वर्तुलशंकुछिन्न

हा ग्रंथ सरकारी मराठी शाळांतील विद्यार्थ्यांच्या

उपयोगाकरितां

व्यंकटराव रामचंद्र सांतिविनूरकर

ह्यांनीं तयार केला.

तो

मेहेरबान डैरेक्तर आफ् पब्लिक इन्स्त्रक्शान

त्यांच्या हुकुमावरून.

मुंबईंत

गणपत कृष्णाजी ह्यांच्या छापखान्यांत छापिला.

इसवी सन १८६१.

शके १७८२.

किंमत १० आणे.

PREFACE.

This work is a translation of Professor Rawlinson's Conic Sections; which gives a clear conception of the sections of a cone, investigates their principal properties, and in illustration of those properties contains many easy and difficult examples to serve as a sort of mental exercise to students. The mastering of this subject will, as in the case of every subject that is strictly scientific, depend upon concentrated attention bestowed upon, and the thorough comprehension of, each step before proceeding to the next. If my Indian intelligent brethren will embrace the opportunity of studying mathematical learning thus afforded them, the translator will consider his labours as crowned with success.

प्रस्तावना.

प्रोफेसर रालिनसनसाहेबानें इंग्रेजीभाषेंत वर्तुळ-शंकुछिन्नाविषयीं ग्रंथरचिला आहे, त्याचें हें भाषांतर केलें आहे. ह्यांत शंकूचीं छिन्नें कशीं पडतात तीं स्पष्ट सांगितलीं आहेत, त्या छिन्नांविषयीं जे मुख्य मुख्य सिद्धांत आहेत ते सिद्ध केले आहेत व ते सिद्धांत मनांत ठसण्यासाठीं कांहीं सोपीं व कांहीं कठीण उदाहरणें सोडविण्यास दिलीं आहेत. जसें कोणत्याही शास्त्राची पूर्ण माहिती करून घेणें असल्यास चित्त एकाग्रकरून तिकडें लाविलें पाहिजे व एक सिद्धांत चांगला पक्का समजल्यावांचून पुढें जाऊंनये, तसें हा ग्रंथ शिकतांना केलें असतां ह्याविषयाची पूर्ण माहिती होईल. जर माझ्या देशबांधवांमध्यें जे विद्वज्जन आहेत त्यांनीं कृपाकरून हा ग्रंथ वाचून त्यापासून आपणांस नफा करून घेतला तर मी असें समजेन कीं, मला भाषांतर करण्यास जे श्रम पडले व तिकडे जो वेळ खर्चावा लागला त्यांचें सार्थक होऊन त्याबद्दल बक्षीस मिळालें.

ह्या ग्रंथांत खालीं लिहिलेल्या सांकेतिक चिन्हांचा उपयोग केला आहे.

$\therefore$	म्हणून.
$\because$	ज्याअर्थीं किंवा कारण कीं.
$\angle$	कोन.
$\triangle$	त्रिकोण.
$\square$	चौकोन.
सि॰	सिद्धांत.
कु॰	कुरलरी.
प्र॰	प्रमाणें.
इ॰	इत्यादि.
आ॰	आकृति.
$'$	सचिन्ह; जसें अ$'$ म्हणजे सचिन्ह अ.
$''$	द्विचिन्ह; जसें अ$''$ म्हणजे द्विचिन्ह.

अ$_1$, अ$_2$, इ॰, वाचण्याची रीति अ एक, अ दोन इ॰ अशी आहे.

अनुक्रमणिका.

दीर्घवर्तुळ.

व्यास व ठिकाणीं आणि इड ज्येस म ठिकाणीं छे-
दितें; तर $कब^2 = कम \cdot कट$ ४१

५५ जर क्क हा दीर्घवर्तुळांत बिंदु असेल, कन
हा अवच्छेदक असेल, आणि कड, कप हे व्यास
प्रतिव्यास असतील; तर $क्कन^2 = \frac{कड^2}{कप^2} \cdot नप \cdot नपं$ ४२

५६ व्यास प्रतिव्यासांच्या शेवटांशीं दीर्घव
र्तुळास स्पर्शरेषा काढून जो समांतरभुजचौकोन
पडतो त्याचें क्षेत्रफळ अविकारी असतें; आणि तें
४ अक $\times$ कब ह्या बरोबर असतें. ४३

५७ $कक्क^2 = \frac{अक^2 \times बक^2}{अक^2 \times बक^2 - कप^2}$ . . ४५

हैपरबला.

५८. लक्षकांचे वर्ग त्यांच्या अवच्छेदकांच्या
गुणाकारांच्या प्रमाणांत असतात ४७

५९ $नंपं^2 = \frac{बक^2}{अक^2} \cdot अनं \cdot नंअं$

अथवा $नंपं^2 = \frac{बक^2}{अक^2} (कन^2 - अक^2)$ . . . ४९

६० हैपरबलेच्या अक्षाच्या दोहोंबाजूंकडील
कौंस सजातीय असतात ५०

६१. केंद्रांतरांमधलें अंतर अविकारी असतें ५१

६२. सप — हप = २अक

$अक्ष = \frac{के - १}{के} \cdot अक$

$$\text{अ}'\text{स} = (\text{के} - १)\ \text{अक}$$

$$\text{स}'\text{क} = \text{के}\cdot\text{अक}$$

$$\text{सक्ष} = \frac{\text{के}^२ - १}{\text{के}}\cdot\text{अक}$$

$$\text{क्ष}'\text{क} = \frac{\text{अक}}{\text{के}}$$

$$\text{सअ} \times \text{सअ}' = (\text{के}^२ - १)\ \text{अक}^२ = \text{बक}^२$$

$$\text{सल} = (\text{के}^२ - १)\cdot\text{अक}$$

$$\text{बअ}' = \text{सक}$$

$$\text{स}'\text{क}^२ = \text{अक}^२ + \text{बक}^२$$

$$\text{सल} = \frac{\text{बक}^२}{\text{अक}}$$

$\text{सप} + \text{हप} = २\text{के}\cdot\text{कन}$ ५३

६३. स्पर्शरेषेच्या लक्षकाचा वर्ग $= \dfrac{\text{बक}^२}{\text{अक}^२} \times$ अवच्छेदक $\times$ प्रतिस्पर्शरेषा

म्हणजे $\text{पन}^२ = \dfrac{\text{बक}^२}{\text{अक}^२}\cdot\text{कन}\cdot\text{टन}$ ५७

६४. $\text{नट} = \dfrac{\text{अन}\cdot\text{नअ}'}{\text{कन}}$ ५७

६५. $\text{कट} = \dfrac{\text{अक}^२}{\text{कन}}$ ५८

६६. गन उपनेम $= \dfrac{\text{बक}^२}{\text{अक}^२}\cdot\text{कन}$ ५८

६७. $\text{कग} = \text{के}^२\cdot\text{कन}$ ५८

६८. नेमरेषा सपह कोनास समान दुभागिते. ६०

६९. जर हैपरबलेच्या प्रधान रेषेंतील कोण-

घेतला, आणि व्यास प्रतिव्यासास अवच्छेदकलक्ष-
क मोजण्याचे अंश असें मानिलें तर

$$\text{क्न}^2=\frac{\text{कड}^2}{\text{कप}^2}\text{नप}\times\text{नप}\quad\ldots\ldots$$ ७३

८५. व्यास व प्रतिव्यास ह्यांच्या शेवटांशीं हैपरबलेस स्पर्शरेषा केल्यानें जो समांतरभुजचौकोन पडतो त्याचें क्षेत्रफळ अविकारी असतें; आणि तें क्षेत्रफळ$=$४अक$\times$बक. ७४

८६. $\text{क्क}^2=\frac{\text{अक}^2\times\text{बक}^2}{\text{कप}^2+\text{बक}^2-\text{अक}^2}$ . . . ७५

८७. व्यास कल्पाचें लक्षण. ७५

८८. जर बृहदक्षावर लंब अशी एक ज्या काढून ती व्यासकल्पांस मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर त्या ज्येचे हैपरबलेच्या कौंसानें असे दोन भाग पडतात कीं, त्या दोन भागांचा गुणाकार लघ्वक्षाच्या वर्गाबरोबर होतो. म्हणजे $\text{पग}\times\text{पघ}=\text{बक}^2$ ७७

८९. व्यासकल्पाचा लक्षक हैपरबलेच्या लक्षकापेक्षां मोठा असतो. ७७

९०. हैपरबलेच्या कौंसांत कांहीं बिंदू घेऊन त्या प्रत्येकापासून व्यासकल्पांशीं समांतर रेघा काढल्या असतां त्या रेघा, आणि त्या रेघांनीं व्यासकल्पांचे जे भाग पडतात ते, ह्यांनीं जे समांतरभुजचौकोन पडतात ते सर्व परस्परबरोबर असतात. ७८

९१. व्यासकल्पांच्या संबंधानें [illegible]केलें हैपरबलेचें समीकरण; म्हणजे $\text{कइ}\times\text{इप}$

पुरवणी.

वर्तुलशंकुछिन्न

व्याख्या.

व्याख्या १. काटकोनत्रिकोणास काटकोनाच्या दोन्ही बाजूंपैकीं कोणती एक स्थिर ठेवून तिजभोंवती फिरविलें असतां जी आकृति उत्पन्न होते तीस **काटकोन वर्तुलशंकु** असें म्हणतात.

व्याख्या २. पातळीनें काटकोन वर्तुलशंकूस कापिलें असतां जी आकृति होते तीस **वर्तुलशंकुछिन्न** म्हणतात. छेदकपातळीची ज्याप्रमाणें स्थिति असेल त्याप्रमाणें ह्या छिन्नास निरनिराळ्या संज्ञा दिल्या आहेत.

(अ) जर छेदकपातळी वर्तुलशंकूच्या पायाशीं समांतर असेल तर छिन्न **वर्तुळ** होईल.

(इ) जर छेदकपातळी वर्तुलशंकूच्या बाजूशीं समांतर असेल तर छिन्न **पराबला** होईल.

(उ) जर छेदकपातळी वर्तुलशंकूच्या आंसाशीं कांहीं कोन करिते आहे तर छिन्न **दीर्घवर्तुळ** होईल.

(ऋ) जर छेदकपातळी वर्तुलशंकूच्या आंसाशीं समांतर असेल तर छिन्न **हैपरबला** होईल.

टीप— वर्तुलशंकु हा दुहेरी आहे असें मानिलें आहे म्हणजे १ ल्या आकृतींत दाखविल्याप्रमाणें

तो दोहोंकडे अनंत वाढतो. म्हणून हैपरबलेची पातळी त्या दोन्ही वर्तुलशंकूच्या पृष्ठास कापील; आणि शिरोबिंदूच्या प्रत्येक बाजूस एक, अशीं दोन सरूप छिन्नें होतील. म्हणून तीं दोन्हीं छिन्नें मिळून एकच आकृति आहे असें कल्पून त्यांचे विवरण केलें आहे.

वर असें सांगितलें कीं दीर्घवर्तुलाची पातळी आंसाशीं कांहीं कोन करिते, त्याचा अर्थ असा कीं, दीर्घवर्तुळाच्या पातळीनें, वर्तुलशंकूच्या दोहों बाजूंस कापिलें पाहिजे अथवा स्पर्श केला पाहिजे.

ह्या चार वर्तुलशंकुछिन्नांपैकीं पहिल्या छिन्नाविषयीं म्हणजे वर्तुलछिन्नाविषयीं विचार युक्लीदच्या भूमितीच्या तिसरे बुकांत केला आहे, म्हणून त्याविषयीं पुन्हा येथें सांगण्याची गरज नाहीं. ह्या ग्रंथांत पराबला, दीर्घवर्तुळ, आणि हैपरबला ह्यांविषयीं मात्र सांगितलें आहे, व तें बहुतकरून भूमितिकृत्यरीतीनें सांगितलें आहे, तें असें कीं वर्तुलशंकु आणि छेदकपातळी ह्यांविषयीं विचार करून वक्ररेषाकृतींचीं समीकरणें काढिलीं आहेत, आणि नंतर व्याख्या ५ च्या आधारानें प्रत्येक वक्ररेषाकृतीविषयीं जे नानाप्रकारचे मुख्य मुख्य सिद्धांत आहेत ते सिद्ध केले आहेत.

ह्या तीन्ही आकृतींचा कांहीं बिंदूंशीं व रेषांशीं साधारण संबंध आहे म्हणून पुढें प्रथमतः त्यांजविषयींच सांगतों.

व्याख्या ३. एका विवक्षित रेघेच्या संबंधानें ह्या सर्व आकृति सारख्या प्रमाणांत आहेत, हें लवकरच दिसून येईल. ही रेघ आडवी पातळी (म्हणजे कागदाची पातळी) आणि छेदकपातळी ह्यांचे छिन्न

आहे आणि हिला **अक्ष** असें म्हणतात.

व्याख्या ४. ही रेघ वक्ररेषाकृतीस ज्या बिंदूंत मिळते त्यास **शिरोबिंदु** असें म्हणतात. पराबलेस एक शिरोबिंदु असतो; आणि दीर्घवर्तुळ व हैपरबला ह्या प्रत्येकांस दोन शिरोबिंदु असतात.

व्याख्या ५. प्रत्येक वर्तुलशंकुछिन्नाच्या कौंसांतील कोणत्याही बिंदूपासून अक्षांतील विवक्षित बिंदूपर्यंत अंतर व कौंसांतील त्या बिंदूपासून अक्षावरील अचल लंब रेषेवर लंब केला असतां तें लंबांतर ह्यांच्यामध्यें कांहीं प्रमाण असतें. त्या विवक्षित बिंदूस **केंद्र** आणि अचल रेघेस **प्रधानरेषा** म्हणतात. पराबलेस एकच केंद्र असतो आणि एकच प्रधानरेषा असते; दीर्घवर्तुळ व हैपरबला ह्या प्रत्येकांस दोन केंद्रें आणि दोन प्रधानरेषा असतात.

(अ) पराबलेमध्यें, केंद्रापासून कौंसांतील कोणत्याही बिंदूपर्यंत अंतर, त्या बिंदूपासून प्रधानरेषेपर्यंत जें अंतर, त्या बरोबर असतें.

(ब) दीर्घवर्तुळामध्यें, कौंसांतील कोणत्याही बिंदूपासून केंद्रापर्यंत अंतर, त्या बिंदूपासून प्रधानरेषेपर्यंत जें अंतर त्यापेक्षां कांहीं एका अविकारी पदानें कमी असते.

(क) हैपरबलेमध्यें, कौंसांतील कोणत्याही बिंदूपासून केंद्रापर्यंत अंतर, त्या बिंदूपासून प्रधानरेषेपर्यंत जें अंतर त्यापेक्षां कांहीं एका अविकारी पदानें अधिक असतें.

जसें, जर **स** हा केंद्र आहे, आणि **प** हा कौंसांतील एक बिंदु आहे, आणि **पम** ही प्रधानरेषेशीं एक लंबरेषा आहे तर,

परावलेमध्यें सप = पम

दीर्घवर्तुळामध्यें सप = के. पम

हैपरबलेमध्यें सप = कें. पम

ह्यामध्यें के हें पद १ हून कमी आहे
आणि कें हें १ हून अधिक आहे. } हीं दोन्हीं पदें अविकारी आहेत.

व्याख्या ६. कौंसांतील एका बिंदूपासून अक्षावर लंब केला असतां त्यास **लक्षक** म्हणतात.

व्याख्या ७. शिरोबिंदु आणि लक्षकाचा पाया ह्यांमध्यें जी रेघ सांपडते तीस **अवच्छेदक** म्हणतात. अवच्छेदक आणि लक्षक ह्यां दोघांस, बिंदूचे **अवच्छेदक लक्षक** म्हणतात.

व्याख्या ८. जो लक्षक केंद्रांतून जातो त्याच्या दुपटीस **प्रधानकेंद्रगलक्षक** म्हणतात.

व्याख्या ९. वर्तुळशंकुछिन्नाच्या मध्यांतून जाऊन कौंसास मिळणारी जी रेषा तीस **व्यास** म्हणतात.

परावलेचा मध्यबिंदु अनंत अंतरावर आहे म्हणून आंसाशीं समांतर अशा सर्व रेषा **व्यास** होतात.

व्याख्या १०. वक्ररेषाकृतीच्या कौंसांतील कोणत्याही एका बिंदूपासून केंद्रापर्यंत जें अंतर त्यास **केंद्रांतर** म्हणतात.

परावला.

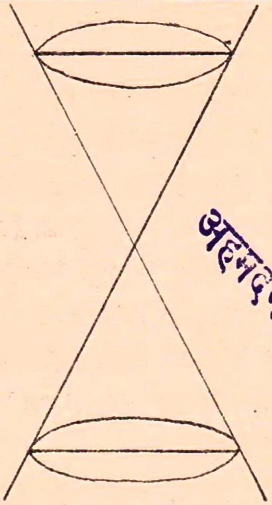
सिद्धांत १.

परावलेमध्यें अवच्छेदक त्यांच्या लक्षकांचे वर्गाच्या प्रमाणांत असतात.

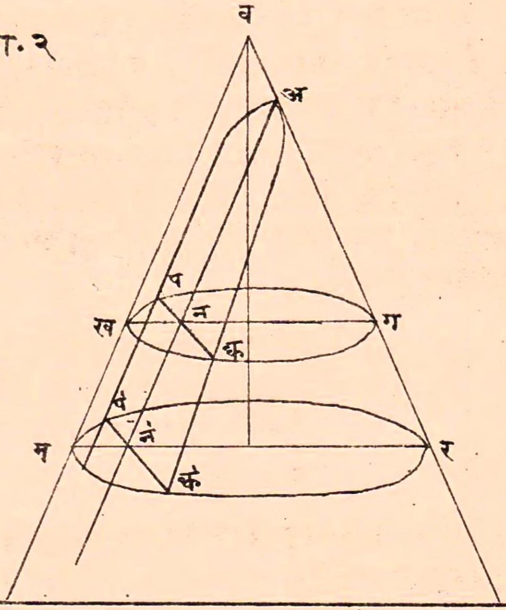
(आ० २) **मवर** हें, लंबपातळीनें छेदून केलेलें आ-

पराबला·

आ. १



आ. २



णि कागदाच्या पातळीस मिळणारें असें एक वर्तुल शंकुछिन्न आहे; तसेंच **कपग** आणि **मपंर** हीं छिन्नें पायाशीं समांतर केलीं आहेत. म्हणून तीं वर्तुळाकार आहेत. **मर** आणि **कग** हे व्यास आहेत. आणि **वम** बाजूशीं समांतर आणि कागदाच्या पातळीशी लंब अशा पातळीनें केलेलें छिन्न **अपंकं** आहे. आतां **अपक** आणि **कपग** ह्या दोन पातळ्या कागदाच्या पातळीशीं लंब आहेत, म्हणून त्यांचें साधारण छिन्न **पन** ही रेघ कागदाच्या पातळीशीं लंब आहे आणि जी रेघ त्याच पातळीमध्यें असून तीस स्पर्श करिते तीसही लंब आहे; म्हणून **पन** रेघ **कग** रेघेशीं लंब आहे. ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं **पंनं** रेघ **मर** रेघेशी लंब आहे. आतां **अनग** आणि **अनंर** ह्या दोन समकोन त्रिकोणापासून

अन : नग :: अनं : नंर, अथवा परावर्तानें

अन : अनं :: नग : नंर : .... (१)

परंतु **कन= मनं**; कारण **कमनंन** हा समांतर बाजू चौकोन आहे. ह्मणून (१) ह्या प्रमाणांतल्या तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांस **कन** आणि **मनं** ह्या समान पदांनीं अनुक्रमें गुणून हें उत्पन्न होतें.

अन : अनं :: कन · नग : मनं · नंर.

परंतु **कन · नग= पन**^{2}

आणि **मनं · नंर= पंनं**^{2}

$\therefore$ **अन : अनं :: पन**^{2} **: पंनं**^{2} ...... हें सिद्ध.

सिद्धांत २.

(आ० ३) लक्षकाचावर्ग = ४ × अवच्छेदक × शिरोबिंदु आणि केंद्र ह्यांमधलें अंतर. ह्मणजे

पन^2 =४ अस × अन.

अपपं ही एक पराबला आहे, स हा केंद्र आहे, अ हा शिरोबिंदु आहे आणि मक्ष ही प्रधान रेषा आहे असें मान, तसें आतां सप= पम, कसं = कमं= क्षस =२अस · आतां सिद्धांत १ पासून

पन^2 : कस^2 : : अनः अस

पन^2: ४ अस^2 : : अनः अस

∴ पन^2 = ४ अस · अन ····· हें सिद्ध.

कु० १. ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं

पंन^2 =४अस · अन = पन^2

∴ पंन = पन

म्हणजे अक्षाच्या दोन्ही बाजूंकडील पराबलेच्या कौंसांचे भाग सजातीय असतात.

(आ०४). कु०२ जर अक्षाशीं समांतर आणि अक्षावर लंब असणाऱ्या पकल ज्यास छेदणारी अशी एक पंक रेषा काढली तर

४ अस · पंक = पक · कल

आतां प आणि पं हे बिंदु पराबलेच्या कौंसांत आहेत म्हणून

पन^2 =४ अस · अन·········· (१)

पंनं^{2} = ४ · अस अनं·········· (२)

∴ (१) ह्यांत (२) हें वजा देऊन

पन^2— पंनं^{2} = ४ अस (अन— अनं)

म्हणजे (पन + पंनं) (पन— पंनं)

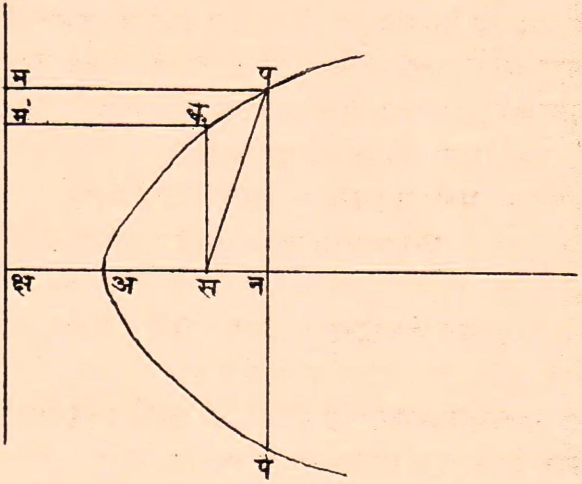
=४ अस (अन— अनं

∴ कल · पक = ४ अस · पंक

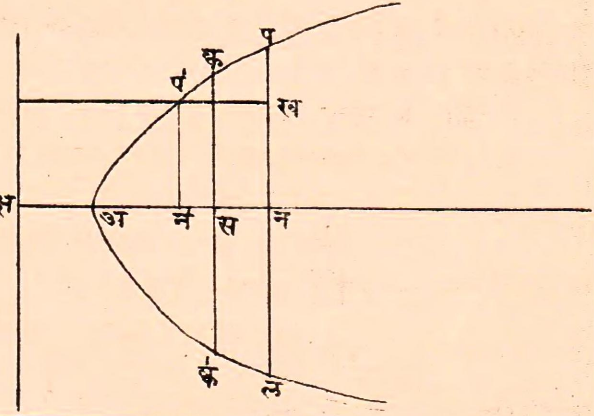
कारण पन= नल आणि पंनं= नक

पराबला.

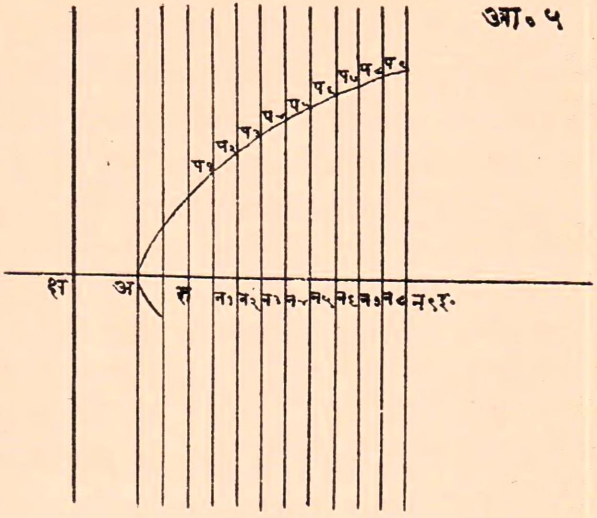
आ० ३



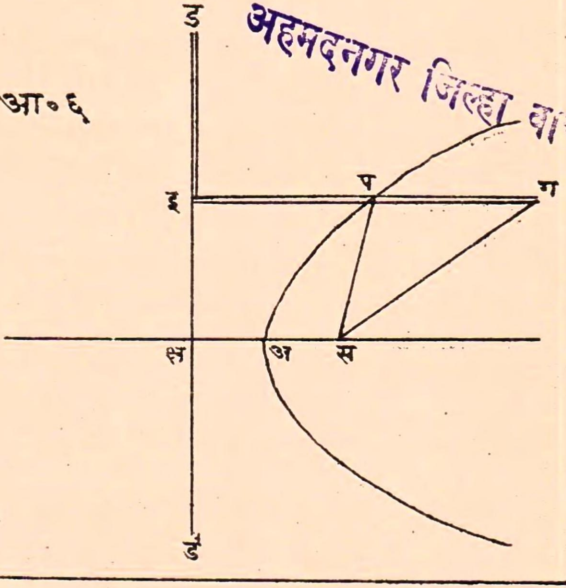
आ० ४



आ० ५



आ० ६



कु० ३. कक ह्या प्रधानकेंद्र गलक्षका = ४ अस.

कु० ४. केंद्रांतर आणि प्रधान रेषेवरील लंबांतर ह्या दोहोंमधील संबंध कळल्यानें परावला काढतां येते.

(आ० ५) क्षज्ञ ही एक अमर्यादित रेघ घे, आणि क्षस ला अ बिंदूंत दुभाग; तर अ हा परावलेच्या कौंसांतला एक बिंदु होईल.

क्षज्ञ रेघेवर $न_1$ $न_2$ $न_3$ ··· असे कांहीं बिंदु घे, आणि $प_1$ $न_1$; $प_2$ $न_2$; $प_3$ $न_3$; ··· हे लंब कर; आणि स मध्यबिंदु कल्पून $क्षन_1$; $क्षन_2$; $क्षन_3$; ·· ह्या त्रिज्यांनीं वर्तुळ कौंस कर असे कीं ते लंबरेषांस $प$ $प_2$ $प_3$ ··· ह्यां बिंदूंस्थळीं छेदतील. प्रधान रेषेवर $प_1$ $म_1$; $प_2$ $म_2$; $प_3$ $म_3$; ··· ह्या लंब रेषा काढ तर

$$\therefore सप_1 = क्षन_1 = म_1\ प_1$$

$$\therefore सप_1 = म_1\ प_1$$

म्हणून $प_1$ हा बिंदु परावलेच्या कौंसांत आहे. आणि ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं $प_2$ $प_3$ ··· हे बिंदु परावलेच्या कौंसांत आहेत. म्हणून जर ह्याच प्रमाणें, जवळजवळ असे बरेच पुष्कळ बिंदु घेतले तर परावलेची आकृति कशी आहे ती समजेल.

कु० ५. प्रधान रेषा म्हणण्याचें कारण असें आहे कीं ही रेषा आणि केंद्र ह्यांच्या आधारानें परावला काढतां येते, ती अशी;

(आ० ६) जिचा शिरोबिंदु अ होईल आणि केंद्र स होईल असा एक परावलेचा कौंस काढण्याची रीति.

डडं प्रधान रेषा काढ; आणि तिजवर डइग चौरसाची एक बाजू ठेव, आणि इग येवढ्या लांबीची दोरी घेऊन तिचीं दोन्हीं टोकें ग आणि स ह्या दोन

बिंदूंस बांध; नंतर **प** पेन्सिलीनें ही दोरी अशी ताणून धर कीं **पग** हा भाग सर्वदां चौरसाच्या **इग** ह्या बाजूस मिळेल, आणि **डइ** ही बाजू प्रधान रेषेस लागून सरकवित जा; तर **प** ह्या बिंदूनें पराबलेची आकृति निघेल.

कारण **सप** + **पग** = **इग** = **इप** + **पग**

∴ नेहेमीं **इप** = **पस** होईल.

म्हणून **प** हा पराबलेच्या कौंसांतला एक बिंदु आहे.

सिद्धांत ३.

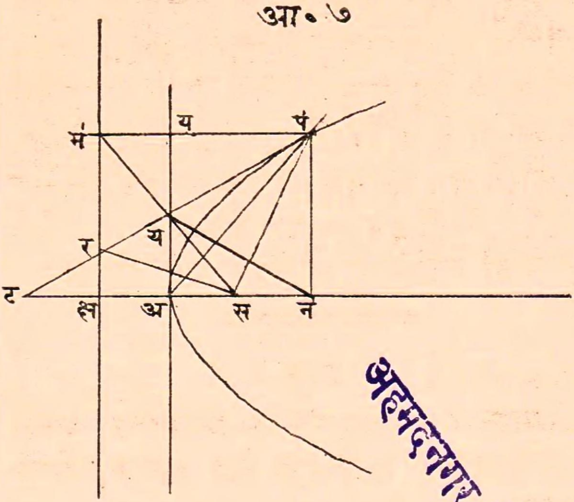
व्याख्या.— जी सरळ रेषा पराबलेच्या कौंसांतील दोन अनुक्रमिक बिंदूंतून जाते तीस **स्पर्शरेषा** असें म्हणतात.

हें स्पर्शरेषेचें लक्षण फार उपयोगी आहे असें दिसून येईल. दुसरें एका प्रकारचें लक्षण कित्येक करतात तें असें:-जी रेघ पराबलेच्या कौंसास एकाच बिंदूंत स्पर्श करिते ती स्पर्शरेषा होय. हीं दोन्हीं लक्षणें दिसण्यांत सारखींच दिसतात, परंतु मागून सांगितलेल्या लक्षणापेक्षां पूर्वीं सांगितलेलें लक्षण फार उपयोगाचें आहे.

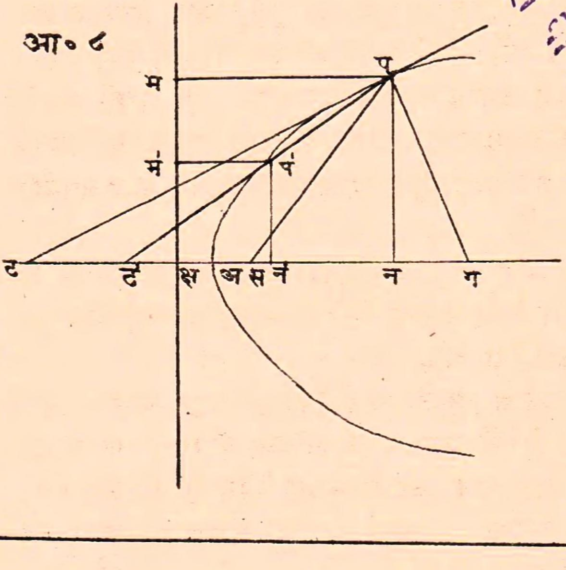
(आ० ७) **अ** शिरोबिंदूपासून अक्षावर **अ य** लंब रेषा केली असतां ती रेषा पराबलेस त्या बिंदुस्थळीं स्पर्श रेषा होते.

कारण जर ती स्पर्श रेषा नसेल तर ती बिंदु संध रेषेच्या दिशेनें जाऊन पराबलेच्या कौंसास **पं** स्थळीं छेदिते असें मान; आणि प्रधान रेषेस **पं मं** लंब कर; आतां **मंक्षअ**, **क्षअपं**, आणि **पंमंक्ष** हे कोन जर काटकोन आहेत तर,

आ० ७



आ० ८



$\angle$ मंपंअ=काटकोन

आणि मंपं=अक्ष=अस म्हणजे सपं=अस

$\therefore$ $\angle$ सपंअ=$\angle$ पंअस=काटकोन

हें असंयोजक आहे. म्हणून अय रेघ परावलेच्या कौंसास पं स्थळीं छेदित नाहीं. ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होतें कीं, ही रेघ परावलेस कोणत्याही बिंदूंत छेदित नाहीं; म्हणून ही अ स्थळीं स्पर्श रेघ आहे.

सिद्धांत ४.

(आ० ८) जर पट ही प स्थळीं स्पर्श रेषा असेल; तर पन लक्षक, प्रति स्पर्श रेषा आणि अर्ध प्रधान केंद्रगलक्षक ह्यांचें मध्य प्रमाण होईल.

परावलेच्या कौंसास प आणि प१ ह्या स्थळीं छेदणारी पपं१ट ही एक छेदन रेघ आहे असें मान. आतां

अन, नप } हे त्या बिंदूंचे अवच्छेदक लक्षक आहेत
अन१, न१प१

प्रधानरेषेवर पम आणि प१मं हे लंब कर, आणि पन रेषेवर पं१क हा लंबकर; तर सिद्धांत २ पासून

$$\text{प}\ \text{न}^2 = ४\text{अस} \cdot \text{अन}$$

$$\text{प}_१\ \text{न}_१^2 = ४\text{अस} \cdot \text{अन}_१$$

ह्यांच्या वजाबाकीपासून

$$\text{पन}^2 - \text{प}_१\text{न}_१^2 = ४\text{अस}\ (\text{अन} - \text{अन}_१) \cdots (१)$$

आतां $\text{पन}^2 - \text{प}_१\text{न}_१^2 = (\text{पन} + \text{प}_१\text{न}_१)(\text{पन} - \text{प}_१\text{न}_१) = (\text{पन} + \text{प}_१\text{न}_१)\ \text{पक}$

आणि $\text{अन} - \text{अन}_१ = \text{प}_१\ \text{क}$ आहे

म्हणून वरील(१) हें खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{पक}}{\text{पक}^१} = \frac{४\ \text{अस}}{\text{पन} + \text{प}_१\text{न}_१} \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

आतां समकोन त्रिकोणांपासून $\frac{\text{पक}}{\text{प}_1\text{क}_1} = \frac{\text{पन}}{\text{ट}_1\text{न}}$

परंतु प_1 हा बिंदु जसजसा सरकत जाऊन **प** ह्या बिंदूस मिळेल तसतसा ट_1 हा बिंदु सरकत जाऊन **ट** ह्या बिंदूस मिळेल. म्हणून शेवटीं, म्हणजे, जेव्हां प_1 हा बिंदु **प** ह्या बिंदूस मिळेल तेव्हां

$$\frac{\text{पन}}{\text{ट}_1\text{न}} = \frac{\text{पन}}{\text{टन}}$$

आणि असें झालें म्हणजे $\text{पन} + \text{प}_1\text{न}_1 = २\,\text{पन}$

म्हणून शेवटीं (२) ह्या समीकरणाचें रूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होईल.

$$\frac{\text{पन}}{\text{टन}} = \frac{४\ \text{अस}}{२\ \text{पन}} \text{ अथवा } \text{पन}^2 = २\ \text{अस}.\text{टन}$$

कु० १. **टन** ह्या रेषेस प्रतिस्पर्शरेषा म्हणतात आणि तिचे = २ अवच्छेदक आहे.

सिद्धांत ४ पासून.

$$\text{पन}^2 = २\ \text{अस} \cdot \text{टन}$$

$$\text{किंवा } ४\ \text{अस} \cdot \text{अन} = २\ \text{अस} \cdot \text{टन}$$

$$\therefore\ \text{टन} = २\ \text{अन}$$

कु० २. **प** स्थळीं केलेली स्पर्शरेषा, केंद्रांतर आणि **प** बिंदूपासून प्रधान रेषेवर केलेला लंब ह्या दोहों मधला कोन समान दुभागिते.

सप सांध

आतां $\text{सप} = \text{पम} = \text{क्षन} = \text{अन} + \text{अक्ष}$

$$= \text{अट} + \text{अस} = \text{सट}$$

म्हणून **टसप** $\triangle$ त. $\therefore$ **सप** बाजू = **सट** बाजू

$\therefore \angle$ सपट $= \angle$ सटप $= \angle$ टपम

हें सिद्ध.

कु० ३. **व्याख्या—** पराबलेच्या स्पर्श रेषेवर स्पर्श बिंदूपासून एक लंबरेघ केली असतां तीस **नेम** असें म्हणतात.

लक्षकाचा पाया, आणि नेम अक्षास ज्या बिंदूंत छेदील तो छेदन बिंदु यांमध्यें जी रेघ सांपडते तीस **उपनेम** म्हणतात.

म्हणजे (आ० ८) हींत **पग** रेषा नेम आहे आणि **नग** रेषा उपनेम आहे

उपनेम $= \frac{1}{2}$ प्रधान केंद्र गलक्षक

पटग ह्या काटकोन त्रिकोणापासून

पन^2=टन. नग=२अन. नग ($\therefore$ **टन=२ अन**)

परंतु **पन^2=४ अस. अन**

$\therefore$ **४ अस. अन=२ अन. नग**

$\therefore$ **नग=२ अस**

हें सिद्ध.

कु० ४. **स** मध्यबिंदु कल्पून **सप** त्रिज्येनें एक वर्तुळ केलें असतां तें वर्तुळ **प**, **ट**, **ग**, यां तीन बिंदूंतून जाईल

$\therefore$ **नग=२ अस=सक्ष**

या समीकरणाच्या प्रत्येक पेट्यास **सन** मिळीव

$\therefore$ **नग+सन=सक्ष+सन**

म्हणजे **सग=क्षन=मप=सप**

परंतु असें सिद्ध केलें आहे कीं **सप=सट**

$\therefore$ **सप=सट=सग**

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं स मध्य बिंदु

कल्पून सप त्रिज्येनें केलेलें वर्तुळ प, ट, ग, या तीन बिंदूंतून जाईल.

सिद्धांत ५.

पराबलेच्या शिरो बिंदुस्थळीं एक व कौंसांतील कोणत्याही बिंदुस्थळीं एक अशा दोन स्पर्श रेषा केल्या, आणि त्यांचा छेदन बिंदु आणि केंद्र हे सांधले तर ती रेघ कौंसांतील बिंदुस्थळीं केलेल्या स्पर्शरेषेवर लंब होते.

(आ० ७) **सय** सांध. आतां **अय** ही रेघ **पन** रेघेशीं समांतर आणि **टन** रेघेस दुभागणारी अशी काढिली आहे ∴ **टय=यप**

∴ ∟**सपट**=∟**सटप**

आणि **टय=यप** आणि **सट=सप** आणि **सय** ही रेघ साधारण आहे

∴ ∟**टयस**= ∟**सयप**

आणि ∴ ह्यांपैकीं प्रत्येक कोन काटकोन आहे.

कु० १. केंद्रापासून केंद्रांतरावर एक लंब रेषा केली असतां ती रेषा आणि स्पर्शरेषा ह्या दोन्ही रेषा परस्परांस प्रधान रेषेवर छेदितात.

सर सांध. आतां **सपर** आणि **रपम** ह्या दोन त्रिकोणांत **सप=पम**, **रप** दोन्ही त्रिकोणास साधारण आहे, आणि अंतर ∟**परम**=अंतर∟ **सपर**

∴ ∟ **रसप**=∟ **पमर**

परंतु ∟**पमर**=काटकोन ∴ ∟ **रसप**= काटकोन.

हें सिद्ध.

सिद्धांत ३ ह्यांतील आकृतीकडे लक्ष दे. आतां मागें सिद्ध केलेलीं समीकरणें येथें घेऊं

पन^{२}=४ अस × अन . . . . (१)

पन^{२}=२ अस × टन . . . . (२)

टन=२ अन . . . . (३)

<सपट=< टपम . . . . . (४)

नग=२ अस . . . . (५)

सप= सट =सग . . . . . . (६)

< सयप=९०° . . . . . . (७)

<रसप= ९०° . . . . (८)

सिद्धांत ६.

परावलेस प बिंदुस्थळीं एक स्पर्श रेषा केली आहे; ह्या बिंदूपासून पपं ज्या ही अक्षावर लंब केली आहे, आणि दुसरी एक रेघ परावलेच्या कौंसांतील ई ह्या कोणत्याही एका बिंदूतून अक्षाशीं समांतर केली आहे ती अशी कीं ती रेघ, स्पर्श रेषा आणि ज्या ह्यांस अनुक्रमें ऐ आणि क ह्यां बिंदूत छेदिते तर

ऐइ : इक : : पक : पंक होईल.

(आ०९). आतां पकऐ आणि पनट ह्या दोन समकोन त्रिकोणांपासून

पकः कऐ : : पन : नट

: : पन : २ अट

$\therefore$ कऐ = $\frac{\text{२ अट}}{\text{पन}}$ पक . . . . . (१)

$$\text{आतां } \text{इह}^2 = \text{४ अस}\cdot\text{अह}$$

$$\text{पन}^2 = \text{४ अस}\cdot\text{अन}$$

$$\therefore \text{पन}^2 - \text{इह}^2 = \text{४ अस} \,(\text{अन} - \text{अह})$$

$$= \text{४ अस}\cdot\text{हन}$$

$$= \text{४ अस}\cdot\text{इक}$$

$$\text{किंवा } (\text{पन} + \text{इह})(\text{पन} - \text{इह}) = \text{४अस}\cdot\text{इक}.$$

$$\text{आतां } \because \text{इह} = \text{कन आणि पन} = \text{नप}'$$

$$\therefore \text{पक}\cdot\text{कप}' = \text{४ अस}\cdot\text{इक}$$

$$\therefore \text{इक} = \frac{\text{पक}\cdot\text{कप}'}{\text{४ अस}} \cdots\cdots (\text{२}$$

(१) ह्यांत (२) हें वजा देऊन

$$\therefore \text{कऐ} - \text{इक} = \text{पक}\left(\frac{\text{२ अट}}{\text{पन}}\cdot\frac{\text{पन}}{\text{पन}} - \frac{\text{कप}'}{\text{४अस}}\right) = \text{ऐइ}$$

$$\text{आतां } \text{पन}^2 = \text{४अस}\cdot\text{अन}$$

$$\therefore \text{ऐइ} = \frac{\text{पक}}{\text{४अस}}\,(\text{२ पन} - \text{कप}') = \frac{\text{पक}^2}{\text{४अस}}$$

$$\therefore \text{ऐइ} : \text{इक} :: \frac{\text{पक}^2}{\text{४अस}} : \frac{\text{पक}\cdot\text{कप}'}{\text{४ अस}} :: \text{पक} : \text{कप}'$$

हें सिद्ध.

सिद्धांत ७.

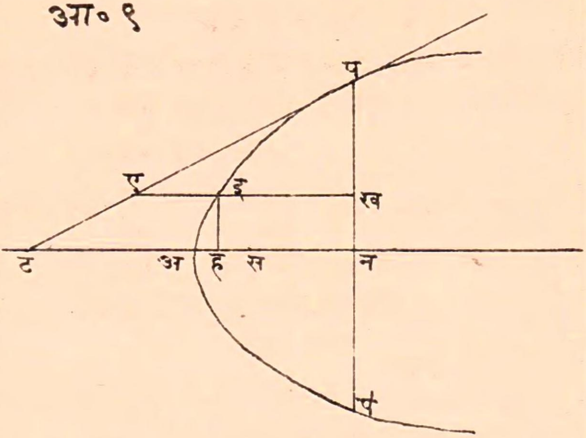
(आ० १०) जर पराबलेस प आणि प' बिंदुस्थळीं पड आणि डप' ह्या दोन स्पर्शरेषा केल्या तर

१ लें $\angle$डसप $=\angle$डसप' होईल;

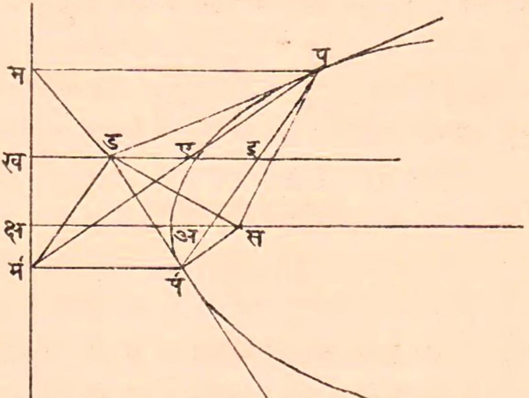
२ रें. $\angle$प'डस $=\angle$पडय होईल; आणि

३ रें. पप' ही ज्या इ स्थळीं समान दुभागली

आ० ९



आ० १०



जाईल. आतां १ लें ∴ सप = पम आणि ∠सपड= ∠डपम आणि डप ही रेघ साधारण आहे.

∴∠पमड=∠डसप आणि मड=डस त्याचप्रमाणें ∠डमंपं=∠डसपं आणि डमं=डस

∴डमं=डम

आणि ∠डममं=∠डमंम

आणि ∴∠डमप=∠डमंपं

परंतु ∠डमप=∠डसप

आणि∠डमंप=∠डसपं

∴∠डसप=∠डसपं हें सिद्ध.

२ रें कडय ही रेघ अक्षाशीं समांतर कर तर मडमं हा समद्विबाजू त्रिकोण होईल.

आणि ∴मडय=मंडय आणि मडक=मंडक

आतां मंडय=मंडपं+पंडस+सडय

= २ पंडस+सडय ··(१)

आणि मडय= मडप+पडस—सडय

= २ पडस—सडय ··(२)

परंतु मंडय = मडय

∴ २ पडस—सडय= २ पंडस+सडय

∴ पडस =पंडस+सडय=पंडय

∴पडय=पंडस हें सिद्ध.

कु० १ आतां ∠पंसड=∠पसड

आणि ∠पंडस=∠सपड

आणि सड रेघ साधारण आहे

म्हणून सडप, सडपं हे दोन त्रिकोण समकोन

आहेत आणि **सपः सड : : सड : सप'**

∴ सड² = सप·सप'

कु० २ जर **पसप'** ही सरळ रेषा असती तर **डस** रेघ **पप'** रेघेशीं लंब झाली असती हें उघड दिसतें.

३ रें आतां **कथ** रेघ **मम'** रेघेस समान दुभागित्ये, आणि **मप** रेघेशीं समांतर आहे, म्हणून **पमम'** आणि **ऐकम'** रेघ या दोन समकोन त्रिकोणांपासून हें उत्पन्न होतें.

मकः कम' : : पऐः ऐम'

परंतु **मक=कम'**

∴ पऐ = ऐम'

आणखी **पऐइ** आणि **पम'प'** यां समकोन त्रिकोणांपासून

पऐ : ऐम' : : पइ : इप'

परंतु **पऐ=ऐम'**

∴ पइ = इप' हें सिद्ध.

कु०१ ह्यावरून पराबलेच्या बाहेर एक बिंदु सांगितला असतां त्यापासून पराबलेस स्पर्शरेषा काढतां येते.

(आ० १०) **पअप'** ही एक पराबला आहे, **स** हा तिचा केंद्र आहे, आणि **ड** हा पराबलेच्या बाहेर एक बिंदु सांगितला आहे असें मान. आतां **सड** सांध आणि **ड** मध्य बिंदु कल्पून **डस** त्रिज्येनें एक वर्तुळ कर. हें वर्तुळ प्रधान रेषेवरील दोन बिंदु **म** आणि **म'** ह्यांतून जाईल. प्रधानरेषेवर **मप** लंब कर तर तो लंब पराबलेस **प** बिंदुस्थळीं छेदील. **डप** सांध, तर **डप** ही रेघ पराबलेस **प** स्थळीं स्पर्शरेषा होईल. **सप** सांध.

आतां **मड=डस** आणि **सप=मप** आणि **पड** रेघ साधारण आहे.

$\therefore$ ∠**डपम**=∠**डपस**

म्हणून **डप** ही रेघ पराबलेस **प** स्थळीं स्पर्शरेषा आहे, कारण कीं ही जर स्पर्शरेषा नसती तर **डपम** आणि **डपस** हे दोन कोन बरोबर झाले नसते.

सिद्धांत ८.

(आ० ११) जर **क्ट** ही **क** स्थळीं एक स्पर्शरेषा आहे आणि **पप′** ही ज्या स्पर्शरेषेशीं समांतर आहे तर,

क्ड=$\frac{1}{2}$(**पन**+**प′न′**)

आतां **पन**^{2} = ४ **अस**·**अन** . . . . . (१)

क्ड^2= ४ **अस**·**अड** . . . . (२)

प′न′^{2} = ४ **अस**·**अन′** . . . . . (३)

(३) ह्यांतून (१) हें वजा करून

प′न′^{2}—**पन**^{2}= ४ **अस** (**अन′**—**अन**)

= ४ **अस**· **पल** . . . . . (४)

आणि **प′न′**^{2}—**पन**^{2}= (**प′न′**+**पन**) (**प′न′**—**पन**)

= (**प′न′**+**पन**)· **प′ल** . . (५)

आणखी **प′पल** आणि **क्टड** ह्या समकोन त्रिकोणांपासून

क्ड : **डट** : : **प′ल** : **पल**

म्हणून (४) आणि (५) ह्यांपासून

प′न′+**पन**=४**अस**·$\frac{\text{पल}}{\text{प′ल}}$ = $\frac{\text{४अस·डट}}{\text{क्ड}}$

$$= \frac{४\,अस \cdot डट \cdot क्कड}{क्कड^२} = \frac{४\,अस.\,डट\cdot क्कड}{४\,अस\cdot अड}$$

$$=२डक्क$$

आतां डट=२अड

∴ डक्क=½ (पन+पंनं)   हें सिद्ध.

उ॰ जर प आणि पं हे दोन बिंदु अक्षाच्या दोहोंबाजूंस आहेत तर २ क्कड=पन—पंनं

कु॰ १ क्कव रेघ अनं रेघेशीं समांतर केली तर क्कव रेघ पपं रेघेस दुभागते.

कारण कीं वंम=क्कड=½ (पन+पंनं)

∴पव=पंव

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं जी ज्या स्पर्शरेषेशीं समांतर असते तीस क्कक व्यास दुभागितो.

आतां पपं ही कोणती ही एक ज्या आहे, ह्मणून ह्या कु॰ वरून असें अनुमान निघतें कीं स्पर्श रेषेशीं समांतर अशा जितक्या ज्या होतात तितक्यांस क्कक रेघ समान दुभागते; म्हणजे, सर्व समांतर ज्यांच्या मध्य स्थळांचीं स्थानें एका सरळ रेघेंत असतात.

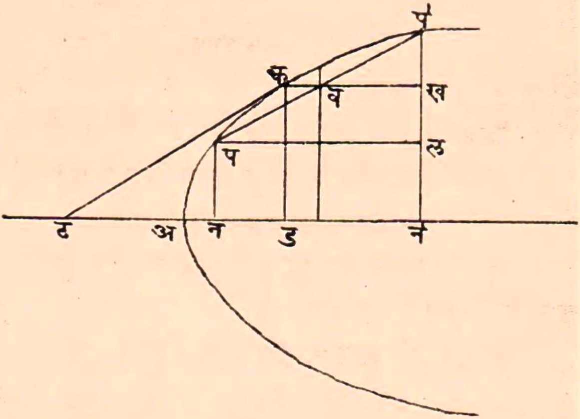
उ॰ स केंद्रांतून पपं ही कोणतीही एक ज्या काढिली आहे, तर सिद्धकर कीं ४सप·सपं=४अस·पपं.

सिद्धांत ९.

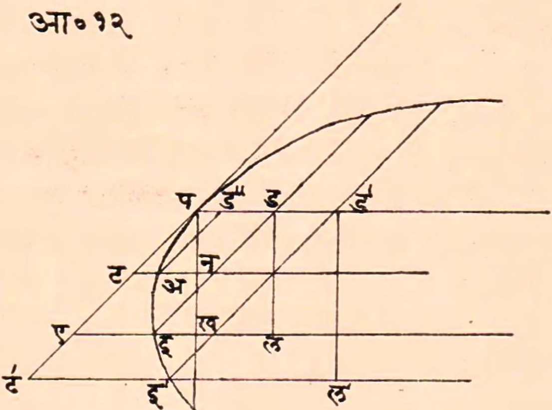
(आ॰ १२) जर प बिंदुस्थळीं केलेल्या स्पर्शरेषेशीं समांतर अशा इड आणि इंडं ह्या दोन ज्या केल्या आणि ऐइ आणि ऐंइं ह्या रेघा अक्षाशीं समांतर केल्या तर—

पराबला.

आ० ११



आ० १२



ऐइ : ऐ'इ' :: इड^2 : इ'ड'^{2} होईल.

सिद्धांत ६ प्रमाणें

ऐइ : इक :: पक : कल

म्हणून

४ अस·ऐइ : ४ अस·इक : : पक^2 : पक·कल

आतां (सिद्धांत २ कु० १) प्रमाणें

४ अस·इक=पक·कल

∴ ∴ पक^2=४अस· ऐइ

परंतु पक^2=डल^2

∴ ४अस· ऐइ=डल^2

ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं

४अस· ऐ'इ'=ड'ल'^{2}

∴ ऐइ : ऐ'इ' :: डल^2 : ड'ल'^{2} . . . (१)

परंतु डइल आणि ड'इ'ल' ह्यां दोन सरूप त्रिकोणांपासून

डल: ड'ल' :: इड : इ'ड'

∴ ही किंमत (१) ह्यांत जुळून खालीं लिहिलेलें उत्पन्न होतें.

एइ : ए'इ' :: इड : इ'ड'^{2} . . . . . . (२)

कु० १. (२) ह्या समीकरणापासून

ऐइ : टअ :: इड^2 : अड''^{2}

: : इड^2 : पट^2

ऐइ : इड^2 : : टअ : पट^2 . . . . . (३)

आतां पट^2=पन^2+नट^2=४अस·अन+४अन^2

=४ अन (अस + अन)=४ अन· सप

=४ अट · सप

ही किंमत (३) ह्या समीकरणांत जुळून हें उत्पन्न होतें

$$ऐइ : इड^2 : : १ : ४ सप$$

म्हणजे $इड^2 = ४सप \cdot ऐइ$ हें सिद्ध.

ह्या समीकरणाचें रूप आणि सि० २ ह्यांत सिद्ध केलेल्या समीकरणाचें रूप हीं दोन्हीं अगदीं एक सारखीं आहेत. हें पराबलेचें समीकरण, स्पर्शरेषा आणि स्पर्श बिंदूंतून काढलेला व्यास ह्या दोन तिर्कस आसांच्या संबंधानें आणिलें आहे.

उ० १ पराबलेस **पट** स्पर्श रेषा काढून तिच्या **प**स्पर्श बिंदूपासून **मक** आणि **वख** ह्या कोणत्याही दोन व्यासांच्या **म** आणि **व** ह्या शिरोबिंदूंपर्यंत **पम** आणि **पव** ह्या रेषा काढल्या, आणि ह्यांपैकीं **पव** रेघ **मक** व्यासास **छ** स्थळीं छेंदिते व **पम** रेघ **वख** व्यासास **च** स्थळीं छेदिते. तर **च** आणि **छ** हे दोन छेदन बिंदू सांधणारी **च छ** रेघ **पट** स्पर्शरेषेशीं समांतर होते.

उ० २ जर पराबलेस **पट** स्पर्शरेषा काढून तिच्या **प** स्पर्शबिंदूपासून **पल** ही कोणतीही एक ज्या काढली; व अक्षाशीं समांतर अशी दुसरी एक रेघ काढली, आणि ती ज्या **स ख** बिंदूंत, पराबलेच्या कौंसास **इ** बिंदूंत, आणि स्पर्शरेषेस **ट** बिंदूंत मिळाली तर **टइ : इख : : पख : खल** होईल.

उ० ३ पराबलेस दोन स्पर्शरेषा काढल्या, आणि त्यांचीं स्पर्शस्थळें सांधणारी ज्या काढून तिच्याशीं समांतर अशी तिसरी एक स्पर्शरेषा केली, तर तिचा जो भाग पहिल्या दोन स्पर्शरेषांमध्यें सांपडतो त्याचे स्पर्शबिंदुस्थळीं दोन समान भाग होतात.

उ० ४. पराबलेंत **प** आणि **पं** हे दोन बिंदु घेऊन त्यास्थळीं स्पर्शरेषा केल्या आहेत; त्यांपैकीं **प** स्थळची स्पर्शरेषा अक्षास **ट** बिंदूंत छेदिते आणि **पं** स्थळची स्पर्शरेषा अक्षास **टं** बिंदूंत छेदिते, आणि **प** आणि **पं** ह्या स्पर्शस्थळांपासून अक्षावर अनुक्रमें **पम** आणि **पंमं** हे लंब काढले, तर असें सिद्ध होईल कीं,

१ लें. स्प. **टपम** : स्प. **टंपंमं** : : **पम** : **पमं**

२ रें. स्प. **टपम**—स्प. **टंपंमं**=२स्प. **पंपम**

उ० ५. पराबलेच्या केंद्रांतून ज्या काढल्या तर त्या आपल्या मतिव्यासांच्या केंद्रगलक्षकांच्या प्रमाणांत असतात.

दीर्घवर्तुळ.

सिद्धांत १.

(आ० १) **मवमं** ही एक आडवी पातळी आहे किंवा कागदाची पातळी आहे असें मान; आणि कागदाच्या पातळीशीं लंब अशा पातळीनें केलेलें दीर्घवर्तुळाकार छिन्न **अमअं** आहे असें मान; तर **अअं** ही रेघ आडवा आंस होईल. पायाशीं समांतर अशीं **कपकंग़**आणि **मपंमंग़ं** हीं दोन छिन्नें केलीं आहेत म्हणून तीं वर्तुळाकार आहेत, **ककं** आणि **ममं** हे अनुक्रमें त्यांचे व्यास आडव्या पातळींतच आहेत. आतां **कपकंग़** हें वर्तुळाकार छिन्न आणि **अपअं** हें दीर्घवर्तुळाकार छिन्न हीं दोन्ही छिन्नें आडव्या पातळीशीं लंब आहेत, म्हणून त्यांचें साधारण छिन्न **पग़** ही रेघ आडव्या पातळीशीं लंब आहे, आणि जी रेघ

त्याच पातळीमध्यें असून ही स्पर्श करित्ये तीशीं ही लंब आहे; म्हणून पप्प रेघ ककं रेघेशीं लंब आहे. आणि ह्याचप्रमाणें पंप्पं रेघ ममं रेघेशीं लंब आहे.आतां अनकं आणि अनंमं हे दोन त्रिकोणसरूप आहेत, आणि अंनकं आणि अंनंम हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत ह्मणून

अन : अनं : : नकं : नंमं

अंन : अंनं : : नक : नंम

∴ अन· अंन : अनं· अंनं : : नकं· नक: नंमं·नंम

परंतु भूमितीच्या तिसऱ्या बुकाचा ३५ व्या सिद्धांताप्रमाणें

नकं· नक=नपं^{2}

आणि मंनं· मनं=नंपं^{2}

∴ अन· अंन : अनं· अंनं : : नपं^{2} : नंपं^{2}

सिद्धांत २.

(आ०२) जर प आणि पं हे कोणते ही दोन-बिंदु दीर्घवर्तुळांत आहेत तर मागील सिद्धांतांत असें सिद्ध केलें आहे कीं

अन· अंन : अनं· नंअं : : नपं^{2} : नंपं^{2}

ह्मणून ब आणि प हे दोन बिंदु जर घेतले तर

अन·अंन : अक· कअं : : नपं^{2} : बकं^{2}

आतां क हा बिंदु जर दीर्घ वर्तुळाचा मध्य आहे तर,

अक=कअं

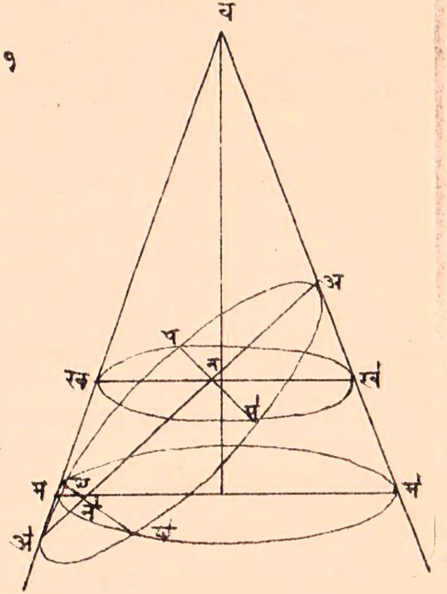
$$\therefore \text{नपं}^2 = \frac{\text{बकं}^2}{\text{अकं}^2} \times \text{अन· अंन}$$

परंतु अन· अंन=अकं^{2}—कनं^{2}

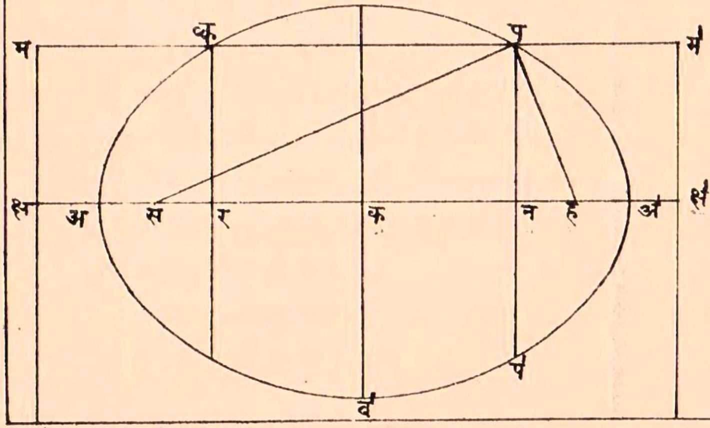
$$\therefore \text{नपं}^2 = \frac{\text{बकं}^2}{\text{अकं}^2} \times (\text{अकं}^2 - \text{कनं}^2) \cdots (१)$$

दीर्घ वर्तूळ

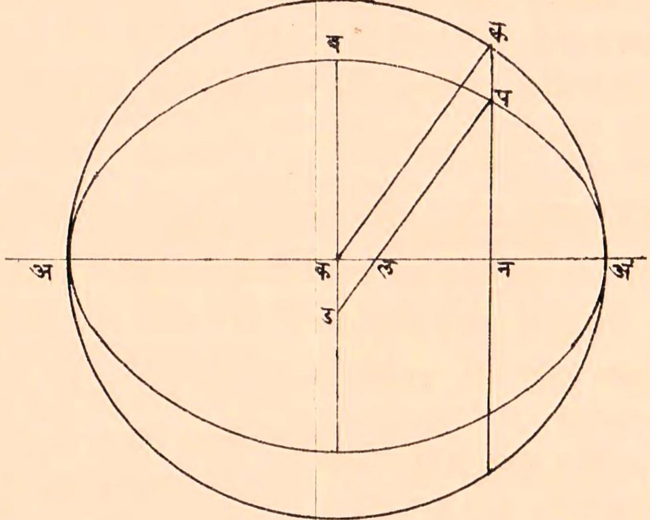
आ० १



आ० २



आ० ३



(आ० १) ह्यामध्यें असें दिसतें कीं **नप=नपं** आणि **अअं** अक्षाच्या दोहों बाजूंस कोणतेही दोन बिंदु घेतले तर ह्याप्रमाणें सिद्ध होईल; ह्मणून **अअं** रेघेच्या दोन्हीं बाजूकडील दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसाचे भाग. सजातीय असतात.

आतां क्र हा कोणताही दुसरा बिंदु घेतला तर (१) ह्या समीकरणाप्रमाणें हें उत्पन्न होईल—

$$\text{क्रर}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \times (\text{अक}^2 - \text{कर}^2)$$

जर **कर=कन** असेल तर

$$\text{क्रर}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \times (\text{अक}^2 - \text{कन}^2) = \text{नप}^2$$

ह्मणजे जर **कर=कन** असें मानिलें तर **क्रर=नप** होईल. ह्मणून **बक** रेघेच्या दोहों बाजूंस सारख्या अंतरावर जे लक्षक असतात ते बरोबर असतात.

आणखी जर **क्रर=पन** असें मानिलें तर **कर=कन** होईल, म्हणजे क्रप ही ज्या **ब** बिंदुस्थळीं समान दुभागिली आहे सामान्यतः ज्या, ज्या **अअं** रेघेशीं समांतर आहेत त्या ज्यांस **बबं** रेघ समान दुभागते. म्हणून असें सिद्ध होतें कीं **बबं** व्यासाच्या दोन्हीं बाजूंकडील दीर्घवर्तुळाच्या कौंसाचे सजातीय आहेत. **अअं** रेघेस **बृहदक्ष** असें म्हणावें आणि **बबं** रेघेस **लघ्वक्ष** असें म्हणावें.

सिद्धांत ३.

आतां (व्याख्या ५) प्रमाणें ज्या बिंदूचे एका विवक्षित बिंदूपासून अंतर, त्याचे एका विवक्षित रेघे-

पासून जें अंतर त्यापेक्षां कांहीं एका अविकारी पदानें कमी आहे असा जो बिंदु तो दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसांत आहे.

ह आणि **स** हे दोन अचल बिंदु म्हणजे केंद्र आहेत, आणि **मक्ष** आणि **मं क्षं** ह्या दोन अचल रेघा म्हणजे प्रधान रेषा आहेत असें मान, आतां (आ० २ पहा)

सप=के· **पम** आणि **हप**=के· **पमं**

∴ **सप**+**हप**=के (**पम**+**पमं**)=के· **क्षक्षं**

आतां हें उघड दिसतें कीं **क्षक्षं** हें अविकारी पद आहे, म्हणून केंद्रांतरांची बेरीज अविकारी आहे.

(कु० १)आतां **सप**+**हप** हें पद अविकारी आहे ह्यावरून दीर्घवर्तुळाची आकृति काढतां येईल. ती काढण्याची रीति खाली सांगितली आहे.

सप+**हप** इतक्या लांबीची दोरी घेऊन तिचें एक टोंक **स** स्थळीं टांचणी मारून बांध आणि तिचें दुसरें टोंक **ह** स्थळीं टांचणी मारून बांध. नंतर त्या सैल झालेल्या दोरीमध्यें **प** पेनसिल घालून दोरी ताण आणि दोरीला सैल न होऊं देतां पेनसिल फिरीव, म्हणजे कांहीं एक वक्ररेषा कृति निघेल, आतां **प** पेनसिल् कोणत्याही स्थळीं असली तरी **सप**+**हप** ह्याची किम्मत सारखीच राहते म्हणजे दोरीचे लांबी बरोबर असते म्हणून ही वक्ररेषाकृति दीर्घवर्तुळ आहे हें सिद्ध.

(कु० २) ह्या दोरीची लांबी **अअं** बृहदक्षा बरोबर आहे. कारण कीं, जेव्हां **प** बिंदु **अ** स्थळीं येतो तेव्हां **अस** रेघेवर दोरी द्विगुणित होते, म्हणून **अ** स्थळीं दोरीचे लांबी बरोबर

२ **अस**+**सह** आहे

परंतु अस=अंह आहे; म्हणून त्या दोरीचे लांबी बरोबर

$$अस+सह+हअं=अअं$$

$$\therefore सप+हप=अअं=२अक$$

हें विद्यार्थ्यांनीं विशेषेंकरून लक्ष्यांत ठेवावें.

(कु० ३) हेंच सिद्ध करण्याची दुसरी एक सोपी रीति आहे ती अशी—

$$अस=के\cdot अक्ष$$

$$अंस=के\cdot अंक्ष$$

$$\therefore अस+अंस=के(अक्ष+अंक्ष)$$

$$=के(अंक्षं+अंक्ष)=के.क्षक्षं$$

आतां $सप+हप=के\cdot क्षक्षं$

$$\therefore सप+हप=अस+अंस=अअं \quad (१)$$

(कु०४) आतां $के\cdot क्षक्षं=२अक$

$$\therefore के(२अक्ष+२अक)=२अक$$

$$\therefore अक्ष=\frac{अक(१-के)}{के} \cdot\cdot\cdot\cdot (२)$$

आणि $अस=के\cdot अक्ष=अक(१-के)\cdot\cdot\cdot\cdot(३)$

आणखी $सक=अक-अस=अक-अक(१-के)$

$$=अक\cdot के \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (४)$$

सक ही रेघ केंद्र वैषम्य मापिते

$$क्षक=अक+अक्ष=अक+अक\cdot\frac{(१-के)}{के}$$

$$=\frac{अक}{के} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot (५$$

आतां मागें सांगितल्या रीतीप्रमाणें दीर्घवर्तुळाकृ-

ति काढतांना जेव्हां प बिंदु ब स्थळीं येतो तेव्हां हें सुलभरीतीनें सिद्ध होईल. आणि सिद्धही करावयास नको, दीर्घवर्तुळाच्या कौंसांच्या सजातित्वावरूनच हें उघड दिसतें कीं, सब = हब = अक

$$\text{परंतु, सब}^2 = \text{सक}^2 + \text{कब}^2$$

$$\therefore \text{अक}^2 = \text{के}^2 \cdot \text{अक}^2 + \text{वक}^2$$

$$\therefore \text{वक}^2 = \text{अक}^2 (१ - \text{के}^2) \; \dots\dots \; (६)$$

$$\text{वक}^2 = \text{अक}(१ + \text{के}) \cdot \text{अक}(१ - \text{के}) = \text{अस} \cdot \text{सअं} \; \cdots (७)$$

हीं सात समीकरणें क्ष, अ, स, आणि क ह्या बिंदूंचे विवक्षित संबंध दाखवितात, म्हणून हीं चांगलीं लक्षांत ठेवावीं.

(६) आणि (७) हीं समीकरणें बृहदक्ष आणि लघ्वक्ष ह्यांचा संबंध दाखवितात.

म्हणून ह्यां समीकरणांपासून असें समीकरण आणतां येईल कीं, ज्यामध्यें (के) हें पद व्यक्त होईल.

$$(\text{कु}०५) \; \text{सप} - \text{हप} = \text{के} (\text{पम} - \text{पमं})$$

$$\text{परंतु पम} = \text{कक्ष} + \text{कन}$$

$$\text{आणि पमं} = \text{कक्ष} - \text{कन}$$

$$\therefore \text{पम} - \text{पमं} = २\text{कन}$$

$$\therefore \text{सप} - \text{हप} = २\text{के} \cdot \text{कन}$$

सिद्धांत ४.

(आकृति ३) अअं बृहदक्षावर अकअं वर्तुळ काढ.

आतां वर्तुळाच्या धर्माप्रमाणें $\text{कन}^2 = \text{अन} \times \text{नअं} \cdots १$

व दीर्घवर्तुळाच्या धर्माप्रमाणें $\text{नप}^2 = \text{अन} \times \text{नअं} \times \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdots २$

पहिल्यास दुसऱ्यानें भागून वर्गमूळ काढल्यानें

क्न : नप : : अक : बक·

कु० १. कक्क रेषेशीं समांतर आणि बृहदक्षास ल बिंदूंत छेदणारी अशी पड रेषा काढली तर पल=बक होईल.

आतां क्कन आणि पलन हे समकोन त्रिकोण आहेत म्हणून क्न : पन : : क्स : पल
परंतु वरील सिद्धांताप्रमाणें

क्नः पन : : अक : बक.

क्क=अक आहे म्हणून.

अक : बक : : अक : पल

∴ पल=बक.

म्हणून दीर्घ वर्तुळाच्या बृहदक्षावर वर्तुळ काढलें आणि प स्थळाचा लक्षक वर्तुळपरिघास क्क स्थळीं मिळेपर्यंत वाढविला व क्क सांधले तर क्क रेषेशीं पल रेषा समांतर काढली असतां ती लघ्वक्षाच्या अर्धाबरोबर होते.

सिद्धांत ५.

(आ० ४) दीर्घवर्तुळास एका बिंदुस्थळीं स्पर्श-रेषा केली तर, त्या बिंदुसंबंधी लक्षकाचे वर्गास:लघ्व-क्षाचा वर्ग : : अवच्छेदक आणि प्रतिस्पर्शरेषा ह्यांचे गुणाकारास : बृहदक्षाचा वर्ग.

पपंट ही एक छेदन रेघ आहे ती अशी कीं, ती दीर्घवर्तुळाच्या कौंसास प आणि पं ह्या दोन बिंदुस्थळीं छेदिते आणि बृहदक्षास ट स्थळीं छेदिते असें मान; आणि कन आणि नप हे प बिंदूचे अवच्छेदक लक्षक आहेत आणि कनं व नंपं हे पं बिंदूचे अव-च्छेदक लक्षक आहेत. आतां पंक्क ही रेघ आंसाशीं

समांतर काढली तर ती पन स क्क स्थळीं छेदील. आतां

$$\text{पन}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\left(\text{अक}^2 - \text{कन}^2\right)$$

$$\text{पंनं}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\left(\text{अक}^2 - \text{कनं}^2\right)$$

ह्या दोन समीकरणांची वजाबाकी करून हें उत्पन्न होतें,

$$\text{पन}^2 - \text{पंनं}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\left(\text{कनं}^2 - \text{कन}^2\right)$$

$$\therefore (\text{पन} + \text{पंनं})(\text{पन} - \text{पंनं}) = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}(\text{कन} + \text{कनं})(\text{कनं} - \text{कन})$$

ह्या समीकरणाच्या दोहीं पेंथ्यांस (पन+पंनं) (कन—कंनं) ह्यानें भागल्यानें

$$\frac{\text{पन} - \text{पंनं}}{\text{कनं} - \text{कन}} = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \frac{\text{कनं} + \text{कन}}{\text{पन} + \text{पंनं}}$$

ह्मणजे $\frac{\text{पक}}{\text{पंक}} = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \frac{\text{कनं} + \text{कन}}{\text{पन} + \text{पंनं}}$

आतां पकपं आणि पनट ह्या दोन सरूप त्रिकोणापासून

$$\frac{\text{पक}}{\text{पंक}} = \frac{\text{पन}}{\text{नट}}$$

$$\therefore \frac{\text{पन}}{\text{नट}} = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \frac{\text{कनं} + \text{कन}}{\text{पन} + \text{पंनं}} \quad \ldots\ldots (१$$

आतां कोणतीही छेदन रेघ जरी घेतली तरी हें समीकरण खरें आहे, म्हणून पं बिंदु प बिंदूकडे सरकूं लागला तरी हें समीकरण खरें आहे, ह्मणून पं बिंदु प बिंदूस मिळाला असतांही हें समीकरण खरें आहे

परंतु जसजसा प' बिंदु प बिंदूकडे सरकत जाईल तसतसा ट' बिंदु ट बिंदूकडे सरकत जाईल, आणि असें होतहोत शेवटीं प' बिंदु प बिंदूस मिळाला म्हणजे ट' बिंदु ट बिंदूस मिळेल; आणि असें झालें म्हणजे

$$\frac{\text{पन}}{\text{नट}'}=\frac{\text{पन}}{\text{नट}} \text{ होईल.}$$

आणि कन' = कन होईल. व पन' = पन होईल

∴ (१) ह्या समीकरणापासून

$$\frac{\text{पन}}{\text{नट}'} \text{ ह्याचें अंतिममान} = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \frac{\text{कन}'+\text{कन}}{\text{पन}'+\text{पन}'} \text{ आहे.}$$

$$\text{म्हणून } \frac{\text{पन}}{\text{नट}}=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \frac{\text{कन}}{\text{नप}}$$

$$\therefore \text{पन}^2=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \text{कन} \cdot \text{नट} \quad \cdots\cdots (२)$$

कु० १. नट रेघेस प्रतिस्पर्श रेघ ह्मणतात.

$$\text{प्रतिस्पर्शरेषा}=\frac{\text{अन} \cdot \text{नअ}'}{\text{कन}}$$

$$\text{कारण कीं } \text{पन}^2=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}(\text{अक}^2-\text{कन}^2) \cdots (३)$$

∴ (३) आणि (२) हीं समीकरणें परस्परांबरोबर लिहून

$$\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot (\text{अक}^2-\text{कन}^2)=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \text{कन} \cdot \text{नट}$$

$$\therefore \text{नट}=\frac{\text{अक}^2-\text{कन}^2}{\text{कन}}$$

$$=\frac{\text{अन} \cdot \text{नअ}'}{\text{कन}} \quad \cdots\cdots (४)$$

$$\text{कु० २ कट}=\text{कन}+\text{नट}=\text{कन}+\frac{\text{अन}\cdot\text{नअ}}{\text{कन}}$$

$$=\text{कन}^2+\frac{\text{अक}^2+\text{कन}^2}{\text{कन}}=\frac{\text{अक}^2}{\text{कन}}\;\cdot\cdot\;(५)$$

उ० मधानकेंद्रगलक्षकाच्या एका शेवटास स्पर्श रेषा काढली तर ती बृहदक्षास मधान रेषेवर छेदील हें सिद्ध कर.

कु० ३. **पग** ही नेमरेघ काढ तर ती बृहदक्षास **ग** स्थळीं छेदील. आतां **पगन** आणि **पनट** हे दोन काटकोन त्रिकोण सरूप आहेत ह्मणून—

$$\text{गन} : \text{पन} :: \text{पन} : \text{नट}$$

$$\therefore \text{पन}^2=\text{गन}\cdot\text{नट}$$

$$\text{परंतु पन}^2=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}\cdot\text{नट}$$

$$\therefore \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}\cdot\text{नट}=\text{गन}\cdot\text{नट}$$

$$\therefore \text{गन}=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}\;\cdots\cdots\;(१)$$

गन रेघेस उपनेम असें ह्मणतात.

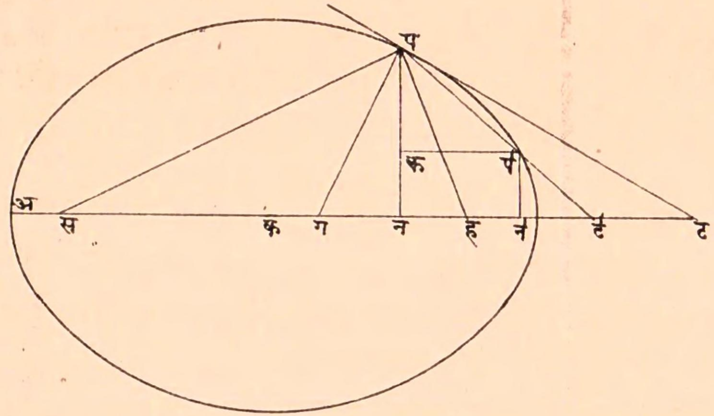
$$\text{कु० ४. कग}=\text{कन}-\text{गन}=\text{कन}-\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}$$

$$=\text{कन}\left(\frac{\text{अक}^2-\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\right)$$

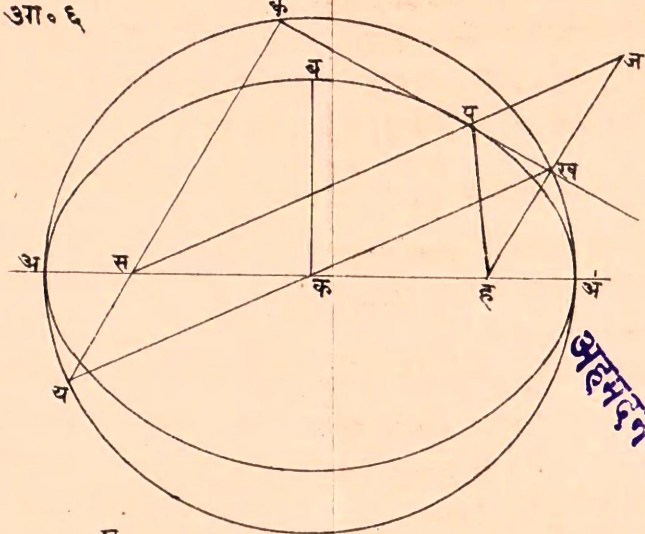
$$=\text{कन}\cdot\frac{\text{अक}^2\cdot\text{के}^2}{\text{अक}^2}\text{ सि० ३ समीकरण(६)प्रमाणें}$$

दीर्घ वर्तूळ

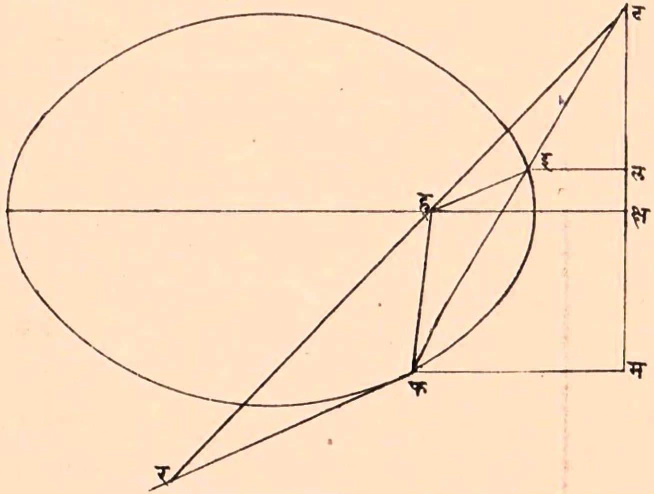
आ० ४



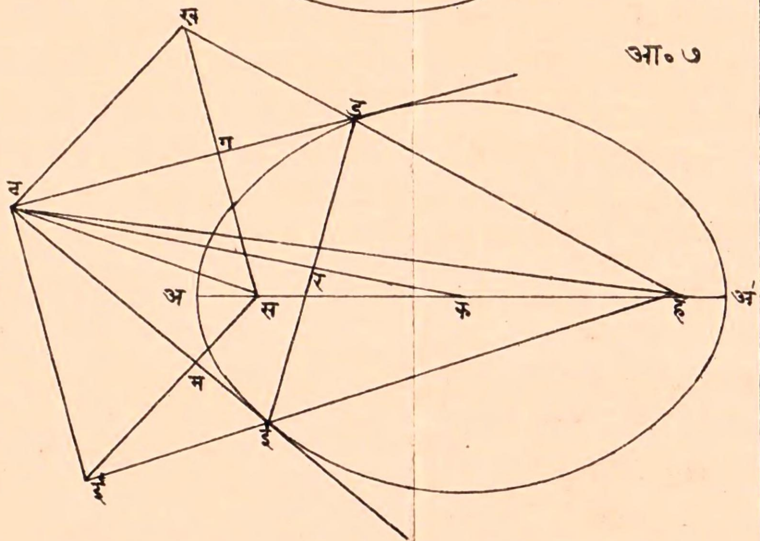
आ० ६



आ० ५



आ० ७



=के^{2}· कन . . . . (२)

(१) आणि (२) ही समीकरणें लक्ष्यांत ठेवावीं.

सग=सक+कग=के·अक+के^{2}·कन··(१)

तसेंच **हग=के · अक—के^{2} · कन** ·· (२)

आणखी **सप+हप= २ अक**. सि० ३ कु० २ प्रमाणें

आणि **सप—हप= २ के· कन**

ह्या दोन समीकरणांची बेरीजकरून

२ सप=२अक+ २ के· कन

आणि त्याच दोन समीकरणांची वजाबाकी घेऊन

२ हप= २ अक— २ के·कन

आतां वरच्या समीकरणास खालच्या समीकरणानें भागून

$$\frac{\text{सप}}{\text{हप}}=\frac{\text{अक}+\text{के}\cdot\text{कन}}{\text{अक}-\text{के}\cdot\text{कन}}$$

$$=\frac{\text{सग}}{\text{हग}}$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, **पग** रेघ केंद्रांतरांमधील कोन समान दुभागिते. आणखी ह्यावरून हें उघड दिसतें कीं केंद्रांतरें स्पर्शरेषेशीं सारखे कोन करतात.

सिद्धांत ६.

(आ० ५) जर प्रधान रेषेंतील कोणत्याही एका **ट** बिंदूंतून दोन रेषा काढल्या अशा कीं, एक **ह** केंद्रांतून जाते आणि दुसरी दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसास **इ** आणि **फ** ह्या दोन बिंदुस्थळीं छेदिते; आणि **इह** आणि **हफ** बिंदु सांधले तर

$\angle$ टहइ $=$ $\angle$ फहर होईल

आतां **फर** रेघ **हइ** रेघेशीं समांतर काढ; ती **टह** रेघेस **र** स्थळीं छेदिते. आणि **टक्ष** प्रधान रेषेवर **इल** आणि **फम** हे दोन लंब कर. आतां **टइह** आणि **टफर** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांपासून.

फर : इह :: टफ : टइ
:: मफ : लइ
:: के॰फह : के॰ हइ
:: फह : हइ

∴ फर $=$ फह

∴ $\angle$ फहर $=$ $\angle$ फरह

परंतु, $\angle$ फरह $=$ $\angle$ इहट

∴ $\angle$ फहर $=$ $\angle$ इहट · · · · · · हें सिद्ध.

कु॰ १. आतां अशी कल्पना कर कीं, **टइफ** रेघ **इ** बिंदु सभोंवती फिरते, ती अशी कीं, **फ** बिंदु **इ** बिंदु जवळ जवळ येतो आणि **फर** रेघ नेहेमीं आपणाशीं समांतर रहाते. असें झालें तरी **टहइ** हा कोन नेहेमीं **फहर** कोनाबरोबर राहील. आणखी **फ** बिंदु जसजसा **इ** बिंदु जवळजवळ येईल तसतसा **इहफ** कोन कमीकमी होत जाईल, आणि ज्यावेळेस **फ** बिंदु **इ** बिंदूशीं मिळेल त्यावेळेस **इहफ** कोन नाहींसा होईल. तथापि **टहइ** कोन **फहर** कोनाबरोबर होईल. म्हणून **फ** बिंदु **इ** बिंदूशीं मिळाला म्हणजे **टहइ** आणि **फहर** ह्यांतील प्रत्येक कोन काटकोन होईल आणि **टइ** रेघ दीर्घ वर्तुळास **इ** बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा होईल. ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं,

जर प्रधान रेषेंतील कोणत्याही एका बिंदूपासून

दीर्घ वर्तुळास स्पर्शरेषा केली, तर जी रेघ प्रधान रेघे-
वर घेतलेला बिंदु आणि केंद्र ह्मां दोन बिंदूंस सांधते
ती रेघ केंद्रांतरास लंब होईल. पराबलेविषयींही अ-
साच एक सिद्धांत मागें सिद्ध केला आहे.

कु० २. दीर्घ वर्तुळांच्या केंद्रांतून जाणारी अशी
एक ज्या घेऊन तिच्या शेवटांस स्पर्शरेषा काढल्या तर
त्या परस्परांस प्रधान रेषेवर छेदतील.

हें अनुमान मागल्या कु० वरूनच निघतें, तें अ-
सें कीं, जर दुसरी स्पर्शरेषा दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसास
इ स्थळीं स्पर्शिते असें कल्पिलें तर मागचेप्रमाणें असें
सिद्ध होईल कीं,

$\angle$ **टहइ**=एक काटकोन

$\therefore$ **इहइ** ही सरळ रेषा आहे.

सिद्धांत ७.

दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसांत एक बिंदु दिला असतां
त्यापासून दीर्घ वर्तुळास स्पर्शरेषा काढण्याची रीति-

(आ० ६) दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसांत **प** हा बिंदु दि-
ला आहे असें मान, **सप** आणि **हप** सांध, **सप** रेघ
ज बिंदूपर्यंत वाढीव अशी कीं **सज** = २ **अक** हो-
ईल, **हज** सांध, आणि **हज** रेघेवर **पख** लंब कर. त-
र **पख** रेघ दीर्घ वर्तुळास **प** बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा होई-
ल. कारण,

सप+**हप**= २ **अक**

आणि **सप**+**जप**= २ **अक**

$\therefore$ **सप**+**हप**=**सप**+**जप**

$\therefore$ हप = जप $\therefore \angle$ पहख = $\angle$ पजख

परंतु $\angle$ खपज = $\angle$ सपक

$\therefore \angle$ सपक = $\angle$ हपख

आतां जर हे दोन कोन बरोबर झाले तर **पख** रेघ स्पर्शरेषा झाली पाहिजे, म्हणून **पख** रेघ **प** बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा आहे.

कु० १. **कख** सांध; तर ज्या अर्थी **कख** रेघ **सह** आणि **हज** ह्या दोन रेघांस समान दुभागिते त्या अर्थी

कख $=\frac{1}{2}$ **सज** $=\frac{1}{2}$ **अअं** $=$ **अक**

ह्या वरून असें सिद्ध होतें कीं, जर बृहदक्षास व्यास असें कल्पून त्याजवर वर्तुळ काढलें तर **ख** बिंदु त्या वर्तुळाच्या परिघावर पडेल. बृहदक्षावर वर्तुळ काढ; आणि **खक** रेघ वाढीव. ती वर्तुळपरिघास **य** स्थळीं स्पर्शील; **सय** सांध. आतां **सयक** आणि **कखह** ह्या दोन त्रिकोणांच्या साम्यतेवरून हें उघड दिसतें कीं, **सय** रेघ **हख** रेघे बरोबर असून तिशीं समांतर आहे. **खय** आणि **यस** ह्या दोन रेघा वाढीव तर त्या परस्परांस **क्ष** बिंदूंत मिळतील. आतां **सय** रेघ **हख** रेघेशीं समांतर आहे ह्मणून त्या दोन्ही रेघा **क्षख** रेघेशीं लंब आहेत.

$\therefore \angle$ यक्षख = एक काट कोन

म्हणून **क्ष** हा बिंदु त्याच वर्तुळाच्या परिघावर आहे. त्यावरून असें सिद्ध होतें कीं,—

जर दीर्घ वर्तुळास कोणत्याही एका बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा केली तर तीस, तिजवरच दीर्घ वर्तुळाच्या केंद्रांपासून काढलेले लंब ज्या बिंदूंत छेदीतील ते बिंदु, बृहदक्षास आंस कल्पून काढलेल्या वर्तुळाच्या परिघावर पडतील.

कु॰ २. जर दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रापासून स्पर्शरेषेवर केलेल्या लंबांची लांबी ध आणि धं असेल तर

$$\text{ध}\cdot\text{धं}=\text{बक}^{२}$$

कारण कीं, $\because\ \text{सक्क}\cdot\text{सय}=\text{अस}\cdot\text{सअं}=\text{बक}^{२}\cdot$

परंतु $\text{सय}=\text{हख}$

$$\therefore\ \text{ध}\cdot\text{धं}=\text{बक}^{२}$$

कु॰ ३. आणखी $\text{सक्क} : \text{सप} :: \text{हख} : \text{हप}$

किंवा $\text{सक्क} : \text{हख} :: \text{सप} : \text{हप}$

ह्या प्रमाणाच्या पहिल्या व दुसऱ्या पदांस सक्कनें गुणून

$$\text{सक्क}^{२} : \text{सक्क}\cdot\text{हख} :: \text{सप} : \text{हप}$$

परंतु $\text{सक्क}\cdot\text{हख}=\text{बक}^{२}$

$$\therefore\ \text{सक्क}^{२}=\text{बक}^{२}\cdot\frac{\text{सप}}{\text{हप}}=\text{बक}^{२}\cdot\frac{\text{सप}}{२\text{अक}-\text{सप}}$$

ह्या समीकरणावरून, दीर्घ वर्तुळाच्या कौंसांतील कोणत्याही एका बिंदूचे एका केंद्रापासून अंतर, आणि त्याच केंद्रापासून त्याच बिंदू संबंधी स्पर्श रेषेवर केलेला लंब, ह्या दोहोंचा संबंध समजतो.

सिद्धांत ८.

(आ ७). ह्यांत अडअं हें एक दीर्घ वर्तुळ आहे, टड आणि टडं ह्या रेषा अनुक्रमें ड आणि डं ह्या स्थळांच्या स्पर्शरेषा आहेत; टड आणि टडं ह्या रेषांवर अनुक्रमें सग आणि सम हे लंब काढले आहेत; हे लंब हड आणि हडं ह्या रेघांस अनुक्रमें ख आणि ल ह्यां बिंदूंत मिळेतोंपर्यंत वाढविले आहेत; आणि टक,

टह, टस, डस, सइ, आणि डइ ह्या रेषा काढिल्या आहेत. आतां हें सिद्ध कारावयाचें आहे कीं,

१ लें. ∠डहट=∠इहट
२ रें. ∠सटइ=∠डटह
३ रें. डर=रइ

१ लें. कोन डहट=कोन इहट हें सिद्ध करावयाचें.

आतां सगड आणि खगड ह्या दोन त्रिकोणांत ∠सगड=∠खडग, आणि ग बिंदुस्थळचा प्रत्येक कोन एक काटकोन आहे, आणि डग रेघ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे म्हणून खड=डस

∴खह=अअं

त्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, लह=अअं

∴खह=लह · · · · · · · · · (१)

आणखी टगख आणि टगस ह्या दोन त्रिकोणांत खग=सग, आणि ग बिंदुस्थळचा प्रत्येक कोन एक काटकोन आहे आणि टग रेघ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे, म्हणून टख=सट

त्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, टस=टल

∴टल=टख · · · · · · · · · (२)

आतां टहख आणि टहल ह्या दोन त्रिकोणांत खह=लह (१) प्र०, टल=टख (२) प्र०, आणि टह रेघ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे म्हणून

△टहख=△टहल

∴∠डहट=∠इहट · · · · · हें सिद्ध.

२ रें ∠सटइ=∠डटह हें सिद्ध करावयाचें.

$\angle$ लटह $=\angle$ खटह

परंतु $\angle$ लटह $=२\angle$ सटइ $+\angle$ सटह

आणि $\angle$ खटह $=२\angle$ डटस $-\angle$ सटह

$\therefore$ $२\angle$ सटइ $+\angle$ सटह $=२\angle$ डहस $-\angle$ सटह

$\therefore$ $\angle$ डटस $=\angle$ सटइ $+\angle$ सटह $=\angle$ इटह

$\therefore \angle$ इटह $=\angle$ इटस · · · हें सिद्ध.

३रें. डर=रइ हें सिद्ध करावयाचें

$\triangle$ टलह $=\triangle$ टलइ $+\triangle$ टसइ $+\triangle$ टसक $+$

$\triangle$ सइक $+\triangle$ टकह $+\triangle$ इकह.

परंतु $\triangle$ टलइ $=\triangle$ टसइ; $\triangle$ टसक $=\triangle$ टकह;

$\triangle$ सइक $=\triangle$ इकह $\therefore \triangle$ टलह $=२\triangle$ टइक

त्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, $\triangle$ टखह $=२\triangle$ टडक

$\therefore \triangle$ टइक $=\triangle$ टडक

ह्यावरून असें सुलभ रीतीनें सिद्ध होईल कीं,

डर=इर · · · · · · · · · · हें सिद्ध.

(कु० १) ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, दोन स्पर्शरेषांचीं स्पर्शस्थळें सांधून जी ज्या होते तीस, जी रेषा त्या दोन स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु आणि दीर्घवर्तळाचामध्यबिंदु ह्या दोहोंस सांधते ती समान दुभागते.

(कु० २) जर दीर्घ वर्तुळांत एक ज्या काढली आणि तीस समान दुभागणारी अशी एक रेषा दीर्घवर्तुळाच्या मध्यबिंदूपासून काढली तर ती रेषा, त्याच ज्याच्या शेवटांशीं जा दोन स्पर्शरेषा होतात त्यांच्या छेदन बिंदूतून जाते.

(कु० ३) ज्या अर्थीं ही (टक), रेषा पहिल्या ज्येशीं म्हणजे डइ शीं समांतर ज्या रेषा आहेत, त्या सर्वांस समान दुभागते; त्या अर्थीं हें उघड दिसतें

कीं, त्यासमान दुभागणाऱ्या रेषेच्या शेवटाशीं स्पर्शरेषा केली तर ती त्या ज्येशीं समांतर होते.

सिद्धांत ९.

(आ० ८). **अपअं** हें एक दीर्घ वर्तुळ आहे असें मान; त्यांत **डकडं** हा कोणताही एक व्यास काढ, आणि ह्या व्यासाच्या **ड** शेवटावर **लडह** ही स्पर्शरेषा काढ. आतां ह्या स्पर्शरेषेशीं समांतर अशी **पकपं** ज्या काढ, तर (कु० ३ म०) तीस **डकडं** व्यास समान दुभागील. ह्या ज्येचे **प** शेवटावर **लपग** स्पर्शरेषा काढली तर (कु० ३ म०)**लपग** स्पर्शरेषेस ज्या ज्या समांतर असतील त्या सर्वांस **पकपं** व्यास समान दुभागील. म्हणून ह्या दोन व्यासांमध्यें असा संबंध आहे कीं, प्रत्येक व्यास, दुसऱ्या व्यासाशीं ज्या रेषा समांतर असतील त्यांस समान दुभागितो. अशा व्यासांस **व्यास, प्रतिव्यास** असें म्हणावें. आतां ह्या सिद्धांतांत असें एक समीकरण शोधून काढायाचें आहे कीं, तेणेंकरून, **प** आणि **ड** ह्या दोन बिंदूंपैकीं कोणत्याही एका बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक सांगितलें असतां दुसऱ्या बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक काढतां यावे. **कन** आणि **नप** हे **प** बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक आहेत, आणि **कम** आणि **मड** हे **हड** बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक आहेत.

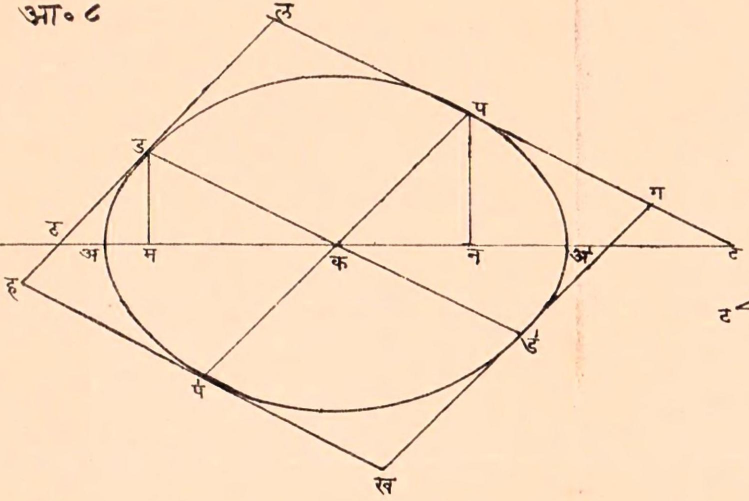
आतां **पकन** आणि **डटम** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांत

पन : डम : : कप : डट

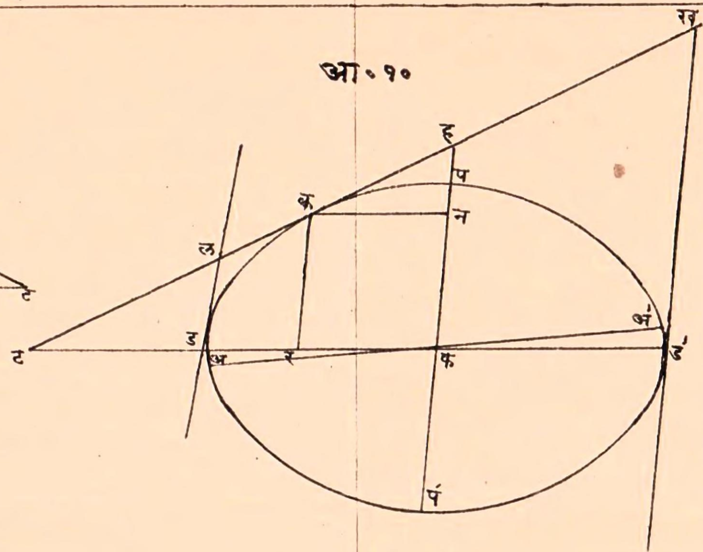
: : **कटं** :**कट** . . . (१)

दीर्घवर्तूळ.

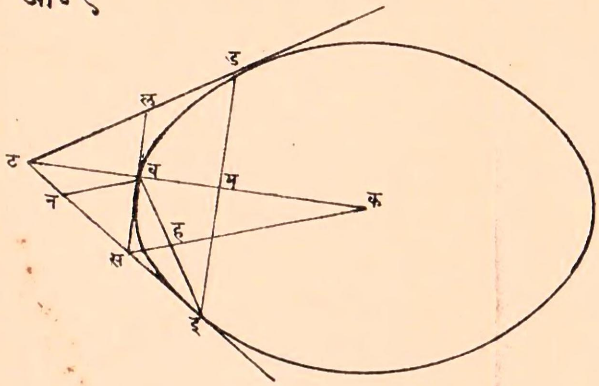
आ० ८



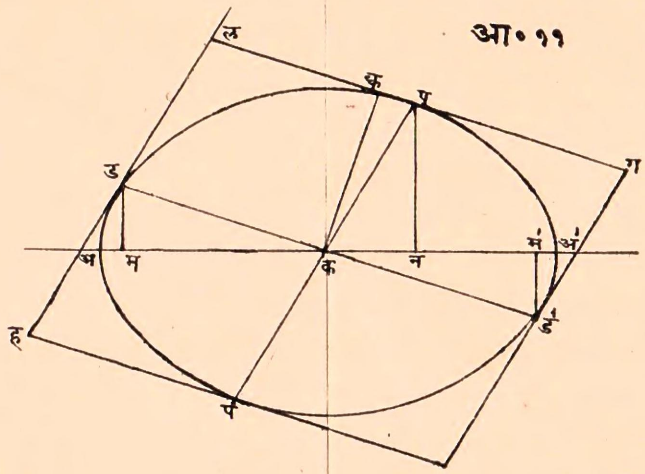
आ० १०



आ० ९



आ० ११



आणखी पन : डम : : कन : टम . . . . . (२)

म्हणून (१) आणि (२) ह्यांचा गुणाकार करून

$पन^2 : डम^2 : : कन \cdot कट : टम \cdot कट$ . . . . (३)

परंतु (सि० ५ म) $डम^2 = \frac{बक^2}{अक^2} \cdot टम \cdot मक$

आणखी (सि० ५ कु २ म०) $कन \cdot कट = अक^2$

ह्या किमती (३) ह्यांत ठेविल्यानें

$$पन^2 : \frac{बक^2}{अक^2} \cdot टम \cdot मक : : अक^2 : टम \cdot कट$$

म्हणजे $पन^2 : बक^2 \cdot कम : : १ : कट$

$$\therefore पन^2 = बक^2 \cdot \frac{कम}{कट}$$

$$= बक^2 \cdot \frac{कम^2}{कट \cdot कम}$$

परंतु, $कट \cdot कम = अक^2$

$$\therefore पन^2 = \frac{बक^2}{अक^2} \cdot कम^2$$

$$\therefore पन = \frac{बक}{अक} \cdot कम \quad \ldots\ldots (४)$$

(२) ह्यापासून

पन : कन : : डम : मट

$$\therefore कन = \frac{पन \cdot मट}{डम} = \frac{पन \cdot मट \cdot डम}{डम^2}$$

$$= \frac{पन \cdot मट \cdot डम}{मट \cdot मक} \cdot \frac{अक^2}{बक^2}$$

$$= \frac{पन \cdot डम}{मक} \cdot \frac{अक^2}{बक^2}$$

$$=\frac{बक}{अक}.\frac{कम\cdot डम}{मक}.\frac{अक^2}{बक^2}$$

$$=\frac{अक}{बक}\cdot डम \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (५)$$

म्हणून जर प्रतिव्यासाच्या **प** ह्या कोणत्या एका शेवटाचे **कन** आणि **पन** हे अवच्छेदकलक्षक दिले तर त्याच्या **ड** ह्या दुसऱ्या शेवटाचे **कम** आणि **डम** हे अवच्छेदकलक्षक (४) आणि (५) ह्या समीकरणांपासून काढतां येतील.

सिद्धांत. १०

व्यास आणि प्रतिव्यास ह्यांच्या अर्धांच्या वर्गांची बेरीज बृहदक्ष आणि लघ्वक्ष ह्यांच्या अर्धांचे वर्गांच्या बेरजे बरोबर आहे

$$कप^2=कन^2+नप^2$$

$$कड^2=कम^2+मड^2=\frac{अक^2}{बक^2}\cdot नप^2+\frac{बक^2}{अक^2}\cdot कन$$

$$\therefore कप^2+कड^2=नप^2(१+\frac{अक^2}{बक^2})$$

$$+कन^2(१+\frac{बक^2}{अक^2})$$

$$=(बक^2+अक^2)(\frac{नप^2}{बक^2}+\frac{कन^2}{अक^2})$$

परंतु, $\frac{नप^2}{बक^2}+\frac{कन^2}{अक^2}=१$. (सि॰ २ समी॰ १ म.)

$$\therefore कप^2+कड^2=अक^2+बक^2$$

कु० १·(आ० ८)·(सि० ९) $\text{कप}^2+\text{कड}^2=\text{अक}^2+\text{बक}^2$

$$\therefore \text{कड}^2=\text{अक}^2+\text{बक}^2-\text{कप}^2 \cdots (१)$$

परंतु $\text{कप}^2=\text{कन}^2+\text{नप}^2$

$$=\text{कन}^2+\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot(\text{अक}^2-\text{कन}^2)$$

$$=\text{कन}^2+\text{बक}^2-\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}^2$$

म्हणून (१) ह्या समीकरणाचें रूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें

$$\text{कड}^2=\text{अक}^2+\text{बक}^2-\text{कन}^2-\text{बक}^2+\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}^2$$

$$=\text{अक}^2-\text{कन}^2\left(\frac{\text{अक}^2-\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\right)$$

परंतु $\dfrac{\text{अक}^2-\text{बक}^2}{\text{अक}^2}=\text{के}^2$

$$\therefore \text{कड}^2=\text{अक}^2-\text{के}^2\cdot\text{कन}^2$$

परंतु $\left.\begin{aligned}\text{सप}&=\text{अक}+\text{के}\cdot\text{कन}\\ \text{हप}&=\text{अक}-\text{के}\cdot\text{कन}\end{aligned}\right\}$

$$\therefore \text{सप}\cdot\text{हप}=\text{कड}^2$$

सिद्धांत ११.

(आ० ९) इड ही कोणती ही एक ज्या घेऊन तिच्या दोन टोकांवर दोन स्पर्शरेषा काढल्या, आणि त्यांचा ट हा छेदन बिंदु आणि क हा बिंदु हे टक रेषेनें सांधले ते असे कीं, टक रेघ दीर्घ वर्तुळास व

ठिकाणीं आणि इड व्यास म ठिकाणीं छेदिते; तर.
कव^2=कम·कट.

व बिंदुस्थळीं **सल** स्पर्शरेषा काढ·ती **इड** रेषेस समांतर होईल· **सक** आणि **वइ** सांध, त्या दोन रेषा ह स्थळीं छेदितील· **वन** रेघ **सक** रेषेशीं समांतर काढ.

आतां **सह** रेघ **नव** रेषेशीं समांतर आहे
आणि **इह**=$\frac{1}{2}$ **इव** सि०
∴ **इस**=**नस**

पुन्हा **टनव** आणि **टसक** ह्या सरूप त्रिकोणांपासून
कव : कट : : सन : सट
: : सइ : सट
: : वम : वट
कव : वम : : कट : वट
∴ **कव—वम : कव : : कट : वट : कट**
∴ **कम : कव : : कव : कट**
∴ **कव^2=कम · कट** हें सिद्ध.

सिद्धांत १२.

(आ० १०) कोणत्याही एका दीर्घवर्तुळांत **प पं** आणि **डडं** हे व्यास प्रतिव्यास घेतले, आणि दीर्घवर्तुळाच्या कौंसांत **क** हा कोणताही एक बिंदु घेऊन त्यापासून **कर** आणि **कन** या दोन रेघा अनुक्रमें **पपं** आणि **डडं** ह्यांशीं समांतर काढल्या तर

$$\text{कन}^2=\frac{\text{कड}^2}{\text{कप}^2}\times\text{नप}\cdot\text{नपं}$$

क्ष बिंदुस्थळीं टक्षह स्पर्शरेषा काढली तर ती व्यास व प्रतिव्यास ह्यांस वाढविल्यावर त्यांस अनुक्रमें **ट** आणि **ह** ह्या स्थळीं मिळेल. **डड'** व्यासाच्या दोहों शेवटांशीं स्पर्शरेषा काढ, तर त्या स्पर्शरेषांस क्ष स्थळची स्पर्शरेषा **ल** आणि **क्ष** ह्या बिंदूंत छेदील.

आतां (सि॰ ११) प्रमाणें

$$\text{कन} : \text{कप} :: \text{कप} : \text{कह}$$
$$\therefore \text{कन}^2 : \text{कप}^2 :: \text{कन} : \text{कह}$$
$$\therefore \text{कप}^2 - \text{कन}^2 : \text{कप}^2 :: \text{कह} - \text{कन} : \text{कह}$$
$$:: \text{नह} : \text{कह}$$
$$:: \text{क्षन} : \text{कट}$$

∴ तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांस क्षन ह्यानें गुणून

$$\text{कप}^2 - \text{कन}^2 : \text{कप}^2 :: \text{क्षन}^2 : \text{क्षन} \times \text{कट}$$

परंतु $\text{क्षन} \times \text{कट} = \text{रक} \cdot \text{कट} = \text{कड}^2$

$$\therefore \text{कप}^2 - \text{कन}^2 : \text{कप}^2 :: \text{क्षन}^2 : \text{कड}^2$$

आणि $\text{कप}^2 - \text{कन}^2 = \text{नप}' \times \text{नप}$

$$\therefore \text{क्षन}^2 = \frac{\text{कड}^2}{\text{कप}^2} \cdot \text{नप} \cdot \text{नप}'$$

ह्या समीकरणाचें रूप, लघ्वक्ष व बृहदक्ष ह्यांच्या संबंधानें जें दीर्घ वर्तुलाचें समीकरण काढलें आहे त्या समीकरणाच्या रूपाप्रमाणें आहे. ह्या समीकरणास, व्यास प्रतिव्यासाच्या संबंधानें आणलेलें समीकरण असें म्हणतात.

सिद्धांत १२.

(आ॰ ११) व्यास व प्रतिव्यास ह्यांच्या शेवटीं दीर्घ वर्तुळास स्पर्शरेषा काढून जो समांतरभुजचौकोन

पडतो त्याचें क्षेत्रफळ अविकारी असतें; आणि तें लघ्व-क्ष व बृहदक्ष ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें, म्हणजे त्या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ=४**अक·कब.**

डड' आणि **पप'** ह्या व्यास प्रतिव्यासांच्या शेवटीं दीर्घ वर्तुळास स्पर्शरेषा काढून **लगखह** हा समांतर भुजचौकोन केला; तर हें उघड आहे कीं व्यास व प्रतिव्यास हे **लगखह** ह्या समांतरभुजचौकोनास विभागून त्याचे चार सारखे समांतरभुजचौकोन क-रतील.

∴ **लहखग** ह्या□चें क्षेत्रफळ=४**पकडंग** ह्या□चें क्षेत्रफळ आहे. आतां **पकडंग** ह्या□चें क्षेत्र-फळ=२**कडंट** ह्या△चें क्षेत्रफळ.

$$=\text{कट}\times\text{मंड}$$

$$=\text{कट}\times\text{डम}$$

$$=\text{कट}\times\frac{\text{बक}}{\text{अक}}\cdot\text{कन}$$

आतां **कट·कन=अक**^{2} आहे म्हणून

पकडंग ह्या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ

$$=\text{अक}^{2}\times\frac{\text{बक}}{\text{अक}}$$

$$=\text{अक}\times\text{बक}$$

∴सर्व समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ

$$=४\text{अक}\times\text{बक}\cdot$$

हें सिद्ध.

कु० १·क बिंदूपासून प बिंदूस्थळचे स्पर्शरेषेवर कक्क रेघ लंब काढ म्हणजे

पडं या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ=**कक्क×कड**

$=$ अक $\times$ बक (सि० १३ प्रमाणें) होईल.

$\therefore$ अक $\times$ बक $=$ कक्क^2 $\times$ कड^2

$\therefore$ कक्क^2 $= \dfrac{\text{अक}^2 \times \text{बक}^2}{\text{कड}^2}$

$= \dfrac{\text{अक}^2 \times \text{बक}^2}{\text{अक}^2 \times \text{बक}^2 - \text{कप}^2}$ . . . . (१)

(कारण कड^2 $+$ कप^2 $=$ अक^2 $+$ बक^2 आहे)

(१) हें समीकरण, दीर्घ वर्तुळाच्यामध्य बिंदूपासून स्पर्शरेषेवर काढलेला लंब, व लघ्वक्ष, बृहदक्ष, आणि अर्ध प्रतिव्यास, ह्यांमधला संबंध दाखवितें.

दीर्घवर्तुळाविषयीं मागें ज्या सारण्या सिद्ध केल्या आहेत त्यांपैकीं कांहीं सारण्या येथें एकत्र करून लिहितों; ह्या सारण्या विद्यार्थ्यांनीं पाठ केल्या असतां त्यांस दीर्घवर्तुळाविषयीं उदाहरणें सोडवितांना फार उपयोगी पडतील.

$$\left.\begin{aligned} \text{नप}^2 &= \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot(\text{अक}^2 - \text{कन}^2) \\ &= \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot \text{अन}\cdot\text{नअं} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (१)$$

सप $+$ हप $=$ अअं . . . . (२)

अक्ष $=$ अक $\cdot \dfrac{१ - \text{के}}{\text{के}}$ . . . . (३)

अस $=$ अक $\cdot$ (१ $-$ के) . . . . . (४)

सक $=$ अक $\cdot$ के . . . . (५)

क्षक $= \dfrac{\text{अक}}{\text{के}}$ . . . . (६)

$$\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}} = (१-\text{के}^{२}) \cdots\cdots\cdots \text{(७)}$$

$$\text{बक}^{२} = \text{अस} \times \text{सअं} \cdots\cdots\cdots \text{(८)}$$

$$\text{सप} - \text{हप} = २\text{के}\cdot\text{कन} \cdots\cdots\cdots \text{(९)}$$

$$\text{पन}^{२} = \frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\, \text{कन}\cdot\text{नट} \cdots\cdots\cdots \text{(१०)}$$

$$\text{कन}\cdot\text{कट} = \text{अक}^{२} \cdots\cdots\cdots \text{(११)}$$

$$\text{नट} = \frac{\text{अन}\cdot\text{अंन}}{\text{कन}} \cdots\cdots\cdots \text{(१२)}$$

$$\text{कग} = \text{के}^{२}\cdot\text{कन} \cdots\cdots\cdots \text{(१३)}$$

$$\text{गन} = \frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\cdot\text{कन} \cdots\cdots\cdots \text{(१४)}$$

$$\angle\text{सपग} = \angle\text{हपग} \cdots\cdots\cdots \text{(१५)}$$

दीर्घवर्तुळास कोणत्याही एका बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा केली तर तीस, तिजवरच दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रापासून काढलेले लंब ज्या बिंदूंत छेदितील ते बिंदू, बृहदक्षास आंस मानून काढलेल्या वर्तुळाच्या परिघावर पडतील. . . . . (१६)

$$\text{सक} \times \text{हक} = \text{बक}^{२} \cdots\cdots\cdots \text{(१७)}$$

$$\text{सक}^{२} = \text{बक}^{२}\cdot\frac{\text{सप}}{२\,\text{अक} - \text{सप}} \cdots\cdots \text{(१८)}$$

दोन स्पर्शरेषांचीं स्पर्शस्थळें सांधून जी ज्या होते तीस, जी रेषा त्या दोन स्पर्शरेषांचा छेदनबिंदु आणि दीर्घवर्तुळाचा मध्यबिंदु ह्या दोहोंस सांधते ती समान दुभागते. . . . . (१९)

दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रांतून जाणाऱ्या ज्येच्या शेवटास स्पर्शरेषा काढल्या, तर त्या परस्परांस मधानरेषेवर छेदितात. . . . . (२०)

दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रापासून केंद्रांतरावर लंब काढला तर तो स्पर्शरेषेस प्रधानरेषेवर छेदितो. . . (२१)

$$\left.\begin{aligned} कम &= \frac{अक}{बक}\cdot पन \\ डम &= \frac{बक}{अक}\cdot कन \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (२२)$$

अर्धव्यास व अर्धप्रतिव्यास ह्यांच्या वर्गांची बेरीज अर्धबृहदक्ष व अर्धलघ्वक्ष ह्यांच्या वर्गांच्या बेरिजेबरोबर आहे. . . . . (२३)

व्यास व प्रतिव्यास ह्यांच्या शेवटीं स्पर्शरेषा काढून जो समांतरभुजचौकोन पडतो त्याचें क्षेत्रफळ=

$$४अक\cdot बक \cdots\cdots\cdots (२४)$$

$$सप\times हप=कड^{२} \cdots\cdots\cdots (२५)$$

$$कव^{२}=कम\times मट \cdots\cdots (२६)$$

हैपरबला.

सिद्धांत १.

लक्षकांचे वर्ग त्यांच्या अवच्छेदकांच्या गुणाकारांच्या प्रमाणांत असतात.

(आ० १) द्विवर्तुळशंकूच्या आंसांतून जाणारी अशी **मवर** ही एक आडवी पातळी आहे, म्हणजे, कागदाची पातळी आहे असें मान. आंसाशीं लंब अशीं **कपग** आणि **मपंर** हीं दोन छिन्नें कर, तर तीं वर्तुळाकार होतील; आणि **कग** आणि **मर** हे अनुक्रमें त्यांचे व्यास होतील. वर्तुळशंकूच्या आंसाशीं को-

न करणारी व कागदाच्या पातळीशीं लंब असणारी अशा एका पातळीनें **पअ्य** आणि **पंअंय्** हीं हैपरबलाकार छिन्नें कर, तर **अअं** ही रेघ तिर्यक आंस होईल. आतां **पअय्** आणि **कपग** ह्या दोन्ही पातळ्या कागदाच्या पातळीशीं लंब आहेत; म्हणून त्यांचें साधारण छिन्न **पनय्** कागदाच्या पातळीशीं लंब आहे, आणि जी रेघ त्याच पातळीमध्यें असूनही स्पर्श करिते तीशींही लंब आहे; म्हणून **पनय्** रेघ **कग** रेघेशीं लंब आहे. ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं-**पंनंय्ं** रेघ **मर** रेघेशीं लंब आहे. आतां **अंनंर** आणि **अंकन** हे दोन त्रिकोणसरूप आहेत, आणि **अनंम** आणि **नअग** हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत म्हणून

अंनं : अंन : : नंर : कन

अनं : अन : : मनं : नग

∴ गुणाकार करून

अनं×अंनं : अंन×अन : : नंर×मनं : कन×नग

परंतु **मनं×नंर=पंनं^{2}**

आणि **कन×नग=पन^2**

∴ ह्या किमती वरल्या प्रमाणांत ठेवल्यानें

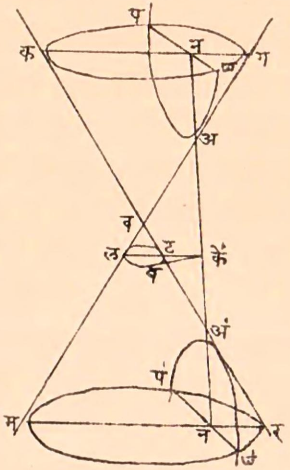
अनं×अंनं : अंन×अन : : पंनं^{2} : पन^2

हें सिद्ध.

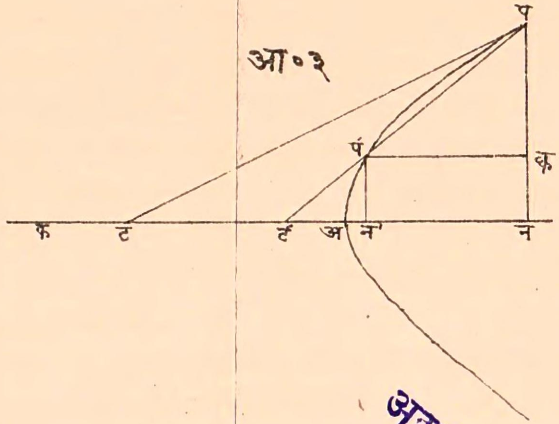
सिद्धांत २.

तिर्यक आंसाच्या वर्गास जसा त्याच्या प्रतिव्यासाचा वर्ग, तसा अवच्छेदकांच्या गुणाकारास त्यांच्या क्षलकाचा वर्ग होतो.

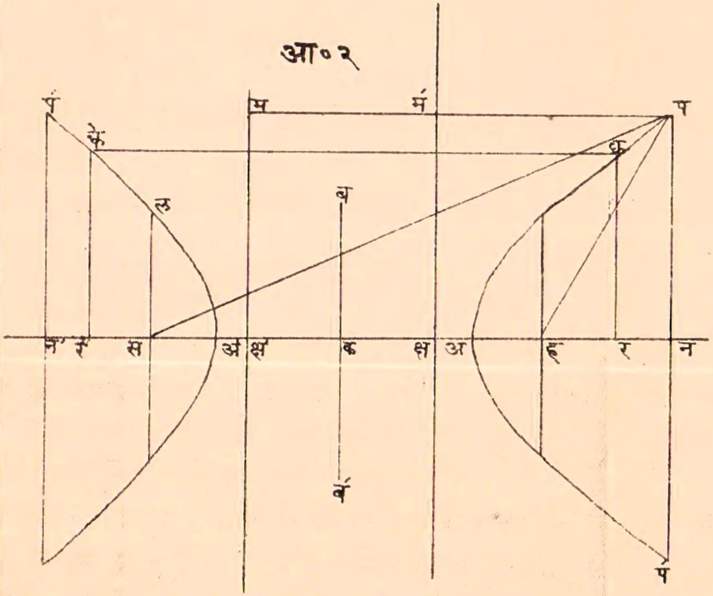
हैपरबला.



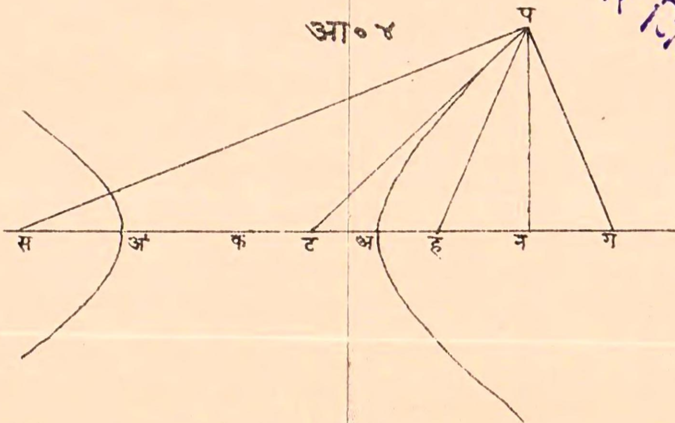
आ०१



आ०३



आ०२



आ०४

अअं रेघेस क बिंदूंत समान दुभाग, आणि असें एक वर्तुळाकार छिन्नकर कीं तें आडव्या पातळीस टलरेघेंत छेदील; आणि कब स्पर्श रेषा काढ; तर टअंक आणि अंनंर ह्या दोन सरूप त्रिकोणांत

$$\text{अंक} : \text{टक} :: \text{अंनं} : \text{नंर}$$

आणि अलक आणि अमनं ह्या दोन त्रिकोणांत

$$\text{अक} : \text{कल} :: \text{अनं} : \text{मनं}$$

∴ गुणाकार करून

$$\text{अंक}\cdot\text{अक} : \text{टक}\cdot\text{कल} :: \text{अंनं}\cdot\text{अनं} : \text{नंरमनं}$$

परंतु $\text{अंक}=\text{अक}$; आणि $\text{टक}\times\text{कल}=\text{बक}^2$; आणि $\text{नंर}\cdot\text{मनं}=\text{पंनं}^2$; म्हणून ह्या किंमती वरील समीकरणांत ठेवल्यानें

$$\text{पंनं}^2=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{अनं}\cdot\text{अंनं}$$ हें सिद्ध.

कु० १· हें समीकरण दुसऱ्या रीतीनें लिहितां येतें तें असें:—

$$\therefore \text{अनं}\times\text{अंनं}=\text{कनं}^2-\text{अक}^2$$

$$\therefore \text{पंनं}^2=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}(\text{कनं}^2-\text{अक}^2)\cdots(१)$$

आतां हें समीकरण आणि दीर्घ वर्तुळाचें समीकरण हीं दोन्हीं अगदीं सारखीं आहेत. ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं दीर्घ वर्तुळाविषयीं जे सिद्धांत सिद्ध केले आहेत ते हैपरबलेसही लागू पडतील.

कु०२· आ० १ ह्यामध्यें असें दिसतें कीं नप= नप्प, म्हणून अक्ष (आ० २) रेघेच्या संबंधानें पअप्प हा कौंस सजातीय आहे. आणखी पंनं=नंप्पं, म्हणून

$\text{अ}'\text{क्ष}'$ रेघेच्या संबंधानें **$\text{प}'\text{अ}'\text{घ्}'$** हा कौंस सजातीय आहे. म्हणजे **$\text{अअ}'$** ह्या बृहदक्षाच्या दोहों बाजूस जे हैपरबलेच्या कौंसाचे भाग आहेत ते सजातीय असतात.

आणखी ज्या बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक **कर** आणि **क्वर** आहेत असा दुसरा एक बिंदु घेतला, तर कु०१चें समीकरण (१) प्रमाणें हें पुढील समीकरण उत्पन्न होईल.

$$\text{क्वर}^{२}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}(\text{कर}^{२}-\text{कअ}^{२})$$

जर $\text{कर}=\text{कर}'$ मानला तर

$$\text{क्वर}^{२}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}(\text{कर}'^{२}-\text{कअ}^{२})$$

$$\text{परंतु}\ \text{क्व}'\text{र}'^{२}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}(\text{कर}'^{२}-\text{कअ}^{२})$$

$$\therefore \text{क्वर}^{२}=\text{क्व}'\text{र}'^{२}$$

$$\text{म्हणजे}\ \text{क्वर}=\text{क्व}'\text{र}'$$

ह्याचप्रमाणें जर $\text{क्वर}=\text{क्व}'\text{र}'$ मानला आणि वरचे रीतीच्या उलट रीती केली तर असें सिद्ध होईल कीं

$$\text{कर}=\text{कर}'$$

म्हणून ह्यापासून असें अनुमान निघतें कीं **क्वक्व** रेघ **$\text{अअ}'$** रेघेशीं समांतर काढली तर तीस **बक** रेघ समान दुभागते.

आणखी ज्या अर्थीं **क** मध्यापासून सारख्या अंतरावर बिंदु हैपरबलेच्या दोन कौंसांत घेतले असतां त्यांचे अवच्छेदकलक्षक बरोबर होतात, त्या अर्थीं असें सिद्ध होतें कीं, **बक** रेघेच्या दोहीं कडील कौंस सजातीय आहेत. **बक** रेघेस लघ्वक्ष अथवा **$\text{अअ}'$** याचा प्रतिव्यास असें म्हणतात.

आणखी (आ० २) समीकरण (१) ह्या मध्यें जर **कन=अक** घेतला, तर $\text{पन}^2=0$; म्हणजे है-परबलेच्या **अ** बिंदूस लक्षक नाहीं; आणि हें ह्यावरून ही समजतें कीं, कौंस आंसास **अ** बिंदूस्थळीं छेदितो. परंतु जर **कन** ही रेघ **अक** रेघेपेक्षां लहान आहे असें मानलें, तर (१) ह्या समीकरणाचें रूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें

$$\text{पन}^2=-\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot(\text{अक}^2-\text{कन}^2)$$

$$\therefore \text{पन}=\frac{\text{बक}}{\text{अक}}(\text{अक}^2-\text{कन}^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}$$

आतां आदिकरण भूमितीमध्यें ह्यास कल्पित पद अशीं संज्ञा दिली आहे. ह्या कल्पित पदावरून असें समजतें कीं, **अक**पेक्षां कमी अशी **कन**ची किंमत असली तर **पन** ला मुळींच कांहीं किंमत नसतें, म्हणजे **क** आणि **अ** ह्या दोन बिंदूंमध्यें हैपरबलेचा कौंस येत नाहीं. ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होतें कीं **क** आणि **अं** ह्या दोन बिंदुंमध्येंही हैपरबलेचा कौंस येत नाहीं-म्हणून हैपरबलेची आकृति—(आ० २) एथें काढ. ल्याप्रमाणें आहे. **प अप्र** आणि **पं अंप्रं** हे कौंस परस्परांच्या संबंधानें व बृहदक्षाच्या संबंधानें सजातीय आहेत ते अनंतपर्यंत वाढत जातात, आणि त्यांचा कोणताही भाग **अ** आणि **अं** ह्या दोन बिंदूंमध्यें येत नाहीं.

सिद्धांत. ३

व्याख्या ५. ज्या बिंदूचें एका विवक्षित बिंदूपा-

सून अंतर, त्याच बिंदूचें एका विवक्षित रेघेपासून जें अंतर त्यापेक्षां कांहीं एका अविकारी पदानें अधिक आहे, त्या बिंदूचें स्थळ हैपरबलेच्या कौंसांत आहे

(आ० २)

∴ सप = के × पमं

आणि हप = के × पम

∴ सप - हप = के(पमं — पम)

= के × ममं

= के × क्षक्षं हें अविकारी पद आहे म्हणून केंद्रांतरांमधलें अंतर अविकारी असतें. ह्याजकरितां जर, दीर्घवर्तुळ काढावयाच्या रीतीप्रमाणें, एक दोरी घेऊन तिचीं दोन्हीं शेवटें स आणि ह ह्या दोन बिंदूस्थळीं टांचण्यामारुन बांध, नंतर ती दोरी पेन्सिलीनें अशी ताण कीं तिच्या बिंदूंमधलें अंतर नेहमीं एकसारखें राहील; असें केलें असतां त्या पेन्सिलीनें हैपरबलेची आकृति निघेल.

कु० १ केंद्रांतरांमधलें अंतर बृहदक्षाबरोबर असतें.

कारण सअं = के × अंक्षं

सअ = के × अक्षं

∴ सअ - सअं = के (अक्षं — अंक्षं)

आणि ∵ अअं = के (अक्षं — अक्ष);

∵ (अक्ष = अंक्षं)

∴ अअं = के × क्षक्षं

परंतु सप — हप = के × क्षक्षं

$\therefore \text{सप} - \text{हप} = \text{अअं} = \text{२ अक} \cdots\cdots (१)$

हें सिद्ध.

कु० २. $\because \text{के} \times \text{क्षक्षं} = \text{२अक}$

$\therefore \text{के} (\text{२अक} - \text{२अक्ष}) = \text{२ अक}$

$\therefore \text{के} (\text{अक} - \text{अक्ष}) = \text{अक}$

आणि $\therefore \text{अक्ष} = \frac{\text{के} - १}{\text{के}} \text{अक} \cdots\cdots (२)$

कु० ३. $\text{अंस} = \text{के} \times \text{अंक्षं}$

$= (\text{के} - १.) \text{अक} \cdots\cdots (३)$

आणखी $\text{सक} = \text{अंस} + \text{अंक}$

$= \text{के}\cdot\text{अक} - \text{अक} + \text{अंक}$

$= \text{के}\cdot\text{अक} \cdots\cdots (४)$

कु०४. $\text{सक्षं} = \text{सअं} + \text{अंक्षं}$

$= (\text{के} - १) \text{अक} + \frac{\text{के} - १}{\text{के}} \text{अक}$

$= \frac{\text{के}^२ - १}{\text{के}} \text{अक} \cdots\cdots (५)$

आणखी $\text{क्षंक} = \text{सक} - \text{सक्षं}$

$= \text{के}\cdot\text{अक} - \frac{\text{के}^२ - १}{\text{के}} \text{अक}$

$= \text{अक} \left\{ \frac{\text{के}^२ - \text{के}^२ + १}{\text{के}} \right\}$

$= \frac{\text{अक}}{\text{के}} \cdots\cdots (६)$

कु० ५. $\because \text{सअं} = (\text{के} - १) \text{अक}$

आणि $\text{सअ} = (\text{के} + १) \text{अक}$

$\therefore \text{सअ} \times \text{सअं} = (\text{के}^२ - १) \text{अक}^२ \cdots (७)$

कु० ६· आणखी $\text{सल} = \text{के}\cdot\text{लव}$

$$= \text{के}\cdot\text{सक्ष}'$$

$$= \text{के} \times \frac{\text{के}^{2} - १}{\text{के}}\,\text{अक}$$

$$= (\text{के}^{2} - १)\,\text{अक}$$

आणखी समीकरण १ ह्यापासून

$$\text{सल}^{2} = \frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\,(\text{सक}^{2} - \text{अक}^{2})$$

$$= \frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\,(\text{अक}^{2}\cdot\text{के}^{2} - \text{अक}^{2});$$

$$\because \text{सक} = \text{के}\cdot\text{अक} = \text{बक}^{2}\cdot(\text{के}^{2} - १)$$

आतां सल च्या ह्या दोन किंमतींची तुलनाकरून

$$\text{बक}^{2}\cdot(\text{के}^{2} - १) = (\text{के}^{2} - १).\,\text{अक}^{2}$$

$$\therefore \text{बक}^{2} = (\text{के}^{2} - १)\,\text{अक}^{2} \quad \cdots (८)$$

आणि म्हणून कु० ५ पासून

$$\text{बक}^{2} = \text{सअ} \times \text{सअ}' \quad \cdots\cdots (९)$$

कु० ७· आणखी $\text{बअ}'^{2} = \text{बक}^{2} + \text{अ}'\text{क}^{2}$

$$= \text{अ}'\text{क}^{2}(\text{के}^{2} - १) + \text{अ}'\text{क}^{2}$$

$$= \text{के}^{2} \times \text{अ}'\text{क}^{2}$$

$$\therefore \text{बअ}' = \text{के} \times \text{अ}'\text{क}$$

$$= \text{सक} \quad \cdots\cdots\cdots (१०)$$

आणि म्हणून $\text{सक}^{2} = \text{बअ}'^{2}$

$$= \text{अ}'\text{क}^{2} + \text{बक}^{2} \quad \cdots\cdots\cdots (११$$

कु०८· $\text{सल} = \frac{१}{२}$ प्रधान केंद्रगलक्षक

$$= (\text{के}^{2} - १)\cdot\text{अक} \quad \cdots\cdots \text{कु० ६})$$

$$= \frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}} \times \text{अक}\;\frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}}$$

$$\therefore \text{प्रधान केंद्रगलक्षक} = \frac{\text{२बक}^{२}}{\text{अक}} \quad . . . (१२)$$

कु० ९ ∵ सप = के × पमं

आणि हप = के × पम

∴ सप + हप = के (मपं + पम)

= के (क्षंन + क्षन);

= के (क्षंक + कन + कन − क्षंक)

(∵ क्षंक = क्षक)

∴ सप + हप = २के × कन

सिद्धांत ४

हैपरबलेस एका बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा केली तर त्या बिंदुसंबंधी लक्षकाच्या वर्गास : लघ्वक्ष्याचा वर्ग :: अवच्छेदक आणि प्रतिस्पर्शरेषा ह्यांचा गुणाकारास : बृहदक्षाचा वर्ग.

(आ० ३) पपंट ही एक छेदन रेघ आहे, ती अशी कीं, ती हैपरबलेच्या कौंसास प आणि पं ह्या दोन बिंदुस्थळीं छेदिते आणि बृहदक्षास ट स्थळीं छेदिते असें मान, आणि कन आणि नप हे प बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक आहेत आणि कनं आणि नंपं हे पं बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक आहेत असें मान. पंक्र ही रेघ आंसाशीं समांतर अशी काढ कीं ती पन सक्र स्थळीं छेदील. आतां

$$\text{पन}^{२} = \frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}} (\text{कन}^{२} - \text{अक}^{२})$$

$$\text{पंनं}^{२} = \frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}} (\text{कनं}^{२} - \text{अक}^{२})$$

वरल्या समीकरणांत खालचें समीकरण वजा दिल्यानें

$$\text{पन}^2-\text{पंनं}^2=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot(\text{कन}^2-\text{कनं}^2)$$

परंतु $\text{पन}^2-\text{पंनं}^2=(\text{पन}+\text{पंनं})(\text{पन}-\text{पंनं})$

आणि $\text{कन}^2-\text{कनं}^2=(\text{कन}+\text{कनं})(\text{कन}-\text{कनं})$

∴ ह्या किमती वरील समीकरणांत ठेवून नंतर दोहोंपेक्ष्यांस (पन+पंनं) (कन—कनं)ह्यानें भागून

$$\frac{\text{पन}-\text{पंनं}}{\text{कन}-\text{कनं}}=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\frac{\text{कन}+\text{कनं}}{\text{पन}+\text{पंनं}}$$

परंतु आकृतीकडें पाहिलें असतां असें ध्यानांत येतें कीं

$$\text{पन}-\text{पंनं}=\text{पक्क}$$

$$\text{आणि}\ \text{कन}-\text{कनं}=\text{पंक्क}$$

$$\therefore\frac{\text{पक्क}}{\text{पंक्क}}=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\frac{\text{कन}+\text{कनं}}{\text{पन}+\text{पंनं}}$$

आणखी पपंक्क आणि पटंन ह्या दोन सरूप त्रिकोणांत

$$\frac{\text{पक्क}}{\text{पंक्क}}=\frac{\text{पन}}{\text{टंन}}$$

म्हणून वरील समीकरणाचें रूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें.

$$\frac{\text{पन}}{\text{टंन}}=\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\frac{\text{कन}+\text{कनं}}{\text{पन}+\text{पंनं}}$$

आतां कोणतीही छेदन रेघ जरी घेतली तरी हें समीकरण खरें आहे, म्हणून पं बिंदु प बिंदूकडे सारला तरी हें समीकरण खरें आहे, म्हणून पं बिंदू प बिंदूंत मिळाला तरीही खरें आहे परंतु जसजसा पं बिंदूकडे

जाईल तसतसा टं बिंदु ट बिंदूकडे जाईल, आणि अ-
सें होत होत शेवटीं पं बिंदु प बिंदूस मिळाला म्हणजे
टं बिंदु ट बिंदूस मिळेल; आणि असें झालें म्हणजे

$$\frac{\text{पन}}{\text{टन}'}=\frac{\text{पन}}{\text{नट}} \quad \text{होईल}$$

आणि $\text{कन}'=\text{कन}$ होईल; व $\text{प}'\text{न}'=\text{पन}$ होईल-

$$\therefore \frac{\text{पन}}{\text{टन}}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\cdot\frac{\text{२कन}}{\text{२पन}}$$

$$=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\cdot\frac{\text{कन}}{\text{पन}}$$

$$\therefore \text{पन}^{२}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\text{कन}\times\text{टन} \quad \cdots\cdots (१)$$

कु० १ नट रेघेस प्रतिस्पर्शरेषा असें म्हणावें.

$$\text{प्रतिस्पर्शरेषा}=\frac{\text{अन}\cdot\text{नअ}'}{\text{कन}}$$

$$\text{कारण } \text{पन}^{२}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}(\text{कन}^{२}-\text{अक}^{२}) \quad \cdots (२)$$

$\therefore$ समीकरण (१) आणि समीकरण ....(२)
ह्यांची तुलना करून

$$\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\text{कन}\cdot\text{टन}=\frac{\text{बक}^{२}}{\text{अक}^{२}}\cdot(\text{कन}^{२}-\text{अक}^{२})$$

$$\therefore \text{कन}\cdot\text{टन}=\text{कन}^{२}-\text{अक}^{२}$$

$$=\text{अ}'\text{न}\times\text{अन}$$

$$\therefore \text{टन}=\frac{\text{अ}'\text{न}\times\text{अन}}{\text{कन}} \quad \cdots\cdots (३)$$

हें सिद्ध.

कु०२. $\text{कट}=\text{कन}-\text{नट}$

$$=\text{कन}-\frac{\text{कन}^{2}-\text{अक}^{2}}{\text{कन}}$$

$$=\frac{\text{कन}^{2}-\text{कन}^{2}+\text{अक}^{2}}{\text{कन}}$$

$$\therefore \text{कट}=\frac{\text{अक}^{2}}{\text{कन}} \cdots\cdots\cdots (४)$$

कु०३. **पग** ही नेम रेघ काढ, तर ती बृहदक्षास **ग** स्थळीं छेदील. **गन** रेघेस उपनेम असें म्हणतात.

$$\text{उपनेम}=\frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\cdot\text{कन}$$

कारण **पगन** आणि **पनट** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांत

$$\text{गन} : \text{पन} :: \text{पन} : \text{नट}$$

$$\therefore \text{पन}^{2}=\text{गन}\times\text{नट}$$

$$\text{परंतु } \text{पन}^{2}=\frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\cdot\text{कन}\cdot\text{नट}$$

$$\therefore \frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\text{कन}\times\text{नट}=\text{गन}\times\text{नट}$$

$$\therefore \text{गन}=\frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\text{कन} \cdots\cdots (५)$$

कु०४. $\text{कग}=\text{कन}+\text{नग}$

$$=\text{कन}=\frac{\text{बक}^{2}}{\text{अक}^{2}}\cdot\text{कन}$$

$$=\frac{\text{कन}}{\text{अक}^{2}}\cdot(\text{अक}^{2}+\text{बक}^{2})$$

$$\text{परंतु } \text{अक}^{2}+\text{बक}^{2}=\text{सक}^{2}=\text{के}^{2}\times\text{अक}^{2}$$

∴ ही किंमत वरील समीकरणांत ठेवल्यानें

$$कग=\frac{कन}{अक^२}\times अक^२\times के^२$$

$$\therefore कग=के^२\cdot कन \quad \cdots\cdots (६)$$

कु० ५० (आ० ४) $सट=सक+कट$

$$=के\cdot अक+\frac{अक^२}{कन}$$

$\left[\because कट=\frac{अक^२}{कन}\right.$; समीकरण (४)प्रमाणें]

$$=\frac{अक}{कन}\left\{के\times कन+अक\right\}$$

आणखी $हट=कह-कट$

$$=\frac{अक}{कन}\cdot(के\cdot कन-अक)$$

∴ पहिल्या समीकरणास दुसऱ्या समीकरणानें भागून

$$\frac{सट}{हट}=\frac{\frac{अक}{कन}(के\times कन+अक)}{\frac{अक}{कन}(के\times कन-अक)}$$

$$=\frac{के\times कन+अक}{के\times कन-अक} \quad \cdots\cdots (अ)$$

आणखी $सप+हप=२\,के\cdot कन$; सि० ३ कु० ९ प्रमाणें

आणि $सप-हप=२\,अक$

$$\therefore २\,सप=२\,(के\times कन+अक)$$

$$२\,हप=२\,(के\times कन-अक)$$

∴ पहिल्या समीकरणास दुसऱ्या समीकरणानें भागून

$$\frac{सप}{हप}=\frac{के\cdot कन+अक}{के\cdot कन-अक} \quad \cdots\cdots (आ)$$

आता (अ) आणि (आ) ह्या दोन समीकरणांची तुलना केल्यानें

$$\frac{\text{सट}}{\text{हट}}=\frac{\text{सप}}{\text{हप}}$$

म्हणून **पट** रेघ **सपह** कोनास समान दुभागिते; आणि **गप** रेघ **हपर** ह्या बाहेरील कोनास समान दुभागितें.

सिद्धांत ५.

(आ० ५) जर हैपरबलेच्या प्रधान रेषेंतील कोणत्याही एक **ट** बिंदूंतून दोन रेषा काढल्या अशा कीं, एक **ह** केंद्रांतून जाते आणि दुसरी हैपरबलेच्या कौंसास **इ** आणि **फ** ह्या दोन बिंदुस्थळीं छेदिते, आणि जर **इह** आणि **हफ** सांधले तर-

$$\angle \text{टहइ}=\angle \text{फहर} \text{ होईल.}$$

आतां प्रधान रेषेवर **इल** आणि **फम** हे लंब कर आणि **फर** रेघ **इह** रेघेशीं समांतर काढ. म्हणजे **टइह** आणि **टफर** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांपासून

$$\begin{aligned} \text{फर} : \text{इह} &:: \text{टफ} : \text{टइ} \\ &:: \text{फम} : \text{इल} \\ &:: \text{के}\cdot\text{फह} : \text{के}\cdot\text{इह} \\ &:: \text{फह} : \text{इह} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{फर}=\text{फह}$$

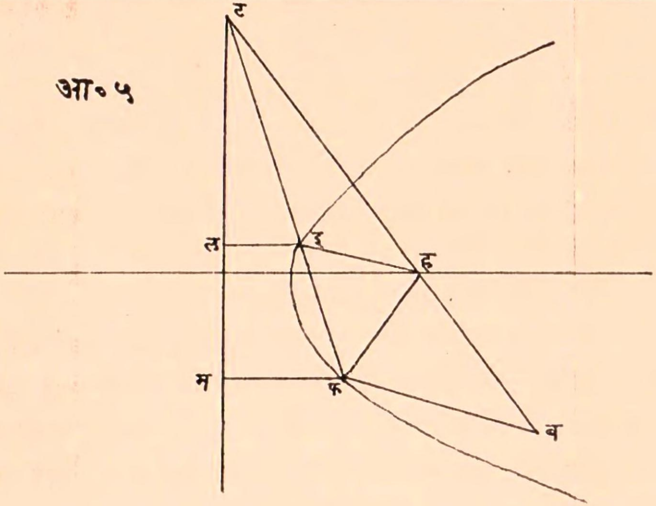
$$\text{आणि} \therefore \angle \text{फहर}=\angle \text{फरह}$$

$$\text{परंतु} \angle \text{फरह}=\angle \text{टहइ}$$

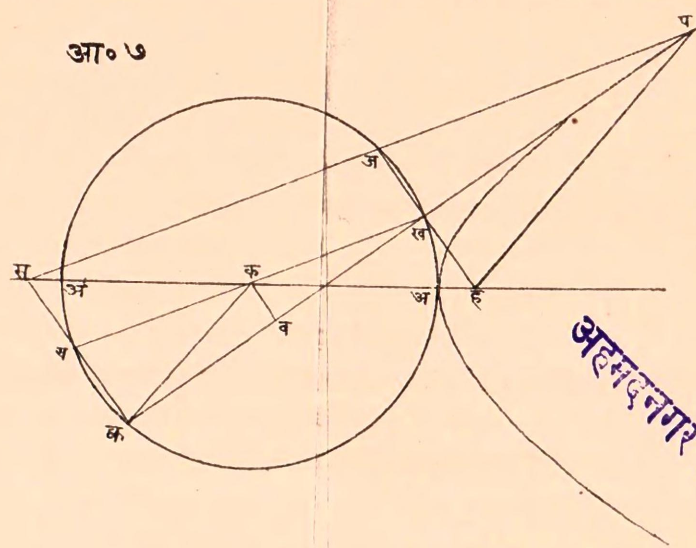
$$\therefore \angle \text{टहइ}=\angle \text{फहर} \qquad \text{हें सिद्ध.}$$

कु०१· आतां अशी कल्पना कर कीं, **टइफ** रेघ **इ** बिंदू सभोंवतीं फिरते, ती अशीं कीं,

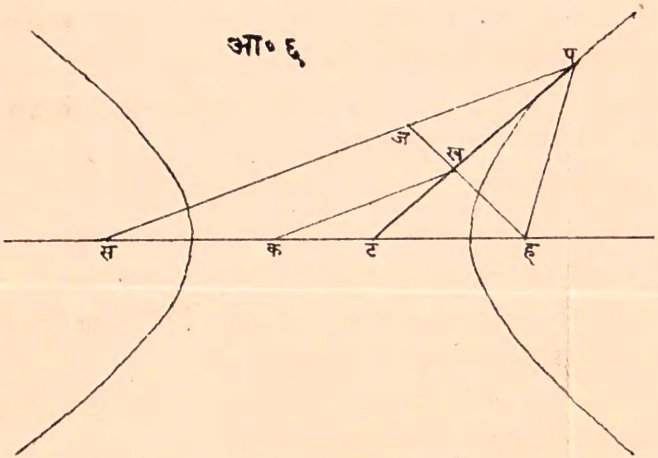
हैपरबला.



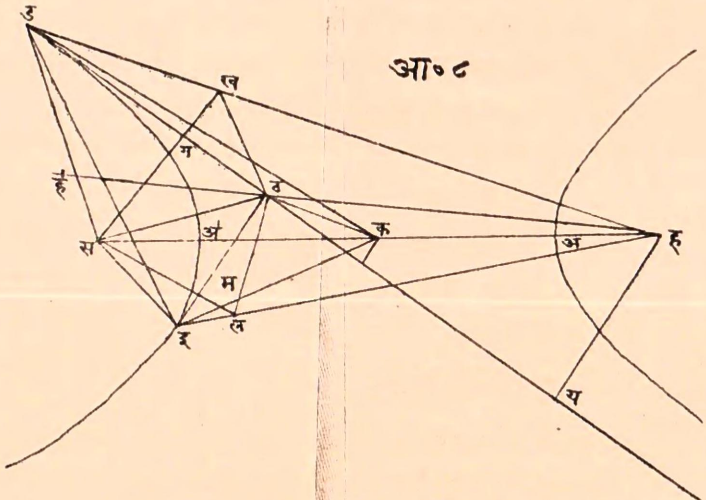
आ० ५



आ० ७



आ० ६



आ० ८

फ बिंदु **इ** बिंदू जवळजवळ येतो, आणि **फर** रेघ नेहेमीं **इह** रेघेशीं समांतर होते. असें झालें तर **टहइ** हा कोन नेहेमीं **फहर** कोनाबरोबर झाला पाहिजे; आणखी **फ** बिंदु जसजसा **इ** बिंदू जवळजवळ येईल तसतसा **इहफ** कोन कमी कमी होत जाईल; आणि ज्यावेळेस **फ** बिंदु **इ** बिंदूशीं मिळेल त्यावेळेस **इहफ** कोन नाहींसा होईल. म्हणून **फ** बिंदु **इ** बिंदूशीं मिळाला म्हणजे **टहइ** आणि **फहर** ह्यांतील प्रत्येक कोन एक काटकोनाबरोबर होईल आणि **टइ** रेघ हैपरबलेस **इ** बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा होईल. ह्या वरून असें सिद्ध होतें कीं,

जर प्रधान रेषेंतील कोणत्याही एका बिंदूपासून हैपरबलेस स्पर्शरेषा केली, तर जी रेघ प्रधान रेषेवर घेतलेला बिंदु आणि केंद्र ह्या दोन बिंदूंस सांधते ती रेघ केंद्रांतरास लंब होते.

पराबला आणि दीर्घवर्तुळ ह्यांविषयींही असाच सिद्धांत मागें सिद्ध केला आहे.

(कु० २) हैपरबलेच्या केंद्रांतून जाणारी अशी एक ज्या घेऊन तिच्या शेवटांशीं स्पर्शरेषा काढल्या, तर त्या परस्परांस प्रधान रेषेवर छेदितात.

हें अनुमान मागल्या कु० वरूनच निघतें. तें असें कीं इ बिंदूसही तीच सिद्धता लागू आहे.

सिद्धांत ६.

हैपरबलेच्या कौंसांत एक बिंदु दिला असतां त्यापासून हैपरबलेस स्पर्शरेषा काढण्याची रीति.

(आ० ६) हैपरबलेच्या कौंसांत **प** हा बिंदु दिला आहे असें मान, **सप** आणि **हप** सांध, २ **अक** =**सज** रेघ घे, **हज** सांध, आणि **हज** रेघेवर **पख** लंब कर. म्हणजे **पख** रेघ हैपरबलेस **प** बिंदु-स्थळीं स्पर्शरेषा होईल. कारण,

सप—**हप**=२ **अक**

आणि **सप**—**पज**=२ **अक**

∴ **पज**=**पह**

म्हणून **पखज** आणि **पखह** ह्या दोन त्रिको-णांत **पज**=**पह**, ∠ **पजख**=∠ **पहख**, आणि ∠**पखज** =∠**पखह** आहे म्हणून ते दोन त्रि-कोण परस्परबरोबर आहेत, आणि ∴ ∠**जपख** =∠**हपख**.

आतां जर हे दोन कोन बरोबर झाले, तर **पख** रेघ स्पर्शरेषा झाली पाहिजे; म्हणून **पख** रेघ **प** बि-दुस्थळीं स्पर्शरेषा आहे.

कु० १. **कख** सांध; तर ज्याअर्थी **कख** रेघ **सह** आणि **हज** ह्या दोन रेघांस समान दुभागिते त्या अर्थी

कख= $\frac{1}{2}$ **सज**=**अक**

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, जर बृहदक्षास व्या-स कल्पून त्याजवर वर्तुळ काढलें, तर **ख** बिंदु त्या वर्तुळाच्या परिघावर पडेल.

आतां बृहदक्षावर वर्तुळ काढ, **खक** रेघ वाढीव अशी कीं ती वर्तुळ परिघास **य** स्थळीं स्पर्शील, आणि **सय** सांध. आतां **सयक** आणि **कखह** ह्या दोन त्रिं-कोणांच्या साम्यतेवरून हें उघड दिसतें कीं, **सय** रेघ **हख** रेघेबरोबर असून तिशीं समांतर आहे.

(आ० ७) **परव** रेघ वाढविली, तर ती **सय** रे-घेस **क्क** बिंदूंत छेदील. आतां ज्या अर्थी **सय** रेघ **हरव** रेघेशीं समांतर आहे, त्या अर्थीं त्या दोन्ही रेघा **क्करव** रेघेशीं लंब आहेत.

∴ ∠**यक्करव**=एक काटकोन

म्हणून, **क्क** हा बिंदु त्याच वर्तुळाच्या परिघावर आहे. ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं,—

जर हैपरबलेस कोणत्याही एका बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा केली तर तीस, तिजवरच हैपरबलेच्या केंद्रांपासून काढलेले लंब ज्या बिंदूंत छेदितील ते बिंदु, बृहदक्षास व्यास कल्पून काढलेल्या वर्तुळाच्या परिघावर पडतात.

कु० २. जर हैपरबलेच्या केंद्रांपासून स्पर्शरेषेवर केलेल्या लंबांची लांबी ध आणि ध' असेल तर

ध·ध'=बक^2.

कारण कीं, **सक्क×सय=अंस×सय=बक^2**

परंतु **सय=हरव=ध'**

∴ ध·ध'=बक^2.

कु० ३. आणखी **सक्कप** आणि **हपरव** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांत

सक्क : सप :: हरव : हप

म्हणजे **सक्क : हरव :: सप : हप**

∴ ह्या प्रमाणाच्या पहिल्या व दुसऱ्या पदांस **सक्क**नें गुणल्यानें

सक्क^2 : सक्क·हरव :: सप : हप

परंतु **सक्क·हरव=बक^2** आणि **हप=सप-२अक**

$$∴ \text{सक्क}^2 = \text{बक}^2 \times \frac{\text{सप}}{\text{सप-२अक}}$$

कु० ४. ∵ जख = हख = सय

∴ सक - हख = सक - सय = कय

आतां कक सांध आणि कप रेघेवर कव रेघ लंब कर.

∴ कव = $\frac{१}{२}$ कय

आणि सक — हख = २कव

म्हणजे हैपरबलेच्या दोहों केंद्रांपासून स्पर्शरेषेवर काढलेल्या लंबांची वजाबाकी, मध्यापासून स्पर्शरेषेवर काढलेल्या लंबाच्या दुपटी बरोबर असते.

हें समीकरण, स्पर्शरेषेवर केंद्रांपासून काढलेले लंब आणि मध्यापासून काढलेला लंब ह्यामधील संबंध दाखवितें.

सिद्धांत ७.

(आ० ८) ह्यांत डअंइ ही एक हैपरबला आहे, टड आणि टइ ह्या रेषा अनुक्रमें ड आणि इ ह्या स्थळच्या स्पर्शरेषा आहेत; टड आणि टइ ह्या रेषांवर अनुक्रमें सग आणि सम हे लंब काढले आहेत; हे लंब हड आणि हइ ह्या रेघांस अनुक्रमें ख आणि ल ह्यां बिंदूंत मिळेतोंपर्यंत वाढविल्या आहेत; आणि टक, टह, टस, टळ, टक, डक, इक, आणि डइ ह्या रेषा काढिल्या आहेत, आतां हें सिद्ध करावयाचें आहे कीं,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{१ लें.} & \angle \text{डहट} = \angle \text{इहट} \\ \text{२ रें.} & \angle \text{डटस} = \angle \text{इटह} \\ \text{३ रें.} & \text{डर} = \text{रइ} \end{array}\right\}$$

आतां १लें. ∠डहट = ∠इहट हें सिद्ध करावयाचें

सगड आणि खगड ह्या दोन त्रिकोणांत ∠सडग=∠खडग, आणि ग बिंदुस्थळचा प्रत्येक कोन एक काटकोन आहे, आणि डग रेघ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे म्हणून ते दोन्ही त्रिकोण एकमेकाबरोबर आहेत;

$\therefore$ खड=सड

आणि $\therefore$ खह=अअं

त्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, हल=अअं

$\therefore$ खह=हल

आणखी टगख आणि टगस ह्या दोन त्रिकोणांत सग=गख, आणि ग बिंदुस्थळचा प्रत्येक कोन एक काटकोन आहे, आणि गट रेघ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे,

$\therefore$ △सगट=△खगट

आणि $\therefore$ सट=खट

त्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, सट=टल

$\therefore$ टल=टख

आतां टखह आणि टलह ह्या दोन त्रिकोणांत खट=टल, खह=हल, आणि टह रेघ दोन्ही त्रिकोणांस साधारण आहे म्हणून ते दोन्ही त्रिकोण परस्परबरोबर आहेत.

$\therefore$ ∠टहख =∠टहल हें सिद्ध.

२ रें $\because$ लटह=खटह $\therefore$ ∠हंटख=∠हंटल

परंतु हंटल=२सटइ+सटहं

आणि हंटख=२सटड—सटहं

$\therefore$ २सटड—सटहं=२सटइ+सटहं

$\therefore$ ∠डटस=∠हंटइ

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, हैपरबलेच्या दोहों केंद्रांपासून तिच्या दोन स्पर्शरेषांच्या छेदनबिंदूपर्यंत रेषा काढल्या तर त्यांतील एक रेषा स्पर्शरेषेशीं जो कोन करिते तो कोन, दुसरी रेषा दुसऱ्या स्पर्शरेषेशीं जो कोन करिते त्या कोनाबरोबर असतो.

२ रें. डर=रइ हें सिद्ध करावयाचें.

डट स्पर्शरेषा वाढवून तिजवर ह आणि क ह्या दोन बिंदूपासून हय आणि कप हे लंब काढ, म्हणजे

$$\triangle \text{हखट} = \triangle \text{हडट} - \triangle \text{खडट}$$
$$= \triangle \text{हडट} - \triangle \text{डटस}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{डट} \times \text{हय} - \tfrac{1}{2}\text{डट} \times \text{सग}$$
$$= \tfrac{1}{2}\text{डट}\ (\text{हय} - \text{सग}) = \text{डट} \times \text{कप}$$
$$= 2\triangle \text{डटक}$$

ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, $\triangle$हटल= २$\triangle$इटक

$$\therefore 2\triangle \text{इटक} = 2\triangle \text{डटक}$$
$$\therefore \triangle \text{इटक} = \triangle \text{डटक}$$

आतां डटक आणि इटक ह्या त्रिकोणांचे शिरकोन बिंदु टक रेघेच्या निरनिराळ्या बाजूंला आहेत आणि त्या शिरकोन बिंदूंस डइ रेघ सांधते, म्हणून कट रेघ वाढविली असतां ती डइ रेघेस र बिंदूंत समान दुभागते.

कु० १. ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, दोन स्पर्शरेषांचीं स्पर्शस्थळें सांधून जी ज्या होते तीस, जारेषा

त्या दोन स्पर्शरेषांचा छेदन बिंदु आणि हैपरबलेचा मध्यबिंदु ह्या दोहोंस सांधते ती समान दुभागते.

कु० २. जर हैपरबलेंत एक ज्या काढली आणि तीस समान दुभागणारी अशी एक रेषा हैपरबलेच्या मध्य बिंदूपासून काढली तर ती रेषा, त्याच ज्येच्या शेवटांशीं ज्या दोन स्पर्शरेषा होतात त्यांच्या छेदन बिंदूंतून जाते.

कु० ३. ज्या अर्थी (**टक**) ही रेषा, (**डइ**) पहिल्या ज्येशीं ज्या रेषा समांतर असतील त्या सर्वांस समान दुभागते; त्या अर्थी हें उघड दिसतें कीं, त्या समान दुभागणाऱ्या रेषेच्या शेवटांशीं स्पर्शरेषा केली तर ती त्या ज्येस समांतर होते.

सिद्धांत ८.

(आ० ९) **अ, अं** हे **अप** आणि **अंपं** ह्या हैपरबलांचे शिरोबिंदु आहेत, व **ब, बं** हे **बड** आणि **बंडं** ह्या प्रति हैपरबलांचे शिरोबिंदु आहेत असें मान. **डकडं** हा कोणताही एक व्यास काढ, आणि त्या व्यासाच्या **ड** शेवटांशीं **डट** स्पर्शरेषा काढ. आतां (कु० ३ प्र०) ह्या स्पर्शरेषेशीं ज्या ज्या समांतर असतील त्यांस **डकडं** हा व्यास समान दुभागील. **डट** रेषेशीं अशा ज्या ज्या त्यांपैकीं **पकपं** ही एक ज्या आहे समांतर असें मान, आणि तिच्या **प** शेवटांशीं **पटं** ही स्पर्शरेषा काढ, तर (कु० ३ प्र०) ज्या ज्या **पटं** ह्या स्पर्शरेषेशीं समांतर असतील त्यांस **पकपं** हा व्यास समान दुभागील. म्हणून **डकडं** आणि **पकपं** ह्या दोहों व्यासांमध्यें असा संबंध आहे कीं, त्यांपैकीं कोणत्या एका

व्यासाशीं समांतर अशा ज्या काढल्या तर त्यांस दुसरा व्यास समान दुभागील. ह्या अशा दोन व्यासांस व्यास प्रति व्यास असें म्हणतात. आतां ह्या सिद्धांतांत अशीं समीकरणें काढावयाचीं आहेत कीं, तेणेंकरून, एका व्यासाच्या शेवटाचे अवच्छेदकलक्षक सांगितले असतां दुसऱ्या व्यासाच्या शेवटाचे अवच्छेदकलक्षक काढतां यावेत.

कन आणि **नप** हे **प** बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक आहेत, व **कम** आणि **मड** हे **ड** बिंदूंचे अवच्छेदकलक्षक आहेत, असें मान. आतां अशीं समीकरणें शोधून काढलीं पाहिजेत कीं, त्यांत **प** आणि **ड** ह्या बिंदूंचे अवच्छेदकलक्षक यावेत, म्हणजे तेणेंकरून जर **प** आणि **ड** ह्यांपैकीं, कोणत्या एका बिंदूंचे अवच्छेदकलक्षक सांगितलें असतील तर दुसऱ्या बिंदूंचे अवच्छेदकलक्षक काढतां येतील.

आतां **पकन** आणि **डटम** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांपासून

$$\text{पन} : \text{डम} :: \text{कप} : \text{डट}$$
$$:: \text{कट}' : \text{कट} \quad \cdots (१)$$

आणखी $\text{पन} : \text{डम} :: \text{कन} : \text{टम} \quad \cdots (२)$

म्हणून या दोन प्रमाणांचा गुणाकार करून

$$\text{पन}^२ : \text{डम}^२ :: \text{कन} \times \text{कट}' : \text{टम} \times \text{कट} \; (३)$$

परंतु $\text{डम}^२ = \dfrac{\text{बक}^२}{\text{अक}^२} \times \text{टम} \times \text{मक}$ (सि० ४ प्र०)

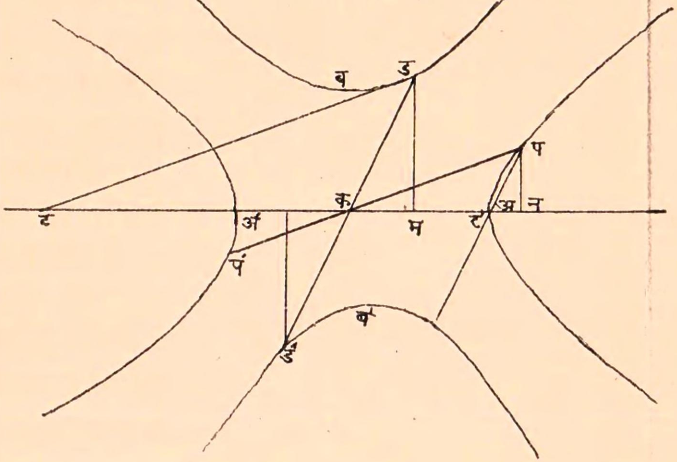
आणखी $\text{कन} \times \text{कट} = \text{अक}^२$ (सि० ४ कु० ४ प्र०)

ह्या किंमती (३) ह्या समीकरणांत ठेविल्यानें

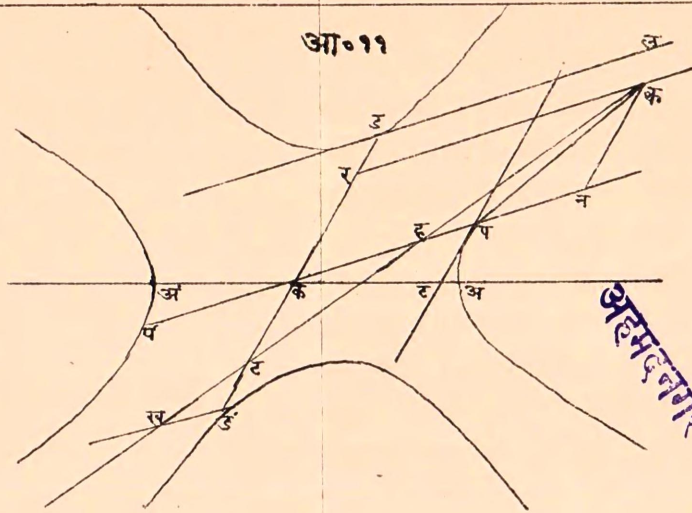
$$\text{पन}^२ : \frac{\text{बक}^२}{\text{अक}^२} \cdot \text{टम} \times \text{मक} :: \text{अक}^२ : \text{टम} \times \text{कट}$$

हैपरबला.

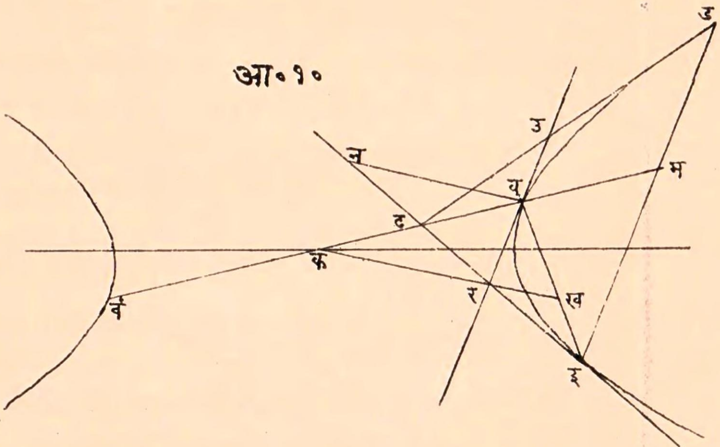
आ० ९



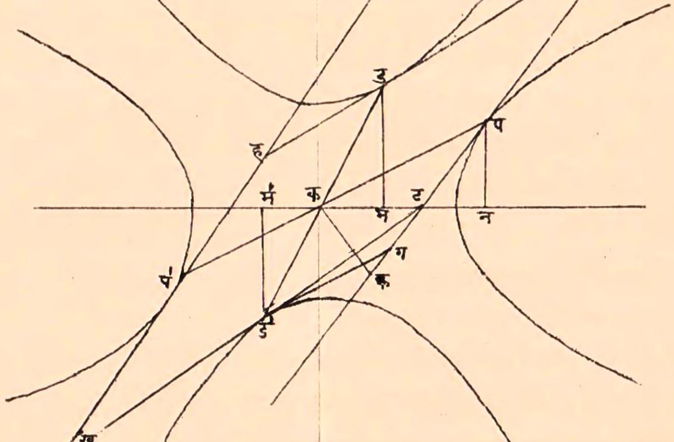
आ० ११



आ० १०



आ० १२



$$\therefore \text{पन}^2 = \text{बक}^2 \cdot \frac{\text{कम}}{\text{कट}}$$

$$= \text{बक}^2 \cdot \frac{\text{कम}^2}{\text{कम} \times \text{कट}}$$

परंतु $\text{कम} \times \text{कट} = \text{अक}^2$

$$\therefore \text{पन}^2 = \frac{\text{बक}^2 \times \text{कम}^2}{\text{अक}^2}$$

म्हणजे $\text{पन} = \frac{\text{बक}}{\text{अक}} \times \text{कम} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ (४)

आणखी पकन, डमट ह्या दोन सरूप त्रिकोणांपासून

$$\text{पन} : \text{कन} :: \text{डम} : \text{मट}$$

$$\therefore \text{कन} = \frac{\text{पन} \times \text{मट}}{\text{डम}}$$

$$= \frac{\text{पन} \times \text{मट} \times \text{डम}}{\text{डम}^2}$$

परंतु $\text{डम}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \text{मट} \times \text{मक}$

$$\therefore \text{कन} = \frac{\text{पन} \times \text{मट} \times \text{डम}}{\text{मट} \times \text{मक}} \times \frac{\text{अक}^2}{\text{बक}^2}$$

$$= \frac{\text{अक}^2}{\text{बक}^2} \cdot \frac{\text{पन} \times \text{डम}}{\text{मक}}$$

(४) ह्यापासून पनची किंमत काढून ती ह्यांत जुळून

$$\text{कन} = \frac{\text{अक}^2}{\text{बक}^2} \times \frac{\text{बक}}{\text{अक}} \times \text{कम} \times \frac{\text{डम}}{\text{मक}}$$

$\therefore \text{कन} = \frac{\text{अक}}{\text{बक}} \times \text{डम} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$ (५)

जर मतिव्यासाच्या प शेवटाचे कन आणि पन

हे अवच्छेदकलक्षक दिले तर दुसऱ्या व्यासाच्या ड शेवटाचे **कम** आणि **डम** हे अवच्छेदक लक्षक (४) आणि (५) ह्यां समीकरणांपासून काढतां येतील.

सिद्धांत ९.

व्यास आणि प्रतिव्यास ह्यांच्या अर्धाच्या वर्गांची वजाबाकी बृहदक्ष आणि लघ्वक्ष ह्यांच्या अर्धाच्या वर्गाच्या वजाबाकीबरोबर असते.

(आ० ९ पहा)

$$कप^2 = कन^2 + नप^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

$$कड^2 = कम^2 + मड^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (२)$$

$$= \frac{अक^2}{बक^2} \times पन^2 + \frac{बक^2}{अक^2} \cdot कन^2$$

$\therefore$ (१) ह्यांत (२) हें वजा देऊन

$$कप^2 - कड^2 = नप^2 \left(१ - \frac{अक^2}{बक^2}\right) + कन^2 \left(१ - \frac{बक^2}{अक^2}\right)$$

$$= (अक^2 - बक^2) \left(\frac{कन^2}{अक^2} - \frac{नप^2}{बक^2}\right)$$

परंतु $\frac{कन^2}{अक^2} - \frac{नप^2}{बक^2} = १$ (सि० २ कु० १ प्र०)

$\therefore कप^2 - कड^2 = अक^2 - बक^2$ हें सिद्ध.

कु० १. कारण $कप^2 - कड^2 = अक^2 - बक^2$

$$\therefore कड^2 = कप^2 + बक^2 - अक^2 \quad \cdots (१)$$

परंतु $कप^2 = कन^2 + नप^2$

$$= कन^2 + \frac{बक^2}{अक^2} (कन^2 - अक^2)$$

$$=\text{कन}^2+\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\cdot\text{कन}-\text{बक}^2$$

$\therefore$ (१) या समीकरणाचें रूप खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें

$$\text{कड}^2=\text{कन}^2+\frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\times\text{कन}^2-\text{बक}^2-\text{अक}^2+\text{बक}^2$$

$$=\text{कन}^2\left(\frac{\text{अक}^2+\text{बक}^2}{\text{अक}^2}\right)-\text{अक}^2$$

परंतु $\text{के}^2\times\text{अक}^2=\text{अक}^2+\text{बक}^2$

$$\therefore\text{कड}^2=\text{के}^2\cdot\text{कन}^2-\text{अक}^2\quad\dots\dots(२)$$

$$=(\text{के}\cdot\text{कन}+\text{अक})(\text{के}\cdot\text{कन}-\text{अक})$$

आतां $\text{सप}=\text{के}\cdot\text{कन}+\text{अक}$

$\text{हप}=\text{के}\cdot\text{कन}-\text{अक}$

$\therefore$ (२) हें समीकरण खालीं लिहिल्याप्रमाणें होतें

$$\text{कड}^2=\text{सप}\times\text{हप}$$

सिद्धांत १०.

(आ० १०). **डवइ** हैपरबलेंत **डइ** ही कोणती ही एक ज्या घेऊन तिच्या दोन्हीं टोकांवर **डट** आणि **इट** ह्या दोन स्पर्शरेषा काढल्या, आणि त्यांचा छेदनबिंदु **ट** आणि हैपरबलेचा मध्यबिंदु **क** हे **कट** रेषेनें सांधून **कट** रेषा वाढविली ती अशी कीं, ती हैपरबलेच्या कौंसास **व** ठिकाणीं आणि **इड** ज्येस **म** ठिकाणीं छेदिते; तर $\text{कव}^2=\text{कम}\times\text{कट}$ होईल.

व बिंदुस्थळीं **उवर** ही स्पर्शरेषा काढ; **वइ**, **कर** सांध; आणि **कर** वाढीव ती इतकी कीं **वइ** रेषेस

ख बिंदूंत मिळेल; वन रेघ रख रेघेशीं समांतर कर.

आतां ∵ रख रेघ नव रेघेशीं समांतर आहे; आणि इख=$\frac{1}{2}$ इव, ∴ इर=$\frac{1}{2}$ इन

आणखी टनव आणि टरक ह्या दोन सरूप त्रिकोणांपासून

कट : टव : : टर : नट

∴ कट+टव : कट : : टर+नट : टर

म्हणजे कव : कट : : नर : टर

: : रइ : रट

: : वम : वट

∴ कव : वम : : कट : वट

∴ कव+वम : कव : : कट+वट : कट

म्हणजे कम : कव : : कव : कट

∴ कव^2=कम×कट · · · · हें सिद्ध.

उ० १. असें सिद्ध कर कीं म आणि ट ह्या बिंदूंनीं वंम रेघेचे जे भाग होतात ते गायन प्रमाणांत आहेत.

उ० २. हें सिद्ध कर कीं वंम×मव=कम×मट

उ० ३. असें सिद्ध कर कीं,

वंम×मव : वंट×टव : : कम^2 : कव^2

सिद्धांत ११.

(आ० ११). कोणत्याही एका हैपरबलेंत पपं आणि डडं हे व्यास व प्रतिव्यास घेतले, आणि हैपरबलेच्या कौंसांत क्ष हा कोणताही एक बिंदु घेऊन त्यापासून क्षर आणि क्षन ह्या दोन रेघा अनुक्रमें पपं आणि डडं ह्यांशीं समांतर काढल्या तर

$$\text{क्षन}^2=\frac{\text{कडं}^2}{\text{कप}^2}\times\text{नप}\times\text{नपं}$$

क बिंदुस्थळीं कहट स्पर्शरेषा काढली तर ती व्यास व प्रतिव्यास ह्यांस वाढविल्यावर त्यांस अनुक्रमें ट आणि ह ह्यांस्थळीं मिळेल. डड' व्यासाच्या दोहीं शेवटांशीं स्पर्शरेषा काढल्या तर त्या स्पर्शरेषांस क स्थळची स्पर्शरेषा ल आणि क यां बिंदूंत छेदील.

आतां (सि० १० प्र०)

कन : कप : : कप: कह

ह्या प्रमाणाच्या पहिल्या पदास व तिसऱ्या पदास कन ह्यानें गुणल्यानें, आणि दुसऱ्या पदास व चवथ्या पदास कप ह्यानें गुणल्यानें

$$कन^2 : कप^2 : : कन\cdot कप : कह\cdot कप$$
$$: : कन : कह$$
$$\therefore कन^2 — कप^2 : कप^2 : : कन-कह : कह$$
$$: : हन : कह$$
$$: : कन : कट$$

ह्या प्रमाणाच्या तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांस कन ह्यानें गुणल्यानें

$$कन^2 — कप^2 : कप^2 : : कन^2 : कन \times कट$$

परंतु $कन \times कट = कर \times कट$

परंतु $कड^2 = कर \times कट$

$$\therefore कन^2 — कप^2 : कप^2 : : कन^2 : कड^2$$

आणखी $कन^2 — कप^2 = नप' \times नप$

$$\therefore कन^2 = \frac{कड^2}{कप^2} . नप' \times नप \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \quad हें सिद्ध.$$

ह्या समीकरणाचें रूप, लघ्वक्ष व बृहदक्ष ह्यांच्या संबंधानें जें दीर्घवर्तुळाचें समीकरण काढलें आहे त्या

समीकरणाच्या रूपाप्रमाणें आहे. ह्या समीकरणास, व्यास प्रतिव्यासाच्या संबंधानें आणलेलें समीकरण असें म्हणतात.

सिद्धांत १२.

व्यास प्रतिव्यासाच्या शेवटांशी हैपरबलेस स्पर्शरेषा काढल्यावर त्यांच्या छेदनांनीं जो समांतरभुजचौकोन पडतो त्याचें क्षेत्रफळ अविकारी असतें; आणि तें लघ्वक्ष व बृहदक्ष ह्यांच्या गुणाकाराबरोबर असतें, म्हणजे, त्या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ =४**अक·बक.**

(आ० १२.) **डडं** आणि **पपं** ह्या व्यास प्रतिव्यासांच्या शेवटांशीं हैपरबलेस स्पर्शरेषा काढून **लह खग** हा समांतरभुजचौकोन पडतो अशी कल्पनाकर; तर हें उघड दिसेल कीं, व्यास प्रतिव्यास **लगखह** ह्या समांतरभुजचौकोनास विभागून त्याचे च्यार सारखे समांतरभुजचोकोन करितात.

∴ **लहखग** ह्या▭चें क्षेत्रफळ=४**पकडंग** ह्या▭ चें क्षेत्रफळ. आतां **पकडंग** ह्या▭चें क्षेत्रफळ=२**कडंट** ह्या△चें क्षेत्रफळ

$$=\text{कट}\times\text{डम}$$

(कारण डम=डंमं)

$$=\text{कट}\times\frac{\text{बक}}{\text{अक}}.\text{कन} \text{(सि० ८ प्र०)}$$

आतां कट×कन=अक²

∴ पकडंग ह्या▭चें क्षेत्रफळ =अक×बक

∴ लगखह ह्या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ=४अक×बक . . . . हें सिद्ध.

कृ १. **क** बिंदूपासून **प** बिंदुस्थळचे स्पर्शरेषेवर **कक्क** रेघ लंब काढ, म्हणजे

$$\text{पड}' \text{ ह्या } \square \text{चें क्षेत्रफळ} = \text{कक्क} \times \text{कड}'$$

$$= \text{अक} \times \text{बक} (\text{सि० १२ म०})$$

$$\therefore \text{अक} \times \text{बक} = \text{कक्क} \times \text{कड}'$$

$$\therefore \text{क्क}^2 = \frac{\text{अक}^2 \times \text{बक}^2}{\text{कड}'^2}$$

$$= \frac{\text{अक}^2 \times \text{बक}^2}{\text{कप}^2 + \text{बक}^2 - \text{अक}^2} \quad \ldots\ldots (१)$$

कारण $\text{कड}'^2 - \text{कप}^2 = \text{बक}^2 - \text{अक}^2$

(१) हें समीकरण, हैपरबलेच्या मध्यबिंदूपासून स्पर्शरेषेवर काढलेला लंब, व लघ्वक्ष, बृहदक्ष, आणि अर्धप्रतिव्यास ह्यांच्या मधला संबंध दाखवितें.

सिद्धांत १२.

व्यासकल्पांच्या संबंधानें हैपरबलेचे जे सिद्धांत आहेत त्यांविषयीं.

व्याख्या—जी रेषा सतत हैपरबलेच्या कौंसाजवळ जवळ येते, परंतु वस्तुतः तीस स्पर्श करीत नाहीं, ती रेषा व्यासकल्प होय. ह्याहीपेक्षां अधिक संक्षिप्त लक्षण असे कीं, अनंत अंतरावरील बिंदुस्थळीं केलेली स्पर्शरेषा व्यासकल्प होय.

(आ० १३). **अअ'** आणि **बब'** हे **पअ** आणि **पंअ'** ह्या हैपरबलांचे लंबव्यास व प्रतिव्यास आहेत असें मान; **बइ** आणि **बंइ'** ह्या प्रति हैपरबला काढ, आणि **हखलए** हा काटकोन चौकोन काढ; म्हणजे ह्या काटकोन चौकोनाचे कर्ण **खए** आणि **हल** हे

हैपरबलेचे व्यासकल्प होतील. **खए, हल** हे कर्ण काढ, आणि **पन** रेषेस दोहों बाजूंनीं वाढीव, म्हणजे ती व्यासकल्पांस **ग** आणि **गं** ह्या बिंदूंत छेदील, आणि हैपरबलेच्या कौंसास **क्व** बिंदूंत छेदील. आतां पूर्वीं असें सिद्ध केलें आहे कीं,

$$\text{नप}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot (\text{कन}^2 - \text{अक}^2) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (१)$$

आणखी **गनक** आणि **एअक** ह्या दोन सरूप त्रिकोणांपासून

$$\text{गन}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \text{कन}^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (२)$$

$(\because \text{एअ} = \text{बक})$

आतां (२) ह्यांत (१) हें वजा केल्यानें

$$\text{गन}^2 - \text{नप}^2 = \frac{\text{बक}^2}{\text{अक}^2} \cdot \left\{ \text{कन}^2 - \text{कन}^2 + \text{अक}^2 \right\}$$

$$= \text{बक}^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (३)$$

आतां **बक** हें अविकारी पद आहे, म्हणून **गन** रेघ नेहमीं **पन** रेघेपेक्षां मोठी असते. ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, व्यास कल्पाचा लक्षक हैपरबलेच्या लक्षकापेक्षां मोठा असतो, म्हणजे, व्यासकल्प हैपरबलेच्या कौंसापलीकडे पडतो.

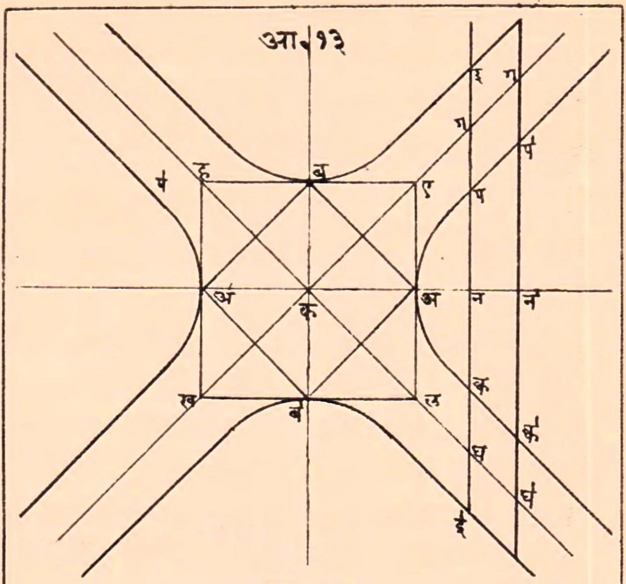
आणखी **गंपंनंक्वं** ही दुसरी एक ज्या **गपनक्व** ह्या ज्येशीं समांतर कर, म्हणजे ती व्यासकल्पास **गं** बिंदूंत, हैपरलेबच्या कौंसास **पं** आणि **क्वं** ह्या बिंदूंत आणि अक्षास **नं** बिंदूंत छेदील. आतां वरील रीतीप्रमाणें असें सिद्ध करितां येईल कीं,

$$\text{गंनं}^2 - \text{नंपं}^2 = \text{बक}^2 \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (४)$$

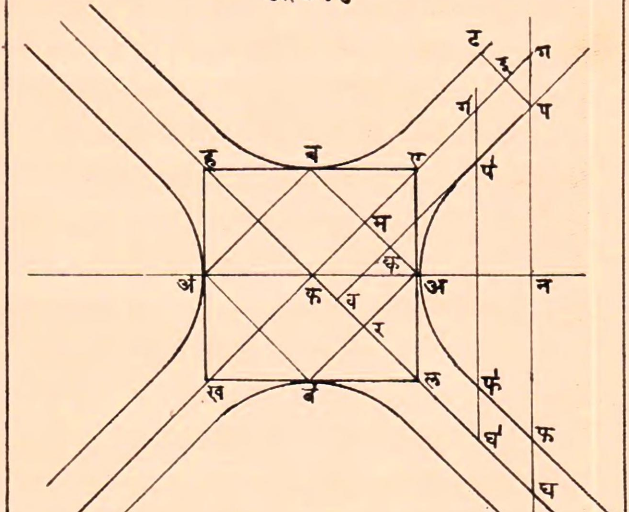
(३) आणि (४) ह्यांची तुलना केल्यानें

हैपरबला.

आ. १३



आ. १४



ग′न′ — न′प′ = गन^{2} — नप^{2}

म्हणजे (**ग′न′ + न′प′**) (**ग′न′ — न′प′**) = (**गन + नप**) (**गन — नप**)

परंतु **ग′न′ — न′प′ = ग′प′**

आणि **गन — नप = गप**

आणखी **ग′न′ + न′प′ = ग′क′**

आणि **गन + नप = गक**

$$\frac{\text{ग′प′}}{\text{गप}} = \frac{\text{गक}}{\text{ग′क′}}$$

आतां हें उघड आहे कीं, **ग′क′** रेघ नेहमीं **गक** रेघेपेक्षां मोठी असते, म्हणून **ग′प′** रेघ नेहमीं **गप** रेघेपेक्षां कमी असते; आणि जर **ग′क′** ह्याच्या पलीकडे **ग″प″** ही दुसरी एक अक्षावरून ज्या काढली, तर असें सिद्ध होईल कीं, ती **ग′प′** ज्यापेक्षां लहान आहे, म्हणून अर्थातच **गप** ज्येपेक्षां तर फारच लहान आहे. म्हणजे **खए** ही रेघ हैपरबलेच्या कौंसाजवळ जवळ येते, म्हणून ज्याअर्थीं **हल** आणि **खए** ह्या करणांस व्यास कल्पाचें लक्षण लागू आहे, त्या अर्थीं ते व्यास कल्प आहेत. व्यासकल्पांविषयीं शेवटच्या पुरवणींत पुष्कळ विचार केला आहे, तो विद्यार्थ्यांनीं पाहावा.

कु० १ ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, जर बृहदक्षावर लंब अशी एक ज्या काढून ती व्यासकल्पांस मिळे तोंपर्यंत वाढविली, तर त्या ज्येचे हैपरबलेच्या कौंसानें असे दोन भाग पडतात कीं, त्या दोन्ही भागांचा गुणाकार लघ्वक्षाच्या वर्गाबरोबर होतो.

सिद्धांत १४.

हैपरबलेच्या कौंसांत कांहीं बिंदु घेऊन त्या मध्येकापासून व्यासकल्पांशीं समांतर रेघा काढल्या असतां त्या रेघा, आणि त्या रेघांनीं व्यासकल्पांचें जे भाग पडतात ते, ह्यांनीं जे समांतरभुजचौकोन पडतात ते सर्व परस्पर बरोबर असतात.

(आ० १४) **अअं** बृहदक्ष आहे, **बबं** लघ्वक्ष आहे, आणि **हएखल** हा काटकोन चौकोन आहे असें मान. **खए** आणि **लह** हे व्यासकल्प काढ. **अब, बअं, अंबं, बंअ** ह्या रेषा सांध, म्हणजे **अब अंबं** हा समांतरभुजचौकोन पडेल. हैपरबलेच्या कौंसांतील **प** ह्या कोणत्या एका बिंदूपासून **पइ** आणि **पक** ह्या रेघा अनुक्रमें **हल** आणि **खए** ह्या व्यास कल्पांशीं समांतर काढ. **पन** रेघ दोहों बाजूंनीं वाढीव, म्हणजे ती व्यासकल्पांस **ग** आणि **घ** बिंदूंत, आणि कौंसास **फ** बिंदूंत छेदील. आतां ह्या सिद्धांतांत हें सिद्ध करावयाचें आहे कीं, **अमकर** ह्या समांतरभुजचौकोनाबरोबर **इपकव** हा समांतरभुजचौकोन आहे.

गइप आणि **एमअ** ह्या दोन सरूपत्रिकोणांत

पइ : मअ : : गप : एअ

आणि **पवघ** आणि **अरल** ह्या दोन सरूपत्रिकोणांत

वप : अर : : पघ : अल

∴ ह्या दोन प्रमाणांचा गुणाकार करून

पइ×वप : मअ×अर : : पग×पघ : अए×अल

: : अए^2 : अए^2

$$\therefore \text{पइ} \times \text{वप} = \text{मअ} \times \text{अर}$$

म्हणून **मकरअ** आणि **कवपइ** ह्या दोन समांतरभुजचौकोनांच्या सारख्या कोनाजवळच्या बाजू व्युत्क्रम प्रमाणांत आहेत; म्हणून **मकरअ** ह्या समांतरभुजचौकोना = **कवपइ** हा समांतरभुजचौकोन आहे . . . . हें सिद्ध.

कु० १. आणखी $\therefore$ **मकरअ** हा $\square$ = **कवपइ** हा $\square$

$$\therefore \text{कम} \times \text{कर} = \text{कइ} \times \text{इप}$$

$$\text{परंतु } \text{कम} \times \text{कर} = \text{कम}^2 = \text{अब}^2 = \frac{\text{अक}^2}{४} + \text{बक}^2$$

$$\therefore \text{कइ} \times \text{इप} = \frac{\text{अक}^2 + \text{बक}^2}{४} \quad \ldots\ldots (१)$$

(१) ह्या समीकरणास, व्यासकल्पांच्या संबंधानें आणलेलें हैपरबलेचें समीकरण असें म्हणावें. ह्या समीकरणांत **कइ** रेघ अवच्छेदक आहे आणि **इप** रेघ लक्षक आहे. व्यासकल्पांच्या संबंधानें हैपरबलेचें समीकरण आणण्यास (**कइ** आणि **इप** असे) जे अवच्छेदकलक्षक घेतो त्यांचा गुणाकार, बृहदक्ष आणि लघ्वक्ष ह्यांच्या वर्गांच्या बेरिजेच्या एक चतुर्थांशाबरोबर होतो.

कु० २. जर हैपरबला **सम**भुज असेल, म्हणजे, जर **बक** = **अक** असेल, तर

$$\text{पइ} \times \text{इक} = \frac{\text{अक}^2}{२}.$$

कु० ३. सि० १२ समीकरण (३) ह्यावरून असें दिसतें कीं, जर **गंपंफंघं** हा लक्षक घेतला, आणि

त्यानें कौंसास प' आणि फ' ह्या बिंदूंत छेदिलें, आणि व्यासकल्पांस ग' आणि घ' ह्या बिंदूंत छेदिलें, तर

$$\text{ग'प'} \times \text{ग'फ'} = \text{गप} \times \text{गफ}$$

ह्यावरून असें समजतें कीं, सर्व ज्यांस हैपरबलेचा कौंस सारख्या मनाणांनीं विभागतो.

कु० ४. ह्याच प्रमाणें असें सिद्ध करितां येईल कीं,

$$\text{कइ} \times \text{इट} = \frac{\text{बक}^2 + \text{अक}^2}{४}$$

$$\therefore \text{कइ} \times \text{इट} = \text{कइ} \times \text{इप}$$

$$\therefore \text{इट} = \text{इप}$$

ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, हल व्यासकल्पा-शीं समांतर अशी कोणतीही एक टप रेघ काढली, तर तीस खए व्यासकल्प समान दुभागितो.

सिद्धांत १५.

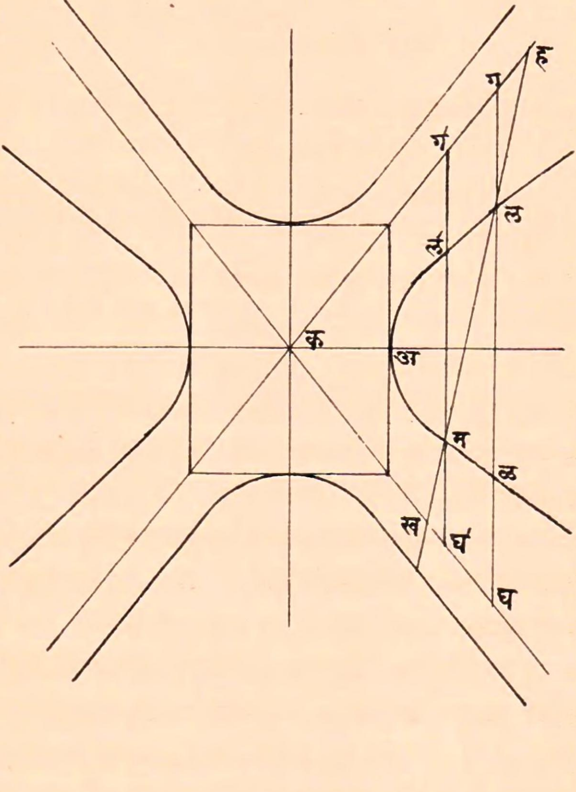
(आ० १५) हैपरबलेच्या कौंसास छेदून दोहों व्यासकल्पांस मिळेल अशी एक रेषा काढली, तर कौंस आणि व्यासकल्प ह्यांमध्यें त्या रेषेचे जे भाग सांपडतात ते बरोबर असतात.

हलमख ही रेघ हैपरबलेच्या कौंसास **ल** आणि **म** ह्या बिंदूंत छेदून दोहों व्यासकल्पांस **ह** आणि **ख** या बिंदूंत छेदिते असें मानिलें तर **हल=मख** होईल.

ल बिंदूमधून **गलळघ** ही रेघ अक्षाशीं लंब कर, म्हणजे ती कौंसास **ल** आणि **ळ** ह्या बिंदूंत व व्यास कल्पांस **ग** आणि **घ** बिंदूंत छेदील. **म** बिंदूमधून **ग'ल' मघ'** ही रेघ अक्षाशीं लंब कर म्हणजे ती कौं-

हैपरबला.

आ० १५



सास **लं** आणि **म** ह्या बिंदूंत आणि व्यासकल्पांस **ग** आणि **घं** ह्या बिंदूंत छेदील. आतां **हगल** आणि **हमग** हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, व **लघख** आणि **मघंख** हे दोन त्रिकोण सरूप आहेत, म्हणून

हल : लग : : हम : मगं

स्थलभेदानें हल : हम : : लग : मगं

आणखी लख : मख : : लघ : मघं

ह्या दोनप्रमाणांचा गुणाकार करून

हल × लख : हम × मख : : लग × लघ : मगं × मघ

परंतु लग × लघ = मगं × मघं

∴ हल × लख = हम × मख

∴ हल (लम + मख) = मख (हल + लम)

∴ हल × लम + हल × मख = हल × मख + मख × लम

ह्या समीकरणाच्या प्रत्येक पेक्ष्यांत हल × मख हें वजा दिल्यानें.

हल × लम = मख × लम

∴ हल = मख . . . . . . हें सिद्ध.

उ० १ जर हैपरबलेच्या कौंसांतील कोणत्याही एका बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा केली, आणि ती दोहों व्यासकल्पांस मिळे तोंपर्यंत वाढविली तर त्या रेषेचे स्पर्श बिंदुस्थळीं समान भाग होतात हें सिद्ध कर.

उ० २ जर **पपं** व्यासाच्या एका शेवटाशीं **क्पर** ही स्पर्शरेषा काढली, आणि तिला वाढविल्यावर ती व्यास कल्पांस **क्** आणि **र** ह्या बिंदूंत मिळाली; व **क्पर** स्पर्शरेषेशीं समांतर अशी **हइख** ही कोणतीही

एक ज्या काढली, आणि ती कौंसास **इ** आणि **म** बिंदूंत व व्यासकल्पांस **ह** आणि **ख** बिंदूंत मिळाली, तर असें सिद्ध कर कीं, **पक**^{2}=**हइ**×**इख** आणि **पक**^{2}=**हम**×**मख**.

उ० ३. जर पूर्व उदाहरणांतील स्पर्शरेषेशीं समांतर अशी **वसयटउ** ही कोणती ही एक रेघ काढली, व तिनें हैपरबलांस **व** आणि **उ** बिंदूंत, व्यासकल्पांस **स** आणि **ट** बिंदूंत, आणि **पप'** व्यासास **य** बिंदूंत छेदिलें, तर असें सिद्ध कर कीं, **वय**=**यउ**.

पुरवणी

कृत्य १.

परावलेच्या आंसावर लंब रेषा केली असतां परावलेचा जो भाग पडतो त्याचें क्षेत्रफळ काढण्याची रीति.

(आ० १६) अशी कल्पना कर कीं, **अपन** हा परावलेचा एक कौंस आहे, त्याचा लक्षक **पन** आणि आंस **अन** आहे.

पम$_{४}$, **प**$_{४}$ **म**$_{३}$, इ० काटकोन चौकोन काढ; आणि **प**$_{४}$ **न**$_{४}$, **प**$_{३}$ **न**$_{३}$, इ० हे लक्षक काढ. आतां

$$\text{पन}^2 = ४\text{अस} \times \text{अन}$$

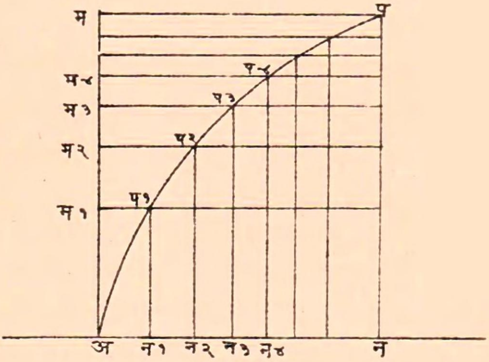
$$\text{प}_{४}\text{न}_{४}^2 = ४\text{अस} \times \text{अन}_{४}$$

$$\therefore \text{पन}^2 - \text{प}_{४}\text{न}_{४}^2 = ४\text{अस}(\text{अन} - \text{अन}_{४})$$

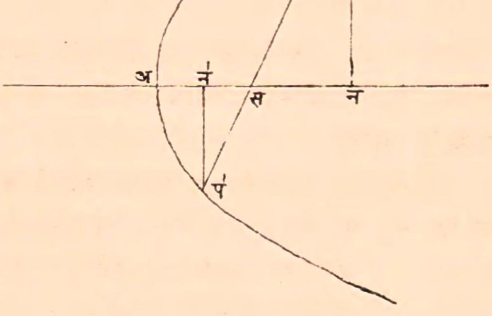
$$= ४\text{अस}\cdot\text{नन}_{४}$$

$$\therefore (\text{पन} + \text{प}_{४}\text{न}_{४})(\text{पन} - \text{प}_{४}\text{न}_{४}) = ४\text{अस}\cdot\text{नन}_{४}$$

आ० १६



आ० १७



$$\therefore (\text{पन} + \text{प}_{४}\,\text{न}_{४})\,\text{मम}_{४} = \frac{\text{पन}^{२}}{\text{मप}} \cdot \text{नन}_{४}$$

$$\therefore \text{मम}_{४} \times \text{मप} = \frac{\text{पन}}{\text{पन} + \text{प}_{४}\text{न}_{४}} \cdot \text{पन} \cdot \text{नन}_{४}$$

आतां ह्या समांतरभुजचौकोनांची संख्या पुष्कळ वाढविली, आणि त्यांचें क्षेत्रफळ इतकें कमी केलें, कीं $\text{प}_{४}$ हा बिंदु **प** बिंदूच्या अतिसान्निध येईल. तेव्हां

$$\frac{\text{पन}}{\text{पन} + \text{प}_{४}\text{न}_{४}} = \frac{\text{पन}}{\text{पन} + \text{पन}} = \frac{१}{२}$$

आणखी $\text{मम}_{४} \times \text{मप} = \text{म}_{४}\,\text{प}$ ह्या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ

आणि $\text{पन} \times \text{नन}_{४} = \text{पन}_{४}$ ह्या समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ

$\therefore \text{पम}_{४}$ अशा कोणत्या एका * मूलरूप समांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ. $= \frac{१}{२}\,\text{पन}_{४}$ अशा कोणत्या एका मूलरूपसमांतरभुजचौकोनाचें क्षेत्रफळ. पराबलेच्या कौंसाच्या प्रत्येक बाजूस जे समांतरभुज चौकोन पडतात त्या सर्वांस हा नियम लागूं आहे.

$\therefore \text{पम}_{४} + \text{प}_{४}\,\text{म}_{३} +$ इ० अशा सर्व मूलरूप समांतरभुजचौकोनांची बेरीज $= \text{पन}_{४} + \text{प}_{४}\,\text{न}_{३} +$ इ० अशा सर्व मूलरूपसमांतरभुजचौकोनांच्या बेरिजेच्या अर्धा बरोबर आहे.

परंतु $\text{पम}_{४} + \text{प}_{४}\,\text{म}_{३} +$ इ० असे सर्व समांतरभुजचौकोन $=$ **अपम** ही वक्र आकृति $+$ ($\text{पम}'_{४}\,\text{प}_{४} + \text{प}_{४}\,\text{म}'_{३}\,\text{प}_{३} +$ इ०) हे त्रिकोण.

---

* जसा मिश्र पदार्थ मूलपदार्थांच्या संयोगानें झालेला असतो तशी पराबला $\text{पम}_{४}$. $\text{पन}_{४}$ इ० ह्या समांतरभुजचौकोनांनीं झाली आहे; म्हणून समांतरभुजचौकोनास (मुलरूप) हें विशेषण जोडलें आहे.

आणि $\text{पन}_{४}+\text{प}_{४}\,\text{न}_{३}+\text{इ०}=\text{अपन}$ ही वक्र आकृति$+(\text{पप}_{४}\,\text{न}_{४}+\text{प}_{४}\,\text{न}_{३}\,\text{प}_{३}+\text{इ०})$ हे त्रिकोण.

$\therefore$ **अपम** ही वक्र आकृति$+(\text{पम}_{४}\,\text{प}_{४}+\text{प}_{४}\,\text{म}_{३}\,\text{प}_{३}+\text{इ०})$ हे त्रिकोण

$=\frac{१}{२}\{$ **अपन** ही वक्र आकृति$+(\text{पप}_{४}\,\text{न}_{४}+\text{प}_{४}\,\text{न}_{३}\,\text{प}_{३}+\text{इ०})$ हे त्रिकोण $\}$

$\therefore \text{अपम}-\frac{१}{२}\,\text{अपन}=\frac{१}{२}(\text{पप}_{४}\,\text{न}_{४}+\text{इ०})$ हे त्रिकोण$-(\text{पम}_{४}\,\text{प}_{४}+\text{इ०})$ हे त्रिकोण . . . (१)

परंतु जेव्हां $\text{प}_{४}$ हा बिंदु **प** ह्या बिंदूच्या अति सन्निध येतो तेव्हां $\text{प}_{४}\,\text{न}_{४}\,\text{प}$ त्रिकोण$=\text{प}_{४}\,\text{म}_{४}\,\text{प}$ त्रिकोण होतो, आणि हे दोन्ही त्रिकोण अतिशय लहान होतात, म्हणून मूलरूप त्रिकोणांच्या दोहो बेरजांमधलें अंतर नाहींसें होतें; आणि जर समांतरभुजचौकोनांची संख्या अनंतपर्यंत वाढविली तर शेवटीं-

अपम ही आकृति$-\frac{१}{२}$ **अपन** ही आकृति$=०$ असें होईल.

$\therefore$ **अपम** ह्या आकृति$=\frac{१}{२}($**अपन** ही आकृति$)$

आणि $\therefore$ **अपन** ही आकृति$=२=($**अपम** ही आकृति$)$

आणि $\therefore$ **अपन** ही आकृति$+$**अपम** ही आकृति$=३($**अपम** ही आकृति.$)$

$\therefore$ **अपम** ही आकृति$=\frac{१}{३}($**पनअम** ह्या सर्व आकृति$)$

आणि $\therefore$ **अपन** पराबलेचें क्षेत्रफळ$=\frac{२}{३}$ **अप** काटकोन चौकोन.

कृत्य २.

पराबलेच्या केंद्रामधून एक ज्या अशी काढली कीं

ती अक्षाशीं ४५° चा कोन करील; तर ती ज्या आणि पराबलेचा कौंस ह्यां मध्यें जी जागा सांपडते तिचें क्षेत्रफळ काढण्याची रीति.

(आ० १७). पअप′ ह्याचें क्षेत्रफळ किती आहे हें काढावयाचें आहे अशी कल्पना कर. स केंद्र आहे, आणि ∠पसन=४५° आहे असें मान; तर **सन=पन**, आणि **स′न′=प′न′** होईल.

आतां **अपप′** ही आकृति=**असप** ही आ० + **असप′** ही आ०

=**अपन** हीआ०—**सपन** ही आ०
+ **अ′न′प′** ही आ० + **सप′न′** ही आ०
=$\frac{१}{२}$ (अन×नप + अ′न′×न′प′)
—$\frac{१}{२}$ (पन^{२}—प′न′^{२})

आतां **अनची** किमत काढ. **अस=य** घे आणि **अन=क्ष** घे; तर **नप^{२}=४यक्ष**

आणखी **नप^{२}=सन^{२}**= (क्ष—य)^{२}

$\therefore$ (क्ष—य)^{२}=४ यक्ष

$\therefore$ क्ष^{२}—२यक्ष + य^{२}=४यक्ष

$\therefore$ क्ष^{२}—६यक्ष + ९य^{२}=८य^{२}

$\therefore$ क्ष—३य=$\pm$२य$\sqrt{२}$

$\therefore$ क्ष= (३$\pm$२·८२८४) य

$\therefore$ अन=५·८२८४×य

अ′न′=०.१७१६×य

$\therefore$ पन=अन—अस
=५·८२८४×य—य=४·८२८४×य
आणि प′न′=०·८२८४×य

$\therefore$ पअपं चें क्षेत्रफळ $= \frac{2}{3}$ यं^{2} (५·८२८४)(४·८२८४)
+ (०·१७१६)(०·८२८४)
$=$ ७·४८७६४ $\times$ यं^{2}

कृत्य ३.

दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ काढण्याची रीति.

(आ० १८.) अपअं हें एक दीर्घवर्तुळ आहे, आणि अक्कअं हें बृहदक्षावर केलेलें वर्तुळ आहे अशी कल्पना कर. क्कन$_1$ हा मूलरूप समांतरभुज चौकोन काढ, तर

क्कन$_1$ याचें क्षेत्रफळ $=$ क्कन $\times$ न$_1$न $=$ अ$_1$ घे

तर पन$_1$ ह्याचें क्षेत्रफळ $=$ पन $\times$ न$_1$न $=$ य$_1$ घे

$\therefore$ अ$_1$: य$_1$: : क्कन : पन
: : य : ब

$$\therefore \text{अ}_1 = \frac{\text{य}}{\text{ब}}\text{य}_1$$

ह्याचप्रमाणें असें सिद्ध होईल कीं, अ$_2$ हा दुसरा कोणताही एक समांतरभुजचौकोन घेतला तर

$$\text{अ}_2 \frac{\text{य}}{\text{ब}}\text{य}_2$$

$$\text{इ०} = \text{इ०}$$

$$\therefore \text{अ}_1 + \text{अ}_2 + \text{अ}_3 + \text{इ०} = \frac{\text{य}}{\text{ब}}(\text{य}_1 + \text{य}_2 + \text{य}_3 + \text{इ०})$$

आतां जर ह्या समांतरभुजचौकोनांची संख्या अमर्याद वाढविली, आणि प्रत्येकाचें क्षेत्रफळ अतिशय कमी केलें, तर

अ$_1$ + अ$_2$ + अ$_3$ + इ० $=$ वर्तुळाचें क्षेत्रफळ,

आणि $\text{य}_1 + \text{य}_2 + \text{य}_3 + \text{इ}_0 =$ दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ.

$\therefore$ दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ $= \frac{\text{ब}}{\text{य}} \times$ वर्तुळाचें क्षेत्रफळ

परंतु वर्तुळाचें क्षेत्रफळ $= \pi\,\text{य}^2$

$\therefore$ दीर्घवर्तुळाचें क्षेत्रफळ $= \frac{\text{ब}}{\text{य}}\pi\,\text{य}^2 = \pi\,\text{य}\text{घ}$*

कृत्य ४.

हैपरबलेच्या व्यासकल्पाविषयीं.

(आ० १९). हैपरबलेच्या कौंसांतील कोणत्याही एका बिंदूचे अवच्छेदकलक्षक, क्ष आणि ज्ञ आहेत; आणि तदनुरूप जो बिंदु व्यासकल्पांत असेल त्याचे अवच्छेदकलक्षक क्ष' आणि ज्ञ' आहेत अशी कल्पना कर, आतां

$$\text{ज्ञ}^2 = \frac{\text{ब}^2}{\text{य}^2}(\text{क्ष}^2 - \text{य}^2) \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\text{ज्ञ}'^2 = \frac{\text{ब}^2}{\text{य}^2}\text{क्ष}'^2 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

म्हणून (१) ह्या समीकरणापासून

$$\text{ज्ञ}^2 = \frac{\text{ब}^2}{\text{य}^2}\text{क्ष}^2\left(1 - \frac{\text{य}^2}{\text{क्ष}^2}\right)$$

$$\therefore \text{ज्ञ} = \frac{\text{ब}}{\text{य}}\text{क्ष}\left(1 - \frac{\text{य}^2}{\text{क्ष}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

आतां द्वियुक्पदाच्या नियमाप्रमाणें उजव्या पेठ्याचा घात केल्यानें

---

*ह्याचप्रमाणें हैपरबला घेऊन कृत्य केलें असतां तिच्या क्षेत्रफळा $= \pi\,\text{य}\text{ब}$ हें सिद्ध होईल,

$$\text{ज्ञ} = \frac{\text{ब}}{\text{य}}\text{क्ष}\left\{ १ - \frac{१}{२}\frac{\text{य}^{२}}{\text{क्ष}^{२}} + \frac{१}{२}\left(\frac{१}{२} - १\right)\frac{\text{य}^{४}}{\text{क्ष}^{४}}\frac{१}{१.२}\right.$$

$$\left. - \frac{१}{२}\left(\frac{१}{२} - १\right)\left(\frac{१}{२} - २\right)\frac{\text{य}^{६}}{\text{क्ष}^{६}}\frac{१}{१.२.३} + \text{इ०}\right\}$$

$$= \frac{\text{ब}}{\text{य}}\text{क्ष}\left\{ १ - \frac{\text{य}^{२}}{२\text{क्ष}^{२}} - \frac{१}{६}\frac{\text{य}^{४}}{\text{क्ष}^{४}} - \frac{१}{१६}\frac{\text{य}^{६}}{\text{क्ष}^{६}} - \text{इ०}\right\}$$

$$= \frac{\text{ब}}{\text{य}}\text{क्ष} - \frac{१}{२}\frac{\text{बय}}{\text{क्ष}} - \frac{१}{६}\frac{\text{बय}^{३}}{\text{क्ष}^{३}} - \frac{१}{१६}\frac{\text{बय}^{५}}{\text{क्ष}^{५}} - \text{इ०}$$

$$\therefore \text{ज्ञ}' - \text{ज्ञ} = \frac{\text{ब}}{\text{य}}\text{क्ष} - \frac{\text{ब}}{\text{य}} + \frac{१}{२}\frac{\text{बय}}{\text{क्ष}^{३}} + \frac{१}{६}\frac{\text{बय}^{३}}{\text{क्ष}^{३}} + \text{इ०}$$

$$\therefore \text{ज्ञ}' - \text{ज्ञ} = \frac{१}{२}\frac{\text{बय}}{\text{क्ष}} + \frac{१}{६}\frac{\text{बय}^{३}}{\text{क्ष}^{३}} + \frac{१}{१६}\frac{\text{बय}^{५}}{\text{क्ष}^{५}} + \text{इ०} \qquad (३)$$

आतां ज्या अर्थी ह्या श्रेणींतलें प्रत्येक पद धन आहे त्या अर्थी (ज्ञ'—ज्ञ) हें धन आहे. ह्यावरून असें सिद्ध होतें कीं, य' हा नेहेमीं ज्ञ पेक्षां मोठा असतो, म्हणजे व्यासकल्पांतील बिंदूचा लक्षक नेहेमीं हैपरबलेच्या कौंसांतील बिंदूच्या लक्षकापेक्षां मोठा असतो.

आणखी जसा जसा क्ष वाढत जाईल; तसतशी वरील समीकरणाच्या उजव्या पेठ्याची किंमत कमी होत जाईल, म्हणून प' आणि प ह्यां मधलें अंतर म्हणजे पप' हें कमीं होत जाईल, म्हणजे, व्यासकल्प सतत हैपरबलेच्या कौंसाजवळजवळ येत जाईल; तथापि तो कौंसास मध्यें कोठें स्पर्श करीत नाहीं; तर अनंत अंतरावर मात्र स्पर्श करितो; कारण, (३) या समीकरणांत क्ष ची किंमत अनंत मानली, तर उजव्या

पेल्याचीं किंमत शून्य होते, म्हणून ज्ञं-ज्ञ=० ह्यास्तव, ज्ञं=ज्ञ. असें झालें म्हणजे व्यासकल्पांतील बिंदूचा लक्षक आणि हैपरबलेच्या कौंसांतील बिंदूचा लक्षक हे दोन्ही एक होतात; म्हणजे, व्यासकल्प हैपरबलेस स्पर्श करितो. तथापि त्याचें स्पर्श करण्याचें स्थान अनंत अंतरावर आहे.

उदाहरणें.

१. बृहदक्ष वाढविला असतां तो प्रधान रेषेस ज्या बिंदूंत छेदितो त्या बिंदूपासून, केंद्रांतून जाणाऱ्या एका ज्येच्या दोहों शेवटांपर्यंत रेषा काढल्या तर त्या रेषा बृहदक्षाशीं सारखे कोन करितात हें सिद्ध कर.

२. पहिल्या उदाहरणांत सांगितलेली ज्या प्रधान रेषेस मिळेपर्यंत वाढविली तर त्या रेघेस, कौंस आणि केंद्र हे अशा रीतीनें छेदितात कीं, त्या रेषेचे खंड गायन प्रमाणांत होतात. हें सिद्ध कर.

३. जर दीर्घ वर्तुळाच्या प्रधान रेषेंतील कोणत्याही एका बिंदूपासून त्या दीर्घवर्तुळास दोन स्पर्शरेषा काढल्या, तर त्यांचीं स्पर्शस्थळें सांधणारी ज्या केंद्रांतून जाते असें सिद्ध कर.

४. जर प्रधान रेषेंतील कोणत्या एका **प** बिंदूपासून दीर्घवर्तुळास **पल** ही एक स्पर्शरेषा काढली व **पइह** ही एक छेदन रेघ काढली, तर दीर्घवर्तुळास छेदन रेघ ज्या दोन बिंदूंत छेदिते त्या दोन बिंदूंपासून प्रत्येक केंद्रापर्यंत रेघा काढल्या तर ह्या दोन रेघांमधल्या कोनास, स्पर्शरेषेच्या स्पर्शस्थलापासून त्या केंद्रापर्यंत काढलेली रेघ समान दुभागते.

५. चवथ्या उदाहरणांत सांगितलेल्या **पइह** छेद-

न रेघेस, स्पर्शरेषेच्या स्पर्शस्थळापासून केंद्रापर्यंत काढलेली रेषा ख स्थळीं छेदिते असें मानलें तर हें सिद्ध कर कीं, हख : खइ : : हप : पइ, म्हणजे पइह ह्या छेदन रेघेचे पइ, इख, आणि खह हे भाग गायन प्रमाणांत आहेत.

६. जर एका दीर्घवर्तुळाच्या स केंद्रांतून पप्र ही एक ज्या काढली तर असें सिद्ध कर कीं, ४सप×सप्र =पप्र×प्रधान केंद्रगलक्षक.

७. प्रधान केंद्रगलक्षकाच्या एका शेवटापासून स्पर्शरेषा काढली; आणि ती नप लक्षक वाढविल्यावर त्यास र स्थळीं मिळाली, तर असें सिद्ध कर कीं, सप =नर.

८. एका दीर्घ वर्तुळाच्या शिरोबिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा काढली आणि त्यांत कोणताही एक बिंदु घेऊन त्यापासून दुसऱ्या शिरो बिंदुपर्यंत एक रेघ काढली व दीर्घ वर्तुळास एक स्पर्शरेषा काढली, तर ह्या स्पर्शरेषेच्या स्पर्शबिंदूच्या लक्षकास दुसऱ्या शिरोबिंदूपर्यंत काढलेली रेघ समान दुभागते हें सिद्ध कर.

९. जर कौंसांतील कोणत्याही एका प बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा काढून ती लघ्वक्षास मिळेतोंपर्यंत वाढविली, आणि बृहदक्षास समांतर अशी प बिंदूपासून पम रेघ काढली, तर हें सिद्ध कर कीं, कम×कह=कब.

१०. आठव्या उदाहरणावरून अशी एक रीति शोधून काढ कीं तिच्या योगानें, दीर्घवर्तुळाच्या कौंसांत एखादा बिंदु सांगितला असतां त्या बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा काढतां येईल.

११. प ह्या कोणत्याही एका बिंदुस्थळीं काढलेली

स्पर्शरेषा, **अ** आणि **अ'** ह्या दोन शिरोबिंदुस्थळीं काढलेल्या स्पर्शरेषांस अनुक्रमें **य** आणि **य'** ह्यांस्थळीं छेदिते असें मानलें; आणि केंद्रांपासून प बिंदुस्थळचे स्पर्शरेषेवर **सक** आणि **हक'** हे लंब काढले तर असें सिद्धकर कीं, **सक×हक'=अय×अ'य'** आहे.

१२. एक नेम अक्षास **ग** स्थळीं छेदितो असें मानलें, आणि **गक** ही रेघ केंद्रांतरावर लंब काढली, तर असें सिद्ध कर कीं, **पक**=$\frac{१}{२}$मधानकेंद्रगलक्षक आहे.

१३. केंद्रांतून जाणाऱ्या कोणत्या एका ज्येच्या दोहों शेवटांशीं स्पर्शरेषा काढल्या, तर त्या परस्परांस लंब होतात हें सिद्ध कर.

१४. दोन पराबलांस एक साधारण अक्ष आहे. तेव्हां जर आंतील पराबलेस कोणतीही एक स्पर्शरेषा काढून ती बाहेरील पराबलेच्या कौंसास मिळेतोंपर्यंत तिला दोहों बाजूंस वाढविली, तर स्पर्श बिंदुस्थळीं त्या स्पर्शरेषेचे दोन समान भाग होतात असें सिद्ध कर.

१५. जर पराबलेच्या केंद्रांतून जाणाऱ्या **पप'** ह्या ज्येच्या दोहों शेवटांशीं **पट** आणि **प'ट** ह्या दोन स्पर्शरेषा काढल्या, आणि जर **पट**=**ब** आणि **प'ट** **क** असला तर त्या पराबलेच्या मधानकेंद्रगलक्षकाची लांबी काय होईल ?

१६. एका हैपरबलेंतील **इ** ह्या कोणत्या एका बिंदूपासून **इगह** ही रेषा बृहदक्षास समांतर केली; आणि ती अतिसन्निध व्यासकल्पास **ग** बिंदूंत छेदिते आणि लघ्वक्षास **ह** बिंदूंत छेदिते असें मानलें, तर हें सिद्ध कर कीं, **इह**^{२}—**गह**^{२}=**अक**^{२}.

१७. (आ० १५). **अइ** ही एक हैपरबला आहे,

कप आणि **कख** हे व्यास कल्प आहेत, तेव्हां हें सिद्ध कर कीं, **पअइग** ह्या आ०—**अक्कखइ** ही आ० =**कअइ** हा वर्तुळ खंड.

१८. एका दीर्घ वर्तुळाचे व्यास व प्रतिव्यास अनुक्रमें १६ आणि १२ आहेत, तर त्या दीर्घवर्तुळाचा प्रधानकेंद्रगलक्षक, क्षेत्रफळ, आणि जे व्यास प्रतिव्यास एकमेकांबरोबर असतील त्यांच्या लांब्या काढ.

१९. कागदावर अशी एक परावला काढ कीं तिचा पाया १२ होईल आणि उंची ९ होईल.

२०. एका परावलेचा पाया १२ आहे आणि तिची उंची ९ आहे, तर तिच्या प्रधानकेंद्रगलक्षकाची लांबी काय होईल; व तिच्या ज्या बिंदूंचे अवच्छेदक २,३,५, असतील त्या बिंदूंचे लक्षक काय येतील ?

२१. बृहदक्ष आणि केंद्रांतून जाणारी ज्या ह्यांचा गुणाकार, जो व्यास त्या ज्येशीं समांतर असेल त्याच्या वर्गाबरोबर आहे असें सिद्ध कर.

२२. दीर्घवर्तुळाच्या किंवा हैपरबलेच्या दोहों केंद्रांतून ज्या काढल्या तर त्या ज्या, त्यांच्याशीं जे व्यास समांतर असतात त्यांच्या वर्गांच्या प्रमाणांत असतात असें सिद्ध कर.

२३. परावलेच्या केंद्रांतून ज्या काढल्या तर त्या, आपल्या प्रतिव्यासाच्या केंद्रगलक्षकांच्या प्रमाणांत असतात असें सिद्ध कर.

२४. परावलेस तीन स्पर्शरेषा करून त्यापैकीं दोहों दोहोंच्या छेदनानें त्रिकोण पाडला, तर त्या त्रिकोणासभोंवतीं वर्तुळ केलें असतां तें केंद्रांतून जातें. हें सिद्ध कर.

२५. परावलेंतील **क** आणि **इ** ह्या बिंदुस्थळीं

कड आणि डइ ह्या दोन स्पर्शरेषा काढल्या आणि त्या ड बिंदूंत मिळाल्या; व तिसरी एक स्पर्शरेषा काढली ती त्या दोन्ही स्पर्शरेषांस ग आणि ह ह्यां स्थळीं छेदिते आणि परावलेस ए स्थळीं स्पर्शिते; तर असें सिद्ध कर कीं, ज्याप्रमाणें क आणि इ हे बिंदु गह रेघेच्या एकाच बाजूला किंवा निरनिराळ्या बाजूला असतील त्याप्रमाणें

डग×डइ ± डक×डह = डक×डइ होईल.

२६. एका परावलेस डक आणि डइ ह्या दोन स्पर्शरेषा काढल्या त्या ड बिंदूंत मिळतात; आणि स्पर्शस्थळें सांधून जी कइ रेघ केली तिच्याशीं समांतर अशी एक स्पर्शरेषा काढली आहे; तर ही स्पर्शरेषा डक आणि डइ ह्यांस समान दुभागिते असें सिद्ध कर.

२७. एका दीर्घवर्तुळास पट ही एक स्पर्शरेषा काढली, तर अअ' चे क आणि ट ह्या दोन बिंदूंनीं जे भाग पडतात ते गायनप्रमाणांत असतात असें सिद्ध कर.

२८. एका दीर्घवर्तुळाच्या प्रधान रेषेंतील ट बिंदूपासून टक्ष ही एक स्पर्शरेषा काढली, आणि टइह ही एक छेदन रेघ काढली ती अशी कीं ती दीर्घवर्तुळाच्या कौंसास इ आणि ह ह्यां स्थळीं छेदिते; आणि क्ष स सांधले तर असें सिद्ध कर कीं क्षस रेघ इसह कोनास समान दुभागिते.

२९. मागल्या उदाहरणांत सांगितल्याप्रमाणें आकृति काढून इह सांधले, आणि क्षस रेघेस इह रेघ ख स्थळीं छेदिते असें मानलें; तर हें सिद्ध कर कीं, ट आणि ख ह्या दोन बिंदूंनीं टह रेघेचे जे भाग पडतात ते गायन प्रमाणांत असतात.

३०. एका दीर्घवर्तुळाच्या केंद्रांतून ज्या काढली, तर केंद्रस्थळीं तिचे असे दोन भाग होतात कीं, त्या भागांच्या गुणाकाराची चौपट, ती ज्या आणि केंद्रगलक्षक ह्यांच्या गुणाकारा बरोबर होते, असें सिद्ध कर.

३१. जर **पपं** ही परावलेच्या केंद्रांतून जाणारी अशी एक ज्या असेल, आणि प्रधानकेंद्रगलक्षकाची लांबी (**ल**) असेल, तर असें सिद्ध कर कीं, $\frac{\text{७}}{\text{सप}} + \frac{\text{१}}{\text{सपं}} = \frac{\text{२}}{\text{ल}}$

३२. परावलेंत कोणत्या एका व्यासाचा केंद्रगलक्षक, त्याच व्यासाच्या शिरोबिंदूपासून केंद्रापर्यंत जें अंतर त्याच्या चौपटी बरोबर असतो, हें सिद्ध कर.

३३. जर परावलेंतील **प** आणि **क्र** ह्या दोन बिंदुस्थळीं स्पर्शरेषा काढल्या असतां त्या परस्परांस **ट** बिंदूंत छेदितात, आणि **प** आणि **क्र** हे बिंदु सांधले असतां **पक्र** रेघ **प** स्थळीं नेम होते; तर **पट** रेघेस प्रधानरेषा समान दुभागिते असें सिद्ध कर.

३४. एका दीर्घवर्तुळांत एक समभुजषट्कोन असा काढला कीं त्याच्या दोन्हीं बाजू बृहदक्षाशीं समांतर होतात, त्याची एक बाजू **ब** आहे; आणखी बृहदक्षास व्यास कल्पून त्यावर एक वर्तुळ काढून त्यांत एक समभुजषट्कोन काढला आहे, त्याची एक बाजू **बं** आहे. आतां जर दीर्घवर्तुळाचें केंद्रवैषम्य (**के**) असेल तर असें सिद्ध कर कीं, $\text{ब} : \text{बं} :: \text{४}—\text{२के}^{\text{२}} : \text{४}—\text{के}^{\text{२}}$.

३५. दीर्घवर्तुळाच्या मध्यापासून त्याच्या कौंसापर्यंत दोन रेघा अशा काढल्या कीं त्या परस्परांशीं काटकोन करितील; व त्यांच्या लांब्या (**ल**) आणि (**लं**)

आहेत, तर असें सिद्ध कर कीं, $\frac{१}{\text{ल}^{२}}+\frac{१}{\text{ल}'^{२}}=\frac{१}{\text{य}^{२}}+\frac{१}{\text{ब}^{२}}$

(एथें य म्हणजे बृहदक्ष आणि ब म्हणजे लघ्वक्ष)

३६. पराबलेचा अक्ष, स्पर्शरेषा अक्षाशीं जो कोन करिते तो, व स्पर्श बिंदु हीं सांगितलीं आहेत; तर पराबलेची आकृति कशी काढावी ?

३७. एक दीर्घवर्तुळ घेऊन त्याच्या लघ्वक्षाच्या दोहों शेवटांस स्पर्श करील असा एक चौरस काढला, व बृहदक्षावर असें एक नवें दीर्घवर्तुळ त्या चौरसा भोंवतालीं काढलें कीं, तें त्यास बाहेरून सल्लग्न होईल. पुन्हा त्याचप्रमाणें ह्या नव्या दीर्घवर्तुळास केलें. ह्याप्रमाणें (न + १) इतकीं दीर्घवर्तुळें येईत तोंपर्यंत करीत गेलों तर ह्यापासून असें सिद्ध कर कीं, जर पहिल्या दीर्घवर्तुळाचें केंद्र वैषम्य $\sqrt{\frac{\text{न}}{\text{न}+१}}$ इतकें असलें, तर अगदीं शेवटीं काढलेलें दीर्घवर्तुळ होतें.

३८. प्रधान रेषा आणि पराबलेच्या कौंसांतील दोन बिंदु हीं सांगितलीं आहेत, त्यापासून पराबलेची आकृति काढ.