву скінченної довжини, що лежить на поверхні і з'єднує точки P, Q ; через $S(P, Q)$ — її довжину.

Визначимо відстань ρ між точками P, Q таким чином:

$$\rho(P, Q) = \inf_{L(P, Q) \subset F} S(P, Q). \quad (2.4)$$

Довести, що коли так ввести поняття відстані між двома точками поверхні, то вона перетвориться в метричний простір, тобто функція відстані ρ задовольняє трьом аксіомам: 1) $\rho(P, Q) = \rho(Q, P)$; 2) $\rho(P, Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$; 3) $\rho(P, Q) \leq \rho(P, R) + \rho(R, Q)$, де P, Q, R — точки поверхні F .

Згадаємо, що метричний простір називається повним, якщо будь-яка його фундаментальна послідовність має границю, що належить цьому метричному простору.

Визначення. Поверхня, відстань між точками якої обчислюється за допомогою формули (2.4), називається повною, якщо вона є повним метричним простором.

Приклади. 1. Область площини, що не співпадає з усією площиною, не є повною поверхнею. Коли додати до області всі граничні точки, то одержимо повний метричний простір, який може не бути поверхнею.

2. Сфера, еліптичний параболоїд — повні поверхні. Сфера та еліптичний параболоїд — дві різні повні поверхні: сфера — повна компактна поверхня, еліптичний параболоїд — повна некомпактна поверхня. Зауважимо, що компактність — поняття топологічне, а повнота — метричне.

Крива, яка з'єднує дві точки поверхні і довжина якої дорівнює відстані між цими точками, називається найкоротшою.

Приклади. 1. На площині найкоротшою є відрізок, що з'єднує дві точки.

2. Розглянемо область площини, що зображена на рис. 2.12. Очевидно, що не кожні дві точки цієї неповної поверхні можна з'єднати найкоротшою. Справді, відстань між точками P , Q дорівнює довжині ламаної PAQ , але точка A не належить поверхні. Якщо приєднати до області граничні точки, то одержимо повний метричний простір, будь-які дві точки якого можна з'єднати найкоротшою.

3. Знайдемо найкоротші на сфері. Розглянемо сферу одиничного радіуса та тригранний кут з вершиною в центрі сфери. Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — плоскі кути при вершині

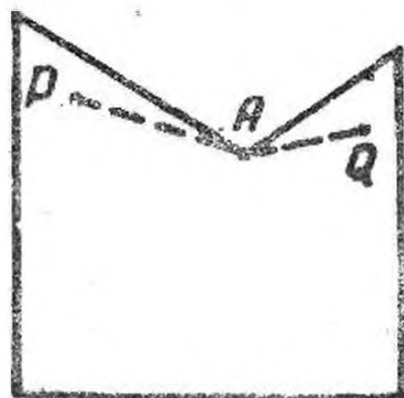


Рис. 2.12

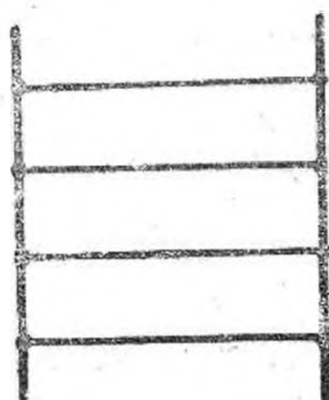


Рис. 2.13

тригранного кута. Відомо, що кожний кут $\alpha_i, i=1, 2, 3$ не більший, ніж сума двох інших кутів. Тригранний кут вирізає на сфері трикутник, що складається з дуг великих кіл сфери, причому довжини дуг (сторін сферичного трикутника) дорівнюють α_1, α_2 і α_3 . Але $\alpha_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2$. Отже, найкоротшою на сфері, що з'єднує точки P, Q , є менша дуга великого кола, яка проходить через точки P, Q (оскільки будь-яку криву скінченної довжини на сфері можна скільки завгодно наблизити ламаними з дуг великих кіл). Зауважимо, що коли точки P, Q не є діаметрально протилежними точками сфери, то через них проходить єдине велике коло.

Виявляється, що на повній поверхні будь-які дві точки можна з'єднати найкоротшою. Розглянутий приклад 2 показує, що вимога повноти суттєва.

Природно виникає питання: як знайти найкоротшу на довільній регулярній поверхні? Або можна поставити питання більш слабке): які криві є «претендентами» на найкоротші регулярної поверхні? Нижче розглянуто ці питання.

2.4. Ізометричні і конформні відображення площини

Визначення. Дві поверхні F_1 та F_2 називаються ізометричними, коли існує взаємно однозначне відображення f однієї поверхні на другу, при якому зберігаються довжини відповідних при відображенні кривих. Відображення f називається ізометрією.

Якщо поверхні F_1 та F_2 співпадають, то f задає ізометричне відображення поверхні на себе, яке називається рухом.

Плоскі рухи, або ізометричні відображення площини на себе вивчалися в курсі аналітичної геометрії [4, розд. VII, § 34]. Сукупність усіх рухів на площині утворює групу, що складається з двох компонент, які не перерізаються: множини власних рухів та множини не-власних рухів.

Розглянемо сферу S^2 та групу $O(3)$. Нагадаємо, що група $O(3)$ — це група ортогональних матриць третього порядку. Якщо матриця A належить групі $O(3)$, а x — довільний вектор, то $\langle Ax, Ax \rangle = \langle x, x \rangle$. Звідси випливає, що під дією групи $O(3)$ сфера з центром у початку координат переходить у себе, причому довжини кривих зберігаються. Виявляється, що групою $O(3)$ вичерпуються всі рухи сфери (це буде доведено пізніше). Власні рухи сфери утворюють групу $SO(3)$. В курсі аналітичної геометрії доведено, що група $SO(3)$ має топологічний тип дійсного проєктивного простору RP^3 ; друга компонента групи $O(3)$, яку складають не-власні рухи сфери, також має тип RP^3 .

У загальному випадку не існує відображення поверхні на себе, що зберігає довжини кривих, крім тотожного. Якщо такі відображення існують, то у поверхні є симетрія.

Знайдемо критерій ізометричності поверхонь.

Теорема 13. Для того щоб деякий окіл точки P_1 регулярної поверхні F_1 можна було ізометрично відобразити на деякий окіл точки P_2 регулярної поверхні F_2 , необхідно та достатньо, щоб існували регулярні параметризації околів цих точок такі, при яких відповідні цим параметризаціям перші квадратичні форми поверхні були однаковими.

Доведення. 1. Нехай перші квадратичні форми регулярних поверхонь F_1 та F_2 однакові. Поставимо у відповідність точки поверхонь з однаковими криволінійними координатами. Криві, що відповідають одна одній при

цьому відображенні, будуть мати однакові параметричні рівняння

$$\begin{cases} u^1 = u^1(t); \\ u^2 = u^2(t). \end{cases}$$

Довжини цих кривих співпадають, оскільки співпадають перші квадратичні форми поверхонь F_1, F_2 , і, отже, вказані відображення є ізометріями.

2. Нехай точка $P_1(u^1, u^2)$ — довільна точка поверхні F_1 , $r=r_1(u^1, u^2)$ — деяка регулярна параметризація поверхні F_1 в околі точки P_1 . Нехай точка P_2 відповідає точці P_1 при ізометричному відображенні поверхні F_1 на F_2 . Параметризуємо поверхню F_2 так, щоб точка P_2 мала такі ж криволінійні координати, що і точка P_1 . Така параметризація $r=r_2(u^1, u^2)$ поверхні F_2 буде регулярною. Сприймемо цей факт без доведення; він буде доведений при вивченні внутрішньої геометрії поверхні. Точки, що відповідають одна одній при ізометрії поверхонь F_1, F_2 із околів точок P_1 та P_2 , будуть мати однакові криволінійні координати. Відповідні за ізометрією криві, що лежать на поверхнях F_1, F_2 , задаються однаковими рівняннями. Розглянемо криві, що задані рівнянням $u^2 = \text{const}$. Вздовж цих кривих $ds_1^2 = g_{11}^1 (du^1)^2; ds_2^2 = g_{11}^2 (du^1)^2$.

Але $\int_{u_1^1}^{u_2^1} ds_1 = \int_{u_1^1}^{u_2^1} ds_2$, оскільки поверхні F_1, F_2 ізометричні.

Звідси $g_{11}^1 = g_{11}^2$. Розглянемо криві, що задані рівнянням $u^1 = \text{const}$, і одержимо, що $g_{22}^1 = g_{22}^2$. Розглянемо криві, вздовж яких $u^1 = u^2$, одержимо $\sqrt{g_{11}^1 + g_{22}^1 + 2g_{12}^1} = \sqrt{g_{11}^2 + g_{22}^2 + 2g_{12}^2}$. Із останнього рівняння та того, що $g_{11}^1 = g_{11}^2; g_{22}^1 = g_{22}^2$, випливає, що $g_{12}^1 = g_{12}^2$.

Приклади. 1. Циліндр локально ізометричний площині. Розглянемо циліндр, що заданий параметрично рівняннями

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi; \\ y = R \sin \varphi; \\ z = u, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < u < +\infty. \end{cases}$$

Обчислимо коефіцієнти першої квадратичної форми циліндра:

$$\begin{cases} x_u = 0; \\ y_u = 0; \\ z_u = 1; \end{cases} \begin{cases} x_\varphi = -R \sin \varphi; \\ y_\varphi = R \cos \varphi; \\ z_\varphi = 0; \end{cases} \begin{cases} g_{11} = 1; \\ g_{12} = 0; \\ g_{22} = R^2. \end{cases}$$

Отже, перша квадратична форма циліндра $ds^2 = du^2 + R^2 d\varphi^2$.

Розглянемо іншу параметризацію циліндра. Нехай нові координати u, v зв'язані зі старими координатами u, φ рівняннями $\begin{cases} u = u; \\ v = R\varphi. \end{cases}$ Перша квадратична форма циліндра в нових координатах має вигляд $ds^2 = du^2 + dv^2$.

Перша квадратична форма площини в декартових координатах u, v буде $ds^2 = du^2 + dv^2$. Таким чином, доведено, що циліндр локально ізометричний площині.

Зауважимо, що в цілому циліндр не ізометричний площині. Він ізометричний смужці на площині, в якій отождествлено граничні точки спеціальним чином (рис. 2.13).

2. Нехай $r = r(s)$ — рівняння просторової кривої γ , кривина та скрут якої відрізняються від нуля; s — природний параметр кривої. Розглянемо поверхню F , що утворена півдотичними до цієї кривої. Радіус-вектор поверхні $R(s, t) = r(s) + t\tau(s)$. Коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні знайдемо, обчисливши

$$\begin{aligned} R_t &= \tau(s); R_s = \tau(s) + tk_1v(s); g_{11} = \langle R_t, R_t \rangle = 1; \\ g_{12} &= \langle R_t, R_s \rangle = 1; g_{22} = \langle R_s, R_s \rangle = 1 + t^2k_1^2. \end{aligned}$$

Поверхня F локально ізометрична площині. Справді, на площині є крива γ_1 , натуральне рівняння якої $k_1 = k_1(s)$, де $k_1(s)$ — кривина просторової кривої γ . Введемо криволінійні координати t, s на площині так само, як уведено криволінійні координати на поверхні F , тобто проведемо півдотичні до кривої γ_1 ; вздовж них змінюється параметр t , а s — природний параметр кривої γ_1 . Перша квадратична форма площини в криволінійних координатах t, s буде мати вигляд $I = dt^2 + 2dtds + (1 + t^2k_1^2)ds^2$. Таким чином, доведена локальна ізометричність площини та поверхні F .

Регулярна поверхня, локально ізометрична площині, називається *розгортною поверхнею*.

У клас розгортних поверхонь входять також конуси та циліндри.

Вправа. Довести, що гелікоїд та катеноїд — ізометричні поверхні.

Природно виникає питання: чи ізометричні одинична сфера та площина? Ізометричність цих поверхонь можна було б використати при складанні карт. Але відповідь на це питання негативна. Справді, припустимо, що сфера локально ізометрична площині. Розглянемо на площині круг малого радіуса r_0 з центром в точці O . При ізометричному відображенні точка O перейде в точку O_1 сфери.

Радіуси круга на площині є найкоротшими площини. При ізометричному відображенні радіуси круга на площині перейдуть у найкоротші сфери тієї ж довжини, які є дугами великих кіл. Отже, круг радіуса r_0 з центром в точці O на площині перейде при ізометричному відображенні в круг радіуса r_0 з центром у точці O_1 на сфері, причому граничне коло плоского круга перейде в граничне коло круга на сфері. За припущеннями довжини цих кіл співпадають. Але довжина кола радіуса r_0 на площині дорівнює $2\pi r_0$, а довжина кола радіуса r_0 на сфері дорівнює $2\pi r_0 \sin \theta$.

Одержана суперечність доводить, що сфера не ізометрична площині.

Локально для більшості поверхонь існує ізометрична і не рівна початковій поверхня, яка одержується з початкової неперервним згинанням. Таким чином одержуємо цілу сім'ю ізометричних поверхонь.

Приклад. Шапочка, що відрізана від сфери, допускає неперервну ізометричну деформацію.

З точки зору згинання глобально поверхні ведуть себе по-іншому. Наприклад, розглянемо таке твердження.

Твердження. Сфера і будь-яка ізометрична їй регулярна класу C^2 поверхня співпадають з точністю до руху.

Таким чином, сфера однозначно визначена своєю першою квадратичною формою. Твердження залишиться правильним, якщо вимогу регулярності класу C^2 замінити на вимогу опуклості поверхні. Вимога регулярності або опуклості суттєва.

Приклад. Розглянемо сферу та поверхню, яка одержується із сфери таким чином: відрізаємо від сфери шапочку та приклеюємо шапочку до сфери так, щоб опуклістю шапочка була напрямлена в другий бік (рис. 2.14). Очевидно, що ці дві поверхні ізометричні.

О. В. Погорелов довів теорему про однозначну визначеність загальних опуклих поверхонь.

Нехай дві замкнені опуклі поверхні ізометричні одна одній. Тоді вони співпадають з точністю до руху.

Природно виникає питання: чи допускають замкнені неопуклі поверхні неперервне згинання? Відомо, що існують неопуклі багатогранники, гомеоморфні сфері, які допускають неперервні згинання. Для регулярних поверхонь питання поки що лишається без відповіді.

Результати, що одержані при вивченні згинань поверхонь, знаходять застосування в теорії оболонки.



Рис. 2.14

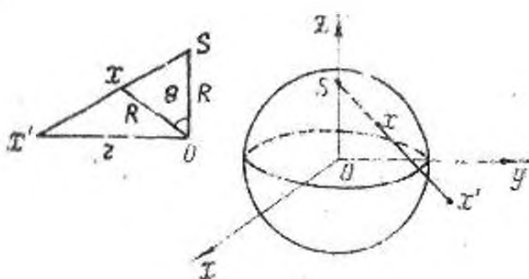


Рис. 2.15

Задача теорії оболонок полягає в тому, щоб одержати деформації та напруження, які виникають в оболонці під дією зовнішніх сил. У оболонок є дві граничні поверхні: верхній та нижній шари. Деформація оболонки описується серединною поверхнею. Якщо оболонка зроблена з нерозтяжного матеріалу, то при великих деформаціях серединна поверхня перейде в ізометричну поверхню. Таким чином, оболонки можна розглядати як ізометричні відображення серединної поверхні.

Оболонка жорстко закріплюється вздовж краю. При такому закріпленні в класі регулярних опуклих поверхонь серединна поверхня визначена однозначно. І якщо відомо, що деформація існує, то потрібно розглядати нерегулярні згинання.

Такий підхід до вивчення теорії оболонок був запропонований О. В. Погореловим.

2.4.1. Конформні відображення

Необхідною та достатньою умовою локальної ізометричності двох поверхонь є існування таких криволінійних координат на кожній поверхні, в яких їх перші квадратичні форми співпадають.

Вище доведено, що сфера та площина не ізометричні. Отже, неможливо зробити карту Землі, зберігаючи довжини кривих. Але є практична необхідність в досить точних картах. Можна при складанні карт користуватися конформним відображенням — більш загальним, ніж ізометричне.

Визначення. Регулярні поверхні F_1 та F_2 конформні, коли існує взаємно однозначне відображення поверхні F_1 на поверхню F_2 , при якому зберігаються кути між відповідними при відображенні кривими.

Приклади. 1. Перетворення подібності на площині — конформне відображення площини на себе.

2. Інверсія відносно кола на площині — конформне відображення площини на себе. Нагадаємо, що інверсією відносно кола з центром в точці O радіуса R називається відображення, яке переводить точку X у точку X' , що лежить на промені OX і таку, що $|OX| \cdot |OX'| = R^2$. Якщо r, r' — радіус-вектори точок X, X' відповідно, то інверсію можна задати рівнянням $r' = \frac{R^2 r}{|r|^2}$.

3. Розглянемо функцію комплексної змінної $\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z = x + iy$. Функція $\omega = f(z)$, яка задовольняє рівнянням Коші — Рімана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

називається голоморфною, або аналітичною. Голоморфна функція задає конформне відображення області зміни змінних x, y на область зміни змінних u, v за допомогою системи рівнянь

$$\begin{cases} u = u(x, y); \\ v = v(x, y). \end{cases}$$

Розглянуті приклади показують, що існує багато конформних відображень площини на себе. Із збільшенням вимірності кількість конформних відображень простору на себе зменшується. А саме, всі конформні відображення $f: E^n \rightarrow E^n, n \geq 3$ — це композиція інверсії та перетворення подібності. З цієї точки зору вимірність $n = 2$ особлива.

Повернемося до двовимірних поверхонь. Знайдемо критерій конформності поверхонь.

Теорема 14. Для того щоб деякий окіл точки P_1 регулярної поверхні F_1 можна було конформно відобразити на деякий окіл точки P_2 регулярної поверхні F_2 , необхідно і достатньо, щоб існували регулярні параметризації околів цих точок такі, що відповідні цим параметризаціям перші квадратичні форми мали б пропорційні коефіцієнти.

Довести цю теорему самостійно.

Раніше доведено, що існує широкий клас поверхонь, які локально ізоморфні площині. У випадку конформного відображення має місце таке твердження.

Твердження. Будь-яка регулярна класу C^2 поверхня локально конформна площині [13].

Відомо, що $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$ — перша квадратична форма площини. Із останнього твердження випливає, що на будь-якій регулярній класу C^2 поверхні можна локально ввести такі криволінійні координати, в яких перша квадратична форма буде мати вигляд $ds^2 = \Lambda(u^1, u^2)((du^1)^2 + (du^2)^2)$. Такі координати називаються ізотермічними.

Із твердження випливає, що будь-які дві регулярні класу C^2 поверхні локально конформні.

2.4.2. Стереографічна проекція

Розглянемо таке конформне відображення сфери на площину. Нехай центр сфери радіуса R розташований в точці $O(0, 0, 0)$. Здійснимо центральне проектування сфери без точки на площину xy із полюса $S(0, 0, R)$ (рис. 2.15). Це відображення називається стереографічною проекцією.

Розглянемо параметричне рівняння сфери:

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta; \\ y = R \sin \varphi \sin \theta; \\ z = R \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

У криволінійних координатах (θ, φ) перша квадратична форма сфери має такий вигляд:

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.5)$$

На площині xy введемо полярні координати r, φ , які зв'язані з декартовими координатами рівняннями $\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi. \end{cases}$ Перша квадратична форма площини в полярних координатах запишеться як

$$dS^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Стереографічна проекція ставить у відповідність точці X з координатами (θ, φ) на сфері точку X' з координатами (r, φ) на площині (див. рис. 2.15). Знайдемо зв'язок між координатами (θ, φ) та (r, φ) . Для цього розглянемо трикутник SOX' . Кут OSX' дорівнює $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$; оскільки трикутник OSX' рівнобедрений, кут при вершині дорівнює θ . Отже, $\frac{r}{R} = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$. Ця рівність невизначена при $\theta = 0$, що

відповідає точці S . Таким чином, координати (r, φ) зв'язані з координатами (θ, φ) рівностями

$$\begin{cases} r = R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}; \\ \varphi = \varphi. \end{cases}$$

Матриця Якобі цього відображення

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

обернена матриця —

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{R} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому $d\theta^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} dr + \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} d\varphi \right)^2 = \left(\frac{\partial \theta}{\partial r} \right)^2 dr^2 = \frac{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{R^2} dr^2$. Але $\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \frac{r}{R}$; $\sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{1 + \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}}$. Звідси

$$d\theta^2 = \frac{4}{R^2 \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right)^2} dr^2 = \frac{4R^2}{(R^2 + r^2)^2} dr^2;$$

$$\sin^2 \theta = 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{4r^2 R^2}{(R^2 + r^2)^2}.$$

Підставимо останній вираз у формулу (2.5) і одержимо першу квадратичну форму сфери в конформних координатах:

$$\begin{aligned} dS^2 &= R^2 \left(\frac{4R^2}{(R^2 + r^2)^2} dr^2 + \frac{4r^2 R^2}{(R^2 + r^2)^2} d\varphi^2 \right) = \\ &= \frac{4R^4}{(R^2 + r^2)^2} (dr^2 + r^2 d\varphi^2). \end{aligned}$$

У декартових координатах (x, y) перша квадратична форма сфери має вигляд

$$dS^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + x^2 + y^2)^2} (dx^2 + dy^2).$$

Запишемо цю квадратичну форму в комплексних позначеннях:

$$dS^2 = \frac{4R^4}{(R^2 + z\bar{z})^2} dzd\bar{z},$$

де $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$; $dz = dx + idy$; $d\bar{z} = dx - idy$.

2.4.3. Відображення Меркатора

Розглянемо конформне відображення сфери на площину, при якому паралелі та меридіани сфери переходять в ортогональну мережу прямих на площині. Відобразимо спочатку конформно сферу на циліндр. Нехай сфера вписана в прямий круговий циліндр. Проведемо промінь із центру сфери. Він перетне сферу в точці X , а циліндр — в точці X' . Відображення, що переводить довільну точку X сфери в точку X' циліндра, не буде конформним. Але можна так перемістити точку X' вздовж твірної циліндра в точку X'' , що відображення, яке ставить у відповідність кожній точці сфери X точку циліндра X'' , буде конформним (рис. 2.16). Це відображення називається проекцією Меркатора. Воно переводить паралелі та меридіани сфери в кола та прямолінійні твірні циліндра. Якщо розрізати циліндр по твірній і розгорнути на площину, то паралелі і меридіани сфери перейдуть в ортогональну мережу прямих на площині.

Знайдемо аналітичні вирази для відображення Меркатора.

Розглянемо параметричні рівняння сфери та циліндра

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi \sin \theta; \\ y = R \sin \varphi \sin \theta; \\ z = R \cos \theta \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} x = R \cos v; \\ y = R \sin v; \\ z = u \end{cases}$$

Тоді відображення Меркатора

$$\begin{cases} v = \varphi; \\ u = f(\theta). \end{cases}$$

У криволінійних координатах (φ, θ) перша квадратична форма циліндра запишеться так:

$$dS^2 = f'^2(\theta) d\theta^2 + R^2 d\varphi^2,$$

а перша квадратична форма сфери —

$$dS^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Із вимог конформності відображень та теореми 14 маємо:

$$\begin{cases} R^2 = \lambda R^2 \sin^2 \theta; \\ f'^2(\theta) = \lambda R^2. \end{cases}$$

Звідси $f'(\theta) = \frac{R}{\sin \theta}$, і, проінтегрувавши це рівняння, одержимо

$$f = \frac{R}{2} \ln \left| \frac{\cos \theta - 1}{\cos \theta + 1} \right|.$$

Відображення Меркатора застосовується в мореплаванні. На проекції Меркатора курс корабля, який зберігає сталий кут з меридіанами,— це пряма, так звана локсодрома.

2.4.4. Відображення Ламберта

Нехай сфера вписана в круговий конус. При цьому розглядають одну половину конуса. Із центра сфери будемо проводити промені, які перетинають конус в області, розташованій між вершиною конуса та лінією дотику його до сфери; кожний промінь перетинає сферу і конус в єдиній точці, точці X та X' відповідно (рис. 2.17). Відображення $X \rightarrow X'$ не буде конформним, але якщо кожну точку X' спеціальним чином перемістити вздовж твірної конуса в точку X'' , то відображення $X \rightarrow X''$ буде конформним. Це відображення Ламберта. При відображенні Ламберта меридіани та паралелі сфери переходять у твірні

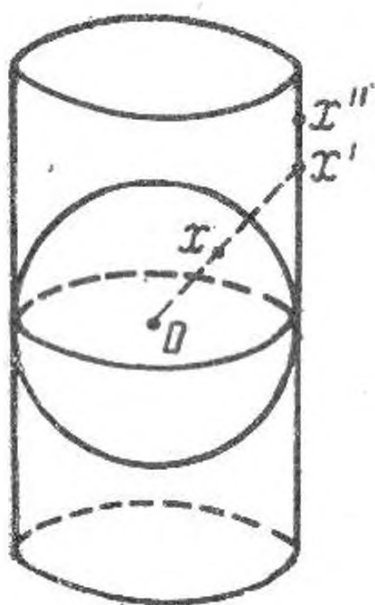


Рис. 2.16

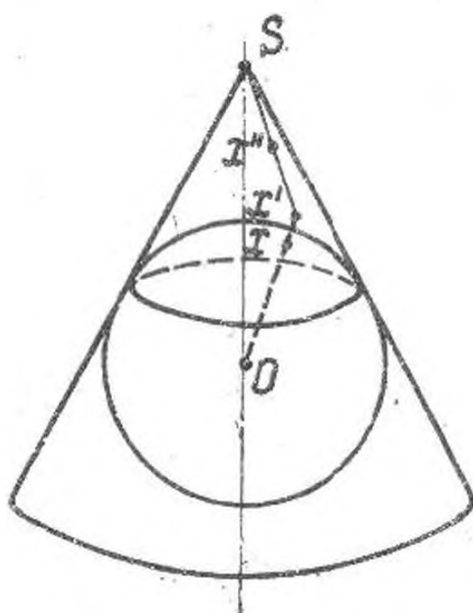


Рис. 2.17

та кола конуса. Якщо розрізати конус по твірній та розгорнути на площину, то меридіани та паралелі сфери перейдуть відповідно в промені, що виходять з однієї точки, та ортогональні їм кола.

Задача. Знайти аналітичний вираз для відображення Ламберта.

2.5. Друга квадратична форма поверхні

Згадаємо, що кривина плоскої кривої визначається ступенем її відхилення від прямої. Дійсно, нехай на площині задана крива γ , кривина якої в точці P дорівнює k .

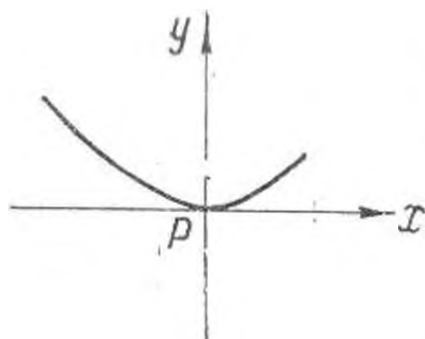


Рис. 2.18

Виберемо систему координат спеціальним чином: за вісь x беремо дотичну до кривої в точці P , початок координат розташуємо в точці P , вісь y перпендикулярна до осі x і напрямлена в сторону опуклості (рис. 2.18). У цій системі координат в околі точки P крива γ

задається явно рівнянням $y=f(x)$, причому $f(0) = f'(0) = 0$. Звідси

$$y = \frac{1}{2} kx^2 + o(x^2),$$

але y — відхилення кривої від дотичної, проведеної в точці P , і визначається доданком $\frac{1}{2} kx^2$. Таким чином, кривина плоскої кривої — це кількісна міра відхилення кривої від дотичної.

Розглянемо тепер поверхню. Очевидно, що відхилення дотичної площини не можна задати одним числом, оскільки відхилення залежить не тільки від точки, але і від напрямку на поверхні.

Нехай регулярна класу C^2 поверхня задана рівнянням $r = r(u^1, u^2)$, точка $P_0(u_0^1, u_0^2)$ належить поверхні. Розкладемо вектор-функцію $r(u^1, u^2)$ за формулою Тейлора в околі точки P_0 . Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що $u_0^1 = u_0^2 = 0$. Тоді

$$\begin{aligned} r(u^1, u^2) = & r(0, 0) + r_{u^1}(0, 0) du^1 + r_{u^2}(0, 0) du^2 + \\ & + \frac{1}{2} r_{u^1 u^1}(0, 0) (du^1)^2 + r_{u^1 u^2}(0, 0) du^1 du^2 + \\ & + \frac{1}{2} r_{u^2 u^2}(0, 0) (du^2)^2 + o((du^1)^2 + (du^2)^2). \end{aligned}$$

Відхилення точки $P(u^1, u^2)$ поверхні від дотичної площини в точці $P_0(0, 0)$ обчислюється за формулою $h = \langle r(u^1, u^2) - r(0, 0), n \rangle$, де n — одинична нормаль поверхні в точці P_0 . Зауважимо, що оскільки параметризація поверхні задана, то напрямок нормалі обрано однозначно. Якщо точка P розташована в півпросторі, в який напрямлена нормаль, то відхилення h додатне; якщо P знаходиться в півпросторі, що не містить в собі нормаль, то відхилення h від'ємне. У формулу для обчислення h підставимо розклад $r(u^1, u^2)$ за формулою Тейлора і, враховуючи, що $\langle r_{u^1}, n \rangle = \langle r_{u^2}, n \rangle = 0$, одержимо:

$$h = \frac{1}{2} \langle r_{11}, n \rangle (du^1)^2 + \langle r_{12}, n \rangle du^1 du^2 + \frac{1}{2} \langle r_{22}, n \rangle (du^2)^2 + o((du^1)^2 + (du^2)^2),$$

де

$$r_{ij} = \left. \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j} \right|_0, \quad i, j = 1, 2.$$

Таким чином, з похибкою до нескінченно малих більш високого порядку відхилення точки поверхні від дотичної площини визначає доданок

$$\langle r_{11}, n \rangle (du^1)^2 + 2 \langle r_{12}, n \rangle du^1 du^2 + \langle r_{22}, n \rangle (du^2)^2.$$

Зауважимо, що вектор (du^1, du^2) задає напрямок в дотичній площині поверхні. Справді, $dr = r_{u^1} du^1 + r_{u^2} du^2$.

Визначення. Другою квадратичною формою поверхні називається форма

$$II = \langle r_{11}, n \rangle (du^1)^2 + 2 \langle r_{12}, n \rangle du^1 du^2 + \langle r_{22}, n \rangle (du^2)^2.$$

Позначимо через b_{ij} скалярний добуток $\langle r_{ij}, n \rangle$, $i, j = 1, 2$. Знайдемо вираз b_{ij} через радіус-вектор поверхні.

Для цього згадаємо, що $n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$ і $|r_1 \times r_2| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$, де $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}$, $i = 1, 2$. Отже,

$$b_{ij} = \frac{\langle r_{ij}, r_1 \times r_2 \rangle}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}} = \frac{(r_1, r_2, r_{ij})}{\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}.$$

Коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні часто позначають через $L = b_{11}$; $M = b_{12} = b_{21}$; $N = b_{22}$.

Нехай відома перша квадратична форма поверхні

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j, \quad G = (g_{ij}), \quad i, j = 1, 2.$$

Введемо на поверхні нові регулярні криволінійні координати

$$v^1, v^2: \begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2) \\ u^2 = u^2(v^1, v^2) \end{cases}, \text{ причому } \det C = \det \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j} \right) \neq 0.$$

З'ясуємо, який вигляд буде мати форма поверхні в нових координатах:

$$ds^2 = g_{ij}(u(v)) \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta} dv^\alpha dv^\beta.$$

Позначимо через $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні в координатах v^1, v^2 . Одержимо, що

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = g_{ij} \frac{\partial u^i}{\partial v^\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^\beta},$$

або в матричному вигляді

$$\tilde{G} = tCGC. \quad (2.6)$$

Задача. З'ясуємо, як зв'язані між собою коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні при переході до нової системи координат.

Зауважимо, що коли перша квадратична форма визначає внутрішню геометрію поверхні, то друга квадратична форма визначає форму поверхні.

Приклади. 1. Друга квадратична форма площини тожжно дорівнює нулю.

2. Перша квадратична форма циліндра в деякій системі координат співпадає з першою квадратичною формою площини. Знайдемо другу квадратичну форму циліндра, заданого радіус-вектором $r = (R \cos u^1, R \sin u^1, u^2)$. Оскільки $r_1 = (-R \sin u^1, R \cos u^1, 0)$; $r_2 = (0, 0, 1)$; $r_{11} = (-R \cos u^1, -R \sin u^1, 0)$; $r_{12} = (0, 0, 0)$; $r_{22} = (0, 0, 0)$, то $b_{12} = b_{22} = 0$; $g_{11} = R^2$; $g_{12} = 0$; $g_{22} = 1$; $b_{11} = R$. Отже, друга квадратична форма циліндра $\Pi = R(du^1)^2$ відрізняється від другої квадратичної форми площини.

3. Нехай поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$. Тоді $g_{ij} = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$; $g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = 1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2$, де δ_{ij} — символ Кронекера. Обчислимо коефіцієнти другої квадратичної форми. Задамо для цього поверхню параметрично та обчислимо похідні радіус-вектора:

$$\begin{cases} x^1 = u^1; \\ x^2 = u^2; \\ x^3 = f(u^1, u^2); \end{cases} \quad \begin{cases} x_{u^1}^1 = 1; \\ x_{u^1}^2 = 0; \\ x_{u^1}^3 = f_{u^1}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_{u^2}^1 = 0; \\ x_{u^2}^2 = 1; \\ x_{u^2}^3 = f_{u^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{u^1 u^1}^1 = 0; \\ x_{u^1 u^1}^2 = 0; \\ x_{u^1 u^1}^3 = f_{u^1 u^1}; \end{cases} \begin{cases} x_{u^1 u^2}^1 = 0; \\ x_{u^1 u^2}^2 = 0; \\ x_{u^1 u^2}^3 = f_{u^1 u^2}; \end{cases} \begin{cases} x_{u^2 u^2}^1 = 0; \\ x_{u^2 u^2}^2 = 0; \\ x_{u^2 u^2}^3 = f_{u^2 u^2}. \end{cases}$$

Отже, коефіцієнти другої квадратичної форми явно заданої поверхні

$$b_{ij} = \frac{f_{x^i x^j}}{\sqrt{1 + (\text{grad } f)^2}}.$$

4. Нехай задана довільна регулярна поверхня. Знайдемо коефіцієнти другої квадратичної форми поверхні в точці P в системі координат, вибраній спеціальним чином: точку P беремо за початок координат, дотичну площину в точці P — за площину xy ; вісь z напрямимо по нормалі до поверхні в точці P . У цій системі координат в околі точки P поверхню можна задати явно рівнянням $z = f(x, y)$, точка P має координати $(0, 0, 0)$. Крім того, $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. Вище показано, що в точці P в обраній системі координат $g_{ij} = \delta_{ij}$. Очевидно, що $b_{ij} = f_{x^i x^j}(0, 0)$.

2.5.1. Теорема Менье

Нехай $r = r(u^1, u^2)$ — регулярна класу C^2 параметризація поверхні F . Розглянемо на цій поверхні регулярну криву γ , що задана системою рівнянь $\begin{cases} u^1 = u^1(s); \\ u^2 = u^2(s); \end{cases}$ де s — природний параметр кривої. Нехай точка P з координатами (u^1, u^2) належить кривій γ . В просторі радіус-вектор кривої задається так: $r = r(u^1(s), u^2(s))$. Знайдемо вектор кривини цієї кривої, тобто вектор r'' в точці P . Відомо, що $r'' = k(s)v(s)$, де $k(s)$ — кривина кривої γ . З іншого боку,

$$\begin{aligned} r' &= r_1 \frac{du^1}{ds} + r_2 \frac{du^2}{ds}; \quad r'' = r_{11} \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + 2r_{12} \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + \\ &+ r_{22} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 + r_1 \frac{d^2 u^1}{ds^2} + r_2 \frac{d^2 u^2}{ds^2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \langle r'', n \rangle &= \frac{\langle r_{11}, n \rangle (du^1)^2 + 2 \langle r_{12}, n \rangle du^1 du^2 + \langle r_{22}, n \rangle (du^2)^2}{ds^2} = \\ &= k(s) \langle v(s), n \rangle = k(s) \cos \theta, \end{aligned}$$

де n — одиничний вектор нормалі до поверхні в точці P ; θ — кут між вектором n нормалі до поверхні та вектором v головної нормалі кривої γ в точці P .

Нехай γ_1 — інша регулярна крива на поверхні F , яка проходить через точку P і має в цій точці той же напрямок (du^1, du^2) , тобто має ту ж саму дотичну, що і крива γ . Вектор кривини в точці P кривої γ_1 відрізняється від вектора кривини кривої γ , але проекція кривини на нормаль до поверхні буде та ж. Таким чином, для всіх кривих, що лежать на поверхні, проходять через точку P та мають у точці P один і той же напрямок, величина $k \cos \theta$ стала. Останнє твердження і складає зміст теореми Меньє.

Величина $k \cos \theta$ позначається через k_n і називається нормальною кривиною поверхні в даному напрямку. Вище доведено, що

$$k_n = k \cos \theta = \frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j}.$$

З'ясуємо геометричний зміст нормальної кривини. Кривина k_n в точці P не залежить від кривої, що проходить через точку, а залежить від напрямку кривої в точці P . Нормальним перерізом поверхні називається крива, яка одержується в перерізі поверхні площиною, що проходить через нормаль до поверхні.

Через точку P поверхні в даному напрямку τ проведемо нормальний переріз. Це плоска крива, головна нормаль якої в точці P колінеарна нормалі поверхні. Отже, $\theta = 0$ або $\theta = \pi$, і для нормального перерізу $k_n = k \cos \theta = \pm k$. Отже, з точністю до знака нормальна кривина поверхні в напрямку (du^1, du^2) дорівнює кривині нормального перерізу, що має дотичний напрямок $\tau = (du^1, du^2)$. Кожний напрямок у дотичній площині визначає єдиний нормальний переріз.

Приклади. 1. На площині $k_n = 0$ в будь-якому напрямку.

2. Розглянемо сферу радіуса R , $k_n = \frac{1}{R}$ в будь-якому напрямку, оскільки будь-який нормальний переріз є коло радіуса R .

3. Розглянемо прямий круговий циліндр радіуса R . Його можна задати параметрично:

$$\begin{cases} x = R \cos u^1; \\ y = R \sin u^1; \\ z = u^2. \end{cases}$$

У напрямку (du^1, du^2) нормальна кривина поверхні $k_n = \frac{\Pi}{I}$. Для циліндра $\Pi = R (du^1)^2$; $I = R^2 (du^1)^2 + (du^2)^2$.

Отже,

$$k_n = \frac{R (du^1)^2}{R^2 (du^1)^2 + (du^2)^2}.$$

Звідси випливає, що вздовж твірних циліндра $u^1 = \text{const}$ нормальна кривина $k_n = 0$, в напрямку $u^2 = \text{const}$ маємо $k_n = \frac{1}{R}$. Нормальна кривина циліндра в довільному напрямку задовольняє нерівності $0 \leq k_n \leq \frac{1}{R}$.

4. Знайдемо другу квадратичну форму сфери радіуса R . Відомо, що перша квадратична форма сфери $ds^2 = R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$, нормальна кривина в будь-якому напрямку $k_n = \frac{1}{R}$. Але $k_n = \frac{\Pi}{I}$. Тому

$$\frac{1}{R} = \frac{\Pi}{R^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}; \text{ звідси } \Pi = R (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

2.5.2. Головні кривини і головні напрямки

Згадаємо, що власними значеннями λ матриці A називаються розв'язки рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$. Розв'язки дійсні, якщо матриця A симетрична. Власними векторами матриці A називаються ненульові розв'язки рівняння $Ax = \lambda x$. Власні вектори симетричної матриці, що відповідають різним власним значенням, ортогональні.

Визначення. Головними кривинами поверхні в точці називаються розв'язки рівняння $\det(B - \lambda G) = 0$, де $B = (b_{ji})$; $G = (g_{ji})$ — відповідно матриці першої та другої квадратичних форм. Позначимо головні кривини через k_1 та k_2 .

Визначення. Дотичний вектор $a \neq 0$ називається головним напрямком на поверхні в точці, якщо він задовольняє умові $Ba = \lambda Ga$, де $\lambda = k_1, k_2$.

У координатному вигляді це рівняння запишеться таким чином:

$$\begin{cases} (b_{11} - \lambda g_{11}) a^1 + (b_{12} - \lambda g_{12}) a^2 = 0; \\ (b_{12} - \lambda g_{12}) a^1 + (b_{22} - \lambda g_{22}) a^2 = 0, \end{cases}$$

де (a^1, a^2) — координати вектора a в базисі (r_{u^1}, r_{u^2}) дотичної площини поверхні $r = r(u^1, u^2)$.

Природно виникають запитання:

1. Чи коректні наведені вище визначення, тобто чи залежать головні напрямки та головні кривини від параметризації поверхні?

2. Який геометричний зміст мають головні кривини та головні напрямки?

Відповімо на ці запитання.

1. Нехай $r = r(u^1, u^2)$; $r = r(v^1, v^2)$ — дві різні регулярні параметризації поверхні. Вектори $e = (r_{u^1}, r_{u^2})$ та $\tilde{e} = (r_{v^1}, r_{v^2})$ задають базис дотичної площини поверхні. Координати u^1, u^2 та v^1, v^2 зв'язані системою рівнянь

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2); \\ u^2 = u^2(v^1, v^2). \end{cases}$$

Матриця Якобі цього відображення

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \frac{\partial u^1}{\partial v^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2}{\partial v^2} \end{pmatrix}, \det C \neq 0.$$

Тоді tC — матриця переходу від базиса e до базиса \tilde{e} : ${}^tC e$. Справді,

$$\begin{cases} r_{v^1} = r_{u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} + r_{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^1}; \\ r_{v^2} = r_{u^1} \frac{\partial u^1}{\partial v^2} + r_{u^2} \frac{\partial u^2}{\partial v^2}. \end{cases}$$

Матриці першої та другої квадратичних форм поверхні в старій і новій системах координат зв'язані рівностями (2.6): $\tilde{G} = {}^tC G C$, $\tilde{B} = {}^tC B C$. Тому $\det(\tilde{B} - \lambda \tilde{G}) = \det({}^tC B C - \lambda {}^tC G C) = \det {}^tC \det(B - \lambda G) \det C$. Оскільки $\det C \neq 0$, то $\det(B - \lambda G) = 0 \Leftrightarrow \det(\tilde{B} - \lambda \tilde{G}) = 0$, і коректність визначення головних кривин доведена.

Нехай $a = (a^1, a^2)$ — головні напрямки в системі координат (u^1, u^2) . Знайдемо головний напрямок у системі координат (v^1, v^2) ; це є вектор $\tilde{a} = \tilde{a}^1 r_{v^1} + \tilde{a}^2 r_{v^2}$, що задовольняє рівнянню $(\tilde{B} - \lambda \tilde{G}) \tilde{a} = 0$. Підставимо в останнє рівняння замість \tilde{a} вектор $C^{-1} a$; згадаємо, що $\tilde{G} = {}^tC G C$; $\tilde{B} = {}^tC B C$, і одержимо:

$$({}^tC B C - \lambda {}^tC G C) (C^{-1} a) = {}^tC (B - \lambda G) a = 0,$$

оскільки a — головний напрямок у системі координат (u^1, u^2) . Отже, $\tilde{a} = C^{-1} a$ — головний напрямок у системі координат (v^1, v^2) . Але $C^{-1} a$ — це координати вектора a в новій системі координат (v^1, v^2) . Таким чином, коректність визначення головних напрямків доведена.

2. Розглянемо головні кривини та головні напрямки в точці P поверхні F . Систему координат можна вибрати спеціальним чином, оскільки головні кривини та головні напрямки не залежать від системи координат. Розташуємо початок координат у точці P , дотичну площину до поверхні F — в точці P ; беремо за площину x^1x^2 ; вісь x^3 напрямимо по нормалі до поверхні в точці P . У цій системі координат в околі точки P поверхня F може бути задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$, причому $f(0, 0) = f_{x^1}(0, 0) = f_{x^2}(0, 0) = 0$. Коефіцієнти першої квадратичної форми цієї поверхні в точці P будуть $g_{ij} = \delta_{ij}$, тобто матриця коефіцієнтів $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Коефіцієнти другої квадратичної форми в точці P такі:

$$b_{ij} = \frac{f_{x^i x^j}}{\sqrt{1 + (\text{grad } f)^2}} = f_{x^i x^j}.$$

Головні кривини в точці P знайдемо, розв'язавши рівняння $\det(B - \lambda E) = 0$, де B — симетрична матриця другого порядку. Звідси випливає, що головні кривини — дійсні числа. Головні напрямки — це власні вектори матриці B . Згадаємо, що власні вектори, що належать різним власним значенням симетричної матриці, ортогональні. Якщо ж власні значення k_1, k_2 , співпадають, то будь-який напрямок в дотичній площині є головним. Отже, не втрачаючи загальності, можна вважати, що головні напрямки ортогональні.

Проведемо подальшу спеціалізацію системи координат, а саме: нехай вектори $(1, 0)$ та $(0, 1)$ — головні напрямки поверхні в точці P . Головні напрямки задовольняють рівнянню $Ba = \lambda a$, тому

$$\begin{pmatrix} f_{x^1 x^1} & f_{x^1 x^2} \\ f_{x^1 x^2} & f_{x^2 x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідси $f_{x^1 x^2} = 0$. Отже, в даній системі координат матриця коефіцієнтів другої квадратичної форми в точці P має вигляд $\begin{pmatrix} f_{x^1 x^1} & 0 \\ 0 & f_{x^2 x^2} \end{pmatrix}$. Головні кривини k_1, k_2 в точці P визначаються з рівняння

$$\det \begin{pmatrix} f_{x^1 x^1} - \lambda & 0 \\ 0 & f_{x^2 x^2} - \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

тобто $k_1 = f_{x^1 x^1}$, $k_2 = f_{x^2 x^2}$.

З'ясуємо геометричний зміст $f_{x^1x^1}$ та $f_{x^2x^2}$. Для цього згадаємо, що $k_n = \frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j}$. У даній системі координат у точці P цей вираз набере такого вигляду:

$$k_n = \frac{f_{x^1x^1} (dx^1)^2 + f_{x^2x^2} (dx^2)^2}{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}.$$

Знайдемо нормальну кривину поверхні вздовж лінії $x^2 = \text{const}$ у точці P . Оскільки $dx^2 = 0$, то $k_n = f_{x^1x^1} = k_1$.

Подібним чином можна довести, що нормальна кривина поверхні вздовж лінії $x^1 = \text{const}$ дорівнює k_2 . Отже, головні кривини — це нормальні кривини поверхні в головних напрямках.

Якщо φ — кут, який вектор (dx^1, dx^2) утворює з віссю x^1 , то

$$\cos \varphi = \frac{dx^1}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{dx^2}{\sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}}.$$

Підставивши останні рівності і рівності $f_{x^1x^1} = k_1$; $f_{x^2x^2} = k_2$ в формулу для обчислення нормальних кривин, одержимо формулу Ейлера:

$$k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi.$$

Розглянемо нормальну кривину поверхні як функцію кута φ : $k_n = k_n(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Знайдемо її найменше та найбільше значення. Для цього обчислимо похідну цієї функції: $k'_n = (k_2 - k_1) \sin 2\varphi = 0$. Якщо $k_2 = k_1$, то $k_n = \text{const}$. Якщо $k_1 \neq k_2$, то $k'_n = 0$ при $\varphi = 0$ або $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (кут $\varphi = \pi$ задає той же напрямок, що і $\varphi = 0$). При одному з цих значень φ функція $k_n(\varphi)$ має найбільше значення, а при другому — найменше. Але кутам $\varphi = 0$ та $\varphi = \frac{\pi}{2}$ відповідають головні напрямки. Отже, нормальна кривина поверхні досягає найменшого та найбільшого значень в головних напрямках; головні кривини в точці поверхні — це екстремальні значення нормальних кривин у цій точці.

Визначення головних кривин та головних напрямків поверхні дослівно переносяться на випадок гіперповерхні в багатовимірному просторі.

2.5.3. Гауссова і середня кривини поверхні

Визначення. Гауссовою кривиною поверхні називається добуток головних кривин поверхні: $K = k_1 k_2$.

Визначення. Середньою кривиною поверхні називається півсума головних кривин поверхні; $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Зауваження. Якщо замінити напрямком нормалі в кожній точці поверхні на протилежний, то головні кривини k_1, k_2 також змінять свої знаки на протилежні. Тому середня кривина H змінить знак, а гауссова кривина K не зміниться.

Приклади. 1. На площині $k_1 = k_2 = 0$ в кожній точці, тому $K = H = 0$.

2. Знайдемо гауссову та середню кривини сфери радіуса R . Нормальна кривина в кожній точці в будь-якому напрямку дорівнює $\frac{1}{R}$, тому $k_1 = k_2 = \frac{1}{R}$. Звідси $K = \frac{1}{R^2}$, $H = \frac{1}{R}$.

3. Розглянемо прямий круговий циліндр, що заданий параметрично:

$$\begin{cases} x = R \cos u^1; \\ y = R \sin u^1; \\ z = u^2. \end{cases}$$

Нормальна кривина $k_n = \frac{(du^1)^2}{R((du^1)^2 + (du^2)^2)}$, звідси $\frac{1}{R} \geq k_n \geq 0$.
Отже, $k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{R}$. Таким чином, гауссова кривина $K = 0$, середня кривина $H = \frac{1}{2R}$.

Запишемо рівняння для визначення головних кривин поверхні у вигляді $\det(G^{-1}B - \lambda E) = 0$. Позначимо $G^{-1}B$ через $A = (a_{ij})$. Тоді головні кривини k_1, k_2 поверхні визначаються із рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ або

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

За теоремою Вієта $k_1 k_2 = \det A$; $k_1 + k_2 = \text{Tr } A$, де $\text{Tr } A$ — слід матриці A . Тоді

$$K = \det G^{-1}B = \frac{\det B}{\det G}; \quad H = \frac{1}{2} \text{Tr } G^{-1}B.$$

Тому формули для обчислення гауссової та середньої кривин поверхні в точці можна записати у вигляді

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \quad (2.7)$$

І оскільки

$$G^{-1} B = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix};$$

$$\text{Tr } G^{-1} B = \frac{1}{\det G} (g_{22} b_{11} - 2g_{12} b_{12} + g_{11} b_{22}),$$

то

$$H = \frac{1}{2} \frac{g_{22} b_{11} - 2g_{12} b_{12} + g_{11} b_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \quad (2.8)$$

Часто можна зустріти позначення $G^{-1} = (g^{ij})$; тоді

$$H = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij}.$$

Нехай поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$.
Тоді

$$B = \frac{1}{\sqrt{1 + (\text{grad } f)^2}} \begin{pmatrix} f_{x^1 x^1} & f_{x^1 x^2} \\ f_{x^1 x^2} & f_{x^2 x^2} \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 + f_{x^1}^2 & f_{x^1} f_{x^2} \\ f_{x^1} f_{x^2} & 1 + f_{x^2}^2 \end{pmatrix};$$

$$\det G = 1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2;$$

$$\det B = \frac{f_{x^1 x^1} f_{x^2 x^2} - f_{x^1 x^2}^2}{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2}$$

$$K = \frac{f_{x^1 x^1} f_{x^2 x^2} - f_{x^1 x^2}^2}{(1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2)^2}; \quad (2.9)$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{(1 + f_{x^2}^2) f_{x^1 x^1} - 2f_{x^1 x^2} f_{x^1} f_{x^2} + (1 + f_{x^1}^2) f_{x^2 x^2}}{(\sqrt{1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2})^3}. \quad (2.10)$$

Приклади. 1. Знайдемо гауссову та середню кривини еліптичного параболоїда $x^3 = \frac{1}{2} ((x^1)^2 + (x^2)^2)$:

$$f_{x^1} = x^1, f_{x^2} = x^2; f_{x^1 x^1} = 1, f_{x^1 x^2} = 0, f_{x^2 x^2} = 1$$

$$1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2 = 1 + (x^1)^2 + (x^2)^2.$$

Тоді за формулами (2.9) та (2.10)

$$K = \frac{1}{(1 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^2};$$

$$H = \frac{2 + (x^1)^2 + (x^2)^2}{2(1 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^{3/2}}.$$

2. Знайдемо гауссову та середню кривини гіперболічного параболоїда $x^3 = \frac{1}{2}((x^1)^2 - (x^2)^2)$:

$$f_{x^1} = x^1, f_{x^2} = -x^2, f_{x^1 x^1} = 1, f_{x^1 x^2} = 0, f_{x^2 x^2} = -1;$$

$$1 + f_{x^1}^2 + f_{x^2}^2 = 1 + (x^1)^2 + (x^2)^2.$$

За формулами (2.9) та (2.10)

$$K = \frac{-1}{(1 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^2}; H = \frac{(x^1)^2 - (x^2)^2}{2(1 + (x^1)^2 + (x^2)^2)^{3/2}}.$$

2.6. Класифікація точок поверхні

Визначення. Точка поверхні називається еліптичною, якщо в ній $K > 0$. Якщо при цьому $k_1 = k_2 \neq 0$, то точка називається омбілічною.

Точка поверхні називається гіперболічною, коли в ній $K < 0$.

Точка поверхні називається параболічною, якщо в ній $K = 0$, але $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$.

Якщо $k_1 = k_2 = 0$, то точка поверхні називається точкою сплюснення.

Розглянемо форму поверхні в околі точки кожного з перелічених вище типів.

Нехай F — регулярна класу C^2 поверхня і P — точка на ній. Виберемо в просторі спеціальну систему координат, узявши точку P за початок координат, дотичну площину в точці P — за площину $x^1 x^2$ і нормаль поверхні — за вісь x^3 . Тоді в околі точки P поверхня може бути задана явно у вигляді $x^3 = f(x^1, x^2)$; $f(0, 0) = f_{x^1}(0, 0) = f_{x^2}(0, 0) = 0$.

Площина, що проходить через точку P і не є дотичною, перерізає поверхню в околі точки P по елементарній регулярній кривій. Не обмежуючи загальності, будемо вважати, що ця площина проходить через вісь x^1 і тому її рівняння має вигляд $x^2 = ax^3$. Координати точок перерізу цієї площини з поверхнею F задовольняють системі рівнянь

$$\begin{cases} x^2 = ax^3; \\ x^3 = f(x^1, x^2). \end{cases}$$

Ортогональна проекція цих точок на площину $x^2 = 0$ задається рівнянням $\Phi(x^1, x^3) = x^3 - f(x^1, ax^3) = 0$. У точці P $\Phi_{x^1} = 0$; $\Phi_{x^3} = 1 - af_{x^2} = 1$. За теоремою 2 в досить малому околі точки P ця множина точок є явно заданою регулярною кривою. З огляду на взаємну однозначність ортогонального проектування лінія перерізу площини та поверхні F є регулярною кривою.

Множина перерізу дотичної площини $x^2 = 0$ з поверхнею F є неявно заданою кривою $f(x^1, x^2) = 0$.

Розкладемо ліву частину рівняння за формулою Тейлора:

$$f_{x^1x^1}(0, 0)(dx^1)^2 + 2f_{x^1x^2}(0, 0)dx^1dx^2 + f_{x^2x^2}(0, 0)(dx^2)^2 + o((dx^1)^2 + (dx^2)^2) = 0.$$

Розглянемо два випадки.

1. Якщо гауссова кривина поверхні $K > 0$, то за формулою (2.9) в точці P

$$f_{x^1x^1}f_{x^2x^2} - f_{x^1x^2}^2 > 0$$

і точка $(0, 0)$ є ізольованою точкою кривої (див. підрозд. 1.3.1). Таким чином, поверхня локально має з дотичною площиною лише одну спільну точку P і лежить по одну сторону від дотичної площини. У цьому випадку в околі точки P поверхня має таку ж форму, як еліптичний параболоїд (рис. 2.19):

$$x^3 = f_{x^1x^1}(x^1)^2 + f_{x^2x^2}(x^2)^2 + 2f_{x^1x^2}x^1x^2.$$

Можна показати, що коли $K > 0$, то поверхня локально опукла.

Зауваження. З того, що $K > 0$, не випливає глобальної опуклості поверхні. Справді, розглянемо таку поверхню:

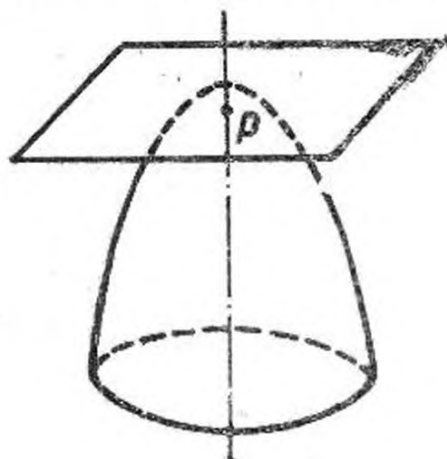


Рис. 2.19

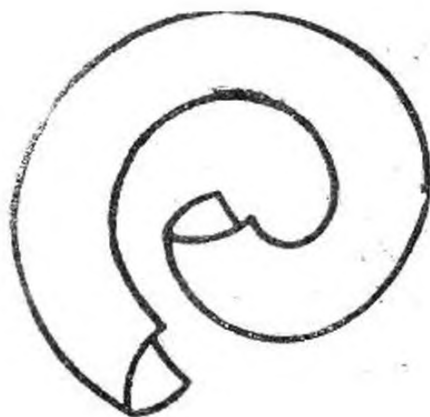


Рис. 2.20

в площині π розташована спіраль; через кожну точку P спіралі проходить півколо, що лежить в площині, яка перпендикулярна до дотичної спіралі в точці P (рис. 2.20).

2. Якщо гауссова кривина поверхні $K < 0$, то $f_{x^1 x^1} f_{x^2 x^2} - f_{x^1 x^2}^2 < 0$ і точка $(0, 0)$ є вузловою точкою неявно заданої кривої $f(x^1, x^2) = 0$, тобто крива в околі цієї точки являє собою об'єднання двох регулярних елементарних кривих, що перетинаються в цій точці. Вони ділять поверхню F на пару вертикальних криволінійних секторів, що лежать по різні сторони дотичної площини. В цьому випадку в околі точки P поверхня має форму гіперболічного параболоїда (рис. 2.21):

$$x^3 = f_{x^1 x^1} (x^1)^2 + f_{x^2 x^2} (x^2)^2 + 2f_{x^1 x^2} x^1 x^2.$$

Нехай точка P — регулярна точка поверхні другого порядку. В раніш вибраній системі координат рівняння цієї поверхні має вигляд $x^3 = a_{ij} x^i x^j$, $i, j = 1, 2$. Рівняння дотичної площини в точці P в цій системі координат $x^3 = 0$; переріз поверхні цією площиною задається рівнянням

$$a_{11} (x^1)^2 + 2a_{12} x^1 x^2 + a_{22} (x^2)^2 = 0.$$

Можливі випадки, коли перетином (перерізом) є: 1) точка, якщо $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$; 2) пряма, якщо $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$; $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{12}^2 \neq 0$; 3) пара прямих, що перетинаються, якщо $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$; 4) площина, якщо $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$.

У курсі аналітичної геометрії введено в розгляд інваріант I_4 поверхні, він характеризує тип поверхні. В даній спеціальній системі координат $I_4 = -(a_{11} a_{22} - a_{12}^2)$. Отже, якщо $I_4 < 0$, то поверхня опукла, тобто це еліпсоїд, дво-

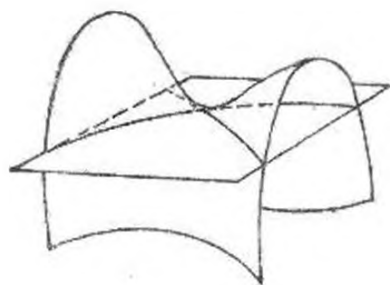


Рис. 2.21

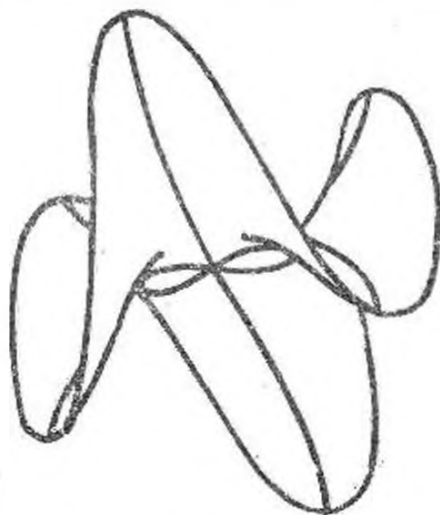


Рис. 2.22

порожнистий гіперболоїд або еліптичний параболоїд; гауссова кривина поверхні $K > 0$ і всі точки цих поверхонь еліптичні. Якщо $I_4 = 0$, то поверхня вироджена, тобто це конус, циліндр, лінійні образи; $K = 0$ і всі точки параболічні. Якщо $I_4 > 0$, поверхня є гіперболічним параболоїдом або однопорожнистим гіперболоїдом; $K < 0$ і всі точки гіперболічні.

Зауважимо, що на поверхнях другого порядку всі точки мають знакосталу гауссову кривину.

3. Якщо гауссова кривина поверхні $K = 0$, $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$, то відповісти однозначно на запитання, яку форму має поверхня в околі точки P , не можна.

Приклади. 1. Розглянемо параболічний циліндр $z = x^2$. Усі точки цієї поверхні параболічні. Дотична площина та поверхня мають спільну пряму, поверхня лежить по одну сторону від дотичної площини.

2. Поверхня, що задана рівнянням $z = x^2 + y^4$, в околі точки $(0, 0, 0)$ має форму, що зображена на рис. 2.19. Поверхня лежить по одну сторону від дотичної площини і має з нею одну спільну точку.

3. Поверхня, що задана рівнянням $z = x^2 - y^4$ в околі точки $(0, 0, 0)$, схожа на сідло (див. рис. 2.21). Дотична площина в точці $(0, 0, 0)$ перерізає поверхню по парі парабол.

Якщо в точці $k_1 = k_2 = 0$, то без додаткових припущень про форму поверхні в околі точки нічого сказати не можна.

Приклади. 1. В околі точки $(0, 0, 0)$ форма поверхні $z = x^4 + y^4$ така ж, як в околі еліптичної точки (див. рис. 2.19).

2. В околі точки $(0, 0, 0)$ форма поверхні $z = x^4 - y^4$ така ж, як в околі гіперболічної точки (див. рис. 2.21).

3. Розглянемо сім'ю поверхонь, що задана рівнянням $z = \operatorname{Re}(x + iy)^n$, $n \geq 2$. При $n = 2$ рівняння змальовує гіперболічний параболоїд. Починаючи з $n = 3$ рівняння змальовує поверхню, в якій $k_1 = k_2 = 0$ в точці $(0, 0, 0)$. Нехай $n = 3$, тоді рівняння набере вигляду $z = \operatorname{Re}(x + iy)^3 = x^3 - 3xy^2$. Останнє рівняння задає поверхню, що називається мавпячим сідлом (рис. 2.22).

Задачі. 1. Довести, що коли поверхня повна, а її гауссова кривина $K \geq 0$, причому $K > 0$ принаймні в одній точці, то поверхня опукла.

2. Довести, що коли поверхня компактна і її гауссова кривина $K \geq 0$, то поверхня опукла.

3. Довести, що на компактній поверхні максимальне значення гауссової кривини більше нуля.

4. Довести, що на поверхні, яка не лежить у площині з плоскою зв'язною компактною межею, знайдеться точка, в якій гауссова кривина більше нуля.

Зауваження. Те, що плоский край поверхні складається з однієї кривої, суттєво. Справді, розглянемо частину однопорожнистого гіперболоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, яка вміщена між площинами $z = \pm h$. Межа цієї поверхні складається із двох плоских кривих. Гауссова кривина поверхні в будь-якій точці менша нуля.

Опуклі поверхні мають знакосталу гауссову кривину.

Твердження. Нехай регулярна класу C^2 поверхня опукла (тобто лежить на межі опуклого тіла). Тоді в кожній точці поверхні $K \geq 0$.

Доведення. Поверхня опукла, отже, в кожній точці поверхні є опорна площина і поверхня лежить по одну сторону від неї. З огляду на регулярність поверхні опорна площина є дотичною площиною. Нехай точка P належить поверхні. Всі нормальні перерізи, що проходять через точку P , будуть лежати по одну сторону від дотичної площини в точці P . Отже, нормальна кривина буде одного знаку і $K \geq 0$.

Тепер, не проводячи обчислень, можна визначити знак гауссової кривини деяких поверхонь. У курсі аналітичної геометрії доведено, що еліпсоїд, еліптичний параболоїд, циліндр (еліптичний, гіперболічний чи параболічний), одна порожнина однопорожнистого гіперболоїда, конус — поверхні опуклі. Отже, їх гауссова кривина $K \geq 0$.

Розглянемо регулярні класу C^2 лінійчасті поверхні. Їх радіус-вектор R має такий вигляд:

$$R(u^1, u^2) = \rho(u^1) + u^2 s(u^1),$$

де $\rho = \rho(u^1)$ — рівняння просторової кривої, $s(u^1)$ задає векторне поле вздовж кривої.

Гауссова кривина лінійчастої поверхні $k \leq 0$. Справді, нормальна кривина поверхні в напрямку прямої, що лежить на ній, дорівнює нулеві. Звідси мінімальне значення нормальної кривини $k_1 \leq 0$, максимальне — $k_2 \geq 0$. Отже, гауссова кривина цієї поверхні $K = k_1 \cdot k_2 \leq 0$.

Повернемося до поверхонь другого порядку. Із опуклості конуса та циліндра випливає, що $K \geq 0$ в кожній точці цих поверхонь. Із того, що конус та циліндр — лінійчасті поверхні, випливає, що $K \leq 0$. Тому гауссова криви-

на конуса та циліндра другого порядку дорівнює нулеві.

Однопорожнистий гіперболоїд та гіперболічний параболоїд є лінійчастими поверхнями [4, розд. VI, §32]. Це дозволяє стверджувати, що гауссова кривина цих поверхонь $K \leq 0$.

Задача. Нехай ρ, s — регулярні функції. Знайти умови, яким повинні задовольняти ρ та s , щоб: 1) лінійчаста поверхня була регулярною в околі кривої $\rho = \rho(u^1)$; 2) гауссова кривина лінійчастої поверхні $K \equiv 0$.

Визначити геометричний зміст цих вимог.

2.6.1. Класифікація напрямків у точці

Напрямок $a = (a^1, a^2) \neq 0$ в дотичній площині поверхні називається головним, якщо існує таке λ , що виконується умова

$$(B - \lambda G)a = 0, \quad (2.11)$$

де G, B — матриці коефіцієнтів відповідно першої та другої квадратичних форм поверхні. Вище доведено, що головні напрямки ортогональні і в них досягаються максимум та мінімум нормальної кривини.

Визначення. Лінія на поверхні називається лінією кривини, коли її напрямок у кожній точці співпадає з головним напрямком.

Одержимо диференціальне рівняння лінії кривини. Будемо позначати головні напрямки через (du^1, du^2) , щоб підкреслити, що при переході від точки до точки головні напрямки змінюються. Якщо будемо проводити вивчення у фіксованій точці, то лишимо позначення (a^1, a^2) .

Запишемо рівняння (2.11) у вигляді

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix}.$$

Це рівняння еквівалентне системі рівнянь

$$\begin{cases} b_{11} du^1 + b_{12} du^2 = \lambda (g_{11} du^1 + g_{12} du^2); \\ b_{12} du^1 + b_{22} du^2 = \lambda (g_{12} du^1 + g_{22} du^2). \end{cases}$$

Виключивши із системи рівнянь λ , одержимо рівняння, якому повинні задовольняти головні напрямки:

$$\frac{b_{11} du^1 + b_{12} du^2}{g_{11} du^1 + g_{12} du^2} = \frac{b_{12} du^1 + b_{22} du^2}{g_{12} du^1 + g_{22} du^2},$$

$$\text{або } (b_{11} g_{12} - g_{11} b_{12})(du^1)^2 + (g_{22} b_{11} - g_{11} b_{22}) du^1 du^2 + (g_{22} b_{12} - g_{12} b_{22})(du^2)^2 = 0.$$

Якщо $k_1 \neq k_2$, тобто точка не є ні омбілічною, ні точкою сплюснення, то в цій точці квадратне рівняння відносно $\frac{du^1}{du^2}$ має два різні розв'язки:

$$\frac{du^1}{du^2} = f_1(u^1, u^2); \quad \frac{du^1}{du^2} = f_2(u^1, u^2).$$

Це диференціальні рівняння першої та другої сімей ліній кривини поверхні.

Із курсу диференціальних рівнянь відомо, що ці рівняння мають єдиний розв'язок, тобто через фіксовану точку (u_0^1, u_0^2) поверхні проходить по одній лінії кривини з кожної сім'ї.

Приклад. На площині і на сфері будь-яка лінія є лінією кривини, оскільки будь-який напрямок є головним.

В околі точки регулярної поверхні, якщо вона не є омбілічною або точкою сплюснення, можна обрати параметризацію так, щоб координатні лінії були лініями кривини [15].

Якими будуть коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні в такій параметризації?

Лінії кривини ортогональні, тому $g_{12} = 0$, напрямок $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ головний, отже,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідси $b_{12} = 0$.

Правильне і обернене твердження.

Якщо в деякій параметризації поверхні $g_{12} = b_{12} = 0$, то координатні лінії є лініями кривини.

Справді, напрямки $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ та $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, дотичні до координатних ліній, задовольняють рівнянню

$$\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du^1 \\ du^2 \end{pmatrix},$$

тобто є головними.

Приклад. Розглянемо поверхню обертання, що задана радіус-вектором

$$r = \begin{pmatrix} \varphi(u) \cos v \\ \varphi(u) \sin v \\ \psi(u) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо коефіцієнти g_{12} та b_{12} :

$$r_u = \begin{pmatrix} \varphi' \cos v \\ \varphi' \sin v \\ \psi' \end{pmatrix}; \quad r_v = \begin{pmatrix} -\varphi \sin v \\ \varphi \cos v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r_{uv} = \begin{pmatrix} -\varphi' \sin v \\ \varphi' \cos v \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$g_{12} = \langle r_u, r_v \rangle = 0; \quad b_{12} = \frac{(r_{uv}, r_u, r_v)}{|r_u \times r_v|} = 0.$$

Отже, координатні лінії поверхні обертання є лініями кривини.

Задача. Нехай в просторі задана криволінійна система координат, причому координатні поверхні взаємно ортогональні. Довести, що лінії перерізу координатних поверхонь є лініями кривини (теорема Дюпена).

2.6.2. Асимптотичні напрямки

Визначення. Напрямок на поверхні, в якому нормальна кривина $k_n = 0$, називається асимптотичним.

За формулою Ейлера $k_n = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi$. Тоді в асимптотичному напрямку $k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi = 0$. Це рівняння квадратичне відносно $\tan \varphi$. Отже, в точці може бути 0, 1, 2 асимптотичних напрямки або будь-який напрямок в дотичній площині є асимптотичним.

Згадаємо, що

$$k_n = \frac{b_{ij} du^i du^j}{g_{ij} du^i du^j}.$$

Отже, асимптотичні напрямки — це ті напрямки, які задовольняють рівнянню

$$b_{11} (du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22} (du^2)^2 = 0.$$

Це квадратне рівняння відносно $\frac{du^1}{du^2}$. Рівняння не має розв'язків, коли $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0$, тобто коли $K > 0$; має один розв'язок, коли $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 = 0$ і $b_{11}^2 + b_{12}^2 + b_{22}^2 \neq 0$, тобто коли $K = 0$ і $k_1^2 + k_2^2 \neq 0$; має два розв'язки, коли $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 < 0$, тобто коли $K < 0$; має нескінченно багато розв'язків (будь-який напрямок є асимптотичним), коли $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, тобто коли $k_1 = k_2 = 0$.

Таким чином, в еліптичній точці поверхні немає асимптотичних напрямків, у параболічній є один асимптотичний напрямок у гіперболічній точці — два асимптотичних

напрямки, в точці сплющення будь-який напрямок є асимптотичним. За кількістю асимптотичних напрямків однозначно визначаються знак гауссової кривини та тип точки.

Визначення. Лінії, що лежать на поверхні і в кожній точці дотикаються асимптотичного напрямку, називаються асимптотичними.

Приклади. 1. Будь-який напрямок на площині є асимптотичним.

2. На поверхні другого порядку асимптотичні лінії — це тільки прямолінійні твірні.

Диференціальне рівняння асимптотичних ліній —

$$b_{11} (du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22} (du^2)^2 = 0.$$

Якщо $K < 0$, то останнє рівняння має два різних розв'язки:

$$\frac{du^1}{du^2} = f_1(u^1, u^2); \quad \frac{du^1}{du^2} = f_2(u^1, u^2).$$

Це диференціальні рівняння першого порядку двох сімей асимптотичних ліній. Із курсу диференціальних рівнянь випливає, що через кожен точку від'ємної гауссової кривини проходять дві асимптотичні лінії, по одній із кожної сім'ї.

Нехай поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$. Тоді

$$b_{ij} = \frac{f_{x^i x^j}}{\sqrt{1 + (\text{grad } f)^2}}$$

і рівняння для визначення асимптотичних напрямків має вигляд

$$f_{x^i x^j} dx^i dx^j = 0.$$

Цьому рівнянню задовольняють напрямки дотичних до кривих перерізу поверхні з дотичною площиною у випадку, коли гауссова кривина $K < 0$.

Нехай координатні лінії $u^1 = \text{const}$; $u^2 = \text{const}$ є асимптотичними, тобто задовольняють рівнянню $b_{11} (du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22} (du^2)^2 = 0$. Тоді $b_{11} = b_{22} = 0$. І навпаки, якщо поверхня параметризована так, що $b_{11} = b_{22} = 0$, то координатні лінії асимптотичні.

Можна довести, що в околі гіперболічної точки існує така параметризація поверхні, що координатні лінії будуть асимптотичними [15].

Приклад. Знайдемо асимптотичні лінії на гелікоїді, радіус-вектор якого $r = \begin{pmatrix} u \cos v \\ u \sin v \\ a v \end{pmatrix}$. Обчислимо коефіцієнти b_{11} , b_{22} :

$$r_u = \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix}; r_v = \begin{pmatrix} -u \sin v \\ u \cos v \\ a \end{pmatrix}; r_{uu} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$r_{vv} = \begin{pmatrix} -u \cos v \\ -u \sin v \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$b_{11} = \frac{(r_u, r_u, r_{uu})}{|r_u \times r_v|} = 0; b_{22} = \frac{(r_v, r_v, r_{vv})}{|r_u \times r_v|} = 0.$$

Отже, на гелікоїді координатні лінії є асимптотичними; рівняння $u = \text{const}$ задає гвинтову лінію, $v = \text{const}$ — пряму.

Для асимптотичних ліній має місце таке твердження.

Твердження. Щільнотична площина асимптотичної лінії співпадає з дотичною площиною поверхні.

Справді, нехай $r = r(s)$ — радіус-вектор асимптотичної лінії, s — природний параметр кривої. В напрямку асимптотичної лінії $k_n = \langle r'', n \rangle = 0$, де n — нормаль поверхні. Отже, $r'' \perp n$, але, крім того, і $r' \perp n$. Вектори r' , r'' визначають щільнотичну площину, яка в даному випадку співпадає з дотичною площиною поверхні.

2.7. Дериваційні формули Вейнгартена

Основним обчислювальним апаратом у теорії кривих були формули Френе. Аналогом цих формул у теорії поверхонь є дериваційні формули Вейнгартена.

Нехай $r = r(u^1, u^2)$ — регулярна параметризація поверхні. В кожній точці поверхні вектори $r_1 = \frac{\partial r}{\partial u^1}$; $r_2 = \frac{\partial r}{\partial u^2}$;

$n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$ утворюють базис простору. Отже, вектори

$r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial u^i \partial u^j}$; $n_i = \frac{\partial n}{\partial u^i}$, $i, j = 1, 2$ можна розкласти по

цьому базису. Формули розкладення векторів r_{ij} , n_i ($i, j = 1, 2$) по базису r_1, r_2, n називаються формулами Вейнгартена. Знайдемо ці формули:

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + a_{ij} n.$$

Тут і скрізь в подальшому індекси змінюються від 1 до 2. Щоб визначити коефіцієнт a_{ij} , домножимо обидві частини останньої формули скалярно на n : $\langle r_{ij}, n \rangle = a_{ij}$, але $\langle r_{ij}, n \rangle = b_{ij}$, тому $a_{ij} = b_{ij}$.

Щоб визначити коефіцієнт Γ_{ij}^k , домножимо обидві частини розкладу r_{ij} скалярно на r_s :

$$\langle r_{ij}, r_s \rangle = \Gamma_{ij}^k \langle r_k, r_s \rangle = \Gamma_{ij}^k g_{ks}.$$

Легко перевірити, що $\langle r_{ij}, r_s \rangle = \frac{1}{2} (\langle r_i, r_s \rangle_j + \langle r_j, r_s \rangle_i - \langle r_i, r_j \rangle_s)$. Позначимо $\langle r_{ij}, r_s \rangle$ через $\Gamma_{ij,s}$. Тоді

$$\Gamma_{ij,s} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right) \quad (2.12)$$

і

$$\Gamma_{ij,s} = g_{sk} \Gamma_{ij}^k. \quad (2.13)$$

Функції $\Gamma_{ij,s}$ називаються символами Крістоффеля першого роду, функції Γ_{ij}^k — символами Крістоффеля другого роду.

Виразимо Γ_{ij}^k через $\Gamma_{ij,s}$. Якщо матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні $G = (g_{ij})$, то $G^{-1} = (g^{ps})$. Помножимо обидві частини (2.13) на g^{ps} і знайдемо суму по s :

$$g^{ps} \Gamma_{ij,s} = g^{ps} g_{sk} \Gamma_{ij}^k = \delta_k^p \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^p.$$

Отже,

$$\Gamma_{ij}^k = g^{ks} \Gamma_{ij,s}.$$

Відзначимо, що символи Γ_{ij}^k та $\Gamma_{ij,s}$ симетричні по індексах i, j .

Приклади. 1. Нехай на поверхні введена півгеодезична система координат, тобто перша квадратична форма поверхні має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + g(u^1, u^2) (du^2)^2.$$

Тоді

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}; \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g} \end{pmatrix}.$$

Обчислимо символи Крістоффеля в такій системі координат:

$$\Gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \right) = 0; \\
\Gamma_{12,1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} \right) = 0; \\
\Gamma_{12,2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^1}; \\
\Gamma_{22,1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^1}; \\
\Gamma_{22,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^2}; \\
\Gamma_{11}^1 &= g^{1s} \Gamma_{11,s} = 0; \\
\Gamma_{11}^2 &= g^{2s} \Gamma_{11,s} = 0; \\
\Gamma_{12}^1 &= g^{1s} \Gamma_{12,s} = g^{12} \Gamma_{12,2} = 0; \\
\Gamma_{12}^2 &= g^{2s} \Gamma_{12,s} = g^{22} \Gamma_{12,2} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^1}; \\
\Gamma_{22}^1 &= g^{1s} \Gamma_{22,s} = g^{11} \Gamma_{22,1} + g^{12} \Gamma_{22,2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u^1}; \\
\Gamma_{22}^2 &= g^{2s} \Gamma_{22,s} = g^{22} \Gamma_{22,2} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial u^2}.
\end{aligned}$$

2. Метрична форма площини в декартових координатах має такий вигляд: $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$, і символи Крістоффеля $\Gamma_{ij}^k = 0$.

3. Нехай в спеціальній системі координат поверхня задана явно рівнянням $x^3 = f(x^1, x^2)$, причому $f(0, 0) = f_{x^1}(0, 0) = f_{x^2}(0, 0) = 0$. Тоді, як було показано раніше,

$$g_{ij}(0, 0) = \delta_{ij} + f_{x^i} f_{x^j}$$

$$\left. \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right|_{(0,0)} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} f_{x^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} f_{x^i} \right) \Big|_{(0,0)} = 0.$$

Отже, в такій системі координат в точці $(0, 0, 0)$ всі $\Gamma_{ij}^k = 0$.

Вправи. 1. Нехай метрична форма площини $ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2$. Знайти Γ_{ij}^k .

2. Обчислити Γ_{ij}^k сфери, якщо на ній введені: а) конформні координати; б) півгеодезичні координати.

3. Нехай метрика задана в конформному вигляді, тобто $ds^2 = \Lambda(u^1, u^2) ((du^1)^2 + (du^2)^2)$. Знайти Γ_{ij}^k .

Продовжимо виведення формул Вейнгартена. Оскільки $\langle n, n \rangle = 1$, то $\langle n, n_i \rangle = 0$; тому вектор n_i лежить в дотичній площині поверхні і

$$n_i = b_i^k r_k.$$

Виразимо коефіцієнти b_i^k розкладення вектора n_i по базису r_1, r_2 через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні. Для цього помножимо обидві частини останньої рівності скалярно на вектор r_s : $\langle n_i, r_s \rangle = b_i^k \langle r_k, r_s \rangle$. Зауважимо, що $\langle r_k, r_s \rangle = g_{ks}$. Крім того, $\langle n, r_s \rangle = 0$, звідки $\langle n_i, r_s \rangle + \langle n, r_{si} \rangle = 0$. Але $\langle n, r_{si} \rangle = b_{si}$, тому $\langle n_i, r_s \rangle = -b_{si}$. Отже, $-b_{is} = b_i^k g_{ks}$, тобто одержано систему двох лінійних рівнянь для знаходження b_i^k . Помножимо обидві частини останньої рівності на g^{sp} — елемент матриці G^{-1} , і знайдемо суму по s . Одержимо:

$$-g^{sp} b_{is} = g^{sp} g_{ks} b_i^k = \delta_k^p b_i^k = b_i^p.$$

Отже,

$$n_i = -g^{sk} b_{is} r_k,$$

або

$$\begin{cases} n_1 = -(g^{11} b_{11} + g^{21} b_{12}) r_1 - (g^{21} b_{11} + g^{22} b_{12}) r_2; \\ n_2 = -(g^{11} b_{21} + g^{21} b_{22}) r_1 - (g^{21} b_{21} + g^{22} b_{22}) r_2. \end{cases}$$

Коефіцієнти g^{sp} виражаються через коефіцієнти g_{ij} першої квадратичної форми поверхні, а саме: якщо

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}, \text{ то } G^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}.$$

Таким чином, коефіцієнти розкладу вектора n_i по базису r_1, r_2 виражаються через коефіцієнти першої та другої квадратичних форм поверхні.

Зауважимо, що коефіцієнти g_{ij} називаються коваріантними компонентами метричного тензора, а коефіцієнти g^{sp} — контраваріантними компонентами метричного тензора.

У курсі математичного аналізу похідна функції $z = f(x^1, \dots, x^n)$ в напрямку вектора $a = (a^1, \dots, a^n)$ знаходиться таким чином:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x^i} a^i.$$

Визначимо подібним чином похідну векторного поля в напрямку a . Нехай вектор a задає напрямок у дотичній площині поверхні $r = r(u^1, u^2)$, тобто $a = r_1 a^1 + r_2 a^2$. Позначимо похідну нормального векторного поля в напрямку a через $\nabla_a n$ і будемо знаходити за формулою

$$\nabla_a n = n_1 a^1 + n_2 a^2.$$

Із формул Вейнгартена випливає, що вектор $\nabla_a n$ лежить у дотичній площині. Отже, відображення $a \mapsto \nabla_a n$ — це відображення дотичної площини поверхні в себе. Воно називається відображенням Вейнгартена. Із визначення відображення Вейнгартена випливає його лінійність. Випишемо лінійний оператор, що задає це відображення:

$$\nabla_a n = n_i a^i = -g^{sk} b_{is} r_k a^i,$$

або $\nabla_a n = c^1 r_1 + c^2 r_2$, де $c^1 = -g^{s1} b_{is} a^i$; $c^2 = -g^{s2} b_{is} a^i$.

Знайдемо власні вектори відображення Вейнгартена, тобто з'ясуємо, коли $\nabla_a n = \lambda a$. Запишемо похідну нормального поля n в напрямку a в матричному вигляді: $\nabla_a n = -G^{-1} B a$. Треба з'ясувати, коли

$$(G^{-1} B + \lambda E) a = 0,$$

або

$$(G^{-1} B - (-\lambda) E) a = 0.$$

Останньому рівнянню, як було показано вище, задовольняють головні напрямки, і тільки вони. Раніше було показано також, що $-\lambda$, яке входить в останнє рівняння, дорівнює тільки k_1 або k_2 , де k_1 , k_2 — головні кривини поверхні.

Введемо позначення $dn = \nabla_a n$; $dr = a$. Раніше показано, що вздовж головних напрямків, і тільки вздовж них $dn = \lambda dr$.

Останнє рівняння складає зміст теореми Родріга.

З'ясуємо геометричний зміст цієї теореми. Нехай $r = r(u^1(t), u^2(t))$ — радіус-вектор кривої γ , що лежить на поверхні $r = r(u^1, u^2)$. Вздовж кривої γ побудуємо поле одиничних нормалей $n = n(t)$ поверхні. Розташуємо початок всіх нормалей в центрі одиничної сфери. Тоді кінці нормалей опишуть на сфері криву $\tilde{\gamma}$, яка може бути задана рівнянням $n = n(t)$. Вектор dr — це дотичний вектор кривої γ , dn — дотичний вектор кривої $\tilde{\gamma}$. Теорема Родріга стверджує, що вектори дотичних до кривих на поверхні і сфері колінеарні лише вздовж головних напрямків.

Нехай на поверхні координатні лінії є лініями кривини. Тоді

$$n_{u^1} = -k_1 r_{u^1}; \quad n_{u^2} = -k_2 r_{u^2}.$$

Одержані формули називають формулами Родріга.

За допомогою формул Вейнгартена можна дати відповідь на запитання: як побудована поверхня, в якій всі точки омбілічні? Нехай розглядається регулярна поверх-

ня класу C^3 . Всі точки поверхні омбілічні, отже, будь-який напрямок на поверхні є головним. І будь-яка крива, що лежить на поверхні, є лінією кривини. Тому вздовж координатних ліній виконуються формули Родріга:

$$n_1 = -k_1 r_1; \quad n_2 = -k_2 r_2, \quad \text{де } k_1 = k_2 = k.$$

Диференціюємо перше рівняння по u^2 , друге — по u^1 :

$$n_{12} = -k_{u^2} r_1 - k r_{12}; \quad n_{21} = -k_{u^1} r_2 - k r_{21}.$$

З огляду на регулярність поверхні $n_{12} = n_{21}$; $r_{12} = r_{21}$, і із останніх двох рівнянь одержимо, що

$$k_{u^2} r_1 - k_{u^1} r_2 = 0.$$

Вектори r_1, r_2 лінійно незалежні, тому $k_{u^1} = k_{u^2} = 0$; звідси випливає, що $k = \text{const}$.

Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $k > 0$. Справді, знак нормальної кривини залежить від вибору нормалі. Візьмемо таку параметризацію поверхні, щоб нормальна кривина була додатна. Отже, формули Родріга можна записати таким чином:

$$\begin{cases} (n + kr)_{u^1} = 0; \\ (n + kr)_{u^2} = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $n + kr = c$, де c — сталий вектор. Тому $\left| r - \frac{c}{k} \right| = \left| \frac{n}{k} \right| = \frac{1}{k}$. Останнє рівняння змальовує сферу радіуса $\frac{1}{k}$ в центром у точці $\frac{c}{k}$.

2.8. Сферичне зображення поверхні.

Теорема Гаусса

Вище визначено сферичне відображення поверхні. Якщо $r = r(u^1, u^2)$ — регулярна параметризація поверхні, то неперервне поле одиничних нормалей поверхні може бути задане радіусом-вектором

$$n = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|r_{u^1} \times r_{u^2}|}.$$

При сферичному відображенні кожній точці P поверхні ставиться у відповідність точка \tilde{P} одиничної сфери таким чином: початок вектора нормалі n до поверхні в точці P розташуємо в центрі сфери; кінець вектора n попадає в точку \tilde{P} , що належить сфері.

Нехай $r = r(u^1, u^2)$ — радіус-вектор поверхні, $n = n(u^1, u^2)$ — радіус-вектор сферичного зображення поверхні. Тоді елемент площі поверхні

$$ds = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2 = |r_{u^1} \times r_{u^2}| du^1 du^2$$

і елемент площі сфери $d\omega = |n_{u^1} \times n_{u^2}| du^1 du^2$.

Нехай U — окіл точки P на поверхні, \tilde{U} — окіл точки \tilde{P} . Для спрощення подальших обчислень будемо вважати, що точка P не є омбілічною. Тоді в околі точки P можна так параметризувати поверхню, щоб координатні лінії були лініями кривини. В цій параметризації за формулою Родріга $n_{u^1} = -k_1 r_{u^1}$; $n_{u^2} = -k_2 r_{u^2}$.

Підставимо ці вирази у формулу для обчислення елемента площі сфери:

$$d\omega = |k_1 k_2| |r_{u^1} \times r_{u^2}| du^1 du^2 = |K| ds.$$

Таким чином,

$$|K| = \frac{d\omega}{ds}.$$

З'ясуємо геометричний зміст гауссової кривини. Якщо ΔS — площа околу U точки P , $\Delta \omega$ — площа околу \tilde{U} точки \tilde{P} , то $\Delta S = \int_U ds$; $\Delta \omega = \int_{\tilde{U}} d\omega$. Розглянемо границю відношення $\frac{\Delta \omega}{\Delta S}$, коли окіл U стягується в точку:

$$\lim_{U \rightarrow P} \frac{\Delta \omega}{\Delta S} = \frac{d\omega}{ds} = |K|.$$

Це складає зміст теореми Гауса про сферичне зображення. Отже, чим сильніше викривлена поверхня, тим більше площа її сферичного зображення. Якщо гауссова кривина поверхні дорівнює нулю, то площа сферичного зображення поверхні також дорівнює нулю, тобто сферичним образом поверхні нульової гауссової кривини є лінія або точка.

До цього часу вважалось, що $\frac{d\omega}{ds} \geq 0$. Визначимо тепер знак виразу $\frac{d\omega}{ds}$. Якщо параметризація $r = r(u^1, u^2)$ поверхні обрана, то в кожній точці однозначно визначається одинична нормаль поверхні

$$n = \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|r_{u^1} \times r_{u^2}|}.$$

Вибір параметризації та вибір за параметризацією нормалі задає орієнтацію поверхні. Задамо орієнтацію сфери так, щоб нормалі сфери та поверхні у відповідних при сферичному відображенні точках співпадали. Отже, зафіксовано орієнтацію сфери. Але нормаль $n = n(u^1, u^2)$ визначає відображення поверхні на сферу і параметризує сферу. Якщо $K \neq 0$, то цій параметризації відповідає поле одиничних нормалей

$$v = \frac{n_{u^1} \times n_{u^2}}{|n_{u^1} \times n_{u^2}|}$$

сфери. Нехай (для спрощення подальших обчислень) на поверхні координатними лініями є лінії кривини. Тоді $n_{u^1} = k_1 r_{u^1}$; $n_{u^2} = k_2 r_{u^2}$ і

$$v = k_1 k_2 \frac{r_{u^1} \times r_{u^2}}{|n_{u^1} \times n_{u^2}|} = K \frac{|r_{u^1} \times r_{u^2}|}{|n_{u^1} \times n_{u^2}|} \cdot n.$$

Із останньої рівності випливає, що коли $K > 0$, то нормаль v сфери співпадає з зафіксованою нормаллю сфери; в цьому випадку вважаємо, що $\frac{d\omega}{ds} > 0$; якщо $K < 0$, то нормаль v протилежна зафіксованій, в цьому випадку $\frac{d\omega}{ds} < 0$.

Розглянемо іншу інтерпретацію знаку $\frac{d\omega}{ds}$. Нехай в просторі задана додатна орієнтація. Нехай l — контур на поверхні, що охоплює точку P . Оберемо такий напрямок обходу контуру l , щоб із кінця n — нормалі до поверхні в точці P — обхід було видно проти годинникової стрілки. При сферичному відображенні точка P перейде в точку \bar{P} сфери, контур l — в контур \bar{l} ; нормаль до сфери в точці \bar{P} співпадає з нормаллю n до поверхні в точці P . Можна перевірити, що коли $K > 0$, то із кінця вектора n обхід контура \bar{l} видно проти годинникової стрілки; коли $K < 0$, контур \bar{l} обходиться за годинниковою стрілкою. В першому випадку $\frac{d\omega}{ds} > 0$, у другому — $\frac{d\omega}{ds} < 0$.

Приклади. 1. Обхід контура, що лежить на еліптичному параболоїді, при сферичному відображенні зберігає напрямок (рис. 2.23).

2. Обхід контура, що лежить на гіперболічному параболоїді, при сферичному відображенні змінює напрямок на протилежний (рис. 2.24).

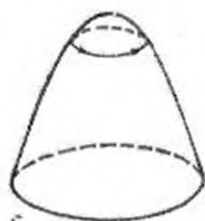
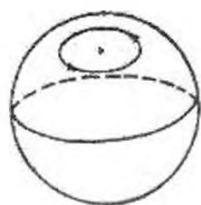


Рис. 2.23

Рис. 2.24

Визначення. Інтегральною кривиною поверхні F називається величина $\omega = \int_F K ds$.

Приклади. 1. Обчислити інтегральну кривину еліптичного параболоїда. Гауссова кривина еліптичного параболоїда більше нуля, а сферичне зображення — півсфера. Тому $\omega = 2\pi$ для еліптичного параболоїда.

2. Інтегральна кривина гіперболічного параболоїда $\omega = -2\pi$, оскільки гауссова кривина цієї поверхні від'ємна, а сферичним образом поверхні є півсфера.

Вправи. 1. Обчислити інтегральну кривину: а) еліптичного параболоїда, що заданий рівнянням $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$; б) гіперболічного параболоїда, що заданий рівнянням $z = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$.

2. Дослідити сферичне відображення тора обертання. Довести, що інтегральна кривина тора дорівнює нулю.

Раніше було введено в розгляд повну кривину

$$\omega = \int_l k ds$$

плоскої кривої l , де k — кривина кривої, і доведено що ω дорівнює куту обертання при обході кривої. Тоді повна кривина будь-якої замкненої плоскої кривої без самоперетинів дорівнює 2π .

Подібне твердження, яке буде доведено пізніше, має місце і для поверхонь.

Гауссова кривина поверхні визначалася нами через першу та другу квадратичні форми. Але виявляється правильною і викладена нижче теорема.

Теорема Гаусса. Гауссова кривина регулярної класу C^3 поверхні визначається лише першою квадратичною формою цієї поверхні.

Доведення Гауссова кривина поверхні

$$K = \frac{b_{11} b_{22} - b_{12}^2}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Покажемо, що $b_{11} b_{22} - b_{12}^2$ виражається через коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні. Запишемо формули Вейнгартена таким чином:

$$\begin{aligned} b_{11} n &= r_{11} - \Gamma_{11}^k r_k; & b_{22} n &= r_{22} - \Gamma_{22}^s r_s; \\ b_{12} n &= r_{12} - \Gamma_{12}^p r_p. \end{aligned}$$

Звідси

$$\begin{aligned} b_{11} b_{22} - b_{12}^2 &= \langle r_{11} - \Gamma_{11}^k r_k, r_{22} - \Gamma_{22}^s r_s \rangle - \\ &- \langle r_{12} - \Gamma_{12}^s r_s, r_{12} - \Gamma_{12}^k r_k \rangle = \langle r_{11}, r_{22} \rangle - \\ &- \langle r_{12}, r_{12} \rangle - \langle r_{11}, \Gamma_{22}^s r_s \rangle - \langle r_{22}, \Gamma_{11}^k r_k \rangle + \\ &+ \langle \Gamma_{11}^k r_k, \Gamma_{22}^s r_s \rangle + 2 \langle r_{12}, \Gamma_{12}^k r_k \rangle - \langle \Gamma_{12}^k r_k, \Gamma_{12}^s r_s \rangle. \end{aligned}$$

Останні п'ять доданків виражаються тільки через коефіцієнти першої квадратичної форми. Справді, оскільки $\langle r_{ij}, r_s \rangle = \Gamma_{ij,s}$, де $\Gamma_{ij,s}$ визначаються із формули (2.12), то

$$\begin{aligned} \langle r_{11}, \Gamma_{22}^s r_s \rangle &= \Gamma_{11,s} \Gamma_{22}^s, & \langle r_{22}, \Gamma_{11}^k r_k \rangle &= \Gamma_{22,k} \Gamma_{11}^k; \\ \langle \Gamma_{11}^k r_k, \Gamma_{22}^s r_s \rangle &= g_{ks} \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^s; & \langle r_{12}, \Gamma_{12}^k r_k \rangle &= \Gamma_{12,k} \Gamma_{12}^k; \\ \langle \Gamma_{12}^k r_k, \Gamma_{12}^s r_s \rangle &= g_{ks} \Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^s. \end{aligned}$$

Різниця $\langle r_{11}, r_{22} \rangle - \langle r_{12}, r_{12} \rangle = \langle r_{11}, r_2 \rangle_{u^2} - \langle r_{12}, r_2 \rangle_{u^1}$, оскільки співпадають змішані похідні r_{112} та r_{121} ; звідси

$$\langle r_{11}, r_{22} \rangle - \langle r_{12}, r_{12} \rangle = \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1}.$$

Одержимо формулу для знаходження гауссової кривини через коефіцієнти першої квадратичної форми та символи Крістоффеля. Обчислимо дискримінант другої квадратичної форми поверхні:

$$\begin{aligned} b_{11} b_{22} - b_{12}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} - \Gamma_{11,s} \Gamma_{22}^s - \Gamma_{22,s} \Gamma_{11}^s + \\ &+ g_{ks} \Gamma_{11}^k \Gamma_{22}^s + 2 \Gamma_{12,s} \Gamma_{12}^s - g_{ks} \Gamma_{12}^k \Gamma_{12}^s = \\ &= \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} - \Gamma_{11,s} \Gamma_{22}^s - \Gamma_{22,s} \Gamma_{11}^s + \Gamma_{11,s} \Gamma_{22}^s + \\ &+ 2 \Gamma_{12,s} \Gamma_{12}^s - \Gamma_{12,s} \Gamma_{12}^s = \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} - \\ &- \Gamma_{11}^s \Gamma_{22,s} + \Gamma_{12}^s \Gamma_{12,s}. \end{aligned}$$

Тоді

$$K = \frac{\frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^s \Gamma_{22,s} + \Gamma_{12}^s \Gamma_{12,s}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (2.14)$$

Якщо перша квадратична форма має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + g(u^1, u^2) (du^2)^2,$$

то

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{(\partial u^1)^2}. \quad (2.15)$$

Якщо метрика поверхні записана в конформному вигляді, тобто

$$ds^2 = \Lambda(u^1, u^2) ((du^1)^2 + (du^2)^2),$$

то

$$K = -\frac{1}{\Lambda} \Delta \ln \Lambda, \text{ де } \Delta \ln \Lambda = \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{(\partial u^1)^2} + \frac{\partial^2 \ln \Lambda}{(\partial u^2)^2}.$$

Із теореми Гаусса випливає, що для ізометричних поверхонь гауссові кривини, обчислені у відповідних точках, співпадають.

Приклади. 1. Циліндр локально ізометричний площині. Гауссова кривина циліндра, як і гауссова кривина площини, дорівнює нулю.

2. Гауссові кривини у відповідних при ізометрії точках катеноїда і гелікоїда співпадають.

3. Поверхня, що складається із дотичних до просторової кривої, локально ізометрична площині. Отже, гауссова кривина цієї поверхні дорівнює нулю.

Отже, необхідною умовою ізометричності двох поверхонь є рівність гауссових кривин у відповідних при відображенні точках поверхонь.

Наведіть приклад того, що ця умова не є достатньою.

Якщо поверхня має сталу гауссову кривину, то рівність гауссових кривин — це необхідна та достатня умова ізометричності поверхонь.

Це буде доведено пізніше.

У процесі доведення теореми Гаусса знайдено вираз дискримінанта другої квадратичної форми поверхні через коефіцієнти першої квадратичної форми. Виявляється, що є й інші зв'язки між коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм поверхонь. Знайдемо їх. Не-

хай поверхня $r=r(u^1, u^2)$ регулярна класу C^3 . Запишемо формули Вейнгартена:

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} n.$$

Обчислимо похідні від обох частин формул Вейнгартена і, враховуючи, що змішані похідні однакові: $r_{112}=r_{121}$, $r_{122}=r_{221}$, одержимо рівняння

$$\begin{aligned} \frac{\partial b_{11}}{\partial u^2} - \Gamma_{12}^1 b_{11} - \Gamma_{12}^2 b_{12} &= \frac{\partial b_{12}}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^1 b_{21} - \Gamma_{11}^2 b_{22}; \\ \frac{\partial b_{12}}{\partial u^2} - \Gamma_{22}^1 b_{11} - \Gamma_{22}^2 b_{12} &= \frac{\partial b_{22}}{\partial u^1} - \Gamma_{21}^1 b_{21} - \Gamma_{21}^2 b_{22}; \\ b_{11} b_{22} - b_{12}^2 &= \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^s \Gamma_{22,s} + \Gamma_{12}^s \Gamma_{12,s}. \end{aligned}$$

Перші два рівняння називаються рівняннями Петерсона — Кодаці. Останнє рівняння називається рівнянням Гаусса. Зауважимо, що його уже одержано раніше, коли доводилася теорема Гаусса.

Вправи. 1. Записати рівняння Гаусса, Петерсона — Кодаці у випадку, коли координатні лінії є лініями кривини.

2. Записати рівняння Гаусса, Петерсона — Кодаці, якщо координатні лінії є асимптотичними.

У теорії кривих доведено, що існує єдина з точністю до руху в просторі крива, кривина якої дорівнює $k_1(s) > 0$, скрут — $k_2(s)$.

Подібна теорема є і в теорії поверхонь.

Теорема Бонне. Нехай в деякій області на площині з координатами (u^1, u^2) задано дві квадратичні форми

$$I = g_{ij} du^i du^j; \quad II = b_{ij} du^i du^j,$$

коефіцієнти яких належать класу C^2 , причому перша квадратична форма є додатно визначеною. І нехай коефіцієнти цих форм задовольняють рівнянням Гаусса, Петерсона — Кодаці. Тоді в тривимірному просторі існує регулярна поверхня, в якій у відповідних точках перша квадратична форма співпадає з формою I , а друга квадратична форма — з формою II , причому така поверхня — єдина з точністю до руху в просторі.

Теорема доводиться за допомогою формул Вейнгартена — аналогів формул Френе [15].

Зауваження. Першу працю Гаусса з диференціальної геометрії було опубліковано в 1827 році. Гаусс першим

етав систематично користуватися криволінійними координатами. Він увів поняття гауссової кривини, після чого диференціальна геометрія виділилася в окрему науку.

2.9 Геодезична кривина кривої.

Геодезична лінія

Нехай на C^2 —регулярній поверхні F лежить C^2 —регулярна крива L , $r=r(s)$ —радіус-вектор кривої L . Тут s —натуральний параметр $r''=kv$ —вектор кривини кривої L , де k —кривина кривої, v —головна нормаль.

Нормальна кривина поверхні в заданому напрямку $k_n=k\cos\theta$, де θ —кут між нормаллю до поверхні та головною нормаллю кривої. Модуль нормальної кривини дорівнює довжині проєкції вектора кривини кривої на нормаль до поверхні.

Спроекуємо тепер вектор кривини кривої L на дотичну площину поверхні. Довжину проєкції назвемо модулем геодезичної кривини k_g кривої L : $|k_g|=k\sin\theta$ (рис. 2.25).

Визначимо знак геодезичної кривини. Нехай $r=r(u^1, u^2)$ —радіус-вектор поверхні F : $r(s)=r(u^1(s), u^2(s))$ —радіус-вектор кривої L . Одиничний вектор нормалі до поверхні та одиничний вектор дотичної до кривої обираються в кожній точці однозначно, а саме: вектор нормалі $n = \frac{r_1 \times r_2}{|r_1 \times r_2|}$, вектор дотичної $\tau = r'(s)$.

Вектор $r''=kv$ перпендикулярний до вектора τ , проєкція вектора кривини r'' на дотичну площину також пер-

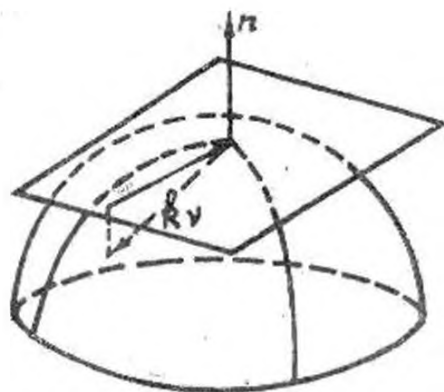


Рис. 2.25

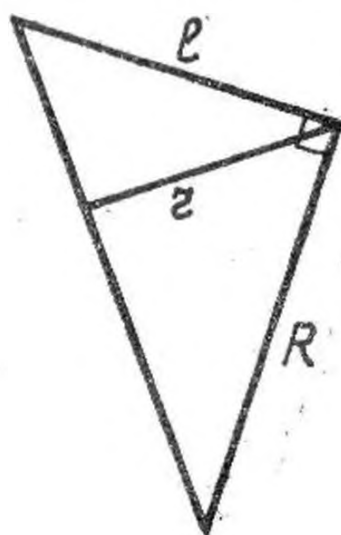


Рис. 2.26

пендикулярна до τ . Позначимо проекцію вектора r'' на дотичну площину через c . Якщо трійка векторів (τ, c, n) задає додатну орієнтацію простору, то будемо вважати, що геодезична кривина $k_g > 0$. Якщо трійка векторів (τ, c, n) задає від'ємну орієнтацію, то $k_g < 0$.

Таким чином,

$$k_g = \langle r'', n \times \tau \rangle = (r', r'', n). \quad (2.16)$$

Покажемо, що геодезична кривина визначається тільки першою квадратичною формою поверхні. Справді,

$$\begin{aligned} r' &= r_1 \frac{du^1}{ds} + r_2 \frac{du^2}{ds}; \\ r'' &= r_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + r_1 \frac{d^2u^1}{ds^2} + r_2 \frac{d^2u^2}{ds^2}. \end{aligned}$$

За формулами Вейнгартена

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} n,$$

тому

$$\begin{aligned} r'' &= r_1 \left(\Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^1}{ds^2} \right) + \\ &+ r_2 \left(\Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \frac{d^2u^2}{ds^2} \right) + b_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Підставимо одержані для r' та r'' вирази у формулу (2.16):

$$\begin{aligned} K_g &= \left(r_1 \frac{du^1}{ds} + r_2 \frac{du^2}{ds}; r_1 \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) + \right. \\ &\quad \left. + r_2 \left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right), n \right) = \\ &= (r_1, r_2, n) \left(\frac{du^1}{ds} \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{du^2}{ds} \left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \right). \end{aligned}$$

Зауважимо, що

$$(r_1, r_2, n) = |r_1 \times r_2| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

і одержимо таку формулу для обчислення геодезичної кривини кривої на поверхні:

$$\begin{aligned} k_g &= \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \left(\frac{du^1}{ds} \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{du^2}{ds} \left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \right). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Зауваження. Знайдемо геодезичну кривину плоскої кривої. Нехай u^1, u^2 — декартові прямокутні координати на площині. Тоді $\Gamma_{ij}^k = 0$; $g_{ij} = \delta_{ij}$, і остання формула набере вигляду

$$k_g = \frac{du^1}{ds} \frac{d^2u^2}{ds^2} - \frac{du^2}{ds} \frac{d^2u^1}{ds^2}.$$

Ця формула співпадає з формулою для знаходження кривини плоскої кривої $u^1 = u^1(s)$; $u^2 = u^2(s)$.

Таким чином, геодезична кривина плоскої кривої співпадає з кривиною кривої. Отже, геодезичну кривину кривої, що лежить на довільній нерегулярній поверхні, можна розглядати як узагальнення кривини кривої, що лежить на площині.

Вправа. Вище одержано формулу для обчислення геодезичної кривини кривої, що параметризована за допомогою природного параметра. Знайти формулу для обчислення k_g при довільній параметризації кривої.

Нехай дві поверхні F_1, F_2 дотикаються одна одній вздовж деякої кривої γ . Знайдемо геодезичну кривину k_{g_1} кривої γ як кривої, що лежить на поверхні F_1 , і геодезичну кривину k_{g_2} кривої γ як кривої, що лежить на поверхні F_2 . Очевидно, $|k_{g_1}| = |k_{g_2}|$. Якщо нормалі поверхонь F_1 та F_2 вздовж кривої γ співнапрямлені, то $k_{g_1} = k_{g_2}$.

Приклад. Обчислити геодезичну кривину малого кола на сфері. Дотичні площини сфери вздовж малого кола обгортають конус обертання. Конус та сфера дотикаються один одного по малому колу, і, значить, геодезичні кривини кола як кривої на сфері та конусі співпадають. Але конус локально ізометричний площині, а геодезична кривина при ізометричних відображеннях не змінюється, оскільки k_g виражається через коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні. Розгорнемо конус на площину. Мале коло, що розглядається, перейде в плоску криву, кривина якої дорівнює шуканій кривині малого кола на сфері.

Нехай R — радіус сфери, r — радіус малого кола як плоскої кривої, l — відстань від вершини конуса до точки малого кола. Тоді (рис. 2.26)

$$\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{l}{R},$$

звідки геодезична кривина малого кола на сфері

$$k_g = \frac{1}{l} = \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{rR}.$$

Якщо $r=R$, то $k_g=0$, тобто геодезична кривина великих кіл на сфері дорівнює нулю. Якщо $r \rightarrow 0$, то $k_g \rightarrow \infty$.

Визначення. Крива на поверхні, в кожній точці якої геодезична кривина дорівнює нулю, називається геодезичною лінією.

Зауваження. При ізометричному відображенні геодезичні лінії переходять у геодезичні, оскільки геодезична кривина визначається лише першою квадратичною формою поверхні.

Приклади. 1. На площині геодезичними лініями є прямі, на сфері — великі кола.

2. Розглянемо циліндр обертання. Розгорнемо його на площину, розрізавши вздовж твірної. Геодезичними на площині є прямі. Будь-яка пряма l на розгортці циліндра має ту властивість, що вона утворює сталий кут із твірними циліндра. Але геодезичні площині при ізометричному відображенні перейдуть у геодезичні циліндра. Отже, геодезичні лінії на циліндрі — це криві, які утворюють сталий кут із твірними, тобто гвинтові лінії, прямолінійні твірні, кола, що перпендикулярні до твірних.

Задача. Знайти геодезичні лінії на конусі обертання.

Вздовж геодезичних ліній $k_g=0$; тому дорівнює нулю проекція вектора кривини k_v геодезичної лінії на дотичну площину поверхні. Отже, крива на поверхні є геодезичною лінією тоді і тільки тоді, коли в кожній точці головна нормаль кривої колінеарна нормалі до поверхні.

Знайдемо рівняння геодезичних ліній. Вздовж геодезичних ліній $r=r(s)$ проекція вектора кривини r''_{ss} кривої на дотичну площину дорівнює нулю. Отже, в розкладі вектора r'' по базису (r_1, r_2, n) дорівнюють нулю коефіцієнти при r_1, r_2 . Таким чином, із рівності (2.17) випливає, що диференціальні рівняння геодезичних ліній мають вигляд

$$\begin{cases} \frac{d^2 u^1}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^1}{ds} + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + \Gamma_{22}^1 \frac{du^2}{ds} \frac{du^2}{ds} = 0; \\ \frac{d^2 u^2}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \frac{du^1}{ds} \frac{du^1}{ds} + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du^1}{ds} \frac{du^2}{ds} + \Gamma_{22}^2 \frac{du^2}{ds} \frac{du^2}{ds} = 0. \end{cases} \quad (2.19)$$

Теорема 15. Через кожну точку C^2 -регулярної поверхні в будь-якому напрямку проходить єдина геодезична лінія.

Доведення. Геодезичні лінії визначаються із системи двох диференціальних рівнянь другого порядку. Із теорії диференціальних рівнянь відомо, що коли функ-

ці Γ_{ij}^k неперервні, то при заданих початкових умовах

$$u_0^1 = u^1(0); u_0^2 = u^2(0); \left. \frac{du^1}{ds} \right|_{s=0} = a^1; \left. \frac{du^2}{ds} \right|_{s=0} = a^2$$

існує єдиний розв'язок $u^1 = u^1(s); u^2 = u^2(s)$ системи рівнянь (2.19). Цей розв'язок задає криву на поверхні, що проходить через точку $u_0^1 = u^1(0); u_0^2 = u^2(0)$, і має в цій точці напрямок

$$\left. \frac{du^1}{ds} \right|_{s=0} = a^1; \left. \frac{du^2}{ds} \right|_{s=0} = a^2.$$

Приклади. 1. Розглянемо площину. Через будь-яку точку в заданому напрямку проходить єдина пряма — геодезична площини.

2. Знайдемо геодезичні лінії на сфері. Відомо, що великі кола є геодезичними лініями сфери. Через будь-яку точку сфери в будь-якому напрямку проходить велике коло. Із теореми 15 випливає, що інших геодезичних, крім великих кіл, на сфері немає.

3. Розглянемо поверхню обертання. Вздовж меридіана його головна нормаль колінеарна нормалі до поверхні. Отже, меридіани на довільній поверхні обертання є геодезичними лініями.

Приклад 3 є окремим випадком більш загального твердження.

Твердження. Якщо площина π є площиною симетрії регулярної поверхні, то лінія перерізу поверхні площиною π є геодезичною.

Доведення. Лінія перерізу l поверхні площиною π — плоска крива. Тому достатньо довести, що вздовж цієї кривої нормаль до поверхні лежить у площині π . Здійснимо відображення симетрії відносно площини π . Поверхня при цьому перейде в себе, а нормаль n — в нормаль n' , що симетрична n відносно площини π . З огляду на регулярність поверхні, нормалі n та n' повинні співпадати. Тому нормаль поверхні співпадає з головною нормаллю кривої l .

Приклад. Розглянемо еліпсоїд, що заданий рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Координатні площини є його площинами симетрії. Отже, еліпси

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ x = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

будуть замкненими геодезичними лініями еліпсоїда. Відомо, що коли a, b, c попарно різні, то інших замкнених геодезичних ліній на еліпсоїді немає.

Пуанкаре, досліджуючи задачу трьох тіл у механіці, поставив питання: скільки замкнених геодезичних лежить на замкненій опуклій поверхні? Він навів не досить строге доведення того, що на будь-якій опуклій поверхні є принаймні одна замкнена геодезична. В 1932 р. Люстерник та Шнірельман довели, що на замкненій опуклій регулярній поверхні лежить три замкнені геодезичні.

2.9.1. Механічний зміст геодезичних

Нехай на площині під дією сили F рухається матеріальна точка, маса якої дорівнює m . Траєкторія $r=r(t)$ руху точки визначається із другого закону Ньютона:

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F.$$

Із нього випливає, що коли на точку не діють ніякі сили, то вона рухається рівномірно і прямолінійно.

Розглянемо тепер довільну регулярну поверхню. Нехай на ній є матеріальна точка маси m , на яку діють сили так, що точка рухається по поверхні. З'ясуємо, по якій траєкторії рухається точка. Нехай $r=r(u^1, u^2)$ — радіус-вектор поверхні, $\begin{cases} u^1 = u^1(t); \\ u^2 = u^2(t) \end{cases}$ — рівняння траєкторії руху точки в криволінійних координатах поверхні, $r = r(u^1(t), u^2(t))$ — радіус-вектор траєкторії. На точку діє сила $F + \lambda n$, де F — вектор сили, що лежить в дотичній площині, а λn — реакція опори. Тому

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F + \lambda n. \quad (2.20)$$

Згадаємо, що

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= r_1 \frac{du^1}{dt} + r_2 \frac{du^2}{dt}; \\ \frac{d^2 r}{dt^2} &= \left(\frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) r_1 + \left(\frac{d^2 u^2}{dt^2} + \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) r_2 + \\ &\quad + b_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} n. \end{aligned}$$

Сила F лежить у дотичній площині поверхні, отже,

$$F = F^1 r_1 + F^2 r_2.$$

Підставимо знайдені для F та $\frac{d^2 r}{dt^2}$ вирази у формулу (2.20) і одержимо:

$$m \left(\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} \right) = F^k, \quad k = 1, 2. \quad (2.21)$$

Зауваження. Нехай дана поверхня — площина, u^i , x^3 — прямокутні декартові координати. Тоді $\Gamma_{ij}^k = 0$ і останні рівняння — це рівняння Ньютона руху матеріальної точки. Таким чином, рівняння (2.21) є узагальненням рівняння руху Ньютона.

Розглянемо окремий випадок руху точки по поверхні, коли $F=0$, тобто на точку діє тільки реакція опори. В цьому випадку рівняння (2.21) набере вигляду

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0. \quad (2.22)$$

Тут параметр t — час. Перейдемо до природного параметру s . Тоді

$$r'_t = r'_s \frac{ds}{dt}; \quad r''_t = \frac{d^2 s}{dt^2} r'_s + r''_s \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{d^2 s}{dt^2} \tau + kv \left(\frac{ds}{dt} \right)^2.$$

Із формули (2.20) випливає, що $r''_t = \frac{\lambda}{m} n$. Порівнюючи останні дві рівності, одержимо:

$$\frac{d^2 s}{dt^2} \tau + kv \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{\lambda}{m} n.$$

Помноживши обидві частини останньої рівності скалярно на вектор τ , знайдемо, що $\frac{d^2 s}{dt^2} = 0$, звідси $s = ct$, тобто параметри s та t пропорційні.

Таким чином, рівняння (2.22) можна записати так:

$$\frac{d^2 u^k}{ds^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Це рівняння геодезичних ліній.

Отже, якщо на матеріальну точку, що лежить на поверхні, не діють зовнішні сили, а діє тільки реакція опори, то точка рухається по геодезичній, а швидкість руху точки стала.

Прямі на площині мають ту властивість, що відрізок прямої коротший за будь-який відрізок іншої кривої, що з'єднує дві дані точки. Тобто геодезичні на площині є найкоротшими. Природно виникає задача знаходжен-

ня найкоротшої лінії на регулярній поверхні, що з'єднує дві задані точки поверхні.

Відомо, що необхідною умовою мінімуму функції кількох змінних $z = f(x^1, \dots, x^n)$ є рівність нулю похідних f_{x^i} , ($i = 1, \dots, n$). Справді, нехай в точці (x_0^1, \dots, x_0^n) функція $z = f(x^1, \dots, x^n)$ набуває найменшого значення. Розглянемо функцію $z(\varepsilon) = f(x_0^1 + \varepsilon y^1, \dots,$

$x_0^n + \varepsilon y^n)$, де y^1, \dots, y^n — деякі числа. Це функція однієї змінної, що набуває найменшого значення при $\varepsilon = 0$. Отже,

$$z'_\varepsilon(0) = 0, \text{ або } f_{x^i} y^i |_{\varepsilon=0} = 0.$$

Із останньої рівності випливає, що $f_{x^i} = 0$, оскільки y^1, \dots, y^n — довільні числа.

Використаємо цей підхід для знаходження необхідної умови мінімуму в більш загальній ситуації. Нехай L — найкоротша, що лежить на C^2 — регулярній поверхні $r = r(u^1, u^2)$ і з'єднує точки P_1, P_2 . Можна показати, що крива L гладка. Нехай її рівняння в природній параметризації

$$\begin{cases} u^1 = u^1(s); \\ u^2 = u^2(s). \end{cases}$$

Точка P_1 відповідає значенню параметра s_1 , а точка P_2 — значенню s_2 . Тоді довжина кривої L

$$\sigma(L) = s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds.$$

Позначимо через $L(\varepsilon)$ близькі до L криві, що лежать на поверхні і з'єднують точки P_1, P_2 (рис. 2.27). Вони задані рівняннями

$$\begin{cases} u^1 = u^1(s) + \varepsilon \eta^1(s); \\ u^2 = u^2(s) + \varepsilon \eta^2(s), \end{cases} L(0) = L,$$

де η^1, η^2 — довільні регулярні функції такі, що $\eta^i(s^1) = \eta^i(s^2) = 0$, $i = 1, 2$. Зауважимо, що для кривої $L(\varepsilon)$ параметр s не є природним параметром. Довжина кривої $\sigma(L(\varepsilon))$ обчислюється за формулою

$$\sigma(L(\varepsilon)) = \sigma(\varepsilon) =$$

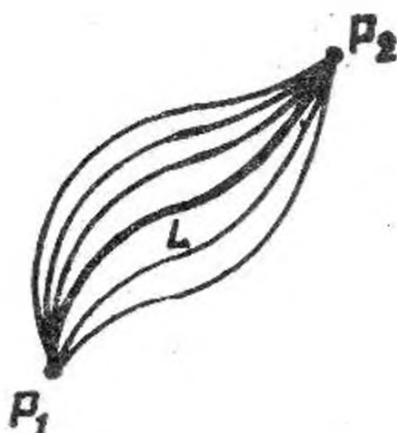


Рис. 2.27

$$= \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij}(u(s) + \varepsilon \eta(s)) \left(\frac{du^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^i}{ds} \right) \left(\frac{du^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^j}{ds} \right)} ds.$$

Щоб довжина кривої L була мінімальною, необхідно, щоб $\sigma'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$. Звідси випливає, що

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(\frac{\partial g_{ij}(u(s))}{\partial u^k} \eta^k(s) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \right. \\ \left. + g_{ij}(u(s)) \frac{du^i}{ds} \frac{d\eta^j}{ds} + g_{ij}(u(s)) \frac{d\eta^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) ds = 0,$$

оскільки

$$\sqrt{g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds}} = 1.$$

Перетворимо підінтегральний вираз. Інтегруючи по частинах, одержимо, що

$$\int_{s_1}^{s_2} g_{ij} \frac{du^i}{ds} \frac{d\eta^j}{ds} ds = g_{ij} \frac{du^i}{ds} \eta^j \Big|_{s_1}^{s_2} - \\ - \int_{s_1}^{s_2} \left(g_{ij} \frac{d^2 u^j}{ds^2} + \frac{dg_{ij}}{du^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \eta^i ds = \\ = - \int_{s_1}^{s_2} \left(g_{ij} \frac{d^2 u^j}{ds^2} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \frac{du^k}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \eta^i ds,$$

оскільки $\eta^i(s^1) = \eta^i(s^2) = 0$. Тому необхідну умову мінімуму можна записати так:

$$\int_{s_1}^{s_2} \left[\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \right) \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} - \right. \\ \left. - g_{kj} \frac{d^2 u^j}{ds^2} - g_{ki} \frac{d^2 u^i}{ds^2} \right] \eta^k ds = 0,$$

або

$$\int_{s_1}^{s_2} \left(g_{ki} \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ij,k} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) \eta^k ds = 0.$$

Остання рівність правильна при будь-яких η^k , $k = 1, 2$, що задовольняють умові $\eta^k(s^1) = \eta^k(s^2) = 0$, тому із неї випливає, що

$$g_{kl} \frac{d^2 u^l}{ds^2} + \Gamma_{ij,k} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Домножимо обидві частини одержаного рівняння на g^{kl} , де g^{kl} — елементи матриці G^{-1} , оберненої до матриці $G = (g_{ij})$:

$$g^{kl} \left(g_{ki} \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ij,k} \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right) = 0,$$

звідки, підсумовуючи по k , одержимо

$$\frac{1}{2} \delta_j^i \frac{d^2 u^j}{ds^2} + \frac{1}{2} \delta_i^j \frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ij}^i \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Таким чином, необхідна умова мінімуму довжини кривої L набуває вигляду

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \Gamma_{ij}^i \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0,$$

а це — рівняння геодезичних ліній поверхні. Отже, якщо на кривій, що з'єднує дві точки регулярної поверхні, досягається мінімум довжини, то це — геодезична лінія.

Зауваження. Першим геодезичні лінії розглядав Бернуллі в 1697 році. Рівняння геодезичних ліній були введені Ейлером.

2.9.2. Півгеодезична система координат

Перша квадратична форма площини в прямокутних координатах має вигляд

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

Координатні лінії $u = \text{const}$ та $v = \text{const}$ — це прямі, тобто геодезичні лінії.

Перша квадратична форма одиничної сфери, якщо координатні лінії — паралелі та меридіани, записується так:

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u dv^2.$$

Крива, що задана рівнянням $v = \text{const}$, є меридіаном сфери, тобто геодезичною лінією, а u — довжина дуги на цьому меридіані.

Розглянемо загальний випадок. Нехай метрика поверхні має вигляд

$$ds^2 = (du^1)^2 + g(u^1, u^2)(du^2)^2.$$

Тоді матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \text{ тому } \Gamma_{11,1} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^1} = 0;$$

$$\Gamma_{11,2} = \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} = 0.$$

Матриця

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{g} \end{pmatrix}, \text{ отже } \Gamma_{11}^1 = g^{11} \Gamma_{11,1} = 0; \Gamma_{11}^2 = g^{22} \Gamma_{11,2} = 0.$$

Отже, $\Gamma_{11}^k = 0$ і рівняння кривих $\begin{cases} u^1 = s; \\ u^2 = \text{const} \end{cases}$ задовольняють рівнянням геодезичних:

$$\frac{d^2 u^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Зауважимо, що координатні лінії утворюють ортогональну мережу. Тому поверхня параметризована таким чином: на поверхні обрана регулярна лінія, яка називається базою, і через кожну точку цієї лінії проведена геодезична, що перпендикулярна до неї. Одержана система координат називається півгеодезичною.

Раніше уже фактично розглядалася півгеодезична система координат, коли на площині вводилися координати, що зв'язані з довільною плоскою регулярною кривою. Тоді на площині фіксувалася деяка регулярна крива й проводилися нормалі до неї в кожній точці. Але прямі — це геодезичні лінії площини, тому система координат на площині, зв'язана з кривою, є півгеодезичною. Вище доведено, що в околі кривої ця система координат регулярна.

Природно виникає запитання: чи можна в околі довільної точки регулярної кривої на поверхні ввести півгеодезичну систему координат? Нехай L — регулярна крива на поверхні, параметр v^2 є природним параметром кривої L . Проведемо через кожну точку кривої L перпендикулярно до неї геодезичну. Нехай параметр v^1 є природним параметром геодезичної, причому $v^1 = 0$ в точках кривої L . Доведемо, що v^1, v^2 є регулярними криволінійними координатами поверхні і в них перша квадратична форма має вигляд $ds^2 = (dv^1)^2 + g(v^1, v^2)(dv^2)^2$.

Теорема 16. Якщо метрика поверхні належить класу C^2 , тобто існує така параметризація поверхні, що $g_{ij} \in C^2$, і крива L , що лежить на поверхні, регулярна класу C^2 , то на поверхні можна побудувати півгеодезичну систему координат, базою якої буде крива L .

Доведення. Перша квадратична форма поверхні має вигляд

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2,$$

де $g_{ij} \in C^2$. Нехай крива L , що лежить на поверхні, задана системою рівнянь

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^2); \\ u^2 = u^2(v^2), \end{cases}$$

де v^2 — природний параметр кривої, $u^\alpha \in C^2$, $\alpha = 1, 2$. Отже,

$$ds^2 = g_{11} \left(\frac{du^1}{dv^2} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du^1}{dv^2} \frac{du^2}{dv^2} + g_{22} \left(\frac{du^2}{dv^2} \right)^2 = 1.$$

Через кожну точку кривої L потрібно провести геодезичну лінію, що перпендикулярна до L . Позначимо через v^1 природний параметр на кожній геодезичній. Нехай в точках кривої L параметр $v^1 = 0$. Дотичний вектор

$$\left(\frac{du^1}{dv^1}, \frac{du^2}{dv^1} \right) \Big|_{v^1=0} = (a^1(v^2), a^2(v^2))$$

до геодезичної повинен бути перпендикулярним до дотичного вектора кривої L , тобто $g_{ij} \frac{du^i}{dv^2} a^j = 0$, а його довжина повинна дорівнювати одиниці, тобто $g_{ij} a^i a^j = 1$.

Таким чином, сім'я геодезичних, що перпендикулярні до кривої L , задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\frac{d^2 u^\alpha}{(dv^1)^2} + \Gamma_{ij}^\alpha \frac{du^i}{dv^1} \frac{du^j}{dv^1} = 0$$

в початковими умовами $u^i(0, v^2) = u^i(v^2)$, $\frac{du^i}{dv^1}(0, v^2) = a^i(v^2)$, $i = 1, 2$, які задовольняють рівностям

$$\begin{cases} g_{ij} \frac{du^i}{dv^2} \frac{du^j}{dv^2} = 1; \\ g_{ij} \frac{du^i}{dv^2} a^j = 0; \\ g_{ij} a^i a^j = 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

Із останніх двох рівнянь системи (2.23) випливає, що функції $a^i = a^i(v^2)$ регулярні. Окрім того, $\Gamma_{ij}^\alpha \in C^1$, оскільки

$g_{ij} \in C^2$. Із теорії диференціальних рівнянь відомо, що розв'язки диференціальних рівнянь регулярно залежать від початкових умов та параметрів.

Отже, розв'язок системи диференціальних рівнянь геодезичних ліній з початковими умовами (2.23) існує, він регулярний і має вигляд

$$\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, u^1(v^2), u^2(v^2), a^1(v^2), a^2(v^2)) = u^1(v^1, v^2); \\ u^2 = u^2(v^1, u^1(v^2), u^2(v^2), a^1(v^2), a^2(v^2)) = u^2(v^1, v^2). \end{cases}$$

Фіксуємо v^2 , одержуємо рівняння геодезичної лінії.

Якобіан відображення $\begin{cases} u^1 = u^1(v^1, v^2); \\ u^2 = u^2(v^1, v^2) \end{cases}$ в точці $v^1 = 0, v^2 = v^2$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u^1(0, v^2)}{\partial v^1} & \frac{\partial u^2(0, v^2)}{\partial v^1} \\ \frac{\partial u^1(0, v^2)}{\partial v^2} & \frac{\partial u^2(0, v^2)}{\partial v^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1(0, v^2) & a^2(0, v^2) \\ \frac{\partial u^1(0, v^2)}{\partial v^2} & \frac{\partial u^2(0, v^2)}{\partial v^2} \end{vmatrix} \neq 0,$$

оскільки його рядки є взаємно ортогональними векторами.

Отже, в околі кожної точки кривої L однозначно визначені обернені регулярні функції $v^1 = v^1(u^1, u^2)$, $v^2 = v^2(u^1, u^2)$, тобто геодезичні, що проведені з близьких точок, не перетинаються «поблизу» кривої L .

Таким чином, доведено, що криволінійні координати v^1, v^2 регулярні в околі довільної точки кривої L . З'ясуємо, якого вигляду набирає перша квадратична форма поверхні в координатах v^1, v^2 . У загальному вигляді

$$ds^2 = g_{11}(v^1, v^2)(dv^1)^2 + 2g_{12}(v^1, v^2)dv^1 dv^2 + g_{22}(v^1, v^2)(dv^2)^2,$$

де $g_{ij}(v^1, v^2)$ — регулярні функції. Підставимо в цю формулу $v^2 = \text{const}$. Одержимо: $g_{11}(v^1, v^2) = 1$, оскільки $v^1 \rightarrow$ природний параметр. Рівняння $v^2 = \text{const}$ задає геодезичну лінію, тому $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{11}^2 = 0$, звідси $\Gamma_{11,1} = \Gamma_{11,2} = 0$; отже, $\frac{\partial g_{12}}{\partial v^1} = 0$ і $g_{12} = g_{12}(v^2)$. За побудовою $g_{12} = 0$ вздовж кривої L , тобто $g_{12}(0, v^2) = 0$, тому $g_{12}(v^1, v^2) \equiv 0$.

Отже, в системі координат (v^1, v^2) перша квадратична форма поверхні має вигляд

$$ds^2 = (dv^1)^2 + g(v^1, v^2)(dv^2)^2.$$

Зауваження. 1. Із того, що v^2 — природний параметр кривої L , випливає, що $g(0, v^2) = 1$.

2. У півгеодезичній системі координат з базовою геодезичною кривою L матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}, \quad g(0, v^2) = 1,$$

тому

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial v^k}(0, v^2) = 0.$$

Отже, $\Gamma_{ij,k}(0, v^2) = 0$, звідси випливає, що $\Gamma_{ij}^k(0, v^2) = g^{ks} \Gamma_{ij,s} = 0$.

3. Прямокутна декартова система координат на площині є півгеодезичною системою координат. Таким чином, півгеодезичну систему координат на довільній регулярній поверхні можна розглядати як узагальнення прямокутної декартової системи координат на площині.

Задача. Довести, що коли крива L — геодезична лінія, то

$$\left. \frac{\partial g(v^1, v^2)}{\partial v^1} \right|_{(0,0)} = 0.$$

Нехай на площині задана полярна система координат. Одна сім'я координатних ліній складається із променів з початком у фіксованій точці O площини, друга — із ортогональних цим променям кіл. Метрика площини в полярній системі координат має вигляд

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Нагадаємо, що полярна система координат регулярна скрізь, окрім початку координат. Матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Якщо $r = 0$, квадратична форма ds^2 перестає бути додатно визначеною.

Систему координат, що подібна полярній системі координат на площині, можна ввести на довільній регулярній поверхні. Зафіксуємо на поверхні точку P і проведемо із неї геодезичні у всіх напрямках. Нехай r — довжина дуги на геодезичній, φ — кут, який утворюють геодезичні в точці P з фіксованим напрямком. Можна довести, що в околі точки P така система координат буде регулярна

скрізь, окрім точки P , і перша квадратична форма поверхні в такій системі координат буде мати вигляд

$$ds^2 = dr^2 + g(r, \varphi) d\varphi^2,$$

причому

$$g(0, \varphi) = 0, \quad \left. \frac{\partial V g(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{(0, 0)} = 1.$$

Якщо $r=0$, то перша квадратична форма поверхні не буде додатно визначеною формою. Така система координат на довільній регулярній поверхні називається полярною системою координат.

Теорема 17. *Геодезична на досить короткому відрізку є найкоротшою.*

Доведення. Нехай P — довільна точка поверхні; γ — геодезична, що проходить через точку P . Проведемо через точку P геодезичну лінію L , що перпендикулярна до лінії γ , та побудуємо півгеодезичну систему координат, базою якої є крива L . Лінія γ входить в сім'ю геодезичних, що ортогональні кривій L . Нехай на кривій L змінюється параметр v^2 , на ортогональних до L геодезичних — параметр v^1 , а γ — це геодезична, на якій $v^2=0$. За теоремою 16 існує околість V точки P , в якому ця система координат регулярна. Перша квадратична форма поверхні в цій системі координат має вигляд

$$ds^2 = (dv^1)^2 + g(v^1, v^2) (dv^2)^2.$$

Нехай точки P_1, P_2 , що лежать на геодезичній γ , належать околість V . Крива γ може бути задана системою рівнянь

$$\begin{cases} v^1 = s; \\ v^2 = 0. \end{cases}$$

Нехай точці P_1 відповідає значення параметра s_1 , а точці P_2 — значення s_2 . Тоді довжина дуги кривої γ , що з'єднує точки P_1, P_2 , становитиме $\sigma(\gamma) = s_2 - s_1$. Розглянемо тепер довільну регулярну криву $\bar{\gamma}$, що з'єднує точки P_1, P_2 і лежить в околість V . Нехай криву $\bar{\gamma}$ задає система рівнянь

$$\begin{cases} v^1 = v^1(t); \\ v^2 = v^2(t). \end{cases}$$

Довжина $\bar{\gamma}$ буде

$$\sigma(\bar{\gamma}) = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{\left(\frac{dv^1}{dt}\right)^2 + g(v^1(t), v^2(t)) \left(\frac{dv^2}{dt}\right)^2} dt \geq$$

$$\geq \int_{P_1}^{P_2} \left| \frac{dv^3}{dt} \right| dt \geq \left| \int_{P_1}^{P_2} dv^1 \right| = s_2 - s_1 = \sigma(\gamma).$$

Зауважимо, що рівність досягається тоді і тільки тоді, коли $v^2 = 0$, тобто коли крива $\bar{\gamma}$ співпадає з геодезичною γ . Таким чином, доведено, що серед кривих, які лежать в околі V , найкоротшою, що з'єднує точки P_1 та P_2 , буде геодезична. Взагалі кажучи, не виключено, що крива найменшої довжини, що з'єднує точки P_1, P_2 , виходить із околу V . Якщо точки P_1, P_2 досить близькі, то це неможливо. Справді, розглянемо на поверхні круг радіуса ε з центром в точці P . Нехай він цілком лежить в області V , де введена півгеодезична система координат. Нехай відстань від точок P_1, P_2 до точки P менше або дорівнює $\frac{\varepsilon}{2}$, а крива $\bar{\gamma}$, що з'єднує точки P_1, P_2 , виходить за межі області V . Позначимо через Q_1 та Q_2 точки перетину кривої $\bar{\gamma}$ та межі круга (рис. 2.28). Очевидно, що довжини дуг кривої $\bar{\gamma}$, які з'єднують точки P_1, Q_1 та P_2, Q_2 , більше або дорівнюють $\frac{\varepsilon}{2}$. Отже, довжина кривої $\bar{\gamma}$ буде $\sigma(\bar{\gamma}) > \varepsilon$.

2.9.3. Друга варіація довжини кривої

Із курсу математичного аналізу відомо, що необхідною умовою екстремуму функції багатьох змінних $z = f(x^1, \dots, x^n)$ в точці (x_0^1, \dots, x_0^n) є $f_{x^i}(x_0^1, \dots, x_0^n) = 0, i = 1, \dots, n$. При цьому достатньою умовою мінімуму є

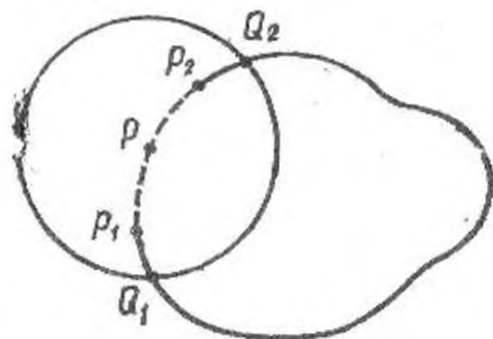


Рис. 2.28

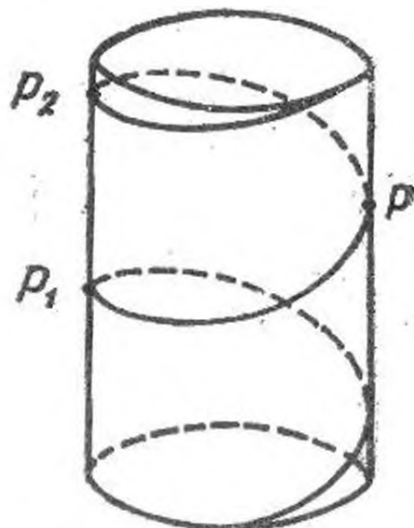


Рис. 2.29

додатна визначеність форми $f_{x^i x^j}(x_0^1, \dots, x_0^n) y^i y^j$. Справді, розглянемо значення функції $f(x^1, \dots, x^n)$ в точках $(x_0^1 + \varepsilon y^1, \dots, x_0^n + \varepsilon y^n)$, близьких до точки (x_0^1, \dots, x_0^n) . Функція $z(\varepsilon) = f(x_0^1 + \varepsilon y^1, \dots, x_0^n + \varepsilon y^n)$ — це функція однієї змінної. Необхідною умовою мінімуму цієї функції в точці $\varepsilon = 0$ є $z'(0) = 0$, достатньою — $z''(0) > 0$. Оскільки $z''(0) = f_{x^i x^j}(x_0^1, \dots, x_0^n) y^i y^j$ і $z''(0) > 0$ повинна бути достатньо визначеною при будь-якому наборі (y^1, \dots, y^n) , то умова $z''(0) > 0$ рівносильна тому, що квадратична форма $f_{x^i x^j} y^i y^j$ є додатно визначеною.

Подібний підхід можна застосувати для знаходження необхідних та достатніх умов мінімуму функціоналу $\sigma = \sigma(L)$, що ставить у відповідність кривій L її довжину.

Знайдемо достатні умови того, що геодезична лінія — найкоротша серед усіх близьких кривих. Нехай точки P_1, P_2 лежать на поверхні з першою квадратичною формою

$$ds^2 = g_{11} (du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22} (du^2)^2.$$

Рівняння геодезичної L , що з'єднує точки P_1 та P_2 , мають вигляд

$$\begin{cases} u^1 = u^1(s); \\ u^2 = u^2(s), \end{cases}$$

де s — природний параметр кривої, причому $(u^1(s_1), u^2(s_1))$ — координати точки P_1 , $(u^1(s_2), u^2(s_2))$ — координати точки P_2 на поверхні. Розглянемо сім'ю близьких до L кривих $L(\varepsilon)$, які з'єднують точки P_1 та P_2 і можуть бути задані рівняннями

$$\begin{cases} u^1 = u^1(s) + \varepsilon \eta^1(s); \\ u^2 = u^2(s) + \varepsilon \eta^2(s), \end{cases} \quad L(0) = L,$$

де $\eta^i(s)$ — регулярні функції і $\eta^1(s_1) = \eta^2(s_1) = \eta^1(s_2) = \eta^2(s_2) = 0$. Зауважимо, що s не є природним параметром кривої $L(\varepsilon)$, це — природний параметр кривої $L = L(0)$. Довжина кривої сім'ї є функцією параметра ε , вона обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \sigma(L(\varepsilon)) &= \sigma(\varepsilon) = \\ &= \int_{s_1}^{s_2} \sqrt{g_{ij}(u^1 + \varepsilon \eta^1, u^2 + \varepsilon \eta^2) \left(\frac{du^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^i}{ds} \right) \left(\frac{du^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^j}{ds} \right)} ds. \end{aligned}$$

Достатньою умовою того, що крива $L(0)$ має мінімальну довжину серед усіх близьких кривих $L(\varepsilon)$, є $\sigma''(0) > 0$ при будь-яких η^1, η^2 .

Знайдемо $\sigma''(0)$. Будемо вважати, що на поверхні введена півгеодезична система координат, базою якої є геодезична $L(0)$. Тоді рівняння кривої $L(0)$ мають вигляд $\begin{cases} u^1 = 0; \\ u^2 = s. \end{cases}$ Вздовж кривої $L(0)$, як було показано раніше,

$$g_{ij} = \delta_{ij} \text{ і } \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}(0, u^2) = 0.$$

Дотичний вектор кривої $L(0)$ має координати

$$\left(\frac{du^1}{ds}, \frac{du^2}{ds} \right) = (0, 1).$$

Раніше наведено запис гауссової кривини K через символи Крістоффеля (2.14) та коефіцієнти першої квадратичної форми поверхні:

$$K = \frac{\frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} - \Gamma_{11}^s \Gamma_{22,s} + \Gamma_{12,s} \Gamma_{12}^s}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

У півгеодезичній системі координат вздовж кривої $L(0)$ буде $\Gamma_{11}^s = \Gamma_{12}^s = 0$ і тому гауссова кривина поверхні

$$K = \frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} - \frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1}.$$

Згадаємо, що $\Gamma_{12,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$. Тому

$$\frac{\partial \Gamma_{12,2}}{\partial u^1} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

У півгеодезичній системі координат $\Gamma_{11,2} = 0$ і $\frac{\partial \Gamma_{11,2}}{\partial u^2} = 0$. Отже, вздовж кривої $L(0)$ гауссова кривина

$$K = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

Позначимо

$$\sqrt{g_{ij}(u^1 + \varepsilon \eta^1, u^2 + \varepsilon \eta^2) \left(\frac{du^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^i}{ds} \right) \left(\frac{du^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^j}{ds} \right)}$$

через L . Тоді

$$\sigma'(\varepsilon) = \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{2L} \left[\frac{\partial g_{ij}(u + \varepsilon \eta)}{\partial u^k} \eta^k \left(\frac{du^i}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^i}{ds} \right) \left(\frac{du^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^j}{ds} \right) + \right. \\ \left. + 2g_{ij}(u + \varepsilon \eta) \frac{d\eta^i}{ds} \left(\frac{du^j}{ds} + \varepsilon \frac{d\eta^j}{ds} \right) \right] ds;$$

$$\sigma''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ -\frac{1}{4L_0^3} \left[\frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^k} \eta^k \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + 2g_{ij}(u) \frac{d\eta^i}{ds} \frac{du^j}{ds} \right]^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2L_0} \left[\frac{\partial^2 g_{ij}(u)}{\partial u^k \partial u^l} \eta^k \eta^l \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + 2 \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^k} \eta^k \frac{d\eta^i}{ds} \frac{du^j}{ds} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial g_{ij}(u)}{\partial u^k} \eta^k \frac{du^i}{ds} \frac{d\eta^j}{ds} + 2g_{ij}(u) \frac{d\eta^i}{ds} \frac{d\eta^j}{ds} \right] \right\} ds.$$

Зауважимо, що при $\varepsilon = 0$:

$$L = 1; \quad \frac{\partial g_{ij}(0, u^2)}{\partial u^k} = 0; \quad g_{ij}(u^1, u^2) = \delta_{ij}; \quad \frac{du^1}{ds} = 0; \quad \frac{du^2}{ds} = 0.$$

Тому

$$\sigma''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} \left\{ -\frac{1}{4} \left(2 \frac{d\eta}{ds} \right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{22}(u^1, u^2)}{\partial u^k \partial u^l} \eta^k \eta^l + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \left(\frac{d\eta^1}{ds} \right)^2 + 2 \left(\frac{d\eta^2}{ds} \right)^2 \right] \right\} ds = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}(u^1, u^2)}{\partial u^k \partial u^l} \eta^k \eta^l + \left(\frac{d\eta^1}{ds} \right)^2 \right] ds.$$

Оскільки

$$\frac{\partial g_{22}(0, u^2)}{\partial u^1} = \frac{\partial g_{22}(0, u^2)}{\partial u^2} = 0$$

вздовж кривої $L(0)$, то

$$\frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^2} = \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^2 \partial u^2} = 0.$$

Тому

$$\sigma''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u^1 \partial u^1} (\eta^1)^2 + \left(\frac{\partial \eta^1}{\partial s} \right)^2 \right] ds.$$

Згадаємо, що вздовж базової кривої півгеодезичної системи координат гауссова кривина

$$K = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{g}_{22}}{\partial u^1 \partial u^1}.$$

Якщо позначити η^1 через y , то одержимо, що

$$\sigma''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{s_1}^{s_2} [(y')^2 - Ky^2] ds. \quad (2.24)$$

Отже, якщо цей інтеграл більше нуля при будь-якому y , що задовольняє умові $y(s_1) = y(s_2) = 0$, то крива $L(0)$ є найкоротшою серед усіх близьких кривих.

Запишемо інтеграл (2.24) у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0} &= \int_{s_1}^{s_2} (y')^2 ds - \int_{s_1}^{s_2} Ky^2 ds = \\ &= yy' \Big|_{s_1}^{s_2} - \int_{s_1}^{s_2} yy'' ds - \int_{s_1}^{s_2} Ky^2 ds = - \int_{s_1}^{s_2} y(y'' + Ky) ds. \end{aligned}$$

Таким чином, знак $\sigma''(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}$ протилежний знаку

$$\int_{s_1}^{s_2} y(y'' + Ky) ds.$$

А знак цього інтеграла, виявляється, суттєво залежить від того, як розташовані нулі розв'язку $y(s)$ диференціального рівняння $y'' + Ky = 0$. Рівняння $y'' + Ky = 0$ називається рівнянням Якобі.

Якщо $K \leq 0$, то $(y')^2 - Ky^2 > 0$, тобто на поверхнях не-додатної гауссової кривини серед близьких кривих геодезична завжди є найкоротшою. Умова «серед близьких кривих» суттєва.

Нехай $y(s)$ — досить регулярна функція. Зауважимо, що $(y')^2 > 0$, а $Ky^2 = 0$ при $s = s_1$ та $s = s_2$. Тому, якщо $K > 0$, то на малому відрізку $(y')^2 - Ky^2 > 0$ і геодезична буде найкоротшою серед усіх близьких кривих.

Приклади. 1. Розглянемо сферу. Геодезичні на сфері — це дуги великих кіл. Легко довести, що дуга великого кола, що менше або дорівнює півколу, найкоротша. Будь-які дві точки на сфері з'єднує зліченна кількість геодезичних.

2. Розглянемо прямий круговий циліндр; геодезичні лінії на ньому — гвинтові лінії та прямі. Нехай точки P_1, P_2 лежать на твірній циліндра. Ці точки з'єднують гвинтова лінія та відрізок, що лежить на циліндрі (рис. 2.29). Серед близьких до гвинтової лінії вона є найкоротшою. Але на циліндрі в цілому вона буде мати найменшу довжину серед усіх кривих, що з'єднують точки P_1, P_2 ; найкоротша — відрізок P_1P_2 .

Зауважимо (без доведення): коли поверхня гомеоморфна площині та її гауссова кривина $K \leq 0$, то будь-які дві точки поверхні з'єднує єдина геодезична.

Гауссова кривина сфери $K > 0$, і будь-які дві точки сфери можуть бути з'єднані нескінченною кількістю геодезичних. Гауссова кривина циліндра $K = 0$, циліндр не гомеоморфний площині і будь-які дві точки циліндра з'єднує не єдина геодезична.

Поняття геодезичних — це фундаментальне поняття як математики, так і фізики.

Приклади. 1. Оболонки, які витримують велику температуру, роблять із міцних матеріалів, що називаються композитами. Щоб оболонки витримували високу температуру, композит потрібно наносити так, щоб його волокна йшли по геодезичних лініях.

2. Нехай світло поширюється в ізотропному середовищі зі змінною швидкістю $c = c(x^1, x^2)$. Тоді промінь світла поширюється по геодезичних лініях метрики

$$ds^2 = \frac{1}{c^2(x^1, x^2)} ((dx^1)^2 + (dx^2)^2).$$

Задача. Довести, що на поверхні обертання вздовж будь-якої геодезичної лінії виконується співвідношення $\rho \cos \varphi = c$, де ρ — відстань точки геодезичної від осі обертання; φ — кут між геодезичною та паралеллю; c — стала для даної геодезичної (теорема Клеро).

2.10. Мінімальні поверхні

Вище розв'язано задачу знаходження кривої мінімальної довжини серед усіх кривих, що з'єднують дві точки.

Подібну задачу можна поставити для поверхонь. Нехай в просторі задані деяка проста замкнена крива та сім'я регулярних поверхонь, границі яких співпадають із заданою кривою. Яка поверхня сім'ї має найменшу площу?

Знайдемо необхідну умову, якій повинна задовольняти поверхня, що має найменшу площу. Нехай L — гранична крива сімейства поверхонь $F(\varepsilon)$; $F(0)$ — поверхня найменшої площі; $r = r(u^1, u^2)$ — радіус-вектор поверхні $F(0)$; $R = r(u^1, u^2) + \varepsilon f(u^1, u^2)n$ — радіус-вектор поверхні $F(\varepsilon)$, де n — одинична нормаль поверхні $F(0)$, $f(u^1, u^2)|_L = 0$; U — область зміни параметрів u^1, u^2 ; $S(0) =$

$$= \int_U \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du^1 du^2 \text{ — площа поверхні } F(0); S(\varepsilon) = \\ = \int_U \sqrt{g_{11}(\varepsilon)g_{22}(\varepsilon) - g_{12}^2(\varepsilon)} du^1 du^2 \text{ — площа поверхні } F(\varepsilon).$$

Необхідною умовою того, що поверхня $F(0)$ має найменшу площу, є $S'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = 0$ при будь-якій функції $f(u^1, u^2)$, що задовольняє умові $f(u^1, u^2)|_L = 0$.

Введемо позначення:

$$R_i = \frac{\partial R}{\partial u^i}; f_i = \frac{\partial f}{\partial u^i}; r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i}; n_i = \frac{\partial n}{\partial u^i}.$$

Тоді

$$R_1 = r_1 + \varepsilon f n_1 + \varepsilon f_1 n; R_2 = r_2 + \varepsilon f n_2 + \varepsilon f_2 n.$$

Для спрощення обчислень розглянемо випадок, коли на поверхні немає омбілічних точок та точок сплюснення, а координатними лініями на поверхні $F(0)$ є лінії кривини. В такому випадку можна користуватися формулами Родріга:

$$\begin{cases} n_1 = -k_1 r_1; \\ n_2 = -k_2 r_2, \end{cases}$$

де k_1, k_2 — головні кривини поверхні $F(0)$. Тому

$$R_1 = r_1(1 - \varepsilon k_1 f) + \varepsilon f_1 n; R_2 = r_2(1 - \varepsilon k_2 f) + \varepsilon f_2 n;$$

$$g_{11}(\varepsilon) = \langle R_1, R_1 \rangle = g_{11}(1 - \varepsilon k_1 f)^2 + \varepsilon^2 f_1^2;$$

$$g_{12}(\varepsilon) = \langle R_1, R_2 \rangle = g_{12}(1 - \varepsilon k_1 f)(1 - \varepsilon k_2 f) + \varepsilon^2 f_1 f_2;$$

$$g_{22}(\varepsilon) = \langle R_2, R_2 \rangle = g_{22}(1 - \varepsilon k_2 f)^2 + \varepsilon^2 f_2^2.$$

Отже,

$$\begin{aligned} & \sqrt{g_{11}(\varepsilon)g_{22}(\varepsilon) - g_{12}^2(\varepsilon)} = \\ & = \sqrt{(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)(1 - \varepsilon k_1 f)^2 (1 - \varepsilon k_2 f)^2 + o(\varepsilon^2)} = \\ & = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} (1 - \varepsilon(k_1 + k_2)f + o(\varepsilon)). \end{aligned}$$

У результаті маємо

$$\begin{aligned} S(\varepsilon) &= \int_U \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} (1 - \varepsilon(k_1 + k_2)f + o(\varepsilon)) du^1 du^2 = \\ &= \int_{F(0)} (1 - \varepsilon f(k_1 + k_2) + o(\varepsilon)) ds. \end{aligned}$$

Звідси

$$S'(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = - \int_{F(0)} f(k_1 + k_2) ds.$$

Якщо $S'(\epsilon)|_{\epsilon=0} = 0$ для будь-якої функції f , що задовольняє умові $f|_L = 0$, то $k_1 + k_2 = 0$, тобто $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0$.

Таким чином, якщо поверхня має найменшу площу серед усіх поверхонь, що натягнуті на той же самий контур, то її середня кривина дорівнює нулю.

Поверхні, середня кривина яких дорівнює нулю, називаються мінімальними.

Нехай F — мінімальна поверхня. Отже, її середня кривина $H=0$. Звідси $k_1 = -k_2$. Тому гауссова кривина мінімальної поверхні $K \leq 0$.

Приклади. 1. Площина — мінімальна поверхня.

2. Середня кривина гелікоїда дорівнює нулю, гелікоід — мінімальна поверхня.

3. Розглянемо катеноїд, що заданий системою рівнянь

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} u \cos v; \\ y = \operatorname{ch} u \sin v; \\ z = u. \end{cases}$$

Це поверхня обертання. Координатні лінії — паралелі та меридіани — утворюють ортогональну мережу; отже, $g_{12} = 0$ і середня кривина катеноїда

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22}}.$$

Обчислимо коефіцієнти g_{ii} , b_{ii} , $i = 1, 2$. Для цього знайдемо частинні похідні радіус-вектора катеноїда:

$$r_u = (\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, 1), \quad r_v = (-\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, 0);$$

$$r_{uu} = (\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, 0),$$

$$r_{vv} = (-\operatorname{ch} u \cos v, -\operatorname{ch} u \sin v, 0).$$

Отже,

$$g_{11} = \langle r_u, r_u \rangle = \operatorname{sh}^2 u + 1 = \operatorname{ch}^2 u; \quad g_{22} = \langle r_v, r_v \rangle = \operatorname{ch}^2 u;$$

$$b_{11} = \frac{(r_u, r_v, r_{uu})}{|r_u \times r_v|} = \frac{\operatorname{ch}^2 u}{|r_u \times r_v|};$$

$$b_{22} = \frac{(r_u, r_v, r_{vv})}{|r_u \times r_v|} = \frac{\operatorname{ch}^2 u}{|r_u \times r_v|}$$

і середня кривина катеноїда $H=0$. Тому катеноїд — мінімальна поверхня.

Виявляється, катеноїд — єдина мінімальна поверхня обертання, що відрізняється від площини, гелікоід — єдина лінійчаста мінімальна поверхня, що відрізняється від площини.

Зауваження. 1. Функція двох змінних $z=f(x, y)$, яка задовольняє рівнянню $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$, називається гармонічною. Останнє рівняння записується так:

$$\Delta f = 0, \text{ де } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \Delta \text{ — оператор Лапласа.}$$

Якщо поверхня мінімальна і її радіус-вектор

$$r = r(u^1, u^2) = \begin{cases} x^1 = x^1(u^1, u^2); \\ x^2 = x^2(u^1, u^2); \\ x^3 = x^3(u^1, u^2) \end{cases}$$

заданий в конформних координатах, то будь-яка змінна $x^i, i=1, 2, 3$ є гармонічною функцією.

Справді, мінімальну поверхню можна параметризувати так, щоб її перша квадратична форма мала вигляд

$$ds^2 = \Lambda ((du^1)^2 + (du^2)^2),$$

тобто $g_{11} = g_{22} = \Lambda, g_{12} = 0$. Тому середня кривина $H = \frac{1}{2} \frac{b_{11} + b_{22}}{\Lambda}$. Але $H = 0$ і тому $b_{11} + b_{22} = 0$. Згадаємо тепер формули Вейнгартена:

$$r_{11} = \Gamma_{11}^1 r_1 + \Gamma_{11}^2 r_2 + b_{11} n; \quad r_{22} = \Gamma_{22}^1 r_1 + \Gamma_{22}^2 r_2 + b_{22} n.$$

Для даної поверхні $r_{11} + r_{22} = (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1) r_1 + (\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2) r_2$. Крім того,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{\Lambda} \Gamma_{11,1} = \frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}; \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{1}{\Lambda} \Gamma_{22,1} = -\frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial u^1}.$$

Отже,

$$\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{22}^1 = 0.$$

Подібним способом доводиться, що $\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 = 0$. Таким чином, $r_{11} + r_{22} = 0$.

2. Середня кривина належить зовнішній геометрії поверхні: якщо змінити напрямок нормалі поверхні, середня кривина змінить знак.

Задача. Довести, що поверхня, яка задана рівнянням $z = a \ln \frac{\cos x}{\cos y}$ (поверхня Шерка), мінімальна.

2. Довести, що сферичне відображення мінімальної поверхні є конформним.

Розглянемо фізичну інтерпретацію середньої кривини. Нехай поверхня F є межею двох середовищ і знаходиться в рівновазі. Нехай p_1, p_2 — тиски, які створюють на поверхню F перше та друге середовища відповідно, λ — поверхневий натяг F .

Поверхня, що знаходиться в рівновазі та є межею двох середовищ, має сталу середню кривину

$$H = \frac{1}{\lambda} (p_2 - p_1).$$

Приклади. 1. Розглянемо мильну кульку. В цьому випадку $p_1 \neq p_2$, межа двох середовищ — замкнена поверхня з $H = \text{const} \neq 0$.

Теорема. Якщо замкнена регулярна поверхня в тривимірному просторі обмежує деяке тіло (тобто замкнена поверхня не має самоперерізів) і має сталу середню кривину, то це сфера.

Теорема була доведена О. Д. Александровим. Зауважимо, що вимога того, щоб поверхня була без самоперерізів, істотна: є приклад поверхні, гомеоморфній тору, середня кривина якої стала, але ця поверхня має самопереріз.

2. Зануримо в мильний розчин контур і витягнемо його. На контурі буде натягнена мильна плівка. Можна розглядати її як межу двох середовищ, причому $p_1 = p_2$. Отже, середня кривина мильної плівки $H = 0$. Одержано мінімальну поверхню.

Одним із перших мінімальні поверхні розглядав Ейлер. Він довів, що катеноїд — мінімальна поверхня. Суттєвий внесок у вивчення мінімальних поверхонь зробив Монж. Він довів, що локально мінімальні поверхні мають найменшу площу серед усіх близьких поверхонь. Бельгійський фізик Плато в 1849 р. сформулював відому задачу.

Задача Плато. Нехай є замкнений контур. Чи завжди існує мінімальна поверхня, що натягнена на цей контур?

Перше істотне просування в розв'язуванні цієї задачі здійснив харківський математик С. Н. Бернштейн. Він довів, що коли просторовий контур проектується на плоску опуклу криву, то на нього можна натягти мінімальну поверхню, причому поверхня може бути задана явно.

Задача Плато була позитивно розв'язана в 1931 р. Дугласом та Радом.

2.11. Теорема Гаусса — Бонне

Вище введено поняття інтегральної кривини та показано, що інтегральна кривина плоскої кривої дорівнює сумарному куту обертання дотичної із врахуванням знака

обертання при повному обході кривої. Якщо L — плоска замкнена вкладена крива, то

$$\int_L K ds = 2\pi,$$

де K — кривина; s — природний параметр кривої. Якщо крива кусково-гладка, то

$$\sum_i \int_{L_i} K ds + \sum_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi,$$

де L_i — регулярні компоненти кривої; $(\pi - \alpha_i)$ — кут обертання дотичної в кутових точках кривої.

Нехай тепер кусково-гладка крива L лежить на поверхні F^2 і обмежує зв'язну компоненту U поверхні, що гомеоморфна кругу. Оберемо на L індуковану орієнтацію, оскільки вибір напрямку обходу кривої важливий: якщо змінити орієнтацію кривої, геодезична кривина змінить знак на протилежний. Отже, нехай орієнтація поверхні F^2 обрана, тобто в кожній дотичній площині до поверхні зафіксований базис, що задає орієнтацію площини. Нехай регулярна точка A належить граничній кривій, вектор e_2 з початком в точці A перпендикулярний до дотичної кривої в точці A та напрямлений в сторону області U . Оберемо напрямок вектора e_1 так, щоб базис (e_1, e_2) задавав додатну орієнтацію дотичної площини поверхні в точці A . Вектор e_1 визначає індуковану орієнтацію граничної кривої.

Приклад. Нехай базис (e_1, e_2) задає орієнтацію площини (рис. 2.30). Щоб одержати на колі орієнтацію, що індукована цією стандартною орієнтацією площини, потрібно обрати напрямок обходу на колі проти годинникової стрілки (див. рис. 2.30).

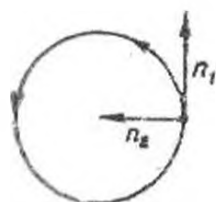


Рис. 2.30



Рис. 2.31

Розглянемо вираз

$$\tau = \sum_i \int_{L_i} K_g ds + \sum_i (\pi - \alpha_i),$$

де K_g — геодезична кривина кривої; L_i — регулярні компоненти кривої; $(\pi - \alpha_i)$ — кут обертання дотичної в кутових точках кривої (рис. 2.31). Назвемо τ кутом обертання дотичної при повному обході кривої L .

Приклади. 1. Нехай L — велике коло на сфері. Тоді $\int K_g ds = 0$.

2. Знайдемо площу S_Δ сферичного трикутника, в якому кути дорівнюють відповідно α, β, γ . Нехай радіус сфери $R=1$. Площа двокутника, кожний кут якого дорівнює α , дорівнює 2α . Очевидно, що $2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2S_\Delta$ є половина площі сфери, тобто $2(\alpha + \beta + \gamma) - 2S_\Delta = 2\pi$, або $S_\Delta = \alpha + \beta + \gamma - \pi$. Нехай L — межа сферичного трикутника, який розглядається. При обході L кут обертання дотичної $\tau = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Звідси $\tau = 2\pi - (\alpha + \beta + \gamma - \pi)$, або $\tau + S_\Delta = 2\pi$.

З іншого боку, площа трикутника

$$S_\Delta = \int K ds,$$

оскільки радіус сфери дорівнює одиниці і тому гауссова кривина $K=1$. Але раніше величину $\int K ds$ названо інтегральною кривиною області трикутника і позначено її через ω . Таким чином, $\tau + \omega = 2\pi$.

Зауважимо, що коли радіус сфери дорівнює R , то $\Delta S = (\alpha + \beta + \gamma - \pi) R^2$, отже, $\tau = 2\pi - \frac{S_\Delta}{R^2}$ і $K = \frac{1}{R^2}$. Тому знову одержуємо, що $\tau + \omega = 2\pi$.

Отже, обертання дотичної τ при обході сферичного трикутника не дорівнює 2π , але $\tau + \omega = 2\pi$. Зауважимо, що коли $K=0$, то остання формула співпадає з результатом який одержано для плоских кривих.

3. Розглянемо шапочку, яка обмежена малим колом L радіуса r , що лежить на одиничній сфері. Висота шапочки $h = 1 - \sqrt{1 - r^2}$ (рис. 2.32). Раніше обчислювалася геодезична кривина малого кола L на сфері: $K_g = \frac{\sqrt{1 - r^2}}{r}$

Площа шапочки $S = 2\pi h$, оскільки радіус сфери $R = 1$. Обчислимо кут обертання дотичної при обході L :

$$\tau = \int_L K_g ds = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1-r^2}}{r} r d\varphi = 2\pi \sqrt{1-r^2}.$$

Інтегральна кривина шапочки $\omega = 2\pi h = 2\pi(1 - \sqrt{1-r^2})$. Із двох останніх формул випливає, що $\tau + \omega = 2\pi$.

Отже, розглянуто криві на сфері і показано, що для кожної з цих кривих має місце формула $\tau + \omega = 2\pi$. Вивчається, що властивість мають всі регулярні поверхні.

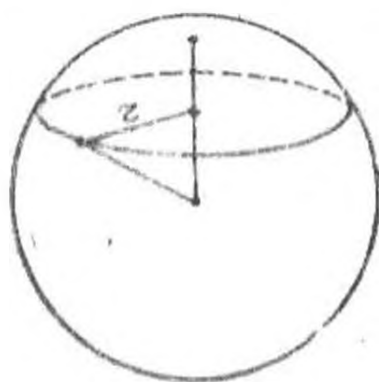


Рис. 2.32

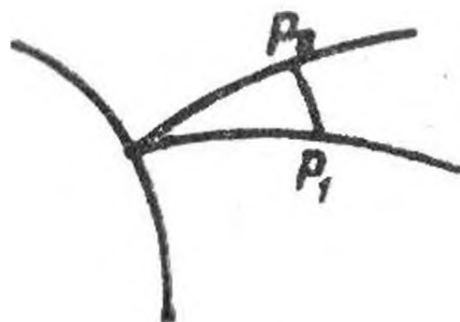


Рис. 2.33

Теорема Гаусса — Бонне. Нехай U — однозв'язна область на регулярній поверхні F^2 , яка обмежена кусково-гладкою кривою L з індукованою орієнтацією, L_i — регулярні компоненти граничної кривої, $(\pi - \alpha_i)$ — кут обертання дотичної в кутових точках кривої. Тоді

$$\sum_i \int_{L_i} K_g ds + \sum_i (\pi - \alpha_i) + \int_U K d\sigma = 2\pi.$$

Зокрема, коли L — регулярна крива, то

$$\int_L K_g ds + \int_U K d\sigma = 2\pi.$$

При доведенні теореми Гаусса — Бонне будемо наслідувати підручник [15].

Доведення. Для простоти викладення припустимо, що L — регулярна і у всій області U можуть бути введені півгеодезичні координати.

Беручи до уваги формулу для геодезичної кривини в півгеодезичних координатах, маємо

$$K_g ds = \frac{\sqrt{G}}{(u'^2 + Gv'^2)} \left(u''v' - v''u' - \frac{1}{2} G_u v'^3 - \frac{1}{2} \frac{G_v}{G} u'v'^2 - \frac{G_u}{G} u'^2v' \right) dt = -d \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{G}v'}{u'} - v' (\sqrt{G})_u dt.$$

Оскільки функція arctg багатозначна і її значення, що відповідають одному і тому ж значенню аргументу, розрізняються на число, яке кратне π , то

$$\int_L -d \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{G}v'}{u'} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де \mathbb{Z} — множина цілих чисел.

Далі за формулою Остроградського

$$\begin{aligned} \int_L -(\sqrt{G})_u \circ v &= \int_U (\sqrt{G})_{uu} du dv = \\ &= \int_U \frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}} \sqrt{G} du dv = \int_U -K d\sigma. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\int_L K_g ds = k\pi + \int_U -K d\sigma.$$

Лишається з'ясувати, чому дорівнює ціле число k . Маємо:

$$k\pi = \int_L -d \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{G}v'}{u'}.$$

Якби $G=1$, то величина $k\pi$ була б кутом, на який обертається дотична кривої L на площині u, v , що відповідає кривій L на поверхні при обході цієї кривої. Значення цього кута, як відомо, дорівнює 2π .

Оскільки значення інтеграла

$$\int_L -d \operatorname{arctg} \frac{\lambda(u, v)v'}{u'}, \quad \lambda(u, v) > 0$$

неперервно залежить від $\lambda(u, v)$ і дорівнює 2π при $\lambda(u, v)=1$, то воно дорівнює 2π для будь-якої функції $\lambda(u, v) > 0$, зокрема при $\lambda(u, v) = \sqrt{G}$.

Зауваження. 1. У теоремі Гаусса — Бонне вимагається, щоб область, яка обмежена кусково-гладкою кри-

вою, була однозв'язною. Якщо ця вимога не виконується, то теорема неправильна.

Приклад. На прямому круговому циліндрі розглянемо кусково-гладку криву L , що складається із відрізка P_1P_2 твірної та дуги P_1PP_2 гвинтової лінії (див. рис. 2.29). Ніякої однозв'язної області крива L не обмежує, гвинтова лінія утворює з твірною циліндра сталий кут α . Тому $\tau = 2\pi - 2\alpha$. Гауссова кривина циліндра $K = 0$, тому $\omega = 0$. Таким чином, $\tau + \omega = 2\pi - 2\alpha$.

2. У формулу $\tau + \omega = 2\pi$ входять величини, які визначаються лише першою квадратичною формою поверхні. Отже, теорема Гаусса — Бонне відноситься до внутрішньої геометрії поверхні.

Нехай F^2 — довільна регулярна поверхня. Розглянемо на цій поверхні трикутник, що обмежує однозв'язну область, сторонами якої є геодезичні лінії. Зауважимо, що досить маленький геодезичний трикутник завжди обмежує область, яка гомеоморфна колу. Нехай кути трикутника дорівнюють відповідно α, β, γ . При обході трикутника кут обертання дотичної $\tau = 3\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. За теоремою Гаусса — Бонне

$$3\pi - (\alpha + \beta + \gamma) + \int_{\Delta} K ds = 2\pi,$$

або

$$\int_{\Delta} K ds = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Із останньої формули випливає, що коли гауссова кривина поверхні $K > 0$, то сума кутів геодезичного трикутника $\alpha + \beta + \gamma > \pi$; якщо $K = 0$, то $\alpha + \beta + \gamma = \pi$; якщо $K < 0$, то $\alpha + \beta + \gamma < \pi$.

2.12. Метрики сталої кривини

Раніше показано, що гауссова кривина поверхні визначається першою квадратичною формою. Тому необхідною умовою ізометричності двох поверхонь є рівність гауссових кривин у відповідних точках. Але ця умова не є, взагалі кажучи, достатньою.

Якщо ж гауссова кривина стала, то правильна така теорема.

Теорема 18. *Поверхні з однією і тією ж сталою гауссовою кривиною локально ізометричні між собою.*

Доведення. Нехай F — поверхня, гауссова кривина якої $K = \text{const}$, P — довільна точка поверхні, L — довільна геодезична, що проходить через точку P . Побудуємо півгеодезичну систему координат, базою якої є крива L . Нехай вздовж кривої L змінюється параметр u^2 , вздовж ортогональних до L геодезичних — параметр u^1 . Тоді

$$ds^2 = (du^1)^2 + g(u^1, u^2) (du^2)^2,$$

причому

$$\begin{cases} g(0, u^2) = 1; \\ \left. \frac{\partial g(u^1, u^2)}{\partial u^1} \right|_{u^1=0} = 0. \end{cases} \quad (2.25)$$

Гауссова кривина

$$K = -\frac{(\sqrt{g})_{u^1 u^1}}{\sqrt{g}}.$$

Позначимо \sqrt{g} через y . Тоді остання формула набере вигляду

$$y'' + Ky = 0,$$

де $y'' = y_{u^1 u^1}$. Таким чином одержано рівняння Якобі.

Із курсу диференціальних рівнянь відомо, що залежно від знака K рівняння Якобі має такі розв'язки:

$$\text{якщо } K > 0, \quad y = A_1(u^2) \cos \sqrt{K} u^1 + A_2(u^2) \sin \sqrt{K} u^1;$$

$$\text{якщо } K = 0, \quad y = C_1(u^2) u^1 + C_2(u^2);$$

$$\text{якщо } K < 0, \quad y = B_1(u^2) \text{ch} \sqrt{-K} u^1 + B_2(u^2) \text{sh} \sqrt{-K} u^1.$$

Використовуючи початкові умови (2.25), знайдемо:

$$A_1(u^2) = 1; \quad A_2(u^2) = 0; \quad C_1(u^2) = 0; \quad C_2(u^2) = 1;$$

$$B_1(u^2) = 1; \quad B_2(u^2) = 0.$$

Отже, якщо $K > 0$, то $\sqrt{g} = \cos \sqrt{K} u^1$; якщо $K = 0$, то $\sqrt{g} = 1$; якщо $K < 0$, то $\sqrt{g} = \text{ch} \sqrt{-K} u^1$ і перша квадратична форма поверхні

$$ds^2 = \begin{cases} (du^1)^2 + \cos^2 \sqrt{K} u^1 (du^2)^2 & \text{при } K > 0; \\ (du^1)^2 + (du^2)^2 & \text{при } K = 0; \\ (du^1)^2 + \text{ch}^2 \sqrt{-K} u^1 (du^2)^2 & \text{при } K < 0. \end{cases}$$

Нехай тепер F_1, F_2 — дві поверхні із сталою однією гауссовою кривиною; P_1, P_2 — довільні точки поверхонь F_1, F_2 відповідно; L_1, L_2 — довільні геодезичні поверхонь F_1, F_2 , що проходять через P_1, P_2 відповідно. Побудуємо на поверхні F_1 півгеодезичну систему координат, базою

якої є крива L_1 , на F_1 — півгеодезичну систему координат з базою L_2 . Метрики F_1 та F_2 в цих системах координат будуть мати один і той же вигляд, звідси і впливає ізометричність поверхонь F_1, F_2 .

Зауваження. Без вимоги локальності теорема неправильна.

Приклади. 1. Гауссові кривини площини та кругового циліндра дорівнюють нулю, але ці дві поверхні не ізометричні; не існує в цілому взаємно однозначного відображення площини на циліндр, що зберігає довжини кривих. Існуванню такого відображення заважають топологічні чинники: площа однозв'язна, тобто будь-яку замкнену криву можна стягти в точку, а круговий циліндр не однозв'язний.

2. Локально метрики сфери S^2 та проективної площини RP^2 співпадають. Глобально ж ці поверхні не ізометричні. Як і в прикладі 1, заважають топологічні чинники. Сфера однозв'язна, проективна площина не однозв'язна — крива, що з'єднує діаметрально протилежні точки сфери (зауважимо, що це замкнена крива проективної площини) не стягується в точку.

Якщо в околі довільної точки P поверхні F ввести полярну систему координат, то перша квадратична форма поверхні буде

$$ds^2 = dr^2 + g(r, \varphi) d\varphi^2,$$

а гауссова кривина

$$K = -\frac{(V\bar{g})_{rr}}{V\bar{g}}.$$

Якщо ввести позначення $V\bar{g} = y$, одержимо знову рівняння Якобі $y'' + Ky = 0$, а початкові умови рівняння Якобі наберуть вигляду

$$\begin{cases} g(0, \varphi) = 0; \\ \left. \frac{\partial V\bar{g}(r, \varphi)}{\partial r} \right|_{r=0} = 1. \end{cases}$$

При таких початкових умовах розв'язками рівняння Якобі будуть

$$\begin{aligned} y &= \sin \sqrt{K}r, \text{ якщо } K > 0; \\ y &= r, \text{ якщо } K = 0; \\ y &= \text{sh} \sqrt{-K}r, \text{ якщо } K < 0. \end{aligned}$$

Таким чином, у полярній системі координат метрика поверхні

$$ds^2 = \begin{cases} dr^2 + \sin^2 \sqrt{Kr} d\varphi^2 & \text{при } K > 0; \\ dr^2 + r^2 d\varphi^2 & \text{при } K = 0; \\ dr^2 + \text{sh} \sqrt{-Kr} d\varphi^2 & \text{при } K < 0. \end{cases}$$

Повернемося до другої варіації довжини кривої:

$$S''(\varepsilon)|_{\varepsilon=0} = \int_{P_1}^{P_2} y(y'' + Ky) ds.$$

Вище зазначено, що рівняння Якобі $y'' + Ky = 0$ грає важливу роль при знаходженні достатніх умов того, що лінія, яка з'єднує точки P_1 та P_2 поверхні, є найкоротшою.

Розглянемо розв'язок рівняння Якобі, що має нульове значення в початковій точці P_0 геодезичної.

Визначення. Точки $P \neq P_0$ геодезичної, в яких розв'язки рівняння Якобі набувають нульового значення, називаються спряженими точці P_0 .

Розв'язками рівняння Якобі $y'' + Ky = 0$ з початковою умовою $y(0) = 0$ при $K = \text{const}$ будуть:

$$y = A \sin \sqrt{Kr}, \text{ якщо } K > 0;$$

$$y = Ar, \text{ якщо } K = 0;$$

$$y = A \text{sh} \sqrt{-Kr}, \text{ якщо } K < 0.$$

Звідси на сфері радіуса R перша спряжена точка на геодезичній — це точка, що діаметрально протилежна початковій точці. Якщо на поверхні $K = 0$ або $K < 0$, то на геодезичних немає спряжених точок.

В околі точки P поверхні введена полярна система координат. Лінія $r = \text{const}$ ортогональна геодезичним, що виходять із точки P ; перша квадратична форма поверхні $ds^2 = dr^2 + g(r, \varphi) d\varphi^2$. Звідси $\sqrt{g} d\varphi$ — це відстань між близькими геодезичними, довжина дуги $P_1 P_2$ (рис. 2.33). Нехай y — розв'язок рівняння Якобі з початковою умовою $y(0) = 0$. Але $y = \sqrt{g}$. Отже, коли на геодезичній є спряжені точки, то в них $\sqrt{g} = 0$. Таким чином, одержано, що в спряжених точках перетинаються нескінченно близькі геодезичні.

Зазначимо, що на ділянці, де немає спряжених точок, геодезичні є найкоротшими серед близьких кривих. Умова «серед близьких кривих» суттєва.

Приклад. Розглянемо прямий круговий циліндр. Гауссова кривина циліндра $K = 0$. Розв'язком рівняння Якобі

з початковою умовою $y(0) = 0$ є $y = cr$, отже, спряжених точок на геодезичних немає. Але гвинтова лінія, що з'єднує точки P_1 та P_2 , які знаходяться на прямолінійних твірних циліндра, не є найкоротшою серед усіх кривих, що з'єднують ці точки. Очевидно, що найкоротшою буде відрізок твірної циліндра.

Отже, якщо гауссова кривина поверхні $K > 0$ і зафіксована геодезична l на поверхні, що проходить через точку P , геодезична l_1 , яка проходить через точку P в напрямку, що відрізняється від напрямку геодезичної l , потім наближається до цієї геодезичної і навіть перетинається з нею. Якщо ж $K < 0$, геодезична l_1 віддаляється від первісної геодезичної l ; відстань між геодезичними l та l_1 , виміряна вздовж кривої $r = r_0$, має порядок $e^{\sqrt{-k}r_0}$. Тобто на поверхнях від'ємної гауссової кривини спостерігається експоненціальна незрівноваженість геодезичних.

Незрівноваженість геодезичних пояснює, зокрема, помилки прогнозу погоди. Такий прогноз складають, рухаючись вздовж геодезичних поверхні від'ємної гауссової кривини. Але початкові дані не точні. І якщо в початковий момент часу зроблена невелика помилка, то в майбутньому вона експоненціально зростає.

2.12.1. Рухи на поверхнях сталої кривини

Визначення. *Рухом на поверхні сталої гауссової кривини називається ізометричне відображення поверхні на себе.*

Нехай F_1 та F_2 — одна й та ж поверхня, тобто $F_1 = F_2 = F$; P_i — точка на поверхні F_i , l_i — геодезичний промінь поверхні F_i , що проходить через точку P_i , $i = 1, 2$. За теоремою 18 існує ізометричне відображення поверхні F на себе, при якому точка P_1 переходить в точку P_2 , а промінь l_1 — в промінь l_2 . Це відображення залежить від трьох параметрів: точка залежить від двох параметрів, а промінь — від одного.

З'ясуємо, скільки існує ізометричних відображень, що переводять точку P_1 в точку P_2 , а промінь l_1 в промінь l_2 . Нехай γ — геодезична лінія поверхні F_1 , яка проходить через P_1 і утворює кут φ з геодезичною l_1 . При ізометричному відображенні поверхні F_1 на поверхню F_2 , яке переводить P_1 в P_2 , l_1 в l_2 , геодезична γ перейде в геодезичну поверхні F_2 , що буде проходити через точку P_2 і утворювати з лінією l_2 кут φ ; таких геодезичних дві: γ_1 та γ_2 (рис. 2.34). Якщо визначити, куди перейшла геодезична

φ , то ізометричне відображення визначається однозначно. Таким чином, існує два рухи на поверхні F , які переводять P_1 в P_2 та l_1 в l_2 .

Ізометричні відображення утворюють групу, де операція множення — це композиція ізометрій. Ця група залежить від трьох параметрів. Вивчимо групу у випадках, коли гауссова кривина однозв'язної поверхні $K=1$ і $K=-1$.

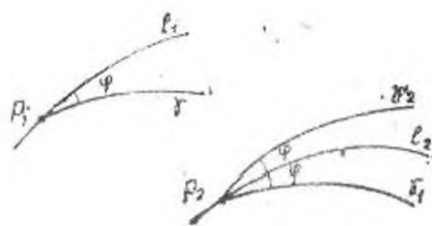


Рис. 2.34

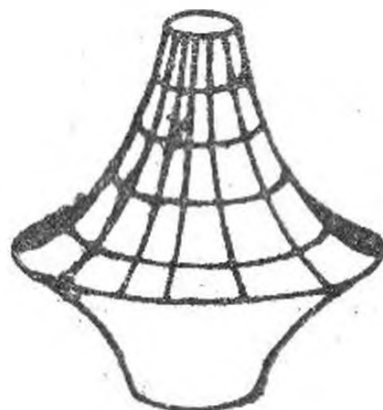


Рис. 2.35

Зауважимо, що випадок $K=0$ розглянуто в курсі аналітичної геометрії. Рівняння руху на площині

$$y = Ax + b, \text{ де } x = (x^1, x^2); y = (y^1, y^2);$$

$$b = (b^1, b^2); A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \mp \sin \varphi & \pm \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

2.12.2. Класифікація рухів на поверхні додатної сталої кривини

Нехай гауссова кривина $K=1$. Розглянемо сферу одиничного радіуса. В курсі аналітичної геометрії досліджено групу $O(3)$. Вона складається з тривимірних ортогональних матриць, тобто матриць A , що задовольняють умові $A^t \cdot A = E$. Їм відповідають рухи в просторі E^3 вигляду $y = Ax$. Це або обертання, або дзеркальні обертання. Група $O(3)$ складається із двох компонентів зв'язності: підгрупи $SO(3)$, що складається з матриць, визначник яких дорівнює 1, та матриць, визначник яких дорівнює -1 . При рухах із групи $O(3)$ сфера із центром в початку координат переходить у себе, тобто $O(3)$ є частиною групи рухів двовимірної сфери.

Доведемо, що група рухів сфери співпадає з $O(3)$. Справді, нехай P_1, P_2 — точки сфери з центром у точці O , l_1, l_2 — геодезичні промені з початком в точках P_1, P_2 відповідно. Зафіксуємо площину P_1OP_2 великого кола, що проходить через точки P_1, P_2 , та здійснимо обертання навколо осі, яка проходить через центр сфери O і перпендикулярна до площини P_1OP_2 . Обертання переводить точку P_1 в точку P_2 . Матрицю цього ортогонального перетворення позначимо через A_1 . Очевидно, що $\det A_1 = 1$. При цьому русі промінь l_1 перейде в промінь \bar{l}_1 . Здійснимо тепер обертання навколо точки P_2 , яке переводить \bar{l}_1 в l_2 . Матрицю цього перетворення позначимо через A_2 : $\det A_2 = 1$. Рух $A_2 \circ A_1$ — це рух на сфері, який поєднує P_1 з P_2 та l_1 з l_2 , причому $\det(A_2 \circ A_1) = 1$, тобто цей рух належить групі $SO(3)$. Очевидно, що $S \circ A_2 \circ A_1$, де S — симетрія відносно площини, яка має в собі більше коло і в якій лежить промінь, l_2 — це ще один рух на сфері, що переводить точку P_1 в точку P_2 , а промінь l_1 у промінь l_2 . Це невластивий рух. Але більше ніж два рухи, які б переводили точку P_1 в точку P_2 , а промінь l_1 у промінь l_2 , як було показано раніше, бути не може. Тому будь-який рух на сфері є ортогональний рух, тобто група рухів сфери — це група $O(3)$. Підгрупа власних рухів сфери — $SO(3)$.

2.12.3. Псевдосфера

Раніше показано, що в півгеодезичній системі координат метрика сталої від'ємної кривини

$$ds^2 = du^2 + \operatorname{ch}^2 \sqrt{-K} \cdot u dv^2.$$

Побудуємо приклад поверхні обертання з такою першою квадратичною формою. Нехай меридіан цієї поверхні обертання заданий рівняннями

$$\begin{cases} x = \varphi(\sigma); \\ y = \psi(\sigma), \end{cases}$$

де σ — природний параметр кривої. Тоді параметричні рівняння шуканої поверхні мають вигляд

$$\begin{cases} x = \varphi(\sigma) \cos u; \\ y = \varphi(\sigma) \sin u; \\ z = \psi(\sigma), \end{cases}$$

а метрична форма

$$ds^2 = d\sigma^2 + \varphi^2(\sigma) du^2.$$

Нехай для визначеності гауссова кривина $K = -1$. Тоді функція $\varphi(\sigma)$ повинна задовольняти рівнянню

$$\varphi'' - \varphi = 0.$$

Загальний розв'язок цього рівняння: $\varphi = a_1 e^\sigma + a_2 e^{-\sigma}$. Розглянемо окремий розв'язок, коли $a_1 = 0$, $a_2 = -1$. Тоді $\varphi = -e^{-\sigma}$, $\sigma > 0$ і метрична форма має вигляд

$$ds^2 = d\sigma^2 + e^{-2\sigma} du^2.$$

Нехай $dv = e^\sigma d\sigma$. Тоді $v = e^\sigma$ і в нових координатах метрична форма набуває вигляду

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}, \quad v > 0. \quad (2.26)$$

Знайдемо параметричне рівняння шуканої поверхні. Для цього розв'яжемо рівняння $\psi'_\sigma = \sqrt{1 - e^{-2\sigma}}$. Нехай $e^{-\sigma} = -\sin t$. Тоді

$$\psi = \int_{\frac{\pi}{2}}^t \frac{\cos^2 \tau}{\sin \tau} d\tau = \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}$$

радіус-вектор поверхні запишеться у вигляді

$$\begin{cases} x = \sin t \cos u; \\ y = \sin t \sin u; \\ z = \cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Ця поверхня називається псевдосферою (рис. 2.35).

2.12.4. Рухи на площині Лобачевського

Геометрія, яку задає повна метрика сталої від'ємної кривини на площині, називається геометрією (площиною) Лобачевського. Коли метрична форма має вигляд (2.26), то площина Лобачевського задана в інтерпретації Пуанкаре.

Знайдемо групу рухів на площині Лобачевського. Для цього запишемо метрику (2.26) в комплексному вигляді. Нехай

$$\omega = u + iv, \quad \text{тоді} \quad \bar{\omega} = u - iv;$$

$$d\omega = du + idv; \quad d\bar{\omega} = du - idv; \quad v = \frac{|\omega - \bar{\omega}|}{2} i$$

$$ds^2 = \frac{4d\omega d\bar{\omega}}{|\omega - \bar{\omega}|^2} = \frac{4|d\omega|^2}{|\omega - \bar{\omega}|^2}. \quad (2.27)$$

Розглянемо дробово-лінійне комплексне перетворення

$$\omega = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad (2.28)$$

де $z = x + iy$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ і $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, та доведемо, що воно задає рух на площині Лобачевського, тобто переводить півплощину $y > 0$ у верхню півплощину $v > 0$ і зберігає метрику (2.27). Справді,

$$\begin{aligned} \omega - \bar{\omega} &= \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} - \frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta} = \frac{\beta \gamma \bar{z} + \alpha \delta z - \delta \alpha \bar{z} - \beta \gamma z}{|\gamma z + \delta|^2} = \\ &= \frac{(\alpha\delta - \beta\gamma)(z - \bar{z})}{|\gamma z + \delta|^2} = \frac{z - \bar{z}}{|\gamma z + \delta|^2}, \end{aligned}$$

звідки випливає, що верхня півплощина переходить у себе. Далі,

$$\omega' = \frac{\alpha(\gamma z + \delta) - \gamma(\alpha z + \beta)}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma z + \delta)^2} = \frac{1}{(\gamma z + \delta)^2},$$

тобто $d\omega = \frac{dz}{(\gamma z + \delta)^2}$. Підставимо знайдені вирази у формулу (2.27):

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2(\gamma z + \delta)^4}{(\gamma z + \delta)^4 |z - \bar{z}|^2} = \frac{4|dz|^2}{|z - \bar{z}|^2}.$$

Перетворення (2.28) зберігає довжини відповідних кривих.

Зауважимо, що перетворення $\omega = -\bar{z}$ є рухом на площині Лобачевського: це симетрія відносно осі y . Отже, перетворення

$$\omega = -\frac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}, \quad (2.29)$$

де $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ і $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, також задають рух на площині Лобачевського.

Інших рухів, крім (2.28) та (2.29), на площині Лобачевського немає. Справді, нехай P_1, P_2 — дві точки площини Лобачевського; l_1, l_2 — напрямки в точках P_1, P_2 відповідно. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що P_2 має координати $(0, 1)$, а l_2 співпадає з напрямком осі v . Рух $\omega = \frac{z - x_0}{y_0}$ переводить точку $z_0 = x_0 + iy_0$ в точ-

ку i , а рух $\omega = \frac{z - \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} z + 1}$ лишає точку i на місці, але

будь-який напрямок обертає на кут ω . Зауважимо, що обидва рухи, а тому і їх композиція, належать множині рухів (2.28). Отже, серед рухів (2.28) є такий, який переводить точку P_1 в точку P_2 і напрямок l_1 в напрямок l_2 . Але є ще один рух, при якому P_1 перейде в P_2 , а l_1 в l_2 . Це композиція уже розглянутого нами руху та симетрії відносно осі v ; останній рух належить множині (2.29). Оскільки існують тільки два рухи, які переводять точку P_1 в точку P_2 і напрямок l_1 в напрямок l_2 , то рухами (2.28), (2.29) вичерпуються всі рухи на площині Лобачевського.

Будь-якому рухові g із множини (2.28) можна поставити у відповідність матрицю $A(g) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, причому $\det A = 1$.

Будь-якому рухові g із множини (2.29) поставимо у відповідність матрицю $A(g) = \begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ +\gamma & \delta \end{pmatrix}$; $\det A = -1$.

Сукупність усіх матриць, що відповідають цим рухам, утворює групу; позначимо її через $L(2, R)$. Через g позначимо групу всіх рухів на площині Лобачевського. Відображення $L(2, R) \rightarrow g$, яке задане вище, — це гомоморфізм груп. Якщо $A_1 \rightarrow g_1$, $A_2 \rightarrow g_2$, то $A_1 A_2 \rightarrow g_1 \circ g_2$.

З'ясуємо, яка підгрупа групи $L(2, R)$ переходить в одиницю групи g . Розглянемо випадок власних рухів ($\det A = 1$). Так, нехай $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = z$ при будь-якому z . Тоді для будь-якого z маємо

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0.$$

Звідси $\gamma = \beta = 0$; $\delta = \alpha$.

Згадаємо тепер, що $\alpha\delta - \gamma\beta = 1$. Тому $\alpha^2 = 1$, тобто $\alpha = \pm 1$.

Отже, матриці $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ переходять в одиницю групи g у випадку власних рухів. У випадку не-власних рухів таких матриць немає.

Тому $g = L(2, R) / \pm E$ — група ізометрій площини Лобачевського.

З'ясуємо геометричний зміст рухів на площині Лобачевського. В курсі аналітичної геометрії було доведено, що будь-який власний рух на площині — це композиція двох осьових симетрій, будь-який невласний рух — композиція трьох осьових симетрій. Подібна теорема правильна для рухів на площині Лобачевського.

Визначення. Інверсією відносно кола радіуса R з центром у точці O називається перетворення, яке переводить точку P в точку P' , що лежить на промені OP , і таке, що $OP' \cdot OP = R^2$. Точка O називається центром інверсії.

Очевидно, що коло, відносно якого здійснюється інверсія, при цьому перетворенні лишається на місці, внутрішні точки кола переходять у зовнішні, а зовнішні — у внутрішні. Узагальнені кола (тобто кола та прямі) переходять в узагальнені кола при перетворенні інверсії; кола, що проходять через центр інверсії, переходять у прямі.

Перетворення інверсії відносно кола радіуса R з центром в початку координат записується таким чином:

$$\begin{cases} x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2}; \\ y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2}, \end{cases}$$

або в комплексних координатах —

$$\omega = \frac{R^2}{z}.$$

Інверсія відносно кола радіуса R з центром в точці z_0 може бути задана формулою

$$\omega - z_0 = \frac{R^2}{z - z_0}.$$

Вправа. Довести, що інверсія є конформним відображенням евклідової площини на себе.

Розглянемо інверсії, центри яких лежать на осі x , тобто інверсії відносно кіл, що перпендикулярні до осі x . Окремим випадком цих інверсій будемо вважати перетворення симетрії відносно прямих, що перпендикулярні до осі x . Очевидно, що такі інверсії переводять верхню півплощину в себе і є ізометріями площини Лобачевського в інтерпретації Пуанкаре вигляду (2.29).

З'ясуємо, які лінії є геодезичними площини Лобачевського в інтерпретації Пуанкаре. Зауважимо, що прямі $x = \text{const}$ — геодезичні площини Лобачевського. Справді,

$$s(L) = \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{|y|} \geq \int_{P_1}^{P_2} \frac{|dy|}{|y|} \geq \left| \int_{P_1}^{P_2} \frac{dy}{y} \right| = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|,$$

причому рівність досягається тоді, коли крива L , яка з'єднує точки $P_1(x_1, y_1)$ та $P_2(x_1, y_2)$, співпадає з прямою

$x = \text{const}$. Отже, пряма $x = \text{const}$ — геодезична площини Лобачевського.

Нехай точки $(a, 0)$ та $(b, 0)$ такі, що $b > a$. Розглянемо інверсію відносно кола з центром в точці $(a, 0)$ і радіусом $b - a$. При такому перетворенні пряма $x = b$ перейде в коло з центром у точці $\frac{a+b}{2}$ і радіусом $\frac{b-a}{2}$, тобто в коло, що перпендикулярне до осі x і проходить через точки $(a, 0)$ та $(b, 0)$. Але інверсія — це ізометричне перетворення, а ізометрії переводять геодезичні в геодезичні. Тому півколо, що перпендикулярне до осі x , є геодезичною лінією площини Лобачевського. Оскільки $(a, 0)$ та $(b, 0)$ — довільні точки осі x , то будь-яке півколо, що перпендикулярне до осі x , є геодезична площини Лобачевського в інтерпретації Пуанкаре.

Щоб довести, що знайденими геодезичними вичерпуються всі геодезичні лінії площини Лобачевського, досить показати, що через будь-яку точку P верхньої півплощини в будь-якому напрямку проходить півколо, яке перпендикулярне до осі x . Отже, нехай P — довільна точка верхньої півплощини, l — довільна евклідова пряма, що проходить через точку P . Побудуємо в точці P перпендикуляр до прямої l . Цей перпендикуляр перетне вісь x у точці O . Точка O — центр шуканого півкола, а OP — його радіус. Але через будь-яку точку в будь-якому напрямку проходить єдина геодезична. Отже, знайдено всі геодезичні лінії площини Лобачевського в інтерпретації Пуанкаре.

При $y \rightarrow 0$ точка на геодезичній прямує до нескінченності. В інтерпретації Пуанкаре вона прямує до перетину півкола з віссю Ox . Тому можна вважати точку перетину нескінченно віддаленою точкою геодезичної.

Т в е р д ж е н н я. Будь-який рух на площині Лобачевського є композицією інверсій з центром на осі x . При цьому власні рухи — композиція двох інверсій, невластні — композиція трьох інверсій.

Д о в е д е н н я. Нехай P_1, P_2 — точки площини Лобачевського; l_1, l_2 — геодезичні, що проходять відповідно через ці точки. Через точки P_1 та P_2 проводимо, як на евклідовій площині, пряму; вона перетне вісь x у деякій точці O . Розглянемо інверсію S_1 відносно кола з центром у точці O , яка переводить точку P_2 в точку P_1 . При цьому півколо l_2 переходить у півколо \tilde{l}_2 , проходячи через точку P_1 (рис. 2.36). Проводимо через точку P_1 геодезичну l , яка ділить кут між l_1 та \tilde{l}_2 навпіл, і будуємо як на евклідовій площині перпендикуляр до l в точці P_1 ; він перетне вісь x

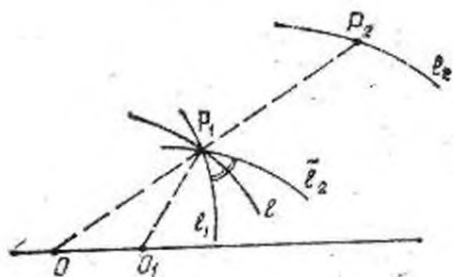


Рис. 2.36

у точці O_1 . Позначимо через S_2 інверсію відносно кола з центром в точці O_1 , що переводить \tilde{l}_2 в l_1 .

Нехай g — рух на площині Лобачевського, який переводить P_1 в P_2 та l_1 в l_2 . Тоді перетворення $S_2 \circ S_1 \circ g$ лишає на місці точку P_1 та геодезичну l_1 . Воно є тотожним перетворенням або інверсією відносно l_1 . У другому випадку відінемо інверсію S_3 відносно кола l_1 і одержимо:

$$S_3 \circ S_2 \circ S_1 \circ g = id.$$

Отже, в першому випадку g є композицією двох інверсій, у другому — композицією трьох інверсій.

Зауваження. Півкола, центри яких розташовані на осі x , — це прямі площини Лобачевського. Таким чином, всі рухи на площині Лобачевського є композиціями осьових симетрій.

2.13. Геометрія Лобачевського

Розглянемо виконання аксіом елементарної геометрії в геометрії Лобачевського, користуючись інтерпретацією Пуанкаре.

2.13.1. Інтерпретація Пуанкаре

Розглянемо верхню півплощину ($y > 0$), на якій введена метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

Гауссова кривина цієї метрики $K = -1$. Назвемо: точками — точки евклідової верхньої півплощини $y > 0$; прямими — геодезичні метрики $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, тобто узагальнені евклідові півкола, що перпендикулярні до осі x ; рухами — ізометричні відображення метрики $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

довжиною кривої — довжину в цій метриці. Таким чином одержимо реалізацію геометрії Лобачевського.

У геометрії Лобачевського виконуються всі аксіоми евклідової геометрії, крім однієї — аксіоми паралельних.

Згадаємо деякі аксіоми евклідової геометрії [16].

1. Яка не була б пряма, є точки, що належать прямій, і є точки, що не належать прямій.

Ця аксіома виконується.

2. Через будь-які дві точки можна провести пряму, і при цьому лише одну.

Якщо абсиси заданих точок співпадають, то аксіома 2 виконується очевидним чином. У протилежному випадку з'єднаємо точки P_1, P_2 відрізком (як точки евклідової площини) і знайдемо евклідову середину відрізка — точку P . У точці P побудуємо перпендикуляр до відрізка P_1P_2 . Перпендикуляр перетне вісь x в точці O . Евклідове коло з центром в точці O і радіусом OP_1 проходить через точки P_1, P_2 і перпендикулярне до осі x .

3. Із трьох точок на прямій одна і тільки одна лежить між двома іншими.

Аксіома виконується, оскільки відкриті півкола та прямі евклідової геометрії гомеоморфні між собою.

4. Пряма розтинає множину точок на площині, які не належать обраній прямій, на дві підмножини (півплощини) так, що відрізок, який з'єднує точки різних півплощин, перетинається з прямою.

Очевидно, що ця аксіома виконується. Зауважимо, що при $y \rightarrow 0$ точка площини Лобачевського йде на нескінченність, тобто область площини Лобачевського, яка лежить в крузі із центром на осі x , не обмежена.

5. Кожний відрізок має певну довжину, яка більша нуля. Якщо точка C лежить на відрізку AB , то довжина відрізка AB дорівнює сумі довжин відрізків AC та BC .

6. Яке не було б дійсне число $d > 0$, існує відрізок довжини d .

Оскільки метрика

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

конформна евклідовій метриці, то кути на площині Лобачевського вимірюються так само, як на евклідовій площині. Отже, виконується аксіома.

7. Кожен кут має певну градусну міру, що більша нуля. Розгорнутий кут дорівнює 180° . Коли промінь C

проходить між сторонами кута (ab) , то градусна міра кута (ab) дорівнює сумі градусних мір кутів (ac) та (bc) .

8. Нехай ABC — трикутник і a — півпряма. Тоді існує трикутник $A_1B_1C_1$, який дорівнює трикутнику ABC і у якого вершина A_1 співпадає з початком променя a , вершина B_1 лежить на промені a , а вершина C_1 — в заданій півплощині відносно прямої, що має в собі a .

Аксіома виконується, це випливає із властивостей руху на площині Лобачевського.

Розглянемо, нарешті, останню аксіому, аксіому паралельних.

9. Через точку, що лежить на прямій, можна провести на площині не більше ніж одну пряму, яка була б паралельна даній.

Нехай l — деяка пряма на площині Лобачевського, для визначеності нехай це буде півколо; P — точка, що не належить прямій l ; A та B — точки перетину кола, що має в собі l , з віссю x . Через точку P проведемо геодезичну γ_1 площини Лобачевського, нескінченно віддалена точка якої — точка A , та геодезичну γ_2 з нескінченно віддаленою точкою B . Прямі γ_1 , γ_2 та всі прямі площини Лобачевського, які належать заштрихованій на рис. 2.37 області, паралельні прямій l .

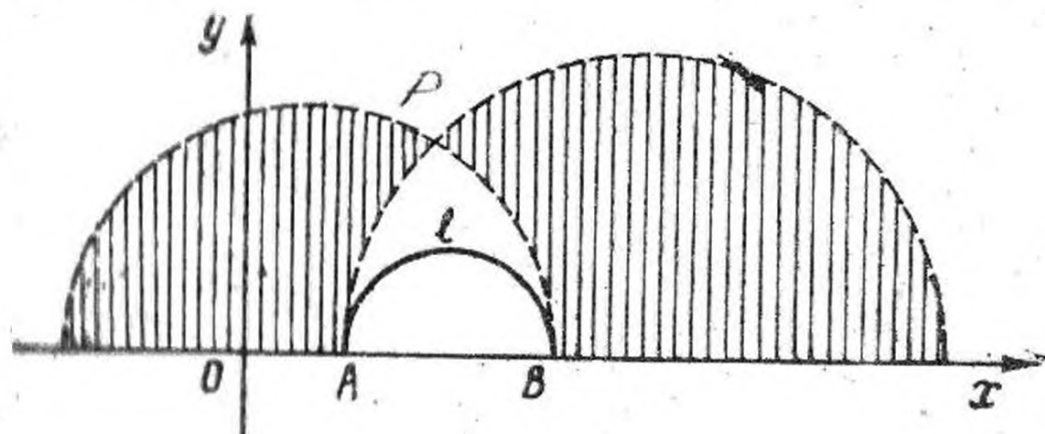


Рис. 2.37

Таким чином, побудовано модель, на якій реалізується геометрія Лобачевського.

Із теореми Гаусса—Бонне випливає, що сума кутів трикутника на площині Лобачевського менше π . Можна вказати нескінченний трикутник у побудованій нами моделі, в якого всі кути дорівнюють нулю (рис. 2.38).

Площі всіх трикутників на площині Лобачевського обмежені. Справді, якщо S_{Δ} — площа деякого трикутника

(позначимо його через Δ) на площині Лобачевського, α, β, γ — кути цього трикутника, то за теоремою Гаусса — Бонне

$$\int_{\Delta} K ds = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \text{ Але } K = -1, \text{ отже, } \int_{\Delta} K ds = -S_{\Delta}$$

і тому $S_{\Delta} = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Знайдемо формулу для обчислення відстані ρ між точками площини Лобачевського.

Нехай z_1, z_2 — точки площини Лобачевського. Пряма l площини Лобачевського, яка проходить через точки z_1, z_2 , лежить на евклідовому колі, що перетинає вісь x

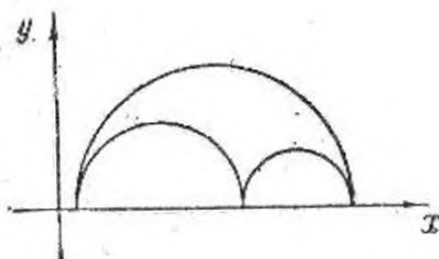


Рис. 2.38

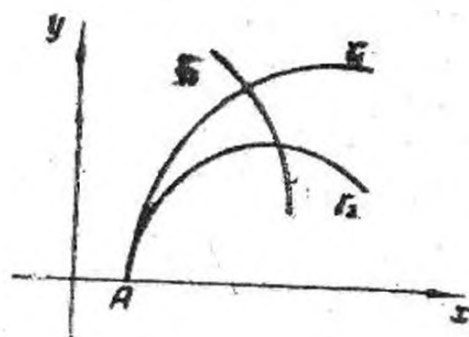


Рис. 2.39

у точках z_0, z_{∞} . Розглянемо відображення $W = \frac{z - z_0}{z_{\infty} - z}$.

Воно задає рух на площині Лобачевського, тобто зберігає відстань між точками, та переводить півколо l в промінь, що перпендикулярний до осі x , точку z_1 — в точку y_1 , z_2 — в y_2 . Отже, $\rho(z_1, z_2) = \rho(y_1, y_2)$. Але раніше показано, що $\rho(y_1, y_2) = \left| \ln \frac{y_2}{y_1} \right|$. Оскільки

$$y_2 = \frac{z_2 - z_0}{z_{\infty} - z_2}; \quad y_1 = \frac{z_1 - z_0}{z_{\infty} - z_1}, \text{ то } \rho(z_1, z_2) = \left| \ln \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} \cdot \frac{z_{\infty} - z_2}{z_{\infty} - z_1} \right|,$$

де $(z_1, z_2, z_0, z_{\infty}) = \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} : \frac{z_1 - z_{\infty}}{z_2 - z_{\infty}}$ є відношення чотирьох точок.

2.13.2. Інші інтерпретації геометрії Лобачевського

Пуанкаре (1882) розглядав також інтерпретацію геометрії Лобачевського в одиничному крузі. Модель Пуанкаре геометрії Лобачевського в одиничному крузі одержується із моделі Пуанкаре на півплощині за допомогою

дробово-лінійного перетворення $W = \frac{z-i}{z+i}$. Внутрішність одиничного круга $x^2 + y^2 < 1$ з метрикою $ds^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$ є модель Пуанкаре геометрії Лобачевського в крузі. Геодезичними цієї метрики (прямими геометрії Лобачевського) є дуги узагальнених кіл, які перпендикулярні до одиничного кола $x^2 + y^2 = 1$.

Існують й інші інтерпретації геометрії Лобачевського. Одна з них — інтерпретація Келі — Клейна (1870). Згідно з цією інтерпретацією площина Лобачевського — це внутрішність одиничного круга $x^2 + y^2 < 1$ з метрикою

$$ds^2 = \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xy dx dy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}.$$

Інтерпретація Келі—Клейна зручна тим, що геодезичними вказаної метрики є хорди круга, тобто відрізки евклідових прямих. Якщо P_1, P_2 — внутрішні точки одиничного круга, а P_0, P_∞ — точки перетину прямої, яка проходить через P_1, P_2 , з граничним колом, то в інтерпретації Келі — Клейна відстань між точками P_1, P_2 обчислюється за формулою $\rho(P_1, P_2) = |\ln(P_1, P_2, P_0, P_\infty)|$, де $(P_1, P_2, P_0, P_\infty)$ — складне відношення чотирьох точок.

Існує реалізація площини Лобачевського в псевдоевклідовому просторі.

Розглянемо псевдоевклідів простір $E_{2,1}^3$, тобто тривимірний лінійний простір, в якому метрика введена за допомогою квадратичної форми, що визначена в деякому базисі матрицею $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Скалярний добуток векторів $a = (a^1, a^2, a^3)$ та $b = (b^1, b^2, b^3)$ у псевдоевклідовому просторі дорівнює

$$(a, b) = g_{ij} a^i b^j = a^1 b^1 + a^2 b^2 - a^3 b^3.$$

У просторі $E_{2,1}^3$ можна розв'язати задачу знаходження довжини дуги кривої подібно до того, як така задача розв'язувалася в евклідовому просторі. Але в псевдоевклідовому просторі квадрат довжини сегмента дуги кривої може бути додатним, від'ємним або дорівнювати нулю. Розглянемо конус, який заданий рівнянням $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$. Якщо C^1 — регулярна крива, така, що дотичний вектор лежить всередині конуса, то квадрат його довжини від'ємний; якщо дотичний вектор лежить на конусі, то квадрат

довжини дорівнює нулю; якщо дотичний вектор розташований поза кокусом, то квадрат довжини додатний.

Раніше розглянуто рухи вздовж прямої. Можна розглядати плоскі рухи матеріальної точки, описувати її світову лінію системою рівнянь у тривимірному псевдоевклідовому просторі і одержувати результати, подібні до результатів для руху вздовж прямої, а саме: вектори з нульовим квадратом довжини є дотичними до світової лінії частинок, які рухаються зі швидкістю світла. Вектори, квадрат довжини яких від'ємний, — це вектори, що дотичні до світових ліній матеріальних частинок. Вектори, квадрат довжини яких додатний, не мають фізичного змісту (вздовж кривих з такими дотичними векторами не можуть «рухатися» матеріальні точки).

Розглянемо в псевдоевклідовому просторі $E_{2,1}^3$ сферу «хуяного радіуса iR » з центром у початку координат; її рівняння —

$$(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -R^2, \quad R > 0.$$

У просторі E^3 останнє рівняння задає двопорожнистий гіперболоїд. Параметричне рівняння однієї порожнини уявної сфери:

$$\begin{cases} x^1 = R \operatorname{sh} u \cos v; \\ x^2 = R \operatorname{sh} u \sin v; \\ x^3 = R \operatorname{ch} u, \end{cases}$$

звідси

$$\begin{cases} x_u^1 = R \operatorname{ch} u \cos v; \\ x_u^2 = R \operatorname{ch} u \sin v; \\ x_u^3 = R \operatorname{sh} u; \end{cases} \quad \begin{cases} x_v^1 = -R \operatorname{sh} u \sin v; \\ x_v^2 = R \operatorname{sh} u \cos v; \\ x_v^3 = 0. \end{cases}$$

Як і при евклідовому випадку, обчислимо коефіцієнти першої квадратичної форми сфери в $E_{2,1}^3$:

$$g_{11} = (r_u, r_u) = R^2; \quad g_{12} = (r_u, r_v) = 0; \quad g_{22} = (r_v, r_v) = R^2 \operatorname{sh}^2 u.$$

Таким чином, $ds^2 = R^2 (du^2 + \operatorname{sh}^2 u dv^2)$, тобто ця поверхня має сталу від'ємну гауссову кривину і є реалізацією площини Лобачевського.

Введемо новий параметр \bar{u} , який зв'язаний з параметром u так: $\bar{u} = Ru$. Тоді перша квадратична форма поверхні набере вигляду

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\bar{u}}{R} dv^2.$$

Знайдемо довжину L кола, яке задане рівнянням $\bar{r} = r_0$ на площині Лобачевського:

$$L = \int_0^{2\pi} R \operatorname{sh} \frac{r_0}{R} dv = 2\pi R \operatorname{sh} \frac{r_0}{R}.$$

Якщо $R \rightarrow \infty$ або $r_0 \rightarrow 0$, то $L \sim 2\pi r_0$. Зауважимо, що в площині довжина кола радіуса r_0 дорівнює $2\pi r_0$, на сфері радіуса R — $2\pi R \sin \frac{r_0}{R}$.

Знайдемо площу круга радіуса r_0 на площині Лобачевського. Круг можна задати системою нерівностей

$$\begin{cases} 0 \leq u \leq r_0; \\ 0 \leq v < 2\pi, \end{cases}$$

якщо перша квадратична форма площини Лобачевського

$$ds^2 = du^2 + R^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{R} dv^2.$$

Елемент площі $ds = R \operatorname{sh} \frac{u}{R} du dv$. Тоді площа круга

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} R \operatorname{sh} \frac{u}{R} du dv = 2\pi R^2 \operatorname{ch} \frac{u}{R} \Big|_0^{r_0} = \\ &= 2\pi R^2 \left(\operatorname{ch} \frac{r_0}{R} - 1 \right) = 4\pi R^2 \operatorname{sh} \frac{r_0}{2R}. \end{aligned}$$

Інтерпретацію Келі—Клейна геометрії Лобачевського можна одержати таким чином. Розглянемо в тривимірному псевдоевклідовому просторі одну порожнину двопорожнистого гіперболоїда, яка задає площину Лобачевського, та дотичну площину π у вершині цієї порожнини гіперболоїда. Центральна проекція порожнини, що розглядається, на дотичну площину π , яка здійснена із центра гіперболоїда, є інтерпретацією Келі—Клейна геометрії Лобачевського.

Інтерпретація Пуанкаре площини Лобачевського в одиничному крузі може бути одержана центральним проектуванням однієї порожнини двопорожнистого гіперболоїда із вершини другої порожнини на дотичну площину.

2.13.3. Історія створення геометрії Лобачевського

У 1829 р. у вчених записках Казанського університету з'явилася перша публікація Миколи Івановича Лобачевського (1792 — 1856) про існування геометрії, що відрізняється від геометрії Евкліда. Незалежно від Лобачевського до відкриття «нової» геометрії прийшов угорський математик Янош Больяї, який опублікував свої результати в 1832 році. Після посмертної публікації приватної переписки Гаусса стало відомо, що він також прийшов до відкриття цієї геометрії, але не надрукував жодної праці. Більше того, він забороняв колегам друкувати викладення його ідей щодо нової геометрії. Гаусс ніяк не висловив свого ставлення до результатів, одержаних Лобачевським, проте за його пропозицією Лобачевський був обраний членом-кореспондентом Геттингенського наукового товариства. Для читання праць Лобачевського Гаусс почав вивчати російську мову.

Псевдоевклідова геометрія одержала в працях Лобачевського повний та глибокий розвиток, але за його життя загального визнання не здобула. Його праці зазнали гострої критики з оточення першого на той час математика Росії М. В. Остроградського. Але це не зламало його волі; він був впевнений у вірності створеної ним геометрії і продовжував послідовно її розробляти, незважаючи на життєві невдачі, утрату зору.

Визнання геометрії Лобачевського суттєво полегшила її перша інтерпретація, що була запропонована італійським математиком Бельтрамі в 1868 році. Він показав, що на псевдосфері

$$\begin{cases} x = R \sin u \cos v; \\ y = R \sin u \sin v; \\ z = R \left(\cos u + \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right) \end{cases}$$

в гауссовою кривиною $K = -\frac{1}{R^2}$ локально виконується геометрія Лобачевського. Це інтерпретація частини площини Лобачевського.

Повернемося до інтерпретації Пуанкаре на півплощині. Розглянемо трикутник, що утворений прямими γ_1 , γ_2 площини Лобачевського, які мають спільну нескінченну точку A , і прямою γ_3 , що ортогональна γ_1 та γ_2 (рис. 2.39).

Із цього трикутника можна одержати псевдосферу, склеївши прями γ_1 та γ_2 .

У тривимірному евклідовому просторі не існує повної регулярної поверхні сталої від'ємної кривини. Це довів Гільберт у 1903 році.

З геометрією Лобачевського тісно пов'язана теорія відносності Ейнштейна, відкрита в 1904—1905 роках. Простір швидкостей матеріальної точки в спеціальній теорії відносності є простором Лобачевського.

Глава 3 ТЕНЗОРИ

Багато які з величин можуть бути задані як функції від точки в просторі. Проте виявляється, що поняття числової функції точки або сукупності точок недостатньо. Справа в тому, що велика кількість геометричних та фізичних величин може бути описана у вигляді набору числових функцій лише після того, як у просторі вже заданий певний набір координат. Числовий запис цих величин може дуже змінитися, коли задано інші координати.

Тензори — це найважливіший із класів величин, числовий запис яких змінюється при зміні координат.

3.1. Приклади тензорів у фізиці і механіці

1. Нехай f — скалярна функція (температура, відстань між двома точками та ін.). Тоді f не залежить від вибору системи координат.

2. Нехай в лінійному дійсному просторі є два базиси $e = (e_1, \dots, e_n)$ та $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$. Перехід від координат точки в базисі (e_1, \dots, e_n) до координат цієї точки в базисі $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ здійснюється за допомогою лінійного перетворення

$$y^i = c^i_j x^j,$$

де $(c^i_j) = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right) = C$, $\det C \neq 0$.

Матрицю, що обернена до матриці C , будемо позначати через C^{-1} ; $C^{-1} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial y^i}\right)$.

Нехай вектор a в системі координат (e_1, \dots, e_n) має координати (a^1, \dots, a^n) , а в системі координат $(\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$ — $(\tilde{a}^1, \dots, \tilde{a}^n)$, тобто $a = a^i e_i = \tilde{a}^j \tilde{e}_j$.

Ці координати зв'язані співвідношенням

$$\tilde{a}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} a^j, \quad (3.1)$$

тобто $\tilde{a} = Ca$, звідси $a = C^{-1}\tilde{a}$, або

$$a^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tilde{a}^j. \quad (3.2)$$

Підставимо останній вираз у рівність $a = a^i e_i = \tilde{a}^j \tilde{e}_j$, тоді одержимо:

$$a = \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} \tilde{a}^j \right) e_i = \tilde{a}^j \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} e_i \right) = \tilde{a}^j \tilde{e}_j,$$

звідси випливає, що

$$\tilde{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} e_i.$$

3. Розглянемо в лінійному просторі лінійну форму f , яка в системі координат, що визначена базисом $e = (e_1, \dots, e_n)$, має вигляд $f = a_i x^i$, а в системі координат, яка визначена базисом $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n)$, — вигляд $f = \tilde{a}_j y^j$. Отже,

$$f = a_i x^i = \tilde{a}_j y^j.$$

Лінійна форма може бути задана своїми коефіцієнтами. Знайдемо зв'язок між коефіцієнтами лінійної форми у старому базисі e та новому базисі \tilde{e} . Згадаємо, що $x^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} y^j$, і підставимо цей вираз в останню рівність:

$$a_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} y^j \right) = \tilde{a}_j y^j, \text{ або } \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^j} a_i \right) y^j = \tilde{a}_j y^j.$$

Отже,

$$\tilde{a}_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} a_i. \quad (3.3)$$

Порівняємо одержану систему рівностей із формулами (3.1). Видно, що при переході до нової системи координат коефіцієнти лінійної форми змінюються за законом, що відрізняється від закону зміни координат вектора.

Зауваження. В курсі аналітичної геометрії розглядався дуальний базис. Згадаємо, що коли $e = (e_1, e_2, e_3)$ — деякий базис, взагалі кажучи, неортонормований, то дуальний базис e' задають вектори (e^1, e^2, e^3) , що задовольняють умовам

$$\langle e_i, e^j \rangle = \delta_i^j$$

більш точно:

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{(e_1, e_2, e_3)}; \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{(e_1, e_2, e_3)}; \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{(e_1, e_2, e_3)}.$$

Довільний вектор a простору можна розкласти як по базису e , так і по базису e' : $a = a^i e_i = a'_i e'_i$. Числа (a^1, a^2, a^3) називаються контраваріантними координатами вектора a ; числа (a_1, a_2, a_3) — коваріантними координатами.

Контраваріантні координати вектора при переході від старого базису e простору до нового базису e' змінюються за законом (3.1), а коваріантні координати — за законом (3.3).

Довести останнє твердження самостійно.

4. Нехай в просторі задана косокутна система координат. Розглянемо функцію $z = f(x^1, \dots, x^n)$. Вище названо градієнт функції f вектором; $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = (a_i)$. Але не кожний набір чисел є вектором.

Визначення. Вектором називається набір чисел $a = (a^1, \dots, a^n)$, що змінюється при переході від базису e простору до базису e' за законом (3.1).

З'ясуємо, чи буде $\text{grad } f$ вектором. Перейдемо в просторі від системи координат $x = (x^1, \dots, x^n)$ до системи координат $y = (y^1, \dots, y^n)$. У новій системі координат $\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial y^j} \right) = (\bar{a}_j)$. Оскільки

$$\frac{\partial f}{\partial y^j} = \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}, \text{ то } \bar{a}_j = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} a_k.$$

Компоненти градієнта функції змінюються за законом (3.3), отже, градієнт функції не є вектор.

5. Розглянемо першу квадратичну форму $I = g_{ij} dx^i dx^j$ поверхні. Нехай на поверхні є дві системи криволінійних координат: стара $x = (x^1, \dots, x^n)$ та нова $y = (y^1, \dots, y^n)$, що зв'язані співвідношеннями

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n).$$

Тоді

$$I = g_{ij} dx^i dx^j = \tilde{g}_{ks} dy^k dy^s.$$

Знайдемо, як зв'язані між собою коефіцієнти g_{ij} та \tilde{g}_{ks} . Оскільки $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, то $dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} dy^k$. Таким чином,

$$g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} dy^k dy^s = \tilde{g}_{ks} dy^k dy^s$$

звідки

$$\tilde{g}_{ks} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^s}.$$

Одержаний закон зміни набору величин відрізняється від усіх, що зустрічалися вище.

6. Нехай в просторі є базис e , в якому вектор u має координати (u^1, \dots, u^n) , вектор v — координати (v^1, \dots, v^n) . Розглянемо лінійний оператор A , що переводить вектор u у вектор v , тобто $v = Au$, або

$$v^i = A_j^i u^j. \quad (3.4)$$

З'ясуємо, як змінюються компоненти матриці $A = (A_j^i)$ при переході до нового базиса \tilde{e} простору. Якщо в просторі є базис \tilde{e} , то перетворення координат запишеться у вигляді $\tilde{v}^i = \tilde{A}_j^i \tilde{u}^j$. Тоді за формулою (3.2)

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^s} \tilde{v}^s; \quad u^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \tilde{u}^k.$$

Підставимо ці вирази в рівність (3.4):

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^p} \tilde{v}^p = A_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \tilde{u}^k.$$

Помножимо обидві частини останньої рівності на $\frac{\partial y^s}{\partial x^i}$ та здійснимо підсумовування:

$$\frac{\partial y^s}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial y^p} \tilde{v}^p = A_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \tilde{u}^k; \quad \delta_p^s \tilde{v}^p = A_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \tilde{u}^k,$$

звідси

$$v^s = A_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \tilde{u}^k.$$

Згадаємо, що $\tilde{v}^s = \tilde{A}_k^s \tilde{u}^k$, і одержимо

$$\tilde{A}_k^s \tilde{u}^k = A_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^i} \tilde{u}^k.$$

Таким чином,

$$\tilde{A}_k^s = A_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^i}.$$

7. Розглянемо матрицю $G^{-1} = (g^{ij})$, що обернена до невиврожденної матриці $G = (g_{ij})$. Самостійно довести, що

$$\tilde{g}^{ks} = g^{ij} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^s}{\partial x^j}.$$

Отже, одержано такі правила зміни наборів величин при переході від старої системи координат до нової:

$$1. \quad \tilde{a}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} a^j;$$

2. $\bar{a}_j = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} a_k$
3. $\bar{g}_{ks} = g_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^s}$
4. $\bar{A}_k^s = \bar{A}_j^i \frac{\partial x^j}{\partial y^k} \frac{\partial y^s}{\partial x^i}$
5. $\bar{g}^{ks} = g^{ij} \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \frac{\partial y^s}{\partial x^j}$

Визначення. Тензором типу (p, q) в n -вимірному просторі називається впорядкований набір із n^{p+q} чисел $T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$, де $1 \leq i_1 \leq n$; $1 \leq i_p \leq n$; $1 \leq j_1 \leq n$; $1 \leq j_q \leq n$, які при переході від базису e до нового базису \bar{e} змінюються за таким законом:

$$\bar{T}_{s_1, \dots, s_q}^{t_1, \dots, t_p} = T_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial y^{t_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{t_p}}{\partial x^{i_p}} \cdot \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{s_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{s_q}}$$

Число $p+q$ називається *рангом тензора*.

Із визначення випливає, що поняття тензора є узагальненням поняття вектора. Числа $T_{(j)}^{(i)}$ називаються координатами (компонентами) тензора. Верхні індекси називаються контраваріантними, а нижні — коваріантними.

Повернемося до прикладів.

1. Скаляр — тензор типу $(0, 0)$.
2. Вектор — тензор типу $(1, 0)$.
3. Градієнт функції — тензор типу $(0, 1)$.
4. Квадратична форма — тензор типу $(0, 2)$.
5. Лінійний оператор — тензор типу $(1, 1)$.
6. (g^{ij}) — тензор типу $(2, 0)$.

Наслідки визначення тензора:

1. Якщо тензор має нульові координати в деякому базисі, то він має нульові координати в будь-якому базисі.
2. Якщо два тензори однакового типу дорівнюють один одному в одній системі координат, то вони співпадають у будь-якій іншій системі координат.

Зауваження. Якщо в кожній точці області u лінійного дійсного n -вимірного простору визначено тензор типу (p, q) , то кажуть, що в області u задане тензорне поле.

Прикладами тензорних полів є перша та друга квадратичні форми поверхні.

Розглянемо застосування тензорів у механіці та фізиці:

1. Тензор деформації.

Нехай є матеріальне тіло, точки якого в деякій прямокутній системі координат мають координати (x^i) . Під дією сили тіло деформується, тобто кожна точка (x^i) тіла переходить у деяку нову точку (y^i) : $y^i = x^i + u^i(x)$, де функції $u^i(x)$ визначаються із фізичних міркувань та залежать від матеріалу, сили тощо. Далі вважаємо функції $u^i(x)$ відомими. Нехай при деформації близькі точки P та Q тіла перейшли відповідно в точки \bar{P} та \bar{Q} . Тоді якщо відстань між точками P та Q була $ds^2 = \sum_i (dx^i)^2$, то після деформації відстань між точками \bar{P} та \bar{Q} буде $\bar{d}s^2 = \sum_i (dx^i + du^i)^2$. Знайдемо та перетворимо різницю $\bar{d}s^2 - ds^2$:

$$\bar{d}s^2 - ds^2 = 2 \sum_i dx^i du^i + \sum_i (du^i)^2,$$

але $du^i = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k$, тому

$$\bar{d}s^2 - ds^2 = \left[\left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) + \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \right] dx^i dx^k.$$

Тензор

$$(u_{ik}) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} + \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial x^i} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \right)$$

називається тензором деформації пружного тіла.

Коли зміщення $u^i(x)$ та швидкість зміщення $\frac{\partial u^i}{\partial x^k}$ малі $\left(\left| \frac{\partial u^i}{\partial x^k} \right| < \varepsilon \right)$, то величинами $\frac{\partial u^i}{\partial x^i} \frac{\partial u^j}{\partial x^k}$ як величинами більш високого порядку малості нехтують і тензор деформації пружного тіла записують у вигляді $(u_{ik}) = \left(\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right)$. Останній вираз — це тензор деформації лінеаризованої теорії.

Тензор деформації є тензором типу $(0, 2)$.

2. Тензор напруження.

Розглянемо двовимірний майданчик, на який діє сила F ; вона виникає під дією зовнішніх сил та внутрішніх молекулярних сил. Нехай сила F не колінеарна нормалі до майданчика. Експериментально встановлено, що складова сили F , що напрямлена по нормалі до майданчика (позначимо її через n) зв'язана з F лінійним чином, тобто $F^i = p^i_j n^j$.

Сила F створює внутрішнє напруження. Тензор (p_j^i) — тензор типу $(1, 1)$ — називається тензором напруження. Експеримент показує, що тензор напруження симетричний, а якщо середовище ізотропне, то $p_j^i = p\delta_j^i$ (таку будову має тензор напруження у воді).

Мала деформація середовища викликає напруження, що лінійно залежить від деформації, тобто існує зв'язок між тензорами деформації (u_{kl}) та напруження (p_j^i) :

$$p_j^i = u_j^{ikl} u_{kl}.$$

Остання формула складає зміст закону Гука.

3. Тензор інерції.

Нехай матеріальна частинка з масою m рухається зі швидкістю v . Тоді її кінетична енергія $T = \frac{1}{2} mv^2$. Нехай рух частинки — це обертання навколо деякої осі в просторі, ρ — відстань від частинки до осі, ω — кутова швидкість матеріальної частинки. Тоді $v = \rho\omega$ і $T = \frac{1}{2} m\rho^2\omega^2 = \frac{1}{2} I\omega^2$.

Величина $I = m\rho^2$ називається моментом інерції відносно осі; I — аналог маси, оскільки при обертанні важлива не тільки маса, але й відстань від точки до осі обертання.

Нехай рух матеріальної точки складний, але відстань від частинки до деякої фіксованої точки O стала, тобто в будь-який момент часу рух матеріальної частинки — це обертання навколо деякої осі й всі осі обертання проходять через точку O . Можна обчислювати момент інерції відносно будь-якої із цих осей.

Імпульсом називається величина $p = mv$. Моментом імпульса називається величина $L = r \times mv$, де r — радіус-вектор точки. Легко перевірити, що момент імпульса L можна виразити через кутову швидкість ω лінійним чином: $L^i = I^{ij}\omega_j$. Кінетична енергія $T = \frac{1}{2} I^{ij}\omega_i\omega_j$. Величини I^{ij} — це компоненти тензора інерції.

Нехай вектор r має координати (x^1, x^2, x^3) , вектор ω — координати $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тоді

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m \langle r \times \omega, r \times \omega \rangle = \\ &= \frac{1}{2} m ((x^1\omega_2 - x^2\omega_1)^2 + (x^2\omega_3 - x^3\omega_2)^2 + (x^1\omega_3 - x^3\omega_1)^2). \end{aligned}$$

Порівнюючи два останні вирази для обчислювання кінетичної енергії, одержимо:

$$(I^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} m (r^2 - (x^1)^2) & -x^1 x^2 m & -x^1 x^3 m \\ -x^1 x^2 m & \frac{1}{2} m (r^2 - (x^2)^2) & -x^2 x^3 m \\ -x^1 x^3 m & -x^2 x^3 m & \frac{1}{2} m (r^2 - (x^3)^2) \end{pmatrix},$$

або $I^{ij} = m (r^2 \delta_{ij} - x^i x^j)$. Зауважимо, що $I^{ij} = I^{ji}$.

Згадаємо другий закон Ньютона: $F = am = mr''$. Оскільки $p = mv$, то $p' = F$. Далі, $L = r \times mv$, отже, $L' = r \times F$ (вектор $r \times F$ називається моментом сили). Якщо не діють зовнішні сили, то вектор L сталий по напрямку.

4. Тензор напруженості електромагнітного поля.

Нехай в області U тривимірного простору задані векторні поля $E = E(x, y, z, t)$ та $H = H(x, y, z, t)$, що залежать від часу. Тут E — вектор напруженості електричного поля, H — вектор напруженості магнітного поля.

На заряджену частинку діє сила $F = eE + \frac{e}{c} v \times H$, де e — заряд, v — його швидкість, c — швидкість світла.

Зауважимо, що H — аксіальний вектор, оскільки H змінить напрямок на протилежний, якщо змінити орієнтацію простору. Це випливає із останньої формули, в якій E, F, v — вектори, що зберігають напрямок при зміні орієнтації простору.

При переході до нової системи координат E змінюється як вектор або тензор типу $(1, 0)$, H — як векторний добуток. Але векторний добуток — це тензор другого рангу. Справді, розглянемо в базисі $e = (e_1, e_2, e_3)$ вектори $a = a^i e_i$, $b = b^j e_j$ та їх векторний добуток $a \times b = (a^i b^j - a^j b^i) e_i \times e_j$ ($i < j$). Нехай $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3)$ — новий базис простору і в ньому

$$a = \tilde{a}^i \tilde{e}_i; \quad b = \tilde{b}^j \tilde{e}_j; \quad a \times b = (\tilde{a}^s \tilde{b}^k - \tilde{a}^k \tilde{b}^s) \tilde{e}^s \times \tilde{e}_k, \quad s < k.$$

Введемо позначення: $a^i b^j - a^j b^i = p^{ij}$; $\tilde{a}^s \tilde{b}^k - \tilde{a}^k \tilde{b}^s = \tilde{p}^{sk}$ (очевидно, що $p^{ij} = -p^{ji}$). У цих позначеннях векторний добуток $a \times b = p^{ij} e_i \times e_j$ і $a \times b = \tilde{p}^{sk} \tilde{e}_s \times \tilde{e}_k$; звідси

$$p^{ij} e_i \times e_j = \tilde{p}^{sk} \tilde{e}_s \times \tilde{e}_k.$$

Підставимо в останню рівність вирази $e_i = c_i^k \tilde{e}_k$, $e_j = c_j^s \tilde{e}_s$ і одержимо:

$$p^{ij} c_i^k c_j^s \tilde{e}_k \times \tilde{e}_s = \tilde{p}^{sk} \tilde{e}_s \times \tilde{e}_k.$$

Отже, $\tilde{p}^{ks} = c_i^k c_j^s p^{ij}$. Якщо орієнтація простору зафіксована, то H при переході до нової системи координат змінюється як вектор.

Вектори E та H задовольняють рівнянням Максвелла

$$\begin{cases} \operatorname{div} H = 0; \\ \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}; \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} E = 4\pi\rho; \\ \operatorname{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} j. \end{cases}$$

Тут j — вектор струму, $j = \rho v$, де ρ — густина заряду в області U .

Рівняння Максвелла інваріантні відносно перетворень Лоренца.

Перетворення Лоренца — це такі перетворення, які зберігають квадратичну форму $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ — метрику простору $E_{1,3}^4$. У просторі $E_{1,1}^2$ ($ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$) перетворення Лоренца можуть бути задані системою рівнянь

$$\begin{cases} c\tilde{t} = ct \operatorname{ch} \psi + x \operatorname{sh} \psi; \\ \tilde{x} = ct \operatorname{sh} \psi + x \operatorname{ch} \psi. \end{cases}$$

Довести самостійно: для того щоб у просторі $E_{1,3}^4$ перетворення $\tilde{x} = Ax$, де $x = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$, $\tilde{x} = (\tilde{x}^0 = c\tilde{t}, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3)$, було перетворенням Лоренца, необхідно і достатньо, щоб матриця A задовольняла умові $AI A^T = I$, де

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки рівняння Максвелла інваріантні відносно перетворення Лоренца, вони повинні зручно записуватися в чотиривимірному просторі. Якщо розглядати рівняння Максвелла в чотиривимірному просторі $E_{1,3}^4$, то E та H потрібно розглядати в сукупності. Вектори E та H описують тензор (F_{ik}) електромагнітного поля:

$$(F_{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

У подальшому покажемо, що контраваріантні компоненти тензора напруженості електромагнітного поля можна записати у вигляді $F^{ik} = g^{is} g^{kt} F_{st}$, де $(g^{ts}) = I^{-1}$. Тоді

$$(F^{ik}) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix}.$$

і перші два рівняння Максвелла можна записати таким чином:

$$\frac{\partial F_{tk}}{\partial x^t} + \frac{\partial F_{kt}}{\partial x^k} + \frac{\partial F_{tt}}{\partial x^k} = 0, \quad (3.5)$$

а останні два —

$$\frac{\partial F^{tk}}{\partial x^k} = -\frac{4\pi}{c} j^t, \quad (3.6)$$

де $j = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v^1 \\ \rho v^2 \\ \rho v^3 \end{pmatrix}$ — чотиривимірний вектор струму.

Зауважимо, що рівняння (3.5) — це умова замкненості форми $F = F_{tk} dx^t \wedge dx^k$, тобто це рівняння можна записати у вигляді $dF = 0$, де dF — зовнішній диференціал форми F . Аналогічно можна записати рівняння (3.6). Введемо в розгляд 2-форму F^* , яка спряжена F . Її коефіцієнти визначаються таким чином:

$$F_{ik}^* = \frac{1}{2} \varepsilon_{iklm} F^{lm}, \quad F^{lm} = g^{lp} g^{mq} F_{pq},$$

де

$$(g^{tl}) = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix};$$

$$\varepsilon_{i_1, \dots, i_n} = \begin{cases} 1 & \text{при sign}(i_1, \dots, i_n) = 1; \\ -1 & \text{при sign}(i_1, \dots, i_n) = -1, \end{cases}$$

i_1, \dots, i_n — перестановка $1, 2, \dots, n$.

Тоді рівняння (3.6) можна записати так:

$d^*F = \frac{4\pi}{c} j$; де d^*F — 3-форма, j — 3-форма, яка спряжена 1-формі j .

Визначення. Нехай в області U дійсного n -вимірного простору введені криволінійні координати (x^1, \dots, x^n) . Якщо в області U задана квадратна форма

$$ds^2 = g_{ij}(x) dx^i dx^j, \quad \det(g_{ij}) \neq 0, \quad (3.7)$$

коефіцієнти якої утворюють тензор типу $(0, 2)$, то в U задана метрика.

Якщо квадратична форма (3.7) знаковизначена, то задана ріманова метрика; якщо форма (3.7) знаконевизначена, то — псевдоріманова.

Приклади. 1. Квадратична форма $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ задає метрику.

2. Квадратична форма $ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$ задає метрику Лобачевського, але в тривимірному просторі повної регулярної поверхні з такою метрикою немає.

3. Коли світло поширюється в однорідному середовищі на площині, то воно поширюється по геодезичних лініях ріманової метрики: $ds^2 = \lambda^2(x, y) (dx^2 + dy^2)$.

4. Ріманова метрика

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + \dots + (dx^n)^2}{(x^n)^2}$$

є метрикою багатовимірного простору Лобачевського.

5. Метрика псевдоевклідового простору-часу $E_{3,1}^4$ $ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ є псевдорімановою.

3.2. Алгебраїчні операції з тензорами

1. Лінійні операції. Тензори одного рангу можна додавати та множити на числа:

$$\lambda T_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_p} + \mu S_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_p}$$

Результат цієї операції — тензор того ж рангу.

У точці n -вимірного простору тензори одного рангу утворюють лінійний простір вимірності n^k , де $k = p + q$.

2. Переставлення індексів.

Переставлення двох верхніх індексів здійснюється за правилом:

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_k, \dots, i_s, \dots, i_p} = T_{i_1, \dots, i_q}^{i_s, \dots, i_k, \dots, i_1, \dots, i_p}$$

Переставлення нижніх індексів здійснюється аналогічно.

Здійснимо переставлення індексів у коваріантного тензора другого рангу $T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}$. За визначенням $S_{ij} = T_{ji}$, тобто тензору T ставиться у відповідність тензор S , в якого $S_{11} = T_{11}$; $S_{12} = T_{21}$; $S_{21} = T_{12}$; $S_{22} = T_{22}$. Таким чином, $S = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{pmatrix}$, тобто $S = {}^t T$. Отже, операція переставлення індексів однієї і тієї ж валентності є узагальненням операції транспонування матриці.

Розглянемо загальний випадок. Нехай є деяка підстановка $\sigma(i) = \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_p \\ \sigma(i_1), \dots, \sigma(i_p) \end{matrix} \right)$. Операцію переставлення

верхніх індексів можна задати системою рівностей

$$S_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_p} = T_{i_1, \dots, i_q}^{\sigma(i_1), \dots, \sigma(i_p)}.$$

Важливо, що тензор — впорядкований набір чисел: S та T як множини чисел співпадають, а як тензори, взагалі кажучи, ні.

3. Тензорний добуток.

Нехай є два тензори: тензор $T = (T_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_p})$ типу (p, q) та тензор $S = (S_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_k})$ типу (k, s) . Тензорним добутком двох тензорів називається тензор U типу $(p+k, q+s)$, координати якого мають вигляд

$$U_{i_1, \dots, i_q, j_{q+1}, \dots, j_{q+s}}^{i_1, \dots, i_p, i_{p+1}, \dots, i_{p+k}} = T_{i_1, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_p} S_{j_{q+1}, \dots, j_{q+s}}^{i_{p+1}, \dots, i_{p+k}}.$$

Зауважимо, що результат тензорного множення залежить від порядку співмножників.

Приклад. Розглянемо два вектори $a = (a^k)$ та $b = (b^s)$; це тензори типу $(1, 0)$. Їх тензорним добутком буде тензор $U = (U^{ks})$ типу $(2, 0)$. Записати самостійно матрицю тензора U .

Для позначення тензорного множення використовують знак \otimes : $U = T \otimes S$.

4. Згортання тензорів.

Операція згортання: кожному тензору $(T_{(j)}^i)$, $(i) = (i_1, \dots, i_p)$, $(j) = (j_1, \dots, j_q)$ типу (p, q) ставить у відповідність тензор типу $(p-1, q-1)$ за правилом:

$$\tilde{T}_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p} = T_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p}.$$

У правій частині рівності за індексом i проводиться підсумовування, тобто

$$T_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p} = T_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p} + \\ + T_{i_1, \dots, i_{l-2}, i_{l+1}, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{k-2}, i_{k+1}, \dots, i_p} + \dots + T_{i_1, \dots, i_{l-1}, i_{l+1}, \dots, i_q}^{i_1, \dots, i_{k-1}, i_{k+1}, \dots, i_p}.$$

Зокрема, якщо T — тензор типу $(1, 1)$, то операція згортання ставить у відповідність йому скаляр. Нехай $T = (T_j^i)$. Тоді $T_i^i = T_1^1 + T_2^2 + \dots + T_n^n$. Таким чином, згортання тензора (T_j^i) — це сума діагональних елементів матриці (T_j^i) , тобто слід матриці (T_j^i) .

Зауваження. Раніше уже розглянуто операцію згортання, хоча вона не була названа так. Ця операція важлива тим,

що дозволяє будувати інваріанти, які не залежать від системи координат.

Приклади. 1. У курсі аналітичної геометрії розглянуто скалярний добуток $\langle a, b \rangle$ векторів $a = a^k e_k$ та $b = b^s e_s$, що задані своїми координатами в косокутному базисі (e_1, \dots, e_n) : $\langle a, b \rangle = g_{ij} a^i b^j$, де $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Скалярний добуток інваріантний відносно вибору системи координат.

Розглянемо тензорний добуток $g \otimes a \otimes b$, де $g = (g_{ij})$; $a = (a^k)$; $b = (b^s)$; це тензор $C = (C_{ij}^{ks}) = (g_{ij} a^k b^s)$. Скалярний добуток $\langle a, b \rangle$ — це подвійне згортання тензора C :

$$\langle a, b \rangle = g_{ij} a^i b^j = C_{ij}^{ij}.$$

Таким чином, подвійне згортання тензора C — інваріант.

2. Нехай $G = (g_{ij})$ — матриця коефіцієнтів першої квадратичної форми поверхні, $B = (b_{ij})$ — матриця другої квадратичної форми. Згадаємо, що середня кривина поверхні $H = \frac{1}{2} g^{ij} b_{ij}$, де $(g^{ij}) = G^{-1}$.

Матриця G^{-1} — це тензор типу $(2, 0)$, B — тензор типу $(0, 2)$. Розглянемо тензорний добуток $C = G^{-1} \otimes B$: $C = (C_{ij}^{ks}) = (g^{ks} b_{ij})$. Здійснимо подвійне згортання тензора C і, розділивши його на 2, одержимо кривину поверхні: $H = \frac{1}{2} C_{ij}^{ij}$.

5. Підняття та опускання індексів.

Нехай $g = (g_{ij})$ — тензор типу $(0, 2)$, що задає ріманову або псевдоріманову метрику. В присутності метрики g_{ij} можна здійснити операцію опускання індексів тензора. Якщо $T = (T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q})$ — тензор типу (p, q) , то можна побудувати тензор $(T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q})$ типу $(p-1, q+1)$, взявши до уваги

$$T_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_q} = g_{i_1 k} T_{i_2, \dots, i_p}^{k j_1, \dots, j_q}.$$

У правій частині останньої рівності стоїть згортання тензорного добутку $g \otimes T$.

Зокрема, якщо $T = (T^i)$ — тензор типу $(1, 0)$, тобто вектор, то операція опускання індексу ставить йому у відповідність тензор типу $(0, 1)$, тобто ковектор, за правилом: $T_i = g_{is} T^s$.

Для підняття нижніх індексів при наявності метрики g_{ij} використовують тензор g^{ij} з матрицею $G^{-1} = (g^{ij})$:

$$T_{i_2, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_p} = g^{i_1 k} T_{k i_2, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_p}.$$

Операція підняття індексів ставить у відповідність тензору типу (p, q) тензор типу $(p + 1, q - 1)$. Зокрема, $T^i = g^{is} T_s$.

Зауваження. Операції підняття та опускання індексів уже зустрічалися, але вони не були названі так.

Приклади. 1. Згадаємо поняття дуального базису. Нехай (e_1, e_2, e_3) — деякий базис простору, в якому знаходиться вектор $a = a^i e_i$. Дуальний базис складається із векторів

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{(e_1, e_2, e_3)}; \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{(e_1, e_2, e_3)}; \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{(e_1, e_2, e_3)}.$$

Розклад вектора a по базису (e^1, e^2, e^3) має вигляд $a = a_i e^i$. Вище показано, що $a_i = g_{is} a^s$.

У курсі аналітичної геометрії зазначено, що $\langle a, b \rangle = g_{ij} a^i b^j = a_j b^j$.

2. Згадаємо формули Вейнгартена:

$$n_j = -g^{sk} b_{kj} r_s.$$

Матриця (b_{kj}) — це тензор типу $(0, 2)$. За допомогою тензора g^{sk} можна підняти індекс у b_{kj} : $g^{sk} b_{kj} = b_j^s$. Отже, $n_j = -b_j^s r_s$.

3. Операція підняття індексів використовувалася при переході від коваріантних до контраваріантних компонент тензора напруженості електромагнітного поля.

3.3. Диференціальні операції з тензорами.

Коваріантне диференціювання

Нехай в області простору задана регулярна функція $f = f(x^1, \dots, x^n)$, де (x^1, \dots, x^n) — декартові координати. Як показано раніше, $\text{grad} f$ — тензор типу $(0, 1)$. Нехай тепер в тій же області простору задане векторне поле $T = (T^i)$, компоненти якого є регулярні функції координат (x^1, \dots, x^n) . Розглянемо $T_k^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^k}$ і з'ясуємо, як будуть змінюватися T_k^i при переході від декартових координат (x^1, \dots, x^n) до криволінійних координат (y^1, \dots, y^n) , що зв'язані з декартовими системою рівнянь

$$y^i = y^i(x^1, \dots, x^n), \quad \det \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right) \neq 0.$$

Нехай в системі координат (y^1, \dots, y^n) вектор $T = (T^i)$.

$$\text{Тоді } \tilde{T}^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^j} T^j$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_s^i &= \frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial y^s} = \frac{\partial}{\partial y^s} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} T^j \right) = \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} T^j \right) = \\ &= \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} T^j + \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial T^j}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^s}. \end{aligned}$$

Отже, при всіх лінійних замінах координат тензор $\frac{\partial T^i}{\partial x^k}$ перетворюється як тензор типу (1, 1), оскільки $\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} = 0$. У загальному випадку це не так: якщо (T^i) — вектор, то $\frac{\partial T^i}{\partial x^k}$ не є тензор.

З'ясуємо, як потрібно ввести операцію диференціювання вектора (T^i) , тобто тензора типу (1, 0), щоб в результаті її застосування одержати тензор типу (1, 1) і щоб в афінній системі координат тензор співпадав зі звичайною похідною $\frac{\partial T^i}{\partial x^k}$. Оскільки $T^i = \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \tilde{T}^k$, то

$$\tilde{T}_s^i = \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \tilde{T}^l + \frac{\partial T^i}{\partial x^k} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial y^s},$$

або

$$\frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial y^s} - \frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^l} \tilde{T}^l = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

Позначимо $-\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial x^j}{\partial y^l}$ через Γ_{sl}^i і запишемо останню рівність у вигляді

$$\frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial y^s} + \Gamma_{sl}^i \tilde{T}^l = \frac{\partial T^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial y^s} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}.$$

Вираз $\frac{\partial \tilde{T}^i}{\partial y^s} + \Gamma_{sl}^i \tilde{T}^l$ позначимо через $\nabla_s \tilde{T}^i$ і назовемо коваріантною похідною \tilde{T}^i .

Результатом коваріантного диференціювання є тензор. Крім того, в афінних координатах коваріантна похідна обчислюється за звичайними формулами: $\nabla_s T^i = \frac{\partial T^i}{\partial x^s}$, оскільки

$$\frac{\partial^2 y^i}{\partial x^k \partial x^j} = 0.$$

Подібним чином

$$\nabla_s \tilde{T}_i = \frac{\partial \tilde{T}_i}{\partial x^s} - \Gamma_{is}^k \tilde{T}_k; \quad \nabla_s \tilde{T}^{ij} = \frac{\partial \tilde{T}^{ij}}{\partial x^s} + \Gamma_{sk}^i \tilde{T}^{kj} + \Gamma_{sk}^j \tilde{T}^{ik}.$$

Вправи. 1. Записати самостійно коваріантні похідні $\nabla_s \tilde{T}_{ij}$ та $\nabla_s \tilde{T}^i_j$.

2. Перевірити, що для тензорів S та T і скалярів λ та μ

$$\begin{aligned} \nabla(\lambda S + \mu T) &= (\nabla\lambda)S + \lambda(\nabla S) + (\nabla\mu)T + \mu(\nabla T); \\ \nabla(S \otimes T) &= (\nabla S) \otimes T + S \otimes (\nabla T). \end{aligned}$$

Зауважимо, що в евклідовому просторі існує така система координат (а саме декартова), в якій всі $\Gamma_{is}^k = 0$.

Визначення. Нехай в області афінного простору задані криволінійні координати (x^1, \dots, x^n) . Зв'язністю називається набір функцій $\Gamma_{jq}^i(x)$, які при переході до нових криволінійних координат (y^1, \dots, y^n) області змінюються за законом

$$\tilde{\Gamma}_{lp}^k = \frac{\partial x^k}{\partial y^l} \left(\Gamma_{jq}^i \frac{\partial y^j}{\partial x^l} \frac{\partial y^q}{\partial x^p} + \frac{\partial^2 y^k}{\partial x^l \partial x^p} \right).$$

Зв'язність називається симетричною, коли $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i$.

За допомогою набору функцій Γ_{jq}^i , що задають зв'язність, можна визначити коваріантну похідну так, як це зроблено вище.

Зауваження. Γ_{is}^k не є тензором.

Визначення. Нехай в області задана метрика квадратичною формою $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ і зв'язність. Зв'язність називається узгодженою з метрикою, коли $\nabla_r g_{ij} = 0$ для будь-яких r, i, j .

Природно виникає запитання: якщо в області задані метрика, то скільки існує симетричних зв'язностей, які узгоджені з метрикою?

Теорема 19. Існує єдина симетрична зв'язність, яка узгоджена з метрикою (g_{ij}) , а саме:

$$\Gamma_{ij}^k = g^{ks} \Gamma_{ij, s} = \frac{1}{2} g^{ks} \left(\frac{\partial g_{is}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} \right).$$

Доведення. Існування доводиться прямою перевіркою того, що записана вище зв'язність задовольняє умовам теореми. Доведемо тепер єдиність.

Нехай Γ_{ij}^k задають симетричну зв'язність, яка узгоджена з метрикою. Тоді

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$$

і

$$\nabla_s g_{ij} = 0,$$

але

$$\nabla_s g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^s} - \Gamma_{is}^k g_{kj} - \Gamma_{js}^k g_{ki}.$$

Таким чином,

$$\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^s} - \Gamma_{is}^k g_{kj} - \Gamma_{js}^k g_{ki} = 0.$$

Згідно з визначенням операції опускання індексу

$$\Gamma_{is}^k g_{kj} = \Gamma_{is, j}, \quad \Gamma_{js}^k g_{ki} = \Gamma_{js, i},$$

і тому останнє рівняння можна записати у вигляді

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik, j} + \Gamma_{jk, i}.$$

Переставляючи циклічно індекси i, j, k , одержимо систему трьох рівнянь:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \Gamma_{ik, j} + \Gamma_{jk, i}$$

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = \Gamma_{ji, k} + \Gamma_{ki, j}$$

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = \Gamma_{kj, i} + \Gamma_{ij, k}$$

Домножимо перше рівняння системи на -1 і додамо до нього друге та третє рівняння. Одержимо:

$$\Gamma_{ij, k} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right).$$

Таким чином, знаючи (g_{ij}) , однозначно відновимо $\Gamma_{ij, k}$. Згадаємо, що $\Gamma_{ij, k} = \Gamma_{ij}^s g_{sk}$ і що $\det(g_{sk}) \neq 0$. Отже, по $\Gamma_{ij, k}$ однозначно відновляється Γ_{ij}^s . Справді, $g^{ks} \Gamma_{ij, k} = \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{ks}$; але $g_{lk} g^{ks} = \delta_l^s$; отже, $\Gamma_{ij}^s = g^{ks} \Gamma_{ij, k}$.

Згадаємо формули Вейнгартена:

$$r_{ij} = \Gamma_{ij}^k r_k + b_{ij} n,$$

де $r = r(u^1, u^2)$ — радіус-вектор поверхні в тривимірному евклідовому просторі; $r_1 = r_{u^1}$, $r_2 = r_{u^2}$ — векторні поля вздовж цієї поверхні. Подивимося на формули Вейнгартена з точки зору коваріантного диференціювання.

По r_1 та r_2 можна відновити векторні поля в деякій області простору E^3 : потрібно розглянути поверхні з радіус-вектором $R = r(u^1, u^2) + \lambda n(u^1, u^2)$, що паралельні даній, та побудувати вздовж них векторні поля, дотичні до координатних ліній. Позначимо через $\tilde{\nabla}$ коваріантну похідну з метрикою в евклідовому просторі. В декартових координатах коваріантна похідна векторного поля співпадає зі звичайною похідною, тому $\tilde{\nabla}_j r_i = r_{ij}$.

Розглянемо тепер перший доданок $\Gamma_{11}^k r_k$ правої частини формули Вейнгартена $r_{11} = \Gamma_{11}^k r_k + b_{11} n$: $\Gamma_{11}^k r_k = \Gamma_{11}^1 r_1 + \Gamma_{11}^2 r_2$. Покажемо, що $\Gamma_{11}^k r_k$ співпадає з $\nabla_1 r_1$ — коваріантною похідною векторного поля r_1 у зв'язності поверхні. В кожній точці поверхні пара векторів (r_1, r_2) задає базис дотичної площини. В цьому базисі $r_1 = (1, 0)$. За визначенням коваріантної похідної векторного поля $T = (T^k)$ маємо $\nabla_i T^k = \frac{\partial T^k}{\partial u^i} + \Gamma_{is}^k T^s$. Компоненти векторного поля r_1 такі: $T^1 = 1$; $T^2 = 0$. Отже, $\nabla_1 T^1 = \Gamma_{11}^1$; $\nabla_1 T^2 = \Gamma_{11}^2$ і, таким чином, $\nabla_1 r_1 = \Gamma_{11}^1 r_1 + \Gamma_{11}^2 r_2$.

У результаті першу формулу Вейнгартена можна записати у вигляді

$$\tilde{\nabla}_1 r_1 = \nabla_1 r_1 + b_{11} n,$$

де $\tilde{\nabla}_1 r_1$ — коваріантна похідна векторного поля r_1 в охоплюючому евклідовому просторі; $\nabla_1 r_1$ — коваріантна похідна векторного поля r_1 вздовж поверхні в зв'язності поверхні. Зауважимо, що векторне поле $\tilde{\nabla}_1 r_1$ не лежить у дотичних площинах до поверхні, а $\nabla_1 r_1$ — це проекція $\tilde{\nabla}_1 r_1$ на дотичну площину. Подібним чином можна записати формули Вейнгартена:

$$\tilde{\nabla}_1 r_2 = \nabla_1 r_2 + b_{12} n;$$

$$\tilde{\nabla}_2 r_2 = \nabla_2 r_2 + b_{22} n.$$

Отже, одержано таку інтерпретацію формул Вейнгартена. Зв'язність на поверхні породжується так: потрібно взяти коваріантну похідну в охоплюючому просторі векторного поля, дотичного до поверхні, і спроекувати її на дотичну площину до поверхні.

Визначення. Нехай в деякій області задані симетрична зв'язність та векторне поле $T(x)$. Нехай $\xi = (\xi^i)$ — вектор у фіксованій точці області. Коваріантною похідною векторного поля T у напрямі ξ називається

$$\nabla_{\xi} T^k = \xi^i \nabla_i T^k.$$

Коваріантна похідна векторного поля вздовж вектора сама є векторним полем. Справді, $(\nabla_i T^k)$ — тензор типу $(1, 1)$, (ξ^i) — тензор типу $(1, 0)$, згортання $(\xi^i \nabla_i T^k)$ — тензор типу $(1, 0)$, тобто векторне поле. Зауважимо, що $\nabla_{\xi} T^k = (\nabla_{\xi} T)^k$ — це k -координата вектора $\nabla_{\xi} T$.

Для скалярів f (тензорів нульового рангу) операція обчислення коваріантної похідної вздовж вектора ξ в даній точці має вигляд $\nabla_{\xi} f = \xi^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$, тобто співпадає з похідною функції f по напрямку ξ в даній точці.

Легко перевірити, що

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu_1 \xi_1 + \mu_2 \xi_2} T &= \mu_1 \nabla_{\xi_1} T + \mu_2 \nabla_{\xi_2} T; \\ \nabla_{\xi} (fT) &= (\nabla_{\xi} f) T + f \nabla_{\xi} T, \end{aligned}$$

де μ_1, μ_2 — скаляри; f — функція.

Визначення. Нехай в деякій області з координатами (x^1, \dots, x^n) задані симетрична зв'язність Γ , векторне поле T та регулярна крива $L: x^i = x^i(t)$, $\sum_i \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)^2 \neq 0$;

$\xi = (\xi^i) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial t}\right)$ — їх векторне поле, що дотичне до кривої. Векторне поле T називається паралельним вздовж кривої L , якщо його коваріантна похідна вздовж цієї кривої дорівнює нулю, тобто

$$\nabla_{\xi} T = 0, \text{ або } \nabla_{\xi} T^k = \frac{\partial x^i}{\partial t} \left(\frac{\partial T^k}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^k T^s \right) = 0.$$

Отже, коли векторне поле T паралельне вздовж кривої L , то воно задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dT^k}{dt} + \Gamma_{is}^k T^s \frac{dx^i}{dt} = 0. \quad (3.8)$$

Із курсу диференціальних рівнянь випливає, що система рівнянь (3.8) має єдиний розв'язок, який задовольняє початковим умовам $T(t_0) = T_0$; тобто коли задані довільна регулярна крива L та вектор T_0 в точці кривої, що відповідають значенню параметра $t = t_0$, то існує

і притому єдине паралельне векторне поле вздовж цієї кривої, яке співпадає з вектором T_0 при $t = t_0$.

Якщо задана ненульова зв'язність, то результат паралельного переносу залежить від кривої.

В евклідовому просторі паралельне перенесення не залежить від кривої. Справді, в декартових координатах евклідового простору для зв'язності, узгодженої з метрикою, всі $\Gamma_{ij}^k = 0$ і рівняння (3.8) набувають вигляду $\frac{dT^k}{dt} = 0$, тобто паралельні векторні поля — це поля, які мають в евклідових координатах сталі компоненти.

Очевидно, що введене вище паралельне перенесення вектора є узагальненням перенесення в евклідовому просторі.

Розглянемо окремий випадок, коли $T^k = \frac{dx^k}{dt}$ і векторне поле $T = (T^k)$ є дотичним векторним полем кривої L . Підставимо $T^k = \frac{dx^k}{dt}$ в рівняння (3.8), вони наберуть вигляду

$$\frac{d^2x^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0.$$

Визначення. Крива $x^i = x^i(t)$ називається геодезичною лінією даної зв'язності Γ , якщо дотичне векторне поле $T = \left(\frac{dx^i}{dt}\right)$ до цієї кривої паралельне вздовж неї, тобто $\nabla_T T = 0$.

Зараз доведено ще одну властивість геодезичних на поверхні: вектор, що дотичний до геодезичної в деякій точці, після паралельного перенесення вздовж неї переходить в дотичний до неї вектор.

Будемо в подальшому розглядати ріманову зв'язність, тобто симетричну зв'язність, що узгоджена з метрикою.

Твердження. Нехай в деякій області з координатами (u^1, \dots, u^n) задані метрика $g_{ij}(u)$, її ріманова зв'язність Γ , регулярна крива $L: u^i = u^i(t)$ і два векторних поля $X = (x^i(t))$ та $Y = (y^i(t))$, що паралельні вздовж L . Тоді вздовж L коваріантна похідна $\nabla_{\xi} \langle X, Y \rangle = 0$, де $\xi = \left(\frac{du^i}{dt}\right)$, тобто кут між X та Y і їх довжини не змінюються при паралельному перенесенні вздовж кривої.

Доведення. Оскільки $\langle X, Y \rangle = g_{ij}x^iy^j$, то

$$\begin{aligned} \nabla_{\xi} \langle X, Y \rangle &= \frac{du^k}{dt} \nabla_k (g_{ij} x^i y^j) = \frac{du^k}{dt} (\nabla_k g_{ij}) x^i y^j + \\ &+ \frac{du^k}{dt} g_{ij} (\nabla_k x^i) y^j + \frac{du^k}{dt} g_{ij} x^i \nabla_k y^j. \end{aligned}$$

Але $\nabla^k g_{ij} = 0$, оскільки зв'язність узгоджена з метрикою, а $\frac{du^k}{dt} \nabla^k x^i = 0$; $\frac{du^k}{dt} \nabla_k y^j = 0$, тому що векторні поля X, Y паралельні вздовж L . Отже, $\nabla_{\xi} \langle X, Y \rangle = 0$.

3.4. Тензор кривини

Нехай в області евклідового простору з прямокутними декартовими координатами (x) задане векторне поле $T = (T^k(x))$, $T^k(x) \in C^2$. Тоді $\nabla_i T^k = \frac{\partial T^k}{\partial x^i}$, оскільки всі $\Gamma_{ij}^k = 0$ і

$$(\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) T^k = 0, \quad (3.9)$$

через те що

$$\frac{\partial^2 T^k}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 T^k}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Нехай в цій області введені довільні криволінійні координати (u) . Тоді $\Gamma_{ij}^k \neq 0$; $\nabla_i T^k = \frac{\partial T^k}{\partial u^i} + \Gamma_{ij}^k T^j$. Але $(\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) T^k = 0$, оскільки $(\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) T^k$ — тензор типу $(1, 2)$, а якщо тензор дорівнює нулю в деякій системі координат, то він буде дорівнювати нулю в будь-якій системі координат.

Отже, якщо взяти будь-яку криволінійну систему координат в евклідовому просторі, коваріантні похідні комутують і $(\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) T^k = 0$.

З'ясуємо, чи будуть виконуватися умови (3.9) в довільній області з метрикою (g_{ij}) і зв'язністю Γ , що відповідає цій метриці. Коваріантні похідні векторного поля

$$\nabla_i T^k = T_i^k = \frac{\partial T^k}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^k T^s; \quad \nabla_j T^k = T_j^k = \frac{\partial T^k}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^k T^s$$

є тензори типу $(1, 1)$. Знайдемо коваріантні похідні цих тензорів:

$$\begin{aligned} \nabla_j (\nabla_i T^k) &= \nabla_j T_i^k = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^k T_i^s - \Gamma_{ij}^s T_s^k; \\ \nabla_i (\nabla_j T^k) &= \nabla_i T_j^k = \frac{\partial T_j^k}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^k T_j^s - \Gamma_{ij}^s T_s^k. \end{aligned}$$

Складемо такі різниці:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_i^k}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j^k}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\frac{\partial T^k}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^k T^s \right) - \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial T^k}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^k T^s \right) = \\ &= \left(\frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} \right) T^s + \left(\Gamma_{is}^k \frac{\partial T^s}{\partial x^j} - \Gamma_{js}^k \frac{\partial T^s}{\partial x^i} \right); \end{aligned}$$

$$\Gamma_{ji}^k T^l - \Gamma_{ii}^k T_j^l = \Gamma_{il}^k \left(\frac{\partial T^l}{\partial x^i} + \Gamma_{is}^l T^s \right) - \Gamma_{il}^k \left(\frac{\partial T^l}{\partial x^j} + \Gamma_{js}^l T^s \right).$$

Складемо останні дві формули і одержимо:

$$\begin{aligned} (\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) T^k &= \\ &= \left[\left(\frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} \right) + (\Gamma_{il}^k \Gamma_{is}^l - \Gamma_{il}^k \Gamma_{js}^l) \right] T^s. \end{aligned}$$

Введемо позначення:

$$R_{stj}^k = \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{js}^k}{\partial x^i} + \Gamma_{il}^k \Gamma_{is}^l - \Gamma_{il}^k \Gamma_{js}^l.$$

Тоді

$$(\nabla_j \nabla_i - \nabla_i \nabla_j) T^k = R_{stj}^k T^s.$$

Визначення. Тензор R_{stj}^k називається тензором кривини метрики g_{ij} .

Із останньої формули випливає таке твердження.

Твердження. Необхідною і достатньою умовою того, щоб коваріантні похідні комутували, є рівність нулю тензора кривини.

Тензор $R_{kstj} = g_{kl} R_{stj}^l$ називається тензором кривини.

Легко перевірити, що

$$\begin{aligned} R_{ijk} &= R_{kij}; \quad R_{ijk} = -R_{ikj}; \quad R_{ijk} = -R_{ikj}; \\ R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} &= 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Досить показати, що рівності правильні в системі координат, де $g_{ij} = \delta_{ij}$ і всі $\Gamma_{ij}^k = 0$. Така система координат в рімановому просторі є повним аналогом півгеодезичної системи координат на поверхні. Оскільки R_{ijkl} — тензор, то із правильності рівностей в спеціальній системі координат випливає правильність їх в будь-якій іншій системі координат.

Із системи рівностей (3.10) випливає, що в двовимірному випадку тільки одна компонента тензора кривини істотна,

а саме: $R_{1212} \neq 0$. Всі інші або одержуються із неї зміною знака, або дорівнюють нулю.

Довести самостійно, що в тривимірному просторі буде шість незалежних компонент тензора кривини: R_{1212} , R_{1313} , R_{2323} , R_{1323} , R_{2131} , R_{1223} .

Згадаємо, що гауссова кривина двовимірної поверхні

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Із формули Гаусса (2.14) випливає, що $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = R_{1212}$. Таким чином, гауссова кривина двовимірної поверхні

$$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Із цієї формули випливає: 1) якщо $K=0$, то коваріантні похідні комутують; 2) якщо в двовимірному просторі тензор $(R_{ijkl}) = 0$, то поверхня локально ізометрична площині.

Подібне твердження правильне і в багатовимірному випадку: якщо $(R_{ijkl}) = 0$, то метрика локально ізометрична метриці евклідового простору.

Задача для самостійного розв'язання. Знайти тензор кривини метрики

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{(x^3)^2}.$$

3.5. Кривина ріманового простору в двовимірних напрямках

Вище визначено гауссову кривину двовимірної поверхні. Природно виникає запитання: як визначити кривину багатовимірної поверхні? Виявляється, що в рімановому просторі є декілька кривин.

Визначення. 1. Тензор $R_{sj} = R^k_{skj}$ називається тензором Річчі.

2. Скалярною кривиною називається $R = g^{sj}R_{sj} = R^j_j$.

Вправа. Довести, що в двовимірному просторі $K = \frac{R}{2}$.

3. Кривиною Річчі в напрямку вектора T називається

$$K(T) = \frac{R_{ij}T^iT^j}{g_{ij}T^iT^j}.$$

4. Кососиметричний тензор другого рангу $T = (T^{ij})$, $T^{ji} = -T^{ij}$ називається бівектором. Бівектор називається

простим, якщо $T^{ij} = X^i Y^j - Y^i X^j$, де $(X^i) = X$, $(Y^i) = Y$ — вектори.

Простий бівектор визначає двовимірну площину, що натягнута на вектори X, Y .

5. Простий бівектор $T = (X^i Y^j - Y^i X^j)$ дорівнює бівектору $T' = (X'^i Y'^j - Y'^i X'^j)$, якщо вектори $X' = (X'^i)$, $Y' = (Y'^i)$ задають ту ж площину, що і вектори $X = (X^i)$, $Y = (Y^i)$, а площі паралелограмів, натягнутих на вектори X, Y та X', Y' , співпадають.

Зауважимо, що прості бівектори вже розглядалися в курсі аналітичної геометрії, коли вивчався векторний добуток.

6. Кривиною ріманового простору по двовимірному напрямку (секційною кривиною), натягнутому на вектори X, Y , називається величина

$$K(X, Y) = \frac{R_{ijkl} T^{ij} T^{kl}}{(g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}) T^{ij} T^{kl}},$$

де $T^{nm} = X^n Y^m - Y^n X^m$.

Секційна кривина ріманового простору залежить від двовимірної площини, але не залежить від X, Y , які визначають цю площину.

У двовимірному рімановому просторі секційна кривина співпадає з гауссовою кривиною. Справді,

$$K(X, Y) = \frac{R_{1212} (T^{12})^2}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

За вектори X, Y беремо відповідно $(1, 0)$ та $(0, 1)$. Тоді

$$T^{12} = 1 \text{ і } K(X, Y) = \frac{R_{1212}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} = K.$$

Існують простори, в яких кривина $K(X, Y)$ стала.

Приклад. Якщо метрика

$$ds^2 = \frac{4((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2)}{(1 + (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^2},$$

то секційна кривина $K(X, Y) = 1$; якщо $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2$, то $K(X, Y) = 0$; якщо

$$ds^2 = \frac{4((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2)}{(1 - (x^1)^2 - \dots - (x^n)^2)^2}, \text{ то } K(X, Y) = -1.$$

Ріманові простори знаходять широке застосування у фізиці. В останній час глибоко вивчена глобальна будова ріманових просторів знакосталої кривини.

Глава 4

ЗАГАЛЬНА ТОПОЛОГІЯ

Топологія — це наука про розташування (від грецьк. *топос* — місце, *логос* — вчення). Термін «топологія» ввів у 1847 р. німецький математик і фізик Лістінг. Але деякі топологічні результати з'явилися раніше. До Лістінга топологічні задачі розв'язували, наприклад, швейцарський математик Ейлер, німецький математик Гаусс.

Які предмет та методи топології в ряду інших геометричних наук? Елементарна геометрія вивчає властивості фігур, які не змінюються при русі. Основний інваріант руху — відстань між двома точками. Аналітична геометрія вивчає афінні та проєктивні перетворення. Афінна геометрія розглядає ті властивості фігур, які інваріантні відносно афінних перетворень. Основний інваріант афінних перетворень — просте відношення точок. Властивості фігур, що інваріантні відносно проєктивних перетворень, вивчає проєктивна геометрія. Основний інваріант проєктивного перетворення — складне відношення чотирьох точок.

Топологія вивчає властивості фігур, інваріантні відносно більш загальних перетворень. Наприклад, є галузь топології, яка вивчає властивості фігур, що інваріантні відносно неперервних, зокрема топологічних, перетворень, тобто гомеоморфізмів. Використовується метод введення інваріантів (чисельних або групових), які більш прості, ніж об'єкти, що розглядаються. Якщо фігури гомеоморфні, то відповідні інваріанти в них повинні бути однаковими. Якщо інваріанти різні, то фігури не гомеоморфні. Якщо інваріанти однакові, то це, звичайно, не означає, що фігури обов'язково гомеоморфні.

Галузь топології, яка розглядає алгебраїчні інваріанти, називається алгебраїчною топологією. Теоретико-множинні інваріанти вивчає загальна топологія.

Питання, що мають топологічний характер, вивчав Гаусс. Йому належить постановка такої задачі: є дві замкнені криві в просторі: як узнати, зачеплені вони чи ні?

Ріман ввів поняття зв'язності та роду поверхні.

У 1863 р. німецький математик Мебіус навів приклад поверхні, що не може бути орієнтованою. Він відкрив односторонню поверхню, яку назвали листком Мебіуса. Листок Мебіуса можна одержати із прямокутника, якщо склеїти його так, як показано на рис. 4.

Пізніше Клейн відкрив поверхню, що була названа пляшкою Клейна. Її можна одержати із прямокутника, якщо склеїти його так, як показано на рис. 4.1.

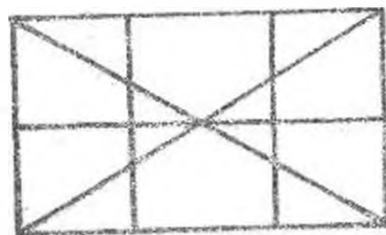


Рис. 4.1

Зауважимо, що у тривимірному просторі пляшки Клейна без самоперерізів не існує. Основи алгебраїчної топології заклав Пуанкаре.

Кантор розробив основи теорії множин, що дозволило почати створення загальної топології.

Поняття топологічного простору дав у 1914 р. Хаусдорф.

У СРСР топологією почали займатися в 20-х роках. Перші радянські топологи — П. С. Урисон, П. С. Александров, А. М. Колмогоров. Зараз топологія знаходить все більше застосування в теоретичній фізиці.

Топологія вивчає ідею неперервності в найбільш загальній ситуації. Одна із задач топології — узагальнити ідею неперервності для більш складних об'єктів. Розглянемо, наприклад, деякі теореми аналізу.

Теорема. Якщо неперервна функція $y=f(x)$ визначена на сегменті $[a, b]$ і $f(a) f(b) < 0$, то існує точка $\xi \in (a, b)$, в якій $f(\xi) = 0$.

Теорема. Неперервна функція, що задана на відрізку, досягає своїх найменшого та найбільшого значень.

Природно виникає запитання: як узагальнити ці теореми? Як сформулювати їх для функцій багатьох змінних? Відповідь на це запитання дає топологія.

Отже, потреба в топології виникає вже при намаганні узагальнити класичні теореми аналізу.

4.1. Топологічні простори

Визначення. Нехай X — множина і Ω — сукупність її підмножин, що задовольняють таким умовам:

1) $\emptyset, X \in \Omega$; 2) якщо $U_1, U_2 \in \Omega$, то $U_1 \cap U_2 \in \Omega$; 3) об'єднання будь-якої сукупності множин із Ω належить Ω .

Така сукупність Ω підмножин множини X називається топологією на X . Множина X разом з Ω називається топологічним простором і позначається через (X, Ω) .

Множини $U \in \Omega$ називаються відкритими множинами топологічного простору (X, Ω) . Елементи множини X називаються точками простору (X, Ω) .

Околом точки в топологічному просторі називається будь-яка відкрита множина, що має в собі цю точку.

Приклади. 1. Нехай X — довільна множина, Ω складається із усіх підмножин множини X . Така топологія називається дискретною.

2. Нехай X — довільна множина, $\Omega = \{\emptyset, X\}$. Така топологія називається антидискретною, або тривіальною.

3. Нехай множина X складається із двох точок: $X = \{a, b\}$. Тоді на X можна задати чотири топології: а) $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}\}$ є антидискретна топологія; б) $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$ є дискретна топологія; в) $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$; г) $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}\}$.

4. Нехай множина X складається із трьох точок: $X = \{a, b, c\}$. Розглянемо деякі топології на X : а) $\Omega = \{\emptyset, \{a, b, c\}\}$ — антидискретна топологія; б) $\Omega = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ — дискретна топологія; в) $\Omega = \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$.

Вправа 1. Записати всі можливі топології на множині $X = \{a, b, c, d\}$.

Вправа 2. З'ясувати, скільки різних топологій існує на множині $X = \{a, b, c, d, e\}$.

5. Розглянемо дійсну вісь R і введемо на ній різні топології.

Множина U на осі R є відкритою при виконанні такої умови: якщо точка $x \in U$, то існує таке $\varepsilon > 0$, що інтервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \in U$. Ця топологія називається природною.

Нижче опишемо всі відкриті множини на прямій в природній топології.

Можна задати топологію на дійсній прямій так:

$$\Omega = \{\emptyset, R, \{(-\infty, x) \mid x \in R\}\}.$$

Вправа. Довести, що дійсна пряма з набором множин $\Omega = \{\emptyset, R, \{(-\infty, x) \mid x \in R\}\}$ не є топологічним простором.

Зауваження. Вимога скінченності кількості відкритих множин в пункті 2 визначення топологічного простору істотна. Справді, сегмент $[1, 1]$ дійсної прямої не є відкритою множиною в природній топології, але його мож-

на представити у вигляді перетину нескінченної кількості відкритих у цій топології множин:

$$[-1, 1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right).$$

6. Нехай $X = L \cup M$, де L — відкрита півплощина, M — пряма, яка обмежує її. Якщо точка $P \in M$, то околом цієї точки є $V \cup P$, де V — відкритий круг, що лежить в L і дотикається до прямої M в точці P . Якщо точка $P \in L$, то окіл точки — $V \cap L$, де V — відкритий круг з центром у точці P . Відкрита півплощина з такою топологією називається площиною Неміцького.

Теорема 20. *Будь-яка відкрита множина на дійсній прямій в природній топології є об'єднанням не більш ніж зліченної кількості відкритих інтервалів, що не перетинаються.*

Доведення. Розглянемо відкриту множину U і точку x , що належить U . За визначенням існує інтервал I_x , який має в собі x і належить U . Доведемо, що об'єднання всіх інтервалів, що мають в собі x і належать U , є інтервалом (a, b) , де a та b можуть дорівнювати $\pm \infty$.

Множини вигляду $(-\infty, \infty)$, (x, ∞) та $(-\infty, x)$ включаються в перелік інтервалів.

Справді, нехай $\{I_\alpha = (a_\alpha, b_\alpha)\}$ — сім'я всіх таких інтервалів. Введемо позначення: $a = \inf a_\alpha$, $b = \sup b_\alpha$. Доведемо, що будь-яка точка із (a, b) належить $\cup I_\alpha$. Нехай $y \in (a, b)$, але $y \notin \cup I_\alpha$ (для визначеності будемо вважати, що $a < y < x$). Оскільки $a = \inf a_\alpha$, то існує $a_0 < y$ таке, що інтервал (a_0, b_0) має в собі x , а тому y . Одержана суперечність доводить, що $\cup I_\alpha \supset (a, b)$. Обернене включення $\cup I_\alpha \subset (a, b)$ очевидне.

Розглянемо різні точки $x_1, x_2 \in U$ і доведемо, що $\cup I_{\alpha_1} = (a_1, b_1)$ та $\cup I_{\alpha_2} = (a_2, b_2)$ або співпадають, або не перетинаються. Припустимо, що вони не співпадають і перетинаються. Тоді $x_1 \in (a_1, b_2) \subset U$; це суперечить твердженню, що (a_1, b_1) — максимальний інтервал, який має в собі x_1 . Отже, U є об'єднанням інтервалів, що не перетинаються.

Доведемо, що їх кількість не більша, ніж зліченна. Поставимо у відповідність кожному інтервалу раціональну точку, що йому належить. Ця відповідність взаємно однозначна. Але множина раціональних чисел зліченна, і будь-яка підмножина її або зліченна, або скінченна.

Топології на одній і тій же множині можна частково впорядкувати.

Визначення. Розглянемо топологічні простори (X, Ω_1) та (X, Ω_2) . Кажуть, що топологія Ω_1 сильніша (або тонша) топології Ω_2 , коли будь-яка відкрита множина в топології Ω_2 є відкритою множиною в топології Ω_1 . У цьому випадку пишуть: $\Omega_2 < \Omega_1$.

Приклади. 1. Найбільш сильна топологія — дискретна, найбільш слабка — антидискретна.

2. Природна топологія на прямій більш сильна, ніж топологія, що породжена системою підмножин.

4.1.1. База топології

Важливою задачею є виділення мінімального числа відкритих множин, що породжують усі відкриті множини.

Визначення. Нехай Ω — топологічний простір (X, Ω) . Система відкритих підмножин $B \subset \Omega$ називається базою топології Ω , коли будь-яку відкриту множину можна зобразити у вигляді об'єднання деякої сукупності множин $B_\alpha \in B$; $U = \bigcup_{\alpha} B_\alpha$.

Вважається, що топологічний простір задовольняє другій аксіомі зліченності, коли можна вибрати базу, що складається із зліченної сукупності множин.

Приклади. 1. Інтервали з раціональними кінцями (r_1, r_2) складають базу природної топології прямої. Отже, пряма з природною топологією задовольняє другій аксіомі зліченності.

2. Нехай X — площина з природною топологією (відкрита множина разом з кожною точкою має в собі деякий круг скінченного радіуса із центром у цій точці). Для цієї топології можна вказати декілька різних баз: а) множину відкритих кругів раціональних радіусів з центрами в раціональних точках; б) множину відкритих квадратів з центрами в раціональних точках, сторони яких паралельні координатним осям і мають раціональні довжини; в) множину відкритих квадратів з центрами в раціональних точках, сторони яких паралельні бісектрисам координатних кутів і мають раціональні довжини.

Будь-яка база B в топологічному просторі (X, Ω) має такі дві властивості.

1. Будь-яка точка $x \in X$ належить принаймні одному $B_\alpha \in B$.

2. Якщо x лежить у перетині двох множин B_1 та B_2 із B , то існує таке $B_3 \in B$, що $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Справді, властивість 1 означає, що вся множина X , будучи відкритою, повинна бути об'єднанням якихось множин із B , а властивість 2 випливає з того, що множина $B_1 \cap B_2$ відкрита і, таким чином, є об'єднанням деяких елементів бази.

Навпаки, нехай X — довільна множина і B — система підмножин в X , що має властивості 1 та 2. Тоді сукупність множин, що є об'єднанням множин із B , утворює в X топологію.

Справді, нехай $\Omega(B)$ — сукупність усіх множин із X , що можуть бути представлені як об'єднання множин із B . Тоді \emptyset та X належать $\Omega(B)$, об'єднання будь-якого числа множин із $\Omega(B)$ належить $\Omega(B)$. Покажемо, що перетин двох множин A та C із $\Omega(B)$ належить $\Omega(B)$: $A = \bigcup_{\alpha} B_{\alpha}$, $C = \bigcup_{\beta} B_{\beta}$, $A \cap C = \bigcup_{\alpha, \beta} (B_{\alpha} \cap B_{\beta})$. Із властивості 2 випливає, що кожне $B_{\alpha} \cap B_{\beta}$ лежить в $\Omega(B)$. Таким чином, $A \cap C \in \Omega(B)$.

Приклад. Розглянемо на дійсній прямій R систему підмножин $B = \{[x, r) \mid x < r\}$. Легко бачити, що B має властивості 1, 2 і тому задає деяку топологію на прямій. Пряма в таку топологією називається прямою Зоргенфрея. Ця топологія сильніша природної топології на прямій. Справді, природна топологія породжується відкритими інтервалами, а інтервал $(a, b) = \bigcup_{n \rightarrow \infty} [a_n, b)$, де $a_n \rightarrow a$ і $a_n > a$.

4.1.2. Метричні простори

Визначення. Нехай X — деяка множина. Функція $\rho: X \times X \rightarrow R$, що задовольняє таким умовам: 1) $\rho(x, y) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = y$; 2) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ для будь-яких $x, y, z \in X$, називається метрикою на X . Множина X з визначеною на ній метрикою називається метричним простором і позначається через (X, ρ) .

Друга властивість метрики відома як нерівність трикутника.

На одній і тій же множині X можна задати різні метрики.

Введемо на $X = R^n$ п'ять метрик:

а) $\rho_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2}$, де $x = (x^1, \dots, x^n)$; $y = (y^1, \dots, y^n)$; така метрика називається евклідовою;

$$\text{б) } \rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x^i - y^i|;$$

$$\text{в) } \rho_3(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} |x^i - y^i|;$$

г) $\rho_4(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \neq y; \\ 0, & \text{якщо } x = y; \end{cases}$ така метрика називається дискретною;

д) $\rho_5(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n |x^i - y^i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$, $p \geq 1$; така метрика називається метрикою Мінковського.

Зауваження. Виконання нерівностей трикутника для метрик ρ_1 та ρ_5 випливає із нерівності Мінковського

$$\left(\sum_i |a^i + b^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_i |a^i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_i |b^i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

де $p \geq 1$ [11, с. 62].

Розглянемо множину неперервних функцій на відрізку $[a, b]$. Відстань

$$\rho_6(f, g) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$$

перетворює його в метричний простір.

Вправа. 1. Довести, що функція $\rho(x, y) = (x - y)^2$ не визначає на прямій метричний простір.

2. Довести, що функція $\rho(x, y) = \min_i |x^i - y^i|$ не задає метрику на R^n .

Розглянемо замкнену опуклу поверхню в тривимірному просторі і дві точки P та Q на ній. Відстань між цими точками $\rho_7(P, Q) = \inf L_\gamma(P, Q)$, де $L_\gamma(P, Q)$ — довжина кривої γ , що з'єднує точки P, Q та лежить на поверхні. Покажемо, що для будь-яких точок P та Q відстань $\rho(P, Q)$ скінченна. Справді, проведемо довільну площину через P та Q . Вона переріже поверхню по опуклій кривій. Оскільки опукла крива спрямлювана, $\rho(P, Q) < \infty$.

Вправа. Довести, що відстань $\rho_7(P, Q) = \inf L_\gamma(P, Q)$ перетворює опуклу поверхню в метричний простір.

Визначення. Нехай (X, ρ) — метричний простір. Множина точок метричного простору називається: а) відкритою кулею з центром в точці x_0 і радіусом ε , якщо $B(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) < \varepsilon\}$; б) замкненою кулею, якщо $D(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) \leq \varepsilon\}$; в) сферою, якщо $S(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \rho(x_0, x) = \varepsilon\}$.

Приклади. 1. Розглянемо простір R^2 і з'ясуємо, що є відкритою кулею з центром у точці $x_0(0,0)$ і радіусом $\epsilon=1$ при різних способах задання метрик в R^2 .

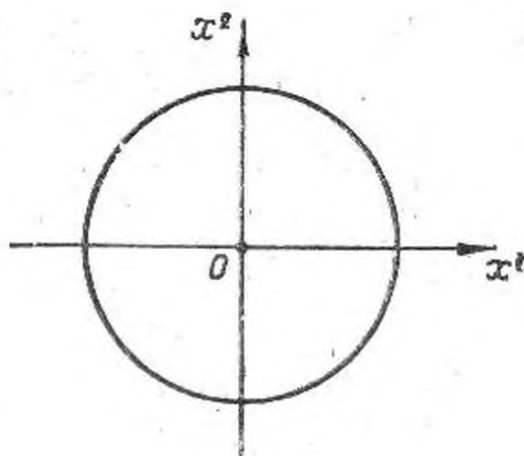


Рис. 4.2

Нехай $\rho=\rho_1$. Тоді відкрита куля може бути задана нерівністю $(x^1)^2 + (x^2)^2 < 1$. Вона зображена на рис. 4.2.

Нехай $\rho=\rho_2$. Тоді координати точок кулі задовольняють нерівності $|x^1| + |x^2| < 1$ (рис. 4.3).

Нехай $\rho=\rho_3$. Тоді кулю задаємо нерівністю $\max(|x^1|, |x^2|) < 1$ (рис. 4.4).

Задача. Який вигляд буде мати відкрита куля в:
а) (R^2, ρ_5) ; б) (R^3, ρ_2) ; в) (R^n, ρ_2) ; г) (R^3, ρ_3) ?

2. Розглянемо прямий круговий конус з метрикою ρ_7 і знайдемо кулю деякого радіуса з центром в точці O , що не співпадає з вершиною конуса. Розріжемо конус по твірній, що протилежна тій, на якій лежить точка O . Куля є: круг з центром в точці O , коли радіус кулі такий, що коло лежить всередині розгортки конуса; круг, в якого ототожнені точки A та B , коли коло дотикається межі розгортки в цих точках; смуга (відрізки CE та DF ототожнені), якщо коло перетинає межу розгортки конуса (рис. 4.5). Зауважимо, що коло (межа кулі) в остатньому розпадається на дві компоненти.

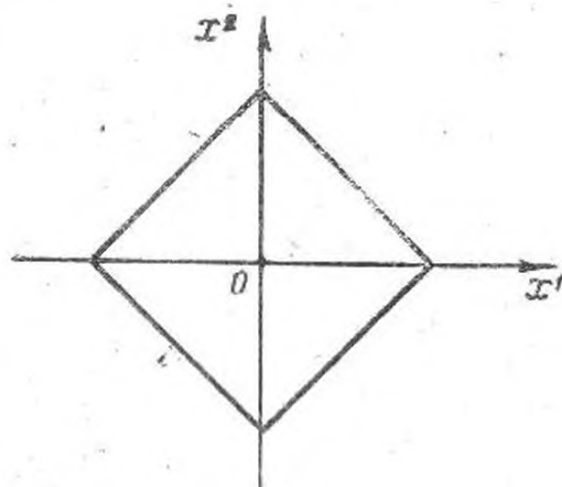


Рис. 4.3

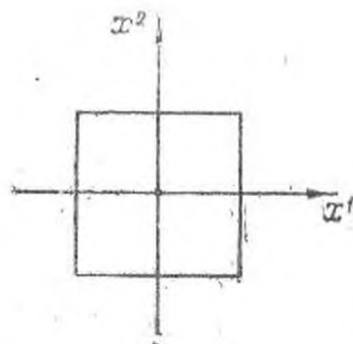


Рис. 4.4

3. Розглянемо множину неперервних функцій $y=f(x)$, що задані на відрізку $[a, b]$ з метрикою ρ_6 . Відкрита куля з центром в точці $y=c=\text{const}$ і радіусом ϵ — є множина всіх неперервних функцій, графіки яких попадають у прямокутник $a \leq x \leq b; c-\epsilon < y < c+\epsilon$.

За допомогою метрики можна ввести топологію на метричному просторі. А саме, множина $U \neq \emptyset$ метричного простору (x, ρ) називається відкритою, коли для будь-якої точки $x \in U$ існує таке ϵ , що відкрита куля $B(x, \epsilon) \subset U$. Іншими словами, відкриті кулі утворюють базу топології. Кажуть, що ця топологія індукована метрикою.

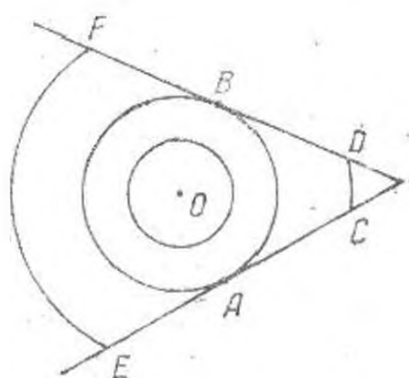


Рис. 4.5

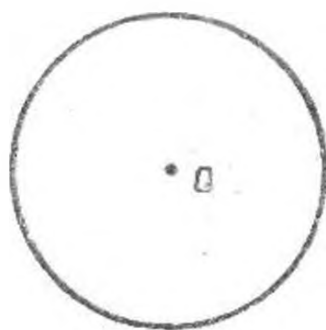


Рис. 4.6

Приклади. 1. Природна топологія на прямій індукована метрикою

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

2. Дискретна метрика індукує дискретну топологію.

3. Метрики ρ_1, ρ_2, ρ_3 породжують одну і ту ж топологію на R^n . Справді,

$$\max |x^i - y^i| \leq \rho_1 \leq \sqrt{n} \max |x^i - y^i|,$$

тобто $\rho_3 \leq \rho_1 \leq \sqrt{n} \rho_3$. Отже, якщо множині належить куля в метрикою ρ_1 , то їй буде належати і куля в метриці ρ_3 , і навпаки, якщо точка внутрішня з точки зору метрики ρ_3 , то вона внутрішня і з точки зору метрики ρ_1 . Аналогічно можна порівняти ρ_1 і ρ_2 .

Визначення. Топологічний простір (X, Ω) називається метризовним, якщо його топологію Ω можна задати з допомогою якої-небудь метрики, тобто існує метрика ρ на X , яка індукує топологію Ω .

Клас топологічних просторів більш широкий, ніж клас метричних просторів: будь-який метричний простір є топологічним, але не всякий топологічний простір можна метризувати.

Приклади. 1. Топологічний простір $X = \{a, b\}$, $\Omega = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}\}$; (X, Ω) метризувати неможливо.

2. Топологічний простір $X = \mathbb{R}$, $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R}, \{(-\infty, X)\}$, $X \setminus \{R\}\}$, (X, Ω) метризувати неможливо.

Неможливість метризації цих просторів випливає з того, що в метричному просторі дві точки, які не співпадають, мають околиці, що не перетинаються.

Визначення. *Послідовність точок $\{x_i\}$ у метричному просторі (X, ρ) збігається до точки x , якщо*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(x_i, x) = 0.$$

Послідовність точок $\{x_i\}$ називається фундаментальною, якщо

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : \forall n, m > N \Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Метричний простір називається повним, якщо будь-яка фундаментальна послідовність має границю, яка належить цьому метричному простору.

Приклади. 1. Пряма зі стандартною метрикою $\rho(x, y) = |x - y|$ є повним метричним простором.

2. Множина раціональних чисел з тією ж метрикою не утворює повного простору, оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

3. Внутрішність круга на площині з природною топологією не є повним простором. Замкнений круг є повний простір.

Будь-який метричний простір можна розширити до повного [11, с. 83].

4.1.3. Замкнені множини топологічного простору

Визначення. *Множина V в топологічному просторі (X, Ω) називається замкненою, коли його доповнення $X \setminus V$ є відкритим.*

Приклади. 1. Відрізок $[a, b]$ є замкненою множиною на прямій з природною топологією.

2. Множина натуральних чисел N — це замкнена множина на прямій \mathbb{R} з природною топологією, оскільки

$$\mathbb{R} \setminus N = \bigcup_{n=1}^{\infty} (n, n+1) \cup (-\infty, 1) \text{ — відкрита множина.}$$

3. На дійсній прямій R з природною топологією побудуємо так звану канторову множину: на першому кроці замкнений відрізок $[0; 1]$ розділимо на три частини і виключимо середній інтервал $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$; на другому кроці кожний із решти відрізків $[0; \frac{1}{3}]$; $[\frac{2}{3}; 1]$ розділимо на три частини і виключимо середні інтервали $(\frac{1}{9}; \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}; \frac{8}{9})$ і т. ін. Точки, що лишилися на відрізку, утворюють канторову множину.

Легко побачити, що канторова множина замкнена.

Вище було показано (теорема 20), що будь-яка відкрита множина на прямій — це об'єднання не більш ніж зліченної сукупності відкритих інтервалів. Приклад 3 показує, що на прямій R з природною топологією замкнені множини значно складніші, ніж відкриті.

Властивості замкнених множин топологічного простору (X, Ω) : 1) множини \emptyset, X — замкнені; 2) якщо V_1, V_2 — замкнені множини, то множина $V_1 \cup V_2$ замкнена; 3) якщо $\{V_\alpha\}$ — сукупність замкнених множин, то множина $\bigcap V_\alpha$ замкнена.

Доведення властивості 2. Оскільки V_1, V_2 — замкнені множини, то за визначенням $V_1 = X \setminus U_1$; $V_2 = X \setminus U_2$, де U_1, U_2 — відкриті множини. Множина $U_1 \cap U_2$ відкрита, тому множина $V_1 \cup V_2 = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2) = X \setminus (U_1 \cap U_2)$ замкнена.

Доведення властивості 3. Воно аналогічне доведенню властивості 2. Отже, маємо:

$$\bigcap_{\alpha} V_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (X \setminus U_{\alpha}) = X \setminus \bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \text{ — замкнена множина.}$$

Зауваження. Топологію можна задавати, замінивши набір відкритих множин Ω набором замкнених множин $\tilde{\Omega}$, що задовольняють умовам 1—3.

4.2. Внутрішні, граничні і межові точки підмножини топологічного простору

Нехай (X, Ω) — топологічний простір, A — його підмножина.

Визначення. Околом точки $x \in (X, \Omega)$ називається будь-яка відкрита множина $U \in \Omega$, що має в собі точку x .

Точка x називається внутрішньою точкою множини A , якщо існує околі точки x , який лежить у множині A .

Приклади. 1. Нехай на площині з природною топологією, що породжена метрикою ρ , задані відкрита куля $B(Q, 1)$ одиничного радіуса з центром в точці Q і точка O поза кулею (рис. 4.6). Розглянемо множину $A = (B(Q, 1) \setminus Q) \cup O$. Внутрішніми точками множини A будуть усі точки кулі $B(Q, 1)$, окрім точки Q .

2. Підмножини Z , Q , $R \setminus Q$ прямої R з природною топологією не мають внутрішніх точок; внутрішніми точками сегмента $[a, b]$ є точки інтервалу (a, b) .

3. На прямій R з топологією $\Omega = \{\emptyset, R, \{(-\infty, x) \mid x \in R\}\}$ внутрішніми точками $(-\infty, x]$ є точки множини $(-\infty, x)$.

Визначення. Множина, що складається з внутрішніх точок A , називається внутрішністю A і позначається через $\text{int } A$.

За визначенням $\text{int } A$ є відкритою множиною в заданій топології.

Очевидно, що $\text{int } A$ — найбільша відкрита множина, яка лежить в A , тобто $U \subset \text{int } A$ для будь-якої відкритої множини $U \subset A$.

Визначення. Точка $x \in X$ називається граничною точкою множини A , коли в будь-якому околі точки x існують точки множини A , що відрізняються від x .

Множина граничних точок A позначається через A' .

Приклади. 1. Розглянемо множину $A = (B(Q, 1) \setminus Q) \cup O$ (див. рис. 4.6). Граничними точками цієї множини є точки $B(Q, 1)$.

2. Розглянемо підмножини дійсної прямої з природною топологією. У множини Z граничних точок немає. Граничними точками множини Q є всі точки прямої. Граничними точками множини $R \setminus Q$ також є точки із R . Граничні точки $[a, b]$ і (a, b) — це $[a, b]$.

Послідовність точок x_n топологічного простору збігається до точки x_0 , коли для будь-якого околу $U \ni x_0$ існує номер N такий, що $x_n \in U$ для будь-якого $n \geq N$.

Визначення. Точка $x \in X$ називається межевою точкою множини $A \subset X$, коли в кожному околі точки x є як точки, що належать множині A , так і точки, що множині A не належать.

Межові точки розпадаються на два класи: граничні точки та ізольовані точки. Множина межових точок A позначається через dA .

Визначення. Точка $x \in A$ називається *ізолюваною*, коли існує околість точки x , в якій немає точок множини A , окрім самої точки x .

Приклади. 1. Нехай $A = (B(Q, 1) \setminus Q) \cup O$ (див. рис. 4.6). Межові точки A — це точки одиничного кола, точка Q (граничні точки) і точка O (ізолювана точка).

2. Знайдемо межові точки підмножини прямої: $\partial Z = Z$ (всі межові точки ізолювані); $\partial Q = R$ (всі межові точки граничні); $\partial(R \setminus Q) = R$; $\partial R = \emptyset$; $\partial[a, b] = \{a, b\}$; $\partial(a, b) = \{a, b\}$.

3. На прямій R з топологією $\Omega = \{\emptyset, R, \{(-\infty, x) \mid x \in R\}\}$ межа $\partial(-\infty, x] = [x, \infty)$.

Вправа. $X = \{a, b, c\}$; $\Omega = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$. Знайти: а) всі замкнені множини в (X, Ω) ; б) $\partial\{a\}$.

Визначення. Замикання множини A (означається через $\text{cl } A$) топологічного простору X називається перетин усіх замкнених підмножин, що мають у собі A .

Множина $\text{cl } A$ завжди замкнена як перетин замкнених множин.

Очевидно, що $\text{cl } A$ лежить у кожній замкненій множині, що має в собі A . Отже, $\text{cl } A$ — найменша замкнена множина, що має в собі A . Значить, A замкнена в тій і тільки в тій випадку, коли $\text{cl } A = A$.

Приклади. 1. Розглянемо топологічний простір із дискретною топологією. Будь-яка підмножина його відкрита і замкнена одночасно.

2. Знайдемо замикання підмножин прямої R з природною топологією: $\text{cl } Z = Z$; $\text{cl } Q = R$; $\text{cl } R \setminus Q = R$; $\text{cl } R = R$; $\text{cl } (a, b) = [a, b]$.

3. Нехай $A = (B(Q, 1) \setminus Q) \cup O$ (див. рис. 4.6). Тоді $\text{cl } A = B(Q, 1) \cup O$.

Отже, з кожною підмножиною топологічного простору зв'язані: внутрішність A ($\text{int } A$), межа A (∂A), замикання A ($\text{cl } A$).

Твердження: 1. Замикання $\text{cl } A = \text{int } A \cup \partial A$.

2. Множина A відкрита $\leftrightarrow A \cap \partial A = \emptyset$.

3. Множина A замкнена $\leftrightarrow A \supset \partial A$.

Доведення твердження 1. Доведемо, що $\text{cl } A \supset \text{int } A \cup \partial A$. Оскільки $\text{cl } A$ замкнена, $X \setminus \text{cl } A$ — відкрита. Якщо точка $x \in X \setminus \text{cl } A$, то існує околість U точки x такий, що $U \subset X \setminus \text{cl } A$, тобто $U \cap A = \emptyset$. Отже, $x \notin \text{int } A$ і $x \notin \partial A$. Звідси випливає, що $\text{int } A \subset \text{cl } A$ і $\partial A \subset \text{cl } A$; це і потрібно довести.

Доведемо обернене включення $\text{int } A \cup \partial A \supset \text{cl } A$.

Розглянемо $X \setminus (\text{int } A \cup \partial A)$. Це відкрита множина; отже, $\text{int } A \cup \partial A$ — замкнена множина, звідси безпосередньо випливає, що $\text{cl } A \subset \text{int } A \cup \partial A$, і твердження 1 повністю доведене.

Доведення твердження 2. Нехай A — відкрита множина. Тоді A є околом будь-якої своєї точки, тобто жодна точка множини A не є межевою, звідси $A \cap \partial A = \emptyset$.

Нехай $A \cap \partial A = \emptyset$. Тоді для будь-якої точки $x \in A$ існує такий окіл U , що $U \subset A$; звідси випливає, що A — відкрита множина.

Твердження 3 доводиться подібним чином.

Приклад. Розглянемо пряму Зоргенфрея (відкриті множини породжені підінтервалами $[a, b)$, $a < b$). Покажемо, що в цій топології $\text{cl } [a, b) = [a, b)$. Справді, розглянемо дві відкриті множини $[c, a)$ і $[b, d)$ та їх доповнення $(-\infty, c) \cup [a, \infty)$ і $(-\infty, b) \cup [d, +\infty)$ відповідно, зображені на рис. 4.7 штриховкою. Ці доповнення замкнені, тому замкнений і їх перетин $(-\infty, c) \cup [a, b) \cup [d, +\infty)$. Але $\text{cl } [a, b)$ є перетин усіх замкнених множин, що мають в собі $[a, b)$. Тому $\text{cl } [a, b) = [a, b)$. Отже, $\partial [a, b) = \emptyset$ на прямій Зоргенфрея.

На прямій Зоргенфрея півінтервал $[a, b)$ є одночасно відкритою і замкненою множиною. Для порівняння нагадаємо, що в природній топології

$$\text{cl } [a, b) = [a, b], \quad \partial [a, b) = \{a, b\}.$$

Задача 1. Розглянемо пряму, в якій відкритими є порожня множина та доповнення всіляких скінченних множин. Знайти $\text{cl } N$, $\text{int } (0, 1)$, $\partial [0, 1]$ в цій топології.

2. Нехай A, B — підмножини топологічного простору. Знайти зв'язок між:

- а) $\text{int } (A \cap B)$ та $\text{int } A \cap \text{int } B$,
 $\text{int } (A \cup B)$ та $\text{int } A \cup \text{int } B$;

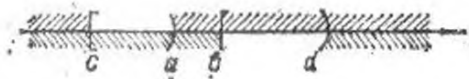


Рис. 4.7

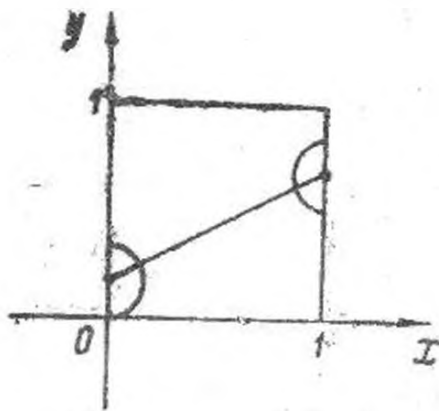


Рис. 4.8

- б) $\text{cl}(A \cap B)$ та $\text{cl} A \cap \text{cl} B$,
 $\text{cl}(A \cup B)$ та $\text{cl} A \cup \text{cl} B$;
 в) $\partial(A \cap B)$ та $\partial A \cap \partial B$,
 $\partial(A \cup B)$ та $\partial A \cup \partial B$.

4.3. Способи задання топології.

Індукована топологія

Визначення. Нехай (X, Ω) — топологічний простір, S — підмножина X . Вважається, що на S задана індукована топологія, якщо відкритими множинами в S обрані множини вигляду $S \cap U$, де U — відкрита множина в топології X .

Доведемо, що система відкритих множин $\{S \cap U, U \in \Omega\}$ справді задає топологію на S , тобто перевіримо виконання аксіом 1—3, що входять у визначення топологічного простору. Очевидно, що умова 1 виконується, \emptyset та S є відкритими. Виконання умови 2 безпосередньо випливає із рівності $(S \cap U_1) \cap (S \cap U_2) = S \cap (U_1 \cap U_2)$, а умова 3 — із рівності $\cup(S \cap U_\alpha) = S \cap (\cup U_\alpha)$.

Приклади. 1. Нехай R — дійсна пряма з природною топологією, $S = [a, b)$. Інтервал (c, d) належить індукованій топології на S , коли $a \leq c$ і $a \leq b$. Якщо $c < a$, $a < d \leq b$, то $[a, d)$ — відкрита множина в S . Зауважимо, що $[a, d)$ не є відкритою в R .

2. Якщо на площині введена природна топологія, то відкриті дуги кола породжують відкриту топологію на колі.

3. Розглянемо сферу S^2 в E^3 . Сфера стане топологічним простором, якщо за околиць точки $P \in S^2$ буде обрана множина $B(P, \epsilon) \cap S^2$, де $B(P, \epsilon)$ — відкрита куля в E^3 з природною топологією.

4.3.1. Фактор-топологія

Визначення. Нехай X — топологічний простір, Y — деяка множина, $f: X \rightarrow Y$ — відображення «на». Множину U в Y назвемо відкритою, якщо відкритим є її прообраз $f^{-1}(U)$ в X .

Введена таким чином на Y топологія називається фактор-топологією.

Покажемо, що множини, які названі нами відкритими, справді задають топологію на Y , тобто перевіримо виконання трьох аксіом топологічного простору.

1. Множини \emptyset, Y є відкритими, оскільки

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, f^{-1}(Y) = X.$$

2. Якщо U_1, U_2 — відкриті в Y множини, то $U_1 \cap U_2$ також відкрита множина, оскільки $f^{-1}(U_1 \cap U_2) = f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2)$.

3. Множина $\bigcup_i U_i$ відкрита, якщо відкриті всі U_i в Y , тому що $f^{-1}(\bigcup_i U_i) = \bigcup_i f^{-1}(U_i)$.

Зауваження. Назва «фактор-топологія» не випадкова. Нехай X — топологічний простір, на якому введено відношення еквівалентності \sim . Тоді X розбивається на множину класів еквівалентних множин, що не перетинаються. Множину цих класів позначимо через Y . Є природне відображення $f: X \rightarrow Y$, яке ставить у відповідність елементу $x \in X$ його клас еквівалентності $\{x\} \in Y$. Топологія в Y вводитьься так, як описано вище.

Приклади. 1. Розглянемо сферу S^2 та проєктивний простір RP^2 , який визначається таким чином. У лінійному просторі $E^3 \setminus (0, 0, 0)$ введемо відношення еквівалентності: дві точки x та x' еквівалентні, якщо існує $\lambda \neq 0$ таке, що $x' = \lambda x$. Класом еквівалентності є пряма, з якої виключена точка $(0, 0, 0)$. Множина класів еквівалентності є двовимірний проєктивний простір RP^2 . Оскільки будь-яка пряма, що проходить через початок координат, перетинає сферу $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$ в двох діаметрально протилежних точках, то RP^2 можна визначити як сферу S^2 з ототожненими протилежними точками.

Відображення $f: S^2 \rightarrow RP^2$ задамо таким чином: точці x сфери ставимо у відповідність точку $\{x, -x\}$ проєктивного простору. Відображення f задає фактор-топологію на RP^2 . Прообраз відкритої множини в RP^2 складається із двох діаметрально протилежних відкритих підмножин сфери.

2. Розглянемо на площині xy одиничний квадрат $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (рис. 4.8). Введемо на квадраті відношення еквівалентності: дві точки (x, y) та (x_1, y_1) , що розташовані всередині квадрата або на прямих $y=0, y=1$, еквівалентні, якщо $x=x_1, y=y_1$; якщо $x=0, x_1=1$, то точки (x, y) і (x_1, y_1) еквівалентні за умови $y_1 = 1-y$. Нехай на площині введена природна топологія. Розглянутий квадрат — топологічний простір з індукованою топологією. Введене відношення еквівалентності перетворює квадрат в новий топологічний простір — листок Мебіуса. При цьому околиці внутрішніх точок квадрата та точок

прямих $y=0$, $y=1$ лишаються незмінними; окіл точки P прямої $x=0$ ($x=1$) одержується об'єднанням двох півкіл (див. рис. 4.8).

Задача. Описати відношення еквівалентності, з допомогою якого із квадрата можна одержати: 1) циліндр, 2) пляшку Клейна, 3) тор.

4.3.2. Добуток топологічних просторів

Нехай X , Y — топологічні простори. Введемо топологію на декартовому добутку $X \times Y$, тобто на множині впорядкованих пар (x, y) , де $x \in X$, $y \in Y$.

Нехай $\{U_\alpha\}$ — база топологічного простору X , $\{V_\beta\}$ — база топологічного простору Y . Тоді $\{U_\alpha \times V_\beta\}$ задовольняє двом властивостям бази і, отже, породжує топологію на $X \times Y$, яка називається топологією добутку.

Твердження. Множина $W \subset X \times Y$ буде відкритою тоді і тільки тоді, коли для будь-якої точки $w \in W$, $w \in (u, v)$ знайдуться множини $U_w \in X$ і $V_w \in Y$ такі, що $u \in U_w$, $v \in V_w$ і $w \in U_w \times V_w \subset W$.

Доведення. Нехай W — відкрита множина. Тоді

$$W = \bigcup_{i,j \in J} U_i \times V_j$$

Тому будь-яка точка $w \in W$ належить шуканій множині $U_i \times V_j$ і для доведення твердження потрібно взяти за U_w множину U_i і за V_w множину V_j .

Нехай для кожної точки $w \in W$ існують множини U_w , V_w . Тоді

$$W = \bigcup_{w \in W} U_w \times V_w$$

Приклади. 1. Розглянемо пряму R^1 з природною топологією та площину R^2 також з природною топологією. База топології R^2 складається із внутрішностей кругів. З іншого боку, $R^2 = R^1 \times R^1$ і на ній можна ввести топологію добутку. База топології R^2 як топології добутку буде складатися із множин $U_\alpha \times V_\beta$, де U_α, V_β — інтервали в R^1 , тобто $U_\alpha \times V_\beta$ — внутрішність прямокутника.

Дві топології R^2 (природна і топологія добутку) співпадають, оскільки всередині будь-якого квадрата є деякий круг, і навпаки.

2. Нехай S^1 — коло з індукованою топологією (на площині — природна топологія). Розглянемо тор $T^2 =$

$= S^1 \times S^1$. У чотиривимірному просторі рівняння цього тора записується так:

$$\begin{cases} x^1 = \cos u^1; \\ x^2 = \sin u^1; \\ x^3 = \cos u^2; \\ x^4 = \sin u^2, \quad u^1, u^2 \in R. \end{cases}$$

На $T^2 = S^1 \times S^1$ вводиться топологія добутку.

З іншого боку, в тривимірному просторі тор T^2 можна одержати, обертаючи коло, що лежить в площині x^1x^2 з центром на осі Ox^1 і не перетинає вісь Ox^3 навколо осі Ox^3 (рис. 4.9). На цій поверхні є топологія, що індукована природною топологією тривимірного простору.

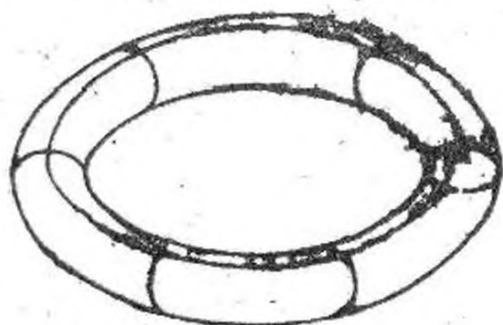


Рис. 4.9

Ці дві топології співпадають.

3. Розглянемо в тривимірному просторі R^3 кулю з виколотою точкою $D^3 \setminus 0$, де 0 — центр кулі. На $D^3 \setminus 0$ є індукована топологія (топологія на R^3 природна). Але $D^3 \setminus 0 = S^2 \times I$, де I — інтервал; а тому на $D^3 \setminus 0$ можна ввести топологію добутку.

Ці дві топології співпадають.

Задача. Яка топологія буде на $R_1^1 \times R_2^1$, якщо R_1^1 — пряма з природною топологією, а R_2^1 — пряма з топологією

$$\Omega = \{\emptyset, R_2^1, \{(-\infty, x) \mid x \in R_2^1\}\}?$$

4.4. Неперервні відображення

Нехай X, Y — два топологічні простори.

Визначення. Відображення $f: X \rightarrow Y$ називається *неперервним*, якщо прообраз будь-якої відкритої множини із Y є відкритою множиною в X .

Якщо простір Y — пряма з природною топологією, то одержимо визначення неперервної функції

Приклади. 1. Якщо простір X наділений дискретною топологією або Y — антидискретною топологією, то будь-яке відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне.

2. Нехай $X = R^1$ та $Y = R^1$, де R^1 — дійсна пряма. Розглянемо відображення $f: R^1 \rightarrow R^1$, яке задане формулою $y = x^2$ при різних заданнях топології на дійсній прямій.

Нехай на X та Y задана природна топологія. Тоді $y=x^2$ — неперервна функція.

Нехай X — пряма з топологією

$$\Omega = \{\emptyset, R^1, \{(-\infty, x) | x \in R^1\}\},$$

а Y — пряма з природною топологією. Тоді відображення $y=x^2$ не буде неперервним, оскільки $f^{-1}((-1, x^2)) = (-x, x)$ не є відкритою множиною в X .

3. Розглянемо відображення $f: T \rightarrow S^1$, де T — підінтервал $[0, 1)$, S^1 — коло радіуса $\frac{1}{2\pi}$ з топологією, що індукована природною топологією R^2 . Відображення f запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\pi} \cos 2\pi t; \\ y = \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi t. \end{cases}$$

Це неперервне відображення. Зауважимо, що при цьому відображенні образ не кожної відкритої в T множини буде відкритою множиною на колі.

Справді, образ множини $[0, \frac{1}{2})$ не є відкритою множиною кола.

4. Розглянемо відображення $f: X \rightarrow Y$, де X — пряма Зоргенфрея, Y — пряма з природною топологією, яке задане таким чином:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & a \leq x < 1 \\ 1, & x \notin [a, b) \end{cases}$$

де a, b — фіксовані числа. Доведемо, що це неперервне відображення. Раніше доведено, що на прямій Зоргенфрея множина $[a, b)$ одночасно відкрита і замкнена, тому доповнення $[a, b)$ — відкрита множина. Нехай $f^{-1}(V) = U$; $U \in X$; $V \in Y$; V — відкрита множина. Можуть бути чотири випадки: а) V має в собі точку 0 і не має точки 1, тоді $U = [a, b)$ — відкрита множина; б) V має в собі 1, але не має 0. Тоді U — відкрита множина, як доповнення до $[a, b)$; в) V не має в собі ні 0, ні 1. Тоді $U = \emptyset$ — відкрита множина; г) V має в собі і 0, і 1. Тоді $U = X$ — відкрита множина.

Задача. 1. Нехай $R^+ = (0, +\infty)$, топологія $\Omega = \{\emptyset, R^+, \{(x, +\infty) | x \in R^+\}\}$; R — пряма з природною топологією. Чи буде неперервна функція $f: U \subset R^+ \rightarrow R$, що задана формулою

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1); \\ x+1, & x \in (1, 2] \end{cases}$$

(топологія на U індукована топологією Ω)?

2. Довести, що композиція неперервних відображень є неперервним відображенням.

Визначення. Відображення $f: X \rightarrow Y$ (X, Y — топологічні простори) називається неперервним в точці x_0 , якщо для будь-якого околу V точки $y_0 = f(x_0)$ існує окіл U точки x_0 такий, що $f(U) \subset V$.

Твердження. Відображення $f: X \rightarrow Y$ неперервне тоді і тільки тоді, коли воно неперервне в будь-якій точці простору X .

Доведення. Нехай f — неперервне відображення, $y_0 = f(x_0)$ і V — деякий окіл точки y_0 . Тоді за окіл U точки x_0 візьмемо $f^{-1}(U)$. Навпаки, нехай f — неперервне в кожній точці простору X і A — відкрита множина в Y . Доведемо, що $f^{-1}(A)$ — відкрита множина. Нехай y — довільна точка множини A , V_α — довільний окіл точки y . Тоді $A \cap V_\alpha$ — відкрита множина, отже, існує окіл U_α точки x ($y = f(x)$) такий, що $f(U_\alpha) \subset A \cap V_\alpha$. Звідси $f^{-1}(A) = \bigcup_{\alpha} U_\alpha$ і тому $f^{-1}(A)$ — відкрита множина.

Зауваження. 1. Фактор-топологія — це найбільш слабка топологія на Y , яка перетворює відображення $f: X \rightarrow Y$ в неперервне.

2. Відображення $f: X \times Y \rightarrow X$ та $g: X \times Y \rightarrow Y$ є неперервними (перше називається проекцією $X \times Y$ на X , друге — проекцією $X \times Y$ на Y).

Розглянемо окремий випадок неперервного відображення топологічного простору X в топологічний простір Y .

Визначення. Відображення f топологічного простору X на топологічний простір Y називається гомеоморфізмом, або топологічним відображенням, якщо: 1) f неперервне, 2) f взаємно однозначне, 3) обернене відображення f^{-1} неперервне. При цьому X, Y називаються гомеоморфними (або топологічно еквівалентними) просторами.

Приклади. 1. Пряма з природною топологією гомеоморфна відкритому інтервалу з індукованою топологією. Гомеоморфізм можна встановити, наприклад, так: показати спочатку, що відкритий інтервал гомеоморфний відкритому півколу, розглянувши ортогональне проектування півкола на пряму (рис. 4.10), а потім так, як показано на рис. 4.11, встановити гомеоморфізм відкритого півкола та прямої.

Задача. Записати аналітично вказане відображення інтервала на пряму і довести, що воно топологічне.

2. Двовимірна сфера з виколотою точкою, топологія

якої індукована природною топологією евклідового простору, гомеоморфна площині з природною топологією. Гомеоморфізм можна задати стереографічною проекцією (див. рис. 2.15).

Задача: а) записати це відображення аналітично і показати, що воно топологічне; б) відповісти, чому гомеоморфна сфера S^2 з двома виколотими точками.

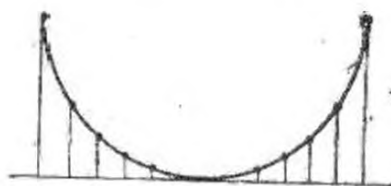


Рис. 4.10



Рис. 4.11

3. Сфера та поверхня куба з індукованою із евклідового простору топологією гомеоморфні між собою. Гомеоморфізм встановлюється так: розташуємо центри куба та сфери в точці O , із точки O проведемо промінь, він перетне куб в точці P_1 , сферу — в точці P_2 , точки P_1, P_2 поставимо у відповідність одна одній.

Задача. Записати це відображення аналітично і довести, що воно топологічне.

4. Розглянемо множину прямих на площині. Рівняння будь-якої прямої можна записати у вигляді $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h$, де $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-\infty < h < +\infty$. Отже, будь-якій точці смуги $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-\infty < h < +\infty$ відповідає пряма на площині, причому точкам (π, h) та $(0, -h)$ відповідає одна і та ж пряма, а всім іншим парам точок — різні. Якщо ототожнити точки $(0, h)$ та $(\pi, -h)$ смуги $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-\infty < h < +\infty$, то одержимо нескінченний листок Мебіуса.

Задача. Ввести топологію на множині прямих площин таку, щоб топологічний простір був гомеоморфний нескінченному листку Мебіуса.

Ввести топологію на множині ортогональних перетворень $y = Ax$, $A^T A = E$ тривимірного евклідового простору. З'ясувати, якому топологічному просторові воно буде гомеоморфним.

Показати, що відкрита півплощина $y > 0$ та внутрішність круга $x^2 + y^2 < 1$ гомеоморфні.

Показати, що кільце $a < x^2 + y^2 < b$ та площина без круга $x^2 + y^2 \leq 1$ гомеоморфні.

Теорема 21. Відношення гомеоморфності в відношенням еквівалентності в класі топологічних просторів.

Доведення. 1. Очевидно, що топологічний простір X гомеоморфний сам собі.

2. Із визначення випливає, що коли топологічний простір X гомеоморфний топологічному простору Y , то і Y гомеоморфний X .

3. Нехай відображення f встановлює гомеоморфізм між X та Y , а відображення g — гомеоморфізм між Y та Z . Композиції $g \circ f$ та $f^{-1} \circ g^{-1}$ є неперервними бієкціями відповідно X на Z та Z на X . Отже, топологічні простори X та Z гомеоморфні.

Вважається, що еквівалентні топологічні простори належать одному топологічному типу.

Межа опуклої множини на площині, що має внутрішні точки, називається опуклою кривою.

Межа опуклої множини в просторі, що має внутрішні точки, називається опуклою поверхнею.

Твердження 1. Обмежена замкнена опукла множина на площині, що має внутрішні точки, гомеоморфна колу, а його межа — колу.

Твердження 2. Замкнена обмежена опукла множина в просторі, що має внутрішні точки, гомеоморфна кулі, а її межа — сфері.

Доведення твердження 1. Розташуємо множину всередині круга досить великого радіуса. Нехай O — внутрішня точка нашої множини. Тоді будь-який промінь із вершиною в точці O перетне межу множини в єдиній точці x , межу кулі — в єдиній точці y (рис. 4.12). Відображення f , що ставить у відповідність точці x точку y , задає гомеоморфізм межі множини та кола. Для задання гомеоморфізму внутрішності множини та внутрішності круга кожний відрізок Ox розтягуємо до відрізка Oy (див. рис. 4.12).

Твердження 2 доводиться подібним чином.

Задача 1. Знайти всі топологічні типи замкнених опуклих множин, що мають внутрішні точки: а) на площині, б) в просторі.

Сформулюємо без доведення кілька тверджень:

1. Евклідові простори різних вимірностей не гомеоморфні між собою.

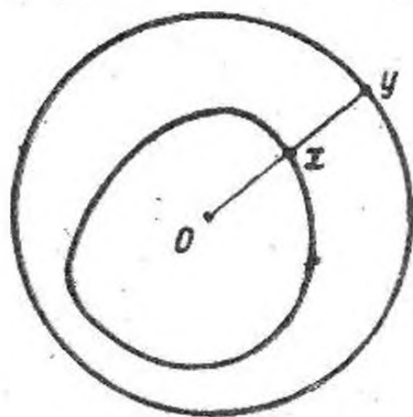


Рис. 4.12

2. Внутрішності куль різних вимірностей не гомеоморфні між собою.

3. Сфери різних вимірностей не гомеоморфні між собою.

4.5. Компактні топологічні простори

Нехай X — топологічний простір, B — деяка сукупність відкритих множин X . Вважається, що B утворює відкрите покриття X , якщо $\bigcup_{\alpha} B_{\alpha} = X$, $B_{\alpha} \in B$.

Визначення. Топологічний простір X називається компактним (компактом), якщо із будь-якого покриття X можна виділити скінченне підпокриття.

Приклади. 1. Пряма з природною топологією не є компактом. Справді, із покриття $\left\{ \left(n + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} + 1 \right), (n, n + 1), n \in Z \right\}$ не можна вибрати скінченне підпокриття.

2. Якщо топологія дискретна, то простір компактний тоді і тільки тоді, коли він скінченний.

3. Будь-який топологічний простір з антидискретною топологією є компактом.

Твердження. Відрізок $[0, 1]$ в природній топології є компактом.

Доведення. Припустимо, що відрізок $[0, 1]$ не є компактом, тобто із деякого відкритого покриття скінченне підпокриття виділити не можна. Тоді не можна виділити скінченне покриття якої-небудь половини відрізка, наприклад $\left[0, \frac{1}{2} \right]$. Ділимо відрізок $\left[0, \frac{1}{2} \right]$ навпіл, розглядаємо ту половину, для якої не можна виділити скінченне покриття, ділимо її навпіл і т. д. Одержимо множину вкладених відрізків, довжини яких прямують до нуля. За принципом вкладених відрізків Кантора існує точка, що належить всім відрізкам одночасно [11]. Отже, знайдеться відрізок, який можна вкрити інтервалом. Одержана суперечність доводить твердження.

Розглянемо куб в n -вимірному просторі, тобто множину точок $(x^1, \dots, x^n) \in R^n$ таких, що $0 \leq x^i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$. Подібно попередньому, можна довести, що куб у природній топології — компакт. Для куба можна довести це твердження по-іншому, зауваживши, що куб у природній топології є прямим добутком відрізків. Справді, правильним є таке твердження,

Твердження. Якщо X, Y — топологічні простори, $X \times Y$ — топологічний простір з топологією прямого добутку, то $X \times Y$ — компакт тоді і тільки тоді, коли X, Y — компакт.

4.5.1. Властивості компактних топологічних просторів

1. Якщо X, Y — гомеоморфні топологічні простори і X — компактний, то і Y компактний, і навпаки, тобто компактність — топологічний інваріант гомеоморфних просторів.

Доведення. Нехай X — компакт, а $\{U_i, i \in I\}$ — відкрите покриття Y . Нехай $f: X \rightarrow Y$ — гомеоморфізм. Оскільки f^{-1} — неперервне відображення, то $\{f^{-1}(U_i), i \in I\}$ — відкрите покриття X . Але X — компакт, тому можна вибрати його скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_k})\}$. Скориставшись відображенням f , одержимо, що $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$ є скінченним підпокриттям Y ; звідси випливає, що Y — компакт.

2. Нехай f — відображення топологічного простору X на множину Y , яке задає на Y фактор-топологію. Тоді якщо X — компакт, то і Y — компакт.

Доведення. Нехай $\{U_i, i \in I\}$ — відкрите покриття Y . За визначенням фактор-топології $f^{-1}(U_i)$ — відкрита множина в X . Із покриття $\{f^{-1}(U_i), i \in I\}$ компакта X можна вибрати скінченне підпокриття $\{f^{-1}(U_{i_1}), \dots, f^{-1}(U_{i_k})\}$. Тоді $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$ буде скінченним підпокриттям Y .

3. Неперервний образ компакта є компакт.

Доведення подібне доведенню властивості 2.

4.5.2. Замкнені підмножини компактного топологічного простору

Розглянемо пряму R^1 з природною топологією. Відрізок $[0, 1]$ на ній — компакт. Розглянемо інтервал, що належить цьому відрізку. Інтервал компактом не буде, оскільки інтервал гомеоморфний прямій, що не є компактом, а компактність — топологічний інваріант. Отже, не будь-яка підмножина компактного топологічного простору є компактом.

Замкнена підмножина S компактного топологічного простору X є компактом.

Доведення. Нехай $\{U_j, j \in J\}$ — відкрите покриття S . Оскільки S — замкнена множина, $X \setminus S$ — відкрита множина,

то $\{U_j, j \in J\} \cup (X \setminus S)$ — відкрите покриття X . Але X — компакт, отже, із вказаного покриття можна вибрати скінченне підпокриття $\{U_1, \dots, U_n, X \setminus S\}$. Скінченим підпокриттям множини S буде $\{U_1, \dots, U_n\}$.

Наслідок 1. Сфера S^n , що задана рівнянням $(x^1)^2 + \dots + (x^{n+1})^2 = 1$, є компактом.

Доведення. Сфера S^n лежить у паралелепіпеді $-1 \leq x^i \leq 1, i = 1, \dots, n+1$, який є компактом. А сфера — замкнена множина, оскільки доповнення — множина відкрита. Отже, сфера — компакт.

Наслідок 2. Дійсний проєктивний простір RP^n — компакт.

Доведення випливає із властивостей компактних топологічних просторів.

Наслідок 3. Сфера S^n і евклідов простір E^n не гомеоморфні.

Доведення. Евклідов простір з природною топологією не компактний, а сфера з індукованою топологією — компакт. Але компактність — топологічний інваріант, отже, S^n і E^n не гомеоморфні.

Зауважимо, що з допомогою компактності не можна відповісти на запитання: чи будуть гомеоморфні відрізок $[a, b]$ та коло S^1 , топологія на яких індукована природною топологією площини?

Теза, обернена твердженню, неправильна: компактна множина топологічного простору може бути не замкнена.

Приклад. Розглянемо пряму R^1 , топологія якої породжується множинами $\{\emptyset, R^1, \{(-\infty, x) \mid x \in R^1\}\}$, і множину $A = (-\infty, 0]$. У будь-якому покритті A є відкрита підмножина $(-\infty, a)$, $0 \leq a \leq \infty$, яка вкриває множину A , отже, A — компакт. Але A не буде замкненою множиною, оскільки множина $(0, +\infty)$ — доповнення A — не відкрита в заданій топології.

Зауважимо, що в розглянутому прикладі будь-які околиці двох довільних точок перетинаються. Виявляється, в цьому полягає причина того, що компактна множина не замкнена.

Визначення. Топологічний простір називається хаусдорфовим, якщо для будь-яких різних точок цього простору існують околиці, що не перетинаються. Кажуть, що простір задовольняє аксіомі відокремлюваності.

Твердження. Метричний простір є відокремлюваним у топології, що породжена метрикою.

Доведення. Нехай x_1, x_2 — дві різні точки простору і $\rho(x_1, x_2) = a$. За окіл кожної точки візьмемо кулю радіуса

менше $\frac{a}{2}$ з центром у цій точці. Означені околи не перетинаються.

Із твердження випливає, що дійсна пряма R^1 з топологією

$$\Omega = \{\emptyset, R^1, \{(-\infty, x) \mid x \in R^1\}\}$$

не може бути метризована, тобто сукупність топологічних просторів більш широка, ніж сукупність метричних просторів.

Теорема 22. *Компактна підмножина хаусдорфового простору є замкненою.*

Доведення. Нехай A — компактна підмножина хаусдорфового простору X . Доведемо, що множина $X \setminus A$ відкрита. Оскільки простір X хаусдорфів, то існують околи V_a та U_{x_a} відповідно точок $a \in A$ та $x \in X \setminus A$ такі, що $V_a \cap U_{x_a} = \emptyset$. Якщо a перебігає множину A , то околи V_a вкривають A . Оскільки A — компакт, то із цього покриття можна вибрати скінченне покриття $\{V_{a(1)}, \dots, V_{a(n)}\}$. Розглянемо окіл $U = \bigcap_{i=1}^n U_{x_{a(i)}}$ точки x . Оскільки $U \cap V_{a(i)} = \emptyset$, $i = 1, \dots, n$, то $U \cap A = \emptyset$, тобто існує окіл точки x , що не перетинається з A . Отже, $X \setminus A$ — відкрита множина, а A — замкнена.

Наслідок. Для того щоб підмножина евклідового простору була компактом, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою і замкненою.

Доведення. Замкненість компакта в евклідовому просторі випливає із теореми 22, оскільки евклідів простір хаусдорфів.

Припустимо, що компакт M в евклідовому просторі не обмежений. Розглянемо нескінченну необмежену послідовність точок (x_i) , що належать M , і таку, що відстань між сусідніми точками послідовності $\rho(x_i, x_{i+1}) \geq 1$. Околи $D_{\frac{1}{2}}(x_i) \cup M$ точок x_i доповнимо іншими відкритими множинами, що не мають точок x_i так, щоб одержати покриття множини M (тут $D_{\frac{1}{2}}(x_i)$ — відкрита куля радіуса $\frac{1}{2}$ з центром у точці x_i). Із цього покриття не можна вибрати скінченне підпокриття. Одержана суперечність доводить, що M — обмежена множина.

Навпаки, обмежену множину можна помістити в компактну множину (наприклад, в куб досить великого розміру), а замкнена підмножина компакта є компактом.

Задачі. 1. Розглянемо топологічний простір $\{a, b, c\}$, у якому відкритими є множини $\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}$. Чи буде цей простір хаусдорфовим?

2. Чи буде хаусдорфовим простором пряма R^1 , на якій відкритими вважаються множини, що є доповненнями скінченних підмножин?

Згадаємо, що в курсі математичного аналізу була доведена така теорема.

Теорема Вейерштрасса. Якщо на сегменті $[a, b]$ задана неперервна функція, вона набуває найменшого та найбільшого значень.

Виявляється, що істотним у формулюванні теореми є не те, що функція задана саме на сегменті, а те, що сегмент — компакт.

Теорема 23. Неперервна функція, що задана на компактному топологічному просторі, набуває найменшого і найбільшого значень.

Доведення. Нехай $f: X \rightarrow R$ — неперервне відображення компактного топологічного простору X в одновимірний евклідов простір R . При неперервному відображенні образ компакта є компакт. Отже, $f(X)$ — компакт в евклідовому просторі, тобто множина обмежена та замкнена. З огляду на обмеженість досягаються $\inf_{x \in X} f(x) = a > -\infty$ та $\sup_{x \in X} f(x) = A < +\infty$; з огляду на замкненість $a, A \in f(X)$.

Задачі. 1. З'ясуємо, чи буде на прямій R компактом множина $[1, 2)$, якщо: а) топологія природна; б) топологія $\Omega = \{\emptyset, R \setminus \{(-\infty, x) \mid x \in R\}\}$?

2. Розглянемо пряму, відкритими множинами на якій названі доповнення скінченних множин. Знайти компактні множини в цій топології.

4.6. Зв'язність

Визначення. Топологічний простір X називається незв'язним, якщо його можна представити у вигляді об'єднання двох відкритих множин, що не перетинаються: $X = U \cup V, U \cap V = \emptyset$, причому $U, V \neq \emptyset, X$. Якщо таке представлення неможливе, то топологічний простір називається зв'язним.

Підмножина A топологічного простору X називається зв'язною (незв'язною), якщо вона є зв'язним (незв'язним) топологічним простором в індукованій топології.

Приклади. 1. В дискретній топології зв'язними множинами є тільки точки.

2. На дійсній прямій \mathbb{R} з природною топологією розглянемо множину $A = \{-1, 1\}$ з індукованою топологією. Перетин кулі досить малого радіуса з A є одна точка; отже, $\{-1\}, \{1\}$ — відкриті множини. Оскільки $A = \{-1\} \cup \{1\}$, то A — незв'язна множина.

Твердження. Необхідною і достатньою умовою того, що топологічний простір X незв'язний, є існування в ньому множини, яка не є порожньою і не співпадає з X і яка є одночасно відкритою і замкненою.

Доведення. Якщо X незв'язна множина, то $X = U \cup V$, де $U \neq \emptyset, X$; $U \cap V = \emptyset$, U, V — відкриті множини. Оскільки U — відкрита множина, то $V = X \setminus U$ — замкнена. Отже, V є одночасно відкритою і замкненою. Зворотнє твердження доводиться подібним чином.

Приклади. 1. Розглянемо дійсну пряму \mathbb{R} з топологією $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R} \setminus \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}\}$. У цій топології будь-яка множина дійсної прямої є зв'язною. Припустимо, що множина S в даній топології є незв'язною. Тоді $S = U \cup V$, причому $U \cap V = \emptyset$, $U, V \neq \emptyset$; U і V — одночасно відкриті і замкнені множини. Оскільки U відкрита, $U = (-\infty, a) \cap S$, а оскільки U замкнена, то $U = [b, +\infty) \cap S$. Розглянемо нетривіальний випадок $b < a$. Тоді $S \subset [b, a)$ і, таким чином, $S = U$. Одержана суперечність доводить зв'язність S .

2. Розглянемо пряму Зоргенфрея. Згадаємо, що на ній півінтервали $[a, b)$ є одночасно замкненими і відкритими множинами. Доведемо, що в цій топології на прямій зв'язною множиною є тільки точка. Справді, нехай T — деяка зв'язна множина. Нехай x — точка множини T . Тоді $T \cap [x, x + \varepsilon) = T$ при будь-якому ε і, отже, множина T складається лише з однієї точки.

3. Сегмент $[a, b]$ на прямій з природною топологією є зв'язною множиною.

Доведення. Припустимо, що сегмент $[a, b]$ незв'язний. Тоді $[a, b] = U \cup V$, де $U \cap V = \emptyset$. Нехай для визначеності $a \in U$. Розглянемо всі точки $u \in U$ такі, що $u < v$ для будь-якої точки $v \in V$. Ясно, що множина таких точок непорожня; точка a належить їй. Візьмемо $h = \sup \{U\}$. Оскільки U — одночасно відкрита і замкнена множина і $[a, b]$ — замкнена множина, то $U \cap [a, b]$ — замкнена множина прямої, тому $h \in U$. З іншого боку, оскільки $h = \sup \{U\}$, в будь-якому околі точки h є точки множини V , тобто h — гранична точка множини V . Отже, $h \in V$, тому що V — замкнена множина і, таким чином, має в собі всі граничні точки. Отже, $h \in U$ і $h \in V$, звідки $U \cap V \neq \emptyset$, що суперечить початковому припущенню.

Доведемо, що інтервал — також зв'язна множина на прямій з природною топологією.

Лема. Нехай в топологічному просторі є сукупність зв'язних множин X_α , $\alpha \in A$ і $\bigcap_\alpha X_\alpha \neq \emptyset$. Тоді $\bigcup_\alpha X_\alpha$ є зв'язною множиною.

Доведення. Припустимо, що множина $\bigcup_\alpha X_\alpha$ незв'язна. Тоді $\bigcup_\alpha X_\alpha = U \cup V$, де $U \cap V = \emptyset$ і $U, V \neq \emptyset$, $\bigcup_\alpha X_\alpha$. Якщо X_α має непорожній перетин з U , то, з огляду на зв'язність, він цілком лежить в U . Але тоді цілком в U лежить $\bigcup_\alpha X_\alpha$, оскільки $\bigcap_\alpha X_\alpha \neq \emptyset$. Звідси $V = \emptyset$. Одержана суперечність доводить твердження.

Наслідок. Інтервал — зв'язна множина на прямій з природною топологією.

Доведення. Представимо інтервал у вигляді об'єднання замкнених сегментів, кінці яких прямують до кінців інтервалу і використаємо попереднє твердження.

Твердження. Образ зв'язного топологічного простору при неперервному відображенні є зв'язним топологічним простором.

Доведення. Нехай $f: X \rightarrow Y$ — неперервне відображення зв'язної множини X на множину Y . Припустимо, що Y є незв'язною множиною. Тоді $Y = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$. Множини $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ відкриті, оскільки f — неперервне відображення, причому $f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$ та $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = X$. Але X — зв'язна множина, отже, одна із множин $f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V)$ порожня, а друга співпадає з X . Нехай для визначеності $f^{-1}(U) = \emptyset$, $f^{-1}(V) = X$. Тоді $U = \emptyset$, $V = Y$, тобто Y — зв'язна множина.

Наслідок. Якщо множини X , Y гомеоморфні, то із зв'язності однієї випливає зв'язність другої, тобто зв'язність — топологічний інваріант.

Одержано ще один критерій гомеоморфності топологічних просторів, і тепер можливі з'ясувати, чи гомеоморфні відрізок і коло з топологіями, що індуковані природною топологією площини.

Твердження. Коло S^1 і замкнений відрізок I не гомеоморфні.

Доведення. Припустимо, що твердження неправильне і існує гомеоморфізм $f: I \rightarrow S^1$. Нехай $I = [a, b]$ і $a < c < b$. Виключимо із S^1 точку $f(c)$: множина $S^1 \setminus \{f(c)\}$ гомеоморфна прямій. Пряма — зв'язна множина. Але $I \setminus \{c\} = [a, c) \cup (c, b]$, де $[a, c)$ і $(c, b]$ — відкриті множини відрізка в індукованій

топології. Таким чином, $I \setminus \{c\}$ — незв'язна множина. А зв'язність — топологічний інваріант, тобто має місце суперечність.

Правильним є більш сильне твердження.

Твердження. Коло не гомеоморфне ніякій підмножині прямої.

Доведення. Нехай коло S^1 гомеоморфне підмножині X прямої R^1 . Тоді є гомеоморфізм $f: S^1 \rightarrow X$, причому X не співпадає з R^1 , оскільки S^1 — компакт. Образ $f(S^1) = X$ — компактна зв'язна множина. Із компактності X випливає, що X — обмежена і замкнена множина, тобто існують $\sup X = b$, $\inf X = a$, і $a, b \in X$. З огляду на зв'язність $X = [a, b]$, а негомеоморфність відрізка та кола доведено вище.

Згадаємо, що в курсі математичного аналізу була розглянута така теорема.

Теорема. Нехай на $[0, 1]$ задана неперервна функція $y = f(x)$, причому $f(0) \cdot f(1) < 0$. Тоді існує точка $c \in (0, 1)$ така, що $f(c) = 0$.

Доведення. Доведемо цю теорему, використовуючи поняття зв'язності. Припустимо, що $f(c) \neq 0$, $\forall c \in (0, 1)$.

Розглянемо неперервну функцію $\varphi(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$, що задана на $[0, 1]$. Вона набуває тільки значень ± 1 , причому, оскільки $f(0) \cdot f(1) < 0$, то є значення і $+1$, і -1 . Отже, є неперервне відображення відрізка $[0, 1]$ на множину $\{-1, +1\}$, тобто є неперервне відображення зв'язної множини на незв'язну. Але якщо існує неперервне відображення f множини X на множину $\{-1, +1\}$, то X — незв'язна множина. Справді, $f^{-1}(-1) \cup f^{-1}(1) = X$. Одержана суперечність доводить теорему.

Зауважимо, що завжди існує неперервне відображення незв'язної множини X на множину $\{-1, +1\}$. Справді, $X = U \cup V$ і f будується, наприклад, так: $f(U) = -1$, $f(V) = 1$.

Має місце більш загальна теорема, наведена нижче.

Теорема 24. Нехай на зв'язному топологічному просторі X задана неперервна функція f , яка в деяких точках a, b має протилежні за знаком значення ($f(a) \cdot f(b) < 0$). Тоді знайдеться точка $c \in X$, в якій $f(c) = 0$.

Теорема 25 (Брауера). Будь-яке неперервне відображення відрізка на себе має нерухому точку.

Доведення. Проведемо доведення для відрізка $[0, 1]$. Нехай $f(x)$ — неперервне відображення відрізка $[0, 1]$ на себе і нехай в $f(x)$ немає нерухомих точок.

Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{f(x) - x}{|f(x) - x|}$. Ця неперервна функ-

ція, що задана на відрізку $[0, 1]$, набуває на його кінцях протилежних за знаком значень. Отже, існує точка $c \in (0, 1)$ така, що $\varphi(c) = 0$. Тому точка c — нерухома точка відображення f .

Теорема Брауера правильна для n -вимірного випадку: будь-яке неперервне відображення n -вимірної кулі на себе має нерухому точку.

Задачі. 1. Чи зв'язна підмножина площини, що складається із точок, обидві координати яких раціональні?

2. Чи зв'язна підмножина площини, що складається із точок, обидві координати яких ірраціональні?

3. Чи зв'язна підмножина площини, яка є об'єднанням спіралі $r = \exp \frac{1}{1+\varphi^2}$ (де $\varphi \geq 0$; r, φ — полярні координати) і кола $r = 1$? Чи зміниться відповідь, якщо замінити коло його частиною?

4. При неперервному відображенні кола на пряму знайдеться пара діаметрально протилежних точок кола, яка перейде в одну точку прямої. Довести.

Визначення. Компонентою зв'язності топологічного простору називається така зв'язна множина, яка не знаходиться в жодній іншій зв'язній множині. Компонентою зв'язності, що має в собі точку x_0 топологічного простору, називається максимальна зв'язна множина, що має в собі точку x_0 .

4.6.1. Властивості зв'язних компонент

1. Зв'язні компоненти топологічного простору або не перетинаються, або співпадають.

Справді, нехай A_1 і A_2 — дві зв'язні компоненти топологічного простору. Якщо $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$, то за лемою, доведеною вище, $A_1 \cup A_2$ — зв'язна множина. І, якщо A_1 та A_2

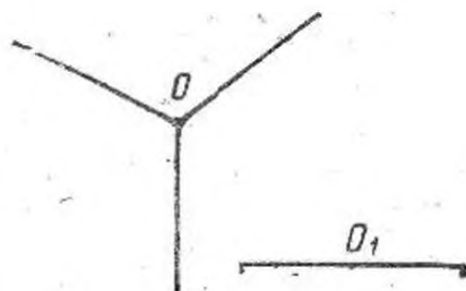


Рис. 4.13

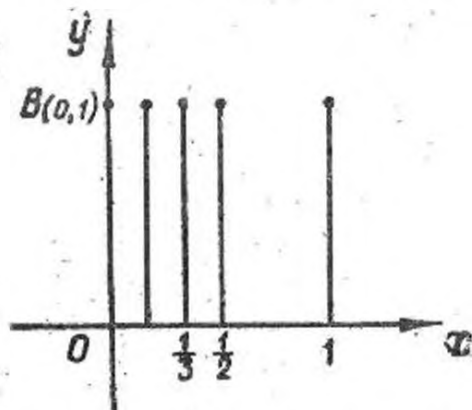


Рис. 4.14

не співпадають, A_1 (або A_2) не буде найбільшою зв'язною множиною.

2. Кількість зв'язних компонент топологічного простору є топологічним інваріантом.

Приклад. Доведемо, що інтервал не гомеоморфний фігурі, яка складена із трьох інтервалів із спільним початком (рис. 4.13). Припустимо, що ці дві множини гомеоморфні і точки O при гомеоморфізмі ставиться у відповідність точка O_1 . Виключимо із множини, яка складена із трьох інтервалів, точку O , а із інтервала — точку O_1 . Множини, що залишилися, повинні бути гомеоморфні. Але перша фігура після викидання точки O буде складатися із трьох зв'язних компонент, а інтервал без точки O_1 буде складатися із двох зв'язних компонент.

4.6.2. Лінійна зв'язність

Визначення. Шляхом, що з'єднує дві точки a_0, a_1 топологічного простору X , називається неперервне відображення $f: [0, 1] \rightarrow X$, причому $f(0) = a_0, f(1) = a_1$.

Далі будемо називати шляхом образ відрізка $[0, 1]$ при відображенні f .

Топологічний простір X називається лінійно зв'язним, якщо будь-які дві точки можна з'єднати шляхом в X .

Приклади. 1. Евклідов простір E^n є лінійно зв'язним.

Дійсно, нехай r_0, r_1 — радіуси-вектори точок a_0, a_1 відповідно. Тоді шлях, що з'єднує точки a_0 і a_1 , — це $R = (1-t)r_0 + tr_1, t \in [0, 1]$.

2. Будь-яка опукла множина евклідового простору E^n є лінійно зв'язною.

Справді, за визначенням опуклій множині з будь-якими двома точками належить відрізок, що їх з'єднує.

3. Сфера S^n — лінійно зв'язна множина.

Справді, нехай точки $a_0, a_1 \in S^n$. Проведемо через a_0, a_1 і центр сфери площину. Вона перереже сферу по великому колу. Частина великого кола, що лежить між точками a_0, a_1 , — шлях, що з'єднує ці дві точки.

Твердження. Неперервний образ лінійно зв'язної множини є лінійно зв'язним.

Доведення. Нехай $f: X \rightarrow Y$ — неперервне відображення лінійно зв'язного топологічного простору X на топологічний простір $Y, y_1, y_2 \in Y; x_1 \in f^{-1}(y_1), x_2 \in f^{-1}(y_2)$. Оскільки X — лінійно зв'язна множина, то існує шлях $g: I \rightarrow X$, який з'єднує точки x_1, x_2 . Тоді шлях $f \circ g: I \rightarrow Y$ з'єднує точки y_1, y_2 .

Н а с л і д о к. Лінійна зв'язність — це топологічний інваріант.

В и з н а ч е н н я. Нехай f_1 — шлях, що з'єднує точки a_0, a_1 ; f_2 — шлях, що з'єднує точки a_1, a_2 . Добутком двох шляхів $f_2 \circ f_1$ називається шлях

$$f \doteq f_2 \circ f_1 = \begin{cases} f_1(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ f_2(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

що з'єднує точки a_0, a_2 .

Правильною є лема, яка подібна до доказаній для зв'язних множин.

Лема. Нехай в топологічному просторі X є лінійно зв'язні множини X_α , причому $\bigcap_{\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$. Тоді $\bigcup_{\alpha} X_\alpha$ — лінійно зв'язна множина.

Доведення. Нехай $a_0, a_2 \in \bigcup_{\alpha} X_\alpha$, причому $a_0 \in X_{\alpha(0)}$, $a_2 \in X_{\alpha(2)}$ і $X_{\alpha(0)}, X_{\alpha(2)}$ різні. Нехай $a_1 \in X_{\alpha(0)} \cap X_{\alpha(2)}$. Тоді, з огляду на лінійну зв'язність $X_{\alpha(0)}$, знайдеться шлях f_1 , що з'єднує $a_0, a_1 \in X_{\alpha(0)}$. Подібним чином, з огляду на лінійну зв'язність $X_{\alpha(2)}$, знайдеться шлях f_2 , який з'єднує $a_1, a_2 \in X_{\alpha(2)}$. Тоді шлях $f_2 \circ f_1$ з'єднує точки a_0, a_2 .

Т в е р д ж е н н я. Лінійно зв'язний топологічний простір є зв'язним. Обернене неправильне.

Доведення. Нехай X — лінійно зв'язний простір. Тоді для будь-яких точок $x_0, x_1 \in X$ існує шлях $f: I \rightarrow X$, де $I = [0, 1]$, $f(0) = x_0$, $f(1) = x_1$. Припустимо, що X не є зв'язним простором. Тоді $X = U \cup V$, де $U \cap V = \emptyset$ і $V, U \neq \emptyset, X$. Візьмемо точку x_0 в множині U , x_1 — в множині V . Підмножина $f(I)$ множини X зв'язна, оскільки є образом сегмента. З іншого боку, $f(I) = (f(I) \cap U) \cup (f(I) \cap V)$, де $f(I) \cap U$ і $f(I) \cap V$ — відкриті непорожні множини $f(I)$ в індукованій топології, тобто $f(I)$ — незв'язна множина. Одержана суперечність доводить першу частину твердження.

Для доведення другої частини розглянемо приклад множини, яка є зв'язною, але не є лінійно зв'язною. Розглянемо простір E^2 з природною топологією. Нехай $I_n = \left\{ x = \frac{1}{n}, 0 \leq y \leq 1 \right\}$, $n \in \mathbb{N}$; $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \cup \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$; $B(0, 1)$ є точка. Доведемо, що множина $X = A \cup B$ (рис. 4.14) зв'язна, але не лінійно зв'язна в індукованій топології. Припустимо, що X не є зв'язною множиною, тобто $X = U_1 \cup U_2$, де U_1, U_2 — відкриті множини $U_1 \cap U_2 = \emptyset$

і $U_1, U_2 \neq \emptyset, X$. Нехай для визначеності $B \in U_1$. Тоді $A = (U_1 \cap A) \cup U_2$, тобто A є незв'язною множиною ($U_1 \cap A \neq \emptyset$, оскільки множина B не є відкритою в індукованій топології). Але насправді A навіть лінійно зв'язна множина. Дійсно, розглянемо множини $U_i = I_i \cup \{0 \leq x \leq 1, y = 0\}$, $i = 1, 2, \dots$; вони лінійно зв'язні і $\bigcap_i U_i = \{0 \leq x \leq 1; y = 0\} \neq \emptyset$. Отже, за лемою $\bigcup_i U_i = A$ — лінійно зв'язна

множина. Одержана суперечність доводить зв'язність множини X . Доведемо тепер, що X не є лінійно зв'язною множиною. Дійсно, якби множина X була лінійно зв'язною, то в ній існував би шлях $f: I \rightarrow X$, який з'єднував би точки $(0, 1)$ та $(1, 1)$. Нехай ρ — евклідова відстань в E^2 . Функція $\rho: E^2 \times E^2 \rightarrow [0, \infty)$ неперервна як функція двох аргументів. Нехай $f(0) = B$. Розглянемо функцію $\varphi(t) = \rho(B, f(t))$. Вона неперервна, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. З огляду на неперервність, існує $\varepsilon > 0$ таке, що при $0 \leq t \leq \varepsilon$ буде $\varphi(t) \leq \frac{1}{2}$ і $\varphi(\varepsilon) > 0$, тобто відрізок шляху $f: [0, \varepsilon] \rightarrow X$ лежить у крузі K радіуса $\frac{1}{2}$ з центром в точці B і образ цього відрізка не співпадає з B . Таким чином, існує шлях f' , що з'єднує точку B і якусь точку із $K \cap A$.

Розглянемо ортогональну проекцію p шляху f' на вісь Ox . Оскільки вся множина $X \cap K$ проектується в точки 0 та $\{\frac{1}{n}, n \in N, n \geq 2\}$, то і точки шляху f' відобразяться в точки $x = 0$ та $\{x = \frac{1}{n}, n \in N, n \geq 2\}$. Відображення p є неперервним, оскільки на площині проекція p неперервна, а топологія $X \cap K$ індукується топологією площини. Таким чином, $p \circ f'$ — неперервне відображення відрізка I у множину $\{0, \frac{1}{n}\}, n \in N, n \geq 2$. При неперервному відображенні образом зв'язної множини є зв'язна множина. Але $\{0, \frac{1}{n}\}_{n \geq 2}$ — незв'язна множина. Одержана суперечність доводить, що множина X не є лінійно зв'язною.

Задача. Розглянути множину, що складається із графіка функції $y = \sin \frac{1}{x}$, $0 < x \leq 1$, з'єданого з відрізком $x = 0, -1 \leq y \leq 1$. Чи буде ця множина зв'язною? лінійно зв'язною?

Природно виникає запитання: при яких додаткових умовах із зв'язності множини впливає її лінійна зв'язність?

Теорема 26. Зв'язна відкрита множина в n -вимірному евклідовому просторі є лінійно зв'язною.

Доведення. Нехай A — зв'язна відкрита множина в n -вимірному евклідовому просторі, і точка $y_0 \in A$. Розглянемо множину точок $A_1 \subset A$, які можна з'єднати з фіксованою точкою y_0 неперервним шляхом. Множина A_1 не порожня. Справді, досить мала куля з центром в точці y_0 лежить в A , і точку цієї кулі можна з'єднати з y_0 радіусом. Множина A_1 відкрита. Справді, нехай точка y_1 належить A_1 , отже, і A . Оскільки $y \in A$, то існує шлях f , який з'єднує y_0 з y_1 . Оскільки $y \in A$, існує куля $D_\varepsilon(y_1)$ радіуса ε з центром у точці y_1 , яка належить A . Усі точки цієї кулі можна з'єднати неперервним шляхом з точкою y_0 : шлях f з'єднує y_0 з y_1 , а радіус кулі $D_\varepsilon(y_1)$ з'єднує y_1 з точкою кулі, тому куля $D_\varepsilon(y_1) \in A_1$.

Розглянемо множину A_2 точок, які не можна з'єднати з точкою y_0 неперервним шляхом. Множина A_2 відкрита. Справді, якщо $y_2 \in A_2$, тобто y_2 не можна з'єднати з y_0 неперервним шляхом, то і точки кулі $D_\varepsilon(y_2)$ не можна з'єднати з y_0 неперервним шляхом, оскільки якби деяку точку кулі можна було б з'єднати шляхом з y_0 , то, добавивши радіус, можна одержати б шлях, який з'єднує y_2 з y_0 .

Таким чином, зв'язна множина $A = A_1 \cup A_2$, де $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Звідси випливає, що $A_2 = \emptyset$, тобто будь-яку точку множини A можна з'єднати з точкою y_0 неперервним шляхом. Оскільки y_0 — довільна точка, множина A лінійно зв'язна.

Зауваження. При доведенні теореми використано лише те, що разом із кожною точкою топологічному простору належить внутрішність деякої кулі з центром із цієї точки, тобто доведено більш загальне твердження.

Твердження. Зв'язний топологічний простір, який локально лінійно зв'язний, є лінійно зв'язний топологічний простір.

4.6.3. Властивості топології добутку і фактор-топології

Нехай X, Y — топологічні простори, $X \times Y$ — топологічний простір із топологією добутку.

Твердження. Топологічний простір $X \times Y$ компактний тоді і тільки тоді, коли топологічні простори X, Y компактні.

Доведення. Припустимо, що X та Y компактні. Нехай $\{W_j : j \in J\}$ — відкрите покриття $X \times Y$. За визначенням кож-

на множини W_j має вигляд $\bigcup_k (U_{jk} \times V_{jk})$, де U_{jk} — відкрита множина в X і V_{jk} — відкрита в Y . Таким чином, $\{U_{jk} \times V_{jk} : j \in J, k \in K\}$ — відкрите покриття $X \times Y$. Для будь-якого $x \in X$ підпростір $\{x\} \times Y$ компактний (гомеоморфний Y) і, оскільки $\{U_{jk} \times V_{jk} : j \in J, k \in K\}$ покриває також $\{x\} \times Y$, то знайдеться скінченне підпокриття $\{U_i(x) \times V_j(x) : i = 1, \dots, \dots, n(x)\}$ простору $\{x\} \times Y$. Розглянемо множину $U(x) = \bigcap_i U_i(x)$. Сім'я $\{U(x) : x \in X\}$ є відкритим покриттям X і тому має скінченне підпокриття $\{U(x_i) : i = 1, \dots, m\}$. Очевидно, що $\{U(x_i) \times V_{k_i}(x_i) : i = 1, \dots, m; k_i = 1, 2, \dots, \dots, n(x_i)\}$ — скінченне покриття $X \times Y$. Для будь-якого i та k_i знайдуться такі $j \in J$ і $k \in K$, що $U(x_i) \times V_{k_i}(x_i) \subset \subset U_{jk} \times V_{jk} \subset W_j$. Отже, існує скінченне вкриття $\{W_j : j \in J\}$ простору $X \times Y$.

Навпаки, якщо $X \times Y$ — компактна множина, то X і Y — компактні, оскільки проєкції $\pi_x : X \times Y \rightarrow X$ та $\pi_y : X \times Y \rightarrow Y$ неперервні.

Твердження. Топологічний простір $X \times Y$ є зв'язним тоді і тільки тоді, коли топологічні простори X , Y зв'язні.

Доведення. Нехай $X \times Y$ — зв'язний простір. Оскільки проєкції $\pi_x : X \times Y \rightarrow X$, $\pi_y : X \times Y \rightarrow Y$ — неперервні відображення, то X , Y — також зв'язні.

Нехай X , Y — зв'язні простори. Розглянемо множини $A_x = \{x\} \times Y \cup X \times \{y_0\}$, де $x \in X$, $y_0 \in Y$ фіксовані. Кожна множина A_x зв'язна і $X \times \{y_0\} = \bigcap_x A_x \neq \emptyset$. Тому $\bigcup_x A_x$ — зв'язна множина. Але $\bigcup_x A_x = X \times Y$ і $X \times Y$ — зв'язна множина, що і доводить твердження.

Подібним чином доводиться твердження, яке наведене нижче.

Твердження. Топологічний простір $X \times Y$ лінійно зв'язний тоді і тільки тоді, коли лінійно зв'язні топологічні простори X , Y .

Правильним є і таке твердження.

Твердження. Топологічний простір $X \times Y$ є хаусдорфовим тоді і тільки тоді, коли X , Y — хаусдорфові топологічні простори.

Приклад. Розглянемо дві сфери S^p та S^q , $p \geq 1$, $q \geq 1$ і евклідов простір E^n , $n \geq 1$. Топологічні простори $S^p \times S^q$ та $S^p \times E^n$ є зв'язними та лінійно зв'язними. Простір $S^p \times S^q$ є компактом.

Нехай відображення $f: X \rightarrow Y$, де X — топологічний простір, задає на Y фактор-топологію.

Задачі. Довести:

1. Якщо X — компакт, то Y — компакт.
2. Якщо X — зв'язна множина, то Y також зв'язна.
3. Якщо X — лінійно зв'язна множина, то Y також лінійно зв'язна.

Зауважимо: якщо X — хаусдорфів простір, то Y не обов'язково є таким.

Приклад. Розглянемо пряму R з природною топологією і промінь R^+ , що складається з точок, координати яких додатні. Фактор-простір R/R^+ не є хаусдорфовим.

4.7. Вкладені і занурені криві і поверхні.

Теорема Жордана

Визначення. Простою замкненою (або вкладеною компактною) кривою на площині називають криву, що гомеоморфна колу.

Теорема 27 (Жордана). Проста замкнена крива на площині поділяє площину на дві зв'язні області, одна з яких обмежена, а друга — необмежена.

Доведення. Доведемо теорему для випадку, коли проста замкнена крива є багатокутником. Нехай p — довільна точка площини. Будемо проводити промені з цієї точки. Вони можуть як перетинати багатокутник, так і не перетинати. Будь-який промінь має скінченну кількість точок перетину з багатокутником, якщо він не містить у собі сторону багатокутника. Якщо промінь проходить через вершину або містить цілу сторону багатокутника, то враховуємо такий перетин двічі, коли сторони, суміжні з цією вершиною чи стороною, лежать по одну сторону від променя (рис. 4.15); у протилежному випадку перетин підраховується один раз (рис. 4.16).

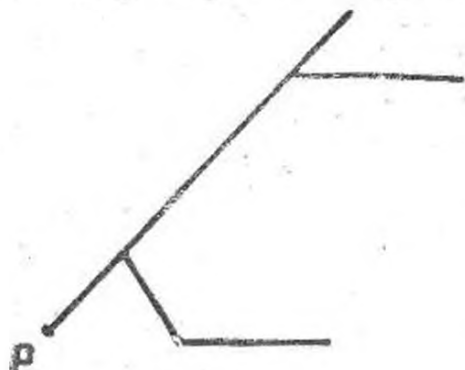


Рис. 4.15

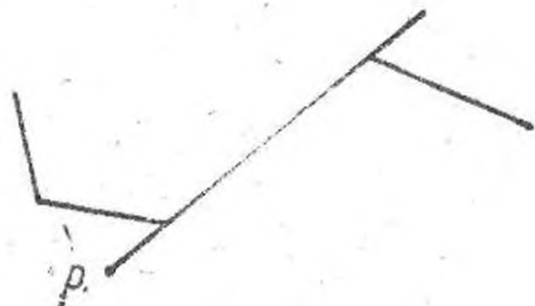


Рис. 4.16

Якщо кількість точок перетину променя з багатокутником парна, приписуємо променю порядок 0, якщо непарна — 1.

При обертанні променя кількість точок перетину його з багатокутником змінюється лише при проходженні його через вершину чи сторону, але змінюється або на 0, або на 2, тобто парність не змінюється. Отже, порядок 0 чи 1 можна приписувати не променю, а точці — початку променя. Позначимо через $p(x)$ порядок точки x . Доведемо, що множини точок $\{x | p(x) = 0\}$ та $\{x | p(x) = 1\}$ утворюють області.

Справді, нехай деяка точка x_0 має порядок 0. Розглянемо досить малий круг з центром в x_0 . Нехай x — довільна точка круга. Проведемо промінь через x_0 та x і переконаємося, що $p(x) = 0$.

Подібним чином доводиться, що множина точок $\{x | p(x) = 1\}$ утворює область.

Доведемо, що області $\{x | p(x) = 0\}$ та $\{x | p(x) = 1\}$ зв'язні. Поблизу сторони багатокутника візьмемо дві точки x_1 та x_2 з $p(x_1) = 1$, $p(x_2) = 0$ (рис. 4.17). Промінь з початком у точці x_2 буде мати на 1 менше точок перетину з багатокутником, ніж промінь з початком в точці

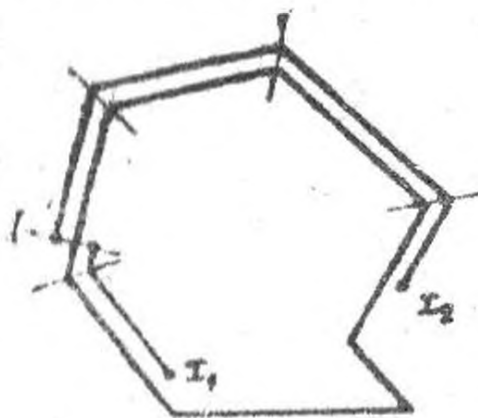


Рис. 4.17

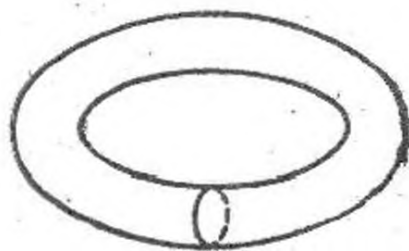


Рис. 4.18

x_1 . Таким чином, точки x_1 та x_2 мають різну парність. Доведемо тепер, що будь-яку точку площини, крім точок багатокутника, можна з'єднати неперервним шляхом з однією з точок x_1, x_2 . Нехай x — довільна точка площини, що не належить багатокутнику. Візьмемо на багатокутнику найближчу до x точку, відступимо від неї в обидві сторони вздовж ламаної межі багатокутника, тобто оберемо паралельні шляхи; тоді прийдемо або до x_1 , або до x_2 . Справді, нехай L — проста замкнена ламана, M — деяка ламана, Для будь-якої точки x площини порядок від-

носно L (позначається через $p(x, L)$) введемо подібно введеному вище. Тоді, якщо L — замкнена ламана, а M — ламана, що її не перетинає, то порядок $p(x, L)$ при русі x вздовж M не зміниться.

Зауваження. 1. Доведення теореми Жордана для загального випадку є, наприклад, в роботах [1; 12].

2. Теорема Жордана правильна не тільки для площини, але і для сфери.

Розглянемо сферу S^2 та криву γ на ній, що гомеоморфна колу. Крива γ не буде вкривати сферу, оскільки сфера не гомеоморфна колу.

Справді, якщо із кола виключити дві точки, вона розпадеться на дві незв'язні множини. А якщо із сфери виключити дві точки, то лишиться поверхня, яка гомеоморфна циліндру, тобто зв'язна множина. Але зв'язність — топологічний інваріант, отже, сфера не може бути гомеоморфною колу.

Нехай точка $p \in \gamma$. Здійснимо стереографічну проекцію із точки p . При цьому крива γ перейде в криву $\bar{\gamma}$ на площині. Крива $\bar{\gamma}$ ділить площину на дві області. Перейдемо назад на сферу: крива $\bar{\gamma}$ ділить її на дві області, причому нескінченна область замкнеться точкою p .

3. Теорема Жордана правильна для поверхні, що гомеоморфна сфері S^2 але неправильна для довільної поверхні.

Приклад. Крива γ на торі (рис. 4.18) не поділяє тор на дві області.

4.7.1. Криві і поверхні

Раніше дано визначення елементарної кривої та елементарної поверхні. Із визначень випливає, що коло не є елементарною кривою, а сфера не є елементарною поверхнею.

Визначення. Вкладеною кривою в евклідовому просторі називається така зв'язна множина, у кожній точці якої є окіл, що гомеоморфний відкритому інтервалу.

Приклади. 1. Еліпс — це вкладена крива.

2. Гіпербола не є вкладеною кривою, оскільки гіпербола не є зв'язною множиною. Зв'язна компонента гіперболи — елементарна крива.

3. Дві прямі, що перетинаються, не є вкладеною кривою.

Доведемо, що будь-який окіл перетину прямих не гомеоморфний інтервалу. Припустимо протилежне, і не-

хай при гомеоморфізмі точка O перетину прямих перейде в точку O' інтервалу. Виключимо точки O та O' . Тоді окіл точки перетину прямих розпадеться на чотири зв'язні компоненти, а інтервал — на дві. Оскільки зв'язність є топологічним інваріантом, то має місце суперечність.

4. Розглянемо множину точок площини, що задана в полярній системі координат рівняннями $\rho = e^{\frac{1}{1+\varphi^2}}$, $\varphi > 0$ і $\rho = 1$. Ця множина точок не є вкладеною кривою, оскільки окіл точки кола $\rho = 1$ складається із декількох зв'язних компонент.

Зауважимо, що будь-яка вкладена крива гомеоморфна або прямій, або колу.

Визначення. *Множина точок в евклідовому просторі називається зануреною кривою, якщо вона є локально топологічним образом вкладеної кривої.*

У зануреної кривої можуть бути точки самоперетину.

Приклад. Лемніската Бернуллі, що задана в полярній системі координат рівнянням $\rho^2 = 4a^2 \cos 2\varphi$, є зануреною кривою.

Визначення. *Вкладеною поверхнею в евклідовому просторі називається зв'язна множина, в якій кожна точка має окіл, що гомеоморфний відкритому кругу.*

Приклади. 1. Еліпсоїд — це вкладена поверхня.

2. Однопорожнистий гіперболоїд — це вкладена поверхня.

3. Двопорожнистий гіперболоїд не є вкладеною поверхнею, оскільки це незв'язна множина.

4. Конус не є вкладеною поверхнею. У вершини конуса немає околу, який гомеоморфний внутрішності круга. Справді, якщо викинути вершину конуса, лишиться незв'язна множина; якщо ж викинути одну точку на крузі, лишиться зв'язна (навіть лінійно зв'язна) множина.

5. Дві площини, що перерізаються, не є вкладеною поверхнею, оскільки у точок, що належать прямій перерізу площини, немає околів, які гомеоморфні відкритому кругу.

4.7.2. Многовиди

Многовидом вимірності n називається зв'язний хаусдорфів простір із зліченою базою, у кожній точці якого є окіл, що гомеоморфний внутрішності кулі відповідної вимірності n .

Нехай U_α та U_β — околи двох різних многовидів, що перетинаються. За визначенням многовиду існують гомеоморфізми $\varphi_\alpha: U_\alpha \rightarrow D_\alpha$ та $\varphi_\beta: U_\beta \rightarrow D_\beta$, де D_α, D_β — відповідні кулі в евклідовому просторі вимірності n . Розглянемо перетин околів $U_\alpha \cap U_\beta$. Він відображається з допомогою φ_α в кулю D_α , з допомогою φ_β — в кулю D_β (рис. 4.19). Можна встановити відповідність між точками підмножини $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ та $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ евклідових просторів з допомогою таких відображень:

$$\begin{aligned}\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} &: \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta); \\ \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} &: \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)\end{aligned}$$

(див. рис. 4.19). Оскільки $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ — гомеоморфізми, то і $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ — гомеоморфізми, причому $(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})^{-1} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ і $(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})^{-1} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Якщо в евклідовому просторі, в якому розташована куля D_α , введені координати x^1, \dots, x^n , а в евклідовому просторі з кулею D_β — координати y^1, \dots, y^n , то відображення $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ записується в координатах так:

$$y^i = f^i(x^1, \dots, x^n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Зауважимо, що коли в кулі D_α введені координати, тоді природним чином вводяться координати в околі U_α (див. рис. 4.19). А саме, точка $A \in U_\alpha$ має ті ж координати, що

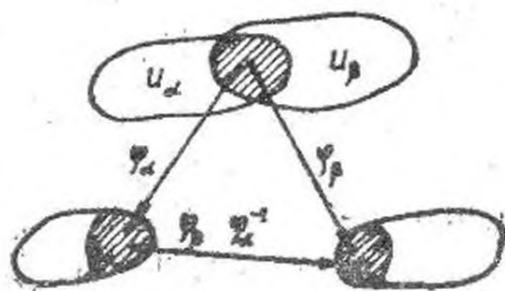


Рис. 4.19



Рис. 4.20

і точка $A' \in D_\alpha$, якщо $A' = \varphi_\alpha(A)$, де φ_α — відображення, яке задає гомеоморфізм U_α в D_α .

Визначення. Околи U_α, U_β точок многовиду називаються картами. Сукупність карт, які покривають увесь многовид, називається атласом.

Многовид називається диференційовним, якщо існує атлас, де функції переходу від одних координат до других, які задають відображення $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}, \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$, належать класу $C^r, r \geq 1$.

Многовид називається аналітичним, якщо існує атлас, де функції переходу від одних координат до других є аналітичними.

Приклади. 1. Розглянемо двовимірну сферу, що задана рівнянням $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, з індукованою топологією. Складемо атлас сфери із шести карт $U_1: x^1 > 0; U_2: x^1 < 0; U_3: x^2 > 0; U_4: x^2 < 0; U_5: x^3 > 0; U_6: x^3 < 0$. Знайдемо зв'язок між координатами в перетині карт. Розглянемо карти $U_1: x^1 > 0$ та $U_3: x^2 > 0$. Карта U_1 гомеоморфна відкритому одиничному колу з центром у початку координат, розташованому в площині x^2x^3 . Тому в карті U_1 на сфері за координати точки можна взяти числа $u^1 = x^2, u^2 = x^3$. Карта U_3 однозначно проектується на відкритий круг площини x^1x^3 , причому проекція задає гомеоморфізм. Отже, можна вибрати $v^1 = x^1, v^2 = x^3$ за координати на сфері в карті U_3 . В перетині карт $U_1 \cap U_3: \begin{cases} x^1 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases}$ у кожній точці є координати (u^1, u^2) та (v^1, v^2) . Згадавши, що $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1$, знайдемо зв'язок між цими координатами:

$$\begin{cases} v^1 = \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2}; \\ v^2 = u^2. \end{cases}$$

Функції $v^1 = v^1(u^1, u^2), v^2 = v^2(u^1, u^2)$ аналітичні оскільки $(u^1)^2 + (u^2)^2 \neq 1$.

Обернене відображення $u^1 = u^1(v^1, v^2); u^2 = u^2(v^1, v^2)$ також може бути задане за допомогою аналітичних функцій.

Таким чином, показано, що сфера — це аналітичний многовид.

Зауваження: а) подібно попередньому доводиться, що n -вимірна сфера — аналітичний многовид; б) можна вкрити сферу двома картами: видалити північний полюс і здійснити стереографічну проекцію із північного полюса на дотичну площину сфери в південному полюсі; ви-

далити південний полюс і здійснити стереографічну проєкцію із нього на дотичну площину в північному полюсі.

Задача. Знайти зв'язок між координатами у випадку, коли сфера вкрита двома картами.

2. Розглянемо проєктивний простір RP^2 і доведемо, що він є многовидом. Нехай (x^1, x^2, x^3) — однорідні координати. Проєктивний простір можна вкрити трьома картами: $U_1 : x^1 \neq 0$; $U_2 : x^2 \neq 0$; $U_3 : x^3 \neq 0$. Знайдемо зв'язок між координатами в перетині карт U_1, U_2 . В карті U_1 введемо координати $\xi^1 = \frac{x^2}{x^1}$, $\xi^2 = \frac{x^3}{x^1}$; в карті U_2 — $\eta^1 = \frac{x^1}{x^2}$; $\eta^2 = \frac{x^3}{x^2}$. Тоді функції $\eta^1 = \frac{1}{\xi^1}$; $\eta^2 = \frac{\xi^2}{\xi^1}$ задають зв'язок між координатами в області $U_1 \cap U_2$.

3. Розглянемо дволанковий плоский маятник. Точки A і B рухаються по колу незалежно одна від одної. Отже, сукупність всіх можливих станів маятника — це тор, і ця сукупність є многовидом.

Якщо маятник не плоский, то точки A та B незалежно одна від другої рухаються по сферах. Сукупність усіх станів такого маятника — многовид $S^2 \times S^2$.

4. Розглянемо множину всіх прямих на площині. Це многовид, що гомеоморфний нескінченному листку Мебіуса. Справді, будь-яку пряму на площині можна задати нормальним рівнянням $x \cos \varphi + y \sin \varphi = h$. Набору (φ, h) відповідає певна пряма. Якщо пряма l задана рівнянням $x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 = h_0$, то заміна кута φ_0 на кут $\varphi_0 + \pi$ означає, що напрямком нормалі до прямої l змінили на протилежний, тому h_0 в рівнянні прямої потрібно замінити на $-h_0$. Таким чином (φ, h) і $(\varphi + \pi, -h)$ задають одну і ту ж пряму. В інших випадках різним наборам (φ, h) будуть відповідати різні прямі.

Розглянемо тепер смугу $0 \leq \varphi \leq \pi$, $-\infty < h < +\infty$ і установимо взаємно однозначну відповідність між точками смуги та прямими на площині. Різним внутрішнім точкам смуги відповідають різні прямі. Граничним парам $(0, h)$ та $(\pi, -h)$ відповідає одна і та ж пряма. Отже, граничні точки $(0, h)$, $(\pi, -h)$ потрібно ототожнити. Після ототожнення одержимо нескінченний листок Мебіуса. Але нескінченний листок Мебіуса є многовидом, оскільки будь-яка його точка має окіл, який гомеоморфний внутрішності круга.

Задача. Задати тор як поверхню обертання і довести, що він є многовидом.

Визначення. *Зануреною поверхнею називається локально-топологічний образ многовиду відповідної вимірності, що лежить в евклідовому просторі.*

Приклад. Розглянемо пляшку Клейна. Як многовид вона зображена на рис. 4.1 (де показано, як потрібно ототожнити граничні точки квадрата). В тривимірному евклідовому просторі пляшка Клейна без самоперерізів не реалізується. Пляшка Клейна — занурена поверхня. Як занурена поверхня в тривимірному просторі вона зображена на рис. 4.20.

4.7.3. Двовимірні компактні многовиди

Класифікацію одновимірних многовидів дає теорема, що наведена нижче.

Теорема 28. *Компактний одновимірний многовид гомеоморфний колу, некомпактний одновимірний многовид гомеоморфний прямій.*

Розглянемо двовимірні многовиди.

Визначення. *Сумою $X \sqcup Y$ двох топологічних просторів X, Y , що не перетинаються, називається сукупність, яка складається із точок X та Y , відкриті околи в яких — це околи, відкриті в X або Y .*

Нехай X, Y — топологічні простори, A — підмножина X , $f: A \rightarrow Y$ — неперервне відображення. Кажуть, що X приклеєний до Y за допомогою відображення f , якщо одержаний новий топологічний простір (позначається через $Y \cup_f X$), який є фактор-простором $X \sqcup Y$ із такими класами еквівалентності: якщо точка $x_0 \in X \setminus A$ або $Y \setminus f(A)$, то її клас еквівалентності складається із неї; якщо $x_0 \in A$, то її клас еквівалентності складається із точок $f(x_0), f^{-1}(f(x_0))$. На $Y \cup_f X$ вводиться фактор-топологія.

Приклади. 1. Розглянемо сферу S^2 , на якій виріжемо область, що гомеоморфна колу (зауважимо, що область, яка лишилася, також гомеоморфна колу). Одержана поверхня називається сферою з діркою. Якщо із тора вирізати область, що гомеоморфна колу, одержимо поверхню, яка називається ручкою. Отже, нехай топологічний простір X — це ручка, $A \subset X$ — граничне коло, топологічний простір Y — сфера з діркою, f — топологічне відображення множини A на межу дірки. Тоді $Y \cup_f X$ — сфера з ручкою, тобто поверхня, яка одержується, коли до сфери з діркою по граничному колу приклеюють ручку.

Якщо на сфері p дірок, до кожної з яких приклеєна ручка, то одержана поверхня називається сферою з p ручками.

Зокрема, сфера з однією ручкою — це тор, з двома — крендель, з трьома — крендель з трьома дірками.

2. Межею листка Мебіуса є коло. По межовому колу до сфери з діркою можна приклеїти листок Мебіуса. Якщо на сфері q дірок, до кожної з яких приклеєний листок Мебіуса, то одержана поверхня називається сферою з q листками Мебіуса.

Сфера з одним листком Мебіуса — це проєктивна площина.

Сфера з двома листками Мебіуса — це пляшка Клейна.

Поверхня, в якій є підмножина, що гомеоморфна листку Мебіуса, називається неорієнтованою поверхнею. Таким чином, сфера з листком Мебіуса — неорієнтована поверхня.

Теорема 29. *Будь-який компактний двовимірний многовид гомеоморфний сфері з p ручками або сфері з q листками Мебіуса, причому сфери з різною кількістю ручок не гомеоморфні між собою, сфери з різною кількістю листків Мебіуса не гомеоморфні між собою, сфери з ручками не гомеоморфні сферам з листками Мебіуса.*

Доведення теореми можна знайти в роботах [2; 12].

Із теореми випливає, що існують зліченна кількість орієнтованих компактних двовимірних многовидів і зліченна кількість неорієнтованих компактних двовимірних многовидів.

Доведемо, що сфери з ручками і сфери з листками Мебіуса — многовиди, одержавши їх за допомогою багатокутників факторизації.

Розглянемо довільний багатокутник. Однією і тією ж буквою будемо позначати сторони, які ототожнюються. Кожну сторону наділимо стрілкою, яка буде показувати, як склеювати сторони. Якщо тепер задати обхід багатокутника, то кожній стороні буде відповідати $+1$ або -1 залежно від того, співпадає напрямок сторони з напрямком обходу багатокутника (в цьому випадку стороні відповідає $+1$) чи протилежний йому (в цьому випадку стороні відповідає -1). Границя багатокутника, що зображений на рис. 4.21, записується так: $aba^{-1}b^{-1}c$. Здійснивши вказані склеювання сторін багатокутника, одержимо поверхню.

Приклади. 1. Тор одержується із прямокутника з межею $aba^{-1}b^{-1}$.

2. Ручка одержується, коли із тора вирізається область, гомеоморфна кругу. Отже, ручку можна одержати із п'ятикутника, якщо склеїти його таким чином: $aba^{-1}b^{-1}c$.

3. Листок Мебіуса одержується із прямокутника з межею ad_1ad_2 (рис. 4. 22).

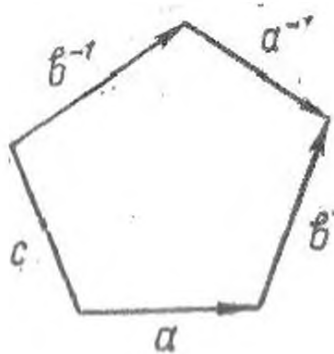


Рис. 4.21

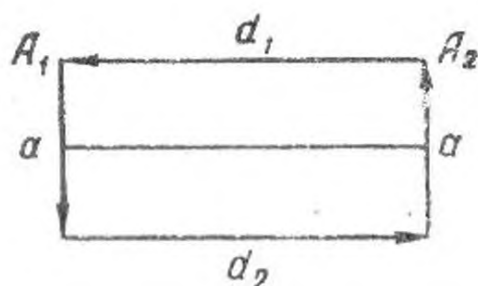


Рис. 4.22

Зробимо переклейку. Розріжемо прямокутник по діагоналі c , а по стороні, що позначена буквою a , здійснимо реальне склеювання. Тоді границя багатокутника, що задає листок Мебіуса, запишеться так: ccd (рис. 4.23).

Представимо листок Мебіуса ще одним способом. Розріжемо прямокутник, що зображений на рис. 4.22, по середній лінії A_1A_2 . Здійснимо тепер реальне склеювання по стороні a , яка складається із двох частин — a_1 та a_2 . Одержимо кільце (рис. 4.24). Щоб одержати із кільця листок Мебіуса, потрібно на внутрішньому граничному колі виконати ототожнення діаметрально протилежних точок. Зауважимо, що для одержання із кільця листка

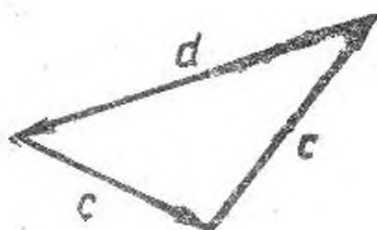


Рис. 4.23

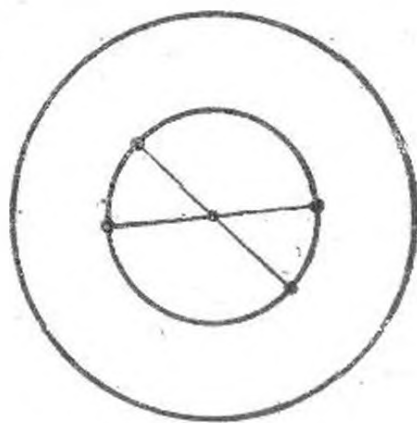


Рис. 4.24

Мебіуса можна ототожнити діаметрально протилежні точки і на зовнішньому колі.

Повернемося тепер до сфери з p ручками та сфер з q листками Мебіуса.

Розглянемо сферу з p ручками як поверхню, що одержується при склеюванні відповідним чином сторін багатокутника.

Зауважимо, що сфера одержується із двокутника з межею aa^{-1} .

Якщо до сфери з однією діркою (до області, що гомеоморфна кругу) підклеїти ручку $aba^{-1}b^{-1}c$, то одержимо тор $aba^{-1}b^{-1}$. Сферу з двома ручками можна одержати так: із сфери з однією ручкою (із тора) вирізати дірку і приклеїти до неї ручку. Отже, сферу з двома ручками можна одержати із восьмикутника з межею $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}$ тощо.

Сфера з p ручками одержується із $4p$ -кутника шляхом факторизації його сторін таким чином: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_pb_p a_p^{-1}b_p^{-1}$. Сфера з p ручками називається ще зв'язною сумою торів.

Розглянемо сферу з q листками Мебіуса.

Листок Мебіуса, як показано вище, можна одержати із трикутника з межею aac . Якщо із сфери вирізати одну дірку і приклеїти листок Мебіуса aac , то одержимо сферу з одним листком Мебіуса. Вона утворена із двокутника з межею aa .

Але листок Мебіуса можна одержати також із кільця, якщо ототожнити протилежні точки граничного кола. Отже, сферу з одним листком Мебіуса можна одержати так: вирізати із сфери дірку, приклеїти кільце, потім ототожнити діаметрально протилежні точки границі; але з топологічної точки зору це все одно, що з самого початку ототожнити діаметрально протилежні точки границі дірки. Тепер легко довести, що сфера з одним листком Мебіуса — проєктивна площина. Справді, сфера з діркою гомеоморфна кругу. Тому сфера з одним листком Мебіуса одержується із круга, в якого ототожнені діаметрально протилежні точки граничного кола. Але вище ми, щоб одержати проєктивну площину, ототожнювали центрально-симетричні точки квадрата. Оскільки квадрат і круг гомеоморфні, сфера з одним листком Мебіуса є проєктивною площиною.

Із викладеного вище випливає, що проєктивна площина — це псевдосфера з ототожненими діаметрально протилежними точками границі, або сфера з ототожненими діаметрально протилежними точками.

Щоб одержати сферу з двома листками Мебіуса, із сфери з одним листком Мебіуса a_1a_1 виріжемо дірку і приклеїмо до її межі листок Мебіуса a_2a_2c . Отже, сфера з двома листками Мебіуса одержується із чотирикутника з границею $a_1a_1a_2a_2$.

Задача. Довести, що сфера з двома листками Мебіуса є пляшкою Клейна.

Сфера з q листками Мебіуса одержується із $2q$ -кутника з межею $a_1a_1a_2a_2 \dots a_qa_q$. Сфера з q листками Мебіуса називається ще зв'язною сумою проєктивних площин.

Багатокутник з межею на площині є компакт. Сфера з p ручками або з q листками Мебіуса одержується із багатокутника за допомогою факторизації та введення фактор-топології. Звідси випливає, що сфери з p ручками або q листками Мебіуса — це компакти.

Покажемо, що це многовид, тобто в кожній точці є окіл, що гомеоморфний колу. Якщо точка розташована всередині багатокутника, то в неї є окіл, який гомеоморфний колу. Якщо точка міститься на межі багатокутника, то потрібний окіл склеюється із двох півколу. Якщо точка співпадає з вершиною багатокутника, то легко помітити, що всі вершини склеюються в одну, а сектори послідовно склеюються в окіл, що гомеоморфний колу.

За теоремою 29 сферами з p ручками та сферами з q листками Мебіуса вичерпуються всі топологічні типи двовимірних компактних многовидів.

Зауважимо, що якщо до одних дірок на сфері приклеїти ручки, а до других — листки Мебіуса, то не можна одержати новий многовид; це буде сфера з деякою кількістю листків Мебіуса.

Глава 5

ОСНОВИ АЛГЕБРАІЧНОЇ ТОПОЛОГІЇ

Топологічні простори можуть вивчатися алгебраїчними методами. Для цього топологічному простору X ставиться у відповідність деяка група $H(X)$, що є топологічним інваріантом, тобто якщо групи двох топологічних просторів не ізоморфні, то простори не гомеоморфні. Відображенню топологічних просторів $f: X \rightarrow Y$ відповідає гомоморфізм $f_*: H(X) \rightarrow H(Y)$. У багатьох випадках вивчати гомеоморфізм груп простіше, ніж вивчати відображення топологічних просторів.

5.1. Елементи теорії гомотопій

Визначення. Нехай X, Y — топологічні простори. Неперервні відображення $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ називаються гомотопними (гомотопія позначається так: $f_0 \sim f_1$), якщо існує неперервне відображення $F: X \times I \rightarrow Y$, де I — одиничний відрізок, таке, що $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$, $x \in X$.

Розглянемо квадрат (рис. 5.1). На нижній стороні квадрата відображення $F(x, s)$, $x \in X$, $s \in I$ співпадає з f_0 ,

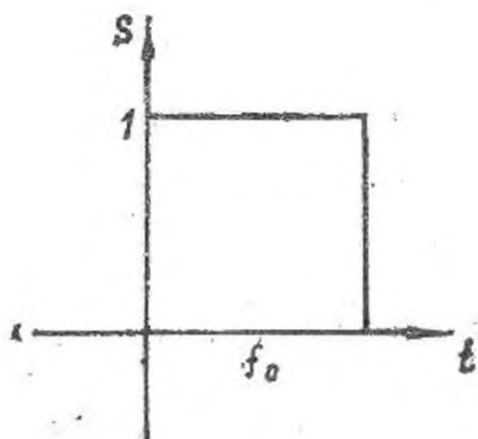


Рис. 5.1

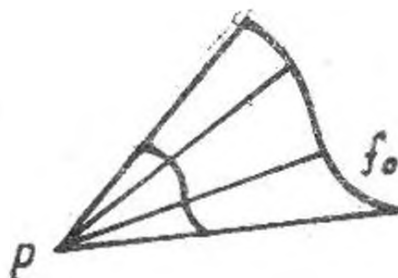


Рис. 5.2

на верхній — з f_1 , на проміжних рівнях $s = \text{const}$ — з одним із етапів деформації f_0 в f_1 .

Твердження. Будь-які два неперервні відображення $f_0, f_1: X \rightarrow E^n$, де X — топологічний простір, гомотопні.

Справді, відображення гомотопії може бути задане так: $F(x, s) = (1-s)f_0(x) + sf_1(x)$. Тут $f_0(x), f_1(x)$ — радіуси-вектори в евклідовому просторі E^n .

Твердження. Довільне неперервне відображення $f_0: X \rightarrow E^n$ гомотопне відображенню $f_1: X \rightarrow P \subseteq E^n$, де P — довільна фіксована точка.

Справді, відображення гомотопії можна задати формулою $F(x, s) = (1-s)f_0$. Будемо вважати, що точка P співпадає в початком координат (рис. 5.2).

Із наведених тверджень випливає, що будь-які два шляхи в E^n гомотопні між собою.

Відношення гомотопії є відношенням еквівалентності.

Вправа. Перевірити, що відношення гомотопії є рефлексивним, симетричним та транзитивним.

Таким чином, усі неперервні відображення із X в Y розбиваються на класи гомотопних відображень. Ці класи не перетинаються.

Окремим випадком гомотопних відображень є відображення із X в Y , що гомотопні відносно множини $A \subset X$.

Визначення. Відображення $f_0, f_1: X \rightarrow Y$ гомотопні відносно множини $A \subset X$ ($f_0 \sim f_1/A$), якщо існує неперервне відображення $F: X \times I \rightarrow Y$, яке задовольняє умовам $F(x, 0) = f_0(x)$, $F(x, 1) = f_1(x)$, $F(a, s) = f_0(a)$ для будь-яких $a \in A, s \in I$.

Приклади. 1. Нехай X — одиничний відрізок, Y — кільце, $f_0(x) = \gamma_0$, $f_1(x) = \gamma_1$ (рис. 5.3). Шляхи γ_0 та γ_1 гомотопні.

2. Нехай X, Y, f_0 та f_1 такі ж, як в прикладі 1, множина $A = \{a\} \subset X$. Нехай a відповідає значенню $t = 0$ одиничного відрізка. Гомотопними відносно множини A є ті шляхи, які початок відрізка переводять в одну і ту ж точку $f_0(a)$. Шляхи f_0, f_1 не є гомотопними відносно A (див. рис. 5.3).

3. Нехай X, Y такі ж, як у прикладі 1: $A = \{a, b\}$, де a та b — граничні точки відрізка X , тобто точки, що відповідають значенням параметра $t = 0$ та $t = 1$ відповідно. Необхідною умовою гомотопності шляхів відносно A є те, що шляхи починаються і закінчуються в фіксованих точках. Але ця умова не є достатньою.

Справді, шляхи, образи яких співпадають з γ_0 та γ_1 (рис. 5.4), не гомотопні.

4. Якщо $X = I$, $Y = E^2$, то будь-які шляхи, що з'єднують дві фіксовані точки, гомотопні між собою. Справді, нехай $f_0(t)$ і $f_1(t)$ — шляхи, що з'єднують точки $f_0(0)$, $f_0(1)$, тобто $f_0(0) = f_1(0)$ і $f_0(1) = f_1(1)$. Тоді відображення $F(t, s) = (1-s)f_0(t) + sf_1(t)$ задає гомотопію f_0 і f_1 .

Важливим окремим випадком гомотопії є такий:

$$A = \{a, b\} \text{ і } f(a) = f(b).$$

Визначення. Шлях з початком і кінцем в одній і тій же точці називається петлею.

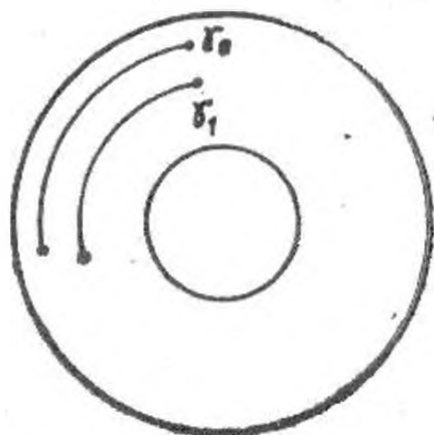


Рис. 5.3

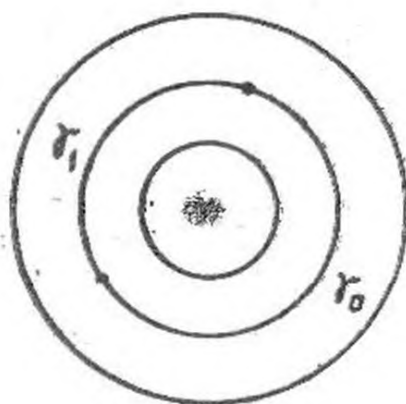


Рис. 5.4

Можна розглядати петлю як неперервне відображення кола з відміченою точкою, яка переходить у деяку фіксовану точку.

Визначення. Два топологічних простори X та Y називаються гомотопічно еквівалентними, якщо існують неперервні відображення $f: X \rightarrow Y$ та $g: Y \rightarrow X$, що мають такі властивості: $g \circ f \sim id_X$, $f \circ g \sim id_Y$, де id_X , id_Y — тотожні відображення.

Гомеоморфні топологічні простори є гомотопічно еквівалентними ($g = f^{-1}$). Обернене неправильне.

Приклади. 1. Нехай X — точка, Y — n -вимірна куля в n -вимірному евклідовому просторі. Легко показати, що X та Y не гомеоморфні. Доведемо, що X та Y гомотопічно еквівалентні.

Справді, нехай f відображає точку, з якої складається простір X , у центр кулі, g — усю кулю в точку. Тоді очевидно, що $g \circ f = id_X$; $f \circ g \sim id_Y$, оскільки $f \circ g$ відображає кулю в її центр, а гомотопію задає відображення $F(y, s) = sy$, $y \in Y$, $s \in I$.

Простори, які гомотопічно еквівалентні точці, називаються стяжними.

2. Двовимірна сфера S^2 та сфера S^2 зі скінченною кількістю відрізків (сфера з антенами), зображені на рис. 5.5, гомотопічно еквівалентні. Але два ці простори не гомеоморфні. Справді, якщо із S^2 виключити точку, лишиться лінійно зв'язна множина; якщо ж із антени виключити внутрішню точку відрізка, то сфера з антенами розпадеться на дві компоненти зв'язності.

3. Коло S^1 та прямий круговий циліндр $S^1 \times I$ гомотопічно еквівалентні. Справді, якщо f — вкладення кола в циліндр, а g — проєкція кожної твірної циліндра в точку кола, то $g \circ f = id_{S^1}$, $f \circ g \sim id_{S^1 \times I}$.

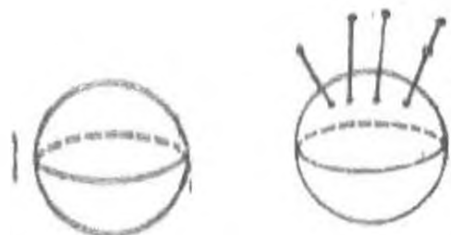


Рис. 5.5

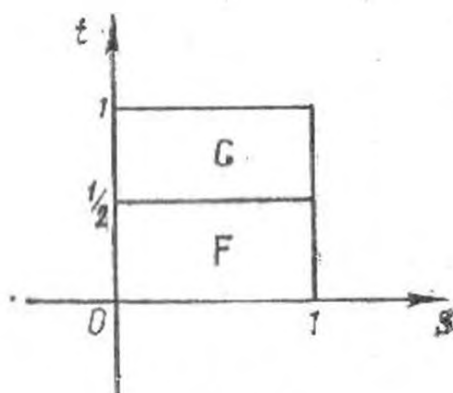


Рис. 5.6

Задача 1. Довести, що коло та листок Мебіуса гомотопічно еквівалентні.

Задача 2. Довести, що циліндр та листок Мебіуса гомотопічно еквівалентні, але не гомеоморфні.

5.1.1. Фундаментальна група топологічного простору

Нехай X — топологічний простір, $x_0 \in X$ — фіксована точка. Розглянемо в X петлі з відміченою точкою x_0 , тобто неперервні відображення $f: I \rightarrow X$, де $I = [0, 1]$, і $f(0) = f(1) = x_0$, або $f: S^1 \rightarrow X$, де $f(a_0) = x_0$, a_0 — фіксована точка S^1 .

Визначення. Добуток петель $f(t)$ та $g(t)$, $0 \leq t \leq 1$ називається петля

$$(f \circ g)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ g(2t - 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Зауважимо, що добуток петель некомутативний, тобто петлі $f \circ g$ та $g \circ f$ не співпадають.

Оскільки гомотопність є відношенням еквівалентності, то множина всіх петель з відміченою точкою розбивається на класи гомотопних петель. Клас петлі f позначається через $[f]$. На множині класів гомотопних петель також можна ввести операцію множення.

Визначення. Добутком класів $[f]$ і $[g]$ називається клас $[f \circ g]$, де f — представник класу $[f]$, g — представник класу $[g]$.

Коректність визначення доводиться таким твердженням.

Твердження. Якщо $f_0 \sim f_1$, $g_0 \sim g_1$, де f_0, f_1, g_0, g_1 — петлі, то $f_0 \circ g_0 \sim f_1 \circ g_1$.

Доведення. Оскільки $f_0 \sim f_1$, то існує відображення гомотопії $F(t, s): I \times I \rightarrow X$ таке, що $F(t, 0) = f_0(t)$, $F(t, 1) = f_1(t)$. Оскільки $g_0 \sim g_1$, то існує відображення гомотопії $G(t, s): I \times I \rightarrow X$ таке, що $G(t, 0) = g_0(t)$, $G(t, 1) = g_1(t)$. Гомотопію між $f_0 \circ g_0$ та $f_1 \circ g_1$ встановлює відображення (рис. 5.6)

$$H(t, s) = \begin{cases} F(2t, s), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ G(2t - 1, s), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Твердження. Сукупність усіх класів петель з відміченою точкою із введеною операцією множення є групою.

Доведення. Згадаємо, що множина елементів із введеною операцією множення є групою, якщо: 1) існує одиничний елемент e ($ae = ea = a$) для будь-якого елемента a ; 2) для кожного елемента a існує обернений елемент a^{-1} ($aa^{-1} = a^{-1}a = e$); 3) операція множення асоціативна: $(ab)c = a(bc)$.

Одиницею в сукупності класів всіх петель з відміченою точкою назвемо клас $e = [e_{x_0}]$, де e_{x_0} — стале відображення відрізка в точку x_0 , тобто $e_{x_0}: I \rightarrow X$ можна задати формулою $e_{x_0}(t) = x_0$, $t \in I$.

Для будь-якого гомотопічного класу $[f]$ обернений елемент введемо таким чином: $f^{-1}(t) = f(1-t)$ і $[f]^{-1} = [f^{-1}]$.

Перевіримо тепер виконання аксіом 1—3.

1. Покажемо, що $f \circ e_{x_0} \sim f$, тобто $[f] \circ e = [f]$.

Знайдемо потрібну гомотопію $F: I \times I \rightarrow X$, таку, що

$$F(t, 0) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ e_{x_0}(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases}$$

$$F(t, 1) = f(t).$$

Схематично дію гомотопії зображено на рис. 5.7. Рівняння прямої, що проходить через точки $(1/2, 0)$ та $(1, 1)$,

має вигляд $t = \frac{1+s}{2}$. Тому

$$F(t, s) = \begin{cases} f(at + b), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2}; \\ e_{x_0}(ct + d), & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

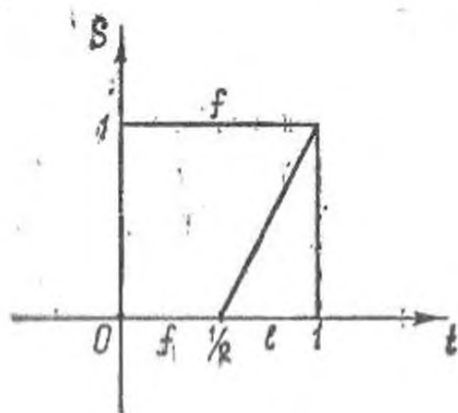


Рис. 5.7

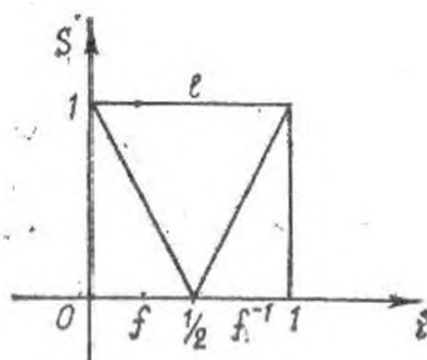


Рис. 5.8

Знайдемо параметри a, b, c, d із умови: образ кожної петлі, що входить в добуток, повинен повністю пробігтися, тобто вираз, який стоїть на місці аргументу, повинен змінюватися від 0 до 1 при зміні t у відповідних границях. Отже, підставимо у вираз $at+b$ значення $t=0$ та $t = \frac{1+s}{2}$; одержимо відповідно 0 та 1:

$$\begin{cases} b = 0; \\ a \frac{1+s}{2} + b = 1, \end{cases}$$

відси $a = \frac{2}{1+s}$, $b = 0$; аналогічним способом знайдемо c і d :

$$\begin{cases} e \frac{1+s}{2} + d = 0; \\ c + d = 1, \end{cases}$$

відси $c = \frac{2}{1-s}$, $d = \frac{s+1}{s-1}$.

Таким чином,

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{2t}{1+s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1+s}{2}; \\ e_{x_0}\left(\frac{2t-s-1}{1-s}\right), & \frac{1+s}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Аналогічно доводиться, що $e \circ [f] = [f]$.

2. Покажемо, що $f \circ f^{-1} \sim e_{x_0}$, тобто $[f] \circ [f]^{-1} = e$.

Схематично гомотопія петель $f \circ f^{-1}$ та e_{x_0} зображена на рис. 5.8. Рівняння прямої, що проходить через точки $(\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 1)$, має вигляд $t = -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$.

Рівняння прямої, що проходить через точки $(\frac{1}{2}, 0)$, $(1, 1)$, записується так: $t = \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}$. Тому відображення гомотопії має вигляд

$$F(t, s) = \begin{cases} f(a_1 t + b_1), & 0 \leq t \leq -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}; \\ e_{x_0}(a_2 t + b_2), & -\frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}; \\ f(a_3 t + b_3), & \frac{1}{2}s + \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Знайдемо параметри гомотопії:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 0 + b_1 = 0; \\ a_1 \cdot \frac{1-s}{2} + b_1 = 1, \end{cases}$$

відси $a_1 = \frac{2}{1-s}$; $b_1 = 0$;

$$\begin{cases} a_2 \cdot \frac{1-s}{2} + b_2 = 0; \\ a_2 \cdot \frac{1+s}{2} + b_2 = 1, \end{cases}$$

тоді $a_2 = \frac{1}{s}$; $b_2 = \frac{s-1}{2s}$;

$$\begin{cases} a_3 \cdot \frac{s+1}{2} + b_3 = 1; \\ a_3 \cdot 1 + b_3 = 0, \end{cases}$$

відси $a_3 = \frac{2}{s-1}$; $b_3 = \frac{2}{1-s}$.

Отже,

$$\begin{cases} f\left(\frac{2t}{1-s}\right), & 0 \leq t \leq \frac{1-s}{2}; \\ e_{x_0}\left(\frac{2t+s-1}{2s}\right), & \frac{1-s}{2} \leq t \leq \frac{s+1}{2}; \\ f\left(\frac{2t-2}{s-1}\right), & \frac{s+1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Аналогічно доводиться, що $[f]^{-1} \circ [f] = e$.

3. Покажемо, що $h \circ (g \circ f) \sim (h \circ g) \circ f$, тобто $[h] \circ ([g] \circ [f]) = ([h] \circ [g]) \circ [f]$.

Справді,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(t) &= \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ g(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases} \\ h \circ (g \circ f) &= \begin{cases} (g \circ f)(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ h(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1; \end{cases} = \\ &= \begin{cases} f(4t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ g(4t-1), & 1/4 \leq t \leq 1/2; \\ h(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогічно,

$$(h \circ g) \circ f = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2; \\ g(4t-2), & 1/2 \leq t \leq 3/4; \\ h(4t-3), & 3/4 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Гомотопію між $h \circ (g \circ f)$ та $(h \circ g) \circ f$ допоможе встановити рис. 5.9.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точки $(\frac{1}{4}, 0)$; $(\frac{1}{2}, 1)$; маємо $t = \frac{s+1}{4}$. Пряма, яка проходить через точки $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{3}{4}, 1)$, може бути задана рівнянням $t = \frac{s+2}{4}$. Рівняння гомотопії має вигляд

$$F(t, s) = \begin{cases} f(a_1 t + b_1), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}; \\ g(a_2 t + b_2), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}; \\ h(a_3 t + b_3), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Знайдемо коефіцієнти a_i , b_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\begin{cases} a_1 \cdot 0 + b_1 = 0; \\ a_1 \cdot \frac{s+1}{4} + b_1 = 1, \end{cases}$$

ввідси $a_1 = \frac{4}{s+1}$, $b_1 = 0$;

$$\begin{cases} a_2 \cdot \frac{s+1}{4} + b_2 = 0; \\ a_2 \cdot \frac{s+2}{4} + b_2 = 1, \end{cases}$$

тоді $a_2 = 4$, $b_2 = -(s+1)$;

$$\begin{cases} a_3 \cdot \frac{s+2}{4} + b_3 = 0; \\ a_3 + b_3 = 1, \end{cases}$$

звідси $a_3 = \frac{4}{2-s}$, $b_3 = \frac{s+2}{s-2}$.

Таким чином,

$$F(t, s) = \begin{cases} f\left(\frac{4t}{s+1}\right), & 0 \leq t \leq \frac{s+1}{4}; \\ g(4t - s - 1), & \frac{s+1}{4} \leq t \leq \frac{s+2}{4}; \\ h\left(\frac{4t - s - 2}{2-s}\right), & \frac{s+2}{4} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

і гомотопність петель $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f$ доведена.

Отже, класи гомотопних петель утворюють групу.

Визначення. Сукупність усіх класів гомотопних петель з відміченою точкою x_0 топологічного простору X називається фундаментальною групою простору X і позначається через $\pi_1(X, x_0)$.

Твердження. У лінійно зв'язного топологічного простору фундаментальні групи з різними відміченими точками ізоморфні між собою.

Доведення. Нехай X — лінійно зв'язаний топологічний простір, Розглянемо $\pi_1(X, x_0)$ та $\pi_1(X, x_1)$. Нехай γ — шлях, що з'єднує точки x_0 та x_1 , $\gamma(0) = x_0$, $\gamma(1) = x_1$. Кожній петлі f з відміченою точкою x_0 природно можна

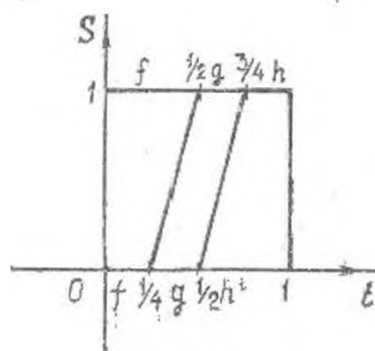


Рис. 5.9

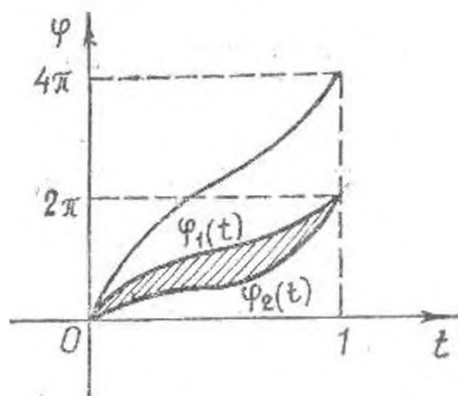


Рис. 5.10

поставити у відповідність петлю з відміченою точкою x_1 , а саме: $f \mapsto \gamma^{-1} \circ f \circ \gamma$. Таким чином, одержуємо відображення $\gamma_*: \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$, яке ставить у відповідність класу $[f]$ клас $[\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma]$. Відображення γ_* визначене коректно, оскільки якщо $f_1 \sim f_2$, то $\gamma^{-1} \circ f_1 \circ \gamma \sim \gamma^{-1} \circ f_2 \circ \gamma$.

Справді, якщо F задає гомотопію f_1 та f_2 , то $\gamma^{-1} \circ F \circ \gamma$ задає гомотопію $\gamma^{-1} \circ f_1 \circ \gamma$ і $\gamma^{-1} \circ f_2 \circ \gamma$.

Доведемо, що γ_* — ізоморфізм, тобто це гомоморфізм відображення «на» і існує γ_*^{-1} . Щоб довести, що γ_* — гомоморфізм, покажемо, що $\gamma_* \circ [f \circ g] = \gamma_* [f] \circ \gamma_* [g]$:

$$\begin{aligned} \gamma_* \circ [f \circ g] &= [\gamma^{-1} \circ f \circ g \circ \gamma] = [\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ g \circ \gamma] = \\ &= [\gamma^{-1} \circ f \circ \gamma] \circ [\gamma^{-1} \circ g \circ \gamma] = \gamma_* [f] \circ \gamma_* [g]. \end{aligned}$$

Доведемо, що γ_* — відображення «на». Нехай α — петля з відміченою точкою x_1 . Розглянемо петлю $\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}$, це петля з відміченою точкою x_0 . Оскільки $\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1} \rightarrow \alpha$, а $[\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}] \rightarrow [\alpha]$, то γ_* — відображення «на». Обернене до γ_* відображення γ_*^{-1} будується так: $\gamma_*^{-1}: [\alpha] \rightarrow [\gamma \circ \alpha \circ \gamma^{-1}]$.

У лінійно зв'язному топологічному просторі фундаментальна група не залежить від точки. Тому фундаментальну групу лінійно зв'язного топологічного простору X будемо позначати через $\pi_1(X)$.

Визначення. *Топологічний простір, в якого фундаментальна група тривіальна ($\pi_1(X) = 0$), називається однозв'язним.*

Будь-яка петля однозв'язного топологічного простору стягується в точку.

Приклади. 1. Доведемо, що $\pi_1(E^n) = 0$. Справді, нехай відмічена точка — початок координат. Тоді відображення $F(t, s) = s \cdot f(t)$ задає гомотопію між довільною петлею f і точкою — початком координат.

2. Доведемо, що $\pi_1(S^n) = 0$, де $n \geq 2$. Розглянемо деяку петлю f на сфері. Можливі два випадки: петля f не вкриває всю сферу, петля f вкриває всю сферу.

Нехай існує точка $O \in S^n$, яка не вкривається петлею. В діаметрально протилежній точці побудуємо дотичну гіперплощину та здійснимо стереографічну проекцію сфери із точки O на гіперплощину. Петля f перейде в деяку петлю \bar{f} на гіперплощині. Оскільки $\pi_1(E^n) = 0$, то на гіперплощині петля \bar{f} стягується в точку. Повертаючись на сферу, одержимо стягування петлі в точку.

Розглянемо тепер випадок, коли петля f вкриває всю сферу. Побудуємо петлю g , що гомотопна даній, але не заповнює всю сферу. Розіб'ємо відрізок, образом якого

є петля f , на малі відрізки, образи яких лежать у досить малих околах на сфері так, щоб у них, не входили діаметрально протилежні точки сфери (тоді будь-які дві точки околу з'єднує єдина дуга великого кола). Нехай t_i — точки розбиття відрізка. Точкам t_i, t_{i+1} відрізка на сфері відповідають точки $f(t_i), f(t_{i+1})$ відповідно. Існує єдина дуга великого кола, що з'єднує $f(t_i), f(t_{i+1})$. Заміняємо даний кусок петлі дугою великого кола. Робимо це на кожній ділянці. В результаті замінимо петлю f петлею g , що складається із дуг великих кіл. Доведемо, що $f \sim g$.

Справді, частина петлі f , яка з'єднує $f(t_i), f(t_{i+1})$, лежить на одній півсфері, там же лежить частина петлі g , що з'єднує точки $f(t_i)$ з $f(t_{i+1})$. Відобразимо цю півсферу на площину, а на площині будь-які шляхи, що з'єднують дві фіксовані точки, гомотопні. Петля g , оскільки вона складається із дуг великих кіл, не вкриває всю сферу, а тому стягується в точку. Отже, стягується в точку і петля f , їй гомотопна.

Зауважимо, що тут використано обмеження $n \geq 2$, коли одержано петлю, яка не вкриває всю сферу.

3. Доведемо, що $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, де S^1 — одиничне коло, \mathbb{Z} — адитивна група цілих чисел. Нехай коло задане рівнянням $x^2 + y^2 = 1$, причому $(1, 0)$ — позначена точка. Кожній петлі поставимо у відповідність деяку неперервну функцію $\varphi(t)$, яка називається кутовою функцією, де $\varphi(t)$ — орієнтований кут, утворений радіусом кола з додатним напрямком осі Ox . Кожна петля може бути задана з допомогою цієї функції так: $x = \cos \varphi(t), y = \sin \varphi(t)$.

Зауважимо, що φ може набувати скільки завгодно великих значень. Графіки функцій $\varphi(t)$ зображені на рис. 5.10. Для будь-якої петлі число $\varphi(1)$ кратне 2π . Отже, будь-якій петлі можна поставити у відповідність ціле число $n = \frac{\varphi(1)}{2\pi}$.

Доведемо, що гомотопним петлям відповідає одне і те ж число. Тим самим буде доведено, що вказане відображення — це не тільки відображення петель у множину цілих чисел, але й відображення гомотопічних класів. Нехай $f_1 \sim f_2$,

$$f_1 : \begin{cases} x = \cos \varphi_1(t); \\ y = \sin \varphi_1(t); \end{cases} \quad f_2 : \begin{cases} x = \cos \varphi_2(t); \\ y = \sin \varphi_2(t). \end{cases}$$

Тоді є функція гомотопії $\varphi(t, s)$; функція $\frac{\varphi(1, s)}{2\pi}$ неперервна і набуває лише цілочисельних значень, тобто є сталою.

Отже, графіки φ для гомотопних петель закінчуються в одній точці. Негомотопним же петлям одне і те ж число відповідати не може, бо в протилежному разі графіки кутових функцій закінчувалися б в одній точці і, взявши петлі з кутовими функціями $\varphi(t, s) = s\varphi_1(t) + (1-s)\varphi_2(t)$, можна було б одержати гомотопію початкових петель (див. рис. 5.10). Таким чином, відображення $[f] \rightarrow n$ взаємно однозначне.

Нехай α_n — петля, що n раз оббігає коло. Легко бачити, що $\alpha_1 = \{\cos 2\pi t, \sin 2\pi t\}$, ..., $\alpha_n = \{\cos 2\pi nt, \sin 2\pi nt\}$. Звідси випливає, що відображення $\pi_1(S^1) \rightarrow Z$ є відображенням «на».

Лишилося перевірити, що $\varphi([f] \circ [g]) = \varphi([f]) \circ \varphi([g])$. Доведемо це на петлях. Розглянемо петлі α_{n_1} та α_{n_2} (зауважимо: $\alpha_{n_1} \rightarrow n_1$, $\alpha_{n_2} \rightarrow n_2$). Очевидно, що $\alpha_{n_1} \circ \alpha_{n_2} = \alpha_{n_1}^{n_2} \circ \alpha_{n_2}^{n_1} = \alpha_{n_1 n_2}^{n_1+n_2} = \alpha_{n_1+n_2}$. Таким чином, доведено, що $\pi_1(S^1) = Z$.

Т в е р д ж е н н я. Якщо X, Y — лінійно зв'язні топологічні простори, то

$$\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y).$$

Д о в е д е н н я. Зауважимо, що коли в декартовому добутку брати топологію добутку, то X, Y будуть лінійно зв'язними (зв'язними) тоді і тільки тоді, коли простір $X \times Y$ лінійно зв'язний (зв'язний).

Нехай $\varphi(t) \subset X \times Y$ — деяка петля. Розглянемо проєкції $p: X \times Y \rightarrow X$, $g: X \times Y \rightarrow Y$; $f(t) = p\varphi(t)$ — петля в X , $g(t) = q\varphi(t)$ — петля в Y . Якщо $\varphi_1 \sim \varphi_2$, то $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$. Справді, якщо $F(t, s)$ задає гомотопію φ_1 та φ_2 , то $pF(t, s)$, $qF(t, s)$ задають гомотопію f_1, f_2 та g_1, g_2 відповідно. Можна тепер розглядати відображення $p_*: [\varphi] \rightarrow [f]$, $q_*: [\varphi] \rightarrow [g]$ і $\pi_1(X \times Y) \supset [Y] \rightarrow ([f], [g])$. Покажемо, що останнє відображення задає ізоморфізм груп. Для цього потрібно довести, що відображення однозначне, є епіморфізмом та гомоморфізмом.

Будь-яка впорядкована пара із $\pi_1(X) \times \pi_1(Y)$ є образом деякого елемента, отже, відображення $[Y] \rightarrow ([f], [g])$ — це відображення «на».

Раніше доведено, що коли $\varphi_1 \sim \varphi_2$, то $f_1 \sim f_2$ і $g_1 \sim g_2$. Доведемо, що має місце і обернене. Нехай $f_1 \sim f_2$, причому гомотопію встановлює $F(t, s)$; і нехай відображення $G(t, s)$ задає гомотопію g_1 та g_2 . Тоді $H = (F, G)$ встановлює гомотопію φ_1 та φ_2 . Гомотопність випливає із очевидного зауваження: якщо $\varphi_1 = (f_1, g_1)$; $\varphi_2 = (f_2, g_2)$, то $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = (f_1 \cdot f_2, g_1 \cdot g_2)$. Звідси випливає, що дане відображення є гомоморфізмом.

Приклади. 1. $\pi_1(T^2) = \pi_1(S^1 \times S^1) = Z \oplus Z$.

$$2. \quad \pi_1(S^p \times S^q) = \begin{cases} 0, & p, q > 1; \\ Z, & p > 1, q = 1; \\ Z \oplus Z, & p = 1, q = 1; \end{cases}$$

$$3. \quad \pi_1(S^p \times E^q) = \begin{cases} 0, & p > 1; \\ Z, & p = 1. \end{cases}$$

4. $\pi_1(K) = Z$, де K — кільце, оскільки кільце є топологічним добутком кола і відрізка.

Зауваження. Наведені нижче два твердження еквівалентні.

1. Топологічний простір однозв'язний, тобто будь-яка петля гомотопна сталій петлі.

2. Будь-яке відображення кола в топологічний простір можна доповнити до відображення круга в топологічний простір так, щоб на колі воно співпадало з первісним.

5. 1. 2. Гомоморфізм фундаментальних груп при відображенні топологічних просторів

Нехай $\varphi: X \rightarrow Y$ — неперервне відображення топологічного простору X в топологічний простір Y ; $f(t)$ — петля з позначеною точкою x_0 в X . При відображенні φ петля $f(t)$ перейде в петлю $\varphi \circ f$ з позначеною точкою $\varphi(x_0)$ в Y . При цьому гомотопні петлі переходять у гомотопні, тобто φ індукує відображення $\varphi_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ фундаментальних груп. Доведемо, що φ_* — гомоморфізм фундаментальних груп, тобто доведемо, що $\varphi_*([f] \circ [g]) = \varphi_*([f]) \circ \varphi_*([g])$. Дійсно, $\varphi_*([f] \circ [g]) = \varphi_*([f \circ g]) = [\varphi(f \circ g)] = [\varphi \circ f \circ \varphi \circ g] = [\varphi \circ f] \circ [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \circ \varphi_*([g])$.

Таким чином, відображення $\varphi: X \rightarrow Y$ індукує відображення $\varphi_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$.

Ланцюжок відображень $X \xrightarrow{\varphi_1} Y \xrightarrow{\varphi_2} Z$ індукує ланцюжок гомоморфізмів $\pi_1(X) \xrightarrow{\varphi_{1*}} \pi_1(Y) \xrightarrow{\varphi_{2*}} \pi_1(Z)$. Легко бачити, що $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* = \varphi_{2*} \circ \varphi_{1*}$.

Твердження. Гомотопічно еквівалентні лінійно зв'язні топологічні простори мають ізоморфні фундаментальні групи.

Доведення. Оскільки X, Y — гомотопічно еквівалентні простори, то існують відображення $\varphi: X \rightarrow Y$, $\psi: Y \rightarrow X$ такі, що $\psi \circ \varphi \sim id_X$, $\varphi \circ \psi \sim id_Y$. Відображення φ

і ψ індукують відображення $\pi_1(X) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(Z)$. Умови на φ та ψ переписуться для φ_* та ψ_* таким чином:

$$\psi_* \circ \varphi_* = id_{\pi_1(X)}, \quad \varphi_* \circ \psi_* = id_{\pi_1(Y)}.$$

Із першої рівності випливає, що φ_* — мономорфізм, із другої — епіморфізм. Таким чином, φ_* є ізоморфізмом.

Зауваження. Від відображень $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} Z$ можна перейти до відображень $\pi_1(X) \xrightarrow{\varphi_*} \pi_1(Y) \xrightarrow{\psi_*} \pi_1(Z)$, тобто вивчення топологічних просторів можна звести до вивчення більш простих об'єктів — груп.

Теорема 30 (Брауера). *Будь-яке неперервне відображення замкненого круга в себе має нерухому точку.*

Доведення. Нехай неперервне відображення $f: D^2 \rightarrow D^2$, де D^2 — замкнений круг, не має нерухомої точки. Задамо неперервне відображення g круга D^2 на граничне коло S^1 таким чином: проведемо промінь із початком у точці $f(x)$ через x ($x \rightarrow f(x)$). Він перетне коло в точці x' , $g(x) = x'$. При відображенні g точки кола S^1 лишаються на місці. Розглянемо відображення $S^1 \xrightarrow{i} D^2 \xrightarrow{g} S^1$, де i — вкладення (очевидно, що $g \circ i = id_{S^1}$). Воно індукує відображення фундаментальних груп: $\pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(D^2) \xrightarrow{g_*} \pi_1(S^1)$ або $Z \xrightarrow{i_*} 0 \xrightarrow{g_*} Z$, причому $id_Z = (g \circ i)_* = g_* \circ i_*$, але $g_* \circ i_*$ відображає Z в 0 . Одержана суперечність доводить теорему.

Зауваження. 1. Обертання кільця навколо його центра є неперервним відображенням, в якого немає нерухомої точки.

2. Теорема правильна для відображення n -вимірної кулі в себе.

Теорему Брауера можна застосувати при дослідженні систем рівнянь. Справді, нехай задана система

$$\begin{cases} g_1(x, y) = 0; \\ g_2(x, y) = 0, \end{cases}$$

де g_1 та g_2 визначені на всій площині. З'ясуємо, чи є в неї розв'язки. Замінімо дану систему еквівалентною:

$$\begin{cases} g_1(x, y) + x = x; \\ g_2(x, y) + y = y, \end{cases}$$

або, вводячи позначення $g_1(x, y) + x = f_1(x, y)$; $g_2(x, y) + y = f_2(x, y)$, одержимо

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x; \\ f_2(x, y) = y. \end{cases}$$

Таким чином, одержано відображення площини на себе:
 $(x, y) \xrightarrow{\varphi} (f_1(x, y), f_2(x, y))$.
 Якщо

$$\lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{|f_1(x, y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{x^2+y^2 \rightarrow \infty} \frac{|f_2(x, y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

то у відображення φ є нерухома точка.

Приклад. Система

$$\begin{cases} x = \frac{1}{1+x^2+y^2} + \sin(x^2+y^2); \\ y = \frac{\cos x}{1+x^2+y^2} + \frac{\sin x}{\sqrt{x^2+y^2+1/2}} \end{cases}$$

має розв'язок.

5.2. Накриття

Визначення. Неперервне відображення $p: X \rightarrow B$, де X, B — лінійно зв'язні топологічні простори, називається накриттям, якщо для будь-якої точки $b \in B$ існує окіл $U \ni b$ такий що $p^{-1}(U)$ складається із не більш ніж зліченної кількості множин, які не перетинаються, і кожна з них гомеоморфна околу U . При цьому B називається базою накриття, X — вкривним простором, p — відображенням накриття.

Приклади. 1. Відображення $p: E^1 \rightarrow S^1$, що задане системою

$$\begin{cases} x = \cos 2\pi t; \\ y = \sin 2\pi t, \end{cases}$$

є накриттям.

2. Одиничне коло S^1 на комплексній площині може бути задане рівнянням $|z|=1$. Звуження відображення $z \rightarrow z^k$ на $S^1 \subset \mathbb{C}$ є відображенням накриття $p: S^1 \rightarrow S^1$. Прообраз кожної точки другого кола складається із k точок першого кола, тобто можна сказати, що перше коло «намотується» на друге k разів.

3. Розглянемо накриття тора $q: E^2 \rightarrow T^2$ площиною. Оскільки $E^2 = E^1 \times E^1$, а $T^2 = S^1 \times S^1$, то накриття q може бути задане через накриття окремих компонент, а саме: $q: (x^1, x^2) \rightarrow (p(x^1), p(x^2))$, де p — накриття із прикладу 1.

4. Розглянуте раніше відображення $S^n \rightarrow RP^n$ є накриттям. Прообраз кожної точки RP^n складається із двох діаметрально протилежних точок S^n .

Відображення накриття $p: X \rightarrow B$ індукує відображення фундаментальних груп $p_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B)$. Нижче доведено, що p_* — мономорфізм, тому фундаментальна група простору є підгрупою фундаментальної групи бази.

Лема про укривну гомотопію. Нехай $p: X \rightarrow B$ — накриття; f — шлях у базі з початковою точкою b_0 , тобто $f: I \rightarrow B$, $f(0) = b_0$. Тоді у вкривному просторі X існує єдиний шлях g такий, що $g(0) = x$, $p \circ g = f$, де x — довільна точка із $p^{-1}(b_0)$, тобто існує єдиний шлях, який виходить із даного прообразу і накриває шлях f , що лежить у базі.

Доведення. Оскільки відрізок $I = [0, 1]$ є компактом, а f — неперервне відображення, то образ $f(I) \subset B$ має окіл, який входить у визначення накриття. Ці околи утворюють відкрите укриття $f(I)$, і, з огляду на компактність останнього, з них можна вибрати скінченне підпокриття U_1, \dots, U_n . У перетинах сусідніх околів $U_i \cap U_{i+1}$ виберемо точки $b_i \in f(I)$. Таким чином, шлях буде розбитий на скінченну кількість маленьких шляхів, кожний з яких лежить в околі, що входить у визначення накриття. Виберемо точку $x_0 \in p^{-1}(b_0)$, із якої потрібно провести шлях g , який укриває f . За визначенням вкриття існує окіл V_1 , що має в собі x_0 і є прообразом U_1 при визначенні вкриття. Оскільки U_1 та V_1 гомеоморфні, то шляху $f|_{U_1}$, який з'єднує точки b_0 та b_1 , відповідає єдиний шлях в V_1 з початком у точці x_0 . Позначимо кінець цього шляху через x_1 . Існує єдиний окіл V_2 , що містить у собі x_1 і є прообразом U_2 . В V_2 існує єдиний шлях, який накриває шлях із початком у точці b_1 і кінцем у точці b_2 бази. Кінець цього шляху позначимо через x_2 , і т. д. Виконавши цю операцію скінченну кількість разів, одержимо шлях g , що виходить із точки x_0 і накриває шлях f . Підняття f здійснюється однозначно.

Із двовимірного аналога леми про вкривну гомотопію випливає таке твердження.

Твердження. Якщо шляхи f_1, f_2 в базі гомотопні, то накривні шляхи g_1, g_2 з початком в одній і тій же точці також гомотопні.

Справді, оскільки шляхи f_1, f_2 гомотопні, то існує неперервне відображення квадрата, що задає гомотопію, в базу $F(t, s): I \times I \rightarrow B$, де $F(t, 0) = f_1$, $F(t, 1) = f_2$. Діючи як при доведенні леми, здійснимо підняття відображення $F(t, s)$ у вкривний простір. Одержимо відображення $G(t, s)$ ($p \circ G(t, s) = F(t, s)$), що задає гомотопію, шляхів g_1, g_2 ($G(t, 0) = g_1$, $G(t, 1) = g_2$).

Правильне обернене твердження, яке наведене нижче.
Твердження. Якщо у вкривному просторі є два гомотопні шляхи, то образи їх— гомотопні шляхи в базі.

Із цього твердження випливає така теорема.

Теорема 31. Відображення $p_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B)$, що індуковане відображенням накриття $p : X \rightarrow B$, є мономорфізмом.

Доведення. Нехай g_1 — петля в X з позначеною точкою x_0 така, що $f_1 = p(g_1)$ і f_1 гомотопна нульовій петлі f_2 , $p(x_0) = b_0$. За твердженням шляхи f_1, f_2 гомотопні. Оскільки f_2 вкриває нульовий шлях, то f_1 гомотопний нульовому шляху. Таким чином, ядро відображення $p_* : \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(B)$ складається лише із нульового елемента. А тому p_* — це мономорфізм.

Визначення. Якщо при накритті $p : X \rightarrow B$ простір X однозв'язний ($\pi_1(X) = 0$), то X називається універсальною вкривною B .

Твердження. Нехай X — універсальна вкривна B . Тоді між елементами $p^{-1}(b_0)$, $b_0 \in B$ та елементами групи $\pi_1(B)$ існує взаємно однозначна відповідність.

Доведення. Нагадаємо, що простори X та B лінійно зв'язні. Нехай b_0 — довільна точка B , $p^{-1}(b_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$. Встановимо взаємно однозначну відповідність між точками x_0, x_1, x_2, \dots та елементами групи $\pi_1(B)$. Точці x_0 поставимо у відповідність одиницю групи $\pi_1(B)$; точці x_k , $k = 1, 2, \dots$ — гомотопічний клас петлі, яка є образом шляху, що з'єднує точки x_0, x_k . Коректність встановленої відповідності (кожній точці x_i , $i = 0, 1, \dots$ відповідає єдиний елемент $\pi_1(B)$) випливає із однозв'язності.

Доведемо ін'єктивність відповідності. Нехай точки x_k, x_n відображаються в один і той же елемент групи $\pi_1(B)$, тобто образи шляхів, що з'єднують точки x_0, x_k та x_0, x_n , гомотопні. Але якщо шляхи в базі гомотопні, то вкривні шляхи з початком в одній і тій же точці також гомотопні, що тягне за собою співпадання точок x_k, x_n .

Сюр'єктивність встановленої відповідності випливає безпосередньо із леми про накривну гомотопію. Справді, довільній петлі у базі відповідає, єдиний шлях з початком у точці x_0 . Кінець цього шляху співпадає з деякою точкою $x_k \in p^{-1}(b_0)$. Точці x_k ставиться у відповідність клас $[\gamma] \in \pi_1(B)$.

Приклад. Обчислимо $\pi_1(RP^n)$, $n \geq 2$. Розглянемо відображення вкриття $P : S^n \rightarrow RP^n$, де S^n — універсальна вкривна. Прообраз $p^{-1}(B_0)$ складається із двох діаметрально протилежних точок сфери. Отже, $\pi_1(RP^n)$ складається із двох елементів, тобто $\pi_1(RP^n) = Z_2$.

Для компактних двовимірних многовидів правильним є таке твердження.

Твердження. Універсальною вкривною S^2 та RP^2 є сфера, універсальною вкривною решти двовимірних компактних многовидів (сфер з p ручками, $p \geq 1$; сфер з q листками Мебіуса, $q > 1$) є площина [2].

Визначення. Нехай G — деяка група, M — її підмножина, що складається із елементів $\{a_1, a_2, \dots\}$. Якщо кожний елемент групи G є добутком скінченної сукупності елементів множини M , а також обернених їм елементів, то множина M називається системою твірних групи G . Ці добутки часто називають словами.

У будь-якій групі для її елементів $a_1, a_2 \dots$ виконуються співвідношення

$$a_1 e a_1^{-1} = e, a_1 a_1^{-1} = e, a_1 a_1^{-1} a_2 a_3 a_3^{-1} a_2^{-1} = e, \dots$$

Ліві частини цих співвідношень характеризуються такими властивостями: 1) вони є добутком парної кількості співмножників, що відрізняються від одиниці, причому якщо в добуток входить елемент a , то в нього входить також елемент a^{-1} ; 2) в добуток входять також принаймні два множники a, a^{-1} , які стоять поряд або розділені множником e ; 3) властивості 1, 2 зберігаються, якщо пропустити в добутку два сусідні множники a, a^{-1} або 1.

Такі співвідношення називаються універсальними.

Якщо група G допускає таку систему твірних M , що між елементами множини M існують тільки універсальні співвідношення, то група G називається вільною.

Приклади. 1. Фундаментальна група $\pi_1(S^1 \vee S^1)$ є вільною групою з двома твірними [2].

2. Букетом кіл S_1^1, \dots, S_p^1 називається множина кіл, що мають єдину спільну точку; вона позначається через $\bigvee_{\alpha=1}^p S_\alpha^1$.

Згадаємо, що будь-який двовірний многовид одержується в $4p$ -кутника з межею $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$ (сфера в p ручками $S(p)$) або із $2q$ -кутника з межею $a_1 a_2 \dots a_q a_q$ (сфера з q листками Мебіуса $S(q)$).

Зауважимо, що межа $4p$ -кутника, що породжує $S(p)$, після ототожнення є букетом $4p$ кіл; межа $2q$ -кутника, що породжує $S(q)$, після ототожнення є букетом $2q$ кіл. Група $\pi_1(S(p))$ — це група, що породжена твірними $a_1, b_1, \dots, a_p, b_p$ з єдиним породжуючим нетривіальним співвідношенням

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1} = e.$$

Група $\pi_1(S(q))$ породжена твірними a_1, \dots, a_q із співвідношенням $a_1 a_1 \dots a_q a_q = e$ [12].

Теорема 32 (Борсука — Улама). *Не існує неперервного відображення $f: S^n \rightarrow S^{n-1}$, що має властивість $f(-x) = -f(x)$, тобто переводить діаметрально протилежні точки в діаметрально протилежні,*

Далі теорему доведено для випадків $n = 1$ та $n = 2$.

Наслідок 1. При неперервному відображенні $f: S^2 \rightarrow R^2$, що задовольняє умові $f(-x) = -f(x)$ (діаметрально протилежні точки сфери переходять у центрально симетричні відносно початку координат точки площини), є деяка точка на сфері, яка відображається в початок координат.

Доведення. Припустимо протилежне: нехай початок координат не є образом ніякої точки сфери. Тоді розглянемо відображення $g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$. Очевидно, що $g: S^2 \rightarrow S^1$. Але за теоремою Борсука — Улама такого відображення не існує, і наслідок 1 доведено.

Наслідок 2. Не існує гомеоморфного відображення сфери S^2 на деяку підмножину площини R^2 .

Доведення. Нехай $f: S^2 \rightarrow R^2$ — деяке неперервне відображення. Тоді знайдуться діаметральні точки на сфері з одним і тим же образом. Припустимо, що це не так. Нехай завжди $f(x) \neq f(-x)$. Тоді розглянемо відображення $g: S^2 \rightarrow R^2$, що задане таким чином: $g(x) = f(x) - f(-x)$. Очевидно, що $g(-x) = -g(x)$ і $g(x) \neq (0, 0)$; це суперечить наслідку 1.

Наслідок 2 показує, що не існує глобальної регулярної параметризації сфери. Іншими словами, не можна в цілому параметризувати сферу так, щоб область зміни параметра була областю на площині.

Доведення теореми Борсука — Улама. Нехай $n = 1$. Оскільки S^0 складається із двох точок, а відображення f неперервне, то все коло S^1 відображається в одну з цих точок і теорема доведена.

Нехай $n = 2$. Сфера S^2 накриває проєктивний простір RP^2 , а S^1 — простір RP^1 . Оскільки відображення $f: S^2 \rightarrow S^1$ переводить діаметрально протилежні точки в діаметрально протилежні, то воно індукує відображення $g: RP^2 \rightarrow RP^1$. Тим самим визначена діаграма

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ p_1 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ RP^2 & \xrightarrow{g} & RP^1 \end{array}$$

Ця діаграма комутативна, тобто $p_2 \cdot f = g \cdot p_1$, і вона індукує комутативну ж $(p_{2*} \cdot f_* = g_* \cdot p_{1*})$ діаграму фундаментальних груп:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(S^2) = 0 & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(S^1) = Z \\ p_{1*} \downarrow & & \downarrow p_{2*} \\ \pi_1(RP^2) = Z_2 & \xrightarrow{g_*} & \pi_1(RP^1) = Z \end{array}$$

Відображення g_* — це гомоморфізм. Але існує єдиний гомоморфізм із Z_2 в Z , він переводить обидва елементи Z_2 в нульовий елемент Z (оскільки в Z не існує підгруп потужності 2). Розглянемо в S^2 шлях γ , що з'єднує дві діаметрально протилежні точки. При відображенні f він перейде в шлях, що з'єднує дві діаметрально протилежні точки S^1 , при відображенні p_2 — в петлю простору RP^1 . За лемою про вкривну гомотопію ця петля не гомотопна нульовій. З іншого боку, при відображенні p_1 шлях γ перейде в петлю простору RP^2 , яка при відображенні g перейде в петлю простору RP^1 , що гомотопна нульовій. Одержана суперечність доводить теорему.

5.3. Групи гомологій

Згадаємо деякі відомості з курсу аналітичної геометрії. Нехай в лінійному просторі R^n задано два базиси $e = (e_1, \dots, e_n)$, $\bar{e} = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$, що зв'язані так: $\bar{e}_i = a^i_j e_j$, або в матричному вигляді $\bar{e} = Ae$, де $A = a^i_j$. Як відомо, $\det A \neq 0$. На множині базисів вводиться відношення еквівалентності: $\bar{e} \sim e \leftrightarrow \det A > 0$. Базиси поділяються на два неперетинні класи. Вибрати орієнтацію лінійного простору означає зафіксувати один клас базисів.

Розглянемо в n -вимірному просторі E^n з фіксованою орієнтацією гіперплощину E^{n-1} . Вона ділить простір E^n на два півпростори. Зафіксуємо один із них, напрямивши в нього вектор v . Будемо вважати, що базис (e_2, \dots, e_n) задає індуковану орієнтацію E^{n-1} , якщо базис (v, e_2, \dots, e_n) задає додатну орієнтацію E^n .

5.3.1. Симпліціальний комплекс

Визначення. Симплексом з вершинами у впорядкованому наборі точок $A_0(r_0), \dots, A_n(r_n)$ простору E^n (де A_0, A_1, \dots, A_n — точки загального положення, тобто ніякі $k+1$ точок не лежать у k -вимірній площині) називається множина точок із радіус-вектором $r = \lambda^i r_i$, де $\lambda_i \geq 0$ і $\lambda^0 + \lambda^1 + \dots + \lambda^n = 1$. Симплекс позначається через

$[A_0, \dots, A_n]$ або Δ_n . Координати $(\lambda^0, \lambda^1, \dots, \lambda^n)$ називаються барицентричними координатами точки симплексу.

Приклади. 1. Розглянемо $\Delta_0 = [A_0]$. Це точка.

2. Одновимірний симплекс $\Delta_1 = [A_0, A_1]$ є відрізок.

3. Розглянемо $\Delta_2 = [A_0, A_1, A_2]$. Це трикутник, радіус-вектор його точок $r = \lambda^0 r_0 + \lambda^1 r_1 + \lambda^2 r_2$. Якщо $\lambda^i = 0$, для одного з $i = 0, 1, 2$, то одержимо сторону трикутника.

4. Тетраедр — це симплекс $\Delta_3 = [A_0, A_1, A_2, A_3]$.

Приклади показують, що симплексе — це узагальнення тетраедра для багатовимірного випадку.

Індуктивно симплекс Δ_n можна побудувати таким чином: у просторі E^{n-1} береться симплекс Δ_{n-1} , у просторі E^n береться точка, що не належить E^{n-1} , і з'єднується відрізками з кожною точкою Δ_{n-1} .

За допомогою симплексу $[A_0, \dots, A_n]$ можна задати орієнтацію простору E^n , а саме: базис $(r_1 - r_0, r_2 - r_0, \dots, r_n - r_0)$ задає додатну орієнтацію простору.

Нехай задано симплекс $\Delta_n = [A_0, \dots, A_n]$. Його $(n-1)$ -вимірною гранню є симплекс $\Delta_{n-1}^i = [A_0, \dots, A_i, \dots, A_n]$; тут запис A_i означає, що вершину A_i виключено.

Визначення. Границею n -вимірного симплексу Δ_n називається формальна комбінація $\partial\Delta_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \Delta_{n-1}^i$.

Приклади. 1. Розглянемо симплекс $[A_0, A_1]$ (рис. 5.11). Його границею є $\partial\Delta_1 = A_1 - A_0$.

2. Розглянемо симплекс $\Delta_2 = [A_0, A_1, A_2]$ (див. рис. 5.11). Його границя — $\partial\Delta_2 = [A_1, A_2] - [A_0, A_2] + [A_0, A_1]$.

3. Розглянемо симплексе $\Delta_3 = [A_0, A_1, A_2, A_3]$ (див. рис. 5.11). Його границя $\partial\Delta_3 = [A_1, A_2, A_3] - [A_0, A_2, A_3] + [A_0, A_1, A_3] - [A_0, A_1, A_2]$. Розглянемо грань, для якої $\lambda_0 = 0$, тобто грань $[A_1, A_2, A_3]$. Базис цієї грані скла-

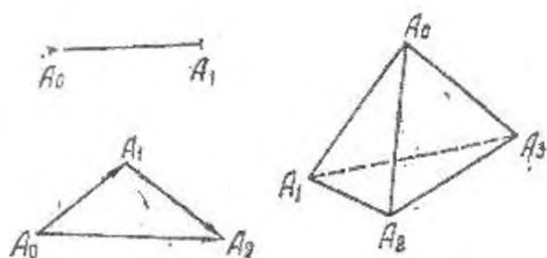


Рис. 5.11

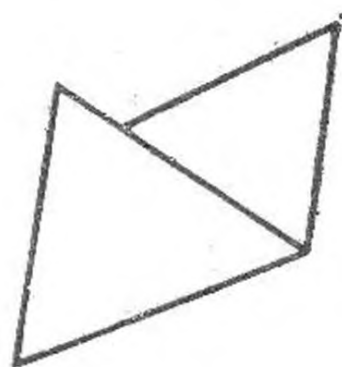


Рис. 5.12

дають вектори $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$, або $r_2 - r_0 - (r_1 - r_0)$, $r_3 - r_0 - (r_1 - r_0)$.

Індуковану орієнтацію грані будемо вибирати відносно підпростору, в якому симплекс не лежить. Для грані $[A_1, A_2, A_3]$ в цей підпростір напрямлений вектор $v = r_1 - r_0$. Оскільки вектори $r_1 - r_0$, $r_2 - r_0 - (r_1 - r_0)$, $r_3 - r_0 - (r_1 - r_0)$ задають додатну орієнтацію простору, вектори $r_2 - r_1$, $r_3 - r_1$ задають індуковану орієнтацію грані $[A_1, A_2, A_3]$. Тому в формулі, що визначає $\partial\Delta_3$, грань $[A_1, A_2, A_3]$ записана зі знаком «+».

Розглянемо грань $[A_0, A_2, A_3]$, для якої $\lambda_1 = 0$. Базис грані складається з векторів $r_2 - r_0$, $r_3 - r_0$. З'ясуємо, чи співпадає орієнтація, яку задає цей базис, з індукованою. У півпросторі, де не розташований тетраедр, напрямимо вектор $v = -(r_2 - r_0)$. Вектори $-(r_1 - r_0)$, $r_2 - r_0$, $r_3 - r_0$ задають від'ємну орієнтацію простору. Тому в формулі границі симплексу грань $[A_0, A_2, A_3]$ береться зі знаком «-».

Отже, якщо орієнтація грані, що породжена порядком вершин, співпадає з індукованою, то в формулу границі симплексу така грань входить зі знаком «+», якщо не співпадає — зі знаком «-».

Т в е р д ж е н н я . Основна властивість границі

$$\partial\partial\Delta_n = 0.$$

Д о в е д е н н я . Грань $\Delta_{n-2}^{ij} = [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_n]$ (для визначеності нехай $i < j$) одержується із симплексу двома способами: можна із Δ_n виключити спочатку A_i , потім A_j , або навпаки. Виключивши із Δ_n вершину A_i , одержимо у формулі границі $\partial\Delta_n$ доданок $(-1)^i [A_0, \dots, \hat{A}_i, \dots, A_n]$. Із цього доданка виключаємо A_j , і, оскільки A_i уже виключена і номер у вершини A_j буде $j - 1$, то одержимо у формулі границі $\partial\partial\Delta_n$ доданок $(-1)^i \times (-1)^{j-1} \Delta_{n-2}^{ij}$. Якщо із Δ_n виключити спочатку A_j , а потім A_i , то у формулі границі $\partial\partial\Delta_n$ з'явиться доданок $(-1)^j \times (-1)^i \Delta_{n-2}^{ij}$. Сума цих двох доданків дорівнює нулю.

В и з н а ч е н н я . Симпліціальним комплексом називається множина, що складається із симплексів різних вимірностей, які задовольняють двом умовам: 1) якщо симплекс належить множині, то множині належать і всі його грані менших вимірностей; 2) будь-які два симплекси можуть перетинатися тільки по симплексах.

П р и к л а д и . 1 Ситуація, що зображена на рис. 5.12 в симпліціальному комплексі не може мати місця.

2. Багатогранник, якщо його грані розбити на трикутники, є симпліціальним комплексом.

Визначення. Топологічний простір, що гомеоморфний симпліціальному комплексу, називається полієдром. А сам симпліціальний комплекс називається симпліціальним розбиттям полієдра.

Приклад. Двовимірна сфера є полієдром. Симпліціальне розбиття сфери можна одержати, якщо вписати в неї тетраедр і встановити гомеоморфізм за допомогою променів, що виходять із центра сфери.

5.3.2. Групи гомологій симпліціального комплексу

Розглянемо симпліціальний комплекс X зі скінченною кількістю n -вимірних симплексів $\Delta_n^1, \dots, \Delta_n^k$. Нехай G — довільна абелева група; найбільш часто будемо розглядати групи Z, Z_p , де p — просте число.

Визначення. Формальна сума $C_n = \sum \lambda_i \Delta_n^i$, де $\lambda_i \in G, i = 1, \dots, k$, називається n -вимірним ланцюгом.

На множині ланцюгів можна ввести: операцію додавання $C_n^1 + C_n^2 = \sum_i (\lambda_i^1 + \lambda_i^2) \Delta_n^i$, нульовий та протилежний елементи. Група ланцюгів — це вільна абелева група (позначається через C_n), твірні якої є симплексами $\Delta_n^i, i = 1, \dots, k$.

Кожному n -вимірному ланцюгові C_n можна поставити у відповідність $(n-1)$ -вимірний ланцюг, який називається границею C_n і визначається формулою

$$\partial C_n = \sum_i \lambda_i \partial \Delta_n^i.$$

Розглянемо відображення $C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0$.

Відображення ∂ є гомоморфізмом і має таку властивість: $\partial \partial = 0$.

Виділимо деякі особливі ланцюги.

Визначення. k -вимірний ланцюг C_k називається циклом, якщо $\partial C_k = 0$; k -вимірний ланцюг C_k називається границею, якщо існує такий $(k+1)$ -вимірний ланцюг C_{k+1} , що $\partial C_{k+1} = C_k$.

Границі та цикли утворюють абелеві підгрупи групи ланцюгів. Група циклів позначається через $Z_k(X)$, група границь — через $B_k(X)$.

Зауважимо, що границі є циклами. Справді, $\partial C_k = \partial \partial C_{k+1} = 0$. Обернене, взагалі кажучи, неправильне.

Розглянемо відображення

$$C_n \xrightarrow{\partial} C_{n-1} \xrightarrow{\partial} C_{n-2} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_{k+1} \xrightarrow{\partial} C_k \xrightarrow{\partial} C_{k-1} \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} C_0.$$

Цикли — це елементи ядра гомоморфізма $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$.
Границі — це елементи образу гомоморфізма $\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k$.

Визначення. Групою k -вимірних гомологій симпліціального комплексу X з коефіцієнтами із G називається фактор-група $H_k(X, G) = Z_k(X, G)/B_k(X, G)$.

Групою гомологій поліедра називається група гомологій відповідного симпліціального комплексу.

Група гомологій поліедра не залежить від розбиття. Більш того, у гомеоморфних (навіть у гомотопічно еквівалентних) поліедрах групи гомологій ізоморфні.

Доказ цих тверджень можна знайти в роботі [2].

Приклади. Нехай $G = Z$.

1. Обчислимо цілочисельні гомології точки. Існує тільки симплекс Δ_0 . Тому $C_0 = \lambda \Delta_0$. Оскільки $B_0 = 0$, $Z_0 = Z$, то $H_0 = Z/0 = Z$. Очевидно, що для $i > 0$ має місце $H_i = 0$.

2. Обчислимо двовимірну групу гомологій сфери S^2 . Для цього розглянемо тетраедр $[A_0, A_1, A_2, A_3]$. У тетраедра чотири двовимірні грані: $[A_1 A_2 A_3] = \Delta_2^0$, $[A_0 A_2 A_3] = \Delta_2^1$, $[A_0 A_1 A_3] = \Delta_2^2$, $[A_0 A_1 A_2] = \Delta_2^3$. Тому ланцюг $C_2 = \sum_{i=0}^3 \lambda_i \Delta_2^i$ — це абелева група з чотирма вільними твірними, тобто $C_2 = Z \oplus Z \oplus Z \oplus Z$.

Оскільки $B_2 = 0$ (немає тривимірних симплексів), то $H_2 = Z_2/B_2 = Z_2$. Таким чином, для обчислення групи гомологій $H_2(S^2, Z)$ потрібно знайти групу двовимірних циклів Z_2 . Знайдемо λ_i , $i = 0, \dots, 3$ такі, щоб границя ланцюга дорівнювала нулю:

$$\begin{aligned} \partial(\lambda_0 \Delta_2^0 + \lambda_1 \Delta_2^1 + \lambda_2 \Delta_2^2 + \lambda_3 \Delta_2^3) &= \\ &= \lambda_0 \partial \Delta_2^0 + \lambda_1 \partial \Delta_2^1 + \lambda_2 \partial \Delta_2^2 + \lambda_3 \partial \Delta_2^3 = \\ &= \lambda_0 ([A_2 A_3] - [A_1 A_3] + [A_1 A_2]) + \lambda_1 ([A_2 A_3] - \\ &\quad - [A_0 A_3] + [A_0 A_2]) + \lambda_2 ([A_1 A_3] - [A_0 A_3] + \\ &\quad + [A_0 A_1]) + \lambda_3 ([A_1 A_2] - [A_0 A_2] + [A_0 A_1]) = 0. \end{aligned}$$

Звідси $\lambda_0 + \lambda_1 = 0$; $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$; $\lambda_0 + \lambda_3 = 0$; $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$; $\lambda_1 - \lambda_3 = 0$; $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Таким чином, $\lambda_1 = -\lambda_0$; $\lambda_2 = \lambda_0$; $\lambda_3 = -\lambda_0$, і ланцюг, який є циклом, має вигляд

$$C_2 = \lambda (\Delta_2^0 - \Delta_2^1 + \Delta_2^2 - \Delta_2^3).$$

Отже, $Z_2 = Z$ і $H_2(S^2, Z) = Z$.

Задача 1. Довести, що $H_0(S^2, Z) = Z$.

Задача 2. Обчислити групи гомологій проективної площини для $G = Z$ і $G = Z_2$.

5.3.3. Степінь відображення

Нехай M^l — диференційовний многовид, тобто M^l вкритий картами U_α , кожна з яких гомеоморфна внутрішності l -вимірної кулі D^l ($\varphi_\alpha: D^l \rightarrow U_\alpha$ — гомеоморфізм). У перетині двох сусідніх карт $U_\alpha \cap U_\beta$ гомеоморфізми φ_α та φ_β задають дві параметризації. Відображення $\psi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta^{-1} \circ \varphi_\alpha: \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ називається функцією переходу. Це відображення в локальних координатах можна записати так: $y^i = f_{\alpha\beta}^i(x_1, \dots, x^l)$, $i = 1, \dots, l$. Многовид M^l диференційовний, якщо функція переходу для будь-якої карти диференційовна.

Визначення. Многовид M^l називається орієнтовним, якщо існує вкриття картами, для якого

$$\det \left(\frac{\partial f_{\alpha\beta}^i}{\partial x_j} \right) > 0$$

для будь-яких карт U_α, U_β , що перетинаються.

Нехай M^l, N^l — компактні орієнтовні диференційовні многовиди.

Визначення. Відображення $f: M^l \rightarrow N^l$ називається диференційовним, якщо в будь-яких локальних координатах воно може бути задане функціями $y^i = f^i(x^1, \dots, x^l)$ класу C^1 .

Точка $p \in M^l$ називається регулярною точкою відображення f , якщо

$$\det \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right) \Big|_p \neq 0.$$

Точка $Q \in N^l$ називається регулярним значенням відображення f , якщо її прообраз складається із регулярних точок.

Якщо M^l — компактний многовид, то прообраз регулярного значення Q складається із скінченної кількості точок.

Множина регулярних значень диференційовного відображення $f: M^l \rightarrow N^l$ скрізь щільна в N^l .

Визначення. Степенем диференційовного відображення $f: M^l \rightarrow N^l$ (M^l, N^l — компактні орієнтовні многовиди) називається число

$$\sum_{p \in f^{-1}(Q)} \text{sign det} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right),$$

де Q — регулярне значення відображення f .

Степінь відображення будемо позначати символом $\text{deg } f$.

Якщо в прообразі регулярного значення Q є m точок з додатним якобіаном

$$\text{det} \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right)$$

і n точок з від'ємним якобіаном, то $\text{deg } f = m - n$.

Можна довести, що степінь відображення не залежить від вибору регулярного значення [7; 18].

Нас буде цікавити випадок, коли $M^1 = N^1 = S^1$. Сфера є орієнтовним многовидом.

Твердження. Якщо два диференційовні відображення гомотопні, то степені відображень співпадають, тобто степінь відображення — гомотопічний інваріант.

Теорема 33 (Хопфа). Для того щоб два відображення $f_1, f_2: S^1 \rightarrow S^1$ були гомотопні, необхідно і достатньо, щоб $\text{deg } f_1 = \text{deg } f_2$.

Доведення цієї теореми див. у роботі [18].

Можна ввести степінь неперервного відображення, замінивши його наближено диференційовним відображенням.

Приклади. 1. Розглянемо $f: S^1 \rightarrow S^1$. Нехай обидва кола лежать у комплексній площині і задані рівнянням $|z| = 1$, і нехай $f: z \rightarrow z^k$. Якщо перше коло параметризоване кутом φ , то відображення f може бути задане так: $\varphi \rightarrow k\varphi \pmod{2\pi}$. Позначимо локальні координати першого кола через x , другого — через y . Тоді відображення f можна записати у вигляді рівняння $y = kx \pmod{2\pi}$. Звідси $\frac{dy}{dx} = k$. Оскільки прообраз складається із k точок, у кожній з яких $\text{det} \left(\frac{dy}{dx} \right) > 0$, то $\text{deg } f = k$.

2. Розглянемо поліном $\omega = a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_k z^k$. Введемо на комплексній площині однорідні координати (z_1, z_k) , $z = \frac{z_1}{z_2}$. Значенню $z_2 = 0$ відповідає нескінченно віддалена точка комплексної площини. Додавши нескінченно віддалену точку, одержимо сферу S^2 . Поліном ω задає відображення $S^2 \rightarrow S^2$. За теоремою Гаусса будь-який многочлен у полі комплексних чисел має принаймні один

корінь. Звідси випливає, що кількість коренів дорівнює степеневі полінома. Всі точки комплексної площини W , крім не більше $k-1$, є регулярними значеннями відображення. Розглянемо довільне регулярне значення. Воно має k прообразів — регулярних точок.

Покажемо, що в кожній регулярній точці якобіан відображення $\omega_0(z)$ більший нуля. Нехай $z = x + iy$; $\omega = u + iv$. Тоді $\omega: (x, y) \rightarrow (u, v)$. Оскільки $\omega(z)$ — аналітична функція комплексного змінного, то за умовою Коші — Ріман $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Тому якобіан відображення

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 > 0.$$

Звідси випливає, що степінь відображення $\omega(z)$ дорівнює степеневі полінома.

3. Нехай $A: E^{l+1} \rightarrow E^{l+1}$ — лінійний невідроджений оператор. З огляду на невідродженість можна побудувати відображення $f: x \rightarrow \frac{Ax}{|Ax|}$, $x \neq 0$. Нехай $|x| = 1$. Тоді $f: S^l \rightarrow S^l$. Розглянемо випадок, коли $A = -E$, тобто коли f переводить будь-яку точку сфери S^l в діаметрально їй протилежну. Обчислимо степінь відображення f . На сфері задамо індуковану орієнтацію зовнішньою нормаллю, в точці x це вектор e_0 . Нехай $f: x \rightarrow -x$. Тоді індуковане відображення дотичних просторів $f_*: (e_1, \dots, e_l) \rightarrow (-e_1, \dots, -e_l)$. Якобіан відображення додатний, якщо при відображенні f_* додатно орієнтований базис дотичного простору переходить у додатно орієнтований, і від'ємний, якщо при відображенні f_* базис, що задає додатну орієнтацію, переходить у базис, що задає від'ємну орієнтацію.

Визначник матриці переходу від базису (e_0, \dots, e_l) до базису $(-e_0, \dots, -e_l)$ дорівнює $(-1)^{l+1}$. Це і є степенем відображення f . Справді, за визначенням індукованої орієнтації базис $(-e_1, \dots, -e_l)$ у точці $f(x)$ задає додатну орієнтацію сфери, якщо базис $(-e_0, -e_1, \dots, -e_l)$ задає додатну орієнтацію простору, і від'ємну в протилежному разі.

Якщо $l=2k$, то степінь відображення дорівнює -1 . Якщо $l=2k+1$, то степінь відображення дорівнює $+1$.

Звідси випливає, що на парновимірній сфері немає неперервного дотичного до сфери невідродженого векторного поля (не можна «причесати їжака», тобто не можна зробити так, щоб всі голки лягли, дотитикалися їжа-

ка). Справді, припустимо протилежно: на парновимірній сфері з радіусом-вектором $r(x)$ існує неперервне дотичне векторне поле $v(x)$. Відображення $F: S^1 \times I \rightarrow S^1$, що визначається формулою $F(r(x), \varphi) = r \cos \varphi + v \sin \varphi$, задає гомотопію між тотожним відображенням $r(x) \rightarrow r(x)$ ($\varphi = 0$) та відображенням, що переводить кожну точку в діаметрально протилежну: $r(x) \rightarrow -r(x)$ ($\varphi = \pi$). У першого відображення степінь 1, у другого -1 . Але степінь відображення — гомотопічний інваріант. Одержана суперечність доводить твердження.

5.3.4. Клітинні гомології

Визначення. Клітинним комплексом (CW-комплексом) X називається хаусдорфів топологічний простір, який можна представити у вигляді об'єднання не більш ніж зліченної кількості попарно неперетинних множин e_i^q , кожна з яких гомеоморфна внутрішності кулі відповідної вимірності q , причому: 1) для кожної множини e_i^q зафіксоване відображення $f_i^q: \bar{D}^q \rightarrow X$ замкненої кулі в простір X , обмеження f_i^q на D^q є гомеоморфізмом на e_i^q ; 2) границя $\partial e_i^q = \bar{e}_i^q \setminus e_i^q$ міститься в об'єднанні скінченної кількості множин менших вимірностей; 3) топологія X така, що множина $Q \subset X$ замкнена тоді і тільки тоді, коли для кожної клітини e_i^q повний прообраз $(f_i^q)^{-1}(Q \cap \bar{e}_i^q)$ замкнений в \bar{D}^q .

Симпліціальний комплекс є окремим випадком клітинного комплексу.

Приклади. 1. Сфера S^2 є клітинним комплексом: $S^2 = e^0 \cup e^2$, де e^0 — точка, e^2 — сфера з вилученою точкою.

2. Розглянемо тривимірну кулю з границею \bar{D}^3 . Вона також є клітинним комплексом: $\bar{D}^3 = e^0 \cup e^2 \cup e^3$.

3. Сфера S^n — це клітинний комплекс: $S^n = e^0 \cup e^n$.

4. Розглянемо проєктивний простір RP^2 , який одержується отождоженням діаметрально протилежних точок границі: RP^2 — клітинний комплекс, оскільки $RP^2 = e^0 \cup e^1 \cup e^2$ (рис. 5.13).

Задача. Довести, що RP^n є клітинним комплексом $RP^n = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e^n$.

5. Двовимірний компактний многовид — це клітинний комплекс. Сфера з p ручками одержується із $4p$ -кутника з

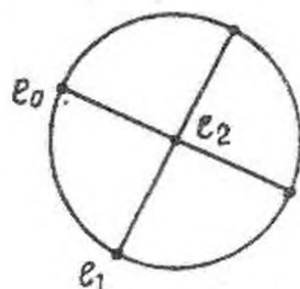


Рис. 5.13

границею $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_p b_p a_p^{-1} b_p^{-1}$. Це і є клітинне розбиття $S(p) = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_{2p}^1 \cup e^2$; у розбиття 1 вершина, $2p$ одновимірних клітин і 1 двовимірна клітина. Аналогічно сфера з q листками Мебіуса $S(q) = e^0 \cup e_1^1 \cup \dots \cup e_q^1 \cup e^2$.

Нехай G — абелева група, C_q — q -вимірний ланцюг, тобто $C_q = \sum \lambda^i e_i^q$, де $\lambda^i \in G$, e_i^q — q -вимірні клітини. Вводячи природним чином на множині ланцюгів групову будову (додання ланцюгів та ін.), одержимо групу q -вимірних ланцюгів C_q , твірними якої є клітини відповідних вимірностей. Означимо через K^q сукупність усіх клітин, вимірність яких не перебільшує q . Фактор-простір $K^{q-1}/K^{q-2} = \bigvee_i S_i^{q-1}$ ($\bigvee_i S_i^{q-1}$ — букет $(q-1)$ -вимірних сфер), оскільки при стягуванні кулі вимірності $q-2$ в точку одержується сфера вимірності $q-2$.

Ланцюжок відображень $S_i^{q-1} \rightarrow K^{q-1} \xrightarrow{p} K^{q-1}/K^{q-2} = \bigvee_i S_i^{q-1}$ (p — відображення факторизації) задає неперервне відображення S_j^{q-1} в кожну сферу букета. Тим самим визначене неперервне відображення

$$f_{ij}^q: S_j^{q-1} \rightarrow S_i^{q-1}.$$

Визначення. Степінь відображення f_{ij}^q називається коефіцієнтом інцидентності клітини e_j^q відносно клітини e_i^{q-1} (позначається через $[e_j^q: e_i^{q-1}]$).

Коефіцієнт інцидентності показує, скільки разів (з урахуванням кратності) границя клітини e_j^q «накриває» клітину e_i^{q-1} .

Визначення. Границею q -вимірної клітини e_j^q називається

$$\partial e_j^q = \sum_i [e_j^q: e_i^{q-1}] e_i^{q-1}.$$

Твердження: $\partial \partial e_j^q = 0$.

Тепер можна розглянути ланцюжок відображень

$$C_{q+1} \xrightarrow{\partial} C_q \xrightarrow{\partial} C_{q-1}.$$

Група циклів $Z_q = \{c \in C_q \mid dc = 0\}$, тобто Z_q — ядро відображення $\partial: C_q \rightarrow C_{q-1}$.

Група границь — $B_q = \{c \in C_q \mid \exists \bar{c} \in C_{q+1} : \partial \bar{c} = c\}$, тобто B_q — образ відображення $\partial: C_{q+1} \rightarrow C_q$. Із рівності $\partial \partial e_j^q = 0$ випливає, що $B_q \subset Z_{q+1}$.

Визначення. Групою клітинних гомологій клітинного комплексу X відносно абелевої групи G називається група

$$H_q(X, G) = Z_q(X, G) / B_q(X, G).$$

У гомеоморфних (навіть гомотопічно еквівалентних) клітинних комплексах групи гомологій співпадають [21].

Приклади. Нехай $G = Z$.

1. Обчислимо групи гомологій S^n , $n > 1$. Клітинне розбиття $S^n = e^0 \cup e^n$. Звідси $C_0 = Z$; $C_1 = 0, \dots$; $C_{n-1} = 0$, $C_n = Z$. За визначенням покладемо $de^0 = 0$. Тому всі нульвимірні ланцюги є цикли, тобто $Z_0 = C_0 = Z$. З іншого боку, одновимірних ланцюгів немає, отже $B_0 = 0$. Тому $H_0(S^n, Z) = Z$. Аналогічно $H_n(S^n, Z) = Z$. У проміжних вимірностях групи гомологій нульові:

$$H_k(S^n, Z) = 0, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

2. Обчислимо цілочисельні групи гомологій кола S^1 . Клітинне розбиття $S^1 = e^0 \cup e^1$. Границя $de^1 = -e^0 + e^0 = 0$, оскільки точка, з якої виходить e^1 , береться зі знаком «+», а точка, в яку входить e^1 , — зі знаком «-». Усі подальші міркування ті ж, що і для випадку $n > 1$. Одержуємо $H_0(S^1, Z) = Z$; $H_1(S^1, Z) = Z$.

Задача. Обчислити цілочисельні групи гомологій RP^2 , RP^n .

3. Обчислимо $H_2(S(p), Z)$; $H_1(S(p), Z)$. Клітинне розбиття $S(p) = e^0 \cup e^1 \cup \dots \cup e_{2p}^1 \cup e^2$. Двовимірна клітина єдина, тому $C_2 = Z$. Оскільки немає тривимірних клітин, то $B_2 = 0$. Оскільки будь-яка одновимірна клітина входить у границю e^2 один раз зі знаком «+», а другий — зі знаком «-», то $de^2 = 0$. Звідси $Z_2 = C_2 = Z$. Таким чином, $H_2(S(p), Z) = Z$.

Група $C_1 = \underbrace{Z \oplus \dots \oplus Z}_{2p}$, тому що кількість одновимірних ланцюгів дорівнює $2p$. Границя будь-якої одновимірної клітини дорівнює нулю, через те що кінці одновимірної клітини входять в одну і ту ж нульвимірну клітину. Отже, всі ланцюги є циклами, тобто $Z_1 = C_1$. Границя будь-якого двовимірного ланцюга дорівнює нулю, тому $B_1 = 0$. Отже,

$$H_1(S(p), Z) = \underbrace{Z \oplus \dots \oplus Z}_{2p}.$$

Задачі. 1. Обчислити $H_0(S(p), Z)$.

2. Обчислити цілочисельні групи гомологій сфери з q листками Мебіуса.

Теорема 34. Сфери різних вимірностей не гомеоморфні між собою.

Доведення. Припустимо, що є гомеоморфізмом $f: S^n \rightarrow S^m$, $n \neq m$. Він індукує ізоморфізм $f_*: H_i(S^n, Z) \rightarrow H_i(S^m, Z)$. Але вище показано, що групи гомологій сфер різних вимірностей не ізоморфні.

Теорема 35. Евклідові простори різних вимірностей не гомеоморфні.

Доведення. Додавши до евклідового простору одну точку, одержуємо сферу тієї ж вимірності. Якби евклідові простори різних вимірностей були гомеоморфні, то були б гомеоморфні і сфери різних вимірностей, що суперечить теоремі 34.

5.4. Ейлерова характеристика

Групи гомологій є абелеві групи зі скінченною кількістю твірних. Відомо, що абелева група зі скінченною кількістю твірних розкладається в пряму суму таким чином: $Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z \oplus \sum_i Z_{p_i}$. Кількість складових Z називається рангом абелевої групи і позначається через $\text{rang}(G)$.

Нехай $p_i = \text{rang } H_i(X, Z)$.

Приклади. 1. Для сфери S^n ранги $p_0 = 1$, $p_1 = 0$, ...
..., $p_{n-1} = 0$, $p_n = 1$.

2. Для сфери з p ручками $p_0 = 1$; $p_1 = 2p$; $p_2 = 1$.

3. Для сфери з q листками Мебіуса $p_0 = 1$; $p_1 = q - 1$; $p_2 = 0$.

Оскільки групи гомологій — це топологічні інваріанти, то їх ранги — також топологічні інваріанти.

Будемо розглядати клітинний комплекс зі скінченною кількістю клітин.

Визначення. Ейлеровою характеристикою клітинного комплексу називається число

$$\chi = \sum_{i=0}^n (-1)^i \text{rang } H_i(X, Z).$$

Теорема 36. Ейлерова характеристика скінченного клітинного комплексу $\chi = (-1)^i \Gamma_i$, де Γ_i — кількість клітин вимірності i .

Приклади. 1. $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$. Для парновимірних сфер $\chi = 2$, для непарновимірних сфер $\chi = 0$.

$$2. \chi(S(p)) = 2 - 2p.$$

$$3. \chi(S(p)) = 2 - q.$$

Раніше показано, що сфера з p ручками є клітинним комплексом, в якому є одна двовимірна клітина, $2p$ одновимірних і одна нульвимірна. Тому ейлерова характеристика сфери з p ручками $\chi = 2 - 2p$.

Подібним чином сфера з q листками Мебіуса є клітинним комплексом з однією нульвимірною клітиною. Тому ейлерова характеристика сфери з q листками Мебіуса $\chi = 2 - q$.

Якщо ейлерові характеристики різні, то клітинні комплекси не можуть бути гомеоморфними. Отже, сфери з різною кількістю ручок не гомеоморфні між собою і сфери з різною кількістю листків Мебіуса не гомеоморфні між собою. Орієнтовність — також топологічний інваріант. Таким чином, топологічний тип компактного двовимірного многовиду повністю визначається орієнтовністю та ейлеровою характеристикою.

Теорема 37 (Ейлера). Для замкнутого опуклого багатогранника

$$G_0 - G_1 + G_2 = 2.$$

Доведення. Будемо послідовно змінювати розбиття сфери, що відповідає даному багатограннику, виключаючи деякі ребра та вершини і слідкуючи при цьому за зміною чисел G_i .

У перший момент G_0 — кількість нульвимірних клітин, G_1 — одновимірних і G_2 — двовимірних клітин. Далі будемо чинити так. Кожний раз будемо брати яке-небудь ребро і починати будувати просту ламану, додаючи до нього по черзі ще не виключені ребра. Якщо в певний момент уже не можна додати до ламаної ребро, то знайдено таку вершину, що всі ребра, які виходять із неї, крім одного, уже виключені. Тоді виключимо цю вершину і це ребро. При цьому відповідна двовимірна клітина зміниться (рис. 5.14), але загальна кількість двовимірних клітин лишиться попередньою.

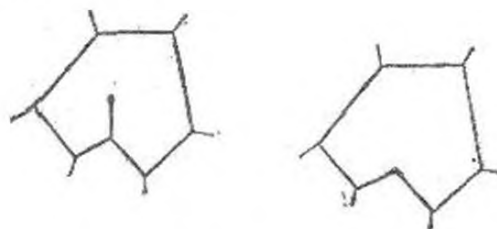


Рис. 5.14

Якщо позначити через Γ_i кількість i -вимірних клітин в кінцевому розбитті, то можна записати:

$$\Gamma'_0 = \Gamma_0 - 1; \quad \Gamma'_1 = \Gamma_1 - 1; \quad \Gamma'_2 = \Gamma_2.$$

Легко побачити, що $\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2$.

Якщо не можна побудувати просту замкнену ламану, то після виключення будь-якого з ребер, що входять в неї, двовимірні клітини, які розділялися ними, «зіллються» в одну (рис. 5.15). Тоді одержимо:

$$\Gamma'_0 = \Gamma_0; \quad \Gamma'_1 = \Gamma_1 - 1; \quad \Gamma'_2 = \Gamma_2 - 1.$$



Рис. 5.15

Як і раніше,

$$\Gamma'_0 - \Gamma'_1 + \Gamma'_2 = \Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2.$$

Повторивши цю операцію, врешті-решт прийдемо до нулькутника, у якого $\Gamma_0 = 1; \Gamma_1 = 0; \Gamma_2 = 1$ і, таким чином, $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2$. Оскільки значення виразу $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2$ при переході від вихідного клітинного розбиття до нулькутника ніде не змінювалось, то і для вихідного багатогранника має місце рівність $\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2 = 2$.

Сформулюємо теорему Гаусса — Бонне для компактних двовимірних ріманових многовидів. Нехай M^n — диференційовний многовид, у кожній карті якого задана позитивно визначена квадратична форма. В карті U з координатами (u^1, \dots, u^n) вона має вигляд

$$ds^2 = g_{ij}(U) du^i du^j,$$

а в карті V з координатами (v^1, \dots, v^n) —

$$ds^2 = \tilde{g}_{ij}(V) dv^i dv^j, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Якщо в області $U \cap V$ при переході від координат v^1, \dots, v^n до координат u^1, \dots, u^n коефіцієнти квадратичної форми змінюються за законом

$$\tilde{g}_{kl} = g_{ij} \frac{du^i}{dv^k} \frac{du^j}{dv^l}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \dots, n,$$

то многовид M^n називається рімановим многовидом. Зокрема, регулярна двовимірна поверхня F в E^3 є двовимірним рімановим многовидом. Площина Лобачевського з метрикою $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ також є двовимірним рімановим многовидом.

Для компактних двовимірних ріманових многовидів має місце така теорема.

Теорема 38 (Гаусса — Бонне):

$$\iint_F K d\sigma = 2\pi\chi,$$

де K — гауссова кривина многовиду F ; $d\sigma$ — елемент його площі.

Доведення. Нехай F — компактна поверхня. Тріангуляцією поверхні F назвемо скінченний набір областей $\{U_i\}_{i=1}^n$ (граней) на поверхні такий, що: 1) кожна область U_i гомеоморфна відкритому кругу, кожна границя ∂U_i гомеоморфна колу; $\bigcup_{i=1}^n \bar{U}_i = F$; 2) на кожній границі ∂U_i позначені три точки (вершини), що розбивають її на три замкнені дуги (ребра); 3) $U_i \cap U_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $\partial U_i \cap \partial U_j$ при $i \neq j$ — або порожня множина, або вершина (на кожній із границь), або ребро (на кожній із границь).

Тріангулюємо компактний (спочатку орієнтовний) двовимірний ріманів многовид. Области тріангуляції U_k виберемо настільки маленькими, щоб в них можна було задати півгеодезичну систему координат, а криві γ_k , які обмежують ці області, були кусково-регулярними (див. підрозд. 2.11). Застосуємо до кожної із областей U_k формулу Гаусса — Бонне. Одержимо

$$\int_{\gamma_k} K_g ds + \sum_i (\pi - \alpha_i^k) = 2\pi - \iint_{U_k} K d\sigma,$$

де K_g — геодезична кривина кривої γ_k ; α_i^k — кути при вершинах γ_k .

Підсумуємо ці рівності по k . Тоді в правій частині одержимо:

$$2\pi\Gamma_2 - \iint_F K d\sigma,$$

де Γ_2 — кількість областей U_k .

У лівій частині рівності перші доданки при підсумовуванні зникають, оскільки сторона багатокутника U_k є стороною іншого багатокутника з протилежною за знаком

геодезичною кривою. При підсумовуванні кутів α_i^k по i та k одержимо суму всіх кутів всіх областей. Оскільки сума кутів при одній вершині дорівнює 2π , то сума всіх кутів α_i^k дорівнює $2\pi\Gamma_0$, де Γ_0 — кількість вершин триангуляції.

Доданок π при підсумовуванні повторюється стільки разів, скільки ребер Γ_1 у триангуляції, причому цей доданок подвоєний, оскільки кожна сторона належить двом областям розбиття.

Як підсумок одержимо

$$2\pi\Gamma_1 - 2\pi\Gamma_0 = 2\pi\Gamma_2 - \iint_F K d\sigma.$$

Звідси

$$\iint_F K d\sigma = 2\pi(\Gamma_0 - \Gamma_1 + \Gamma_2) = 2\pi\chi,$$

де χ — ейлерова характеристика F .

У випадку розгляду неорієнтовного компактного двовимірного ріманового многовиду F перейдемо до двократного покриття \tilde{F} , яке є компактим орієнтовним рімановим многовидом. Ейлерові характеристики F та \tilde{F} зв'язані співвідношенням $\chi(F) = \frac{1}{2}\chi(\tilde{F})$. Звідси одержимо доказ теореми Гаусса — Бонне для неорієнтовного випадку.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аминов Ю. А. Дифференциальная геометрия и топология кривых. М.: Наука, 1987. 159 с.
2. Бакельман И. Я., Вернер А. Л., Кантор Б. Е. Введение в дифференциальную геометрию «в целом». М.: Наука, 1973. 440 с.
3. Бляшке В. Дифференциальная геометрия: Пер. с нем. М.: Объед. науч.-техн. изд-во, 1935. 330 с.
4. Борисенко О. А., Ушакова Л. М. Аналітична геометрія. Х.: Вид-во «Основа» при Харк. держ. ун-ті, 1993. 192 с.
5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе: Пер. с англ. М.: Мир, 1967. 251 с.
6. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия: Пер. с нем. М.: Наука, 1981. 344 с.
7. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука, 1985. 759 с.
8. Задачи по топологии / О. Я. Виро, О. А. Иванов, Н. Ю. Нецветаев, В. М. Харламов. Л.: Изд-во ЛГУ, 1988. 91 с.
9. Залгаллер В. А. Теория огибающих. М.: Наука, 1975. 103 с.
10. Зорич В. А. Математический анализ: В 2 ч. М.: Наука, 1984. Ч. 2. 640 с.
11. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968. 496 с.
12. Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 301 с.
13. Курант Р. Уравнения с частными производными: Пер. с англ. М.: Мир, 1964. 830 с.
14. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во МГУ, 1980. 439 с.
15. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974. 176 с.
16. Погорелов О. В. Геометрія: Підручник для 7—11 кл. К.: Рад. школа, 1991. 351 с.
17. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во МГУ, 1990. 384 с.
18. Понтрягин Л. С. Гладкие многообразия и их применения в теории гомотопий. М.: Наука, 1976. 173 с.
19. Понтрягин Л. С. Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1986. 118 с.
20. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. М.: Гос. техн. изд-во, 1956. 420 с.
21. Свитцер Р. М. Алгебраическая топология: Пер. с англ. М.: Наука, 1985. 605 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

А

- Александров О. Д. 164
- Александров П. С. 215
- Асимптотична лінія поверхні 127
- Асимптотичний напрямок у точці поверхні 126
- Астроїда 55

Б

- База топології 218
- Базис дуальний 191
- Баріцентричні координати 282
- Бельтрамі інтерпретація геометрії Лобачевського 188
- Бернуллі лемніска 19
- Бернштейн С. Н. 164
- Бісектор 212
- Бінормаль 24
- Больяї Янош 188

В

- Вейнгартена дериваційні формули 128—129
- Вектор 192
- Вектор кривини кривої 111
- Вектор-функція:
 - визначення 5
 - гладка 6
 - інтеграл визначений 7
 - невизначений 7
 - похідна 6
 - правила диференціювання 6
 - переходу до границі 6
- Відображення Вейнгартена 132
 - дифеоморфізм 46
 - диференційоване 286
 - ізометричне 98
 - — поверхні на себе 173
 - конформне 98
 - Ламберта 107
 - Меркатора 107
 - неперервне 7
 - — гомотопне 287
 - — накриття 276
 - степінь 286
 - топологічне 8, 233
 - точка регулярна 286
 - точки регулярне значення 286

Г

- Гармонічна функція 163
- Гаусс 117, 188

- Гауссова кривина поверхні 117
- Гвинтова лінія 39
- поверхня 73
- Гелікоїд 73
- Геодезична кривина кривої 140
- лінія 143
- — даної зв'язності 209
- Геодезичної лінії механічний зміст 145
- Геометрія Лобачевського 181
- Гільберт 189
- Головна нормаль 23
- Головні кривини в точці на поверхні 113
- напрямки в точці на поверхні 113
- Гомеоморфізм 46, 233
- Група гомологій поліедра 285
- рухів на площині Лобачевського 176
- Гук 196

Д

- Декарт 5
- Дериваційні формули Вейнгартена 128
- Дифеоморфізм 46
- Довжина кривої 24
- Дотична до кривої 14
- площина 78
- Дотичний репер 86
- Дотичної площини вектор нормалі 78
- Друга квадратична форма поверхні 109
- Дюпен 126

Е

- Евклідова метрика 219
- Евольвента 58
- Еволюта плоскої кривої 57
- Ейлер 116, 164
- Ейлерова характеристика клітинного комплексу 292
- Елементарна крива 9
- поверхня 70

Ж

- Жордан 5, 250

З

- Задача Плато 164
- Закон Гука 196

Зв'язність 205
— симетрична 205
— укладена з метрикою 205
Згорання тензорів 201
Зоргефрей 227

I

Ізометричне відображення по-
верхні на себе 98
Ізометричні поверхні 98
Ізотермічні координати 104
Інверсія 179
Інтегральна кривина поверхні
136
Інтерпретація площини Лобачев-
ського Бельтрамі 188
— — — Келі — Клейна 187
— — — Пуанкаре 187

K

Катеноїд 72
Квадратична форма поверхні дру-
га 109
— — — перша 88
Клейн 5, 185, 215
Клеро 158
Коваріантна похідна — див. По-
хідна коваріантна
Коефіцієнт інцидентності 290
Колмогоров А. М. 215
Комплекс симпліціальний — див.
Симпліціальний комплекс
Компоненти метричного тензора
коваріантні 131
— — — контраваріантні 131
Координати вектора коваріантні
192
— — контраваріантні 192
— — криволінійні 49
— тензора 192
Координатні лінії на поверхні 84
Крива вкладена 9, 252
— елементарна 9
— зашнурена 9, 253
— координатна криволінійної си-
стемі 46
— найкоротша 96
— Пеано 7
— проста замкнена 270
— сталої ширини 66
Кривина інтегральна 35
— кривої 27
— поверхні гауссова 117
— — інтегральна 136

— — нормальна в даному на-
прямку 112
— — середня 117
— Річчі 212
— секційна 213
Кривини поверхні нормальні 112
Крістоффеля символи —
див. Символи Крістоффеля
Кут між кривими на поверхні 91

L

Ламберт 107
Ланцюг n -вимірний:
визначення 284
гранця 284
цикла 284
Лаплас 163
Лема про укривну гомотопію 277
Лемні інші 242, 246
Лемніскаата Бернуллі 19
Лист Декарта 20
Листок Мебіуса 87, 215
Лінійчаста поверхня 71
Лінія асимптотична 127
— гвинтова 39
— геодезична 143
— кривини 124
— ланцюгова 60
Лобачевський М. І. 176, 181
Лобачевського площина —
див. Площина Лобачевського
Логарифмічна спіраль 54
Локсодрома 107
Лоренц 198

M

Мавпяче сідло 122
Максвелл 198
Матриця Якобі 47
Матрична форма евклідового
простору в криволінійних коор-
динатах 47
Мебіус 87, 215
Меньє 111
Меркартор 106
Метрика дискретна 220
— евклідова 219
— Мінковського 220
— псевдоріманова 199
— ріманова 199
Метричний простір 218
— — повний 96
Механічний зміст геодезичних 145
Мінімальна поверхня 162

Многовид 253
— аналітичний 255
— диференційовний 255, 286
— ріманів 294
Множина відкрита 9
— лінійно зв'язна 9
— — — аналітична 11
— — — регулярна 11

Н

Напрямний вектор дотичної до кривої на поверхні 78
Напрямок асимптотичний 126
— головний 113
Натуральні рівняння кривої 43—46
 n -вимірний ланцюг — див. Ланцюг n -вимірний
Немицький 217
Неорієнтована поверхня 83
Нормаль до кривої 23
— — поверхні 78
Нормальна кривина поверхні в даному напрямку 112
Нормальне векторне поле на поверхні 131
— зображення точки поверхні 82
Нормальний переріз поверхні 112

О

Обгортка сім'ї плоских кривих 61
Одностороння поверхня 88
Окіл точки 88
Оператор Лапласа 163
Опорна функція 64
Орієнтація індукована 34
— — кривої 30
Орієнтована поверхня 84
Особлива точка 17

П

Паралельне перенесення вектора 209
Параметризація кривої натуральна (природна) 26
— — регулярна 11
Паскаль 33
Пеано 7
Перетворення Лоренца 198
Перша квадратична форма поверхні 89
Петля:
— визначення 264
— добуток 265

— класів 266
Півгеодезична система координат 170
Плато 164
Площа області на поверхні 92
Площина Лобачевського в інтерпретації Келі — Клейна 187
— — — Пуанкаре 187
— — — псевдоевклідовому просторі 185
— Пеміцького 217
— стична (щільнодотична) 21
Пляшка Клейна 215
Поверхні ізометричні 98
— конформні 98
Поверхня аналітична 75
— вкладена 70, 253
— гвинтова 73
— елементарна 70
— зашурена 253
— лінійчаста 71
— мінімальна 162
— неорієнтована 83
— обертання 71
— одностороння 88
— орієнтована 83
— повна 96
— регулярна 75
— розгорнута 100
— Шерка 163
Повний метричний простір 96
Погорелов О. В. 102
Поле дотичних реперів 86
Поліедр 284
— розбиття 284
Полярна система координат на поверхні 172
Полярне перетворення 68
Полярний образ кривої відносно кола 68
Послідовність точок функціональна 223
Похідна коваріантна 208
— — векторного поля 208
— — нормального векторного поля в напрямку 131
Проекція Меркатора 106
Простий бівектор 212
Простір метричний — див. Метричний простір
— топологічний — див. Топологічний простір
Пряма Зоргенфрея 227
Псевдоріманова метрика 199
Псевдосфера 72, 175
Пуанкаре 81, 215

Р

- Рівняння Гаусса 139
- Максвелла 198
- Петерсона — Кодаці 139
- Якобі 170
- Ріманів многовид 294
- Ріманова метрика 199
- Річки 212
- Родріг 132
- Розгорнута поверхня 100
- Рух власний 98
- на поверхнях сталої кривини 173
- невласний 98

С

- Секційна кривина 213
- Середня кривина поверхні 117
- Символи Крістоффеля другого роду 129
- — першого роду 129
- Симплекс:
 - визначення 281
 - гранця 282
- Симпліціальний комплекс:
 - визначення 283
 - група k -вимірних гомологій 284
 - розбиття поледра 284
- Система координат півгеодезична 170
- — полярна на поверхні 172
- твірних групи 279
- Скалярна кривина 212
- Скалярний добуток векторів у псевдоевклідовому просторі 185
- Скрут кривої 36
- Стереографічна проекція 104
- Сума двох топологічних просторів 257
- Сфера з p ручками 71
- Сферичне відображення поверхні 81

Т

- Тензор 190
- деформації пружного тіла 195
- електромагнітного поля 197
- інерції 196
- координати 190
- кривини 210
- напруження 195
- Річчі 212
- скалярна кривина 212

- Теорема Александрова 164
- Бонне 139
- Борсука — Улама 280
- Брауера 243, 275
- Вейерштрасса 240
- Гаусса 136
- Гаусса — Бонне 167, 295
- — про сферичне відображення 134
- Дюпена 126
- Ейлера 293
- Жордана 250
- Клеро 158
- Менье 111
- основна теорії кривих 43
- Родріга 132
- Хопфа 287

Теорема інші (ненумеровані) 164, 215, 243

Теорема нумеровані:

- 1 — 11—12, 2 — 13, 3 — 15, 4 — 21, 5 — 28, 6 — 33, 7 — 35, 8 — 36, 9 (основна теорема теорії кривих) — 44, 10 — 61, 11 — 67, 12 — 76—77, 13 — 98, 14 — 103, 15 — 143, 16 — 151, 17 — 154, 18 — 169, 19 — 205, 20 — 217, 21 — 234, 22 — 239, 23 — 240, 24 — 243, 25 (Брауера) — 243, 26 — 248, 27 (Жордана) — 250, 28 — 257, 29 — 258, 30 (Брауера) — 275, 31 — 278, 32 (Борсука — Улама) — 280, 33 (Хопфа) — 287, 34 — 292, 35 — 292, 36 — 292, 37 (Ейлера) — 293, 38 (Гаусса — Бонне) — 295

Топологічне відображення 233

Топологічний простір:

- визначення 216
- група клітинних гомологій 291
- добуток шляхів 240
- ейлерова характеристика хаусдорфівського клітинного комплексу 292
- еквівалентність гомотопія 264
- топологічна 264
- зв'язний 240
- лінійно 245
- компактний 236
- компонентна зв'язності 244
- метризований 222
- множина відкрита 228
- замкнута 226
- замкнена 223
- незв'язний 240
- неперервне відображення 233

однозв'язний 271
оکیل точки 224
поліедр 284
фундаментальна група 223
хаусдорфів 238
— клітинний комплекс 289
шлях 245
Топологія антидискретна 216
— дискретна 216
— добутку 231
— індукована 228
— метрикою 238
— природна 216
Точка вузлова 19
— гіперболічна 119
— гранична 225
— еліптична 119
— зворотна другого роду 18
— першого роду 18
— ізольована 19, 226
— межова 225
— оکیل її 224
— омбілічна 119
— особлива 17
— параболічна 119
— регулярна 17
— розгалуження 75
— самостику 19
— сплющення 119
Трактриса 60
Тригранник Френе 41
Триангуляція поверхні 295

у

Універсальні співвідношення 279
Урисон П. С. 215

Ф

Фактор-топологія 228
Форма поверхні квадратична
див. Квадратична форма поверхні
Формула Ейлера 116
Френе тригранник 41
— формули 41
— формул кінематичне тлумачення 43
Функціональна послідовність точок 223
Функція опорна 64
— переходу 286

Х

Хаусдорф 238
Хопф 287

Ц

Центр кривини плоскої кривої 58
Циклоїда 60

Ш

Шерк 163

Щ

Щільнодотична площина 128

Я

Якобі 47, 170

З М І С Т

Передмова	3
Глава 1. Теорія кривих	5
1.1. Вектор-функції одного аргументу	5
1.2. Регулярні криві на площині та в просторі	7
1.3. Дотична до кривої	14
1.3.1. Особливі точки плоскої кривої	17
1.3.2. Стична площина кривої	21
1.4. Головна нормаль кривої	23
1.5. Довжина кривої	24
1.6. Кривина кривої	27
1.6.1. Механічна інтерпретація кривини кривої	30
1.6.2. Про знак кривини кривої	30
1.6.3. Зв'язок між кривиною і опуклістю плоскої кривої	32
1.6.4. Індукована орієнтація	34
1.6.5. Інтегральна кривина кривої	35
1.7. Скрут кривої	36
1.7.1. Формули Френе	41
1.7.2. Натуральні рівняння кривої	43
1.8. Криволінійні координати в n -вимірному просторі.	46
1.8.1. Визначення криволінійної регулярної системи координат	49
1.8.2. Метрична форма евклідового простору в криволінійних координатах	53
1.9. Еволюта плоскої кривої	57
1.9.1. Обгортка сім'ї плоских кривих	61
1.9.2. Опорна функція кривої	64
Глава 2. Теорія поверхонь	70
2.1. Способи задання поверхонь	73
2.2. Дотична площина поверхні	77
2.2.1. Сферичне відображення поверхні	81
2.2.2. Орієнтовані і неорієнтовані поверхні	83
2.3. Перша квадратична форма поверхні	88
2.3.1. Площа поверхні	92
2.3.2. Повні поверхні	96
2.4. Ізометричні і конформні відображення площини	98
2.4.1. Конформні відображення	102
2.4.2. Стереографічна проекція	104
2.4.3. Відображення Меркатора	106
2.4.4. Відображення Ламберта	107
2.5. Друга квадратична форма поверхні	108
2.5.1. Теорема Менье	111
2.5.2. Головні кривини і головні напрямки	113
2.5.3. Гауссова і середня кривини поверхні	117
2.6. Класифікація точок поверхні	119
2.6.1. Класифікація напрямків у точці	124
2.6.2. Асимптотичні напрямки	126
2.7. Дериваційні формули Вейнгартена	128
2.8. Сферичне зображення поверхні. Теорема Гаусса	133
2.9. Геодезична кривина кривої. Геодезична лінія	140
2.9.1. Механічний зміст геодезичних	145
2.9.2. Півгеодезична система координат	149
2.9.3. Друга варіація довжини кривої	155
2.10. Мінімальні поверхні	160

2.11. Теорема Гаусса — Бонне	164
2.12. Метрики сталої кривини	169
2.12.1. Рухи на поверхнях сталої кривини	173
2.12.2. Класифікація рухів на поверхні додатної сталої кривини	174
2.12.3. Псевдосфера	175
2.12.4. Рухи на площині Лобачевського	176
2.13. Геометрія Лобачевського	181
2.13.1. Інтерпретація Пуанкаре	181
2.13.2. Інші інтерпретації геометрії Лобачевського	184
2.13.3. Історія створення геометрії Лобачевського	188
Глава 3. Тензори	190
3.1. Приклади тензорів у фізиці і механіці	190
3.2. Алгебраїчні операції з тензорами	200
3.3. Диференціальні операції з тензорами. Коваріантне диференціювання	203
3.4. Тензор кривини	210
3.5. Кривина ріманового простору в двовимірних напрямках	212
Глава 4. Загальна топологія	214
4.1. Топологічні простори	215
4.1.1. База топології	218
4.1.2. Метричні простори	219
4.1.3. Замкнені множини топологічного простору	223
4.2. Внутрішні, граничні і межові точки підмножини топологічного простору	224
4.3. Способи задання топології. Індукована топологія	228
4.3.1. Фактор-топологія	228
4.3.2. Добуток топологічних просторів	230
4.4. Неперервні відображення	231
4.5. Компактні топологічні простори	236
4.5.1. Властивості компактних топологічних просторів	267
4.5.2. Замкнені підмножини компактного топологічного простору	237
4.6. Зв'язність	240
4.6.1. Властивості зв'язних компонент	244
4.6.2. Лінійна зв'язність	245
4.6.3. Властивості топології добутку і фактор-топології	248
4.7. Вкладені і занурені криві і поверхні. Теорема Жордана	250
4.7.1. Криві і поверхні	252
4.7.2. Многовиди	253
4.7.3. Двовимірні компактні многовиди	257
Глава 5. Основи алгебраїчної топології	262
5.1. Елементи теорії гомотопій	262
5.1.1. Фундаментальна група топологічного простору	265
5.1.2. Гомоморфізм фундаментальних груп при відображенні топологічних просторів	274
5.2. Накриття	276
5.3. Групи гомологій	281
5.3.1. Симпліціальний комплекс	281
5.3.2. Групи гомологій симпліціального комплексу	284
5.3.3. Степінь відображення	286
5.3.4. Клітинні гомології	289
5.4. Ейлерова характеристика	292
Список використаної літератури	297
Предметний покажчик	298