

5  
4  
3  
2  
1  
0  
9  
8  
7  
6  
5  
4  
3  
2  
1  
0

早 稻 田 大 學  
理 工 學 部 紀 要

第 十 號  
昭 和 九 年 三 月

MEMOIRS  
OF THE  
FACULTY OF SCIENCE & ENGINEERING,  
WASEDA UNIVERSITY.

TÔKYÔ, JAPAN.

No. 10.  
1934.

*Department of Mechanical Engineering,  
Waseda University.*

PUBLISHED IN WASEDA UNIVERSITY.

始



**EDITING COMMITTEE.**

- 
- TADAOKI YAMAMOTO, *Kôgakuhakusi*, . . . . . *Professor of Electrical Engineering.*  
*Dean of the Faculty.*
- IWAO OKI, *Kôgakuhakusi*, . . . . . *Professor of Mechanical Engineering.*
- IWARI KIKKAWA, *Kôgakuhakusi*, . . . . . *Professor of Mine Engineering.*
- TACHÛ NAITÔ, *Kôgakuhakusi*, . . . . . *Professor of Architecture.*
- KIÛHEI KOBAYASHI, *Kôgakuhakusi*, . . . . . *Professor of Applied Chemistry.*

All communications relating to this Memoirs are to be addressed to the Dean of the Faculty.



早 稻 田 大 學  
理 工 學 部 紀 要

第 十 號

昭 和 九 年 三 月

**MEMOIRS**

OF THE

**FACULTY OF SCIENCE & ENGINEERING,  
WASEDA UNIVERSITY.**

TÔKYÔ, JAPAN.

No. 10.

1934.

*Department of Mechanical Engineering,  
Waseda University.*

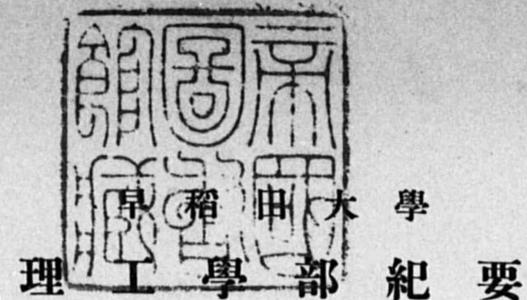


PUBLISHED IN WASEDA UNIVERSITY

EDITING COMMITTEE.

- TADAOKI YAMAMOTO, *Kôgakuhakushi*, . . . . . *Professor of Electrical Engineering.*  
*Dean of the Faculty.*
- IWAO OKI, *Kôgakuhakushi*, . . . . . *Professor of Mechanical Engineering.*
- IWARI KIKKAWA, *Kôgakuhakushi*, . . . . . *Professor of Mine Engineering.*
- TACHÛ NAITÔ, *Kôgakuhakushi*, . . . . . *Professor of Architecture.*
- KIÛHEI KOBAYASHI, *Kôgakuhakushi*, . . . . . *Professor of Applied Chemistry.*

All communications relating to this Memoirs are to be addressed to the Dean of the Faculty.



第 十 號

昭 和 九 年 三 月

MEMOIRS  
 OF THE  
 FACULTY OF SCIENCE & ENGINEERING,  
 WASEDA UNIVERSITY.

TÔKYÔ, JAPAN.

No. 10.

1934.

*Department of Mechanical Engineering,  
Waseda University.*



PUBLISHED IN WASEDA UNIVERSITY

## Introductory Note.

The following pages contain one original scientific paper, and furthermore, in abridged form, important scientific papers bearing on mechanical engineering published during 1925-1933. All articles included in this volume have been previously published in other standard scientific journals or formed the contents of dissertation.

As indicated by the title of these memoirs, the abridged papers included are designed to present essential features and outlines of the originals. Readers interested in any special articles are referred to the original for fuller information and more complete data.

We acknowledge our indebtedness to the following journals for the original publications :

Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan.

Journal of the Fuel Society of Japan.

Proceedings of the World Engineering Congress, Tôkyô, 1929.

Kinzoku no Kenkyû (Journal of the Metal Institute), Sendai.

Department of Mechanical Engineering,  
Faculty of Science and Engineering,  
Waseda University.

Waseda, Tôkyô, Japan.

March, 1934.

## CONTENTS.

—•••••

	PAGE
<b>ORIGINAL PAPER.</b>	
Über ebene Spannungszustände in Metallen unmittelbar vor dem Zerreißbruch. . . . . By Hiroshi Yamanouti. . . . .	1
<b>ABRIDGED PAPERS.</b>	
<b>1925</b>	
On the Detonation in Internal Combustion Engines. . . . . By Torajirô Watanabe. . . . .	43
<b>1926</b>	
On the Influence of Crystal Growth of Mild Steel upon its Mechanical Properties. . . . . By Kiyoshi Yokota. . . . .	44
<b>1927</b>	
Two Dimensional Jets Deflected by Wall Surfaces. . . . . By Yôkichi Matsumoto. . . . .	45
<b>1928</b>	
On the Spheroidization of Carbides in Alloy Steels. . . . . By Kiyoshi Yokota. . . . .	46
The Effects of Heating Temperature and Time, and also Aging upon the Internal Stresses in a Cold Worked Mild Steel. . . . . By Eitarô Murata. . . . .	47
A Thermodynamical Study on the Discharge of Gas through Orifices and Nozzles. . . . . By Torajirô Watanabe. . . . .	48
Movement of the Irrotational Vortex in a Limited Field (First Report: On Flow in a Limited Field). . . . . By Sadatosi Ihara. . . . .	49
On the Potential Flows past Curved Wall Surfaces. . . . . By Yôkichi Matsumoto. Minoru Nakano. . . . .	50
<b>1929</b>	
On Flow in a Limited Field (Second Report). . . . . By Sadatosi Ihara. . . . .	51

	PAGE
Some Studies of Stress Distribution in the Thick Cylinder under the Internal Pressure. . . . .	By Tokuzō Suzuki. . . 52
On Flow in a Limited Field Accompanied by a Free Vortex in its Region. . . . .	By Sadatosi Ihara. . . 54
An Empirical Formula for the Discharge over Rectangular Weirs with Complete or Slightly Incomplete Contractions. . . . .	By Iwao Oki. . . . . 55
On Flow and Vortex in a Limited Field and its Application to Some Engineering Problems. . . . .	By Sadatosi Ihara. . . 60
<b>1930</b>	
On the Materials of the Brake-Shoe in Germany. . . . .	By Hiroshi Yamanouti. . 61
<b>1931</b>	
On the Plastic Stress Distribution in the Material under Compression, Rolling and Drawing (In Two Dimensional Solution). . . . .	By Hiroshi Yamanouti. . 62
<b>1932</b>	
On the Experiment of Cylinder Cooling. . . . .	By Torajirō Watanabe. . 63
The Stress Distribution in the Plate having Single and Several Rows of Holes in Tension. . . . .	By Hiroshi Yamanouti. . 64
Some Considerations of a Triangular Notch with Incomplete Contractions. . . . .	By Iwao Oki. . . . . 65
Discharge Coefficient for Pipe Orifice. . . . .	By Iwao Oki. . . . . 65
<b>1933</b>	
Une Petite Note sur le Mouvement d'un Tourbillon Irrotationnel dans un Espace en Formé de Secteur de Cercle. . . . .	By Sadatosi Ihara. . . 66
Relation of the Size of the Test Specimens on the Brinell Hardness of Metals. . . . .	By Hiroshi Yamanouti. . 68

**ORIGINAL PAPER.**



## Über ebene Spannungszustände in Metallen unmittelbar vor dem Zerreißbruch.\*

VON

Prof. Hirosi Yamanouti, *Kōgakusi.*

- I. Einleitung.
  - II. Betrachtungen über die Verfestigung und den Verformungszustand :
    - A. Statische Betrachtung über Verfestigung.
    - B. Das Verhältnis des Gefügeverformungs- und Spannungszustandes im eingeschnürten Grundgebiete des Stabes.
  - III. Die Bedingungen für den ebenen Spannungszustand.
  - IV. Die rechnerische Lösung :
    - A. Die Gleichung der Konturkurve des eingeschnürten Zugstabes:
      - (1) Die Funktion der komplexen Veränderlichen.
      - (2) Die Hauptspannungstrajektorien.
      - (3) Beziehungen zwischen der Konturkurve des eingeschnürten Stabes und den Hauptspannungstrajektorien.
    - B. Die Gleichungen der Spannungskomponenten bei konstantem  $K$ .
    - C. Gleichungen der Spannungen mit Berücksichtigung der Verfestigungsfähigkeit:
      - (1) Die Spannungen über der engsten Querebene.
      - (2) Die Spannungen über der Konturkurve des Grundteils.
      - (3) Die Spannungen über anderen Querebene im Grundteil.
  - V. Rechnerische Ergebnisse und Teilversuche :
    - 1.—7. Versuche mit verschiedenen Stoffen.
- Zusammenfassung.
- Nachtrag : Über die rechnerische Lösung.

---

\* Vorgetragen bei der 7. Hauptversammlung des Vereines Mechanischen Ingenieure am 3. April 1930 in Tōkyō und in der Zeitschrift des Vereines Bd. 34, Nr. 165, Jan. 1931, S. 1—20 auf Japanisch gedruckt.

## I. Einleitung.

Die plastisch-mechanischen Eigenschaften hochschmelzender Metalle und Legierungen und deren Verhalten beim Zerreißen wurde bereits statisch, metallographisch und auch unter Verwendung von Röntgenstrahlen experimentell in vielen hundert Fällen untersucht. Die ältesten Versuche stammten wohl von Prof. Kirkaldy aus dem Jahre 1862. Aber die Frage über die Spannungszustände im Augenblick des Bruches nach grösseren vorangegangenen plastischen Verformungen ist bisher wenig erforscht worden.

Durch Beobachtung der bleibenden Verformungs- und Brucheigenschaften beim praktischen Zerreißversuch und vergleichende Untersuchung des in der einschlägigen Literatur enthaltenen Materials ergab sich die Möglichkeit, die Frage der Spannungsverteilung über dem engsten Querschnitt und dessen Umgebung näherungsweise mathematisch zu behandeln und damit die Brucherscheinung zu klären.

Eigene Versuche wurden im Inst. für angewandte Mechanik der Universität Göttingen und Inst. der Maschinenbauakademie der Waseda Universität, Tōkyō, durchgeführt. Ich bin Herrn Prof. Dr. Dr.-Ing. L. Prandtl und Herrn Prof. Dr. I. Oki zu grossem Danke verpflichtet für die lebenswürdige Unterstützung. Ebenso habe ich Herrn Prof. Dr. A. Nadai, Dr. G. Mesmer, Dr. W. Stieber und den anderen Herren in den beiden Instituten der Universitäten Göttingen und Waseda herzlich zu danken für die freundliche Hilfe während der Arbeit.

## II. Betrachtungen über die Verfestigung und den Verformungszustand.

Sowohl bei gewöhnlicher als auch bei sehr langsamer Durchführung des Zugversuches in einer Festigkeitsmaschine mit einem zylindrischen oder prismatischen Stab aus einem dehnbaren Metall, verformen sich die einzelnen Kristalle in gleichartiger Weise anfangs elastisch, dann plastisch, im weiteren Verlaufe bildet sich eine örtliche Einschnürung aus, bei der schliesslich der Bruch erfolgt. Nach Ausbildung der örtlichen Einschnürung wurde das Material in diesem Gebiete infolge der dadurch bedingten Kaltverformung stärker verfestigt. Es bestand ausserdem die Vermutung, dass der im Einschnürgebiete auftretende

Spannungszustand sich nicht gleichmässig über den Querschnitt verteile, sondern dass, ähnlich wie bei einem flachen Kerb, die Spannungen sich nach Grösse und Richtung über den Querschnitt hin ändern.

### A. Statische Betrachtung über die Verfestigung.

Die wahre Spannung ( $\sigma$ )—spezifische Verformungs ( $v$ ) Kurve der meisten Metalle in festem Zustand zeigt einen Verlauf nach Abb. 1.

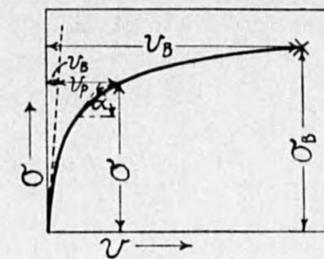


Abb. 1.  
Schematische  
Spannungs-Verformungskurve.

Aus diesem Verlauf des Zugversuches erkennen wir folgende Grössen:

- $\sigma$  die mittlere Spannung über dem tatsächlichen Querschnitt,
- $v$  die hervorgerufene Verformung, die sich zusammensetzt aus:
  - $v_e$  dem elastischen Anteil und
  - $v_p$  dem plastischen Anteil, ferner in

$d\sigma/dv$  das Verhältnis zwischen den Änderungen der Spannung und der Verformung.

Der Augenblick des Bruches ist gekennzeichnet durch:

- $\sigma_B$  die mittlere Bruchspannung und
- $v_B$  das zugehörige Formänderungsvermögen.

Das Verhältnis der Spannungszunahme zur Verformungszunahme  $d\sigma/dv$  ändert sich mit fortschreitender Verformung. Es ist als "Verfestigungsfähigkeit" des betreffenden Stoffes eingeführt.

Beim Zugversuch können wir im Allgemeinen (mit oder ohne Rücksicht auf den Einfluss der Versuchsgeschwindigkeit) die Verfestigungsfähigkeit des Stoffes wie folgt schreiben:

$$\frac{d\sigma}{dv} = \operatorname{tg} \alpha \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma}{df} \quad \text{oder} \quad \frac{d\sigma}{dq},$$

wo  $f$  der abnehmende Querschnitt des Stabes,

$q$  die prozentuale Querschnittsverminderung gleich  $(f_0 - f)/f_0$  des betrachteten Querschnitts und  $f_0$  der Anfangsquerschnitt des Stabes ist.

Ich gehe nun dazu über, eigene Versuche zu beschreiben. Als Versuchsmaterial wurde besonders stark dehnbare und ein regelmässiges Aggregat von Kristallen bildendes "Armed Eisen" (dessen chemische Zusammensetzung 99.85% Eisen und 0.15% C, Mn, Si, P, S zusammen ist und als quasiisotrop

bezeichnet wird) gewählt. Als Form der Versuchskörper wurden kreiszylindrische und prismatische Stäbe, deren Querschnitte einander fast gleich waren, gewählt. Die Stäbe wurden von einem 40 mm Quadratstabe

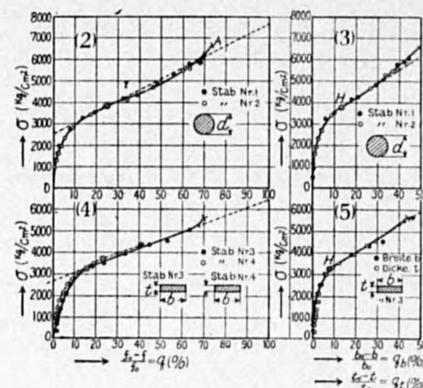


Abb. 2 bis 5. Wahre Zugkurven.  
⊙.....Höchstlastpunkt.

Durchmesser-, Breite- und Dicke-Verminderung sowie die effektive Dehnung  $\epsilon = (f_0 - f) / f$  als Abszisse aufgetragen. Diese Diagramme seien als "Wahre Zugkurven" bezeichnet.

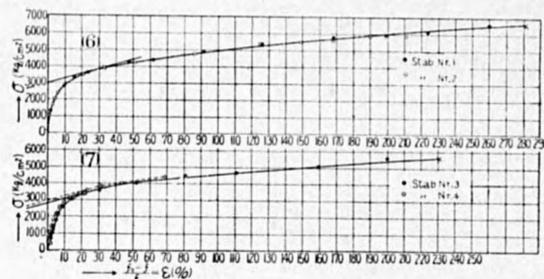


Abb. 6 und 7. Wahre Zugkurven

stetigem Anstieg. Zweckmässig können wir den Tangens des Neigungswinkels ( $\tan \alpha$ ) der  $\sigma - \epsilon$  Kurve als Mass für die absolute Verfestigungsfähigkeit annehmen.

Im Einschnürgebiete wurde der Stoff überhaupt vollplastisch und die Verfestigungsfähigkeit des Stoffes danach eine Funktion der Verformung. Besonders

(1) v. Möllendorf-Czocharski (1913), Müller (1918), Körber (1921), Ludwik (1922), Körber-Rohland (1924), Säftel-Sachs (1925), Marten-Sachs (1925).

wurden die Kristalle in engsten Querschnitt am stärksten verfestigt. Am zweckmässigsten soll die Verfestigung berücksichtigt werden.

### B. Das Verhältnis des Gefügeverformungs- und Spannungszustandes im eingeschnürten Grundgebiete des Stabes.

Hierbei ist zu beachten, dass sowohl eine etwa vorhergegangene Kaltverformung,<sup>(2)</sup> als auch die Versuchsgeschwindigkeit<sup>(3)</sup> die Verfestigungsfähigkeit beeinflussen. Vermeidet und beseitigt man jedoch solche Einflüsse, so kann man die Verfestigungsfähigkeit eines Metallstoffes auf folgende Ursachen zurückführen:<sup>(4)</sup>

- (1) intrakristalline Gleitung,
- (2) Bruch der Kristalle in Körnern,
- (3) Drehung der Kristalle.

Hierdurch wird im Stab die Gleitung der Kristalle verhindert.

Demnach erscheint es sehr wahrscheinlich, dass die Verfestigungen durch verschiedenartige Verformungen in engem Zusammenhang miteinander stehen. In der Tat zeigt der Vergleich der Ergebnisse<sup>(5)</sup> an verschiedenen Versuchskörperformen einen Unterschied. Man findet, dass die Erhöhung der Streckgrenze, der Festigkeit und der wahren Höchstlastspannung umso grösser ist, je stärker die Querschnittsunterschiede sind, und je schärfer die Querschnitte ineinander übergehen (Vergleiche auch Abb. 9). Da besonders für die örtlich eingeschnürten Stäbe, die Eigenschaften von der Querschnittsverminderungsfähigkeit abhängen, so können wir zweckmässig die Form der Einschnürung als Hilfsmittel benutzen.

Ferner zeigen verschiedene Probestäbe, dass im Augenblick des Bruches an der Stelle der stärksten Einschnürung viele kleine Risse<sup>(6)</sup> senkrecht zur Stabachse entstehen. Dies beweist, dass die Spannungsverteilung nach Ausbildung der örtlichen Einschnürung nicht mehr gleichmässig über den

(2) Hauser (1925).

(3) Körber (1922), Masing-Polanyi (1923).

(4) Honda (1926).

(5) Kirkaldy (1862), Barba (1880), Kennedy (1881), Strohmeyer (1884), Martens-Rudloff (1899), Ludwik-Scheu (1923), Stribeck (1923) (hauptsächlich über die Festigkeit gemessen), Diegel (1903), Sachs (1923) (hauptsächlich über die Dehnung verglichen).

(6) Ludwik-Scheu (1925), Kinukawa (1927).

engsten Querschnitt verlaufen kann. Die auftretenden Normalspannungen in der Mitte der Bruchebene werden grösser<sup>(7)</sup> als die wahre mittlere Zerreißspannung  $\sigma_B$ .

Zur Untersuchung der Zerstörung des Gefüges wurden die zerrissenen Stäbe (Nr. 1 bis 4) durch einen Schnitt parallel zur Stabachse halbiert. Diese

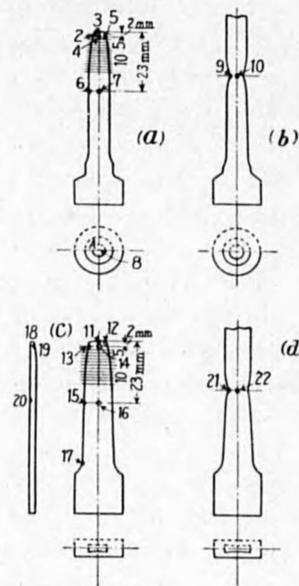


Abb. 8.

Schnittflächen wurden sorgfältig poliert, mit 5% Alkohol-Pikrinsäure geätzt und metallographisch untersucht. Abb. 8 zeigt die verformten Zustände der Probestäbe Nr. 1 bis 4. Stäbe Nr. 2 und 4 wurden absichtlich nicht zerrissen und die Verformung des Gefüges untersucht. Die im Bild beigefügten Zahlen kennzeichnen die untersuchten Stellen, sie entsprechen den Nummern (2 ~ 22) der Lichtbilder. Photo. 1 zeigt das Gefüge des ausgeglühten Stabes.

Die Gefügeverformung im zerrissenen Stab ist ganz ungleichmässig. Durch ihren kristallographischen Aufbau wurde das Verhalten der Kristalle und die Beanspruchungen, die zu bleibenden Verformungen und zum Bruch führen, wesentlich bestimmt. Jede Verformung geht so vor sich, dass sich die Teile eines Kristalls längs bestimmten kristallographischen Flächen, den "Gleitflächen," gegeneinander verschieben, dass sie sich verlängern in der Beanspruchungsrichtung und verkürzen in der dazu senkrechten Richtung und zwar umso mehr, je grösser die Beanspruchung ist. So wurden die einzelnen Kristalle ausserhalb des Einschnürungsgebietes fast gleichmässig und schwach in der Krafttrichtung deformiert. Im Gebiete der Einschnürung wurde das Material in einer Ebene senkrecht zur Stabachse ungleichmässig und zwar jeweils am stärksten am Rande, weniger stark nach der Mitte zu verformt.

Je geringer der Abstand einer solchen betrachteten Ebene von der Ebene der stärksten Einschnürung ist, desto grösser wird auch die Verformung in der Mitte. Ferner wurde gefunden, dass bemerkenswerte Unterschiede in der

(7) Kirsch (1884), Mohr (1910), Sunatani (1922), Fremont (1927), Hartmann (1927).

Kristallverformung zwischen Zerreißstäben mit rundem und solchen mit rechteckigem Querschnitt bestehen. Beim zylindrischen Stabe wurden auch nach starker Einschnürung einzelne Kristalle über der Ebene der stärksten Einschnürung fast gleichmässig stark deformiert. Aber beim prismatischen Stabe wurden in einem zur Langseite des Profilrechtecks parallelen Schnitte über der Mitte der Bruchebene liegende Kristallite schwächer als die am Rande verformt, und in einem zur Kurzseite parallelen Schnitte wurden hingegen alle Kristalle über der Bruchebene gleichmässig stark verformt. Der Unterschied über der Bruchebene wird umso grösser, je grösser das Verhältnis "Breite:Dicke" ist.

Obwohl die Stäbe gleichen Querschnitt hatten und nach dem Barbaschen Ähnlichkeitsgesetz einander ähnlich waren, ergab sich aus diesen Gefügeänderungen ein Unterschied der mechanischen Eigenschaften zwischen den Stäben mit kreisförmigem und rechteckigen Querschnitt (Abb. 2, 4, 6 und 7). Es ist ferner auch bekannt,<sup>(8)</sup> dass in den Normal-Zugstäben die wahre Festigkeit, Dehnung und Querschnittsverminderung verhältnismässig umso kleiner werden, je grösser der Querschnitt des Stabes ist. Ein Forscher hat darüber erklärt, dass es die Wirkung des Kerngehäuses des Stoffes unter dem Einfluss der Walzbearbeitung ist.

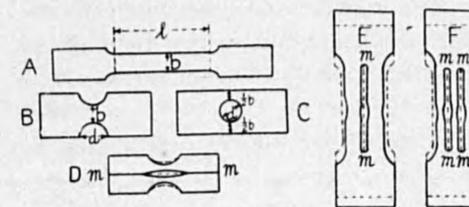


Abb. 9.

Die Abweichung der Querschnittsschwächung in den Stäben A, B, C und D, Abb. 9, ist schon experimentell erklärt.<sup>(9)</sup> Für die Formen B und C wurden die rein elastischen Spannungszustände über dem engsten Querschnitt (Kerbwirkung) schon angegeben.<sup>(10)</sup> Eine merkwürdige Querschnittsverminderung<sup>(11)</sup> zeigen die Stabformen D, E und F, die in der Mitte den Schnitt  $m m$  haben. Die gestrichelten Linien geben die Anfangsform an.

Nach Ausbildung der Einschnürung tritt bei fortschreitender Verformung

(8) Bach (1889~90), Martens (1911), Dalby (1920), Baumann (1925) usw.

(9) Kennedy (1881), Strohmeyer (1884), Unwin (1903~4), Ludwik (1924), Stribeck (1923), Oshima (1926), Sato-Suzuki (1927).

(10) Kisch (1898), Föppl (1900), Suyehiro (1911), Preuss (1912~13), Inglis (1913) (Für den Stab mit einem Loch in der Mitte), Winkler (1878), Léon-Ludwik (1909), Preuss (1913), Léon-Zidlicky (1915) (Für die gekerbten Zugstäbe).

(11) Strohmeyer (1884), Kinukawa (1927).

eine Drehung<sup>(12)</sup> der Kristallite ein, die auch die Hauptgleitflächen<sup>(13)</sup> mitmachen.<sup>(14)</sup> So muss das Bestreben eines jeden Kristallits, mit Rücksicht auf seine Orientierung, die Verformung durch Gleiten auf einer einzigen Hauptgleitebene auszuführen, grössere Kraft erfordern (dies hängt mit der Verfestigung durch Kaltbearbeitung zusammen).

Diese Tatsachen kann man durch die Annahme erklären, dass die Kristallite sich gegenseitig stark beanspruchen, dass zwischen ihnen besonders Zugspannungen<sup>(15)</sup> senkrecht zur Belastungsrichtung auftreten. Wenn die drei einander senkrechten Achsen  $X Y Z$  im Zugstab eingeführt, und die Stabachse als  $Y$  Achse festgelegt wurde, so werden die unmittelbare Zugspannung mit  $\sigma_y$  und die sekundäre Zugspannung mit  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  bezeichnet. So wird die für das Fließen massgebende Schubspannung infolge Umwandlung des einachsigen Spannungszustandes des gleichen Querschnittes in einen dreiachsigen erst bei erhöhter Zugspannung erreicht. Der Gefügeverformungszustand zeigt, dass die Verformung der Kristalle vom Rande nach der Mitte zu abnimmt. Die sekundäre Zugspannung, senkrecht zur Stabachse muss am Rande nahezu Null werden. Man kann daher annehmen, dass sie nach der Mitte hin zunimmt.<sup>(16)</sup> Es ist auch ersichtlich, dass die Erhöhung der sekundären Spannungen von der Querschnittmessung abhängt, so dass also die Bruchquerschnittsverminderung verhältnismässig umso kleiner ausfällt, je grösser der Durchmesser oder die Breite ist. Es beweist fernerhin, dass die Grundlage der Unterschied des wahren Trennungswiderstandes nicht nur unter der Wirkung des Kerngehäuses bei der Walzbearbeitung ist, sondern auch weil die Kristalliteverformung durch das Auftreten der sekundären Spannungen verhindert wurde.

Im Augenblick des Bruches sind die über dem engsten Querschnitt und in dessen Nähe liegenden Kristallite schon am stärksten deformiert und in einer bestimmten Richtung arrangiert. Dadurch haben die Werte der Spannungen  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  und  $\sigma_z$  einen bestimmten Betrag erreicht, in dessen Folge eine weitere Verformung erschwert ist. Durch die Wirkung der äusseren Kräfte

(12) v. Möllendorf-Czocharski (1913), Körber (1922), Ono (1925).

(13) Carpender-Elam (1921), Tayler-Elam (1921), Polanyi (1922), Czocharski (1923), Masing-Polanyi (1923), O'Neill (1923), Müller (1924) (über Einkristallkörper), Mügge (1899), Tammann (1921), Wever (1921), Polanyi (1921), Kakinuma (1923) (über Vielkristallkörper).

(14) v. Möllendorf-Czocharski (1913), Körber (1923), Masing-Polanyi (1923), Ono (1925).

(15) Strohmeier (1884), Mohr (1920), Heyn (1921), Sachs (1924), Masing-Mauksch-Hasse (1925), Sachs-Shoji (1925), Honda (1926), Kinukawa (1927).

(16) Kármann (1911), Böker (1915), Malaval (1923), Sachs (1925).

überschreitet zuerst die Normalspannung in der Mitte des engsten Querschnittes die Kohäsion der Kristalle, und der Trennungsbruch beginnt. Infolge des Zusammenhangs mit dem Trennungsbruch sind die übrigen Teilchen des engsten Querschnitts in ihrer Bewegungsfähigkeit unbehindert, sodass augenblicklich durch eine eingeführte Überbelastung eine Überschreitung der Hauptschubspannung erfolgt (s.a. Abb. 27 u.s.w.).

Je kleiner die Verformungsfähigkeit eines Materials ist, desto kleiner wird die Einschnürung, desto geringer wird der Unterschied zwischen der Spannung am Rande und in der Mitte. Infolgedessen wird der Flächenanteil des Trennungsbruches grösser und der Anteil des Gleitbruches kleiner.

Aus Symmetriegründen folgt, dass in Punkten, die symmetrisch zur Ebene der grössten Einschnürung oder zu einer Längsschnittebene durch die Stabachse liegen, auch gleiche Spannungs- und Verformungszustände herrschen. Bei einem Flachstab wird die sekundäre Spannung in der Richtung der Kurzseite so klein, dass man sie vernachlässigen kann. Im folgenden wollen wir daher so vorgehen, dass wir den Spannungszustand des Zugstabes im Augenblick des Bruches auf das "ebene Problem" in Annäherungsweise beschränken, bei dem die eine sekundäre Spannung unwesentlich ist.

### III. Die Bedingungen für den ebenen Spannungszustand.

Das rechtwinklige Koordinatensystem sei so gerichtet, dass alle Schiebungen in der  $xy$ -Ebene stattfinden, und der Koordinatenanfangspunkt mit dem Mittelpunkt des engsten Teiles im Längsschnitte zusammenfällt (Abb. 10). Es sei ferner angenommen, dass die zwei Normalspannungen  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  und die zwei Schubspannungen  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  wesentlich sind, und wir bezeichnen  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  fortan nur mit  $\tau$ . An einem kleinen prismatischen Element (Abb. 10), das man durch zwei zur  $xy$ -Ebene, einen zur  $xz$ - und einen zur  $zy$ -Ebene parallelen Schnitt und schliesslich durch eine zur  $Z$ -Achse parallele Ebene begrenzt, müssen sich die angreifenden Kräfte das Gleichgewicht halten. Es lassen sich die folgenden Beziehungen aufstellen:

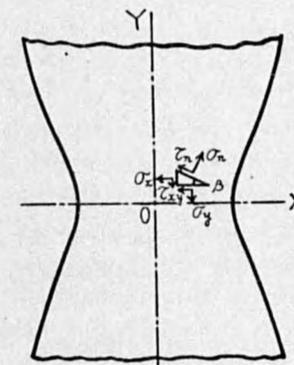


Abb. 10.

Der absolute Wert der grössten Schubspannung

(Hauptschubspannung) ist :

$$\tau_m = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + \tau^2}. \quad (1)$$

Die Werte der Hauptspannungen sind :

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) + \tau_m, \quad (2)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_y + \sigma_x) - \tau_m. \quad (3)$$

Der Richtungswinkel dieser Hauptspannungsschnitte ist :

$$\operatorname{tg} 2\beta' = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}. \quad (4)$$

Der Richtungswinkel der grössten Schubspannungsschnitte ist :

$$\operatorname{tg} 2\beta'' = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \quad (5)$$

Aus Gl. 4 und 5 folgt:  $\operatorname{tg} 2\beta' \cdot \operatorname{tg} 2\beta'' = -1$ , d.h. die beiden Schnitte sind gegeneinander unter  $45^\circ$  geneigt.

Die Fließbedingung<sup>(17)</sup> wurde durch Gl. 1

$$\frac{1}{4}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + \tau^2 = K^2 \quad (I)$$

bestimmt. Dabei ist  $K$  eigentlich konstant für den betreffenden Stoff. Aber da die Verfestigungsfähigkeit von der Verformung abhängt, wollen wir  $K$  noch schwach veränderlich annehmen, wodurch möglicherweise die Funktion  $(\sigma_y - \sigma_x)$  einfacher wird. Auf Grund der vorhergegangenen Überlegungen erreicht  $K$  über dem engsten Querschnitt und an der Konturschicht des Einschnürgrundes voraussichtlich den grössten Wert. In der folgenden Rechnung wird  $K$  nach dieser Annahme eingeführt.

Die am Element herrschenden Gleichgewichtsbedingungen im Einschnürgebiet verlangen :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (II)$$

Die Erfahrungstatsache, dass sich bei Erreichung dem vollkommenen bildsamen Zustande all festen Körper im wesentlichen so verhalten wie eine zähe, nahezu inkompressible Flüssigkeit der Spannungen von der Deformationsgeschwindigkeiten besteht, ähnlich der linearen Abhängigkeit des Zugtensoren (die Normal- und Tangentialspannungen) von den zugehörigen durch sie hervorgerufenen Deformationstensoren (Dehnungen bzw. Gleitungen) am

(17) Mises (1913), Mohr (1920), Prandtl (1921), Hencky (1924~25), Lode (1925~26), Nadai (1927).

Element.<sup>(18)</sup> Jedoch muss man von der Normalspannungen einen Bestandteil  $p$  abziehen, der einer allseits gleichen Spannung entspricht, da eine solche Beanspruchung erfahrungsgemäss keine endliche Deformationsgeschwindigkeit hervorruft. Wird mit  $u$  die Komponente des Geschwindigkeitsvektors in der  $x$ -Richtung und mit  $v$  die in der  $y$ -Richtung bezeichnet, so müssen wir, um vorwärts zu kommen, einen allgemeinen Weg einschlagen. Es ist: spezifischer Zug in Richtung  $x$  auf die zur  $x$ -Koordinate senkrechte Fläche des Elements,  $\sigma_x = k \cdot \partial u / \partial x + p$ , spezifischer Zug in Richtung  $y$  auf die zur  $y$ -Koordinate senkrechte Fläche des Elements,  $\sigma_y = k \cdot \partial v / \partial y + p$ , spezifischer Zug in Richtung  $x$  auf eine senkrecht zu  $y$  gelegte, bzw. spezifischer Zug in Richtung  $y$  auf eine senkrecht zu  $x$  gelegte Elementarfläche,  $\tau = k \cdot (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y) / 2$ , wo  $k$  eine Erfahrungsfaktor ist.

Führt man diese Beziehungen in die Gl. 4 ein, so erhält man :

$$\operatorname{tg} 2\beta' = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}{\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}}. \quad (III)$$

Der Richtungswinkel des Hauptspannungsschnittes ist damit als eine Funktion von  $x$  und  $y$  ausgedrückt, und Gl. III gibt für die Fließgestalt des Zugstabes eine wichtige Abhängigkeit an.

Gleichungen I, II und III wurden in diesem Falle des ebenen Problems als die Bedingungsgleichungen für plastische Massenbewegungen angenommen.

Weiter umschreibt Gl. III :

$$\tau = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} f(x, y). \quad (6)$$

Nach Einführung des obigen Ausdruckes geht Gl. I in die folgende Form über :

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 = \frac{4K^2}{1 + f^2(x, y)}. \quad (7)$$

Hieraus können  $\tau$  und  $(\sigma_y - \sigma_x)$  als eine Funktion von  $x$  und  $y$  berechnet werden.

#### IV. Die rechnerische Lösung.

##### A. Die Gleichung der Konturkurve des eingeschnürten Zugstabes.

(1) Die Funktion der komplexen Veränderlichen: Die auf diese Art gefundenen

(18) H. Hencky, Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körper, ZAMM, Bd. 3, 1923, s. 243, Über das Wesen der plastischen Verformung, VDI, Bd. 69, 1925, s. 695~696 und s. 1253~1254. Werner Jenne, Räumliche Spannungsverteilungen in festen Körpern bei plastischer Deformation, ZAMM, Bd. 8, 1928, s. 18.

ebenen Bedingungsgleichungen führen annäherungsweise zu der komplexen Stromfunktion, wenn zu ihnen noch ein System der Massenbewegung in der Umgegend des Einschnürteils hingefügt wird, und sie etwa der Richtung der Pfeile,

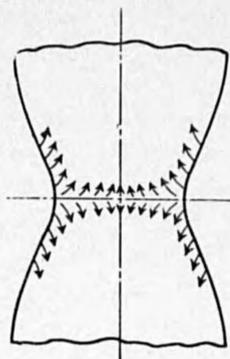


Abb. 11.

Abb. 11, folgt. Dieses Massenbewegungssystem werde im Allgemeinen in einem Teil des Feldes ( $z$ -Ebene) angegeben wenn man in der  $z$ -Ebene der unendlichen Quellen mit den Polen an der Stelle  $z = \pm \pi/2, \dots$  u.s.w., durch eine Funktion  $w = \ln \cos z$  konform abbildet.

Die Funktion geht in folgende über:

$$\begin{aligned} w &= \ln(\cos x \cos y - i \sin x \sin y) \\ &= \ln \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 y} - i [\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) + n\pi] \\ &= \Phi(x, y) + i \Psi(x, y), \quad (8) \end{aligned}$$

nach Trennung der reellen und imaginären Bestand-

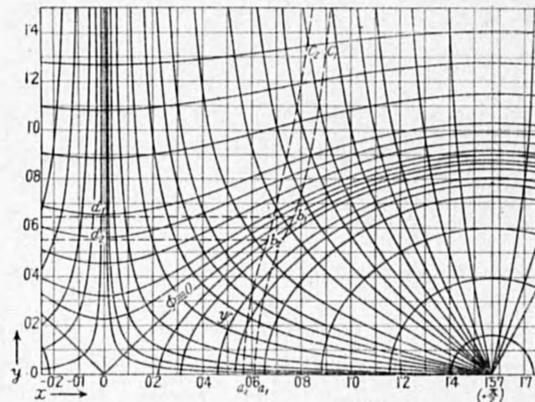


Abb. 12.

Die Geschwindigkeitspotenzlinie und die Stromlinien nach Gl. 8 berechnet. Die Kurven  $a, b, c$ , und  $a_2, b_2, c_2$  geben je einen Teil der Mantelkurve des zerrissenen Eisenstabes an.

$v$  für dies Quellenfeld sind dabei

$$u = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 y} = \frac{\sin 2x}{2(\cos^2 x + \sin^2 y)}, \quad (9)$$

$$v = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y} \ln \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 y} = -\frac{\sin 2y}{2(\cos^2 x + \sin^2 y)}. \quad (10)$$

Gl. 9 und 10 partiell differenziert liefern:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{-\sin^2 x \sin^2 y + \cos^2 x \cos^2 y}{(\cos^2 x + \sin^2 y)^2} = -\frac{\partial v}{\partial y} \\ \text{und } \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2x \sin 2y}{(\cos^2 x + \sin^2 y)^2} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die erste Gleichung 11 ist identisch mit der hydrodynamischen Kontinuitätsgleichung.

Nach Einführung der Gl. 11 geht die Bedingung III in die folgende über:

$$f(x, y) = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\frac{\partial v}{\partial y}} = \frac{2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} = \operatorname{tg} 2\beta'. \quad (12)$$

Infolgedessen bekommen wir

$$\text{von } \operatorname{tg} \beta' = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\beta'}}{\operatorname{tg} 2\beta'},$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1'} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

$$\text{und } \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2'} = -\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{dy}{dx}. \quad (14)$$

Führt man die Gl. 11 in die Gl. 5 ein, so geht Gl. 5 über:

$$\operatorname{tg} 2\beta'' = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y - 1}{2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

$$\text{Daraus } \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_1''} = \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y + 1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y - 1} = \frac{dy}{dx}, \quad (15)$$

$$\text{oder } \frac{1}{\operatorname{tg} \beta_2''} = \frac{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} = \frac{dy}{dx}. \quad (16)$$

Hiermit sind die Schmitttrichtungen der Hauptspannungen  $\beta_1'$  oder  $\beta_2'$  und der grössten Schubspannungen  $\beta_1''$  oder  $\beta_2''$  als eine gegebene Funktion von  $x$  und  $y$  bestimmt. Die Differentialgleichungen der Kurvenscharen der Hauptspannungs- und der Hauptschubspannungsschnitte können damit leicht angegeben werden.

(2) Die Hauptspannungstrajektorien: Durch Auflösen der Gl. 13 und 14 kann man die Gleichungen für die Kurvenscharen der Hauptspannungsschnitte (Hauptspannungstrajektorien) erhalten. Nach Gl. 13 ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \quad \text{und deren Lösung} \\ \operatorname{Cos} y = C \sin x.$$

Für  $y=0$ , wird  $C=1/\sin x_0$  und daraus folgt:

$$\cos y = \frac{\sin x}{\sin x_0} \quad (17)$$

Mit Gl. 14 erhält man:

$$\cos x = C \sin y,$$

wo an der Stelle  $x=0$ , wird  $C=1/\sin y_0$ ,

$$\text{daraus} \quad \cos x = \frac{\sin y}{\sin y_0} \quad (18)$$

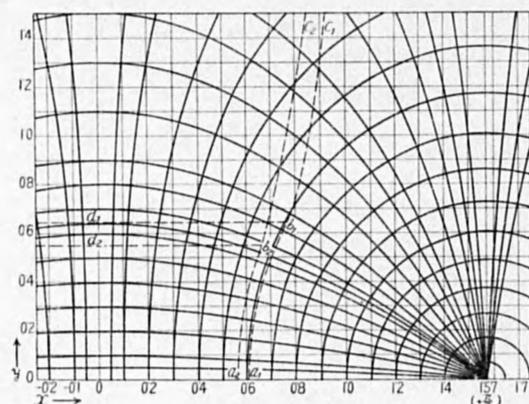


Abb. 13.

Hauptspannungstrajektorien  
(Kurvenscharen der Hauptspannungsschnitte).

(3) Beziehungen zwischen der Konturkurve des eingeschnürten Stabes und den Hauptspannungstrajektorien: Nach den Untersuchungen<sup>(19)</sup> lässt sich sogar bei einer Anzahl verschiedener Stoffe wie Aluminium, Kupfer, Flusseisen, Blei

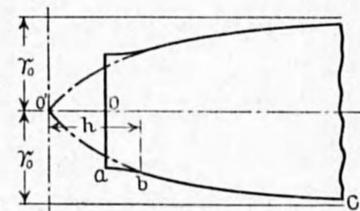


Abb. 14.

Grundform des Fließteils der  
zerrissenen Zugstäbe.

u.s.w., die Gestalt des Fließteils entsprechend Abb. 14 durch eine einzige logarithmische Kontur "bc" mit hyperbolischem Ansatzstück "ab" wiedergeben. Diese äussere Kurve können wir als eine Kurve aus der Schar der Hauptspannungsschnitte (eine der Hauptspannungstrajektorien) annehmen. Man kann daher versuchen, die Konturlinie "abc," Abb. 14, mit einer der Haupt-

(19) v. Möllendorf (1923), Fremont (1927).

spannungstrajektorien, Bild 13, zur Deckung zu bringen. Zu diesem Zweck wurde die Konturlinie eines jeden Stabes in verschiedenen Massstäben aufgezichnet und mit den Linien in Bild 13 verglichen. Es ergab sich, dass man den Mittelpunkt des engsten Schnittes des Stabes an der Stelle  $x=0, y=0$  (Abb. 13) hinlegen kann. Z.B. stimmt die Kurve  $a_1b_1c_1$  (Abb. 13), die die Hälfte der Gestalt des zerrissenen Stabes (Armco Eisen) ist, und die Kurve  $a_2b_2c_2$  (Abb. 13), die die Hälfte des Flusseisenstabes ist, in einem Teile  $a_1b_1$  und  $a_2b_2$  mit

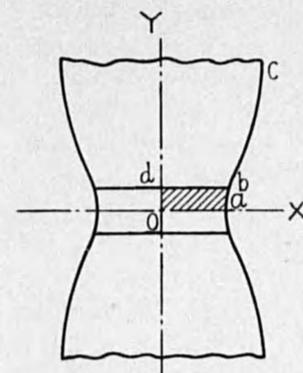


Abb. 15.

einer der Spannungstrajektorien richtig überein. Bei den weiteren Untersuchungen (Abb. 26 und 27) wurde der Wendepunkt  $b_1, b_2$  u.s.w. jeder Kurve als Grenzpunkt angenommen, das heisst, die Spannungszustände nur im Gebiete der hyperbolischen Kontur "ab" dargestellt.

Die Gestalt des Zerreißstabes wurde annäherungsweise durch die Koordinatsachsen X und Y symmetrisch geteilt, Abb. 15. Für die zeichnerische Darstellung genügt daher in der Folge die Wiedergabe des durch Schraffur gekennzeichneten Viertels "oabd."

## B. Die Gleichungen der Spannungskomponenten bei konstantem K.

Zunächst werde zur Vereinfachung angenommen, dass  $K=\text{Konst.}$

Nach Einführung des Ausdruck für  $f(x, y)$ , Gl. 12, geht Gl. 7 in die folgende Gleichung über:

$$\sigma_y - \sigma_x = 2K \frac{1 - \text{tg}^2 x \text{tg}^2 y}{1 + \text{tg}^2 x \text{tg}^2 y} \quad (19)$$

Weiterhin erhält man aus Gl. 19 und 6

$$\tau = 2K \frac{\text{tg} x \text{tg} y}{1 + \text{tg}^2 x \text{tg}^2 y} \quad (20)$$

Und von der Bedingung II

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial \tau}{\partial y} = -2K \frac{\text{tg} x (1 - \text{tg}^2 y) (1 - \text{tg}^2 x \text{tg}^2 y)}{(\text{tg}^2 x \text{tg}^2 y + 1)^2} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial \tau}{\partial x} = -2K \frac{\text{tg} y (1 + \text{tg}^2 x) (1 - \text{tg}^2 x \text{tg}^2 y)}{(\text{tg}^2 x \text{tg}^2 y + 1)^2} \quad (22)$$

Differenziert man Gl. 19, so wird:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_y - \sigma_x) = 8K \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{tg}^2 y (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 1)^2}, \quad (23)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y - \sigma_x) = 8K \frac{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg} y (1 - \operatorname{tg}^2 y)}{(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 1)^2}. \quad (24)$$

Subtrahiert man Gl. 24 von 22 und addiert man Gl. 23 und 21, so entsteht:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = 2K \frac{\operatorname{tg} y}{(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 1)^2} (1 - 3\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y - \operatorname{tg}^4 x \operatorname{tg}^2 y), \quad (25)$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 2K \frac{\operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 1)^2} (1 + 3\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 3 \operatorname{tg}^2 y + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^4 y). \quad (26)$$

Das Integral von Gl. 21 gibt

$$\sigma_x = K \left[ \frac{2}{\operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y + 1} + \frac{1 + \operatorname{tg}^2 y}{1 - \operatorname{tg}^2 y} \ln \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} \right] + C, \quad (27)$$

wo die Konst.  $C=f(y)$  ist und nach den vorgegangenen Grenzbedingungen zu bestimmen ist.

Das Integral von Gl. 22 würde den Ausdruck der Spannung  $\sigma_y$  angeben.

$$\sigma_y = K \left[ \frac{2}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \ln \frac{1 - \operatorname{tg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{tg}^2 y} \right] + C'. \quad (27')$$

Da aber die Grenzbedingung für die Integrationskonstante  $C=f(x)$  nicht bekannt ist, kann man auf diesem Wege  $\sigma_y$  nicht bestimmen. Addiert man Gl. 19 und 27, so erhält man direkt

$$\sigma_y = (\sigma_y - \sigma_x) + \sigma_x. \quad (28)$$

#### Die Spannungen über dem engsten Querschnitte:

Setzt man  $y=0$ , so gehen die obigen Gleichungen in die folgenden über:

$$\text{von Gl. 19} \quad \sigma_y - \sigma_x = 2K, \quad (29)$$

$$\text{von Gl. 20} \quad \tau = 0, \quad (30)$$

$$\text{von Gl. 21} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -2K \operatorname{tg} x = -\frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (31)$$

$$\text{von Gl. 22} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial \tau}{\partial x}, \quad (32)$$

$$\text{von Gl. 25} \quad \frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = 0, \quad (33)$$

$$\text{von Gl. 26} \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} = 2K \operatorname{tg} x. \quad (34)$$

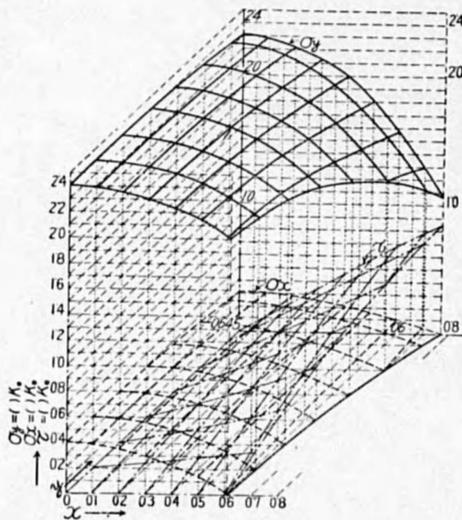


Abb. 16.

Die Spannungszustände im Armcoeisenstab ohne Berücksichtigung der Verfestigung. (Vergl. Abb. 22.)

Weiterhin liefert das Integral von Gl. 31

$$\sigma_x = 2K \ln \cos x + C, \quad (35)$$

und addiert man Gl. 29 und 37

$$\sigma_y = 2K(1 + \ln \cos x) + C. \quad (36)$$

Aus diesen Ergebnissen erkennen wir, dass über dem engsten Querschnitt die Spannungszustände der Normalspannung  $\sigma_y$  und der sekundären Spannung  $\sigma_x$  mit den gemachten Annahmen gut übereinstimmen. Die Spannungen  $\sigma_y$  und  $\sigma_x$  über dem engsten Querschnitt fallen mit den Hauptspannungen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  zusammen.

Wir können mit den Gleichungen 20, 27, 28, 35 und 36 die Spannungen  $\tau$ ,  $\sigma_x$  und  $\sigma_y$  an jeder Stelle über der Ebene im Einschnürgrundgebiete ermitteln. Die berechneten Spannungszustände z.B. für einen Armco-Eisenstab (vorgegangener Stab Nr. 3) zeigt Abb. 16. Man erkennt, dass in diesem Ergebnis der Einfluss der Verfestigung nicht enthalten ist.

#### C. Gleichungen der Spannungen mit Berücksichtigung der Verfestigungsfähigkeit.

Nach Bedingung I ist,  $K$  vom Verformungsgrade abhängig veränderlich. In der vorigen Untersuchung ist es ersichtlich, dass  $K$  über der engsten Querebene "oa" (Abb. 15) und an der äusseren Konturschicht<sup>(20)</sup> "ab" den grössten und beständigen Wert erreicht und an anderen Stellen eben als eine Funktion von  $x$  und  $y$  behandelt werden soll. Der Wert von  $K$  über der engsten Querebene ist vom betreffenden Stoff abhängig und unveränderlich wird. Wenn wir die über dem engsten Querschnitt gleichmässig verteilt gedachte Normalspannung als wahre Zerreißspannung (mittels Festigkeit) annehmen, können wir durch eine einzige Zahlenangabe den Wert "K", d.h. die Verfestigungsfähigkeit des Stoffes, wie folgende Untersuchung (1) zeigt, ausdrücken.

(1) Die Spannungen über der engsten Querebene "oa" (Abb. 15):

Wir nehmen für die engste Querebene den grössten Wert von  $K$  an und bezeichnen ihn mit  $K_0$ . Nach Einführung des Ausdruck  $K_0$  anstatt  $K$  können wir die Gleichungen 29 bis 36 sogleich benutzen.

$$\sigma_y - \sigma_x = 2K_0. \quad (29')$$

$$\tau = 0. \quad (30')$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -2K_0 \operatorname{tg} x = -\frac{\partial \tau}{\partial y}. \quad (31')$$

(20) Es ist auch ersichtlich in der Untersuchung der Rekristallisation des Zerreißstabes.

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 = -\frac{\partial \tau}{\partial x} \quad (32')$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial y} = 0 \quad (33')$$

$$\sigma_x = 2K_0 \ln \cos x + C \quad (35')$$

$$\sigma_y = 2K_0(1 + \ln \cos x) + C \quad (36')$$

Die Hauptschubspannung und die Hauptspannungen an der Stelle  $y=0$  ist nach Gl. 1, 2, 3 und 30'

$$\left. \begin{aligned} \tau_m &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \\ \sigma_1 &= \sigma_y \\ \sigma_2 &= \sigma_x \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Die Schnittrichtungen der Hauptspannungen und der Hauptschubspannung an beliebiger Stelle wurden durch die Gl. 4 und 5 bzw. 13, 14 und 15, 16 ermittelt, und

$$\left. \begin{aligned} \beta_1' &= 0 & \beta_2' &= \frac{1}{2}\pi \\ \beta_1'' &= \frac{3}{4}\pi & \beta_2'' &= \frac{1}{4}\pi \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

gefunden.

(2) Die Spannungen über der Konturkurve des Grundteils:

Wenn nach obiger Bedingung  $\sigma_x=0$  ist, <sup>(21)</sup> dürfen wir aus plausiblen Gedanken in Gl. 19  $K$  mit  $K_0$  einsetzen, und dann geht diese Gleichung in die folgende über:

$$\sigma_y = 2K_0 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y} \quad (39)$$

Die Schubspannung  $\tau$  wird nach Gl. 20 mit  $K=K_0$

$$\tau = 2K_0 \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{Zg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y} \quad (40)$$

(3) Die Spannungen über anderen Querebenen im Grundteil "oabd" (Abb. 15):  
Aus der Gleichung 31'

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = (2K_0 \operatorname{tg} x)_0 = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)_0$$

folgt durch Integration nach  $y$

$$\tau = (2K_0 \operatorname{tg} x)_0 y + C = -\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\right)_0 y + C,$$

wo an der Stelle  $y=0$ ,  $\tau=0$  und  $C=0$  ist.

Nach Gl. 20 ist

$$\tau = (2K \operatorname{tg} x) \frac{\operatorname{Zg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y}.$$

Zum Vergleiche der beiden Gleichungen schreiben wir kurz

(21) Über der Konturkurve des Stabes ist  $\sigma_x$  überhaupt sehr klein und für diesen kleinen Grundteil nahezu null, so lassen sich ohne merklichen Fehler durch null ersetzen (s.a. Nachtrag).

$$\tau = (2K_0 \operatorname{tg} x)_0 f(y).$$

Durch partielle Differentiation erhält man

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{2K_0}{\cos^2 x} f(y),$$

und wegen

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}$$

wird

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{-2K_0}{\cos^2 x} f(y) = \frac{-2K_0}{\cos^2 x} \frac{\operatorname{Zg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y}.$$

Durch Integration erhält man schliesslich die Spannung  $\sigma_y$ :

$$\sigma_y = K_0 \ln \frac{\operatorname{tg}^2 x (1 - \operatorname{Zg}^2 y)}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y} + C \quad (41)$$

Die Ermittlung der Spannung  $\sigma_x$  kann annäherungsweise erfolgen. Nach Gl. 22 an der Stelle  $x=0$  und  $y=0$

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = (2K_0 \operatorname{Zg} y)_0 = -\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}\right)_0.$$

Durch Integration kommt

$$\tau = (2K_0 \operatorname{Zg} y)_0 x + C,$$

wobei an der Stelle  $x=0$ ,  $\tau=0$  und  $C=0$  ist.

Nach Gl. 20 ist  $\tau = (2K \operatorname{Zg} y) \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y}$ .

Zum Vergleiche der beiden Gleichungen schreiben wir kurz

$$\tau = (2K_0 \operatorname{Zg} y)_0 f(x).$$

Durch differenzieren erhält man

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = 2K_0 \frac{1}{\cos^2 y} f(x),$$

und infolge

$$\frac{\partial \tau}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

wird

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -2K_0 \frac{1}{\cos^2 y} f(x) = -2K_0 \frac{1}{\cos^2 y} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y}.$$

Die Integration liefert den Wert für die Spannung  $\sigma_x$ :

$$\sigma_x = K_0 \ln \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y}{\operatorname{Zg}^2 y (1 + \operatorname{tg}^2 x)} + C \quad (42)$$

Die Schubspannung  $\tau$  an jeder Stelle wurde durch die Gl. 6 und 12 ermittelt. Es ist

$$\tau = (\sigma_y - \sigma_x) \frac{\operatorname{tg} x \operatorname{Zg} y}{1 - \operatorname{tg}^2 x \operatorname{Zg}^2 y} \quad (43)$$

wo  $\sigma_y$  und  $\sigma_x$  mit den aus den Gl. 41 bzw. 42 berechneten entsprechenden Werten eingesetzt werden.

V. Rechnerische Ergebnisse und Teilversuche.

(1) Versuche mit dem Armcoeisenstab (Stab Nr. 3 in Abb. 3).

In Abb. 13 bezeichnete Kurve  $a_1b_1$  deutet die Konturkurve der parallel zur Dicke geschnittenen Längsmittlebene des Nr. 3 Armcoeisenstabes (Abb. 3) an.

a) Kurve " $a_1b_1$ " (Abb. 13):

Nach Bild 13 ist für diesen Stab  $x_0=0.611$ ,  $\sin x_0=0.574$ . Mit Gl. 17

$\cos^2 y = \sin x / \sin x_0$  erhält man beispielsweise:

$y=0$	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.611
$x=0.611$	0.614	0.625	0.642	0.669	0.700	0.747	0.771.

b) Die Spannung über der engsten Querebene (Bruchebene) " $\alpha\alpha$ ":

Mit Gl. 35' erhält man für  $x_0=0.611$  und  $\sigma_x=0$  den Wert

$C = -2K_0 \ln \cos 0.611 = 2K_0 \times 0.199$ , und damit:

$\sigma_x = 2K_0 (\ln \cos x + 0.199)$ ,

während die Gl. 36'  $\sigma_y = 2K_0 (1 + \ln \cos x + 0.199)$ ,

und Gl. 30'  $\tau = 0$  liefern.

Mit diesen Gleichungen für verschiedene  $x$  berechnete Werte von  $\sigma_y/K_0$

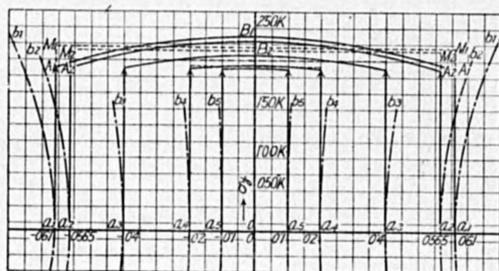


Abb. 17.

Spannungszustandschaubilder der engsten Querebene.

$\sigma_n = 56.2 \text{ kg/mm}^2$ . Die Durchschnittsspannung ist in Abb. 17 durch die gestrichelte Linie  $M_1M_1$  angegeben. Daraus bekommen wir

$K_0 = \sigma_n / 2.262 = 0.442 \sigma_n = 24.8 \text{ kg/mm}^2 = \tau_m$ .

Nach Einführung dieses Wertes von  $K_0$  in den Ausdruck von  $\sigma_y$  und  $\sigma_x$  erhält man die tatsächlichen Spannungen von  $\sigma_y$  und  $\sigma_x$  Zahlentafel 1, Spalte 3 und 5, mit denen der Spannungszustand über der  $\alpha\alpha$ -Ebene in Abb. 18 wiedergegeben ist (vergl. auch Abb. 19 und 21).

Die Grösse der Hauptschubspannung über der Bruchebene erreicht nur den Wert  $0.442\sigma_n$ , und man kann daraus folgern, dass diese Hauptschubspannung für den Gleitbruch des Materials nicht ausschlaggebend sei. In der Tat

Zahlentafel 1. Die Grösse der Spannung über der engsten Querebene (Bruchebene) des Armcoeisenstabes.

1	2	3	4	5	6
$x$	$\sigma_y/K_0$	$\sigma_y \text{ (kg/mm}^2\text{)}$	$\sigma_x/K_0$	$\sigma_x \text{ (kg/mm}^2\text{)}$	$\tau$
0	2.398	59.6	0.398	9.9	0
0.100	2.388	59.3	0.388	9.5	0
0.200	2.357	58.5	0.357	8.9	0
0.300	2.306	57.2	0.306	7.6	0
0.400	2.233	55.5	0.233	5.8	0
0.500	2.137	53.1	0.137	3.4	0
0.600	2.014	50.0	0.014	0.4	0
0.611	2.000	49.7	0	0	0
	2.262*	56.2*			

\* Durchschnittswert.

dürfen wir annehmen, dass im Bruchübergang zuerst infolge Überschreitung der Normalspannung  $\sigma_y$  oder  $\sigma_1$  in der Mitte der Bruchebene der Trennungsbruch beginnt, und dann im Augenblick des Zerreißens im äusseren Teil der Gleitbruch stattfindet.

Die sekundäre Zugspannung  $\sigma_x$  ist im Mittelteil ziemlich gross, und die Verteilung (Abb. 18) beweist eine geringe Kristalliteverformung in der Mitte dieses Stabes.

c) Spannung über der Konturkurve  $a_1b_1$ :

Die Spannung  $\sigma_x$  ist hier null. Für verschiedene Werte von  $x$  und  $y$  wurden die Spannung  $\sigma_y$  mit Gl. 39 und die Schubspannungen  $\tau$  mit Gl. 40 berechnet und in Zahlentafel 2 eingesetzt.

d) Spannung  $\sigma_y$  über anderer Querebene:

Die Integralkonstante in Gl. 41 können wir durch die obige Randspannung  $\sigma_y$  über  $\alpha\alpha$ -Ebene und  $a_1b_1$ -Konturkurve bestimmen. Z.B. an der Stelle  $y=0$  ( $\sigma_y$  über  $y=0$  Ebene soll fortan mit  $\sigma_y$  bezeichnet werden)  $C = \sigma_y - K_0 \ln \tan^2 x$ . Für die Reihe  $x=0$  ist  $\sigma_y = 2.398 K_0$  und  $C = 2.398 K_0$ . So geht Gl. 41 über in  $\sigma_y = 2.398 K_0 - K_0 \ln \cos^2 y$  und man kann für die beliebigen Punkte  $y=0.100$  bis  $0.645$  ( $x=0$ ) die Spannung  $\sigma_y$  berechnen. Ferner erhält man

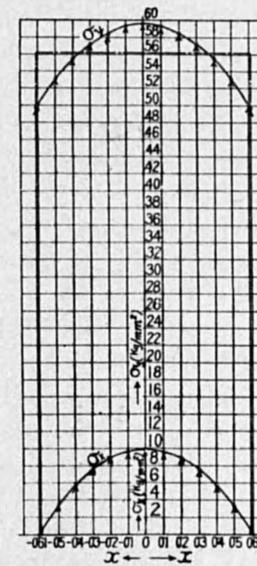


Abb. 18.

Der Spannungszustand der Normalspannung und der Sekundärspannung über der engsten Querebene des Armcoeisenstabes.

für die Reihe  $x=0.100$ ,  $\sigma_{y0}=2.388K_0$  den Wert  $C=2.388K_0 - K_0 \ln \text{tg}^2 0.100 = 6.993 K_0$ , und mit Gl. 41 wird

$$\sigma_y = K_0 [\ln \text{tg}^2 0.100 - \ln \xi \sigma^2 y - \ln (1 + \text{tg}^2 0.100 \xi \sigma^2 y)] + 6.993 K_0.$$

Damit erhält man die Spannung  $\sigma_y$  für die Punkte  $y=0.100$  bis  $0.645$  und  $x=0.100 = \text{Konst.}$

In gleicher Weise wurde für jede Reihe  $x=0.200$  bis  $0.611$  die Konst.  $C$  bestimmt und damit die Spannung  $\sigma_y$  für verschiedene Werte von  $y$  im Bereiche  $y=0.100$  bis  $0.645$  nach Gl. 41 ermittelt.

Von der Konturlinie ausgehend, wurde sodann in gleicher Weise für verschiedene Werte  $x = \text{Konst.}$  zuerst

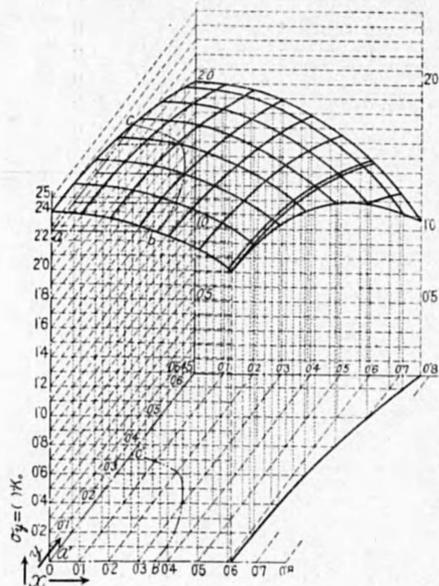


Abb. 19.

Spannungszustand der Normalspannung  $\sigma_y$  im Augenblick des Bruches.

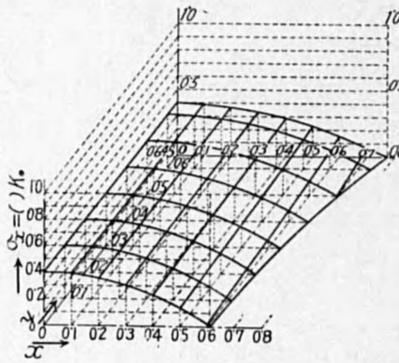


Abb. 20.

Spannungszustand der Sekundärspannung  $\sigma_x$  im Augenblick des Bruches.

die Konstante  $C$  und dann die Spannung  $\sigma_y$  an jeder Stelle von  $y=0.200$  ab bis  $y=0.645$  ermittelt.

Das Ergebnis aus dieser Rechnung ist in Zahlentafel 2 zusammengestellt und der Spannungszustand in Abb. 19 und 22 aufgezeichnet. In dem durch die gestrichelte Linie  $abc$  und  $a'b'c'$  eingeschlossenen Gebiete, Abb. 19 und 22, ist die Normalspannung  $\sigma_y$  grösser als der Mittelwert der  $\sigma_y = 2.262 K_0$ . Dieses Ergebnis bestätigt, dass in dem eingeschnürten Gebiet die Überschreitung der Normalspannung, und zwar in der Mitte des Stabes (s.a. Bild 32) den Bruch des Materials einleitet.

e) Die Spannung  $\sigma_x$  über anderen Querebenen:

Die Integralkonstante in Gl. 42,  $C=f(y)$ , können wir durch die obige Randbedingung  $\sigma_x=0$  über der Konturkurve  $a_1b_1$  bestimmen. Z.B. ist für die Zeile  $y=0.100$ , an

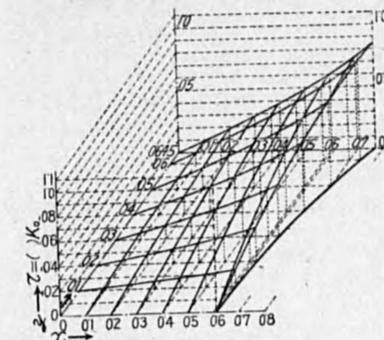


Abb. 21.

Spannungszustand der Schubspannung  $\tau$  im Augenblick des Bruches.

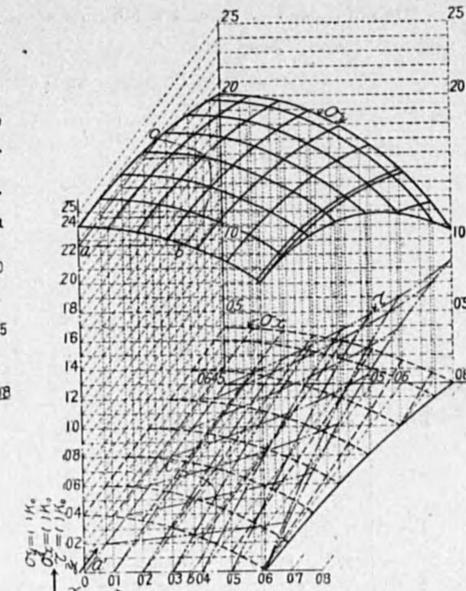


Abb. 22.

Spannungszustände der  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  und  $\tau$  in zusammen (Armcoeisen prismatischer Stab).

der Stelle  $x=0.614$ ,  $\sigma_x=0$  und so  $C=-4.211 K_0$ . Damit geht Gl. 42 in die folgende über:

$$\sigma_x = K_0 [\ln(1 + \text{tg}^2 x \xi \sigma^2 0.100) - \ln \xi \sigma^2 0.100 (1 + \text{tg}^2 x)] - 4.211 K_0.$$

Damit kann für die beliebigen Punkte im Bereiche  $x=0$  bis  $0.614$  ( $y=0.100$ ) die Spannung  $\sigma_x$  ausgerechnet werden. In gleicher Weise wurde für jede Zeile von  $y=0.200$  bis  $0.645$  die Konst.  $C$  bestimmt und sodann die Spannungen  $\sigma_x$  an jeder Stelle von  $x=0$  ab bis zu dem durch die Konturlinie bestimmten Größtwert ermittelt.

Die ausgerechneten Werte der Spannungen  $\sigma_x$  sind in Zahlentafel 2 zusammengestellt, und der Spannungszustand ist in Abb. 20 und 22 gezeigt.

f) Die Schubspannung  $\tau$  über anderen Querebenen:

Aus der Gl. 43 wurde die Schubspannung  $\tau$  an jeder Stelle gerechnet und auch in Zahlentafel 2 eingestellt und der Spannungszustand in Abb. 21 und 22 gezeigt.

In Abb. 22 sind die Einzelspannungen  $\sigma_y$ ,  $\sigma_x$  und  $\tau$  der Bilder 19, 20 und 21 zusammen nochmals wiedergegeben.

Zahlentafel 2. Die Werte der Spannungen im Armeeisen-Zerreißenstab.  
 $K_0 = 24.8 \text{ kg/mm}^2$ .  
 (Mit  $K_0$  multipliziert ergeben die hier eingesetzten Zahlen die tatsächlichen Spannungswerte).

$y \backslash x$	0	0.2	0.4	0.611	0.614	0.642	0.702	0.771
0.645	$\sigma_y/K_0$	2.008	1.961	1.782	1.464	1.454	1.397	1.252
	$\sigma_z/K_0$	0.398	0.371	0.314	0.147	0.144	0.12	0
	$\tau/K_0$	0	0.185	0.375	0.621	0.625	0.664	0.744
0.5	$\sigma_y/K_0$	2.159	2.117	1.952	1.662	1.649	1.601	1.468
	$\sigma_z/K_0$	0.397	0.365	0.270	0.098	0.094	0.065	0
	$\tau/K_0$	0	0.166	0.357	0.564	0.567	0.604	0.677
0.3	$\sigma_y/K_0$	2.309	2.272	2.126	1.871	1.863	1.816	
	$\sigma_z/K_0$	0.399	0.362	0.250	0.042	0.021	0	
	$\tau/K_0$	0	0.116	0.235	0.388	0.395	0.416	
0.1	$\sigma_y/K_0$	2.388	2.352	2.219	1.986	1.979		
	$\sigma_z/K_0$	0.398	0.365	0.236	0.006	0		
	$\tau/K_0$	0	0.040	0.084	0.139	0.14		
0	$\sigma_y/K_0$	2.398	2.358	2.232	2.000			
	$\sigma_z/K_0$	0.398	0.358	0.232	0			
	$\tau/K_0$	0	0	0	0			

g) Die Schnittrichtung der Hauptspannung und der Hauptschubspannung mit der Y-Achse:

Für die gleichen Werte von  $x$  und  $y$  nach Gl. 13 und 15 die Winkel, welche die Hauptspannungen und die Hauptschubspannungen mit der Y-Achse bilden, berechnet und in Zahlentafel 3 eingestellt. Fernerhin wurden die Hauptspannungstrajektorien, s. Abb. 13, und die Hauptschublinien in Abb. 23 aufgezeichnet.

Aus zahlreichen Zuguntersuchungen mit dehnbaren Metallstoffen (s.a. Abb. 27 u.s.w.) ergibt sich, dass der Winkel des Scherbruchs mit der Stabrichtung (Y-Achse) ungefähr  $45^\circ$  bis  $55^\circ$  beträgt (Abb. 23). Nach der Trennung der Kristallite im Mittelteil über dem engsten Querschnitt infolge Überschreitung der Normalspannungskomponente  $\sigma_y$  werden die übriggebliebenen Kristallite in den äusseren Schichten überlastet, wodurch dann Gleitbruch folgt. Die praktische Scherbruchfläche bei diesen (Photo. 12) und in den folgenden Untersuchungen verläuft fast genau wie die berechnete Hauptschublinie.

Zahlentafel 3. Die Werte der Haupt- und Hauptschubspannungen und die Winkel, die sie mit der Y-Achse bilden im Armeeisenstab.  
 (Mit  $K_0 = 24.8 \text{ kg/mm}^2$  multipliziert, ergeben die hier eingesetzten Verhältnis Zahlen die tatsächlichen Spannungswerte.)

$y \backslash x$	0	0.2	0.4	0.611	0.614	0.642	0.702	0.771
0.645	$\tau_m/K_0$	0.805	0.816	0.825	0.905	0.906	0.922	0.952
	$\beta_1''$	$45^\circ$	$51^\circ 35'$	$58^\circ 31'$	$66^\circ 41'$	$66^\circ 52'$	$68^\circ 2'$	$70^\circ 41'$
	$\beta_1'$	$0^\circ$	$6^\circ 35'$	$13^\circ 31'$	$21^\circ 41'$	$21^\circ 52'$	$23^\circ 2'$	$25^\circ 41'$
0.5	$\tau_m/K_0$	0.881	0.891	0.913	0.962	0.964	0.976	1.000
	$\beta_1''$	$45^\circ$	$50^\circ 21'$	$56^\circ 4'$	$62^\circ 54'$	$63^\circ 5'$	$64^\circ 5'$	$66^\circ 21'$
	$\beta_1'$	$0^\circ$	$5^\circ 21'$	$11^\circ 4'$	$17^\circ 54'$	$18^\circ 5'$	$19^\circ 5'$	$21^\circ 21'$
0.3	$\tau_m/K_0$	0.955	0.962	0.967	0.994	1.000	1.000	
	$\beta_1''$	$45^\circ$	$48^\circ 23'$	$52^\circ 3'$	$56^\circ 30'$	$56^\circ 36'$	$57^\circ 16'$	
	$\beta_1'$	$0^\circ$	$3^\circ 23'$	$7^\circ 3'$	$11^\circ 30'$	$11^\circ 36'$	$12^\circ 16'$	
0.1	$\tau_m/K_0$	0.995	0.995	0.995	1.000	1.000		
	$\beta_1''$	$45^\circ$	$46^\circ 9'$	$47^\circ 25'$	$48^\circ 59'$	$49^\circ 1'$		
	$\beta_1'$	$0^\circ$	$1^\circ 9'$	$2^\circ 25'$	$3^\circ 59'$	$4^\circ 1'$		
0	$\tau_m/K_0$	1.000	1.000	1.000	1.000			
	$\beta_1''$	$45^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$	$45^\circ$			
	$\beta_1'$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$	$0^\circ$			
	$\sigma_1/K_0$	2.398	2.358	2.232	2.000			
	$\sigma_2/K_0$	0.398	0.358	0.232	0			

h) Einfluss der Veränderlichkeit von  $K$ :

Der Vergleich des Verlaufes von  $\tau_m$  die aus Gl. 1 gerechnet und in Zahlentafel 3 eingestellt ist und des Kristalliteverformungszustandes (Photo. 11 und 12) zeigt eine annähernde Übereinstimmung. Es folgt daraus, dass die Verfestigungsfähigkeit wohl von der Verformung abhängt.

(2) Versuche zur Vergleichung der Konturkurve verschiedener Zugstäbe.

Die auf Grund eigener Untersuchungen an Stäben verschiedener Form und verschiedenen Materials gefundenen mechanischen Eigenschaften sind für die Längsschnittebene in Zahlentafel 4, die zugehörigen Konturkurven im Bild 25 für flache oder prismatische Stäbe und im Bild 26 für runde Stäbe wiedergegeben. Der Aluminiumzylinderstab von Prof. Ludwik (1926), der in der Mitte des engsten Querschnittes einen Anriss durch Überschreitung der Normalspannung hat, wurde auch hier, Abb. 32, wiedergegeben. Die Konturkurven wurden

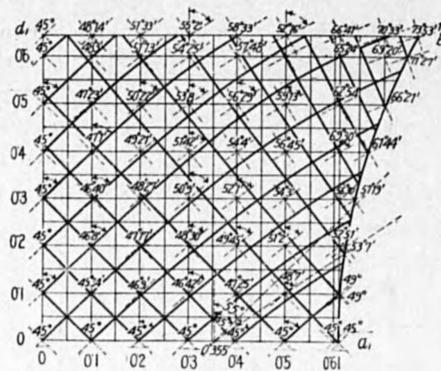


Abb. 23.  
System der Hauptspannlinie im Augenblick  
des Bruches (Armco-Eisen).



Abb. 24. Gestalt der Zer-  
reißstabes aus Armco-Eisen.

jeweils geometrisch vielfach vergrößert, und bei sorgfältigstem Vergleich mit den Hauptspannungstrajektorien (Abb. 13) wurde eine gut übereinstimmende Kurve leicht gefunden. Die angenommene Vergrößerung für jeden Stab wurde zum Vergleich in Zahlentafel 4 auch gezeigt.

Im Verlaufe dieser Versuche erkennen wir folgende Tatsachen:

(a) Die Bruchform hängt von dem betreffenden Stoff und der Stabform ab,

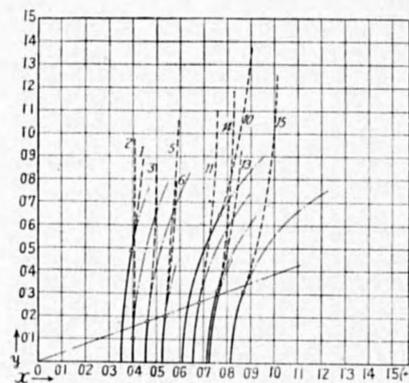


Abb. 25.  
Konturkurven für flache oder prismatische  
Stäbe. (Verschiedenes Eisenmaterial).

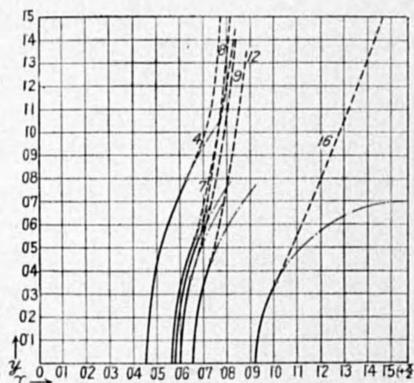


Abb. 26.  
Konturkurven von Rundstäben  
(Eisenmaterial Nr. 4, 7, 8, 9 und 12 und  
Aluminium Nr. 16).

wenn der Einfluss äußerer Umstände, z.B. die Versuchsgeschwindigkeit, Korngröße der Kristallite u.s.w., beseitigt ist.

(b) Die Flachstäbe Nr. 2, 3, 5, 11 und 14 (Abb. 25) sind aus einem Kohlenstoffstahl (0,65% C) und mit fast gleicher Form hergestellt. Aber durch zweckmäßige Wärmebehandlung verändert sich die Querschnittsverminderung "q" und die wahre Zerreißspannung  $\sigma_B$ . In der Tat wird für das Gebiet  $q=40\%$  die Breite des engsten Randes "x<sub>0</sub>" mit wachsender Querschnittsverminderung heraufgesetzt, während ausserhalb dieser Grenze x<sub>0</sub> abnimmt, wie Stab Nr. 5 erkennen lässt. Bild 17 zeigt ferner klar, dass der Normalspannungszustand über der engsten Querebene umso gleichmäßiger wird, je kleiner x<sub>0</sub> ist. Hieraus folgt, dass mit zunehmender Querschnittsverminderung "q" x<sub>0</sub> grösser und damit die Spannungsverteilung ungleichmäßiger wird und umgekehrt, wenn "q" eine Grenze überschreitet. Der Abstand des Kurvenwendepunktes in der Stabrichtung von der engsten Stelle wurde nur wenig beeinflusst. Diese Einschnürvorgänge sind bei Versuchen mit Rundstäben ganz ähnlich.

(c) Wenn "q" verhältnismässig klein ist, wie z.B. bei gewöhnlichem Kohlenstoffstahl (Flusseisen), dann besteht die Bruchfläche in der Regel aus einer zur Stabachse senkrechten Basisfläche und trichterförmigen Wänden. Das Verhältnis zwischen der Breite der Basis und der Randbreite hängt von dem betreffenden Stoff und auch von der Stabform ab. Die Untersuchungen ergaben, dass bei kleinen oder bei merkwürdig grösseren Werten von "q" auch die Basis gross und der Trichterrand relativ schmal wird, sodass schliesslich beim Bruch nur die Basis allein ausgebildet wird, und nur ganz kleine und unregelmässige Scherbruchstellen über der engsten Querebene vorkommen, sodass der Bruch trotz grosser Einschnürung spröde aussieht (für dehbare und hochschmelzende Metalle, Abb. 24, 41, 42 u.s.w.). Bei reinem Metall, z.B. Blei, wurde die örtliche Einschnürung grösser, und es tritt vielfach ein merkwürdig gewundener Bruch fast ohne Basis auf. Bei einem solchen weichen Metall ist die Massenbewegungsfähigkeit sehr gross und durch sekundäre Spannungen nur sehr gering beeinflusst.

(d) Verhältnismässig hochschmelzende Metallstoffe, z.B. Armco-Eisen, das eine Formänderungsfähigkeit von  $q > 70\%$  hat, zeigen infolge der grösseren Gleichmässigkeit der Verformung in mancher Hinsicht ein anderes Verhalten. So wird die hyperbolische Einschnürgrundkurve "ab," Abb. 14, flacher,

Zahlentafel 4. Die Ergebnisse der

Kontur-Kurve Nr.	Der Form des Stabes	Die Stoffsorte	$b_0, t_0$ oder $d_0$ (mm)	$f_0$ (mm <sup>2</sup> )	$b, t,$ oder $d$ (mm)	$f$ (mm <sup>2</sup> )	$q$ (%)	$q_b, q_t$ oder $q_d$ (%)
1*	Rechteckig	Flodineisen Stab (Gleich mit Nr. 13)	22 10.1	222	12.6 5.1	64.3	71.0	42.7 45.5
2	Flach	Stahlplatte	24.9 1.8	43.7	23.6 1.6	38.3	12.2	5.6 7.0
3	Flach	Stahlplatte	24.96 1.7	42.4	21.7 1.5	31.6	25.5	13.3 14.0
5	Flach	Stahlplatte	24.9 1.7	42.4	20.8 1.1	23.7	44.1	16.7 33.0
6	Flach	Armcoeisen platte	25 4.1	102.5	18.0 2.4	42.3	58.7	23.0 42.7
10°	Rechteckig	Armcoeisen Quadratstab	11.8 5.2	61.3	6.6 2.8	18.5	70.0	44.0 46.2
11	Flach	Stahlplatte	24.96 1.66	41.4	21.3 1.4	29.6	28.6	14.9 16.3
13*	Rechteckig	Flodineisen Stab (Gleich mit Nr. 1)	22 10.1	222	12.6 5.1	64.3	71.0	42.7 45.5
14	Flach	Stahlplatte	24.9 1.7	42.35	20.1 1.25	25.0	40.9	19.3 29.4
15	Flach	Swedischeisen Band	25.0 4.2	103.7	18.8 2.4	44.8	56.8	24.8 42.6
4°	Rund	Armcoeisen Quadratstab	9.0	63.5	4.6	16.6	73.5	49.9
7	Rund	Flusseisen Stab	14.0	154.8	8.3	53.6	65.4	41.2
8	Rund	Flusseisen Stab	14.0	154.8	8.3	53.6	65.4	41.2
9	Rund	Flusseisen Stab (Für Risen Beton)	19.0	283.5	11.0	95.0	66.5	42.1
12	Rund	Flusseisen Stab (Für Risen Beton)	16.0	206.1	9.1	65.0	68.5	43.8
16	Rund	Echte Aluminium	19.7	305.0	8.8	61.0	80.0	55.3

\* Nr. 1 Kurve, über dem zur Dicke parallelen Längsschnitt,

\* Nr. 13 Kurve, über dem zur Breite parallelen Längsschnitt,

o Nr. 10 Kurve, Stab Nr. 3 vorgegangener Zugversuche (Abb. 2),

o Nr. 4 Kurve, Stab Nr. 1 vorgegangener Zugversuche (Abb. 3).

 $b_0$  Anfangsstabbreite,  $b$  kleinste Breite des zerrissenen Stabes, $t_0$  Anfangsstabdicke,  $t$  kleinste Dicke " " " $d_0$  Anfangsstabdurchmesser,  $d$  kleinster Durchmesser des " " " $f_0$  Anfangsquerschnitt,  $f$  kleinster Querschnitt " " "

Stäbe in Abbildung 25 und 26.

$l$ (mm)	$\delta$ (%)	$\sigma_B$ (kg/mm <sup>2</sup> )	$P_3$ und ( $S_3$ )	$P_h$ und ( $S_h$ )	$P_z$ und ( $S_z$ )	Vergrößerung der Kontur-Kurve	Vergl. Abbildung	Bemerkung
100	41.9	38.9	2840 (12.8)	6225 (28.0)	2500 (11.3)	24	Abb. 42	0.02 % C, bei Temp. 1040°C, 1 Stunde ausgeglüht.
50	15.8	86.4	1930 (44.2)	3310 (75.9)	3310 (75.9)	7	Abb. 34 und 35	0.65 % C, nicht Wärme behandelt.
50	21.4	97.0	2025 (47.8)	3270 (77.2)	3070 (72.4)	8.5	—	0.65 % C, nicht Wärme behandelt.
50	24.4	114.9	2010 (47.5)	2930 (69.2)	2730 (64.6)	10	Abb. 36 und 37	0.65 % C, bei Temp. 700°C, 10 Min. geglüht.
100	34.7	63.8	1770 (17.3)	3175 (31.0)	2700 (26.4)	11	Abb. 43	Bei Temp. 1040°C, 1 Stunde ausgeglüht.
60	41.6	56.2	—	1670 (27.2)	1040 (17.0)	37	Tafel 3 und Abb. 24 usw.	Bei Temp. 1000°C, 1 Stunde ausgeglüht.
50	22.0	102.5	2130 (51.4)	3190 (77.0)	3030 (73.2)	13	—	0.65 % C, bei Temp. 600°C, 20 Min. geglüht.
100	41.9	38.9	2840 (12.8)	6225 (28.0)	2500 (11.3)	20.7	Abb. 41	0.02 % C, bei Temp. 1040°C, 1 Stunde ausgeglüht.
50	25.2	109.1	1980 (46.8)	2960 (70.0)	2730 (64.5)	15	Abb. 37 und 38	0.65 % C, bei Temp. 700°C, 5 Min. geglüht.
100	23.0	58.1	1900 (18.3)	3140 (30.3)	2600 (25.1)	17.75	Abb. 39 und 40	Bei Temp. 1040°C, 1 Stunde ausgeglüht.
60	43.3	66.3	—	1830 (28.8)	1100 (17.3)	39.0	Abb. 2,4,6 Nr. 1 stab	Bei Temp. 1000°C, 1 Stunde ausgeglüht.
17.6	59.1	77.6	3534 (22.8)	5942 (38.4)	4160 (26.9)	27.4	Abb. 44	0.1 % C, bei Temp. 910°C, 1 Stunde ausgeglüht.
35.2	44.2	74.4	3583 (23.2)	5806 (37.6)	3987 (25.8)	28	—	0.1 % C, bei Temp. 910°C, 1 Stunde ausgeglüht.
150	34.7	88.1	8105 (28.6)	12320 (43.5)	8810 (31.1)	21	Abb. 27 und 28	Nicht Wärme behandelt.
130	33.1	96.6	5295 (25.7)	8225 (39.9)	6280 (31.0)	27.5	Abb. 29 und 30	Nicht Wärme behandelt.
—	—	24.0	—	—	1465 (4.8)	42	Abb. 31 und 32	Von Prof. P. Ludwick. (1926)

 $q$  Querschnittsverminderung =  $(f_0 - f) / f_0$ ,  $q_b$  Breitereverminderung =  $(b_0 - b) / b_0$ , $q_t$  Dickeverminderung =  $(t_0 - t) / t_0$ ,  $q_d$  Durchmessererminderung =  $(d_0 - d) / d_0$ , $l$  Messlänge der Probe,  $d$  Bruchdehnung, $P_3$  Streckgrenzlast (kg),  $P_h$  Höchstlast (kg),  $P_z$  Zerreißlast (kg), $\sigma_B$  Wahre Bruchspannung =  $P_z / f$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $S_3$  Streckgrenze =  $P_3 / f_0$  (kg/mm<sup>2</sup>), $S_h$  Festigkeit =  $P_h / f_0$  (kg/mm<sup>2</sup>),  $S_z$  Zerreißfestigkeit =  $P_z / f_0$  (kg/mm<sup>2</sup>).

und daraus folgt, dass ähnlich wie der Stoff, der nach geringer Dehnung zerreißt, die Bruchfläche fast nur eine "Basis" besitzt.

(3) Versuche mit Flusseisen-Rundstäben (Stab Nr. 9 in Abb. 26 und in Zahlentafel 4).

Abb. 27 zeigt das Verhältnis zwischen der Bruchfläche "BF" und den Spannungszuständen im Augenblick des Bruches. Abb. 28 zeigt die Ansicht der wahren Bruchform über der durch Längsschnitt halbierten Ebene.

In Abb. 27 bedeutet die Kurve "abc" die Hälfte des Längsschnittes des zerrissenen Stabes, die Kurve "abe" eine der aus Gl. 17 gerechneten

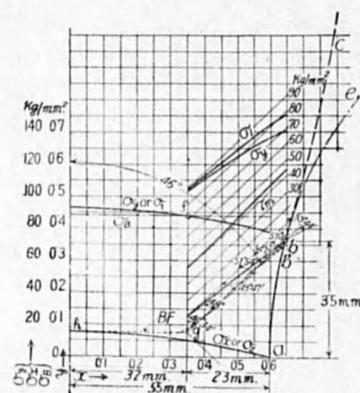


Abb. 27.

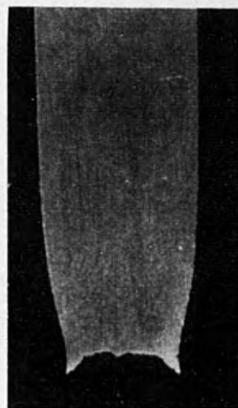


Abb. 28.

Hauptspannungstrajektorien, der Punkt "b" den Kurvenwendepunkt, die punktierte Linie "BF" die Bruchfläche, die aus einer zur Stabachse fast senkrechten Basisfläche "hg" (die Trennungsfäche) und einer zur Stabachse durchschnittlich unter ungefähr 46° geneigten trichterförmigen Wand gb' (die Gleitfläche) besteht. Die halbe Breite im engsten Querschnitt beträgt 5,5 mm und der Abstand des Kurvenwendepunkte "b" von der Mittelebene "ab" ist 3,5 mm.

Die Spannungszustände  $\sigma_y$  (Gl. 36') und  $\sigma_B$  ( $2 \cdot 260 K_0 = 88,1 \text{ kg/mm}^2$ ) über der engsten Ebene allein sind hier gezeigt, weil zwischen den Spannungszuständen über dem engsten Querschnitt einerseits und der Trennungsfäche "hg" andererseits geringe Unterschiede bestehen, wie auch Abb. 22 zeigt. Diese Spannungszustände erklären zwanglos den Bruchvorgang. Links vom Schnittpunkt "f" der  $\sigma_y$ - und der  $\sigma_B$ -Linie, also im Mittelteil ist  $\sigma_y > \sigma_B$ . Dort beginnt der

Bruch. Die entsprechenden Spannungszustände von  $\sigma_y$  (Gl. 39 und 41),  $\sigma_x$  (Gl. 42),  $\sigma_1$  (Gl. 2) und  $\tau_m$  (Gl. 1) über der Gleitfläche zeigen, dass hier die Grösse von  $\tau_m$  den Gleitbruch des Materials noch nicht verursachen kann, da die grösste Schubspannung  $\tau_m$  an der Stelle "g"  $39,9 \text{ kg/mm}^2$  und  $\tau_m/\sigma_y = 39,9/87,9 = 0,5$  erreicht.

Jedoch muss man die Erfahrungstatsache überlegen dass nach der Trennung des Mittelteils "hg" am Querschnitt mit kleinster wirksamer (nutzbarer) Fläche und besonders an der Ecke "g" (kerbwirkung) das grösste Spannung eintritt, wodurch dann zuerst unter den Winkel 46,5° Scherbruch folgt.

Bei diesem Versuch wurde sogar ein Unterschied im Verlaufe der Gleitfläche deutlich beobachtet. Diese Fläche wurde bei manchem Forscher als eine Ebene angenommen. Aber in der Tat (Abb. 28 u.s.w.) verläuft die nach vorhandenen Hauptschublinien, bzw. auf zur Stabachse unter 46,5° bis 59°49' geneigten Schubspannungstrajektorien (Abb. 27).

(4) Versuche mit Flusseisen-Rundstab (Stab Nr. 12 in Abb. 26 und in Zahlentafel 4).

Die Abb. 29 zeigt das Verhältnis zwischen der Bruchfläche "BF" und den Spannungszuständen im Augenblick des Bruches. Die Abb. 30 zeigt den zerrissenen Stab. Die Spannungszustände wurden auch bei dem wahren Bruch mit guter Näherung berechnet.

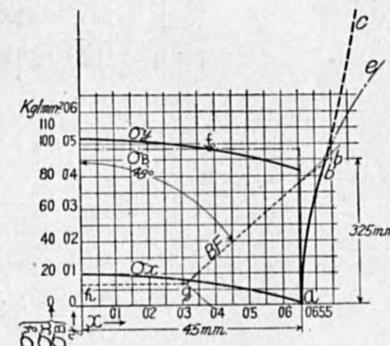


Abb. 29.



Abb. 30.

(5) Untersuchung mit Aluminium-Rundstab (Stab Nr. 16 in Abb. 26 und in Zahlentafel 4).

Die Abb. 31 zeigt das Verhältnis zwischen dem Riss "BF" und den Spannungszuständen im Augenblick der Trennung. Die Abb. 32 zeigt den Stab mit dem Anriss von Prof. Ludwik (1926).

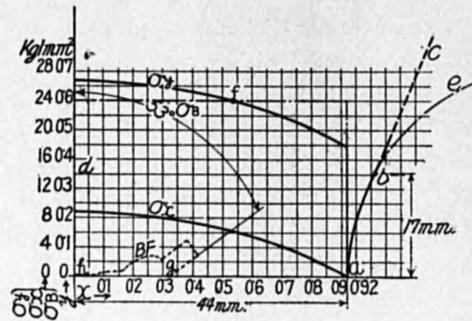


Abb. 31.



Abb. 32.

## (6) Versuche mit Kohlenstoffstahl (0,65 % C) — Flachstab.

Abb. 33 zeigt im Stab (Nr. 2 in Abb. 25 und in Tafel 4) das Verhältnis zwischen der Bruchfläche "BF" und den Spannungszuständen im Augenblick des Bruches. Abb. 34 zeigt den zerrissenen Stab, der sich als spröde erwiesen hat und nach gering gebliebener Dehnung zerrissen ist.

Abb. 35 zeigt das Spannungsbild des Stabes Nr. 5 in Abb. 25 und in Zahlentafel 4, der aus dem gleichen Material wie Stab Nr. 2 hergestellt ist, jedoch bei einer Temperatur von 700°C 10 Minuten gegläht wurde, im Augenblick des Bruches. Abb. 36 zeigt den zerrissenen Stab. Man kann deutlich sehen, wie die Gleitfläche in der Richtung der Schubspannungstrajektorien verläuft.

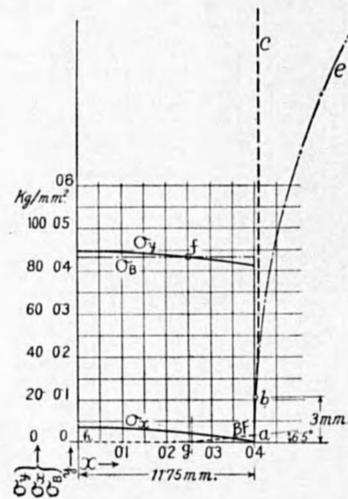


Abb. 33.



Abb. 34.

Abb. 35 zeigt das Spannungsbild des Stabes Nr. 14 in Abb. 25 und in Zahlentafel 4, der ebenfalls aus dem gleichen Material wie Stab Nr. 2 ist, jedoch bei einer Temperatur von 700°C

5 Minuten ausgeglüht wurde, im Augenblick des Bruches. Abb. 36 zeigt den zerrissenen Stab. Durch die in der Mitte der Bruchfläche gebildete Lücke ist ersichtlich, dass der Trennungsbruch des Materials zuerst in der Mitte eintritt.

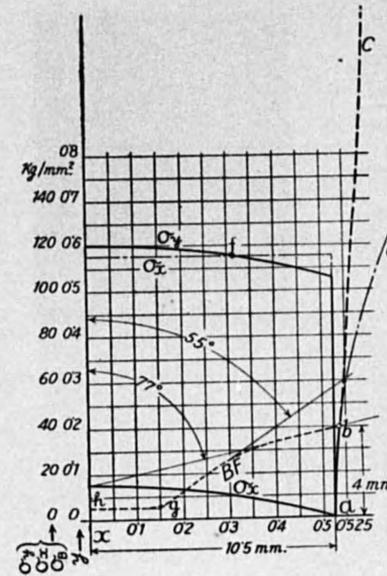


Abb. 35.



Abb. 36.

5 Minuten ausgeglüht wurde, im Augenblick des Bruches. Abb. 38 zeigt den zerrissenen Stab. Durch die in der Mitte der Bruchfläche gebildete Lücke ist ersichtlich, dass der Trennungsbruch des Materials zuerst in der Mitte eintritt.

(7) Versuche mit einem flachen, schwedischen Schweißstabeisenstab (Nr. 15 in Abb. 25 und in Zahlentafel 4).

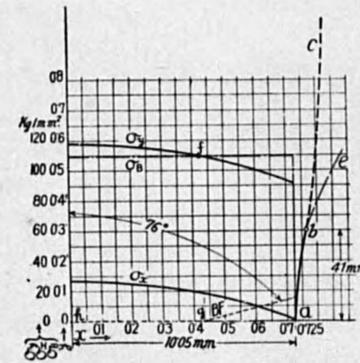


Abb. 37.



Abb. 38.

Abb. 39 zeigt das Verhältnis zwischen der Bruchfläche "BF" und den Spannungszuständen im Augenblick des Bruches. Abb. 40 zeigt den angerissenen Stab, der absichtlich nur bis zum Eintreten des Bruches belastet wurde.

Einige zerrissene Stäbe mit charakteristischer Bruchform mögen hier zur Vervollständigung noch gezeigt werden.

Abb. 41, Zerrissener Flodineisenstab, parallel zur Breite geschnitten. (Nr. 13 in Abb. 25 und in Zahlentafel 4).

Abb. 42, Zerrissener Flodineisenstab, parallel zur Dicke geschnitten. (Nr. 1 in Abb. 25 und in Zahlentafel 4).

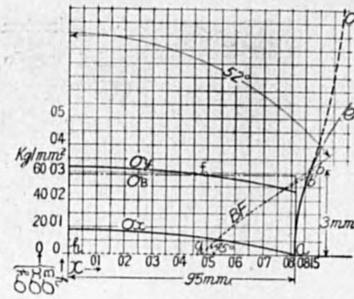


Abb. 39.



Abb. 40.

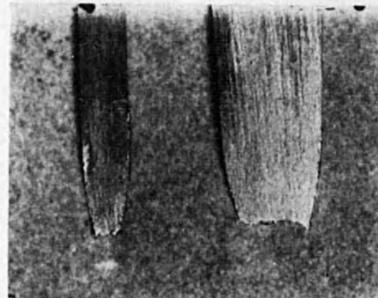


Abb. 41.

Abb. 42.

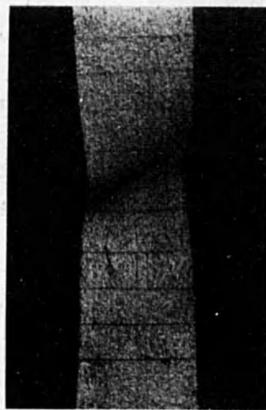


Abb. 43.



Abb. 44.

Abb. 43, Zerrissener Armeceisenstab. (Nr. 6 in Abb. 25 und in Zahlentafel 4).  
 Abb. 44, Zerrissener Flusseisenstab. (Nr. 7 in Abb. 26 und in Zahlentafel 4).  
 Lichtbild 8 ist 175 mal, alle übrigen sind 33 x vergrößert.

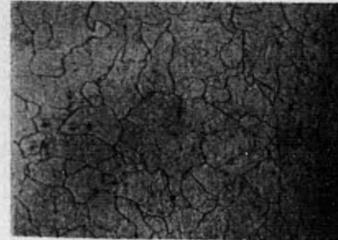


Photo. 1.



Photo. 8.

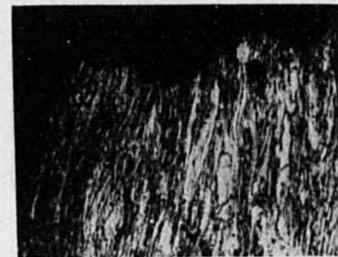


Photo. 2.



Photo. 3.

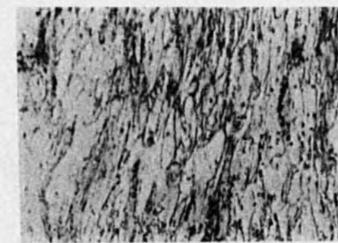


Photo. 4.

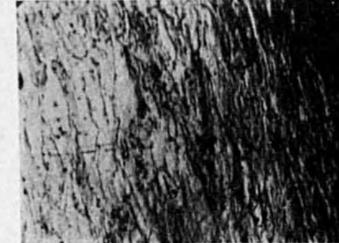


Photo. 5.



Photo. 6.

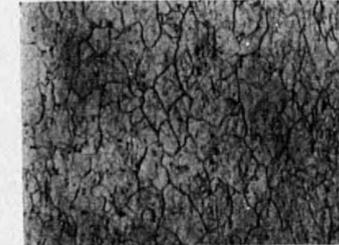


Photo. 7.

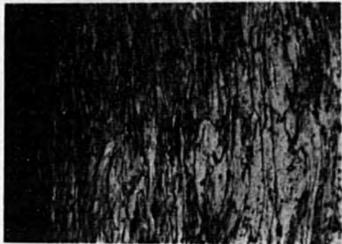


Photo. 9.

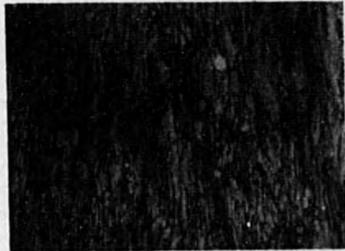


Photo. 10.

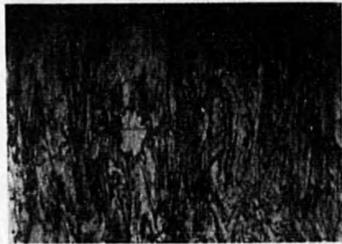


Photo. 11.

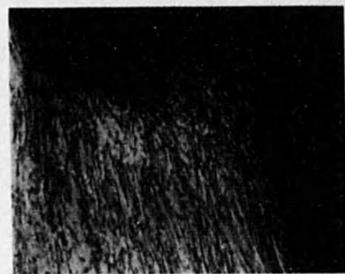


Photo. 12.



Photo. 13.

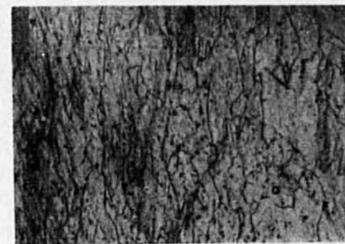


Photo. 14.

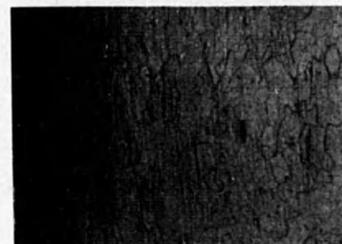


Photo. 15.



Photo. 16.



Photo. 17.



Photo. 18.

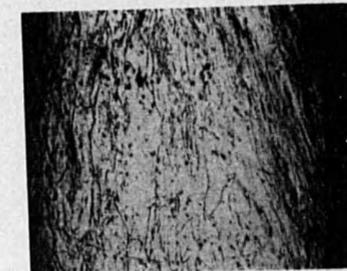


Photo. 19.

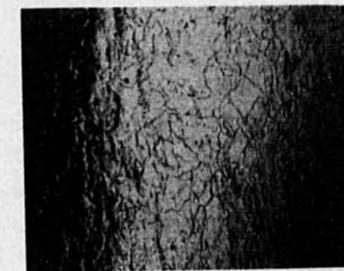


Photo. 20.

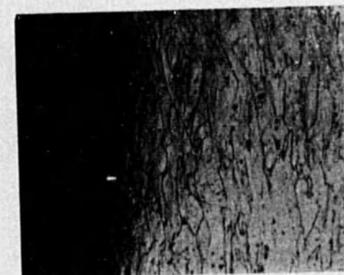


Photo. 21.

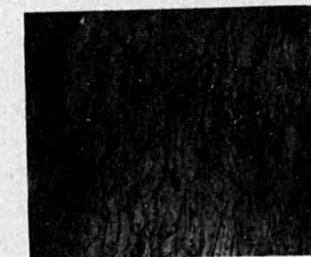


Photo. 22.

## Zusammenfassung (Schlusswort).

Im Folgenden seien die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit kurz zusammengefasst.

1. Die mechanischen Grundeigenschaften und der Verformungsvorgang beim Zerreißen von Zugstäben aus Metall wurden im Einschnürungsgebiet statisch und metallographisch untersucht und betrachtet.
2. Im eingeschnürten Teil des Stabes wurde eine sekundäre Zugspannung angenommen.
3. Mit Hilfe dieser Betrachtungen wurde der Zusammenhang zwischen Spannungs- und Verformungsgleichungen durch Einführung der komplexen Stromfunktion näherungsweise hergeleitet.
4. Die Konturkurve des eingeschnürten Zugstabes wurde jeweils einer durch diese Stromfunktion bestimmten Hauptspannungstrajektorie angeglichen und damit die Grösse und Richtung der auftretenden Normal- und Schubspannungen im Allgemeinen rechnerisch bestimmt.
5. Für verhältnismässig hochschmelzende Metalle wurde die Grundlage des Bruches durch die Spannungszustände (in Ebene) zwanglos geklärt.
6. Weiterhin wurde die Scherbruchfläche deutlich beobachtet und erwiesen, dass sie stets gegen die Basis der Bruchfläche geneigt, aber nicht eben, sondern gewölbt ist.
7. Der Einfluss der sekundären Spannung  $\sigma_z$  auf die mechanischen Eigenschaften wurden nachgewiesen und damit die Unterschiede der Ergebnisse in geometrisch ähnlichen Stäben begründet. Ferner folgt daraus, dass von sonst in der Querschnittsgrösse gleichen Stäben derjenige mit rundem Querschnitt die höchste Belastung erlaubt. Ausserdem erkennt man, dass beim Flachstab Dehnung und Querschnittsverminderung umso kleiner werden, je kleiner das Verhältnis "Dicke : Breite" wird.
8. Die Verformungsfähigkeit und die Festigkeit eines Materials zeigen sich am besten bei Zerreißstäben mit relativ kleinem Querschnitt.
9. Die Spannungen wurden aus der Form der Konturlinie des zerrissenen Stabes ermittelt. Da etwa vorhergegangene Kaltverformung, Warmbehandlung oder auch die Versuchsgeschwindigkeit die Form dieser Konturlinie beeinflussen, kann man mit diesem Verfahren den Einfluss von Vorbehandlung und Versuchsgeschwindigkeit auf die Eigenschaften des Materials bestimmen.

## Nachtrag: Über die rechnerische Lösung.

Durch Transformation der Gleichungen (II) auf die Hauptspannungstrajektorien wurden die Hauptspannungen direkt gerechnet.

Die Trajektorien werden durch die vorgegebenen Gleichungen (17) und (18)

$$\xi = \sin x_0 = \frac{\sin x}{\cosh y} = f(x, y), \quad (1)$$

$$\eta = \sinh y_0 = \frac{\sinh y}{\cos x} = g(x, y). \quad (2)$$

Bei obigen Trajektorien, die Gleichungen von Maxwell, die in ihrer speziellen Form wie folgt lauten:

$$\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + (\sigma_\eta - \sigma_\xi) \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^2} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + (\sigma_\eta - \sigma_\xi) \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}{\left[\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2\right]^2} = 0.$$

Und daraus erhält man:

$$\frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + (\sigma_\eta - \sigma_\xi) \frac{\xi(1 + \eta^2)}{(1 - \xi^2)(1 + \xi^2 \eta^2)} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + (\sigma_\eta - \sigma_\xi) \frac{\eta(1 - \xi^2)}{(1 + \eta^2)(1 + \xi^2 \eta^2)} = 0. \quad (4)$$

A. Die Gleichung der Hauptschubspannung  $K$ :

Wegen der Kontinuitätsgleichungen  $-\partial u / \partial x = \partial v / \partial y$  ist der vorgegebener Ansatz gleichbedeutend wie folgt geschrieben:

$$\sigma_x = -k \frac{\partial v}{\partial y} + p,$$

$$\sigma_y = k \frac{\partial v}{\partial y} + p.$$

Aus den allgemeinen Gleichungen  $\sigma_x = \sigma_\xi = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \tau_m$  und  $\sigma_y = \sigma_\eta = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \tau_m$ , kann man dann erhalten

$$\sigma_\xi = p - K, \quad (5)$$

$$\sigma_\eta = p + K. \quad (6)$$

Nach Einführung des obigen Ausdruckes gehen Gl. (3) und (4) in die folgende Gleichungen über:

$$\frac{\partial(p-K)}{\partial\xi} + 2K \frac{\xi(1+\eta^2)}{(1-\xi^2)(1+\xi^2\eta^2)} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial(p+K)}{\partial\eta} + 2K \frac{\eta(1-\xi^2)}{(1+\eta^2)(1+\xi^2\eta^2)} = 0. \quad (8)$$

Hiermit zwei Differentialgleichungen für die beiden Unbekannten  $\sigma_\xi$  und  $\sigma_\eta$  sind auch als diese beiden Differentialgleichungen für die beiden Unbekannten  $p$  und  $K$  geschrieben. Die Lösungen hängen natürlich sehr von den Randbedingungen ab, die erfüllt werden müssen. Wir wollen zuerst die Formeln (7) und (8) verwenden, so dass die Randbedingungen in  $K$  ausgedrückt werden sollen.

(1) Der Rand soll frei von äusseren Spannungen sein, also  $\sigma_\xi = 0$  für  $\xi = \xi_R$ , d.h.  $p_R = K_R$  und  $\partial p / \partial \eta = \partial K / \partial \eta$ .

Aus Gl. (8) folgt dann

$$K_R = p_R = C \sqrt{\frac{1+\eta^2\xi_R^2}{1+\eta^2}}. \quad (9)$$

Über den Rand, z.B., Kurve "a<sub>1</sub>b<sub>1</sub>" (Abb. 13), ist also  $K$  nach dieser Formel verteilt. In der vorigen Untersuchung ist es aber ersichtlich dass  $K$  über der engsten Querebene "oa" und an der äusseren Kontursicht des Grundteiles "ab" den grössten beständigen Werte erreicht. So haben wir in vorliegende Versuche mit dem Armcoeisenstab, s.a. Zahlentafel 3, den Wert von  $K$  über den Rand als unveränderlich gerechnet. Der Unterschied zwischen beiden Ergebnisse unten diesen Annahme und mit Gl. (9) ist jedoch nicht so gross, und in der Nähe des Grenzpunktes "b" höchsten 12% erreicht.

(2) Die weiteren Werte hängen nun ganz von der zweiten Grenzbedingung ab. Man kann vorschreiben, dass für  $\eta = 0$  ( $y = 0$ ), das ist, über der engsten Querebene "oa," überall gleiches  $K_0$  herrscht.

Bei der Fortsetzung dieser Lösung in das Innere des Stabes müssen die oben gefundenen Randwerte von  $K$  berücksichtigt werden. Über der  $\xi$ -Kurve ist also  $K$  nach folgender Formel verteilt:

$$K = K_0 \sqrt{\frac{1+\xi^2\eta^2}{1+\eta^2}}. \quad (10)$$

Das Ergebnis in einem  $\eta$ -Schnitt sieht dann so aus, dass am Rand das grösste, in der mittleren Faser das kleinste ist (Vgl. Zahlentafel 3 auch).

B. Die Gleichungen der Hauptspannungen  $\sigma_\xi$  und  $\sigma_\eta$  mit Berücksichtigung von  $K$ :

Nach Einführung des oben gefundenen Ausdruckes von  $K$  anstatt  $(\sigma_\eta - \sigma_\xi)/2$ , in Gl. (3) und (4) muss sich eine Lösung für die Hauptspannungen finden lassen.

Gl. (3) und (4) geht daraus in die folgende Gleichungen über:

$$\frac{\partial\sigma_\xi}{\partial\xi} + 2K \frac{\xi(1+\eta^2)}{(1-\xi^2)(1+\xi^2\eta^2)} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial\sigma_\eta}{\partial\eta} + 2K \frac{\eta(1-\xi^2)}{(1+\eta^2)(1+\xi^2\eta^2)} = 0. \quad (12)$$

Das Integral von Gl. (11) und (12) würden den Ausdruck der Hauptspannungen angeben.

$$\sigma_\xi = K \ln \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2\eta^2} + C_1, \quad (13)$$

$$\sigma_\eta = K \ln \frac{1+\xi^2\eta^2}{1+\eta^2} + C_2. \quad (14)$$

Da aber die Grenzbedingung für die Integrationskonstante  $C_2 = f(\xi)$  nicht bekannt ist, kann man auf diesem Weg  $\sigma_\eta$  nicht bestimmen.

So erhält man direkt

$$\sigma_\eta = 2K + \sigma_\xi. \quad (15)$$

Für die Spannungen über den engsten Querschnitte "oa," setzt man  $\eta = 0$  so gehen die obigen Gleichungen in die folgenden über:

von Gl. (13)

$$\sigma_{\xi 0} = K_0 \ln(1-\xi^2) + C' = 2K_0(\ln \cos x + C), \quad (16)$$

von Gl. (15)

$$\sigma_{\eta 0} = 2K_0 + \sigma_{\xi 0} = 2K_0(1 + \ln \cos x + C). \quad (17)$$

Diese beiden letzten Gleichungen entsprechen den beiden vorgegangenen Gleichungen (35') und (36').

ABRIDGED PAPERS.

**On the Detonation in Internal Combustion Engines.**

BY

Prof. **Torajirō Watanabe.** *Kōgakusi.*

(Original Paper, Journal of the Fuel Society of Japan, Vol. 4, No. 37, October, 1925,  
pp. 920-938.)

## On the Influence of Crystal Growth of Mild Steel upon its Mechanical Properties.

BY

Assist. Prof. **Kiyoshi Yokota.** *Kōgakushi.*

The growth of crystal grains in metals caused by annealing and the influence of the crystal size upon their mechanical properties have been studied by several investigators. Recently experiments have also been carried out for finding some relations between the grain-size and mechanical properties.

According to Prof. Stead, the mechanical disease is not due to any change in the crystals themselves, but is due to the intercrystalline weakness. There is, however, another type of weakness, so called the intracrystalline one. According to the first hypothesis, the greater the number of grains, the stronger should be the resistance to the external force. H. T. Augus has experimentally found an empirical formula concerning the hardness  $H$  and the number of grains  $n$  in the case of copper, that is, a law " $H$  is proportional to  $\sqrt{n}$ ."

But according to the second hypothesis, the result should be contrary.

In the case of steel, there has, however, been found, up to the present, no definite relation between the grain-size and the mechanical properties, except a qualitative relation that the decrease in grain-size is accompanied by an increase in the hardness and improvement in the tensile properties. The properties of steel varies considerably with a slight changes in the carbon content and also with heat treatments. The grain-growth in steel is complicated by virtue of the existence of transformations.

In the author's experiment, after necessary heat treatments of the mild steels, their grain-size was determined by Jeffries' method, and at the same time some mechanical tests, such as hardness test, tensile test and repeated impact test, were made. The results of these tests were discussed in connection with the grain-size. They also suggest that the material may be exposed to an unfavorable condition, when it is heated beyond a certain limit of temperature.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 29, No. 112, August, 1926, pp. 481-496.)

## Two Dimensional Jets Deflected by Wall Surfaces.

BY

Prof. **Yōkichi Matsumoto.\*** *Kōgakuhakushi.*

The paper describes the results of analytical and experimental investigations of jets of two dimensions deflected by two straight walls making corner angles as well as those deflected by curved surfaces.

From the results of the calculation and the experiments, the author shows that the initial and final directions of a jet deflected by a curved vane deviates by some angle from the tangential directions of the inlet and exit edges of the vane respectively as shown in Fig. 1.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 30, No. 122, June, 1927, pp. 257-294.)



Fig. 1.

\* Former Professor of Waseda University.

## On the Spheroidization of Carbides in Alloy Steels.

BY

Assist. Prof. **Kiyoshi Yokota.** *Kōgakusi.*

The spheroidization of carbides in eight kinds of steels, all having a pearlitic structure, and containing silicon, nickel, cobalt, tungsten, vanadium, molybdenum, sulphur and phosphorus, were investigated by the same method used by Prof. T. Ishihara in his investigation of the same subject, and the lower and upper limits of the spheroidizing temperature were determined.

In addition the author made a detailed observation on the spheroidization which takes place in the vicinity of the  $A_c$  transformation in pearlitic steels.

(Original Paper, *Kinzoku no Kenkyū* (Journal of the Metal Institute), Sendai, Vol. 5, No. 4, April, 1928, pp. 121-148.)

## The Effects of Heating Temperature and Time, and also Aging upon the Internal Stresses in a Cold Worked Mild Steel.

BY

Assist. Prof. **Eitarō Murata.** *Kōgakusi.*

The present writer has measured the change of initial stresses in a cold drawn mild steel shaft (0.25 % C) under various temperatures and durations of heating, and also aging, by Heyn's method using Zeiss' optimeter; and obtained the following results.

(1) The initial stresses have gradually released by heating up to about 300°C, markedly over 300°C, and completely at about 620°C.

(2) At each temperature of heating, the release of initial stresses is remarkable during the first 30 min. of heating, and asymptotic beyond this point. At 300-600°C, especially about 400°C, however, it is progressing even in 8 hr. of heating.

(3) The release by aging are remarkable during about 20 days after cold working and asymptotic beyond this point.

(4) Even a 4 years old test piece showed high initial stresses and the distribution of initial stresses somewhat changed.

(Original Paper, *Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan*, Vol. 31, No. 136, August, 1928, pp. 366-390, and *Proceedings of the World Engineering Congress, Tôkyō*, 1929, Vol. 6, pp. 205-220.)

**A Thermodynamical Study on the Discharge of Gas  
through Orifices and Nozzles.**

BY

Prof. **Torajirô Watanabe.** *Kôgakushi.*

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 21,  
No. 136, August, 1928, pp. 672-691.)

---

**Movement of the Irrotational Vortex in a Limited Field.**

(First Report: On Flow in a Limited Field.)

BY

Prof. **Sadatosi Ihara.** *Kôgakuhakushi.*

In the course of the experiment on the flow of a fluid, there is a phenomenon, often met, that a vortex occupies itself in the neighbourhood of a stagnation point of flow. If the fluid be considered as nonviscous, the flow be potential and the vortex be an irrotational, the state in which the vortex occupies its position in the flow can be treated as a combined state of the each existency which will fulfil the field independently.

Thus, in this paper, (a) the movements of vortices are discussed, (b) the potential functions of the vortices and flows are deduced by the method of conformal representation with several numerical examples and (c) the combined states of the vortex and flow are also discussed and are accompanied by several examples concerning the fluid motion in the cylinder of two cycle internal combustion engines of port scavenging type.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 31,  
No. 136, August, 1928, pp. 744-777.)

---

## On the Potential Flows past Curved Wall Surfaces.

BY

Prof. **Yōkichi Matsumoto**.<sup>\*</sup> *Kōgaku-hakushi.*

**Minoru Nakano.** *Kōgaku-hakushi.*

The paper describes the mathematical investigation of two dimensional flows of non-viscous fluid bounded wholly or partly by curved wall surfaces. The analytical solutions of the problems are obtained by assuming velocity distributions along walls and problems in more than twenty particular cases are worked out numerically, among which those of flows past Venturi meter, Pitot tube, nozzle, knee, etc. are discussed as two dimensional problems.

The authors point out that the pressures measured along the walls of Venturi meter differ from the mean pressures due to the corresponding sections of the flow, and that in order to make the coefficient approach unity, the corners at the both ends of the conical tube should be rounded off, and the pressures along the walls should be measured at positions as far from the said corners as possible.

With regard to Pitot tube, problems in three particular cases are worked out and the influence of the sectional shapes of the tubes on both dynamic and static pressures are discussed.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 31, No. 136, August, 1928, pp. 778-809.)

---

<sup>\*</sup> Former Professor of Waseda University.

## On Flow in a Limited Field.

(Second Report.)

BY

Prof. **Sadatōsi Ihara.** *Kōgaku-hakushi.*

In the present paper the author treats the potential flows of the sink and source lying on the straight boundaries of the field in a half strip form. Seven flow modes in three cases are discussed.

As an extension of one of the flow modes a vortex is superposed on a source situated at a point in the limited field.

Thus, the author studies, as an example of the above flow, the manners of motion of water with a whirling of water in the draft tube pit of a water turbine. The distribution of velocity and pressure, the profiles of free surfaces and the position of stagnation are determined.

The results of calculations well agree with those of gentle flow in the experiments with a model pit and draft tube carried out by the author in the Hydraulic Laboratory of Waseda University and the experiments show that the characteristics yet remain even in the agitational flow.

The stagnation point corresponds to the position at which the free surface takes maximum height and its position on the boundaries suggests the strength of a whirling effort. At a point of draft tube outlet, the free surface attains a considerably low level which may be accounted for one of the causes of the vibration of a draft tube.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 32, No. 143, March, 1929, pp. 121-135.)

## Some Studies of Stress Distribution in the Thick Cylinder under the Internal Pressure.

BY

Assist. Prof. Tokuzō Suzuki. *Kōgakusi.*

This paper is to know the difference of stress between the elastic calculation and the measurement of stress distribution in thick cylinder wall under the internal pressure, using the photo-elastic apparatus.

The phenolite test pieces of 0.3 cm thickness subjected by oil pressure are fitted on the pressure tube shown in Fig. 1, which have the outside diameter of 3 cm and are inserted a thin rubber tube.

In the measurement of the stresses by photo-elastic method, the differences of radial and tangential stresses are measured using a comparator, and the summation of them calculated by the Filon's method respectively, and then the two stresses are found from arithmetical treatment individually.

In calculation of the stresses the following equations are used,

$$\sigma_r = \frac{P_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{r_a^2}{r^2} - 1 \right),$$

$$\sigma_t = \frac{P_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left( \frac{r_a^2}{r^2} + 1 \right).$$

Size of Test Pieces, Pressure, Etc.

	Inside Diam.	Outside Diam.	Pressure	Remarks
A	3 cm	5 cm	28.1 kg/cm <sup>2</sup> 31.6 35.2	Ring, no hole.
B	"	6	"	" " "
C	"	8.8	31.6 35.2	" " "
D	"	8	35.2	Ring with 6×1.1 φ holes.
E	"	8.8	"	Ring with 4×0.9 φ holes.
F	"	6×6	"	Square with 4×0.8 φ holes.
G	"	"	"	Square, no hole.

52

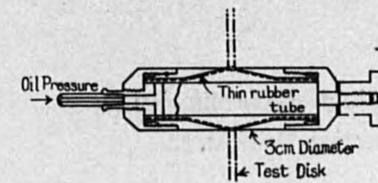


Fig. 1.

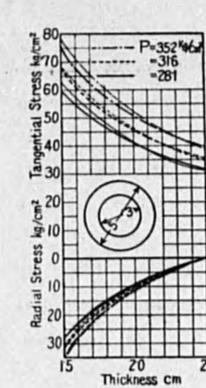


Fig. 2.

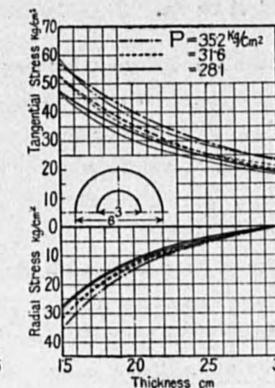


Fig. 3.

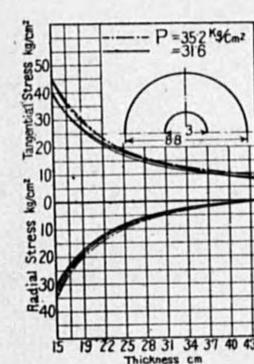


Fig. 4.

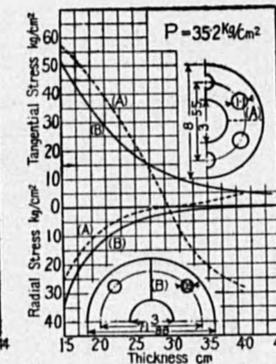


Fig. 5.

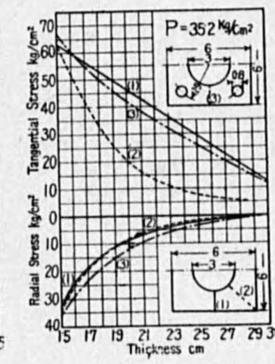


Fig. 6.

### Results.

The stress distributions in five pieces are shown in Figs. 2, 3, 4 and 5 respectively, in which the thick lines are for the measured values and thin lines show the calculated values. And as a special case the square pieces are

measured and the stresses are shown in Fig. 6.

The difference of stresses between the measurements and calculations is very small in radial direction, and we can conceive them as coincidence, but in the tangential direction the difference is somewhat large and has ± signs, especially in the thin cylinder where they reach to the amount of 8 %.

**On Flow in a Limited Field Accompanied  
by a Free Vortex in its Region.**

BY

Prof. **Sadatosi Ihara.** *Kōgakuhakusi.*

(Original Paper, Proceedings of the World Engineering Congress, Tōkyō, 1929, Vol. 4, pp. 75-96.)

**An Empirical Formula for the Discharge over Rectangular  
Weirs with Complete or Slightly  
Incomplete Contractions.**

BY

Prof. **Iwao Oki.** *Kōgakuhakusi.*

The equation of discharge for rectangular weir is

$$Q = C \sqrt{2g} B H^{\frac{3}{2}} \quad (1)$$

in which  $Q$  is the discharge,  $B$  the length of the weir,  $H$  the head and  $g$  the acceleration due to gravity.

$C$ , a coefficient of discharge, is written in the form

$$C = 0.6224 \left[ 1 + f\left(\frac{1}{H}\right) \right] \left[ 1 - F\left(\frac{H}{B}\right) \right] \left[ 1 + \phi\left(\frac{h}{H}\right) \right], \quad (2)$$

where the constant 0.6224 corresponds to the constant 3.33 in Francis' formula,<sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} Q &= 3.33 (B - 0.2 H) \left[ (H + h)^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right] \\ &= 3.33 \left( 1 - \frac{2}{10} \frac{H}{B} \right) \left[ \left( 1 + \frac{h}{H} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{h}{H} \right)^{\frac{3}{2}} \right] B H^{\frac{3}{2}} \quad (3) \end{aligned}$$

In the equation (2),  $1 + f(1/H)$  is for the effect of viscosity when the head  $H$  is very low.  $1 - F(H/B)$  is for the effect of the contractions of stream flowing over the weir.  $1 + \phi(h/H)$  is for the effect of the velocity of approach  $v$  in the flume,  $h$  being the velocity head  $v^2/2g$ .

i. The factor  $1 - F(H/B)$ . The results of Frese's experiments<sup>(2)</sup> are taken for determining the fundamental form of the function  $F(H/B)$ . In his experiments the velocity of approach was so small that we can write

(1) J. B. Francis, *Lowell Hydraulic Experiments*, 1883.

(2) F. Frese, *Versuche über den Abfluss des Wassers bei Vollkommenen Überfallen*, V.D.I., 1890.

$$C = 0.6224 \left[ 1 + f\left(\frac{1}{H}\right) \right] \left[ 1 - F\left(\frac{H}{B}\right) \right]. \quad (4)$$

For higher heads,  $f(1/H)$  being negligibly small, the formula reduces to

$$\frac{C}{0.6224} = 1 - F\left(\frac{H}{B}\right). \quad (5)$$

The actual values of  $C/0.6224$  are calculated from the results of Frese's experiments and plotted in Fig. 1. From these the author has adopted an equation

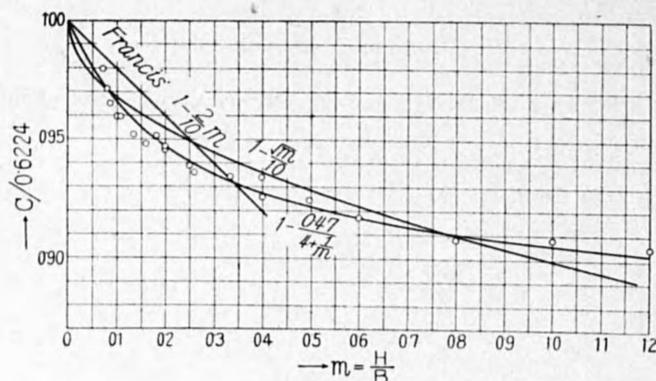


Fig. 1.

Values of  $C/0.6224$  from Frese's experiments for heads  $H \geq 1.312$  feet (0.4 m).

$$\frac{C}{0.6224} = 1 - \frac{1}{10} \sqrt{\frac{H}{B}} \quad (6)$$

to fit the result as far as  $H/B=1$ .

If the height of weir plate be small, the bottom contraction of stream cannot take place completely. In such a case we must write as

$$C = 0.6224 \left[ 1 + f\left(\frac{1}{H}\right) \right] \left[ 1 - \lambda \frac{1}{10} \sqrt{\frac{H}{B}} \right],$$

in which  $\lambda$  is a factor involving a term of the height of weir crest above the channel bed.

For sufficiently higher heads the factor  $\lambda$  can be determined by the equation

$$\lambda = \frac{1 - \frac{C}{0.6224}}{\frac{1}{10} \sqrt{\frac{H}{B}}}. \quad (7)$$

The values of  $\lambda$  are calculated from the results of Steward and Longwell's experiments,<sup>(3)</sup> in which the depth below the weir crest was one foot, but the velocity of approach in the flume was still very small. Excepting the cases for very small values of  $H/B$ , it is assumed that the relations

$$\lambda = 1 - \frac{1}{3} \frac{H}{B} \quad (8)$$

and, in general,

$$\lambda = 1 - \frac{1}{3d} \frac{H}{B} \quad (9)$$

hold, in which  $d$  stands for the height of the weir plate, measured in feet.

With this form of  $\lambda$  the equation for  $C$  becomes

$$C = 0.6224 \left[ 1 + f\left(\frac{1}{H}\right) \right] \left[ 1 - \frac{1}{10} \sqrt{\frac{H}{B}} \left( 1 - \frac{1}{3d} \frac{H}{B} \right) \right], \quad (10)$$

if the effect of the velocity of approach be negligibly small.

ii. The factor  $1 + f(1/H)$ . By transforming the equation (10) into the form

$$1 + f\left(\frac{1}{H}\right) = \frac{C}{0.6224} \frac{1}{1 - \frac{1}{10} \sqrt{\frac{H}{B}} \left( 1 - \frac{1}{3d} \frac{H}{B} \right)}, \quad (11)$$

the factor  $1 + f(1/H)$  is determined from the results of Steward and Longwell's experiments, in which the height of the weir plate was one foot and also from the results of Prof. Yendô's experiments<sup>(4)</sup> in which the height  $d$  was 1.15 feet.

In this manner we obtained two forms for factor  $1 + f(1/H)$ : namely

$$1 + f\left(\frac{1}{H}\right) = 1 + \frac{0.004}{H}, \quad (12)$$

and  $1 + f\left(\frac{1}{H}\right) = 1 + \frac{0.001}{H\sqrt{m}}$ , where  $m = \frac{H}{B}$ . (13)

iii. The factor  $1 + \phi(h/H)$ . Francis assumes, as shown in equation (3), the effect of the velocity of approach to be

(3) W. G. Steward and J. S. Longwell, Experiments on Weir discharge, Trans. Am. Soc. Civil Engineers, 1913.

(4) M. Yendô, S. B., Kôgakuhakusi, Professor of Yokohama Technological College, Some Results of Experiments in the Hydraulic Laboratory, College of Engineering, Kyûshû Imperial University; Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 18, No. 50, 1915.

$$\left(1 + \frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{h}{H}\right)^{\frac{3}{2}},$$

which becomes approximately, when  $h/H$  is small,

$$1 + \frac{3}{2} \frac{h}{H},$$

where  $h$  denotes the head due to the mean velocity of approach in the flume.

Fteley and Stearns take  $\alpha=2.05$  in the modified form

$$1 + \phi\left(\frac{h}{H}\right) = 1 + \alpha \frac{3}{2} \frac{h}{H}, \quad (14)$$

for weirs with two end contractions.

Hamilton Smith put  $\alpha=1.5$  for the same case. Now, taking  $\alpha=2$ , the factor becomes

$$1 + \phi\left(\frac{h}{H}\right) = 1 + 3 \frac{h}{H}, \quad (15)$$

from which we obtain

$$1 + \phi\left(\frac{h}{H}\right) = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{BH}{WD}\right)^2, \quad (16)$$

where  $W$  is the breadth of channel and  $D$  the depth of water in the channel, that is,  $D=d+H$ .

Then the final form of the coefficient  $C$  is

$$C = 0.6224 \left(1 + \frac{0.004}{H}\right) \left[1 - \frac{\sqrt{m}}{10} \left(1 - \frac{m}{3d}\right)\right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{BH}{WD}\right)^2\right], \quad (17)$$

and

$$C = 0.6224 \left[1 - \frac{\sqrt{m}}{10} \left(1 - \frac{m}{3d} - \frac{0.01}{Hm}\right)\right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{BH}{WD}\right)^2\right]. \quad (18)$$

While the formula (18) is more suitable for shorter weirs, (17) can be applied without serious errors to all the experimental results, so long as  $m=H/B$  is smaller than unity.

186 experimental results obtained by Frese, Yendô, Francis, Fteley and Stearns and Hamilton Smith are computed by the formula (17). The most frequently occurring error is about  $-0.5\%$ , as shown in Fig. 2, while the errors exceeding  $\pm 1.5\%$  are only 13 out of 186.

The formula (17) may be written in metric unit, as

$$C = 0.6224 \left(1 + \frac{0.0012}{H}\right) \left[1 - \frac{\sqrt{m}}{10} \left(1 - \frac{m}{10d}\right)\right] \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{BH}{WD}\right)^2\right]. \quad (19)$$

The formula in this form is adopted in some of pump test codes in this country.

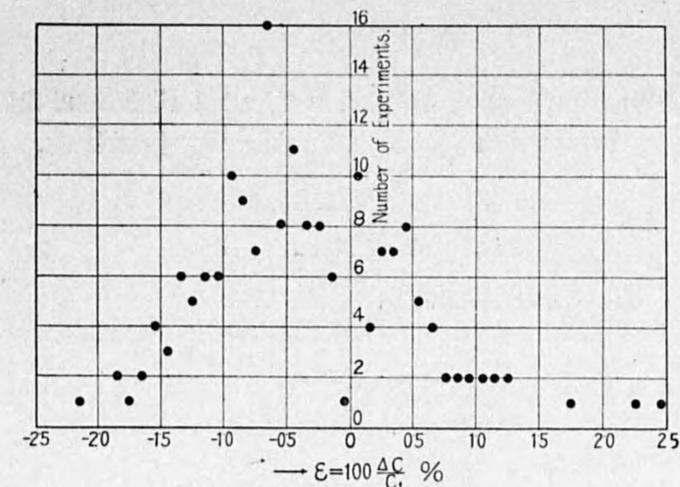


Fig. 2. Distribution of errors.

In the case when

$$\frac{m}{d} < \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \frac{BH}{WD} < \frac{1}{10},$$

that is, when the contractions are complete, we can use for  $C$  instead of (17) and (19),

$$C = 0.6224 \left(1 + \frac{0.004}{H}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{m}}{10}\right), \quad (17')$$

in foot unit and

$$C = 0.6224 \left(1 + \frac{0.0012}{H}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{m}}{10}\right), \quad (19')$$

in metric unit.

(Original Paper, Proceedings of the World Engineering Congress, Tôkyô, 1929, Vol. 26, pp. 35-66.)

**On Flow and Vortex in a Limited Field and its  
Application to Some Engineering Problems.**

BY

Prof. **Sadatosi Ihara.** *Kôgaku-hakushi.*

(Original Paper, Kôgaku-hakushi Dissertation, 1929.)

---

**On the Materials of the Brake-Shoe in Germany.**

BY

Prof. **Hiroshi Yamanouchi.** *Kôgaku-hakushi.*

Cast iron is not the ideal material for the brake shoe of the railwaycar, etc. In this paper, it is shown that the coefficient of friction of the brake shoe of cast iron is variable, due to the pressure, the velocity of sliding, the temperature and wetness, furthermore its wear cannot be decided by the chemical composition and its hardness only, and depends chiefly upon the state of the free carbon in the cast iron and the pearlite structure.

A new special material, made of pressing the asbestos material mixing the brass and iron turning-scrap with some of the binder, is very suitable for the brake shoe of the crane, the automobile, electric street-car and railwaycar and shows with some of the test results how this material is more excellent than the cast iron and bronze for this purpose.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 33, No. 161, September, 1930, pp. 581-594.)

---

**On the Plastic Stress Distribution in the Material  
under Compression, Rolling and Drawing.**

(In Two Dimensional Solution.)

BY

Prof. **Hirosi Yamanouti.** *Kôgakusi.*

Observing the plastic deformation of the material in compression, pressing, rolling and wire- or shaft-drawing processes, the stresses in the vertical cross-section of the specimen is considered the normal stresses  $\sigma_x$  and  $\sigma_y$  and the shearing stress  $\tau$ . The skin surface of the specimen is taken as one of the principal planes. We solved the equation of the principal stress trajectories combining with the complex stream function under some assumption. Solving the stress-equations, in which the hardening effect is considered, the stress distribution in each of the test specimens is approximately calculated.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 34, No. 172, August, 1931, pp. 1184-1197.)

**On the Experiment of Cylinder Cooling.**

BY

Prof. **Torajirô Watanabe.** *Kôgakusi.*

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 35, No. 177, January, 1932, pp. 40-50.)

**The Stress Distribution in the Plate having Single  
and Several Rows of Holes in Tension.**

BY

Prof. **Hiroshi Yamanouti.** *Kōgakushi.*

Considering the movement of the particle near the holes, the stress equations are solved approximately for the cases of single, double and triple rows of holes and of its parallel and zigzag arrangement. The holes are not circular, but in a form of the principal stress line which is calculated from the equation of the principal stress trajectories, so that the holes are all not truly circular but are nearly elliptical. Furthermore the width of the plate is infinity and gives no end effect.

The calculated stress distributions on the minimum width between the holes are all compared with the experiments of the photo-elasticity and confirmed to be nearly equal.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 35, No. 179, March, 1932, pp. 185-196.)

---

**Some Considerations of a Triangular Notch  
with Incomplete Contractions.**

BY

Prof. **Iwao Oki.** *Kōgakuhakushi.*

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 35, No. 180, April, 1932, pp. 280-287.)

---

**Discharge Coefficient for Pipe Orifice.**

BY

Prof. **Iwao Oki.** *Kōgakuhakushi.*

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 35, No. 187, November, 1932, pp. 1116-1120.)

---

## Une Petite Note sur le Mouvement d'un Tourbillon Irrotationnel dans un Espace en Formé de Secteur de Cercle.

PAR

Prof. **Sadatosi Ihara.** *Kōgakuhakusi.*

L'objet de cette petite note est d'expliquer le mouvement de tourbillon irrotationnel dans un espace en formé de secteur de cercle par la calculation et expérience.

I° Calculation. Après avoir traité conformément cette problème, l'auteur a obtenu la position équilibre de tourbillon ayant le coordonné  $(\theta_0 = \pi/2n, r_0 = e^{-\pi/2n})$  dont une fonction de l'angle embrassé  $(\theta_n = \pi/n)$  et encore la route du mouvement de tourbillon, donné en formé de

$$(10) \quad \frac{(\overset{*}{A}^2 + \overset{*}{B}^2)}{(\overset{*}{C}^2 + \overset{*}{D}^2)} = \frac{(\overset{*}{A}_1^2 + \overset{*}{B}_1^2)}{(\overset{*}{C}_1^2 + \overset{*}{D}_1^2)}$$

et comme

$$\begin{aligned} \overset{*}{A} &= (1 + \gamma_0)(\gamma - \gamma_0), & \overset{*}{A}_1 &= (1 + \gamma_0)(\gamma_1 - \gamma_0), \\ \overset{*}{B} &= -(1 + \gamma_0)\xi, & \overset{*}{B}_1 &= -(1 + \gamma_0)\xi_1, \\ \overset{*}{C} &= (1 - \gamma_0)(\gamma - \gamma_0), & \overset{*}{C}_1 &= (1 - \gamma_0)(\gamma_1 - \gamma_0), \\ \overset{*}{D} &= -(1 - \gamma_0)\xi, & \overset{*}{D}_1 &= -(1 - \gamma_0)\xi_1, \\ \xi &= (r^n + r^{-n})/2 \cdot \sin n\theta, & \gamma &= (r^n - r^{-n})/2 \cdot \cos n\theta, \end{aligned}$$

$(r_1, \theta_1)$  = coordonné de tourbillon arbitraire.

Par exemple, deux routes sont calculées et sont montrées dans Figs. 7a, 7b en lignes cassées.

II° Expérience. L'auteur a fait une expérience sur le mouvement de tourbillon qui se produit par cylindre rotationnelle dans l'eau du bassin en formé de secteur de cercle et a photographié cinématographiquement le de translation de centre de tourbillon.

Les photographies sont montrés dans Figs. 6a, 6b. Elles donnent évidemment les routes des mouvements qui se trouvent le long des lignes théorétiques montrées dans les Figs. 7a, 7b avec grosses lignes pour  $n=1.5$  et 2 respectivement. Mais les routes sont dévié à l'intérieur des lignes théorétiques et ces pheno-

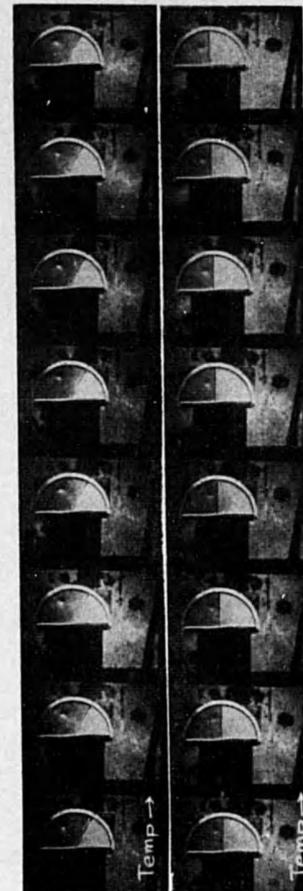


Fig. 6a.

Fig. 6b.

menas sont dû à des dérèpitudes<sup>(1)</sup> d'énergies des tourbillons, à la fin, les tourbillons étaient tendu aux points Q sont les positions d'équilibre.

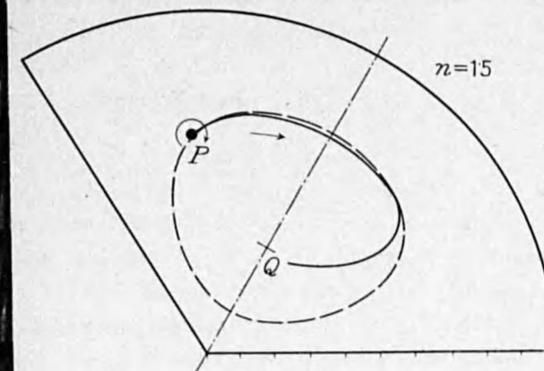


Fig. 7a.

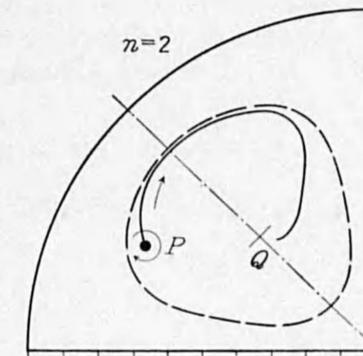


Fig. 7b.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 36, No. 196, August, 1933, pp. 532-535.)

(1) M. K. Terazawa, Report of the Aeronautical Institute, Tôkyô Imperial University, No. 1, September, 1922.

**Relation of the Size of the Test Specimens  
on the Brinell Hardness of Metals.**

BY

Prof. **Hiroshi Yamanouti.** *Kōgakushi.*

The influence of the dimensions of the test pieces for Brinell hardness test has been brought out in our experiments.

Also, the dimensions of the specimens exert remarkable effect upon the value of the constants "a" and "n" in the equation  $P=ad^n$ .

Considering the relation of the modulus of elasticity and the yielding stress intensity ( $E/\sigma_y$ ) for many materials as well as the experimental data, the Brinell hardness must be measured under the conditions of  $D/d > 4$  and  $S/t > 6$ , where  $D$  is the diameter of the specimen,  $d$  is that of the indentation,  $S$  the thickness of the specimen and  $t$  the depth of the indentation.

Under a certain assumption, the distribution of the principal stress on the longitudinal cross-section are calculated and the condition of the size of the specimens has been confirmed.

(Original Paper, Journal of the Society of Mechanical Engineers, Japan, Vol. 36, No. 200, December, 1933, pp. 835-847.)

**Contents of the Preceding Number.**

Memoirs of the Faculty of Science and Engineering, Waseda University.

No. 1.

常磐炭田ニ就イテ (On the Jōban Coal-Field.)

By S. Tokunaga, *Rigakuhakushi.*

No. 2.

朝鮮平壤炭ノ研究 (Studies on the Ping-Yang Anthracite of Korea.)

By I. Kikkawa, *Kōgakuhakushi.*

No. 3.

A Second Investigation of Diamond Boring in Japan.

By Y. Kusakabe, *Kōgakuhakushi.*

No. 4.

A Collection of the Abridged Reports during 1920-1927 from Technical Chemical Laboratory, Waseda University.

No. 5.

常磐炭田地ノ地質 (Geology of the Jōban Coal-Field.)

By S. Tokunaga, *Rigakuhakushi.*

No. 6.

宇部炭田ノ地質學的研究 (Geological Studies on the Ube Coal-Field.)

By S. Tokunaga, *Rigakuhakushi and Kōgakuhakushi,*  
and  
M. Iizuka.

No. 7.

A Collection of the Abridged Reports during 1927-1930 from Technical Chemical Laboratory, Waseda University.

No. 8.

A Collection of Abridged Reports for 1916-1931 Prepared by the Electrical Engineering Department, Waseda University.

No. 9.

A Collection of Abridged Papers and Abstracts dealing the latest studies (up to 1933) Prepared by the Department of Architecture, Waseda University.

昭和九年四月十五日印刷  
昭和九年四月廿日發行

編輯者兼  
東京市淀橋區  
早稻田大學

印刷者  
東京市牛込區榎町七番地  
五十嵐良晃

印刷所  
東京市牛込區榎町七番地  
日清印刷株式會社

14. 5-260



\*1200700831498\*

35B

39

終