Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2023**

Grundkurs Mathematik II

Vorlesung 53

Die rationalen Exponentialfunktionen

Zu einer positiven Zahl $b \in K$ aus einem angeordneten Körper K haben wir in der 27. Vorlesung die ganzzahlige Exponentialfunktion $\mathbb{Z} \to K$, $n \mapsto b^n$, zur Basis b besprochen, die einer ganzen Zahl n den Wert b^n zuordnet. Die entscheidende Gesetzmäßigkeit ist dabei (vergleiche Lemma 27.8 (4))

$$b^{m+n} = b^m \cdot b^n .$$

Für den Fall $K = \mathbb{R}$ kann man den Definitionsbereich wesentlich erweitern, und zwar in zwei Schritten. Wir besprechen zunächst die Ausdehnung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ und anschließend die Ausdehnung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$. Ausgangspunkt ist die Bezeichnungsweise $b^{1/2}$ für $\sqrt{b}$, die auf den ersten Blick willkürlich erscheinen mag, die sich aber durch die Beziehung

$$b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} = b = b^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}$$

überzeugend rechtfertigen lässt.

Definition 53.1. Zu $b \in \mathbb{R}_+$ und $q \in \mathbb{Q}$ mit $q = \frac{r}{s}$ $(s > 0)$ setzt man

$$b^q = b^{\frac{r}{s}} := \sqrt[s]{b^r} .$$

Insbesondere setzt man

$$b^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{b} .$$

Bei $s = 1$ stimmt diese Schreibweise mit den früher gemachten Festlegungen überein. Die Existenz und Eindeutigkeit der Zahlen $\sqrt[s]{b^r}$ (wenn also Zähler und Nenner fixiert sind) ist durch Satz 48.7 gesichert (insbesondere sind dies stets positive Zahlen). Auf dieser Eindeutigkeit beruht auch das Potenzprinzip, das wir in der 48. Vorlesung erwähnt haben: Zwei positive reelle Zahlen stimmen bereits dann überein, wenn eine gewisse gleichnamige Potenz von ihnen übereinstimmt. Eine weitere Anwendung dieses Prinzips ist die Wohldefiniertheit der Definition von b^q. Man muss sich nämlich noch klar machen, dass bei verschiedenen Bruchdarstellungen

$$q = \frac{r}{s} = \frac{t}{u}$$

das gleiche herauskommt. Dies ergibt sich aus

$$\sqrt[s]{b^r} = \sqrt[su]{b^{ru}} = \sqrt[su]{b^{st}} = \sqrt[u]{b^t} .$$

Dabei gilt die erste Gleichung, da die su-te Potenz (nach Lemma 11.8 (2)) auch links b^{ru} ergibt (entsprechend für die rechte Gleichung).

Statt mit $\sqrt[s]{b^r}$ kann man genauso gut mit $\left(\sqrt[s]{b}\right)^r$ arbeiten. Die s-te Potenz von $\sqrt[s]{b^r}$ ist natürlich b^r. Es ist aber nach Lemma 23.12 (4) auch

$$\left(\left(\sqrt[s]{b}\right)^r\right)^s = \left(\sqrt[s]{b}\right)^{r\cdot s} = \left(\left(\sqrt[s]{b}\right)^s\right)^r = b^r.$$

Lemma 53.2. *Es sei b eine positive reelle Zahl. Dann besitzt die Funktion*

$$f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R},\, q \longmapsto b^q,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{q+q'} = b^q \cdot b^{q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(2) *Es ist $b^{-q} = \frac{1}{b^q}$.*
(3) *Für $b > 1$ und $q > 0$ ist $b^q > 1$.*
(4) *Für $b < 1$ und $q > 0$ ist $b^q < 1$.*
(5) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*
(6) *Für $b < 1$ ist f streng fallend.*
(7) *Es ist $(b^q)^{q'} = b^{q\cdot q'}$ für alle $q, q' \in \mathbb{Q}$.*
(8) *Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^q = a^q \cdot b^q$.*

Beweis. (1) Wir können annehmen, dass die Exponenten mit einem gemeinsamen Nenner vorliegen, also $q = \frac{r}{s}$ und $q' = \frac{t}{s}$. Dann ist unter Verwendung von Lemma 27.8 (4) (angewendet für die Basis $\sqrt[s]{b}$ und die ganzzahligen Exponenten r und t)

$$\begin{aligned} b^q \cdot b^{q'} &= b^{\frac{r}{s}} \cdot b^{\frac{t}{s}} \\ &= \left(\sqrt[s]{b}\right)^r \left(\sqrt[s]{b}\right)^t \\ &= \left(\sqrt[s]{b}\right)^{r+t} \\ &= b^{\frac{r+t}{s}} \\ &= b^{q+q'}. \end{aligned}$$

(2) Sei $q = \frac{r}{s}$. Dann ist unter Verwendung von Lemma 27.8 (5)

$$b^{-q} = b^{-\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[s]{b}\right)^{-r} = \frac{1}{\left(\sqrt[s]{b}\right)^r} = \frac{1}{b^{\frac{r}{s}}} = \frac{1}{b^q}.$$

(3) Sei

$$q = \frac{r}{s} > 0,$$

also $r, s \geq 1$. Mit $b > 1$ ist nach Lemma 19.13 (8) auch $b^r > 1$ und davon ist auch die s-te Wurzel > 1.

(4) Wird ähnlich wie (3) begründet.

(5) Dies folgt aus (1) und (3). Es sei nämlich $q' > q$. Dann ist

$$q' = q + u$$

mit $u > 0$. Dann ist

$$b^{q'} = b^{q+u} = b^q b^u > b^q.$$

(6) Wird ähnlich wie (5) begründet.

(7) Sei $q = \frac{r}{s}$ und $q' = \frac{t}{u}$. Dann ist unter Verwendung von Lemma 23.12 (4) und Satz 48.7 (1)

$$\begin{aligned}(b^q)^{q'} &= \left(b^{\frac{r}{s}}\right)^{\frac{t}{u}} \\ &= \left(\sqrt[s]{b}^r\right)^{\frac{t}{u}} \\ &= \sqrt[u]{\left(\sqrt[s]{b}^r\right)^t} \\ &= \sqrt[u]{\sqrt[s]{b}^{rt}} \\ &= \sqrt[u]{\sqrt[s]{b^{rt}}} \\ &= \sqrt[us]{b^{rt}} \\ &= b^{\frac{rt}{us}} \\ &= b^{qq'}.\end{aligned}$$

(8) Mit

$$q = \frac{r}{s}$$

ist unter Verwendung von Satz 48.7 (2) und Lemma 23.12 (5)

$$\begin{aligned}(ab)^q &= (ab)^{\frac{r}{s}} \\ &= \left(\sqrt[s]{ab}\right)^r \\ &= \left(\sqrt[s]{a}\sqrt[s]{b}\right)^r \\ &= \sqrt[s]{a}^r \sqrt[s]{b}^r \\ &= a^q b^q.\end{aligned}$$

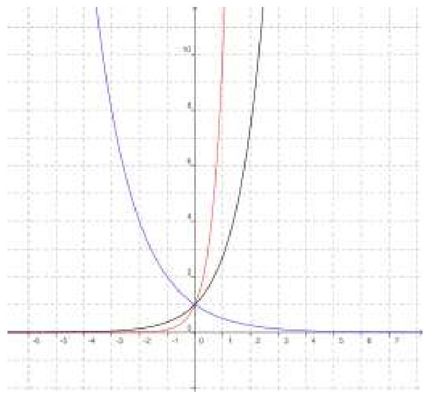
□

Diese Eigenschaften sind für ganzzahlige Argumente aus Lemma 27.8 und aus Lemma 27.9 vertraut. Die erste Eigenschaft nennt man auch die *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion*. Sie bedeutet, dass zu jedem $b \in \mathbb{R}_+$ ein Gruppenhomomorphismus

$$(\mathbb{Q}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1),\ q \longmapsto b^q,$$

vorliegt. Für $b \neq 1$ sind diese nach Satz 53.2 (6) bzw. Satz 53.2 (7) und . injektiv.

Die reellen Exponentialfunktionen



Die Exponentialfunktionen für die Basen $b = 10, \frac{1}{2}$ und e.

Die oben auf den rationalen Zahlen definierten Exponentialfunktionen besitzen eine Fortsetzung auf die reellen Zahlen, die entsprechend mit

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto b^x,$$

bezeichnet wird. Wie ist diese zu definieren, welche Bedeutung soll beispielsweise der Ausdruck

$$2^{\sqrt{3}}$$

bekommen? Die richtige Idee ist hier, den Exponenten $\sqrt{3}$ durch eine rationale Folge q_n zu approximieren (etwa durch die Dezimalbruchfolge oder eine Heron-Folge) und dann die Folge 2^{q_n} von Potenzen mit rationalen Exponenten zu betrachten, die wir im ersten Teil der Vorlesung eingeführt haben. Wenn diese Folge konvergiert, so hat man einen sinnvollen Kandidaten für $2^{\sqrt{3}}$. Dieser Ansatz erfordert aber, dass man zeigen kann, dass dieser Grenzwert unabhängig von der gewählten Folge q_n ist. Dazu dient das folgende Lemma.

Lemma 53.3. *Es sei*

$$f\colon\, \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion. Dann ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ und jede rationale streng wachsende Folge $x_n \in \mathbb{Q}$, $x_n \leq x$, die gegen x konvergiert, die Folge $f(x_n)$ konvergent mit einem nur von x abhängigen Grenzwert.

Beweis. Ohne Einschränkung sei f wachsend. Es sei x_n eine rationale streng wachsende Folge, die gegen x konvergiert. Dann ist auch $f(x_n)$ eine wachsende Folge. Es sei $z \in \mathbb{Q}$ mit $z \geq x \geq x_n$. Dann ist auch

$$f(z) \geq f(x_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Bildfolge ist also wachsend und nach oben beschränkt, daher besitzt sie nach Korollar 47.3 einen Grenzwert in $\mathbb{R}$. Es sei y_n eine weitere rationale streng wachsende Folge, die gegen x konvergiert. Dann gibt es zu jedem n ein m mit

$$x_n \leq y_m.$$

Wegen der Monotonie von f überträgt sich dies auf die Bildfolgen, d.h. es ist

$$f(x_n) \leq f(y_m)$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$$

und wegen der Symmetrie der Situation konvergieren beide Folgen gegen den gleichen Grenzwert. $\square$

Die vorstehende Situation bedeutet, dass man für Zahlen x durch die Festlegung

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

mit einer beliebigen rationalen streng wachsenden Folge x_n, die gegen x konvergiert, eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion erhält. Da wir für f nicht die Stetigkeit voraussetzen, kann sich für rationale Zahlen x der Funktionswert bei dieser Konstruktion sogar ändern.

Dieses Fortsetzungsverfahren wenden wir auf die Exponentialfunktion an, d.h. für x ist

$$b^x := \lim_{n\to\infty} b^{x_n}$$

mit einer beliebigen streng wachsenden Folge aus rationalen Zahlen x_n, die gegen x konvergiert. Für rationale Zahlen ändert sich dabei der Wert nicht, da die rationalen Exponentialfunktionen stetig sind. Dies ergibt sich genau so wie die Stetigkeit der auf $\mathbb{R}$ definierten Exponentialfunktionen weiter unten aus der Funktionalgleichung und der Monotonie, siehe Aufgabe 53.5.

Definition 53.4. Es sei b eine positive reelle Zahl. Die Funktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

heißt *Exponentialfunktion* zur *Basis* b.

Die in Satz 53.2 gezeigten Eigenschaften übertragen sich auf die reellen Zahlen.

Lemma 53.5. *Es sei b eine positive reelle ZahlDann besitzt die Exponentialfunktion*

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.*
(2) *Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.*
(3) *Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.*
(4) *Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.*
(5) *Für $b > 1$ ist f streng wachsend.*

(6) *Für* $b < 1$ *ist* f *streng fallend.*
(7) *Es ist* $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ *für alle* $x, x' \in \mathbb{R}$.
(8) *Für* $a \in \mathbb{R}_+$ *ist* $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

Beweis. Wir beweisen (1), die anderen Eigenschaften ergeben sich ähnlich, siehe Aufgabe 53.16. Es sei x_n eine wachsende rationale Folge, die gegen x konvergiert, und y_n eine wachsende Folge, die gegen x' konvergiert. Dann ist nach Lemma 44.11 (1) die Folge $x_n + y_n$ eine wachsende rationale Folge, die gegen $x + x'$ konvergiert. Somit ist unter Verwendung der rationalen Funktionalgleichung und von Lemma 44.11 (2)

$$\begin{aligned} b^{x+x'} &= \lim_{n\to\infty} b^{x_n+y_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(b^{x_n} \cdot b^{y_n}\right) \\ &= \left(\lim_{n\to\infty} b^{x_n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} b^{y_n}\right) \\ &= b^x b^{x'}. \end{aligned}$$

□

Satz 53.6. *Es sei* b *eine positive reelle ZahlDann ist die Exponentialfunktion*

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto b^x,$$

stetig.

Beweis. Sei $b > 1$. Wir zeigen zuerst die Stetigkeit im Nullpunkt. Da nach Aufgabe . die Folge $\sqrt[n]{b}$, $n \in \mathbb{N}$, gegen 1 konvergiert, und da die Exponentialfunktion wachsend ist, gibt es zu jedem positiven ϵ ein positives δ mit der Eigenschaft, dass aus

$$|x| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$|1 - b^x| \leq \epsilon$$

folgt. Es sei nun x beliebig und ϵ vorgegeben. Wir betrachten ein δ, das zu

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{b^x}$$

die Stetigkeit im Nullpunkt sichert. Dann gilt unter Verwendung von Satz 53.5 (1) für x' mit

$$|x' - x| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$\left|b^x - b^{x'}\right| = \left|b^x\left(1 - b^{x'-x}\right)\right| = |b^x| \cdot \left|1 - b^{x'-x}\right| \leq b^x \cdot \frac{\epsilon}{b^x} = \epsilon.$$

□

Satz 53.7. *Es sei* $b \neq 1$ *eine positive reelle ZahlDann ist die Exponentialfunktion*

$$f \colon (\mathbb{R}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1),\ x \longmapsto b^x,$$

ein bijektiver Gruppenhomomorphismus.

Beweis. Die Homomorphieeigenschaft folgt direkt aus der Funktionalgleichung, die Injektivität folgt aus der der Monotonieeigenschaft in Zusammenhang mit .. Zum Nachweis der Surjektivität sei $y \in \mathbb{R}_+$ vorgegeben. Nach Lemma 27.10 gibt es ganze Zahlen n, m mit

$$b^n \leq y \leq b^m.$$

Aufgrund des Zwischenwertsatzes, den wir wegen der in Satz 53.6 bewiesenen Stetigkeit der Exponentialfunktionen anwenden können, gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit

$$b^x = y,$$

was die Surjektivität bedeutet. □

Eine besonders wichtige Exponentialfunktion ergibt sich, wenn man als Basis die Eulersche Zahl e nimmt, die wir als

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eingeführt haben. In Bemerkung 48.13 haben wir erwähnt, dass diese Zahl mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

übereinstimmt. Für diese Exponentialfunktion gibt es ebenfalls eine weitere Darstellung, die sich an dieser Reihe orientiert, die Darstellung als Potenzreihe. Diese Übereinstimmung können wir hier nicht beweisen.

Satz 53.8. *Für die Exponentialfunktion zur Basis e gilt die Darstellung*

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Eine Besonderheit dieser Funktion ist, dass sie mit ihrer Ableitung übereinstimmt. Die Steigung der Tangenten an einem Punkt des Graphen stimmt also stets mit dem Funktionswert überein. Der Satz bedeutet insbesondere, dass die Reihe für jedes x konvergiert, wobei diese Konvergenz im Allgemeinen recht schnell ist.

Logarithmen

Zu $b \neq 1$ sind die reellen Exponentialfunktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+,\ x \longmapsto b^x,$$

stetig, streng wachsend oder streng fallend und bijektiv. Wir betrachten die Umkehrfunktionen dazu.

Definition 53.9. Zu einer positiven reellen Zahl $b > 0$, $b \neq 1$, wird der *Logarithmus zur Basis b* als Umkehrfunktion zur reellen Exponentialfunktion zur Basis b definiert. Der Wert dieser Funktion an der Stelle $x \in \mathbb{R}_+$ wird mit

$$\log_b x$$

bezeichnet.

Aus der Umkehreigenschaft ergeben sich direkt die Beziehungen

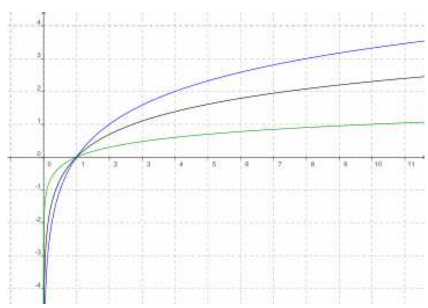
$$\log_b b^x = x$$

und

$$b^{\log_b y} = y.$$

Der Logarithmus zur Basis e wird auch als *natürlicher Logarithmus*, geschrieben $\ln x$, bezeichnet. Die Logarithmen sind nach Satz 53.6 und Satz 52.11 stetige, bijektive Abbildungen

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \log_b x.$$



Logarithmen zu verschiedenen Basen

Die folgenden Regeln ergeben sich direkt aus der Definition der Logarithmen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen.

Lemma 53.10. *Die Logarithmen zur Basis b erfüllen die folgenden Rechenregeln.*

(1) *Es gilt* $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.
(2) *Es gilt* $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ *für* $u \in \mathbb{R}$.
(3) *Es gilt*

$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 53.27. □

Bemerkung 53.11. Das Prinzip des Rechenschiebers beruht auf den Logarithmen. Man möchte die reellen Zahlen x und y miteinander multiplizieren. Man berechnet zu einer fixierten Basis b die zugehörigen Logarithmen, also $r = \log_b x$ und $s = \log_b y$. Dann addiert man $r + s$ und berechnet davon den

Wert der Exponentialfunktion zur Basis b. Dies ist nach Lemma 53.10 (1) gleich

$$b^{r+s} = b^{\log_b x + \log_b y} = b^{\log_b xy} = xy,$$

also das gesuchte Produkt. Die Berechnungen des Logarithmus und der Exponentialfunktion können dabei durch hinreichend genaue Wertetabellen oder eben durch eine logarithmische Skala auf dem Rechenschieber ersetzt werden. Die Addition der Logarithmen wird dabei mechanisch durch das Verschieben der beweglichen Skala bewerkstelligt. Auf einer logarithmischen Skala werden die Zahlen zwischen 1 und 10 auf einer Strecke so angeordnet, dass die (auf der üblichen Skala) Stelle $\log_{10} y$ mit y bezeichnet wird. Die Skala ergibt sich auch, wenn man auf dem Graphen des Logarithmus die Werte an den Stellen zwischen 1 und 10 markiert und diese Punkte auf die y-Achse projiziert.

Ein Rechenschieber kann eine Multiplikation durch eine vektorielle Addition (verschieben) ausführen, da die Zahlen logarithmisch angeordnet sind.

Abbildungsverzeichnis