Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2016/2017**

Grundkurs Mathematik I

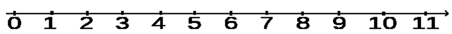
Vorlesung 10

Die Ordnung auf den natürlichen Zahlen

Definition 10.1. Man sagt, dass eine natürliche Zahl n *größergleich* einer natürlichen Zahl k ist, geschrieben

$$n \geq k,$$

wenn man von k aus durch endlichfaches Nachfolgernehmen zu n gelangt.



Auf dem nach rechts verlaufenden Zahlenstrahl bedeutet $n \geq k$, dass sich n weiter rechts als k befindet. Diese Intepretation gilt für alle reellen Zahlen.

Statt $n \geq k$ schreibt man auch $k \leq n$ (gesprochen kleinergleich). Die Schreibweise $n > k$ bedeutet $n \geq k$ und $n \neq k$.

Lemma 10.2. *Für natürliche Zahlen n, k gilt*

$$n \geq k$$

genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$n = k + m.$$

Beweis. Die Zahl m gibt an, wie oft man von k aus den Nachfolger nehmen muss, um zu n zu gelangen. □

Lemma 10.3. *Für die Größergleich-Relation in den natürlichen Zahlen gelten die folgenden Aussagen.*

(1) *Es ist*

$$a \geq 0$$

für alle $a \in \mathbb{N}$.

(2) *Es ist*

$$a = 0$$

oder

$$a \geq 1.$$

(3) *Bei*
$$a \geq b$$
gilt
$$a = b$$
oder
$$a \geq b + 1.$$

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung aus Lemma 10.2.

(1) Ist klar wegen $a = 0 + a$.
(2) Wir zeigen die Aussage $a = 0$ oder $a \geq 1$ für alle $a \in \mathbb{N}$ durch Induktion über a. Für $a = 0$ ist die Aussage klar. Sei also angenommen, dass die Aussage für ein bestimmtes a gelte. Dann ist $a = 0$ oder $a \geq 1$. Im ersten Fall ist dann $1 + a = 1 + 0 = 1$ und insbesondere $1 + a \geq 1$. Im zweiten Fall ist $a = b + 1$ mit einem $b \in \mathbb{N}$ und damit $a + 1 = (b + 1) + 1 = 1 + (b + 1)$.
(3) Wird ähnlich wie (2) bewiesen, siehe Aufgabe 10.4.

□

Satz 10.4. *Auf den natürlichen Zahlen ist durch die Größergleich-Relation $\geq$ eine totale Ordnung definiert.*

Beweis. Wir verwenden die Charakterisierung mit der Addition. Wegen $n = n + 0$ ist $n \geq n$. Wenn $k \geq \ell$ und $\ell \geq m$ ist, so bedeutet dies, dass es natürliche Zahlen a, b mit $k = \ell + a$ und $\ell = m + b$ gibt. Dann gilt insgesamt
$$k = \ell + a = (m + b) + a = m + (b + a)$$
und somit ist auch $k \geq m$. Aus $k \geq \ell$ und $\ell \geq k$ ergibt sich $k = \ell + a$ und $\ell = k + b$ und somit $k = k + (a + b)$. Dies ist nach der Abziehregel nur bei $a + b = 0$ möglich, und dies ist wiederum, da 0 kein Nachfolger ist, nur bei $a = b = 0$ möglich. Die Aussage $a \geq b$ oder $b \geq a$ beweisen wir durch Induktion über a (für jedes feste b), wobei der Induktionsanfang wegen $b \geq 0$ klar ist. Die Aussage gelte also für ein bestimmtes a. Wenn die erste Möglichkeit gilt, also $a \geq b$, so gilt wegen
$$a + 1 > a \geq b$$
erst recht $a + 1 \geq b$. Wenn die zweite Möglichkeit gilt, also $a \leq b$, so gibt es zwei Möglichkeiten. Bei $a = b$ ist $a + 1 \geq b$ und die Gesamtaussage gilt für $a + 1$. Andernfalls ist $a < b$ und somit ist nach Lemma 10.3 (3) $a + 1 \leq b$ und die Gesamtaussage gilt erneut. □

Wir begründen nun, dass die Ordnungsrelation mit der Addition und der Multiplikation verträglich ist.

Satz 10.5. *Es seien a, b, c natürliche Zahlen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Es ist*

$$a \geq b$$

genau dann, wenn

$$a + c \geq b + c$$

ist.

(2) *Aus*

$$a \geq b$$

und

$$c \geq d$$

folgt

$$a + c \geq b + d.$$

(3) *Aus*

$$a \geq b$$

folgt

$$ca \geq cb.$$

(4) *Aus*

$$a \geq b$$

und

$$c \geq d$$

folgt

$$ac \geq bd.$$

(5) *Aus*

$$c \geq 1$$

und

$$ca \geq cb.$$

folgt

$$a \geq b.$$

Beweis. (1) Wir beweisen die Aussage duch Induktion über c. Bei $c = 0$ ist die Aussage klar. Für den Induktionsschritt müssen wir lediglich zeigen, dass die Aussage für $c = 1$ gilt. Bei $a = b$ ist die Aussage klar, da der Nachfolger wohldefiniert ist. Bei $a > b$ ist nach Lemma 10.3 (3) $a \geq b + 1$ und somit

$$a + 1 > a \geq b + 1.$$

Dies zeigt zugleich, dass aus $a > b$ auch $a + 1 > b + 1$ folgt. Da die Ordnung total ist, folgt somit auch aus $a + 1 \geq b + 1$ die Beziehung $a \geq b$.

(2) Zweifache Anwendung von Teil (1) liefert

$$a + c \geq b + c \geq b + d,$$

so dass die Transitivität den Schluss ergibt.

(3) Wir führen Induktion nach c, die Fälle $c = 0, 1$ sind klar. Sei die Aussage für c bewiesen. Dann ist mit dem Distributivgesetz, der Induktionsvoraussetzung und Teil (2)

$$(c+1)a = ca + a \geq cb + b = (c+1)b.$$

(4) Aus den Voraussetzungen und Teil (3) ergibt sich

$$ac \geq bc \geq bd.$$

(5) Sei $c \geq 1$ und $a > b$. Dann ist $a \geq b+1$ und somit ist nach Teil (3)

$$ac \geq (b+1)c = bc + c \geq bc + 1,$$

also $ac > bc$.

□

Die folgende Eigenschaft heißt *Integritätseigenschaft*.

Lemma 10.6. *Das Produkt zweier natürlicher Zahlen ist nur dann gleich* 0, *wenn einer der Faktoren* 0 *ist.*

Beweis. Wenn die beiden Faktoren a, b nicht 0 sind, so ist

$$a, b \geq 1$$

nach Lemma 10.3 (2) und somit ist

$$a \cdot b \geq 1$$

nach Satz 10.5 (4). □

Die folgende Eigenschaft heißt *Kürzungsregel*.

Lemma 10.7. *Aus einer Gleichung* $n \cdot k = m \cdot k$ *mit* $k, m, n \in \mathbb{N}$ *und mit* $k \neq 0$ *folgt* $n = m$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 10.5 (5) und daraus, dass eine totale Ordnung vorliegt. □

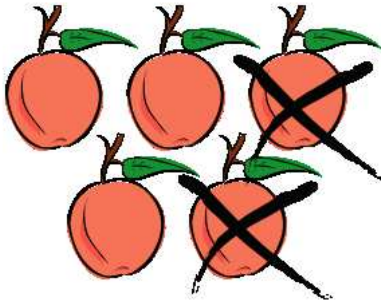
Maxima und Minima

Definition 10.8. Zu einer endlichen nichtleeren Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ heißt a das *Maximum* von T, wenn $a \in T$ ist und wenn $a \geq x$ für alle $x \in T$ gilt.

Definition 10.9. Zu einer nichtleeren Teilmenge $T \subseteq \mathbb{N}$ heißt b das *Minimum* von T, wenn $b \in T$ ist und wenn $b \leq x$ für alle $x \in T$ gilt.

Die leere Menge besitzt weder ein Maximum noch ein Minimum. Die Gesamtmenge $\mathbb{N}$ besitzt das Minimum 0 und kein Maximum.

Die Differenz von natürlichen Zahlen



Aus einer Menge mit a Elementen wird eine Teilmenge mit b Elementen ($b \leq a$) herausgenommen. Zurück bleibt eine Menge mit $a - b$ Elementen.

Definition 10.10. Für natürliche Zahlen

$$a \geq b$$

ist $a - b$ diejenige natürliche Zahl c für die

$$a = b + c$$

gilt. Sie heißt die *Differenz* zwischen a und b.

Man mache sich hier die Logik dieser Definition klar: Die Voraussetzung

$$a \geq b$$

bedeutet nach Lemma 10.2 die Existenz einer natürlichen Zahl c mit

$$a = b + c.$$

Dieses c ist aufgrund der Abziehregel durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Die Differenz gibt an, wie oft man von b aus den Nachfolger nehmen muss, um zu a zu gelangen. Die charakteristische Eigenschaft ist die Gleichheit

$$b + (a - b) = a.$$

Dabei ist $a - b$ die einzige Lösung für die Gleichung[1]

$$b + x = a.$$

Ferner ist $a - a = 0$. Für $a < b$ ist der Ausdruck $a - b$ innerhalb der natürlichen Zahlen nicht definiert. Da zu $a, b \in \mathbb{N}$ stets

$$a \geq b$$

oder

$$b \geq a$$

gilt, ist einer der Ausdrücke $a - b$ oder $b - a$ eine wohldefinierte natürliche Zahl. Oft nennt man auch diese Zahl, die sich ergibt, wenn man die beiden Zahlen richtig geordnet hat, die Differenz der beiden Zahlen.

[1]Das Gleichungskonzept werden wir später genauer besprechen.

Für die Differenz können wir einfach eine mengentheoretische Interpretation angeben.

Satz 10.11. *Es sei M eine endliche Menge mit m Elementen und es sei*

$$T \subseteq M$$

eine Teilmenge, die k Elemente besitze. Dann besitzt

$$M \setminus T$$

genau $m - k$ Elemente.

Beweis. Es ist

$$M = T \uplus (M \setminus T)$$

eine disjunkte Zerlegung. Daher gilt nach Satz 8.12

$$m = \#(M) = \#(T) + \#(M \setminus T) = k + \#(M \setminus T).$$

Somit erfüllt $\#(M \setminus T)$ die charakteristische Eigenschaft der Differenz und ist daher gleich $m - k$. □

Lemma 10.12.

(1) *Für natürliche Zahlen a, b, c mit*

$$a \geq b$$

ist

$$b + c + (a - b) = c + a.$$

Insbesondere ist $(b + c) - (a + c) = b - a$.

(2) *Für natürliche Zahlen a, b, c, d mit*

$$a \geq b$$

und

$$c \geq d$$

ist

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d).$$

Insbesondere ist bei $a \geq b$ stets $(a + c) - (b + c) = a - b$ und $(a + c) - b = (a - b) + c$.

(3) *Bei*

$$b + c \geq a \geq b$$

ist $c \geq a - b$ und es ist

$$c - (a - b) = (c + b) - a.$$

Beweis.

(1) Aus

$$b + (a - b) = a$$

ergibt sich direkt

$$b + c + (a - b) = c + a.$$

Der Zusatz ergibt sich aus der Eindeutigkeit der Differenz.

(2) Wegen Satz 10.5 (2) ist
$$a + c \geq b + d,$$
so dass der Ausdruck rechts einen Sinn ergibt. Die Rechnung
$$(b + d) + (a - b) + (c - d) \;=\; d + a + (c - d) \;=\; a + c$$
unter Verwendung der ersten Teils zeigt, dass $(a - b) + (c - d)$ die charakteristische Eigenschaft von $(a+c)-(b+d)$ erfüllt, also wegen der Eindeutigkeit damit übereinstimmt.

(3) Nach Teil (2) folgt aus $a \geq b$ und $b + c \geq a$ die Beziehung
$$(a - b) + ((b + c) - a) \;=\; a + b + c - (a + b) \;=\; c.$$
Beidseitiges Abziehen von $a - b$ ergibt
$$(b + c) - a \;=\; c - (a - b).$$

□

Die folgende Aussage ist das Distributivgesetz für die Differenz.

Lemma 10.13. *Es seien a, b, c natürliche Zahlen mit $a \geq b$. Dann ist*
$$c(a - b) \;=\; ca - cb.$$

Beweis. Nach Satz 10.5 ist mit $a \geq b$ auch $ca \geq cb$, so dass $ca - cb$ wohldefiniert ist. Es ist
$$a \;=\; (a - b) + b$$
und daher ist
$$ca \;=\; c((a - b) + b) \;=\; c(a - b) + cb.$$
Also ist
$$c(a - b) \;=\; ca - cb.$$

□

Abbildungsverzeichnis